якщо учень вже під час читання тексту, зреагувавши на слова-ознаки, визначив тип і вказав спосіб розв'язання, то зрозуміло, що в такому випадку не слід вимагати від нього побудови схем, а ліпше запропонувати йому завдання ускладненої структури. Якщо ж учень відчуває труднощі в пошуку плану розв'язання, слід наполягати на виконанні ним детального аналізу тексту разом із побудовою (а по мірі необхідності і перебудовою) вказаних схем.

На завершення нашої статті зазначимо, що наведені нами завдання розкривають лише деякі можливості використання типових текстових задач для ознайомлення учнів з означенням та сутністю моделювання.

Література:

1. Дорофєєв Г.В., Петерсон Л.Г. Математика. 5 клас. Частина 1. – Суми: ВАТ „СОД", видавництво „Козацький вал", 2004 – 90 с.
2. Лагута Г.Л. Про доцільність курсу математичного моделювання // Вісник. Збірник наукових статей викладачів, докторантів, аспірантів НПУ імені М.П.Драгоманова /Укл.: П.В.Дмитренко, Л.Л.Макаренко, О.С.Симоненко. – К.: НПУ імені М.П.Драгоманова,2002. – Випуск 2. – С.191-193.
3. Лук'янова С.М. Методи навчання учнів розв'язуванню текстових задач арифметичними способами в умовах особистісно орієнтованого навчання // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. – Вип.20. –Донецьк: Фірма ТЕАН,2003. – С.160-171.
4. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів: Математика, 5-11 класи.-К.: Шкільний світ, 2001. – 62 с.
5. Тарасенкова Н.А. Використання знаково-символічних засобів у навчанні математики.-Черкаси: Відлуння-Плюс,2002. – 400с.
6. Фридман Л.М. Сюжетные задачи по математике: История, теория, методика. Учеб. пос. для учителей и студентов педвузов и колледжей. – М.: Школьная Пресса, 2002. –208 с.

Панченко Л.Л.
НПУ імені М.П.Драгоманова

Про понятійний апарат математичного моделювання в загальноосвітній школі та педагогічному вузі

В умовах пріоритетного світового розвитку математичної освіти проблема навчання математичному моделюванню учнів шкіл, студентів, чия майбутня професійна діяльність буде безпосередньо пов'язана з перетворенням оточуючого світу та прийняттям рішень, навчанням та вихованням підростаючого покоління, набуває особливої гостроти. На необхідність такого навчання ще в 60 — 70-ті роки минулого століття вказували видатні вчені-математики, фундатори методології математичного моделювання в сучасній науці — А.М.Колмогоров, А.М.Тихонов, О.А.Самарський, Б.В.Гнеденко.

Центральні ідеї прикладної математики та основні методичні положення навчання застосуванням математики розкриті в роботах математиків-методистів В.М.Монахова, С.І.Шварцбурда, В.В.Фірсова, Г.М.Возняка в 70-х — 80-х роках XX століття.

Дослідженню проблем прикладної спрямованості шкільного курсу математики через математичне моделювання та формуванню вмінь, пов'язаних з застосуванням математики (фактично вмінь математичного моделювання) присвячено багато наукових досліджень. Найбільш глибокими з них є дослідження В.А.Стукалова (1975 р.), Г.М.Морозова (1978 р.), М.О.Терешена (1990 р.), на Україні — Л.О.Соколенко (1997 р.).

У 80-ті роки в період реформування шкільної освіти в Радянському Союзі, в зв'язку з введенням в школи курсу "Інформатика та обчислювальна техніка" проблема навчання математичному моделюванню стає особливо актуальною.

