Видав. група "Основа", 2003. – 240 с.

3. *Калініна Л. М.* Система інформаційного забезпечення управління загальноосвітнім навчальним закладом : моногр. / Л. М. Калініна. – К. : Айлант, 2005. – 275 с.
4. *Маслов В. І.* Система інформації та комп'ютерні технології в управлінні школою / В. І. Маслов та ін. – К. : ІЗМН, 1996. – 80 с.
5. Національна доктрина розвитку освіти України у XXI ст.
6. *Пікельна В. С.* Управління школою / В. С. Пекельна, О. А. Удод. – К. : Альфа, 1998. – 260 с.
7. *Жалдак М. І.* Проблеми інформатизації навчального процесу в школі і вузі / М. І. Жалдак // Сучасна інформаційна технологія в навчальному процесі / зб. наук. пр. – Київ. пед. ін.-т імені М. П. Драгоманова / відп. ред. М. І. Шкіль. – К., 1991. – С. 3-16.

Маковецкая Л. С. Информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности менеджера образования

В статье рассматривается актуальная проблема использования информационно-коммуникационных технологий, анализ причин трудностей их внедрению и пути преодоления этих проблем в профессиональной деятельности менеджера образования.

Ключевые слова: *инновация, технология, компетентность, управление, информационно-комуникационные технологии.*

Makovetskaya L. S. Information and communication technologies in professional activity of education manager.

The article deals with the actual problem of information and communication technologies, analysis of the causes of the difficulties of their implementation and ways to overcome these problems in professional education manager.

Keywords: *innovation, technology, introduction, competence, management, information communicative technology.*

УДК 373.5.016:534

Мацюк В. М., Федачківський В. Д.
Тернопільський національний педагогічний університет
імені Володимира Гнатюка

ЗАСТОСУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРІЇ ТА МЕТОДІВ СУМУВАННЯ БЕЗМЕЖНО МАЛИХ ВЕЛИЧИН ПІД ЧАС ТЕОРЕТИЧНОГО ВИВЧЕННЯ МЕХАНІЧНИХ КОЛИВАНЬ НА ПРОФІЛЬНОМУ РІВНІ НАВЧАННЯ

У статті розглянуто проблему, пов'язану із науковістю та доступністю викладу навчального матеріалу під час теоретичного вивчення розділу фізики "Механіка" на профільному рівні навчання у 10-их класах ЗОШ. Розроблено методику теоретичного вивчення теми "Механічні коливання" на профільному рівні навчання. В межах розробленої методики не використовується диференціальне, інтегральне та комплексне числення.

Ключові слова: *вивчення механічних коливань, профільний рівень навчання, гармонічні коливання, додавання коливань, горизонтальний пружинний маятник, диференціальне числення в шкільному курсі фізики, тригонометричні методи, методи сумування безмежно малих величин.*

Відповідно до Державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти, затвердженого постановою Кабінету міністрів України № 1392 від 23.11.2011 р., фізику та математику віднесено до різних освітніх галузей [1]. Це може ускладнювати організацію із узгодження навчальних програм з цих дисциплін. У зв'язку із цим, складається ситуація, за якої, наприклад, елементи математичного аналізу учні починають вивчати аж в 11-му класі ЗОШ у той час, як їм же необхідні доволі ґрунтовні знання із диференціального числення під час вивчення механіки в 10-их класах на профільному рівні навчання [2].

Можна виокремити такі, пов'язані із недостатньою математичною базою учнів, основні проблеми, які виникають під час теоретичного вивчення механіки на профільному рівні навчання.

По-перше, до таких проблем можна віднести необхідність виведення учнями основних рівнянь гармонічних коливань. Диференціюючи по часу рівняння для координати коливного тіла $x = A\sin\left(\omega t + \varphi_0\right)$, учні повинні отримати відповідні рівняння для проекції швидкості та прискорення цього тіла. Враховуючи те, що учні 10-их класів ще не засвоїли на достатньому рівні основи диференціального числення, в одному із шкільних підручників профільного рівня навчання під час виведення основних рівнянь гармонічних коливань написано таке: “З курсу математики вам буде відомо, що: $(\cos kx)' = -k\sin kx$; $(\sin kx)' = k\cos kx$” [3]. Однак, такий констатуючий підхід у теоретичних викладах, на нашу думку, не дає змоги учням глибоко усвідомлювати виведення згаданих рівнянь.

По-друге, існує проблема, пов’язана із обґрунтуванням того, що коливання горизонтального пружинного маятника є гармонічними. Справа у тому, що для доведення того, що коливання такого маятника є гармонічними, учням слід би було мати принаймні навики із інтегрування та, навіть, із розв’язування найпростіших диференціальних рівнянь.

По-третє, виникає також схожа проблема під час вивчення з учнями теми “Додавання гармонічних коливань”. В підручниках з фізики профільного рівня навчання учням пропонується додавати гармонічні коливання за допомогою так званого методу векторних діаграм [3]. Однак, разом з тим, сам метод векторних діаграм жодним чином не обґрунтовується. У допитливих учнів, закономірно, можуть виникнути, зокрема, такі питання: чому амплітуди коливань можна подати у вигляді векторів; чому ці вектори слід направляти до певної осі під кутами, рівними початковим фазам коливань, тощо. Проблема тут полягає у тому, що метод векторних діаграм обґрунтовується із використанням комплексного числення [4].

