Г. О. Михалін
НПУ імені М.П. Драгоманова
С. Л. Надточій, А. О. Костюченко
ЧДПУ імені Т.Г. Шевченка

ПРО КІЛЬКІСТЬ НЕРУХОМИХ ТОЧОК ПЕРЕСТАНОВОК, ЧИСЛО *e* ТА ІНДИВІДУАЛЬНИЙ ПІДХІД У НАВЧАННІ ЕЛЕМЕНТІВ СТОХАСТИКИ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

Вступ. У роботі [1], зокрема, розкрито взаємозв'язки між поняттями диференціація, інтеграція та індивідуалізація навчання, диференційований, інтегрований та індивідуальний підходи у навчанні. Тут підкреслено, що індивідуальний підхід у навчанні полягає у використанні індивідуалізації навчання, а остання пов'язана із врахуванням індивідуальних особливостей усіх учасників процесу навчання шляхом диференціації та інтеграції цілей, змісту, методів, засобів та організаційних форм навчання.

У даній статті буде проілюстровано реалізацію індивідуального підходу у навчанні теорії ймовірностей і математичної статистики майбутніх учителів математики.

1. Поняття нерухомої точки та кількості нерухомих точок перестановки. Розглянемо простір Ω_n, елементарними подіями якого є усілякі перестановки попарно різних елементів $a_1, a_2, ..., a_n$ (наприклад, $a_i = i,\ i \in \overline{1,n}$). Зокрема, $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \Omega_n$ і цю *перестановку* називатимемо *початковою*.

Вважатимемо, що простір подій S_n є найширшим з можливих і на цьому просторі задано міру $\mu(A)$ – кількість перестановок у множині $A \in S_n$, а ймовірнісна міра $P_n(A),\ A \in S_n$, визначається рівністю

$$P_n(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega_n)} = \frac{\mu(A)}{n!},\ \ A \in S_n. \tag{1}$$

Візьмемо довільну фіксовану перестановку $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega_n$. Якщо координата $x_k = a_k$, то цю координату називають *нерухомою точкою* даної перестановки (ця координата така сама, як у початковій перестановці $(a_1, a_2, ..., a_n)$). Отже, кожній перестановці $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega_n$ можна поставити у відповідність число $Y_n = Y_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ – *кількість нерухомих точок перестановки* $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Побудований простір (Ω_n, S_n, P_n) відображає базовий рівень, поняття нерухомої точки перестановки та функція $Y_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ – основний рівень, а задачі типу: знайти кількість розв'язків рівняння $Y_n(x_1, x_2, ..., x_n) = k$ – поглиблений рівень знань та умінь майбутніх учителів математики.

Зрозуміло, що $Y_n(x),\ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega_n$, є простою випадковою величиною (стосовно побудованого ймовірнісного простору (Ω_n, S_n, P_n)), яка тісно пов'язана з індикаторами $X_{n,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ подій $A_{n,k} = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega_n : x_k = a_k\}$ – „k-та координата перестановки $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega_n$ є нерухомою точкою". Ці індикатори визначаються рівностями

$$X_{n,k}(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 1,\ \ \textit{якщо}\ \ x_k = a_k, \\ 0,\ \ \textit{якщо}\ \ x_k \neq a_k,\ \ k \in \overline{1,n}, \end{cases}$$

а тому $Y_n(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{k=1}^{n} X_{n,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Виявлення та обґрунтування вказаного зв'язку між функціями Y_n та $X_{n,k}$ відображають основний рівень знань майбутніх учителів математики.