Нажаль, сьогодні, на початку нового тисячоліття проблема навчання математичного моделювання як учнів загальноосвітньої школи, так і студентів вузів, не дивлячись на майже 40-річний досвід роботи над нею великої кількості вчених-математиків, методистів, вчителів, так і залишилась нерозв'язаною. Основні причини цього наступні:

- відсутність науково-обгрунтованої методичної системи навчання математичному моделюванню майбутніх вчителів математики в процесі вивчення фундаментальних математичних дисциплін;
- нерозробленість сучасної науково-обгрунтованої системи навчання математичному моделюванню учнів загальноосвітніх шкіл як в процесі вивчення шкільного курсу математики так і в процесі вивчення інших предметів;
- не досить чітке трактування понять "математична модель" та "математичне моделювання" вченими-методистами, що спричиняє до того, що не зрозуміло не тільки "як?" вчити математичному моделюванню, а й "чого?" саме треба вчити.

Шляхи усунення цих причин є метою нашої статті.

Сьогодні розроблено та затверджено на державному рівні такі важливі нормативні документи як "Галузеві стандарти вищої освіти. Математика" та "Концепція базової математичної освіти в Україні". У "Галузевих стандартах вищої освіти. Математика" перераховані вимоги до математичної підготовки майбутніх вчителів математики. Вимога формування вмінь математичного моделювання одна з основних. В "Концепції базової математичної освіти в Україні" теж звертається особлива увага на навчання учнів математичному моделюванню в загальноосвітній школі. Відповідно до цих державних документів створення науково обґрунтованих методичних систем навчання математичному моделюванню в процесі вивчення математики, як для педагогічних вузів так і для школи, вже ведеться. Зокрема, автор цієї статті працює над створенням такої системи для навчання математичному моделюванню майбутніх вчителів математики в процесі вивчення математики та методики навчання математики. Слід зауважити, що подібні методичні системи в Україні створені: Т.В.Криловою — для навчання математичному моделюванню майбутніх інженерів (1997 р.)[6], Л.І.Нічуговською — для навчання математичному моделювання майбутніх економістів (2002 р.)[8].

Методична система підготовки майбутніх вчителів буде значно складнішою, насамперед тому, що майбутньому вчителю слід не тільки самому оволодіти математичним моделюванням, а й навчити математичному моделюванню учнів. У педагогічних вузах є більше можливостей для навчання математичному моделюванню в умовах великої кількості математичних дисциплін, що вивчаються майбутніми вчителями, але як це робити, залишається проблемою поки що не розробленою в достатній мірі.

Ключовими словами методичної системи будемо вважати такі, як "математична модель", "математичне моделювання", "евристичні схеми діяльності математичного моделювання".

Сьогодні існує дуже багато різних означень цих понять. Самими поширеними є:

"Математична модель — наближений опис явищ оточуючого світу за допомогою математичної символіки" (Тихонов А.М.) [13].

"Математична модель — це логічна структура, у якої описано ряд відношень між її елементами" (Кудрявцев Л.Д.) [7].

"Математична модель — це система математичних співвідношень, що наближено у абстрактній формі описує досліджуваний процес або систему" (Нічуговська М.І) [8].

Ці означення математичної моделі вказують на наступні суттєві властивості цього поняття:

1) наближений опис явищ оточуючого світу;

2) опис засобами математики (символьний опис, через відношення, графіки, формули, блок-схеми, алгоритми, функції та їх похідні, рівняння і т.д.).

Як слід давати ці означення?

Щодо загальноосвітньої школи, то спроба дати учням означення поняття "математичної моделі" була зроблена Г.П.Бевзом [1]. На нашу думку, учням слід дати означення математичної моделі запропоноване А.М. Тихоновим (наведено вище). Це ж означення слід запропонувати і студентам-першокурсникам. Таке означення повністю задовольняє методичним вимогам, до означень, сформульованим у посібнику З.І.Слєпкань [12]. Відношення між родовим поняттям "моделі" та "видовим" поняттям "математичної моделі" студентам-першокурсникам слід проілюструвати у вигляді діаграм Ейлера-Венна (рис.1).