У науково-методичній літературі неодноразово велась мова про неузгодженість навчальних програм з фізики та математики [5]. Порушувалась проблема вивчення механіки на профільному рівні навчання, пов’язана із відсутністю в учнів 10-их класів ЗОШ ґрунтовних знань із основ диференціального числення, необхідних їм для ефективного засвоєння навчального матеріалу з фізики [6].

Проблема науковості та доступності під час теоретичного вивчення механіки на профільному рівні навчання розглядалась, зокрема, в кандидатському дисертаційному дослідженні Марченко О. А. [7]. В межах зазначеного дослідження було з’ясовано, зосібна, що під час вивчення механіки на профільному рівні навчання відводиться надто мало часу для ознайомлення учнів із основами диференціального та інтегрального числення, володіння знаннями із яких є передумовою усвідомленого сприймання учнями навчального матеріалу із цього розділу фізики. Марченко О. А. доволі категорично виступає проти поверхневого ознайомлення учнів із диференціальним та інтегральним численням [8]. Тому у згаданій кандидатській дисертації було розроблено та обґрунтовано необхідність вивчення учнями інтегративного курсу “Мехматика”, в межах якого вивчення теоретичного матеріалу з механіки поєднується із доволі глибоким вивченням необхідних для розуміння фізики елементів математичного аналізу [9].

Ми ж пропонуємо альтернативний підхід щодо вирішення проблеми науковості та доступності вивчення теоретичного матеріалу з механіки на профільному рівні навчання. Одна із чеснот пропонованого нами підходу полягає у тому, що у його межах немає нагальної потреби виокремлювати на уроках фізики багато часу для вивчення учнями основ диференціального та інтегрального числення.

Метою статті є розробка методики теоретичного вивчення теми “Механічні коливання” на профільному рівні навчання без використання диференціального, інтегрального та комплексного числення.

З метою реалізації поставленої мети визначено такі **завдання**: запропонувати метод виведення основних рівнянь гармонічних коливань без використання диференціального числення; розробити метод, у якому не використовується інтегральне числення та який надає змогу довести те, що коливання горизонтального пружинного маятника є гармонічними; запропонувати метод додавання двох гармонічних коливань однакового напряму та однакової частоти без використання векторних діаграм; проаналізувати ці методи з точки зору методики навчання фізики.

Основна частина. Щоб усвідомлено сприймати запропоновані нижче теоретичні викладки учні повинні:

– знати формулу для різниці синусів

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};\ (1)$$

– знати формулу для різниці косинусів

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2};\ (2)$$

– знати формулу для синуса суми двох кутів

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;\ (3)$$

– знати формулу для косинуса різниці двох кутів

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;\ (4)$$

– знати, що за малих кутів α

$\sin\alpha \approx \alpha$.

– знати таку математичну лему:

Лема 1. Якщо a і b – такі дійсні числа, що $a^2 + b^2 = 1$, то існує такий кут φ, що $\cos\varphi = a$ і $\sin\varphi = b$.

Натомість, у межах розробленої нами методики від учнів не вимагається наявність знань із основ диференціального, інтегрального та комплексного числення.

Виведення основних рівнянь гармонічних коливань. Гармонічними називають такі коливання, під час яких координата x тіла, яке коливається, змінюється з часом t за законом синуса (або косинуса)

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0),\ (5)$$

де A, ω, φ_0 – амплітуда, циклічна частота та початкова фаза коливань відповідно.

Залежності від часу проекцій на вісь OX швидкості та прискорення цього тіла можна отримати, зокрема, за допомогою диференціювання формули (5). Однак, такий підхід вимагає від учнів не лише знання табличних похідних, але також і наявності вмінь диференціювання, зокрема, складених функцій. Разом з тим, існує альтернативний метод, який не вимагає від учнів наявності вмінь обчислювати похідні складених функцій.

Нехай, починаючи з деякого моменту часу t, за короткий проміжок часу Δt ($\Delta t \to 0$) тіло, яке коливається, перемістилось із точки з координатою x у точку з координатою $x + \Delta x$. Тоді

$$\begin{cases} x = A\sin(\omega t + \varphi_0), \\ x + \Delta x = A\sin(\omega(t+\Delta t) + \varphi_0), \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Delta x = (x + \Delta x) - x = A\Big(\sin(\omega(t+\Delta t) + \varphi_0) - \sin(\omega t + \varphi_0)\Big).$$

Тому, враховуючи формулу для різниці синусів (1), отримаємо

$$\Delta x = 2A\sin\frac{\left(\omega(t+\Delta t)+\varphi_0\right)-\left(\omega t+\varphi_0\right)}{2}\cos\frac{\left(\omega(t+\Delta t)+\varphi_0\right)+\left(\omega t+\varphi_0\right)}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Delta x = 2A\sin\frac{\omega\Delta t}{2}\cos\left(\omega t+\varphi_0+\frac{\omega\Delta t}{2}\right). \quad (6)$$

Оскільки, інтервал часу Δt малий ($\Delta t \to 0$), то $\sin\left(\omega\Delta t/2\right) \approx \omega\Delta t/2$, $\cos\left(\omega t+\varphi_0+\omega\Delta t/2\right) \approx \cos\left(\omega t+\varphi_0\right)$. Тому (6) набуде вигляду

$$\Delta x = 2A\frac{\omega\Delta t}{2}\cos\left(\omega t+\varphi_0\right) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = A\omega\cos\left(\omega t+\varphi_0\right).$$

