УДК 383.03 (07)

Чумак М. Є.
Національний педагогічний університет
імені М. П. Драгоманова

ВИКОРИСТАННЯ ПОХИБОК ВИМІРЮВАНЬ ПІД ЧАС РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ФІЗИЧНИХ ЗАДАЧ

У статті розглянуто питання використання похибок вимірювання під час розв'язування фізичних задач, наведено конкретні приклади застосування методу меж.

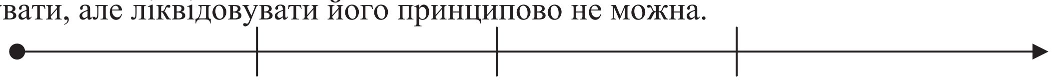
Ключові слова: *похибка вимірювання, похибка обчислення, фізична задача, розв'язування задач.*

Точні числа виходять у результаті підрахунку яких-небудь предметів, об'єктів (10 стільців, 20 столів тощо) або по домовленості: наприклад, уважатимемо 270 точним числом. Іноді пишуть 270 (точно). Якщо ж значення величини отримане у результаті вимірювань і дій над цими виміряними величинами, то результат ніколи не може бути точним, це принципово: в усіх випадках виходить результат з якоюсь похибкою.

Вимірювання бувають прямими і непрямими. Пряме вимірювання – таке, у процесі виконання якого значення фізичної величини вимірюється безпосередньо за допомогою приладу, наприклад: сили струму в колі – амперметром, довжини тіла – лінійкою, швидкості руху транспортного засобу – спідометром тощо.

Нехай при вимірюванні отримане значення фізичної величини A_0, тоді результат вимірювання записується у вигляді $A = A_0 \pm \Delta A$, де ΔA – абсолютна похибка вимірювання, що виражається у тих же одиницях, що й A_0. Вираз $\delta A = \dfrac{\Delta A}{A_0}$ називають відносною похибкою; відносна похибка, зазвичай, виражається в десяткових дробах або відсотках $\delta A = \dfrac{\Delta A}{A_0} 100\%$.

Вираз $A = A_0 \pm \Delta A$ означає, що значення A вимірюваної величини лежить в інтервалі значень, межами якого є $A_0 - \Delta A$ і $A_0 + \Delta A$. Цей інтервал можна зобразити графічно на числовій осі (рис. 42). Точнішими вимірюваннями цей інтервал можна зменшувати, але ліквідовувати його принципово не можна.



$0 \quad A_0 - \Delta A \quad A \quad A_0 + \Delta A.$

Рис. 42

Непряме вимірювання – таке, при якому значення вимірюваної величини набувають на основі прямих вимірювань величин, пов'язаних з вимірюваною величиною певною залежністю.

Наприклад, вимірювання опору провідника – непряме, значення опору набувають як частка від ділення значення напруги на значення сили струму, отриманих при прямих вимірюваннях:

$$R = U/I\ ;\ U = U_0 \pm \Delta U\ ;\ I = I_0 \pm \Delta I\ ;\ R = R_0 \pm \Delta R.$$

Похибки вимірювань поділяють на *систематичні* і *випадкові.*

Систематичні похибки – ті, які залишаються постійними за значенням і за знаком або змінюються за певним законом при повторних вимірюваннях однієї і тієї ж величини одним і тим же приладом. Їх причинами є недосконалість приладів, методу, неправильна установка приладу, вплив температури, вологості тощо.

До систематичних похибок відносяться:

– *інструментальні,* що виникають унаслідок недосконалості конструкції приладу;

– *похибки методу,* що виникають із-за недосконалості методу вимірювань.

Інструментальна похибка вказується у паспорті приладу.

Похибки методу можна зменшити, вибравши такий метод проведення експерименту, в якому похибка мінімальна. Наприклад, при вимірюванні питомої теплоємності речовини слід гаряче тіло опускати в холодну воду, а не холодне тіло – в гаряче. У той же час похибки методу повністю усунути не вдається. У шкільних лабораторних роботах вона не враховується.