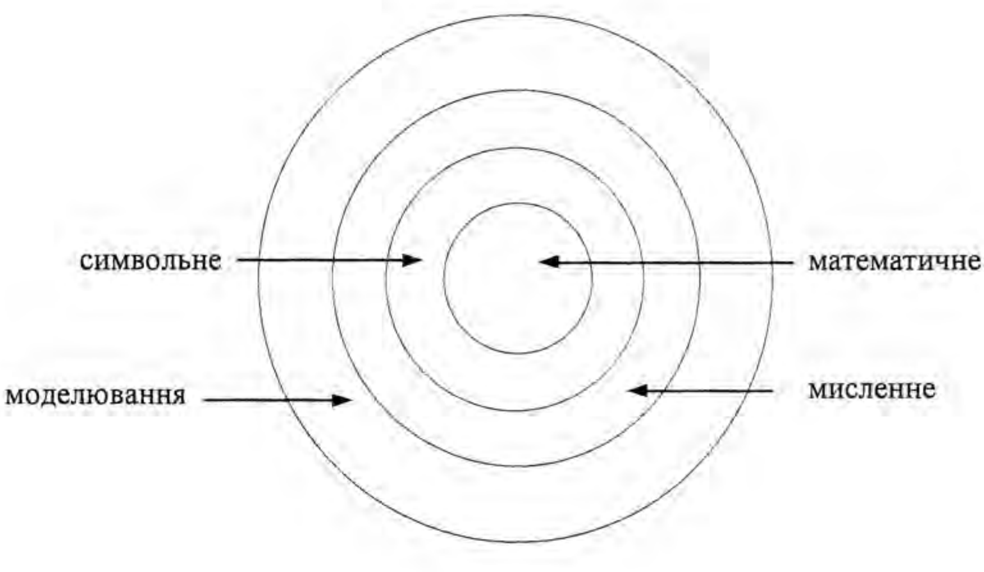

Рис. 1

Ускладнювати означення поняття "математична модель" при вивченні фундаментальних курсів: математичного аналізу, алгебри, геометрії, теорії ймовірностей не слід. Це дидактично не виправдано, тому що більш строге означення поняття "математична модель" формулюється через складніші поняття "математична структура", "ізоморфізм" чи "гомоморфізм".

В "Українському педагогічному словнику" С.Гончаренко дає наступне трактування навчальної моделі: "Моделі навчальні (франц. Modele, від modulus — міра, мірило, зразок) — навчальні посібники, які є умовним образом (зображення, схема, опис тощо) якогось об'єкта або системи об'єктів, який зберігає зовнішню схожість і пропорції частин при певній схематизації й умовності засобів зображення ... . Навчальні моделі бувають: ... математичні — геометричні фігури й тіла, ілюстрації до математичних теорем і формул тощо" [4].

М.І.Каченовський в посібнику [5] теж представляє "математичну модель — як наочну модель".

Чи є наочні моделі — математичними моделями? Звичайно є. Таке уявлення про математичну модель існувало на протязі багатьох століть і, як зазначає Б.В.Гнеденко, бере свій початок від Евкліда [3]. Поява обчислювальної техніки — перших ЕОМ, створила новий підхід до поняття "математична модель", значно розширивши його межі, і сприяла розвитку сучасного розуміння цього поняття відповідно до наведених вище означень А.М.Тихонова, Л.Д.Кудрявцева та інших.

Хоч означення наочної моделі не повністю відповідає сучасним означенням математичної моделі, проте ці моделі слід вважати математичними, тому що вони повністю відповідають означенню та властивостям об'єкта, який моделюють. Звичайно це не мисленні, а реальні, речові моделі і направлені вони на учбове пізнання, розвиток математики як науки. Це повинні розуміти правильно майбутні вчителі математики і саме такий підхід до математичних моделей слід сформувати в курсі методики навчання математики. У майбутніх вчителів математики слід сформувати правильне розуміння поняття "математичне моделювання". Це поняття доцільно вводити зразу ж після поняття "математична модель".

