Ключевые слова: *философские идеи, космическое мышление, системное мышление, культурология.*

Miroshnichenko Y. B., Sirotyuk V. D. Philosophical ideas of space thought as an inalienable element of scientific system thought in modern cultural logic.

In the article philosophical approaches are considered to forming in those, who studies, space thought, which is the inalienable element of scientific system thought in modern cultural logic which is basis of forming of the high-organized personality.

Keywords: *philosophical ideas, space thought, system thought, cultural logic.*

УДК 537.2 : 539.2 : 517.9

Мінаєв Ю. П., Лозовенко О. А., Калугін Д. І.
Запорізький національний університет

ОЗНАЙОМЛЕННЯ З ПРИЙОМОМ "КОРИСНЕ ДОДАВАННЯ НУЛЯ" НА ПРИКЛАДІ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНИХ ЗАДАЧ

У статті запропонована добірка задач з електростатики і на конкретних прикладах продемонстровано переваги застосування прийому корисного додавання нуля.

Ключові слова: *електростатична теорема Гаусса, розрахунки електростатичних полів, "штучні" прийоми.*

Цієї статтею ми продовжуємо роботу щодо звернення уваги науковців-методистів на ситуацію, що склалася в Україні з викладом окремих ключових питань загального курсу фізики в сучасних навчальних посібниках. У попередніх статтях [1; 2] були докладно проаналізовані фізичні помилки при викладі матеріалу з динаміки обертального руху твердого тіла і запропоновані дидактичні засоби, розробка яких мала на меті запобігти формуванню у студентів хибних уявлень з цієї навчальної теми. Критичним аналізом підручників з фізики для ВНЗ займаються й інші дослідники. Зокрема, автори робіт [5-8] критикують традиційне застосування теореми Гаусса для розрахунку електростатичних полів. Ми не можемо погодитися з аргументами цих авторів, які намагалися показати некоректність формулювання теореми Гаусса і традиційних способів її застосування в сучасних підручниках фізики. У нас виникла гіпотеза, що основна проблема авторів зазначених робіт пов'язана з неприйняттям ідеї використання такого "штучного" прийому, який можна було б назвати ***корисним додаванням нуля***.

Під час розв'язування математичних задач цей прийом застосовується досить часто. Застосування теореми Гаусса для випадків, які зазвичай розглядаються в підручниках фізики для ВНЗ [3; 4; 9], засноване на тому ж "штучному" прийомі з додаванням нуля. Там йдеться про обчислення напруженості "хороших" полів, що мають певну симетрію. Вдалий вибір замкненої поверхні дозволяє з елементарних міркувань отримати вираз для потоку вектора через цю поверхню, використовуючи лише геометричні параметри замкненої поверхні і значення шуканого модуля цього вектора (напрямок визначається з наявної симетрії розподілу заряду). Потім цей вираз залишається прирівняти до заряду, що знаходиться всередині замкненої поверхні, поділеному на електричну сталу, і виразити з цього рівняння шуканий модуль напруженості.

Під час отримання виразу для потоку ніякого інтегрування реально виконувати не доводиться. Замкнена поверхня обирається так, щоб її можна було розбити на ті частини, які взагалі не перетинаються силовими лініями, і ті, які орієнтовані перпендикулярно до силових ліній, причому модуль напруженості електричного поля поблизу цих останніх частин є скрізь однаковим і дорівнює шуканому значенню. Іншими словами, зовнішні по відношенню до замкненої поверхні заряди дають нульовий потік, але вони ж, разом із зарядами, що знаходяться всередині цієї замкненої поверхні, створюють “хороше”, зручне для розрахунків, поле. У цьому якраз і полягає зручність теореми Гаусса.

Отже, **мета даної статті** полягає у демонстрації переваг застосування під час розв’язування електростатичних задач прийому, який ми назвали ***корисним додаванням нуля***. З цим матеріалом бажано ознайомити не лише студентів університетів, а й учнів профільних фізико-математичних шкіл.

Задача про напруженість поля поблизу поверхні провідника. Розглянемо задачу про те, як пов’язаний модуль напруженості електростатичного поля *E* поблизу того місця поверхні провідника, де поверхнева густина заряду дорівнює σ (вважатимемо, що $\sigma > 0$).