Отже, проекція на вісь OX миттєвої швидкості тіла, яке коливається,

$\upsilon_x = A\omega\cos\left(\omega t+\varphi_0\right)$. (7)

Схожим чином можна отримати залежність від часу проекції на вісь OX прискорення тіла, яке здійснює коливний рух. Нехай, починаючи з деякого моменту часу t, за короткий інтервал часу Δt ($\Delta t \to 0$) проекція на вісь OX миттєвої швидкості тіла, яке коливається, змінилась на величину $\Delta\upsilon_x$. Тоді

$$\begin{cases} \upsilon_x = A\omega\cos\left(\omega t+\varphi_0\right), \\ \upsilon_x+\Delta\upsilon_x = A\omega\cos\left(\omega(t+\Delta t)+\varphi_0\right), \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Delta\upsilon_x = \left(\upsilon_x+\Delta\upsilon_x\right)-\upsilon_x = A\omega\left(\cos\left(\omega(t+\Delta t)+\varphi_0\right)-\cos\left(\omega t+\varphi_0\right)\right).$$

Тому, враховуючи формулу для різниці косинусів (2), отримаємо

$$\Delta\upsilon_x = 2A\omega\sin\frac{\left(\omega t+\varphi_0\right)-\left(\omega(t+\Delta t)+\varphi_0\right)}{2}\sin\frac{\left(\omega(t+\Delta t)+\varphi_0\right)+\left(\omega t+\varphi_0\right)}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Delta\upsilon_x = -2A\omega\sin\frac{\omega\Delta t}{2}\sin\left(\omega t+\varphi_0+\frac{\omega\Delta t}{2}\right). \quad (8)$$

Оскільки, інтервал часу Δt малий ($\Delta t \to 0$), то $\sin\left(\omega\Delta t/2\right) \approx \omega\Delta t/2$, $\sin\left(\omega t+\varphi_0+\omega\Delta t/2\right) \approx \sin\left(\omega t+\varphi_0\right)$. Тоді (7) набуде вигляду

$$\Delta\upsilon_x = -2A\omega\frac{\omega\Delta t}{2}\sin\left(\omega t+\varphi_0\right) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta\upsilon_x}{\Delta t} = -A\omega^2\sin\left(\omega t+\varphi_0\right).$$

Отже, проекція на вісь OX прискорення тіла, яке коливається,

$a_x = -A\omega^2\sin\left(\omega t+\varphi_0\right)$. (9)

Як бачимо, на підставі дефініції гармонічних коливань (5), можна без використання диференціального числення вивести формули (7) та (9), які задають залежності від часу проекцій на вісь ОХ швидкості та прискорення тіла, яке здійснює коливний рух. У порівнянні із методом, який полягає у диференціюванні функціональної залежності (5), тригонометричний метод виведення формул (7) та (9) може виявитись більш зрозумілим учням 10-их класів фізико-математичного профілю за умови, що у таких класах недостатньо часу відводилось на розв'язування задач, пов'язаних із обчисленням похідних.

Додавання двох гармонічних коливань однакового напряму та однакової частоти. У деяких випадках тіло може брати участь у кількох коливаннях одночасно. Нехай, наприклад, деякий візок здійснює гармонічні коливання відносно горизонтальної осі ОХ, яка пов'язана із поверхнею Землі (рис. 1). До того ж, нехай, коливання цього візка відносно осі ОХ (відносно поверхні Землі) можна описати рівнянням гармонічних коливань

$$x_1 = A_1 \sin\left(\omega t + \varphi_1\right)$$

де x_1 – зміщення візка відносно поверхні Землі (координата візка відносно осі ОХ) у момент часу t; A_1, ω, φ_1 – амплітуда, циклічна частота та початкова фаза коливань візка відносно поверхні Землі відповідно.

Пов'яжемо із візком деяку горизонтальну вісь $\mathrm{O'X'}$, паралельну осі ОХ. Нехай, на візку знаходиться деяке тіло (рис. 1), коливання якого відносно осі $\mathrm{O'X'}$ (відносно візка) відбуваються із тією ж самою циклічною частотою ω та описуються рівнянням гармонічних коливань

$$x_2 = A_2 \sin\left(\omega t + \varphi_2\right),$$

де x_2 – зміщення тіла відносно візка (координата тіла відносно осі $\mathrm{O'X'}$) у момент часу t; A_2, ω, φ_2 – амплітуда, циклічна частота та початкова фаза коливань тіла відносно візка відповідно.