О.А.Самарський в посібнику [10] пише: "Математичне моделювання — це процес встановлення відповідності даному реальному об'єкту деякого математичного об'єкта, що називається математичною моделлю. Хоч взагалі, математичне моделювання — це процес розв'язання деякої нематематичної задачі чи проблеми математичними методами".

Математичне моделювання є навчально-пізнавальною евристичною діяльністю учнів та студентів. Діяльність математичного моделювання є евристичною, тому що відповідає означенню навчально-пізнавальної евристичної діяльності, даному Скафою О.І.: "Навчально-пізнавальна евристична діяльність — це діяльність учнів, що організовується та управляється педагогом з використанням різноманітних евристичних засобів, направлених на створення нової системи дій з пошуку невідомих раніше закономірностей, на формування процесів, які забезпечують пізнавальну і творчу діяльність, в результаті якої учні активно оволодівають знаннями і розвивають свої евристичні навички і уміння, формують пізнавальні мотиви і організаційні якості" [11]. На прикладі використання в навчанні математичної системи задач з параметрами як моделей реальних систем і процесів О.І. Скафа доводить, що математичне моделювання є евристичною діяльністю.

Діяльність математичного моделювання передбачає виконання певної послідовності етапів, яка називається "евристичною схемою діяльності математичного моделювання". В різних посібниках такі схеми представлені по-різному. Наприклад, у роботі Блехмана І. та інших виділяються наступні етапи математичного моделювання:

1) математична постановка задачі, тобто побудова математичної моделі, математичне моделювання;

2) вибір методу дослідження поставленої задачі;

3) проведення математичного дослідження, у якому можуть бути елементи наближених обчислень;

4) аналіз та реальна інтерпретація одержаних математичних результатів [2].

Найбільш вдалими для навчання, на нашу думку, є наступні евристичні схеми діяльності математичного моделювання:

спрощена, яка передбачає наступну послідовність етапів.

1. ***Попередній аналіз об'єкту дослідження***.

Виділяється об'єкт дослідження та галузь науки до якої він належить, чи опираючись на яку можна об'єкт вивчати разом із системою його зовнішніх взаємозв'язків.

2. ***Побудова математичної моделі.***

На цьому етапі відображаються в математичній формі найважливіші властивості об'єкта, закони, яким він підлягає, зв'язки, притаманні його складовим частинам, формулюється відповідна об'єкту математична задача.

3. ***Реалізація моделі математичними методами.***

Розв'язується поставлена у пункті 2 математична задача методами елементарної чи вищої математики.

4. ***Аналіз результатів та перенесення їх на образ, що вивчається.***

Розглядається питання про повноту результатів моделювання з метою їх практичного застосування та подальшого вдосконалення моделі, тобто її перевірки на адекватність за тими ознаками, які були відібрані як значущі.

Спрощену евристичну схему математичного моделювання слід вводити та використовувати в школі та на перших курсах педагогічних університетів.

Поступово у вузі варто здійснювати перехід до *розширеної* евристичної схеми математичного моделювання, яка включає в себе послідовність наступних етапів:

1. ***Попередній аналіз об'єкту дослідження.***

2. ***Побудова математичної моделі.***

3. ***Реалізація моделі математичними методами.***

4. ***Вибір (чи розробка) алгоритму для реалізації моделі на комп'ютері.***

Модель представляється у формі, зручній для застосування чисельних методів, визначається послідовність обчислювальних та логічних операцій, які слід провести, щоб знайти шукані величини з заданою точністю.

5. ***Створення програм, що "перекладають" модель та алгоритм на доступну комп'ютерну мову.***

6. ***Проведення обчислювального експерименту.***

Суть обчислювального експерименту полягає в тому, що на основі математичної моделі шляхом безпосереднього чисельного розв'язування, наприклад рівнянь, кількісно визначається поведінка досліджуваного об'єкту в тих чи інших умовах. Обчислювальний експеримент носить ітераційний багатоваріантний характер, оскільки в процесі його проведення уточнюється математична модель, модифікується обчислювальний алгоритм, вдосконалюється організація обчислювального процесу.