2. Ймовірність $P_n(B_n)$ події $B_n = \sum_{k=1}^{n} A_{n,k}$ і число *e*. Подія $B_n = \sum_{k=1}^{n} A_{n,k}$ полягає у тому, що навмання вибрана перестановка $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega_n$ має принаймні одну нерухому точку. Для того, щоб знайти ймовірність $P_n(B_n)$, слід знати, як знайти ймовірність суми подій, що не обов'язково є попарно несумісними. Відповідна формула для двох доданків:

$$P_n(A_1 + A_2) = P_n(A_1) + P_n(A_2) - P_n(A_1 A_2)$$

відображає базовий рівень знань та умінь майбутнього учителя математики, формула для трьох доданків

$$P_n\left(\sum_{i=1}^{3} A_i\right)=\sum_{i=1}^{3} P_n(A_i)-\sum_{1\le i<j\le 3} P_n(A_i A_j)+\sum_{1\le i<j<k\le 3} P_n(A_i A_j A_k)$$

відображає основний рівень його знань та умінь, а задача: знайти формулу для обчислення ймовірності суми довільних подій A_k, $k\in\overline{1,n}$, з даного ймовірнісного простору можна віднести до задач поглибленого рівня.

Розв'язання цієї задачі передбачає використання аналогій, за допомогою яких формулюється гіпотеза:

$$P_n\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P_n(A_i)-\sum_{1\le i_1<i_2\le n} P_n(A_{i_1} A_{i_2})+\sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n} P_n(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3})-\ldots+$$

$$+(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} P_n\left(\prod_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)+\ldots+(-1)^{n-1} P_n\left(\prod_{j=1}^{n} A_j\right), \qquad (2)$$

у правильності якої можна переконатися за методом математичної індукції.

Отже, для обчислення ймовірності $P_n(B_n)$ слід знати, як обчислити ймовірності $P_n\left(\prod_{j=1}^{k} A_{n,i_j}\right)$.

Для кожного фіксованого $k\in\overline{1,n}$ подія $\prod_{j=1}^{k} A_{n,i_j}$ полягає у тому, що у перестановці $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\Omega_n$ координати з номерами i_j, $j\in\overline{1,k}$, є нерухомими точками, а інші $(n-k)$ координат утворюють перестановки елементів з множини $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}\setminus\{a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_k}\}$. Тому кількість елементів у події $\prod_{j=1}^{k} A_{n,i_j}$ дорівнює $(n-k)!$. Звідси, згідно з формулою (1), маємо:

$$P_n\left(\prod_{j=1}^{k} A_{n,i_j}\right)=\frac{(n-k)!}{n!}.$$

Зрозуміло, що кількість доданків у сумі $\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} P_n\left(\prod_{j=1}^{k} A_{n,i_j}\right)$ дорівнює $C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!k!}$, а тому $\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} P_n\left(\prod_{j=1}^{k} A_{n,i_j}\right)=\frac{(n-k)!}{n!}\cdot\frac{n!}{(n-k)!k!}=\frac{1}{k!}$, $k\in\overline{1,n}$.

Отже, згідно з формулою (2), дістаємо

$$P_n(B_n)=P_n\left(\sum_{k=1}^{n} A_{n,k}\right)=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}.$$

Оскільки права частина останньої рівності є частинною сумою ряду $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{i!}$, то, згадуючи формулу $e^x=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}$, дістаємо $e^{-1}=1-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{i!}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{i!}=1-e^{-1}$. Звідси випливає, що $\lim_{n\to\infty} P_n(B_n)=1-e^{-1}$, а тому

$$e=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-P_n(B_n)} \qquad (3)$$

За ознакою Лейбніца збіжності знакопочережного ряду маємо, що абсолютна похибка Δ_n наближення $1-e^{-1}\approx P_n(B_n)$ не перевищує $\frac{1}{(n+1)!}$, тобто $0<\Delta_n\le\frac{1}{(n+1)!}$. Зокрема,

$$0<\Delta_5\le\frac{1}{6!}=\frac{1}{720}<0{,}0014<10^{-2},$$

$$0<\Delta_{10}\le\frac{1}{11!}=\frac{1}{39916800}<10^{-7},$$

$0 < \Delta_{20} \le \frac{1}{21!} < 10^{-19}$,

$0 < \Delta_{50} \le \frac{1}{51!} < 10^{-66}$,

а тому $P_5(B_5) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \approx 0{,}633 \approx 1 - e^{-1}$ з точністю Δ_5;