Нехай x – координата відносно осі ОХ (зміщення відносно поверхні Землі) тіла, яке знаходиться на візку. Рух цього тіла відносно поверхні Землі складається з руху тіла відносно візка та руху візка відносно поверхні Землі. Тому зміщення x тіла відносно поверхні Землі дорівнює сумі зміщення x_2 тіла відносно візка та зміщення x_1 візка відносно поверхні Землі (рис. 1)

$$x = x_1 + x_2.$$

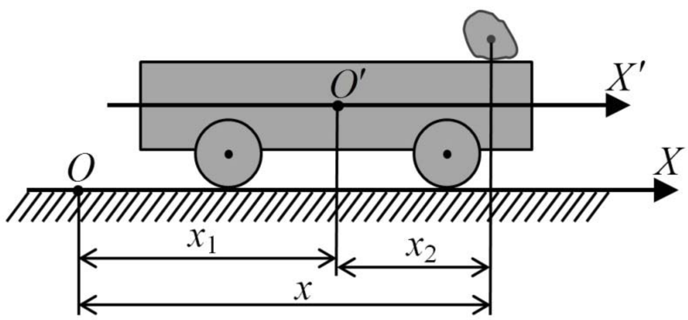

Рис. 1. Коливний рух візка та коливання деякого тіла відносно цього візка

Отже, координата x тіла відносно осі ОХ (відносно поверхні Землі) змінюється із плином часу t так

$$x = A_1 \sin\left(\omega t + \varphi_1\right) + A_2 \sin\left(\omega t + \varphi_2\right). \quad (10)$$

Щоб на підставі (10) знайти результуюче коливання у шкільних підручниках з фізики профільного рівня послуговуються так званим методом векторних діаграм. Однак, такий підхід до розв’язання цієї задачі не надає змоги учням доволі глибоко зрозуміти причинно-наслідкові зв’язки, оскільки за такого підходу недостатньо обґрунтовується як сам метод векторних діаграм, так і те чому амплітуди коливань можна подати у вигляді векторів. Разом з тим, можна скористатись таким тригонометричним методом.

Враховуючи формулу для синуса суми кутів (3), із (10) отримаємо

$$x = A_1 \sin\omega t \cos\varphi_1 + A_1 \cos\omega t \sin\varphi_1 + A_2 \sin\omega t \cos\varphi_2 + A_2 \cos\omega t \sin\varphi_2 =$$

$$= \left(A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2\right)\sin\omega t + \left(A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2\right)\cos\omega t.$$

Позначимо $C_1 = A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2$, $C_2 = A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2$. Тоді остання формула набуде вигляду

$$x = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\sin\omega t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\cos\omega t\right) \quad (11)$$

Оскільки, $\left(C_1 \big/ \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\right)^2 + \left(C_2 \big/ \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\right)^2 = 1$, то згідно із лемою 1 існує такий кут φ, що

$$\cos\varphi = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \text{ і } \sin\varphi = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \quad (12)$$

Тоді

$$tg\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{C_2 \big/ \sqrt{C_1^2 + C_2^2}}{C_1 \big/ \sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \frac{C_2}{C_1}$$

Оскільки ж $C_1 = A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2$, $C_2 = A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2$, то остання формула набуде вигляду

$$tg\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}. \quad (13)$$

Із урахуванням (13) формула (11) набуде вигляду

$$x = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\left(\cos\varphi \sin\omega t + \sin\varphi \cos\omega t\right).$$

Враховуючи (3), остання формула набуде вигляду

$$x = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\sin\left(\omega t + \varphi\right).$$

Оскільки ж $C_1 = A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2$, $C_2 = A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2$, то на підставі останньої формули остаточно отримаємо, що

$$x = A\sin\left(\omega t + \varphi\right), \quad (14)$$

де

$$A = \sqrt{\left(A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2\right)^2 + \left(A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2\right)^2} =$$

$$= \sqrt{A_1^2\left(\cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1\right) + A_2^2\left(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2\right) + 2A_1A_2\left(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2\right)} =$$

$$= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\left(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2\right)}.$$

Враховуючи формулу для косинуса різниці кутів (4), остання формула набуде вигляду

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}. \quad (15)$$

Таким чином, на підставі формул (13), (14) та (15) видно, що у результаті додавання двох гармонічних коливань $x_1 = A_1\sin(\omega t + \varphi_1)$ та $x_2 = A_2\sin(\omega t + \varphi_2)$ однакової частоти та однакового напряму, отримуємо гармонічне коливання $x = A\sin(\omega t + \varphi)$ такої ж самої циклічної частоти ω та таких амплітуди A і початкової фази φ, що $tg\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$, $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$.

Гармонічний характер коливань горизонтального пружинного маятника (доведення). Розглянемо власні коливання горизонтального пружинного маятника та обґрунтуємо, що ці коливання є гармонічними, тобто доведемо, що такі коливання можна описати залежністю (5). Введемо горизонтальну вісь OX таку, що її координата $x = 0$ відповідає положенню рівноваги тіла, яке здійснює коливний рух, а напрям осі OX співпадає із напрямом видовження пружини маятника (рис. 2). За таких умов коливання будуть відбуватись під дією сили пружності $\vec{F}_{пр}$, проекція якої на вісь OX $F_x = -kx$, де $k > 0$ – жорсткість пружини маятника, x – координата тіла, яке коливається. Нехай $A > 0$ – амплітуда таких коливань. Згідно із законом збереження енергії

$$\frac{m\upsilon_x^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}, \text{ звідки } \upsilon_x^2 + \frac{k}{m}x^2 = \frac{k}{m}A^2,$$

де υ_x – проекція на вісь OX миттєвої швидкості тіла, яке коливається, у момент коли це тіло знаходиться в точці з координатою x ($-A \le x \le A$); m – маса тіла, яке здійснює коливний рух.