Випадкові похибки – такі, які при повторних вимірюваннях приймають різні взаємно несумісні значення. Їх причинами є недосконалість органів чуття, непостійність вимірюваної величини, дискретність значень величин на шкалі приладів тощо.

До випадкових похибок відносяться:

– *похибка середнього арифметичного,* що виникає при багатократних вимірюваннях однієї і тієї ж величини за допомогою одного і того ж вимірювального приладу (товщина дроту в різних місцях, довжина стола, виміряна з різних сторін, тощо);

– *похибка відлічування,* що виникає при знятті показів приладу; вона дорівнює половині ціни поділки шкали приладу, виняток становить секундомір, у якого вона дорівнює ціні поділки його шкали.

При обчисленні похибки середнього арифметичного визначається середнє арифметичне значення вимірюваної величини, відхилення значень від середнього арифметичного і середнє відхилення. Отримана похибка сумується з іншими.

Слід мати на увазі, що метод середнього арифметичного не можна застосовувати, якщо вимірювання має властивість відтворюваності (наприклад, вимірювання маси одного і того ж тіла на одних і тих же терезах). Крім того, не можна обчислювати середнє арифметичне значень величини, отриманих різними учнями, оскільки кожен з них працює зі своєю експериментальною установкою і зі своїми приладами.

У шкільних лабораторних роботах ураховують, головним чином, похибку відлічування (0,5 ціни поділки шкали), похибку середнього арифметичного у тих роботах, де це має зміст.

У роботах практикуму враховують і інструментальну похибку. Сумарна похибка не перевищує ціни поділки шкали приладу.

При обчисленні похибки непрямого вимірювання використовують три методи:

– метод підрахунку значущих цифр;

– метод меж;

– метод меж похибок (метод оцінки).

Метод підрахунку значущих цифр. Нехай в експерименті отримані наступні значення I = 1,5 А; U = 2,6 В. З урахуванням похибки вимірювань I = (1,5 ± 0,05) А; U = (2,6 ± 0,1) В. Тоді R = 2,6 В/1,5 А = 1,73 Ом.

У значенні напруги дві значущі цифри і в значенні сили струму – дві, тому в результаті повинно залишитися стільки значущих цифр, скільки їх у числі з найменшим числом значущих цифр, тобто також дві. Використовуючи правило округлення, отримуємо R = 1,7 Ом.

Метод меж. При використанні методу меж знаходять верхню і нижню межі вимірюваної величини. При цьому потрібно пам’ятати правила визначення меж значень величин (табл. 1).

Таблиця 1

Дія над величинами	Верхня межа (в)	Нижня межа (н)
$A = B + C$	$A_в = B_в + C_в$	$A_н = B_н + C_н$
$A = B - C$	$A_в = B_в - C_в$	$A_н = B_н - C_н$
$A = BC$	$A_в = B_в C_в$	$A_н = B_н C_н$
$A = B/C$	$A_в = B_в/C_в$	$A_н = B_н/C_н$

Обчислимо похибку вимірювання опору методом меж. Визначаємо верхню і нижню межі:

$$R_B = \frac{U_B}{I_B} = \frac{U + \Delta U}{I - \Delta I};\ R_B = 2{,}70\ \text{В}/1{,}45\ \text{А} = 1{,}86\ \text{Ом}.$$

$$R_H = \frac{U_H}{I_H} = \frac{U - \Delta U}{I + \Delta I};\ R_B = 2{,}50\ \text{В}/1{,}55\ \text{А} = 1{,}61\ \text{Ом};$$

Значення опору R визначаємо як напівсуму верхньої і нижньої меж:

$R = (R_B + R_H)/2$; $R = (1{,}86\ \text{Ом} + 1{,}61\text{Ом})/2 = 1{,}73\ \text{Ом} \approx 1{,}70\ \text{Ом}$.