$P_{10}(B_{10}) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} - \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} - \frac{1}{10!} \approx 0{,}63212054 \approx 1 - e^{-1}$ з точністю Δ_{10};

$P_{20}(B_{20}) = 1 - \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{19!} - \frac{1}{20!} \approx 0{,}6321205588\,2855767839 \approx 1 - e^{-1}$ з точністю Δ_{20};

$P_{50}(B_{50}) = 1 - \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{49!} - \frac{1}{50!} = 0{,}63212\ldots \approx 1 - e^{-1}$ з точністю Δ_{50}.

Звідси дістаємо наближені значення числа e:

$e \approx \frac{1}{1 - P_5(B_5)} \approx 2{,}72$ з точністю 10^{-2},

$e \approx \frac{1}{1 - P_{10}(B_{10})} \approx 2{,}718282$ з точністю 10^{-6},

$e \approx \frac{1}{1 - P_{20}(B_{20})} \approx 2{,}7182818284\,59045235$ з точністю 10^{-18},

$e \approx \frac{1}{1 - P_{50}(B_{50})}$ з точністю 10^{-65}.

3. Перевірка ефективності ймовірнісної моделі (Ω_n, S_n, P_n) відносно події B_n здійснюється шляхом проведення N послідовних незалежних випробувань, кожне з яких полягає у виборі навмання перестановки $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega_n$ і перевірки, чи має ця перестановка нерухомі точки. Якщо для кожного k-го випробування підрахувати статистичну ймовірність $P^*_{n,k}(B_n) = \frac{s_{n,k}(B_n)}{k}$ ($s_{n,k}(B_n)$ – кількість відбувань події B_n у k випробуваннях) та середнє арифметичне $C^*_{n,k}(B_n) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} P^*_{n,j_i}(B_n)$, то, згідно з роботою [2] (див. також [3]), одним з критеріїв ефективності ймовірнісної моделі (Ω_n, S_n, P_n) є співвідношення $\lim_{k\to\infty} C^*_{n,k}(B_n) = P_n(B_n)$, тобто для всіх досить великих номерів k числа $C^*_{n,k}(B_n)$ повинні досить мало відрізнятися від числа $P_n(B_n)$, а тому (при досить великих n) і від числа $1 - e^{-1}$, тобто $C^*_{n,k}(B_n) \approx P_n(B_n) \approx 1 - e^{-1}$.

Зауважимо, що у роботі [4] експериментально перевірялося наближення $P^*_{n,k_i}(B_n) \approx P_n(B_n)$, хоча відомо, що при $k_i \to \infty$ послідовність $P^*_{n,k_i}(B_n)$ не обов’язково збігається до $P_n(B_n)$ (див., наприклад, [3]).

Наведемо **алгоритм перевірки ефективності ймовірнісної моделі (Ω_n, S_n, P_n):**

1. Задати кількість випробувань N, які треба провести.
2. Задати кількість n координат у початковій перестановці $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, вважаючи, що $a_i = i,\ i \in \overline{1,n}$.
3. Підрахувати $E = \frac{2}{(n+1)!}$ – еталон похибки наближення $P^*_{n,k}(B_n) \approx 1 - e^{-1}$.
4. Утворити усілякі перестановки набору $(1,2,\ldots,n)$ та занумерувати їх: $x(k) = (a(k,1), a(k,2), \ldots a(k,n))$, $a(k,i) \in \overline{1,n}$, $a(k,i) \ne a(k,j),\ i \ne j,\ i \in \overline{1,n},\ j \in \overline{1,n}$.
5. Покласти: $m = 0$ – кількість проведених випробувань;

   $s = 0$ – кількість елементарних подій, що сприяють B_n;

   $SP = 0$ – сума статистичних ймовірностей $P^*_{n,k}(B_n),\ k \in \overline{1,m}$;

$mP(i) = 0,\ i \in \overline{1, N},$ – кількість значних (більших за $E = \dfrac{2}{(n+1)!}$) відхилень $P^*_{n,k}(B_n)$ від $1 - e^{-1},\ k \in \overline{1, i}$;

$mC(i) = 0,\ i \in \overline{1, N},$ – кількість значних відхилень $C^*_{n,k}(B_n)$ від $1 - e^{-1},\ k \in \overline{1, i}$.