Обмежимось розглядом коливного руху тіла на ділянці між точками з координатами $x = 0$ та $x = A$. Якщо тіло, пройшовши повз положення рівноваги, рухається у напрямку точки з координатою $x = A > 0$, то проекція його швидкості на вісь OX $\upsilon_x > 0$. Тому із записаного вище закону збереження енергії отримаємо

$$\upsilon_x = \sqrt{k/m}\,\sqrt{A^2 - x^2}. \quad (16)$$

Тоді, щоб довести, що коливання горизонтального пружинного маятника є гармонічними у підручниках із загальної фізики записують та розв'язують таке диференціальне рівняння першого порядку із відокремлюваними змінними

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)}.$$

Однак, відповідно до навчальних програм з математики та фізики учні 10-их класів із поняттям інтеграла та техніками інтегрування ще не знайомі [2]. Тому такий підхід щодо доведення гармонічності коливань пружинного маятника тут не бажаний. У зв'язку із цим нами розроблено альтернативний метод такого доведення, який від учнів не вимагає наявності знань, які можуть виходити за межі шкільної програми. Пропонований метод доведення, вірогідно, здібним учням 10-их класів профільних фізико-математичних шкіл буде зрозумілим, а декому із них він, можливо, навіть видасться доволі цікавим.

Відрізок, що з'єднує точки з координатами $x = 0$ та $x = A$ розіб'ємо точками $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ (де $x_0 = 0$, $x_n = A$) на n рівних частин довжини A/n кожна (рис. 2).

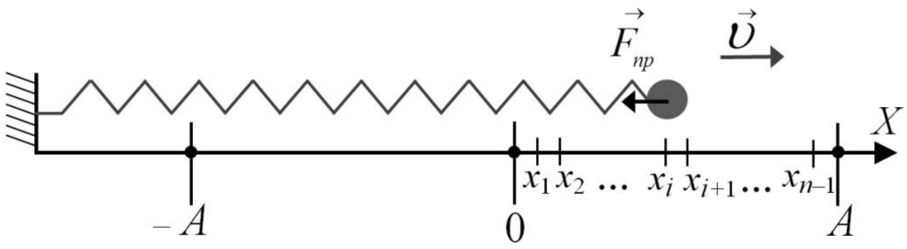

Рис. 2. Власні коливання горизонтального пружинного маятника

Оскільки, кожен із i (де $1 \le i \le n$) відрізків $[x_0; x_1]$, $[x_1; x_2]$, …, $[x_{i-1}; x_i]$ має одну і ту ж саму довжину рівну A/n, то сума довжин цих відрізків дорівнює $(A/n)i$. З іншого боку, сума довжин згаданих відрізків дорівнює довжині відрізка $[x_0; x_i]$, довжина якого у свою чергу дорівнює координаті його правого кінця x_i (бо $x_0 = 0$). Тому, із наведених геометричних міркувань, для довільного i ($i = 0; 1; 2; \ldots; n$)

$$x_i = \frac{A}{n} i \,. \quad (17)$$

Нехай $\vec{\upsilon}_i$ – миттєва швидкість тіла, яке здійснює коливний рух, у точці з координатою $x = x_i$. Тоді, враховуючи (16) та (17), абсолютне значення цієї швидкості дорівнює

$$\upsilon_i = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{A^2 - x_i^2} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{A^2 - \frac{A^2}{n^2} i^2} = \frac{A}{n} \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{n^2 - i^2} \quad (18)$$

Якщо ж n є доволі великим числом ($n \to \infty$), то кожен із відрізків $[x_i; x_{i+1}]$ довжини A/n є настільки малим, що можна вважати, що від точки з координатою $x = x_i$ до точки з координатою $x = x_{i+1}$ тіло рухається практично зі сталою швидкістю рівною його миттєвій швидкості у точці $x = x_i$, тобто зі швидкістю $\vec{\upsilon}_i$. Тому, із врахуванням (18), за умови великого n, відстань між точками з координатами $x = x_i$ та $x = x_{i+1}$ тіло подолає за проміжок часу Δt_i рівний

$$\Delta t_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{\upsilon_i} = \frac{A}{n} \frac{1}{\upsilon_i} = \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{1}{\sqrt{n^2 - i^2}} \,.$$

Звідси випливає, що відстань між точками $x = 0$ та $x = x_1$ тіло подолає за інтервал часу $\Delta t_0 = \sqrt{m/k}\,/n$, відстань між точками $x = x_1$ та $x = x_2$ – за проміжок часу $\Delta t_1 = \sqrt{m/k}\,/\sqrt{n^2 - 1^2}$, відстань між точками $x = x_2$ та $x = x_3$ – за інтервал часу $\Delta t_2 = \sqrt{m/k}\,/\sqrt{n^2 - 2^2}$, …, відстань між деякими точками з координатами $x = x_{j-1}$ та $x = x_j$ ($1 \le j \le n$) тіло подолає за інтервал часу $\Delta t_{j-1} = \sqrt{m/k}\,/\sqrt{n^2 - (j-1)^2}$. Таким чином, прийдемо до висновку, що із положення рівноваги (із точки з координатою $x = 0$) у деяку точку з координатою $x = x_j$ тіло переміститься за інтервал часу Δt рівний

$$\Delta t = \Delta t_0 + \Delta t_1 + \Delta t_2 + \ldots + \Delta t_{j-1} = \sqrt{\frac{m}{k}}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 2^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2 - (j-1)^2}}\right) \quad (19)$$