Абсолютна похибка $\Delta R = (R_B - R_H)/2$. $\Delta R = (1{,}86\ \text{Ом} - 1{,}61\ \text{Ом})/2 = 0{,}125\ \text{Ом} \approx 0{,}10$ Ом.

Таким чином, отримуємо $R = (1{,}70 \pm 0{,}10)$ Ом. Відносна похибка $\delta R = \Delta R/R = 0{,}10\ \text{Ом}/1{,}70\ \text{Ом} = 0{,}06$.

Метод меж похибок (метод оцінки). Обчислення похибки вимірювань цим методом засноване на операції диференціювання.

У таблиці 2 наведені формули для розрахунку похибок непрямих вимірювань методом оцінки.

Таблиця 2

Дія над величинами	Відносна похибка
$A = B + C$	$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta B + \Delta C}{B + C}$
$A = B - C$	$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta B + \Delta C}{B - C}$
$A = BC$	$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta B}{B} + \frac{\Delta C}{C}$
$A = B/C$	$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta B}{B} + \frac{\Delta C}{C}$
$A = B^n$	$\frac{\Delta A}{A} = n\frac{\Delta B}{B}$
$A = \sin x$	$\frac{\Delta A}{A} = ctg\Delta x$
$A = \text{tg}\, x$	$\frac{\Delta A}{A} = \frac{2\Delta x}{\sin x}$

Покажемо застосування методу оцінки на прикладі визначення опору.

$$\delta\text{R} = \frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I};\ \delta\text{R} = \frac{0{,}10}{2{,}60} + \frac{0{,}05}{1{,}50} = 0{,}038 + 0{,}033 = 0{,}07;\ \text{R} = 1{,}73\ \text{Ом}.$$

$\Delta R = \delta RR$; R = 1,73 Ом. 0,07 = 0,12 Ом = 0,10 Ом.

R = (1,70 ± 0,10) Ом.

Розглянемо приклад розв'язування задачі з використанням методу меж похибок.

Задача. Точковий заряд визначають як заряджене тіло, розміри і форма якого не впливають на його електростатичну взаємодію з іншими зарядженими тілами в рамках заданої точності. Пояснимо це формулювання. Обчислимо силу, що діє на досліджуваний заряд зі сторони навколишніх зарядів двома способами:

а) вважаючи заряд на тілі сконцентрованим в одній (будь-якій) точці цього тіла;
б) знаходячи дійсний розподіл заряду по тілу і враховуючи це в розрахунку.

Нехай відповідні значення сил дорівнюють F_1 і F_2. Тоді, якщо відношення | $\dfrac{F_1 - F_2}{F_2}$ менше заданої відносної похибки обчислень при будь-якому виборі точки зосередження заряду всередині тіла і також справедливе для будь-якого кута між векторами F_1 і F_2, наше заряджене тіло є точковим зарядом.

Для ілюстрації даного визначення вимагається оцінити відносну похибку обчислення сили взаємодії двох заряджених кульок з однаковими радіусами, яка виникає при заміні кульок точковими зарядами.

Розв’язання. Розглянемо дві провідні кульки радіусом r кожна, центри яких розташовані на відстані R одна від одної, а заряди однакові за значенням і позитивні (рис. 1). У результаті електростатичної індукції ці заряди перемістяться до зовнішньої сторони кожної кульки.

Якби не було такого перерозподілу зарядів, то дві однорідно заряджених кульки взаємодіяли б так само, ніби заряд кожного з них був зосереджений в його центрі (що має місце при гравітаційній взаємодії двох кульок незалежно від їх радіусів і відстані між ними). Без урахування індукції сила кулонівської взаємодії кульок визначається виразом $F_1 = k\dfrac{q^2}{R^2}$ (k = 9. 10^9 м/Ф. Дійсна сила взаємодії F відрізняється від значення F_1.