Відповідь для цієї задачі можна знайти в будь-якому підручнику фізики, де обговорюється застосування теореми Гаусса: $E = \sigma / \varepsilon_0$. А як отримують цю відповідь? Виділяють настільки **маленьку** ділянку поверхні провідника, що цю ділянку можна вважати плоскою, а поверхневу густину заряду – однаковою на всій виділеній ділянці. Електростатичне поле поза провідником поблизу цієї ділянки можна буде вважати однорідним і спрямованим перпендикулярно до площини, яка є дотичною до поверхні провідника в точці, що нас цікавить. Усередині ж провідника електростатичного поля немає.

За замкнену поверхню, через яку **вигідно** обчислювати потік напруженості електростатичного поля, потрібно взяти поверхню **маленького** циліндра, бічна поверхня якого перпендикулярна до поверхні провідника в околі даної точки, а його основи – паралельні до неї. Основи циліндра співпадатимуть за формою і розмірами з виділеною нами ділянкою зарядженої поверхні, яка знаходиться всередині циліндра. Тоді заряд, що опинився всередині такої замкненої поверхні, буде дорівнювати $\sigma \Delta S$, де ΔS – площа виділеної ділянки, а також площа кожної з основ маленького циліндра, поверхня якого фігуруватиме в теоремі Гаусса.

Вдалий вибір замкненої поверхні дозволяє виразити потік через неї дуже просто, незважаючи на загрозливий вигляд поверхневого інтеграла, що стоїть у лівій частині формули, яка виражає електростатичну теорему Гаусса. Дійсно, силові лінії поля перетинатимуть цю замкнену поверхню лише на одній ділянці. Йдеться про ту основу циліндра, яка опинилася в практично однорідному полі поблизу поверхні провідника, причому вектор напруженості є перпендикулярним до цієї основи. Отже, вираз для шуканого потоку буде таким: $E \Delta S$, де *E* – модуль результуючого електричного поля, що створюється всіма зарядами провідника, а не тільки тими, які опинилися всередині обраної нами замкненої поверхні.

Залишилося прирівняти (відповідно до теореми Гаусса) отриманий вираз до заряду, що поділений на ε_0, а потім виразити шукане значення *E*. Таким чином, задача виявилася усною! І відповідь не залежить від того, якої форми була поверхня провідника, і як по ній був розподілений заряд. Шукане значення напруженості залежить лише від поверхневої густини заряду в тому місці, поблизу якого шукають значення напруженості поля.

Яка ж була роль тих зарядів, які не потрапили до нашого маленького циліндра, і розподіл яких по поверхні провідника ми навіть не знали? Вони додали той самий “нуль”, який зробив задачу усною! Вони створили таке поле, яке дає нульовий потік через поверхню того маленького циліндра, куди вони не потрапили, але їх поле разом з полем зарядів, що потрапили до згаданого циліндра, при додаванні дали настільки “хороше” результуюче поле, що його потік через указану замкнену поверхню виражався дуже просто через площу основи циліндра і значення напруженості цього результуючого поля (а саме його потрібно було знайти в задачі!). Адже ця площа, помножена на відому поверхневу густину заряду у фіксованому місці поверхні провідника, дала той заряд (усередині вибраної замкненої поверхні), який фігурує в правій частині формули, що виражає електростатичну теорему Гаусса. Таким чином, указана площа виявилася множником і в правій, і в лівій частинах рівняння. Ця обставина дозволила від неї позбавитися простим скороченням на неї правої і лівої частин рівняння.

Задача про заряджену кулю з порожниною. У рівномірно зарядженій з об'ємною густиною ρ кулі зроблена сферична порожнина, центр якої зміщений відносно центра кулі на відстань a. Визначити електричне поле всередині порожнини.

Для розв'язання цієї задачі необхідно попередньо знайти напруженість електричного поля всередині однорідно зарядженої кулі без порожнин. Тому першим етапом розв'язування задачі буде отримання відповідної формули за допомогою теореми Гаусса.