Нехай у початковий момент часу $t_0 = 0$ тіло, яке здійснює коливний рух, знаходилось у точці $x = 0$. Тоді, враховуючи (19), у точці з координатою $x = x_j$ ($1 \le j \le n$) це тіло буде знаходитись у такий момент часу $t = t_0 + \Delta t = \Delta t$, для якого

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 2^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2 - (j-1)^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\, t\,. \quad (20)$$

Необхідно певним чином обчислити суму у лівій частині рівності (20) за умови великих n (при $n \to \infty$). Можна математично довести, що за умови великих n для довільного натурального j ($1 \le j \le n$)

$$\sin\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 2^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2 - (j-1)^2}}\right) \approx \frac{j}{n} \quad (21)$$

Доведення останнього твердження є суто математичним та буде подано нами нижче. Однак, зауважимо, що у певних випадках твердження (21) можна було б не доводити з учнями, а просто подати його як відомий факт, залишивши таке доведення на розгляд найдопитливішим учням.

Враховуючи (20) та (21), отримаємо, що тіло, яке коливається, буде знаходитись у точці з координатою $x = x_j$ ($1 \le j \le n$) у такий момент часу t, для якого

$$\frac{j}{n} = \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right).$$

Оскільки ж, згідно із (17) $x_j = \frac{A}{n} j$, то $\frac{j}{n} = \frac{x_j}{A}$. Отже, тіло, яке здійснює коливний рух, буде знаходитись у точці з координатою x_j у момент часу t, для якого

$$\frac{x_j}{A} = \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right).$$

Останнє твердження означає, що координата x тіла, яке коливається, змінюється із часом t за законом

$$x = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right). \quad (22)$$

Отже, у такий спосіб ми довели, що коливання горизонтального пружинного маятника дійсно є гармонічними. До того ж, із формули (22) видно, що циклічна частота таких коливань $\omega = \sqrt{k/m}$. Тому запропонований вище підхід також дає змогу отримати формулу для періоду $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$ коливань горизонтального пружинного маятника.

Залишилось лише математично довести справедливість формули (21) за умови великих n (при $n \to \infty$). З цією метою скористаємось не широко відомими методами сумування безмежно малих величин [10].

Розглянемо дугу кола радіуса $R = 1$, на яку спирається центральний кут рівний $\pi/2$ (рис. 3).

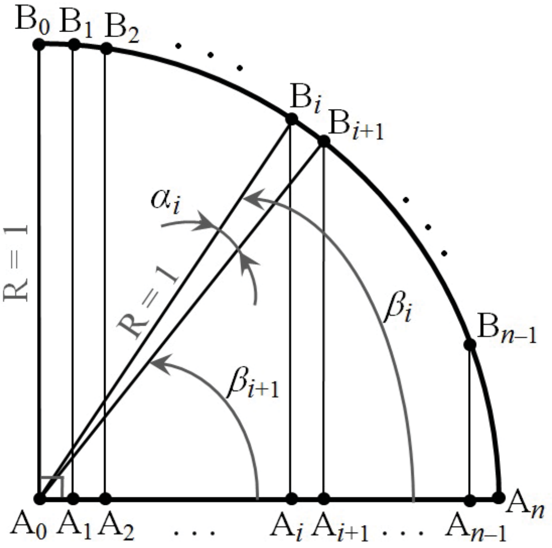

Рис. 3. Допоміжний геометричний рисунок: дуга кола радіуса $R = 1$, на яку спирається центральний кут рівний $\pi/2$

Один із радіусів цього кола розіб'ємо точками $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, ..., \mathrm{A}_n$ (де A_0 – центр кола) на n рівних відрізків довжини $R/n = 1/n$ кожний (рис. 3). Тоді для довільного натурального i ($1 \le i \le n$)

$$\left|\mathrm{A}_0\mathrm{A}_i\right| = \left|\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1\right| + \left|\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\right| + \left|\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\right| + ... + \left|\mathrm{A}_{i-1}\mathrm{A}_i\right| = \frac{1}{n}i \quad (23)$$

.

Крізь точки $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, ..., \mathrm{A}_{n-1}$ проведемо прямі перпендикулярні до радіуса $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_n$. Нехай ці прямі перетнуть дугу кола у точках $\mathrm{B}_0, \mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, ..., \mathrm{B}_{n-1}$ відповідно (рис. 3). Позначимо $\alpha_i = \angle \mathrm{B}_i\mathrm{A}_0\mathrm{B}_{i+1}$, $\beta_i = \angle \mathrm{B}_i\mathrm{A}_0\mathrm{A}_n$, де $i = 0; 1; 2; ...; n-1$ (рис. 3). Тоді, як видно із рис. 3, для довільного натурального j ($1 \le j \le n$)

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{j-1} = \angle \mathrm{B}_0\mathrm{A}_0\mathrm{B}_j = \frac{\pi}{2} - \beta_j \quad (24)$$

.