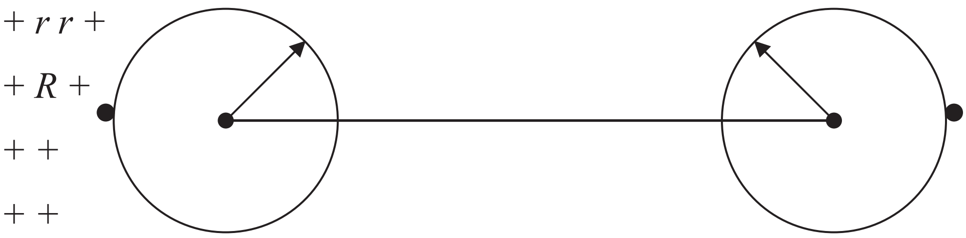


Рис. 1

Очевидно, нижню межу F_2 для сили F можна знайти, поклавши, що заряди кульок зосереджені у найбільш віддалених один від одного точках, тобто

$$F_2 = k\frac{q^2}{(R+2r)^2}.$$

Максимально можливу відносну похибку знаходимо із співвідношення

$$\frac{F_1 - F_2}{F_2} = \frac{\dfrac{1}{R^2} - \dfrac{1}{(R+2r)^2}}{\dfrac{1}{(R+2r)^2}}.$$

Хай r <<R. Тоді (див. примітку) $\dfrac{F_1 - F_2}{F_2} \approx \dfrac{4r}{R}$. Отже, якщо необхідна точність розрахунку складає 1%, то точковими можна рахувати лише заряди, зосереджені на тілах, лінійні розміри яких складають 0,5% від відстані між тілами. Зазначимо, що значення похибки визначене нами із запасом, оскільки очевидно, що заряди кульок не можуть бути зосереджені у найвіддаленіших одна від одної точках.

Примітка. У деяких фізичних задачах використовуються прості формули наближених обчислень, відомі, на жаль, не всім учням. Ці формули базуються на наступному загальному твердженні (доведення його справедливості виходить за рамки наших можливостей): для будь-яких дійсних m і таких дійсних x, що $|x| < 1$, справедлива рівність

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \ldots .$$

У випадку, коли $|x| << 1$, а m порядку одиниці (ситуація, що найбільш часто зустрічається у фізичних задачах), у нескінченній сумі можна обмежитися першими двома доданками, тобто нехтувати членами, що містять x^2, x^3 і т. д. (Якщо $|x| << 1$, тим більше $x^2 << 1$ і т. д.) Тоді отримуємо наближене, але дуже просте співвідношення $(1 + x)^m \approx 1 + mx$, що виконується тим точніше, чим більш строго виконується нерівність $|x| << 1$.

Остання формула, зокрема, дає:

$(1+x)^2 \approx 1+2x;$

$\frac{1}{(1+x)} = (1+x)^{-1} \approx 1-x;$ і так далі.

$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} \approx 1+\frac{x}{2}$

Якщо в тексті задачі або в процесі розв’язання зустрічаються дві однойменні величини а і А такі, що $|a| <<$ А (або $\left|\frac{a}{A}\right| << 1$), наведені формули можуть істотно спростити обчислення. Відносна похибка, яка вноситься при цьому до результату, наближено дорівнює $\frac{a^2}{A^2}$.

Наприклад:

$$\frac{A+a}{A-a} = \frac{1+\frac{a}{A}}{1-\frac{a}{A}} \approx (1+\frac{a}{A})(1+\frac{a}{A}) = (1+\frac{a}{A})^2 \approx 1+\frac{2a}{A}.$$

Для наочності: якщо $A = 100$, $a = 1$, значення дробу $\frac{A+a}{A-a}$, обчислене наближеним способом, складає 1,02, точне ж значення дорівнює 1,020202...