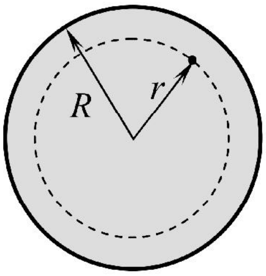

Рис. 1

Для цього за поверхню Гаусса оберемо сферичну поверхню всередині кулі $\left(r<R\right)$ так, щоб центри співпадали (рис. 1). Потік напруженості електричного поля через таку поверхню буде дорівнювати $E\cdot 4\pi r^2$, де E – модуль шуканої напруженості. За теоремою Гаусса цей потік має дорівнювати $\frac{Q}{\varepsilon_0}$, де Q – сумарний заряд, що охоплюється поверхнею. У нашому випадку його можна знайти так: $Q=\rho V=\rho\frac{4}{3}\pi r^3$. Остаточно отримуємо: $4\pi r^2 E=\frac{4}{3}\pi r^3\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, звідки $E=\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$.

Тепер перейдемо безпосередньо до розв'язування задачі. Застосуємо прийом додавання нуля: заповнимо подумки порожнину одночасно зарядами з протилежною за знаком густиною ($-\rho$ і ρ), тобто практично скористаємося тим, що $0=-\rho+\rho$. Тоді поле в порожнині можна розглядати як суперпозицію двох полів: поля однорідно зарядженої з об'ємною густиною ρ кулі радіуса R і поля кулі радіуса r, однорідно зарядженої з протилежною за знаком об'ємною густиною ($-\rho$). Застосуємо виведену раніше формулу до довільно вибраної точки всередині порожнини (рис. 2):

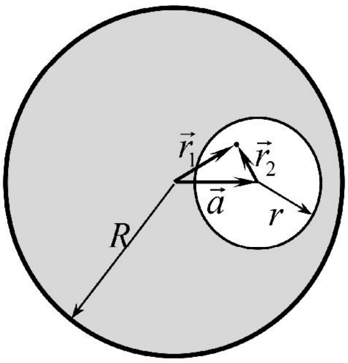

Рис. 2

Якщо врахувати, що $\vec{r}_1-\vec{r}_2=\vec{a}$, то відповідь матиме такий вигляд: $\vec{E}=\frac{\rho\vec{a}}{3\varepsilon_0}$. Поле в порожнині виявилося однорідним! Якісно такий самий результат вийшов би і для гравітаційного поля.

Задача про незаряджену провідну сферу в зовнішньому однорідному електричному полі. В однорідному електричному полі з напруженістю E розташована незаряджена провідна сфера. Знайти розподіл поверхневої густини заряду по її поверхні.

Зрозуміло, що індукований на поверхні сфери заряд (який в сумі дорівнює нулю) повинен розподілитися так, щоб компенсувати зовнішнє поле, яке за умовою було однорідним (до внесення в нього незарядженої сфери).

Оскільки сфера незаряджена, можна спробувати представити її як результат накладення двох однорідно заряджених куль, що відрізняються тільки знаками об'ємних густин зарядів. Тепер трохи змістимо позитивно заряджену кулю так, що вектор зміщення $\vec{a}$ буде співнапрямленим з вектором зовнішнього поля. У результаті, велика частина об'єму початкової сфери так і залишилася незарядженою, але з боків утворилися тонкі заряджені шари: з одного боку - позитивний, з іншого - негативний (рис. 3).

Скористаємося розв'язком попередньої задачі. Дійсно, якщо розглядати поле, що створюється тільки зарядами куль, то напруженість цього поля в області "перетину" куль буде знаходиться так: $\vec{E}_{сф} = -\frac{\rho\vec{a}}{3\varepsilon_0}$.

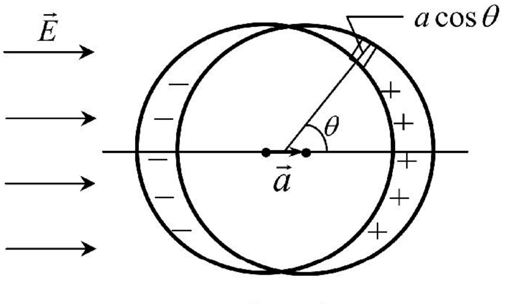

Рис. 3

Щоб забезпечити компенсацію зовнішнього поля, потрібно, щоб $\rho a = 3\varepsilon_0 E$. Оскільки відносне зміщення куль мале, наявність заряджених шарів, про які йшла мова, еквівалентна існуванню поверхневого заряду з густиною $\sigma = \rho h$, де h – залежна від θ товщина шару (рис. 3). З геометричних міркувань зрозуміло, що $h(\theta) = a\cos\theta$. Тоді остаточно маємо:

$$\sigma(\theta) = 3\varepsilon_0 E\cos\theta.$$

Зазначимо, що на рис. 3 кут θ був гострим, але формула залишається правильною і при $\theta \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