7. ***Аналіз результатів та перенесення їх на образ, що вивчається, вдосконалення моделі.***

Наведемо приклади розв'язання задач за даними схемами.

Задача 1 (диференціальні рівняння).

Знайти закон зміни швидкості ракети в залежності від її маси, якщо ракета починає рух з нульовою швидкістю, а початкова маса дорівнює m_0. Опір середовища та земного тяжіння відсутні.

Розв'язування.

I. *Попередній аналіз об'єкту, що досліджується.*

З фізики відомо закон збереження кількості руху: якщо система складається із декількох частин і рухається без дії зовнішніх сил, то які б взаємні переміщення частин не відбувалися, сума кількості руху всіх частин (під кількістю руху розуміють добуток маси на швидкість) залишається незмінною.

Відповідно до цього закону і будуватимемо модель.

II. ***Побудова математичної моделі.***

Нехай $v(m)$ — шуканий закон зміни швидкості ракети в залежності від маси m. Нехай із сопла ракети вилітає як завгодно мала порція газу масою dm із швидкістю v_0 відносно ракети (цю швидкість називають *швидкістю витікання*). Тоді кількість руху викинутих газів дорівнюватиме — $\upsilon_0 dm$ (знак мінус вказує на те, що маса m при цьому зменшується). Після вихлопу ракета набуде збільшення швидкості на величину dv і тому збільшення кількості руху ракети дорівнюватиме mdv.

Отже, маємо рівняння

$$md\upsilon = -\upsilon_0 dm,$$

або

$$\frac{d\upsilon}{dm} = \frac{-\upsilon_0}{m}. \qquad (1)$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними, яке слід розв'язати враховуючи початкову умову

$$\upsilon(m_0) = 0. \qquad (2)$$

III. ***Реалізація моделі математичними методами.***

Розв'яжемо рівняння (1), враховуючи початкову умову (2). Представимо рівняння (1) у вигляді

$$-\frac{d\upsilon}{\upsilon_0} = \frac{dm}{m}.$$

Проінтегруємо обидві частини, дістанемо:

$$-\frac{\upsilon}{\upsilon_0} + c_2 = \ln m + c_1.$$

Останню рівність прологарифмуємо: дістанемо розв'язок рівняння у вигляді функції:

$$m = ce^{-\frac{\upsilon}{\upsilon_0}},$$

де c — довільна стала.

Для визначення c скористаємося початковою умовою (2) — $c = m_0$. Отже розв'язком рівняння (1), який задовольняє початкову умову (2) є

$$\frac{m}{m_0} = e^{-\frac{\upsilon}{\upsilon_0}} \qquad (3)$$

Розв'яжемо рівність (3) відносно υ:

$$\upsilon = \upsilon_0 \ln\frac{m_0}{m}.$$

IV. *Аналіз результатів та перенесення їх на образ, що вивчається.*

Знайдена залежність $\upsilon = \upsilon_0 \ln\frac{m_0}{m}$ показує як зростає швидкість повітря із спалюванням ракети. Це відома формула Ціолковського. Розглянута модель — найпростіша для задач теорії ракетного руху. Врахування опору повітря та сили земного тяжіння значно ускладнить і диференціальне рівняння, що є математичною моделлю і метод його розв'язування.

За спрощеною евристичною схемою математичного моделювання задачі слід розв'язувати на практичних заняттях з математичних дисциплін, за розширеною — на спецкурсах з математичного моделювання, які організовуються на 4-му, 5-му курсах.

Розглянемо приклад задачі, яку розв'язуватимемо за розширеною схемою.