6. Включити генератор рівномірно розподілених випадкових чисел $k \in \overline{1, n!}$ та вибрати одне з таких чисел k.
7. Покласти $m := m + 1$ – накопичення кількості проведених випробувань.
8. Якщо серед координат перестановки $(a(k,1), a(k,2), ... a(k,n))$ принаймні одна координата $a(k,i) = i$, то покласти $s := s + 1$.
9. Обчислити: $P(m) = \dfrac{s}{m}$; $SP := SP + P(m)$; $C(m) = \dfrac{SP}{m}$.
10. Якщо $\left|P(m) - 1 + e^{-1}\right| > E$, то покласти $mP(m) := mP(m) + 1$ – накопичення кількості значних відхилень $P^*_{n,k}(B_n)$ від $1 - e^{-1}$.
11. Якщо $\left|C(m) - 1 + e^{-1}\right| > E$, то покласти $mC(m) := mC(m) + 1$ – накопичення кількості значних відхилень $C^*_{n,k}(B_n)$ від $1 - e^{-1}$.
12. Якщо $m < N$, перейти до пункту 6 – продовження випробувань для вибраного n.
13. Задати кількість kd даних, які треба вивести (на екран або роздрукувати).
14. Задати номери $nd(i),\ i \in \overline{1, kd},$ тих даних, які треба вивести (на екран або роздрукувати).
15. Вивести (на екран або роздрукувати):
„кількість координат: n =” n
$nd(i),\ P(nd(i)),\ mP(nd(i)),\ C(nd(i)),\ mC(nd(i))$ для $i \in \overline{1, kd}$.
16. Задати наступну кількість n координат у початковій перестановці $(a_1, a_2, ..., a_n)$.
17. Якщо $n > 0$, перейти до пункту 3.
18. Закінчити роботу.

Якщо, наприклад, роздрукувати результати кожного 200-го випробування з числа $N = 5000$ випробувань, то таблиця результатів роботи комп'ютерної програми, за якою реалізується запропонований алгоритм, може мати вигляд таблиці 1.

Таблиця 1

m	$n = 5$			
	$P^*_m(B_5)$	mP^*	$C^*_m(B_5)$	mC^*
200	0,65	190	0,62611	199
400	0,6225	375	0,63129	299
600	0,64667	568	0,63207	391
800	0,635	763	0,63354	415
1000	0,636	919	0,63384	611
1200	0,63583	1058	0,63396	811
1400	0,63143	1224	0,63422	1011
1600	0,62562	1405	0,63352	1211
1800	0,63389	1498	0,6332	1214
2000	0,6325	1572	0,6332	1214
2200	0,63545	1744	0,63331	1214
2400	0,63292	1934	0,63345	1214
2600	0,62692	2109	0,63305	1214
2800	0,62429	2309	0,63245	1214
3000	0,63033	2509	0,63214	1214
3200	0,63	2696	0,63199	1214
3400	0,63	2877	0,63187	1214
3600	0,6275	3077	0,6317	1214
3800	0,62842	3277	0,63146	1214
4000	0,62825	3477	0,63127	1214

4200	0,63238	3595	0,63124	1214
4400	0,63205	3595	0,63129	1214
4600	0,63261	3596	0,63131	1214
4800	0,63167	3596	0,63135	1214
5000	0,6334	3596	0,63139	1214

Реалізація наведеного алгоритму мовою програмування Object Pascal в середовищі Delphi є ілюстрацією інтеграції навчання, як невід'ємної складової індивідуального підходу у навчанні теорії ймовірностей і математичної статистики майбутніх учителів математики та інформатики.