Задача про розподіл індукованого заряду по поверхні незарядженої провідної сфери, що знаходиться в електричному полі точкового заряду. Легко зрозуміти, що в центрі незарядженої сфери, що знаходиться в полі точкового заряду q, потенціал буде $\varphi_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$, де r – відстань від цього заряду до центра сфери (рис. 4). Дійсно, незалежно від розподілу індукованих зарядів по поверхні сфери, вони разом дадуть нульовий потенціал в центрі, оскільки їхній сумарний заряд дорівнює нулю, а відстань до центра для всіх однакова. А оскільки сфера є провідною, то такий самий потенціал буде в будь-якій точці на її поверхні і всередині неї.

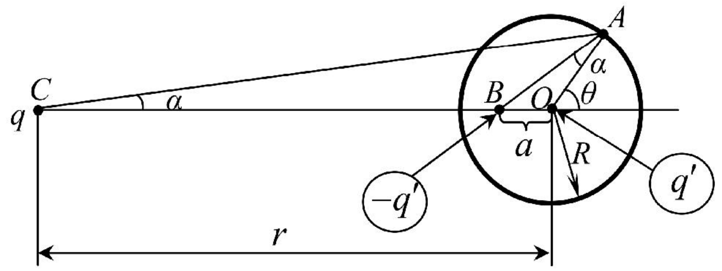

Рис. 4

Виявляється, що такий самий потенціал на поверхні сфери можна отримати, замінивши нульовий індукований заряд на поверхні сфери двома точковими зарядами, які протилежні за знаком (в сумі дають нуль!) і розташовані всередині сфери. Заряд $q' = q\frac{R}{r}$ потрібно помістити в центр сфери (у точці O), а протилежний за знаком заряд в точці B, що знаходиться на відрізку OC, який сполучає заряд q і центр сфери. Відстань OB (позначимо її буквою a) підбирається так, щоб розташований у точці B заряд

$\left(-q' = -q\dfrac{R}{r}\right)$ разом із зарядом q, в полі якого знаходиться сфера, давали в будь-якій точці її поверхні нульовий потенціал (рис. 4).

Необхідна умова виконуватиметься, якщо будуть рівні кути $\angle BAO$ і $\angle ACO$ (позначимо величини цих кутів через α), де A – довільна точка сфери (її положення задається кутом θ). У цьому випадку $\Delta BAO \sim \Delta ACO$. Відповідно, $\dfrac{AC}{BA} = \dfrac{CO}{AO} = \dfrac{r}{R}$. Рівність нулю в точці A потенціалу поля, що створюється зарядами, які знаходяться в точках B і C, вимагає виконання умови: $\dfrac{q}{AC} - \dfrac{q(R/r)}{BA} = 0$, яка еквівалентна умові $\dfrac{AC}{BA} = \dfrac{r}{R}$, що співпадає з тією, яка була отримана з подібності трикутників. Також з подібності трикутників можна отримати, що $\dfrac{OB}{OA} = \dfrac{OA}{OC}$, або $\dfrac{a}{R} = \dfrac{R}{r}$. Отже, шукана відстань $a = \dfrac{R^2}{r}$.

Потрібний потенціал на поверхні сфери ($\varphi_A = \varphi_0$), таким чином, забезпечуватиме заряд q', розміщений в її центрі. А це означає, що електростатичне поле поза сферою, що створюється зарядом q, який знаходиться в точці C, і розподіленими по сфері індукованими зарядами (які в сумі дорівнюють нулю), буде таким самим, як і поле, що створюється зарядом q і зарядами, розміщеними нами в точках O і B.

Розуміючи, що напруженість результуючого поля в точці A спрямована перпендикулярно до поверхні сфери в цій точці, вже без особливих проблем можна знайти його значення, яке буде, звісно, залежати від положення точки A, що задається кутом θ. Прирівнявши це значення до $\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$, ми отримаємо шукану залежність $\sigma(\theta)$.