Враховуючи (23), із прямокутного трикутника $\mathrm{B}_i\mathrm{A}_i\mathrm{A}_0$ отримаємо

$$\cos\beta_i = \frac{\left|\mathrm{A}_0\mathrm{A}_i\right|}{R} = \frac{\left|\mathrm{A}_0\mathrm{A}_i\right|}{1} = \frac{1}{n}i\,. \quad (25)$$

Аналогічно із прямокутного трикутника $\mathrm{B}_{i+1}\mathrm{A}_{i+1}\mathrm{A}_0$ отримаємо

$$\cos\beta_{i+1} = \frac{\left|\mathrm{A}_0\mathrm{A}_{i+1}\right|}{R} = \frac{\left|\mathrm{A}_0\mathrm{A}_{i+1}\right|}{1} = \frac{1}{n}\left(i+1\right).$$

Тоді

$$\cos\beta_{i+1}-\cos\beta_i=\frac{1}{n}(i+1)-\frac{1}{n}i=\frac{1}{n}.$$

Тому, враховуючи формулу для різниці косинусів (2), отримаємо

$$2\sin\frac{\beta_i-\beta_{i+1}}{2}\sin\frac{\beta_i+\beta_{i+1}}{2}=\frac{1}{n}.$$

Однак, $\beta_i-\beta_{i+1}=\alpha_i$, а тому остання формула набуде вигляду

$$2\sin\frac{\alpha_i}{2}\sin\frac{\beta_i+\beta_{i+1}}{2}=\frac{1}{n}\quad(26).$$

Якщо ж n є доволі великим числом ($n\to\infty$), то кожен із відрізків $A_{i-1}A_i$ довжини $1/n$ є малим ($1/n\to 0$). Тоді малими є всі дуги кола $B_{i-1}B_i$. Отже, малим також є кут α_i ($\alpha_i\to 0$) і до того ж $\beta_i\approx\beta_{i+1}$ ($\beta_i-\beta_{i+1}=\alpha_i\to 0$). Тому за умови великих n $\sin\frac{\alpha_i}{2}\approx\frac{\alpha_i}{2}$, $\sin\frac{\beta_i+\beta_{i+1}}{2}\approx\sin\beta_i$. Тоді, за умови великого n (при $n\to\infty$) (26) набуде вигляду

$$\alpha_i\sin\beta_i=\frac{1}{n}.\ (27)$$

Разом з тим, $\sin\beta_i=\sqrt{1-\cos^2\beta_i}=\sqrt{1-(i/n)^2}=\frac{1}{n}\sqrt{n^2-i^2}$. Тоді (27) набуде вигляду

$$\alpha_i\frac{1}{n}\sqrt{n^2-i^2}=\frac{1}{n}\quad\Rightarrow\quad\alpha_i=\frac{1}{\sqrt{n^2-i^2}}.$$

Тому на підставі останньої формули отримаємо, що для довільного натурального j ($1\le j\le n$)

$$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{j-1}=\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(j-1)^2}}.$$

Тоді із урахуванням (24) матимемо, що

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(j-1)^2}}=\frac{\pi}{2}-\beta_j\quad\Rightarrow$$

$$\sin\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(j-1)^2}}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta_j\right)=\cos\beta_j.$$

Оскільки, до того ж, згідно із (25) $\cos\beta_j=j/n$, то для довільного натурального j ($1\le j\le n$)

$$\sin\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(j-1)^2}}\right)=\frac{j}{n}.$$

Таким чином, справедливість формули (21) доведена.

Як бачимо, провести доведення того, що коливання горизонтального пружинного маятника є гармонічними, можна за допомогою методів, які від учнів не вимагають знань диференціального та інтегрального числення. Застосовувати ці методи, на наш погляд, можна на профільному рівні навчання, оскільки учні 10-их класів профільних фізико-математичних шкіл, вірогідно, в основному володіють достатніми рівнями знань та математичного мислення, необхідними для розуміння та доволі глибокого усвідомлення таких доведень. До того ж, використання методів сумування безмежно малих величин під час вивчення фізики може сприяти активізації пізнавальної діяльності учнів, інтереси яких частково чи значною мірою зміщені із вивчення фізики на вивчення математики. Використання під час вивчення фізики нестандартних математичних методів повинно також сприяти формуванню математичних компетентностей учнів на профільному рівні навчання.

Висновки. Можна виокремити такі основні чесноти використання розробленої нами методики під час теоретичного вивчення теми "Механічні коливання" на профільному рівні навчання фізики: усвідомлене сприймання учнями навчального матеріалу; науковість викладу навчального матеріалу; формування предметних компетентностей учнів з фізики шляхом дедуктивного викладу навчального матеріалу; формування математичних компетентностей учнів шляхом використання нестандартних математичних методів; активізація пізнавальної діяльності учнів, інтереси яких частково чи значною мірою зміщені із вивчення фізики на вивчення математики.

Насамкінець, слід зауважити, що використання розробленої нами методики аж ніяк не виключає можливості застосування поширених методів та підходів до вивчення механічних коливань на профільному рівні навчання фізики, а лише доповнює їх, надаючи можливість учителю обирати оптимальний метод вивчення відповідної теми із урахуванням особистісно-орієнтованого підходу у навчанні.

Використана література:

1. Державні стандарти освіти [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.mon.gov.ua/ua//often-requested/state-standards/. – Загол. з екрану. – Мова укр.
2. Навчальні програми для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.mon.gov.ua/ua/activity/education/56/general-secondary-education /educational_programs/1352202396/. – Загол. з екрану. – Мова укр.
3. *Засєкіна Т. М.* Фізика : підручник для 10 кл. загальноосвітніх навчальних закладів (профільний рівень) / Т. М. Засєкіна, М. В. Головко. – К. : Педагогічна думка, 2010. – 304 с.
4. *Матвеев А. Н.* Механика и теория относительности : учебник для студентов вузов / А. Н. Матвеев. – 3-е изд. – М. : Мир и Образование, 2003. – 432 с.
5. *Швець О., Бойко Л.* Міжпредметні зв'язки математики і фізики: стан, проблеми, перспективи // Фізика та астрономія в школі. – К., 2002. – № 6. – С. 21-25.
6. *Засєкіна Т. М.* Проблеми вдосконалення змісту шкільної фізичної освіти / Т. М. Засєкіна, Д. О. Засєкін // Збірник наукових праць Бердянського державного педагогічного університету. Серія : Педагогічні науки. – Бердянськ, 2011. – № 3. – С. 104-109.
7. *Марченко О. А.* Технологія вивчення теоретичного матеріалу з механіки у класах фізико-математичного профілю : автореф. дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Оксана Анатоліївна Марченко. – К., 2009. – 20 с.
8. *Марченко О. А.* Інтеграція знань з механіки та математики у старшій школі фізико-математичного профілю / О. А. Марченко, Ю. П. Мінаєв // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету. Серія : Педагогічні науки. – Чернігів, 2005. – Вип. 30. – С. 142-146.
9. *Марченко О. А.* Інтегративний курс "Мехматика" для старших класів фізико-математичного профілю / О. А. Марченко // Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського державного педагогічного університету: Серія педагогічна : Дидактики дисциплін фізико-математичної та технологічної освітніх галузей. – Кам'янець-Подільський, 2004. – № 10. – С. 117-119.
10. *Натансон И. П.* Суммирование бесконечно малых величин / И. П. Натансон. – 3-е изд., испр. – М. : Физматгиз, 1960. – 56 с. – (Популярные лекции по математике; № 12).

Мацюк В. М., Федачкивский В. Д. Применение тригонометрии и методов суммирования бесконечно малых величин при теоретическом изучении механических колебаний на профильном уровне обучения.

В статье рассмотрено проблему, связанную с научностью и доступностью изложения учебного материала при теоретическом изучении раздела физики "Механика" на профильном уровне обучения в 10-ых классах ООШ. Разработано методику теоретического изучения темы "Механические колебания" на профильном уровне обучения. В рамках разработанной методики не используется дифференциальное, интегральное и комплексное исчисление.

Ключевые слова: *изучение механических колебаний, профильный уровень обучения, гармонические колебания, суммирование колебаний, горизонтальный пружинный маятник, дифференциальное исчисление в школьном курсе физики, тригонометрические методы, методы суммирования бесконечно малых величин.*

Matsiuk V. M., Fedachkivskyy V. D. Using of trigonometry and summation methods of infinitely small quantities in the process of theoretical study of mechanical vibrations at the core teaching level.

This paper considers the problem caused in the process of theoretical studying of physics section "Mechanics" at the core teaching level in 10th grade of comprehensive secondary school. This problem is connected with scientism and accessibility of educational resources presentation. The methodology of theoretical study of the topic "Mechanical vibrations" has been developed at the core teaching level. The differential, integral and complex calculus hasn't been used in the developed methodology.

Keywords: *studying of mechanical vibrations, core teaching level of Physics, harmonica vibrations, fluctuations summing, horizontal spring pendulum, differential calculus in the school physics course, trigonometric methods, summing techniques of infinitely small quantities.*

УДК 372.853

Мислінчук В. О., Семещук І. Л., Тищук В. І.
Рівненський державний гуманітарний університет

РОЗВИТОК ВИВЧЕННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДІВ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ФІЗИКИ

У статті розглянуто роль фундаментальних дослідів у розвитку фізичних знань, їх класифікацію та запропоновано технологію організації і проведення навчального фізичного експерименту щодо вивчення фундаментальних фізичних дослідів в шкільному курсі фізики.

Ключові слова: *навчальний фізичний експеримент, фундаментальні фізичні досліди.*

На сьогодні, завдяки доступу до комунікаційних мереж, а також тому, що почали виходити у світ доступні вчителям і учням науково популярні журнали ("Наука и техника", "Наука и жизнь", "Вселення, пространство, время", "Гипотезы, теории, откриття", "Тайны XX века" та ін.), учні повсякчас стикаються з новинами світу науки, конкретними науковими результатами, досягнутими переважно завдяки плідному функціонуванню найновішого фізичного та астрофізичного наукового інструментарію (колайдера, космічних міжпланетних станцій, телескопів як наземного, так і космічного розташування тощо). Але, як засвідчують наші спостереження, навіть учні старших класів у переважній більшості не в змозі орієнтуватись у потужному інформаційному потоці наукових фактів, не можуть указати на найвагоміші, вирішальні, значущі тобто фундаментальні результати науковців, часто взагалі не розуміють процесу і механізму їх отримання, принципу дії сучасних приладів, експериментальних установок. Враховуючи те, що науково-інформаційний потік лише починає стрімко наростати, слід передбачити шляхи і способи ознайомлення учнів з фундаментальними науковими досягненнями в галузі природничих наук, зокрема, комплексу фізичних наук та астрофізики.

Методична школа кафедри теорії та методики навчання фізики і астрономії Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова (раніше КДПІ імені