

**Keywords:** *methods, level of education, personal potential of students, activities, future substantive situations.*

**Бодрова І. О.**  
**Національний педагогічний університет**  
**імені М. П. Драгоманова**

## **РІЗНОРІВНЕВИЙ ПІДХІД ДО ВИВЧЕННЯ ОБ'ЄМІВ ТІЛ ОБЕРТАННЯ В СТАРШІЙ ШКОЛІ**

*У статті розглядаються особливості вивчення об'ємів тіл обертання на двох рівнях – стандарту і профільному.*

**Ключові слова:** *рівні навчання, стереометрія, об'єм тіла обертання.*

Курс стереометрії у старшій школі вивчається на трьох рівнях – стандарту, академічному, профільному. Кожен із цих рівнів забезпечує різні результати навчання, а тому виникає потреба у розробці рівневих методик вивчення кожної теми курсу, зокрема, об'ємів тіл обертання.

З'ясуванню особливостей навчання математики на різних рівнях профільного навчання присвячені дослідження В. Г. Бевз, М. І. Бурди, С. Є. Вольянської, В. О. Швеця та інших; різні аспекти методики навчання стереометрії у школі розкриті у працях Г. П. Бевза, М. Я. Ігнатенка, А. П. Кисельова, Н. В. Кульчицької, О. В. Погорєлова, В. А. Сверчевської, Н. А. Тарасенкової та інших; проблема вивчення геометричних величин у школі розглядалася в дисертаційних дослідженнях Р. О. Журбаса, К. Ф. Рубіна, В. Д. Чайковського. Проте методика різнорівневого вивчення об'ємів геометричних тіл, зокрема об'ємів тіл обертання, розроблена недостатньо.

**Мета статті** – розкрити особливості різних методичних підходів до вивчення об'ємів тіл обертання на рівні стандарту та профільному рівні.

Різнорівневий підхід до вивчення об'ємів тіл обертання реалізується шляхом диференціації таких компонентів навчального процесу: поурочних цілей навчання, змісту навчального матеріалу, організаційних форм, методів, прийомів і засобів навчання. Підґрунтям для здійснення цієї диференціації є цілі навчання математики на кожному з рівнів, дидактичні принципи навчання; принципи відбору змісту навчального матеріалу; розвиваюча та виховна цінність навчального матеріалу, його місце у професійній і повсякденній діяльності людини; вікові та психофізіологічні особливості учнів; рівень загальної математичної підготовки учнів тощо.

Результати дослідження свідчать, що ефективність навчання підвищиться, якщо на кожному з рівнів дотримуватись відповідних особливостей навчання. На різних рівнях навчання "...курси математики повинні мати різну інформаційну та інтелектуальну ємність, діагностико-

прогностичну спрямованість та соціальну ефективність, а також різнитися обсягом, способом упорядкування матеріалу, ступенем узагальнення знань, співвідношенням між теоретичними та емпіричними знаннями” [1, с. 3]. Навчання математики на рівні стандарту насамперед має на меті створення умов для досягнення учнями практичної компетенції. Математика виступає як елемент загальної культури особистості. Навчання математики на профільному рівні спрямовано на продовження навчання у вищих закладах освіти за спеціальностями, пов’язаними з математикою, або за спеціальностями, де математика відіграє роль апарату для вивчення й аналізу закономірностей реальних явищ і процесів. Рівень стандарту передбачає навчання на індуктивно-практичній основі з максимальним використанням наочності, залученням життєвого досвіду учнів, тоді як характерними рисами навчання на профільному рівні є посилення дедуктивності викладення навчального матеріалу та інтенсивності самостійної діяльності учнів, застосування проблемно-пошукових методів та нетрадиційних форм навчання тощо [3, с. 9-10].

Особливість вивчення об’ємів тіл обертання полягає в тому, що залучається навчальний матеріал, який має прикладну спрямованість. Отримані знання застосовуються в різних галузях (фізиці, хімії, геодезії, металургії, екології тощо) та у повсякденному житті.

На рівні стандарту об’єми тіл обертання рекомендується вивчати разом з об’ємами многогранників, дотримуючись такої послідовності: об’єм циліндра та призми, об’єм конуса та піраміди, об’єм кулі. Розглянемо, наприклад, особливості вивчення об’єму циліндра.

На етапі мотивації пропонуються завдання, які стимулюють учнів до пошуку зв’язку між навчальним матеріалом та життєвим досвідом людини (зокрема, навести приклади предметів навколишнього середовища, що мають форму циліндра, та об’єм яких доводиться визначати на практиці).

Під час вивчення формули об’єму циліндра учні пригадують доведення формули для обчислення площі круга. Проводиться бесіда з метою встановлення аналогії між проблемними ситуаціями, що виникають у процесі вимірювання площі круга та об’єму циліндра. Робиться висновок про доцільність застосування аналогічного способу до доведення формули об’єму циліндра.

За допомогою програми GRAN3D демонструємо зображення трьох циліндрів, у які вписані правильні призми (рис. 1). Звертається увага на те, що при збільшенні кількості сторін многокутника, який лежить в основі призми, зменшується розмір тіла, утвореного множиною точок простору, що знаходяться в середині циліндра, але не належать призмі, а об’єм призми наближається до об’єму описаного циліндра. Тому при зростанні кількості сторін основи призми об’єм циліндра можна прийняти за об’єм правильної багатокутної призми, тобто  $V = S_{\text{осн}} \cdot H = \pi r^2 H$ .

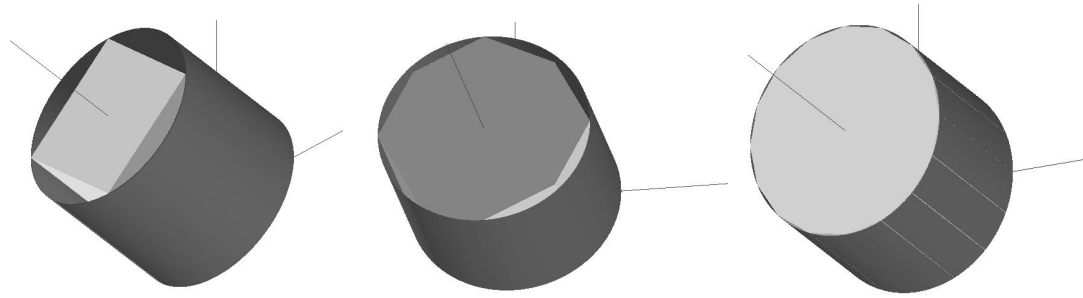


Рис. 1

Після пояснення нового матеріалу пропонуються вправи на відпрацювання базових умінь застосовувати виведену формулу. До базових умінь обчислювати об'єми тіл обертання належать такі: знаходити об'єм за формулою; знаходити висоту, площу або радіус основи циліндра за відомим об'ємом; складати та обчислювати відношення об'ємів геометричних тіл; представляти задане тіло у вигляді комбінації інших геометричних тіл, формули для обчислення об'єму яких відомі. З метою формування базових умінь пропонуємо учням орієнтовані основи діяльності (ООД) у вигляді вказівок або загальних планів розв'язування задач. Наприклад, ООД обчислення об'єму циліндра за формулою така: 1) записати формулу об'єму; 2) з'ясувати, які з параметрів, що входять до складу формули, відомі за умовою, які невідомі; 3) знайти невідомі параметри; 4) перевірити, чи всі параметри виражені в однакових одиницях вимірювання; 5) підставити всі параметри у формулу; 6) обчислити значення виразу.

Складені ООД закріплюємо вправами різних рівнів складності:

1. Знайдіть об'єм циліндра з площею основи  $12 \text{ см}^2$  і висотою 5 см.
2. Знайдіть об'єм циліндра, якщо його висота дорівнює 16 см, а радіус основи – 3 см.
3. Знайдіть об'єм циліндра з висотою 420 мм і радіусом основи 3 дм.
4. Знайдіть об'єм циліндра, висота якого удвічі більша за радіус основи, а площа основи дорівнює  $49\pi \text{ м}^2$ .
5. Знайдіть об'єм циліндра, якщо площа його бічної розгортки дорівнює  $12\pi \text{ дм}^2$ , а висота – 24 мм.

Відпрацювавши базові вміння, переходимо до розв'язування задач, які передбачають комплексне застосування цих умінь. Серед них – задачі на комбінацію геометричних тіл, задачі, які розв'язуються методом розбиття, прикладні задачі. Під час розв'язування задач учні виробляють вміння аналізувати умови задач, перекладати прикладну задачу математичною мовою, розбивати складну задачу на кілька простих. Пояснюється, що для перекладу прикладної задачі математичною мовою потрібно з'ясувати, форму якого геометричного тіла мають об'єкти навколишнього середовища, про які йдеться в умові задачі, та виконати зображення цих об'єктів.

Розв'язуючи задачі на обчислення об'ємів, доцільно дотримуватись такого плану:

1. З'ясуйте, про яке тіло йдеться в умові задачі.
  2. Запишіть або складіть формулу для обчислення об'єму цього тіла.
  3. З'ясуйте, які з параметрів, що входять до складу формули, відомі, а які невідомі.
  4. Знайдіть невідомі параметри.
  5. Перевірте, чи усі параметри подано в однакових одиницях вимірювання.
  6. Підставте значення параметрів у формулу для обчислення об'єму.
- Наприклад, задача. За даними на малюнку 2 обчислити об'єм тіла.

**Розв'язання:**

1. Об'єм циліндрів знаходимо за формулою  $V = \pi r^2 h$ .

2. Це геометричне тіло утворено двома циліндрами, а, отже, його об'єм дорівнює сумі об'ємів цих циліндрів:

$V = \pi r^2 h + \pi R^2 H = \pi(r^2 h + R^2 H)$ , де  $r$ ,  $R$  – радіуси основ циліндрів;  $h$ ,  $H$  – їх висоти (3).

3. За умовою  $H$  – відомий параметр;  $r$ ,  $h$ ,  $R$  – невідомі параметри.

4. Знаходимо невідомі параметри:

$$\pi(r^2 h + R^2 H) = \pi(2,5^2 \cdot 4 + 4^2 \cdot 8) \Rightarrow r^2 h + R^2 H = 2,5^2 \cdot 4 + 4^2 \cdot 8$$

5. Усі параметри дано в однакових одиницях вимірювання.

6. Підставивши знайдені значення  $r$ ,  $h$ ,  $R$  у вираз (3), дістанемо:

$$V = \pi(r^2 h + R^2 H) = \pi(2,5^2 \cdot 4 + 4^2 \cdot 8) = 153\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

Закріплювати вміння розв'язувати задачі на об'єми тіл обертання рекомендується вправами чотирьох рівнів складності. Наприклад.

**Початковий рівень.**

1. Обчисліть об'єм циліндра, площа основи якого дорівнює  $10 \text{ см}^2$ , а висота –  $3 \text{ см}$ .

2. Обчисліть об'єм циліндра, якщо радіус його основи дорівнює  $7 \text{ см}$ , а висота –  $4 \text{ см}$ .

3. Як зміниться об'єм циліндра, якщо його висоту збільшити удвічі?

**Середній рівень.**

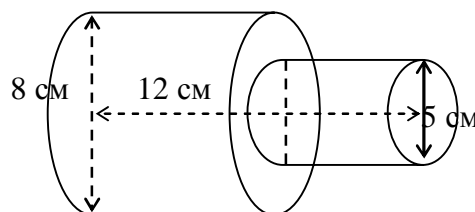
1. Обчисліть висоту циліндра, якщо радіус його основи дорівнює  $4 \text{ дм}$ , а об'єм –  $64\pi \text{ дм}^3$ .

2. Обчисліть діаметр основи циліндра, об'єм якого дорівнює  $45\pi \text{ дм}^3$ , а висота –  $50 \text{ см}$ .

3. Об'єм одного циліндра відноситься до об'єму іншого як  $4 : 9$ . Знайдіть відношення діаметрів цих циліндрів, якщо їх висоти рівні.

**Достатній рівень.**

1. Обчисліть об'єм циліндра, якщо його осьовий переріз є квадрат із



Мал. 2

площею  $36 \text{ дм}^2$ .

2. Висота циліндра відноситься до радіусу його основи як 5:7. Знайти площу осьового перерізу циліндра, якщо його об'єм дорівнює  $700 \text{ м}^3$ .

3. Хорда МК, проведена в нижній основі циліндра, стягує дугу  $\beta$  і дорівнює  $a$ . Обчисліть об'єм циліндра, якщо його вісь дорівнює  $h$ .

### Високий рівень.

1. Діаметр однієї каструлі циліндричної форми у 1,8 разів більший за діаметр іншої, проте друга каструля у 2 рази вища за першу. Знайти ємність другої каструлі, якщо ємність першої 12 л.

2. Соснова колода має довжину 4,2 м, а діаметр 60 см. Знайти вагу колоди, якщо густина сосни  $0,52 \text{ г/см}^3$ .

3. Мідний брусок, що має форму правильної трикутної призми зі стороною 5 см і бічним ребром 18 см, переплавили на проволочку діаметром 0,6 см. Знайдіть довжину проволочки. Результат подайте у метрах та округліть до десятих.

На профільному рівні вивчати об'єми круглих тіл доцільно після об'ємів многогранників, реалізуючи ідею узагальнення вимірювання об'ємів. Тому пропонується така послідовність вивчення навчального матеріалу: об'єм циліндра, обчислення об'ємів тіл обертання за допомогою інтеграла, об'єм конуса, об'єм кулі, об'єм зрізаного конуса.

Детальніше зупинимося на особливостях різних етапів вивчення об'ємів.

На початку вивчення об'ємів тіл обертання пропонуємо вправи, які сприяють активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів, зокрема, завдання практичного змісту. Наприклад, як на практиці можна визначити об'єм каструлі? Після цього проводиться бесіда з метою постановки задачі про вимірювання об'ємів круглих тіл та повідомляються цікаві математичні факти.

Під час пояснення нового матеріалу використовуються дослідницько-пошукові методи навчання. Наприклад, перш ніж вивести формулу об'єму циліндра, пропонуємо розв'язати задачі такого виду. В циліндр вписано та описано навколо нього правильні чотирикутні призми. Який може бути об'єм циліндра, якщо його висота дорівнює 10 см, а сторони основ вписаної та описаної призм відповідно дорівнюють 5,5 см і 7 см? Дістанемо розв'язок у вигляді числового проміжку  $302,5 \text{ см}^3 < V < 490 \text{ см}^3$ . Обчислюємо середнє значення об'єму циліндра та відносну похибку. Обговорюємо можливі способи збільшення точності обчислень та переходимо до

*Рис. 3а*

*Рис. 3б*

доведення формули. Потім пропонуємо учням, скориставшись аналогічними міркуваннями, самостійно вивести формулу для обчислення об'єму конуса.

Надалі перевага надається обчисленню об'ємів тіл за допомогою інтеграла. Спочатку доводимо формулу  $V = \int_a^b S(x) dx$  для обчислення об'єму тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції навколо однієї з координатних осей. Доведення супроводжуємо демонстрацією зображень, виконаних за допомогою програм GRAN3D (рис. 3а, 3б) та "Открытая математика. Стереометрия" (рис. 4а, 4б).

У декартовій системі координат розглядаємо криволінійну трапецію, обмежену графіком функції  $y=f(x)$ , віссю абсцис та прямими  $x=a$  та  $x=b$  ( $a < b$ ) (рис. 5). Обертаючи трапецію навколо вісі  $Ox$ , отримуємо тіло обертання  $\Phi$  (рис. 3а, 4а). Будь-який переріз тіла  $\Phi$  площиною, паралельною вісі  $Oy$  (рис. 3б), є коло з радіусом  $r = f(x)$ . Тоді площу будь-якого перерізу обчислюємо таким чином:  $S = \pi r^2 = \pi f^2(x)$ . Позначаємо  $S(x)$  – площу перерізу тіла площиною, паралельною вісі  $Oy$  і  $V(x)$  – об'єм тіла обертання  $\Phi$ . Задаємо приріст  $\Delta x > 0$  ( $x + \Delta x < b$ ). Будуємо два циліндри зі спільною висотою  $\Delta x$  (рис. 4б). Менший циліндр має своєю основою коло площею  $S(x)$ , а більший – коло площею  $S(x + \Delta x)$ .

Рис. 4а

Рис. 4б

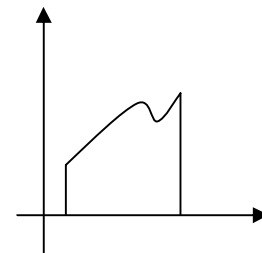


Рис. 5

Якщо  $\Delta V$  – приріст об'єму тіла обертання, то  $S(x)\Delta x < \Delta V < S(x + \Delta x)\Delta x$ , звідки  $\frac{\Delta V}{\Delta x} > S(x) > S(x + \Delta x)$ .

Оскільки функція  $f(x)$  неперервна, то неперервна і функція  $S(x)$ . Отже,

Переходимо до границі у подвійній нерівності та отримуємо:

$S(x) < \frac{\Delta V}{\Delta x} < S(x + \Delta x)$ , тобто  $S(x) < \frac{dV}{dx} < S(x)$ . Тоді  $\frac{dV}{dx} = S(x)$  – первісна для функції  $S(x)$  на проміжку  $[a; b]$ , звідки  $V = V(b) - V(a) = \int_a^b S(x) dx$ .

Вміння застосовувати доведену формулу до обчислення об'ємів тіл формуємо, розв'язуючи такі вправи:

1. Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис криволінійної трапеції, обмеженої лініями: а)  $y=2x+1$ ,  $x=1$ ,  $x=4$ ,  $y=0$ ; б)  $y=x^2$ ,  $x=1$ ,  $y=0$ ; в)  $y=1-x^3$ ,  $x=2$ ,  $y=3$ .

2. Складіть план обчислення об'єму тіла обертання за допомогою інтеграла.

3. За допомогою інтеграла виведіть формули для обчислення об'ємів таких геометричних тіл: а) конуса; б) кулі.

План обчислення об'єму тіла обертання за допомогою інтеграла може бути таким:

1. Побудуйте дану фігуру, яка обертається навколо осі.
2. З'ясуйте, чи є фігура криволінійною трапецією. Якщо ні, то розбийте її на складові фігури так, щоб кожна з них була криволінійною трапецією.
3. Визначте межі інтегрування (за необхідності для кожної із складових фігур).
4. Запишіть рівняння функції, графік якої обмежує трапецію, у вигляді  $y=f(x)$  (у випадку, коли функція задана неявно, виконайте необхідні перетворення).

5. Обчисліть об'єм за формулою

Спираючись на складений план, учні виводять формулу об'єму кулі:

1. Куля радіуса  $r$  утворюється обертанням півкола радіуса  $r$  навколо діаметра. Введемо декартову систему координат та розташуємо півколо так, щоб його центр знаходився у точці  $(r; 0)$ .

2. Півколо є криволінійною трапецією, обмеженою графіком функції  $x^2+y^2=r^2$  та прямою  $y=0$ .

3. Визначимо межі інтегрування. Функція задана на проміжку  $[0; 2r]$ , отже,  $a=0$ ,  $b=2r$ .

4. Запишемо рівняння функції  $x^2+y^2=r^2$ , у вигляді  $y=f(x)$ :

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

5. Обчислимо об'єм за формулою

$$V = \pi \int_0^{2r} (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_0^{2r} (r^2 - x^2) dx = \pi \left( r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^{2r} = \pi \left( 4r^3 - \frac{8}{3} r^3 \right) = \frac{4}{3} \pi r^3 .$$

Отже,  $V_{\text{кулі}} = \frac{4}{3} \pi r^3$ .

Вміння розв'язувати задачі на об'єми тіл обертання закріплюємо, розв'язуючи вправи чотирьох рівнів складності. Наприклад, вправи на обчислення об'єму циліндра.

#### Початковий рівень.

1. Обчисліть об'єм циліндра, якщо радіус його основи дорівнює 10 см, а висота – 3 см.

2. Знайдіть радіус основи циліндра об'ємом  $300\pi \text{ м}^3$  і висотою 12 м.

3. Як зміниться об'єм циліндра, якщо а) його висоту збільшити вдвічі? б) збільшити вдвічі радіус основи?

#### Середній рівень.

1. Обчисліть об'єм циліндра, якщо його осьовий переріз – квадрат із

діагоналлю  $5\sqrt{2}$  дм.

2. Висоту циліндра збільшили у 3 рази, а діаметр – у 5 разів. На скільки  $\text{см}^3$  збільшився об'єм циліндра, якщо його початковий об'єм дорівнює  $240 \text{ см}^3$ ?

3. Об'єм одного циліндра відноситься до об'єму іншого як 40 : 45. Знайдіть відношення діаметрів цих циліндрів, якщо їх висоти відносяться як 10 : 5.

#### **Достатній рівень.**

1. Із мідного бруска, що має розміри 15,7 см x 10 см x 6 см, виробили 48 м проволочи. Знайдіть її діаметр.

2. Діаметр однієї каструлі циліндричної форми у 1,8 разів більший за діаметр іншої, проте друга каструля у 2 рази вища за першу. Знайдіть ємність другої каструлі, якщо ємність першої 12 л.

3. Об'єм правильної шестикутної призми, вписаної в циліндр, дорівнює Q. Знайти об'єм циліндра.

#### **Високий рівень.**

1. Знайти об'єм частини циліндра, утвореної при його перетині площиною, паралельною вісі, якщо висота циліндра дорівнює  $h$ , радіус основи –  $r$ , а січна площина відсікає в основі дугу, що дорівнює  $\varphi$ .

2. Об'єм циліндра дорівнює  $V$ . Знайдіть площу основи циліндра, якщо площа його осевого перерізу дорівнює  $Q$ .

3. Об'єм циліндра дорівнює  $V$ , а площа його осевого перерізу удвічі менша за площу його основи. Знайдіть радіус основи циліндра та його висоту.

**Висновок.** Запропонований диференційований підхід до вивчення об'ємів тіл обертання сприяє підвищенню рівня засвоєння учнями відповідних знань, умінь та навичок.

#### **Використана література:**

1. Бевз Г. П. Математика: 11 кл. : підруч. для загальноосвіт. навч. закл.: рівень стандарту / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – К. : Генеза, 2011. – С. 262-280.
2. Бурда М. І. Структура і зміст профільного навчання математики // Математика в школі. – 2007. – № 7. – С. 3-7.
3. Викладання науково-технічних та природничих дисциплін в школі: науково-методичний посібник / М. І. Бурда, Н. М. Буринська, Г. Є. Левченко та ін. – К. : Педагогічна думка, 1998. – С. 3-17.
4. Геометрія : 11 кл. : підруч. для загальноосвіт. навч. закл. : академ. рівень, профіл. рівень / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова, В. М. Владіміров. – К. : Генеза, 2011. – С. 223-265.
5. Навчальна програма з математики для учнів загальноосвітніх шкіл. Профільний рівень [Електронний ресурс]. Режим доступу до: [http://osvita-novog.at.ua/metod/10-11\\_matem\\_prof.pdf](http://osvita-novog.at.ua/metod/10-11_matem_prof.pdf)
6. Навчальна програма з математики для учнів загальноосвітніх шкіл. Рівень стандарту [Електронний ресурс]. Режим доступу: [http://mon.gov.ua/images/education/average/prog12/matem\\_st.pdf](http://mon.gov.ua/images/education/average/prog12/matem_st.pdf)
7. Слєпкань З. І. Психолого-педагогічні та методологічні основи розвивального навчання математики. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2004. – 240 с.



**БОДРОВА И. А. Разноуровневый подход к изучению объемов тел вращения в старшей школе.**

*В статье рассматриваются особенности изучения объемов тел вращения на двух уровнях профильного обучения (стандарта и профильном).*

**Ключевые слова:** профили обучения, стереометрия, объем тела вращения.

**BODROVA I. A. The split-level approach to volumes study of bodies of rotation on senior school.**

*Article is devoted to features of volume studying of body of rotation on two levels of profile teaching (standard level and profile level).*

**Keywords:** levels of teaching, stereometry, volume of body of rotation.

**Бондар Л. А.**

**Криворізький педагогічний інститут  
ДВНЗ Криворізького національного університету**

### **ВИКОРИСТАННЯ РІЗНОРІВНЕВИХ ЗАВДАНЬ З ПЕДАГОГІЧНИХ ДИСЦИПЛІН ДЛЯ ФОРМУВАННЯ САМООСВІТНІХ УМІНЬ І НАВИЧОК СТУДЕНТІВ-ФІЛОЛОГІВ**

*У статті аналізується проблема організації самостійної роботи студентів-філологів задля якісного їх навчання, обґрунтовується необхідність використання різнорівневих завдань з педагогічних дисциплін для формування самоосвітніх умінь і навичок майбутніх учителів іноземної мови.*

**Ключові слова:** збірник інформаційно-дидактичних матеріалів, багатоаспектні завдання, активізація самостійної роботи студентів.

Головне завдання вищої освіти сьогодні полягає у підготовці професійної інтелігенції, національної еліти, визначальними рисами якої є висока духовність і творча особистість. За даними економічних досліджень, обсяг сучасних знань людства подвоюється в середньому кожні 5 років, натомість тривалість навчання у вищому навчальному закладі залишається практично незмінною. Отже, щоб підготувати конкурентоспроможного сучасного фахівця, необхідно насамперед навчити його самостійно орієнтуватися у потоках інформації, що постійно зростають, оновлювати і збагачувати себе в інтелектуальному і професійному плані, будувати плани і їх реалізовувати.

**Мета статті** полягає у з'ясуванні вимог до розроблення завдань самостійної роботи студентів-філологів в умовах вищого навчального закладу.

Результативність будь-якої діяльності багато в чому визначається її умовами. Із великої сукупності показників умов навчання (соціально-економічні, індивідуально-психологічні, просторово-часові, зовнішнє середовище і т. ін.) вчені виділяють ті, від яких насамперед залежить ефективність передачі індивіду досвіду, виробленого соціальною