Нижче наведено фрагменти тексту програми мовою Object Pascal. Результати роботи за цією програмою наведено у таблицях 1-4. Аналізуючи ці результати, можна прийти до таких **висновків**:

1. Реалізувати пункт 4 наведеного алгоритму, тобто утворити масив всіх можливих перестановок координат, для великої кількості координат (*n*>10) виявилося неможливим через велику їх кількість та обмежену оперативну пам'ять комп'ютера (програма видає повідомлення «Out of memory» – *нестача пам'яті*). Тому у програмі передбачено два варіанти (рис. 1): I – утворення масиву перестановок (із можливістю його збереження та використання в подальшому – пункт меню «Перестановки» має дві опції: «Зберегти» та «Завантажити») та випадковий вибір однієї з них при кожному випробуванні (фрагмент 1); II – формування із початкової перестановки $(1,2,\ldots,n)$ випадкової перестановки при кожному випробуванні (фрагмент 2).
2. Для невеликої кількості координат (наприклад, *n*=5) кількість значних відхилень $C^*_{n,k}(B_n)$ від $1-e^{-1}$ (у таблицях – останній стовпчик mC^*) при збільшенні *k* практично перестає збільшуватися. Це говорить про стабілізацію чисел $C^*_{n,k}(B_n)$.
3. Для більшої кількості координат (*n*≥10) практично при кожному випробуванні $\left|C^*_{n,k}(B_n)-1+e^{-1}\right| > E = \dfrac{2}{(n+1)!}$. Разом з тим, можна говорити про стабілізацію $C^*_{n,k}(B_n)$ при зростанні *k*.
4. Кількість же відхилень $P^*_{n,k}(B_n)$ від $1-e^{-1}$ зростає, як правило, і при $k \to \infty$ (навіть при *n*=5). Тобто, можна говорити, що ефективність ймовірнісної моделі $\langle \Omega_n, S_n, P_n \rangle$ підтверджується поведінкою середніх арифметичних $C^*_{n,k}(B_n) = \dfrac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} P^*_{n,j_i}(B_n)$ та не підтверджується поведінкою статистичних ймовірностей $P^*_{n,k}(B_n) = \dfrac{s_{n,k}(B_n)}{k}$

Таблиця 2

m	$n=10$			
	$P^*_m(B_{10})$	mP^*	$C^*_m(B_{10})$	mC^*
200	0,655	200	0,63657	200
400	0,6575	400	0,6505	400
600	0,64667	600	0,65123	600
800	0,645	800	0,65	800
1000	0,649	1000	0,64953	1000
1200	0,64333	1200	0,64875	1200
1400	0,64857	1400	0,64842	1400
1600	0,64438	1600	0,64817	1600
1800	0,63833	1800	0,64739	1800
2000	0,6385	2000	0,64648	2000
2200	0,63455	2200	0,6455	2200
2400	0,63	2400	0,64432	2400
2600	0,63154	2600	0,64325	2600
2800	0,63036	2800	0,64239	2800
3000	0,63233	3000	0,64161	3000
3200	0,63469	3200	0,64104	3200
3400	0,63382	3400	0,64059	3400
3600	0,63111	3600	0,64013	3600
3800	0,62947	3800	0,63956	3800
4000	0,6285	4000	0,639	4000
4200	0,62619	4200	0,6385	4200
4400	0,62568	4400	0,63794	4400
4600	0,6263	4600	0,63747	4600