Іноді говорять! “Але, якщо $|x| << 1$, то чи не слід нехтувати і самим x порівняно з 1?”. Що ж, не виключено і таке. Але при цьому x може зникнути в кінцевому результаті, що, зрозуміло, неприпустимо, якщо потрібно знайти якраз вплив значення x на цей результат. (Наприклад, праві частини всіх наведених вище формул перетворяться в 1, і стане невідомо, як значення x впливає на значення виразів виду

$$\frac{1}{1+x} \text{ або } (1+x)^{1/2}.$$

У даній задачі результат був отриманий після наступних перетворень:

$$\frac{\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+2r)^2}}{\frac{1}{(R+2r)^2}} = \left(\frac{R+2r}{R}\right)^2 - 1 = \left(1+\frac{2r}{R}\right)^2 - 1 \approx 1 + \frac{4r}{R} - 1 = \frac{4r}{R}.$$

Використана література:

1. *Ащеулов С. В.* Задачи по элементарной физике : учебное пособие / С. В. Ащеулов, В. А. Барышев. – Л., 1974. – 114 с.
2. Теория и методика обучения физике в школе: Общие вопросы : учебное пособие для студентов высших педагогических учебных заведений / С. Е. Каменецкий, Н. С. Пурышева, Н. Е. Важеевская и др. ; под ред. С. Е. Каменецкого, Н. С. Пурышевой. – М. : Издательский центр "Академия", 2000. – 368 с.
3. *Каменецкий С. Е.* Методика решения задач по физике в средней школе / С. Е. Каменецкий, В. П. Орехов. – М., 1987.

Чумак Н. Е. Использование погрешностей измерений при решении физических задач.

В статье рассмотрен вопрос использования погрешностей измерения при решении физических задач, приведены конкретные примеры применения метода пределов.

Ключевые слова: *погрешность измерения, погрешность вычисления, физическая задача, решение задач.*

Chumak M. E. The use of errors of measurings during untiing of physical tasks.

In the article the question of the use of measuring errors is considered during untiing of physical tasks, the concrete examples of application of method of limits are resulted.

Keywords: *measuring error, error of calculation, physical task, untiing of tasks.*

УДК 378

Шарко В. Д.

Херсонський державний університет

ПІДГОТОВКА ВЧИТЕЛЯ ДО ЗАСТОСУВАННЯ МОДУЛЬНОЇ ТЕХНОЛОГІЇ НАВЧАННЯ УЧНІВ ФІЗИКИ ЯК ОДНОГО З ШЛЯХІВ УПРОВАДЖЕННЯ НОВОГО ДЕРЖАВНОГО СТАНДАРТУ БАЗОВОЇ І ПОВНОЇ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

У статті обґрунтовано доцільність використання модульної технології навчання учнів фізики в старшій профільній школі.

Ключові слова: *модульна технологія, навчання фізики, старша школа.*

Перехід школи на профільне навчання передбачав внесення змін до організації навчального процесу. Перелік цих змін включав і введення до навчальних планів курсів за вибором учнів, які в основній школі повинні готувати школярів до вибору майбутньої професії і відповідного профілю навчання, а в старшій школі – здійснювати поглиблене вивчення тих предметів, які пов'язані з обраними професіями і дають можливість забезпечити наступність між середньою і спеціальною освітою; готувати випускників до опанування програми вищої професійної освіти; створювати умови для здійснення диференціації змісту навчання з можливим вибором старшокласниками індивідуальних траєкторій навчання.

Попри те, що МОН України були визначені вимоги до кількості проведення елективних курсів в основній і старшій школі, а також наведені рекомендації щодо типів, тематики та оцінювання результатів навчальних досягнень учнів на заняттях такого типу, в більшості обстежених нами шкіл елективні курси в основній і старшій школі не викладаються. Причину такого становища адміністратори шкіл пов'язують з обмеженістю фінансування освітньої галузі і відсутністю можливості поділу класів на групи. На підставі зазначеного можна дійти висновку, що один з нормативно передбачених способів організації навчання учнів фізики у профільних класах не реалізується належним чином.

У Державному стандарті базової і повної загальної середньої освіти, затвердженому