Покажемо детальніше, як саме це можна зробити. Для знаходження проекцій трьох векторів напруженості на напрям OA нам знадобляться $\cos(\theta-\alpha)$ і $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha = \frac{R\sin\theta}{\sqrt{r^2+R^2+2rR\cos\theta}};$$

$$\cos(\theta-\alpha) = \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha =$$

$$\frac{(r+R\cos\theta)\cos\theta + R\sin^2\theta}{\sqrt{r^2+R^2+2rR\cos\theta}} = \frac{R+r\cos\theta}{\sqrt{r^2+R^2+2rR\cos\theta}}.$$

Знайдемо напруженість результуючого поля біля точки A:

$$E_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r\cos\theta+R}{\left(r^2+R^2+2rR\cos\theta\right)^{3/2}} + \frac{1}{Rr} - \frac{r^2}{R^2}\frac{R}{r}\frac{(r+R\cos\theta)}{\left(r^2+R^2+2rR\cos\theta\right)^{3/2}}\right) =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{R^2 - r^2}{\left(r^2 + R^2 + 2rR\cos\theta\right)^{3/2}} + \frac{1}{r}\right).$$

Звідси $\sigma(\theta) = \frac{q}{4\pi Rr}\left(1 - \frac{1-\left(\frac{R}{r}\right)^2}{\left(1+\left(\frac{R}{r}\right)^2 + 2\frac{R}{r}\cos\theta\right)^{3/2}}\right)$.

Цю громіздку формулу було б корисно перевірити на граничний випадок.

Дійсно, при $\frac{R}{r} << 1$ ми отримуємо ситуацію, розглянуту раніше в задачі про провідну сферу в однорідному зовнішньому полі. Нагадаємо, що там ми отримали такий результат: $\sigma(\theta) = 3\varepsilon_0 E\cos\theta$. У нашому випадку $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$, отже, у результаті перевірки на граничний випадок ми маємо отримати такий результат $\frac{R}{r} << 1$: при $\sigma(\theta) \approx \frac{3q\cos\theta}{4\pi r^2}$. Перевіримо, чи це так:

$$\sigma(\theta) = \frac{q}{4\pi Rr}\left(1 - \frac{1-\boxed{\left(\frac{R}{r}\right)^2}}{\left(1+\boxed{\left(\frac{R}{r}\right)^2} + 2\frac{R}{r}\cos\theta\right)^{3/2}}\right) \approx \frac{q}{4\pi Rr}\left(1 - \left(1 + 2\frac{R}{r}\cos\theta\right)^{-3/2}\right).$$

Розвинувши в ряд Маклорена вираз $\left(1 + 2\frac{R}{r}\cos\theta\right)^{-3/2}$ до перших двох ненульових членів, отримуємо, як і очікувалося, таке:

$$\sigma(\theta) \approx \frac{q}{4\pi Rr}\left(1 - 1 + \frac{3}{2}\cdot 2\frac{R}{r}\cos\theta\right) = \frac{3q\cos\theta}{4\pi r^2}.$$

Помилки, яких припускаються автори навчальної літератури з фізики, дають привід звернутися до можливих причин їх виникнення. Серед цих причин можуть бути і такі, що є доволі поширеними і серед студентів. Наша стаття пов'язана з конкретним прикладом хибних міркувань щодо теореми Гаусса та її застосування до розрахунків електростатичних полів. Наскільки ми зрозуміли авторів цих міркувань, головна претензія з їхнього боку до стандартного викладу відповідного навчального матеріалу, наведеного у відомих підручниках загальної фізики, полягає в тому, що при цьому використовуються надто штучні прийоми. Але штучність прийомів не означає їхньої неправильності!

Варто зазначити, що у багатьох випадках розв'язування доволі складних нестандартних задач з фізики і математики значно спрощується саме за рахунок використання різного роду штучних прийомів. Той прийом, на якому ґрунтується застосування електростатичної теореми Гаусса, ми назвали *корисним додаванням нуля*. Ним з успіхом можна користуватися не лише в цьому конкретному випадку. Зокрема, він доволі поширений у шкільній математиці.

Під час вивчення електростатики, зокрема теореми Гаусса, є сенс нагадати про цей корисний штучний прийом. Для організації відповідної роботи ми запропонували невеличку добірку електростатичних задач, для розв'язання яких доречно цим прийомом скористатися. У подальшому ми плануємо продовжити роботу зі створення методичного забезпечення занять, орієнтованих на ознайомлення студентів і учнів старших профільних класів з іншими корисними штучними прийомами, які допомагають спрощувати розв'язування фізичних задач.

Використана література:

1. *Кенєва І. П.* Про розробку дидактичних матеріалів для самостійного ознайомлення з поняттями тензора та еліпсоїда інерції / І. П. Кенєва, О. А. Лозовенко, Ю. П. Мінаєв // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету. [Текст]. Випуск 77. – Чернігівський державний педагогічний університет імені Т. Г. Шевченка. – Чернігів, 2010. – С. 205-210.
2. *Кенєва І. П.* Розвиток критичного мислення засобами демонстраційного експерименту з динаміки обертального руху твердого тіла / І. П. Кенєва, Р. В. Лутай, Ю. П. Мінаєв // Вісник Чернігівського національного педагогічного університету [Текст]. Вип. 99. – Чернігівський національний педагогічний університет імені Т. Г. Шевченка ; гол. ред. Носко М.О. – Чернігів : ЧНПУ, 2012. – С. 198-202.
3. *Савельев И. В.* Курс общей физики. – Том 2 / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1978. – 480 с.
4. *Сивухин Д. В.* Электричество. Учеб. пособие для вузов : в 2 ч. Часть первая / Д. В. Сивухин. – 3-е изд. – М. : Наука, 1996. – 320 с.
5. *Сусь Б. А.* Дидактичні та методичні основи організації і активізації самостійної навчальної діяльності курсантів при вивченні курсу загальної фізики у вищих технічних військових закладах : автореф. дис. на здобуття наукового ступеня докт. пед наук : спец. 13.00.02 "Теорія та методика навчання (фізика)" / Богдан Арсентійович Сусь. – К., 1998. – 36 с.
6. *Сусь Б. А.* Електрика : навчальний посібник для самостійної роботи студентів, видання третє, доповнене, в електронному представленні з мультимедійними додатками / В. Ф. Заболотний, Н. А. Мислицька, Б. А. Сусь. – Київ : ВІТІ НТУУ "КПІ", 2012. – 148 с.
7. *Сусь Б. А.* Електронний посібник як спосіб поєднання різних форм і методів у навчанні фізики / Б. А. Сусь, М. І. Кравченко // Вісник Чернігівського національного педагогічного університету [Текст]. Вип. 109. – Чернігівський національний педагогічний університет імені Т. Г. Шевченка ; гол. ред. Носко М.О. – Чернігів : ЧНПУ, 2013. – С. 267-269.
8. *Сусь Б. А.* Комп'ютерні технології при розгляді особливостей теореми Остроградського-Гаусса і її застосування для розрахунку електричних полів / Б. А. Сусь, О. Б. Кравченко // Вісник Чернігівського національного педагогічного університету [Текст]. Вип. 99. – Чернігівський національний педагогічний університет імені Т. Г. Шевченка ; гол. ред. Носко М. О. – Чернігів : ЧНПУ, 2012. – С. 319-322.
9. *Фейнман Р.* Фейнмановские лекции по физике. Том 5. Электричество и магнетизм / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – 2-е изд. – М. : Мир, 1977. – 299 с.

Минаев Ю. П., Лозовенко О. А., Калугин Д. И. Ознакомление с приемом "Полезное добавление нуля" на примере электростатический задач.

В статье предложена подборка задач по электростатике и на конкретных примерах продемонстрированы преимущества применения приема полезного добавления нуля.

Ключевые слова: *электростатическая теорема Гаусса, расчеты электростатических полей, "искусственные" приемы.*

Minaev Y. P., Lozovenko O. A., Kalugin D. I. Acquaintance with the "helpful addition of zero" method by the electrostatic problems

The set of electrostatic problems is proposed in the article, and besides that, advantages of using the 'helpful addition of zero' method are considered.

Keywords: *Gauss's law, electrostatic fields calculation, "artificial" methods.*