Таблиця 3

m	$n=20$			
	$P^*_m(B_{20})$	mP^*	$C^*_m(B_{20})$	mC^*
200	0,6	200	0,63649	200
400	0,6275	400	0,62859	400
600	0,655	600	0,63176	600
800	0,64125	800	0,63657	800
1000	0,635	1000	0,63813	1000
1200	0,63	1200	0,6371	1200
1400	0,625	1400	0,636	1400
1600	0,63313	1600	0,6354	1600
1800	0,63167	1800	0,63486	1800
2000	0,638	2000	0,6348	2000
2200	0,63864	2200	0,63511	2200
2400	0,63958	2400	0,63544	2400
2600	0,635	2600	0,63549	2600
2800	0,63286	2800	0,63536	2800
3000	0,63433	3000	0,63531	3000
3200	0,63594	3200	0,63536	3200
3400	0,63941	3400	0,63554	3400
3600	0,63944	3600	0,63579	3600
3800	0,63789	3800	0,63598	3800
4000	0,63775	4000	0,63611	4000
4200	0,63905	4200	0,63621	4200
4400	0,63864	4400	0,63628	4400
4600	0,63826	4600	0,63638	4600

4800	0,62125	4800	0,63688	4800
5000	0,6214	5000	0,63626	5000
5200	0,62423	5200	0,63573	5200
5400	0,62611	5400	0,63534	5400
5600	0,625	5600	0,63499	5600
5800	0,62569	5800	0,63467	5800
6000	0,62567	6000	0,63434	6000
6200	0,62613	6200	0,63406	6200
6400	0,62641	6400	0,63383	6400
6600	0,62712	6600	0,63362	6600
6800	0,62824	6800	0,63345	6800
7000	0,628	7000	0,63329	7000
7200	0,62917	7200	0,63317	7200
7400	0,62986	7400	0,63307	7400
7600	0,63013	7600	0,63299	7600
7800	0,62885	7800	0,6329	7800
8000	0,62925	8000	0,63279	8000

4800	0,63896	4800	0,63646	4800
5000	0,6402	5000	0,63659	5000
5200	0,63865	5200	0,63668	5200
5400	0,63667	5400	0,6367	5400
5600	0,635	5600	0,63665	5600
5800	0,63431	5800	0,63658	5800
6000	0,63283	6000	0,63649	6000
6200	0,63452	6200	0,63641	6200
6400	0,63422	6400	0,63636	6400
6600	0,63273	6600	0,63629	6600
6800	0,63147	6800	0,63616	6800
7000	0,63057	7000	0,63602	7000
7200	0,63111	7200	0,63588	7200
7400	0,62932	7400	0,63573	7400
7600	0,62882	7600	0,63555	7600
7800	0,63026	7800	0,6354	7800
8000	0,6315	8000	0,6353	8000

Таблиця 4

m	$n = 50$			
	$P_m^*(B_{50})$	mP^*	$C_m^*(B_{50})$	mC^*
200	0,68	200	0,73633	200
400	0,6425	400	0,69201	400
600	0,63	600	0,67183	600
800	0,62375	800	0,66083	800
1000	0,623	1000	0,65289	1000
1200	0,61833	1200	0,64728	1200
1400	0,62786	1400	0,64402	1400
1600	0,62938	1600	0,6425	1600
1800	0,62667	1800	0,64107	1800
2000	0,6255	2000	0,63963	2000
2200	0,62727	2200	0,63845	2200
2400	0,62833	2400	0,63756	2400
2600	0,63115	2600	0,63689	2600
2800	0,62929	2800	0,63642	2800
3000	0,62867	3000	0,63597	3000
3200	0,63031	3200	0,6356	3200
3400	0,62853	3400	0,63527	3400
3600	0,62944	3600	0,6349	3600
3800	0,62763	3800	0,63465	3800
4000	0,631	4000	0,63437	4000
4200	0,63381	4200	0,63432	4200
4400	0,63023	4400	0,63421	4400
4600	0,63022	4600	0,63407	4600
4800	0,63083	4800	0,63392	4800
5000	0,6298	5000	0,63378	5000
5200	0,62808	5200	0,63359	5200
5400	0,62926	5400	0,63339	5400
5600	0,62982	5600	0,63324	5600
5800	0,63069	5800	0,63312	5800
6000	0,629	6000	0,63301	6000
6200	0,62903	6200	0,63287	6200
6400	0,62953	6400	0,63276	6400
6600	0,63015	6600	0,63267	6600
6800	0,62912	6800	0,63258	6800
7000	0,62957	7000	0,6325	7000
7200	0,63028	7200	0,63243	7200
7400	0,62919	7400	0,63237	7400
7600	0,62934	7600	0,63229	7600
7800	0,62962	7800	0,63221	7800
8000	0,6295	8000	0,63215	8000