Задача 2. *Знайти температуру деталі циліндричної форми, при її локальному охолодженні кільцевою зоною з торця. Коефіцієнт теплопровідності (λ) матеріалу, з якого виготовлено деталь і густина (q) теплових джерел, розташованих в ній, є сталими.* [9]

I. Попередній аналіз об'єкту дослідження.

Охолодження деталі циліндричної форми є процесом теплообміну. З фізики відомо, що цей процес описується законом Ньютона:

$$-\lambda \frac{dT}{dn}\bigg|_S = k(T - T_0),$$

де $T(x, y, z)$ — температура деталі, S — поверхня, що охолоджується, λ — коефіцієнт теплопровідності матеріалу з якого виготовлено деталь, k — коефіцієнт зовнішньої теплопровідності.

Отже, математичну модель локального охолодження деталі циліндричної форми слід будувати, опираючись на закон Ньютона.

II. Побудова математичної моделі.

Нехай деталь циліндричної форми — скінчений циліндр висотою h та з радіусом основи R. Розглядатимемо цей циліндр в циліндричній системі координат. Будемо вважати, що центр нижньої основи співпадає з початком координат, віссю циліндра є вісь Oz, ρ_1 — радіус меншого кола з центром в початку координат, що обмежовує кільце охолодження, ρ_2 — відповідно, радіус більшого кола. Відомо, що тоді шукану температуру циліндра можна знайти з наступного диференціального рівняння:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial T}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{\lambda} = 0. \qquad (1)$$

Оскільки, охолодження відбувається за законом Ньютона, то крайові умови при охолодженні кільцевою смужкою з торця можуть бути записані у вигляді:

$$\frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{z=h} = \frac{\partial T}{\partial\rho}\Big|_{\rho=R} = 0; \qquad (2)$$

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{\substack{\rho_1\le\rho\le\rho_2 \\ -\pi\le\varphi\le\pi}} = k\chi(\rho_1, \rho_2, \rho)(T_0 - T)\bigg|_{\substack{\rho_1\le\rho\le\rho_2 \\ -\pi\le\varphi\le\pi}}, \qquad (3)$$

де $\chi(\rho_1, \rho_2, \rho) = \begin{cases} 1, & \rho \in [\rho_1; \rho_2] \\ 0, & \rho \notin [\rho_1; \rho_2] \end{cases}$.

Формули (1) — (3) можна спростити, якщо ввести заміну змінних:

$$\rho = R\xi;\ z = R\zeta;\ T = \frac{R^2 qt}{\lambda} + T_0;\ \aleph = \frac{Rk}{\lambda}.$$

Тоді $\xi_1 = \frac{\rho_1}{R}$, $\xi_2 = \frac{\rho_2}{R}$.

Замість рівняння (1) дістанемо рівняння:

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial t}{\partial\xi}\right)+\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial^2 t}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial\zeta^2}+1=0. \tag{4}$$

і відповідно крайові умови:

$$\left.\frac{\partial t}{\partial\xi}\right|_{\xi=h}=\left.\frac{\partial t}{\partial\xi}\right|_{\substack{\xi_1\le\xi\le\xi_2\\-\pi\le\varphi\le\pi}}=0, \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial t}{\partial\zeta}\right|_{\substack{\xi_1\le\xi\le\xi_2\\-\pi\le\varphi\le\pi}}=\aleph\chi(\xi_1,\xi_2,\xi)t\Big|_{\substack{\xi_1\le\xi\le\xi_2\\-\pi\le\varphi\le\pi}}. \tag{6}$$

Рівняння (4) з крайовими умовами (5) і (6) є математичною моделлю локального охолодження циліндра.

Отже, для того, щоб знайти шукану температуру циліндра при охолодженні його кільцевою зоною з торця, слід розв'язати рівняння (4) з крайовими умовами (5) — (6). Рівняння (4) є диференціальним рівнянням другого порядку в частинних похідних.

III. