Н. О. Бугаєць
Ніжинський державний університет ім. М. В. Гоголя

Використання педагогічного програмного засобу GRAN-2D під час розв'язування задач на побудову в шкільному курсі планіметрії

Геометричні побудови – одна з провідних змістовних ліній шкільного курсу геометрії. Учням доводиться виконувати їх при вивченні всього курсу геометрії, а працівникам різних галузей (інженерам-конструкторам, геодезистам, архітекторам, кравцям, столярам, будівельникам та ін.) в майбутній практичній діяльності.

Більшість задач на побудову розв'язується нестандартними методами й при їх розв'язуванні значно меншою мірою може бути використаний деякий алгоритм. Саме ці задачі мають значну дидактичну цінність, оскільки їх розв'язування більше, ніж розв'язування інших математичних задач, сприяє розвитку таких рис учнів, як кмітливість, винахідливість, оригінальність, гнучкість мислення, уважність, спостережливість, формує навички евристичної діяльності.

Процес розв'язування задач на побудову складається з чотирьох етапів: аналіз, побудова, доведення, дослідження.

Основними методами розв'язування задач на побудову є: метод геометричних місць точок, методи геометричних перетворень (симетрії, повороту, гомотетії, паралельного перенесення), алгебраїчний метод. [6, 276]

Для розв'язування задач на побудову досить ефективним є використання педагогічного програмного засобу (ППЗ) GRAN-2D. Наявність інструментів для побудови відрізків, прямих і кіл, для чого традиційно використовувались лінійка і циркуль, забезпечує можливості виконання різноманітних геометричних побудов. Це значно полегшує роботу учням, дає змогу виконувати креслення виразніше, точніше та акуратніше. А час, зекономлений при виконанні побудов за рахунок використання комп'ютерних аналогів необхідного інструментарію, учні можуть використати для дослідження побудованих конфігурацій геометричних фігур, для розвитку геометричної інтуїції, конструкторських здібностей. З потрібною точністю можна перевірити отримані результати обчислень та побудов, відповідність гіпотез, умови існування розв'язків та раціональність шляхів їх пошуку. Саме тому дана програма є потужним інструментом проведення комп'ютерних експериментів з математичними моделями, що є основою дослідницького підходу у навчанні планіметрії в школі.

Також за рахунок використання комп'ютерних засобів можна значно збільшити кількість розглядуваних на уроках геометрії задач та підвищити рівень їх складності.

Розглянемо на прикладі розв'язування задач на побудову різними методами можливості використання ППЗ GRAN-2D на уроках планіметрії.

Задачі на побудову методом геометричних місць пропонуються учням вже в 7 класі. Розглянемо даний метод на прикладі розв'язування наступної задачі.

Задача. *Побудувати трикутник за двома сторонами і радіусом описаного кола.*

Для розв'язування задач методом геометричних місць необхідно з'ясувати: до знаходження яких точок зводиться розв'язання задачі і які дві вимоги мають ці точки задовольняти. Далі розглядають одну з вимог задачі і будують геометричне місце точок (ГМТ), що задовольняють цю вимогу. Потім будують ГМТ, які задовольняють інші вимоги і, нарешті, знаходять точки перетину геометричних місць точок [6, 276].

На рис. 1 показано копію вікна побудови з умовою задачі, заданими відрізками, відкритими підказками та додатковим малюнком, які можна приховати, «натиснувши» відповідну кнопку.

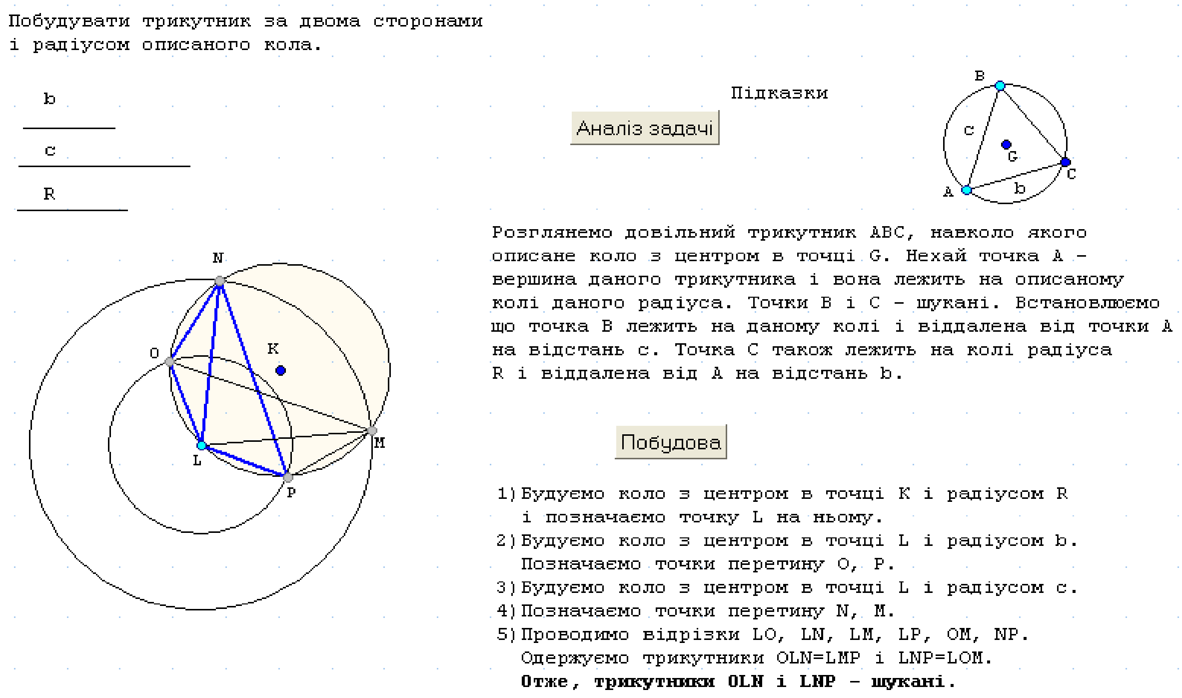


Рис. 1

Проведемо аналіз даної задачі.

Нехай точка A – вершина трикутника ABC, навколо якого описане коло радіуса *R*. Необхідно знайти розташування інших вершин трикутника – точок B і C. Точка B, по-перше, лежить на даному колі радіуса *R*, а по-друге віддалена від точки A на відстань *c*. Тобто вона лежить на перетині даного кола і кола з центром в точці A і радіусом *c*. Точка C також лежить на даному колі та віддалена від A на відстань *b*. Отже, вона лежить на перетині даного кола і кола з центром в точці A і радіусом *b*.

Під час побудови легко встановити, що шуканих трикутників два.

Застосування методу осьової симетрії для розв’язування задач на побудову можна проілюструвати за допомогою такої задачі.

Задача. *Через вершину A трикутника ABC і точку D основи BC проведено пряму. Знайти на цій прямій точку M, з якої відрізки BD і CD видно під рівними кутами.*

Для розв’язування задачі слід використати правило-орієнтир. По-перше, необхідно припустити, що задача розв’язана, тоді обрати певну симетрію стосовно або даної прямої, або прямої, яку легко побудувати та замінити один із даних елементів симетричним щодо обраної осі симетрії. У запропонованій задачі пряма AD буде розглядатись як вісь симетрії, а точка C – об’єкт симетрії (рис. 2).

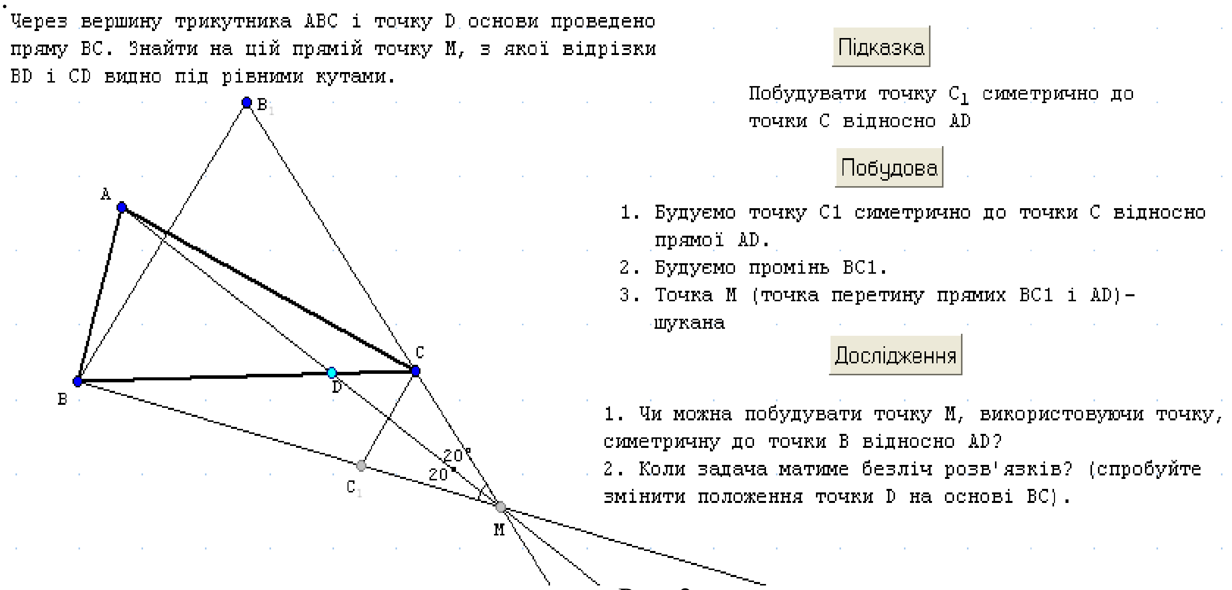
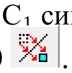


Рис. 2

Отже, учням можна дати підказку: побудувати точку C_1 симетрично до C відносно прямої AD, використовуючи послугу *Симетрія відносно точки (прямої)* .

Маючи на екрані точки B і C_1, неважко здогадатися провести пряму через ці точки, яка перетне пряму AD в точці M. Далі пропонуємо учням перевірити, чи є точка M шукана? Для цього спочатку можна провести дослідження, вимірявши градусну міру кутів AMB і AMC з допомогою інструмента *Обчислення кута за трьома точками* , а потім аналітично довести рівність цих кутів (очевидно, пряма AM є бісектрисою кута BMB_1 чи CMC_1).

Оскільки модель геометричної побудови в ППЗ GRAN-2D є динамічною, то учням доцільно поставити завдання на дослідження. Спробуйте змінити положення точки D на основі BC. Чи можна знайти точку M, побудувавши точку B_1 симетрично до B відносно AD? Який із способів і в якому випадку буде більш зручним? Коли задача матиме безліч розв’язків?

До малюнка бажано створити кілька кнопок, за допомогою яких приховувати і послідовно відкривати підказки. Завдяки цьому імітується евристичний діалог школяра з учителем. За кнопкою можна приховувати навідні або додаткові запитання для учня. Це також допомагає школяреві вдосконалювати навички самоконтролю.

Метод повороту застосовується в задачах на побудову многокутників, вершини яких лежать на трьох даних лініях (прямих чи колах). Наприклад така задача.

Задача. *Побудувати прямокутний рівнобедрений трикутник, вершини якого лежать на трьох паралельних прямих.*

Для пошуку способу розв’язання необхідно провести аналіз задачі. Нехай трикутник ABC – шуканий і його вершини лежать на паралельних прямих *a*, *b*, c (рис. 3). Оскільки $\angle A=90^\circ$ і AC=AB, то виконуємо поворот прямої *a* навколо точки A на 90°. При цьому пряма *a* перейде в a_1. Отже, точка B є точкою перетину прямих c і a_1. Знаючи положення точки B, знайдемо і положення точки C, виконавши поворот B навколо A в протилежному напрямі.

На основі аналізу знаходимо план побудови.

Рис. 3

На закріплення учні можуть легко самостійно розв’язати задачі на побудову квадрата, три вершини якого лежать на паралельних прямих; на побудову рівностороннього трикутника, вершини якого лежать на трьох паралельних прямих та ін.

При вивченні тем „Перетворення подібності”, „Подібність фігур” розв’язують задачі за методом подібності. Якщо дані геометричної задачі на побудову такі, що опустивши одне з них, можна побудувати безліч фігур, подібних шуканій, то спочатку будують яку-небудь з цих фігур, а потім, враховуючи опущене дане, будують шукану фігуру. [1, 87]

Задача. *У даний трикутник ABC вписати ромб з даним гострим кутом α так, щоб одна з його сторін лежала на основі AC трикутника, а дві його вершини – на бічних сторонах AB і BC.*

Нехай ромб DNRP – шуканий (рис. 4). Опустимо вимогу – одна із вершин ромба лежить на стороні BC трикутника. Побудуємо ромб $D_1N_1R_1P_1$ з кутом D_1, що дорівнює даному. Далі, перш ніж продовжувати аналіз, учням доцільно запропонувати виконати дослідження, в результаті якого вони повинні встановити, що якщо для точки R_1 ввімкнути функцію *Властивості сліду/Залишати слід* (контекстне меню точки R_1), то при переміщенні точки D_1 вздовж AC, точка R_1 залишатиме слід у вигляді прямої, яка проходить через точку A.

Отже, з вершини A трикутника як з центра гомотетії можна провести через вершину R_1 ромба пряму AR, яка буде геометричним місцем відповідних вершин ромбів, гомотетичних побудованому і таких, що задовольнятимуть всі умови задачі, крім опущеної. Тому точка перетину прямої AR_1 із стороною BC трикутника – шукана вершина ромба.

Звідси випливає побудова. На стороні AC будуємо довільну точку D_1. Від прямої D_1C відкладаємо кут, рівний даному. При цьому бажано застосовувати не послугу *Дуга*, а виконати побудову так, як це школярі повинні робити вручну. Щоб не захаращувати креслення, допоміжні побудови слід приховати, знявши позначки у *Переліку об’єктів*.

На сторонах побудованого кута будуємо ромб $D_1N_1R_1P_1$. Проводимо пряму AR_1, яка перетинає BC в точці R. Будуємо $RP||R_1P_1$, $RN||N_1R_1$, $ND||N_1D_1$. DNRP – шуканий ромб.

Рис. 4

Іноді побудова фігури є досить важкою тільки через те, що частини цієї фігури занадто віддалені одна від одної і тому важко ввести в малюнок дані елементи. Зближення елементів фігур зручно здійснювати методом паралельного перенесення, суть якого полягає в тому, що яку-небудь частину фігури паралельно переносять на деяку відстань у певному напрямі, завдяки чому дістають допоміжну фігуру, яку легко побудувати. Побудувавши допоміжну фігуру, виконують паралельне перенесення в протилежному напрямі на ту ж саму відстань. Дістають шукану фігуру [1, 93]

Застосування методу паралельного перенесення проілюструємо за допомогою такої задачі.

Задача. *Побудувати трапецію за її сторонами.*

На етапі аналізу будуємо допоміжний малюнок – довільну трапецію ABCD (рис. 5). Одну із бічних сторін трапеції паралельно переносимо в напрямку однієї з основ і проводимо її через вершину меншої основи. В результаті отримуємо допоміжну фігуру – трикутник з двома сторонами, що рівні бічним сторонам трапеції і третьою стороною, яка дорівнює різниці основ трапеції. Цей трикутник можна побудувати за даними задачі. Виконуючи обернене паралельне перенесення, одержимо шукану трапецію.

Розглянемо послідовність побудови. Будуємо пряму IJ. Використовуючи послугу *Коло за радіусом* , на прямій IJ відкладаємо відрізок IL=b та від точки L відкладаємо відрізок ML=a. Далі будуємо точку O як точку перетину кіл з центром в точці I та радіусом c та з центром в точці M і радіусом d. Через точку O проводимо пряму паралельно до IL, користуючись послугою *Паралельна пряма*. Також через точку L проводимо пряму паралельно OM. Знаходимо Q – точка перетину цих прямих. IOOL – шукана трапеція.

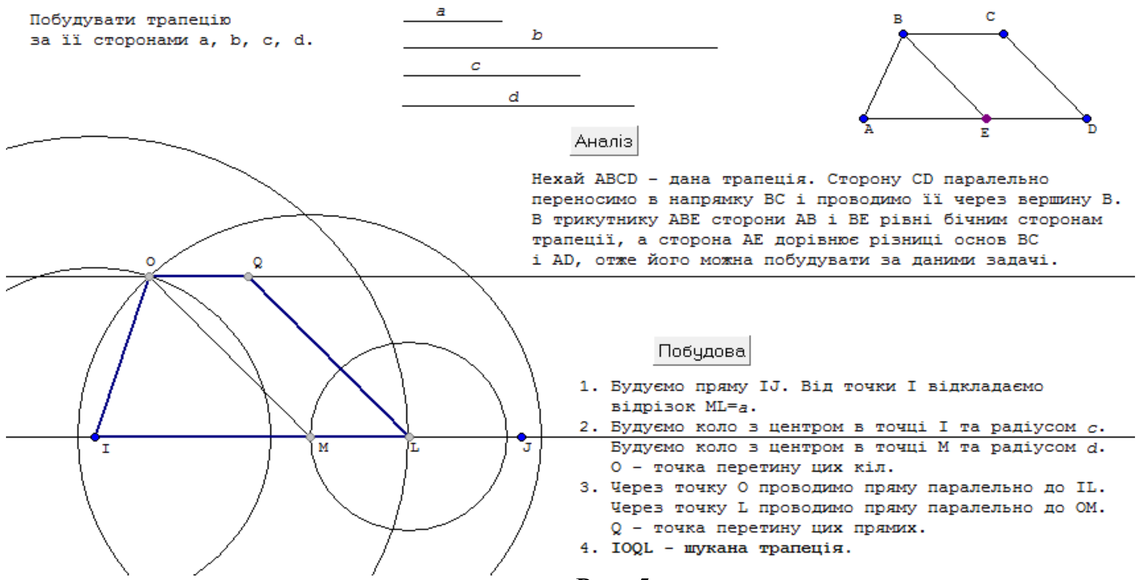


Рис. 5

В 9 класі розглядають задачі на побудову відрізка, який заданий формулою. Наприклад, розглянемо побудову середнього геометричного $c = \sqrt{ab}$ засобами програми GRAN-2D.

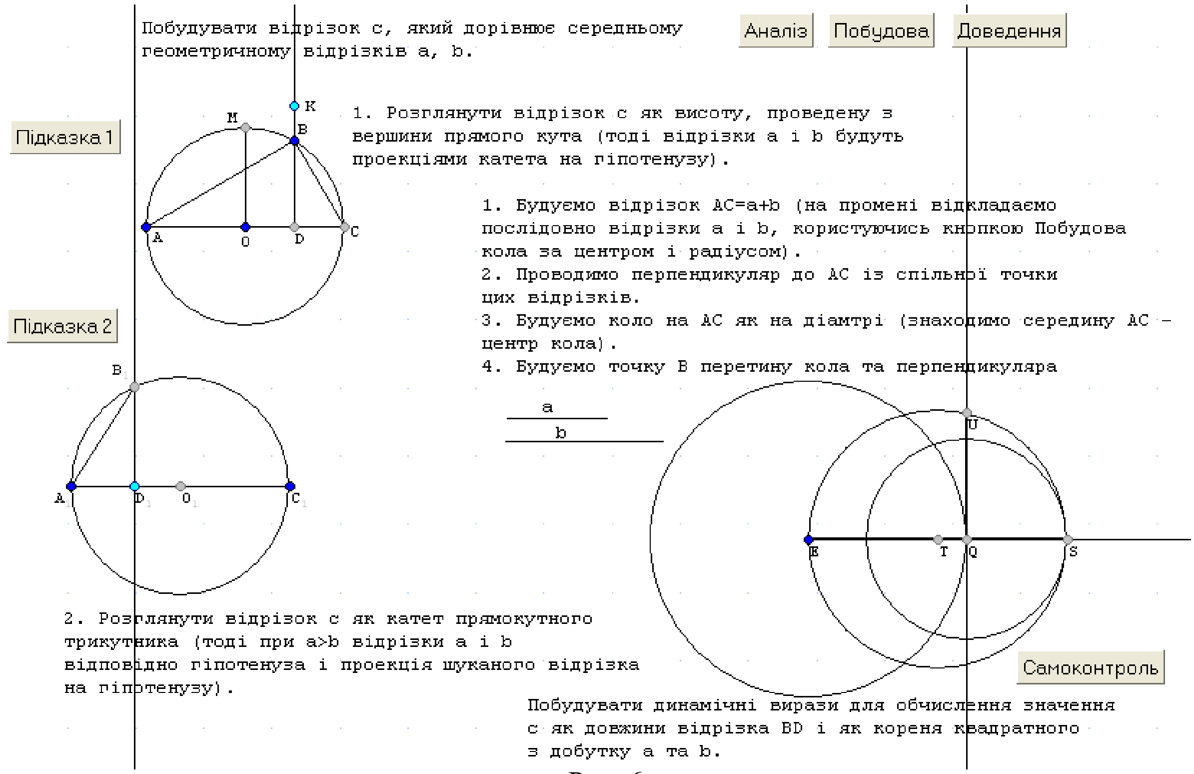


Рис. 6

Шуканий відрізок можна розглядати так (рис. 6):