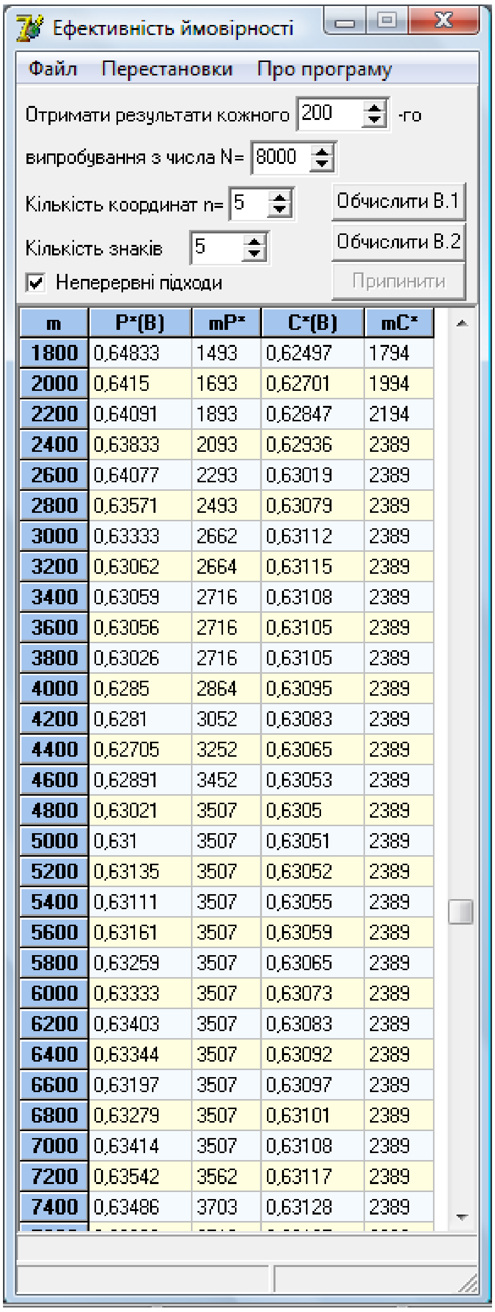

Рис. 1

Фрагмент 1.

```
    {за процедурою генеруються всі перестановки n координат, які
заносяться в список змінної st}
    procedure Permutations(n : Integer; st : TStrings; f : Double);
    Var a, p : String;
        k : Char;
        i : Integer;
     Procedure Perm(i : Integer);
     Var j : Integer;
         s : String;
     Begin
       Application.ProcessMessages;
       If flStop Then
        Begin
          StCount:=0;
          Exit;
        End;
       If i=n Then
        Begin
          s:='';
          For j:=1 To n Do
           s:=s+a[ord(p[j])-32];
          st.Add(s);

       FMain.Sb.Panels[1].Text:=FloatToStrF((100*(St.Count))/f,
       ffGeneral,6,0)+' %';
        End
        Else Begin
          For j:=i+1 To n Do
           Begin
             Perm(i+1);
             k:=p[i];
             p[i]:=p[j];
             p[j]:=k;
           End;
         Perm(i+1);
         k:=p[i];
         For j:=i To n-1 Do p[j]:=p[j+1];
         p[n]:=k;
        End;
     End;
    Begin
      StCount:=n;
      f:=f/(n+1);
      p:='';
      For i:=1 To n Do
       p:=p+chr(32+i);
      a:=p;
      Perm(1);
    End;
    {Процедура виконання експерименту за першим варіантом}
    Procedure TFMain.Experenet1(KolKart, KolExp : Integer; E : Double;
     St : TStrings; Var Pm,mPm,Cm,mCm,SP : Double; var s,m : Integer);
    var nomst: string;
        i : Integer;
        k : Int64;
        j,sovp : Integer;
    Begin
      {Цикл, який реалізуватиме проведення необхідної кількості
експериментів}
      For j:=1 to KolExp Do
       Begin
        sovp:=0;
        m:=m+1;
        {Вибір випадкової перестановки з масиву і перевірка наявності
нерухомих точок}
        k:=random(St.Count-1);
        nomst:=St[k];
```

```
      For i:=1 To Length(nomst) Do
      Begin
       If i=ord(nomst[i])-32 Then sovp:=sovp+1;
       End;
      If sovp<>0 Then s:=s+1;
      Application.ProcessMessages;
      If flStop Then Exit;
      PB.Position:=PB.Position+1;
      Pm:=s/m;
      SP:=SP+Pm;
      Cm:=SP/m;
      If Abs(Pm-1+Exp(-1))>E Then mPm:=mPm+1;
      If Abs(Cm-1+Exp(-1))>E Then mCm:=mCm+1;
     End;
  End;
```

Фрагмент 2.

```
  {Процедура виконання експерименту за другим варіантом. Відбувається
генерування випадкової перестановки для окремого випробування}
  Procedure TFMain.Experenet(KolKart, KolExp : Integer; E : Double;
                 Var Pm,mPm,Cm,mCm,SP : Double; var s,m : Integer);
  var nomst: string;
      i,k,n: Integer;
      j,sovp : Integer;
  Begin
    nomst:='';
    {Цикл, який реалізуватиме проведення необхідної кількості
експериментів}
    For j:=1 to KolExp Do
     Begin
      sovp:=0;
      m:=m+1;
      {Створення псевдорядка, початкової перестановки}
      For i:=1 To KolKart Do
       nomst:=nomst+chr(32+i);
      {Генерування випадкової перестановки і перевірка наявності
нерухомих точок}
      For i:=1 To KolKart Do
       Begin
        k:=random(length(nomst))+1;
        n:=ord(nomst[k])-32;
        delete(nomst,k,1);
        If n=i Then sovp:=sovp+1;
        Application.ProcessMessages;
        If flStop Then Exit;
       End;
      PB.Position:=PB.Position+1;
      If sovp<>0 Then s:=s+1;
      Pm:=s/m;
      SP:=SP+Pm;
      Cm:=SP/m;
      If Abs(Pm-1+Exp(-1))>E Then mPm:=mPm+1;
      If Abs(Cm-1+Exp(-1))>E Then mCm:=mCm+1;
     End;
  End;
```

ЛІТЕРАТУРА

1. Михалін Г. О., Надточій С. Л. Структурно-логічні схеми взаємозв’язків між поняттями, що розкривають сутність індивідуального підходу у навчанні // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнар. зб. наук. робіт. – Вип. 29. – Донецьк: Вид-во ДонНУ, 2008. – 144 с. – С. 88-94.

2. Жалдак М. І., Михалін Г. О., Деканов С. Я. Одне узагальнення поняття границі функції та деякі його застосування // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія № 2. Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць / Редрада. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2007. – № 5 (12). – С. 3-9.

3. Жалдак М. І., Михалін Г. О. Про коректність введення понять „випадкова подія”, „ймовірність” та „випадкова величина” у шкільному курсі математики // Науковий часопис

НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія № 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць / Редрада. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2008. – № 6 (13). – С. 3-12.

4. Коваленко Д. О. Число „*e*", як результат серії експериментів // У світі математики: Укр. матем. журнал для школярів. – 1999. – Т. 5. – Вип. 2. – С. 31-32.