1) як висоту, проведену з вершини прямого кута на гіпотенузу (тоді a і b будуть проекціями катета на гіпотенузу);

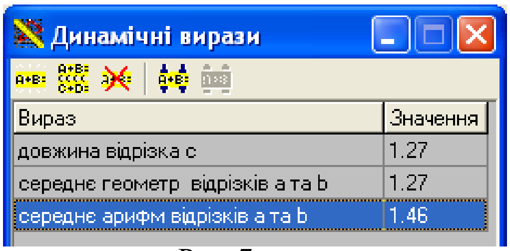


Рис. 7

2) як катет прямокутного трикутника (тоді при a>b, відрізки a і b – відповідно гіпотенуза і проекція шуканого відрізка (катета) на гіпотенузу).

За даними підказками легко створити малюнки, за якими провести аналіз і скласти план побудови.

Для самоконтролю можна створити динамічні вирази для обчислення значення *c* як довжини відрізка BD (*Len(B,D)*) і як кореня квадратного з добутку довжин *a* і *b* (*Sqrt(Len(A,D)*Len(D,C)*) (рис.7). В результаті повинні бути рівні значення. Спробуйте перемістити точку B на колі. Як це впливає на результат?

Школярів можна запитати: якою нерівністю пов’язані між собою середнє геометричне і середнє арифметичне. Що буде геометричною ілюстрацією середнього арифметичного? Користуючись динаміч-ним кресленням і створеними відповідними динамічними виразами, перевірте за яких умов нерівність Коші $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$ перетворюється в рівність. Спробуйте довести дану нерівність на основі геометричної ілюстрації.

Розглянемо задачу на використання побудови середнього геометричного.

Задача. *Побудувати квадрат, рівновеликий даному прямокутнику.*

Позначимо *a*, *b* – сторони прямокутника, *x* – сторона квадрата. Тоді площа прямокутника дорівнює *ab*, а площа квадрата x^2. За умовою $x^2 = ab$, звідки $x = \sqrt{ab}$. Отже, розв’язування задачі зводиться до побудови спочатку відрізка *x* як середнього геометричного відрізків *a*, *b*, а потім до побудови квадрата на цьому відрізку як на його стороні (рис. 8).

Рис. 8

Для самоконтролю даємо учням завдання: користуючись послугою *Обчислення площ*  або можливістю створення динамічних виразів, переконатися, що площі даного прямокутника та квадрата рівні.

Таким чином, застосування ППЗ GRAN-2D у процесі розв’язування задач на побудову дає змогу реалізувати дослідницький підхід, навчити учнів самостійного знаходження шляху розв’язування, формувати пізнавальний інтерес і творчі якості.

ЛІТЕРАТУРА

1.Бурда М. І. Розв’язування задач на побудову в 6 – 8 класах: Метод. пос. – К.: Рад. шк., 1986. – 112 с.

2.Жалдак М. І., Вітюк О. В. Комп’ютер на уроках геометрії: Посібник для вчителів. – К.: РННЦ „ДІНІТ”, 2004. – 168 с.

3.Кононова О. Використання евристичних прийомів під час розв’язування позиційних задач на побудову із застосуванням інформаційних технологій // Математика в школі. – 2008. – №3. – с. 29 – 37.

4.Крамаренко Т. Г. Уроки математики з комп’ютером. Посібник для вчителів і студентів/ За ред. М. І. Жалдака. – Кривий Ріг: Видавничий дім, 2008. – 272 с.

5.Раков С. А. Вивчення геометрії на основі дослідницького підходу з використанням пакета динамічної геометрії DG //Математика в школі. – 2005. – №7. – с. 2 – 9.

6.Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. Спеціальностей пед. навч. закладів. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.

7.Смалько О.А. Використання програмного педагогічного засобу GRAN-2D на уроці планіметрії // Математика в школі. – 2003. – №1. – с. 10 – 14.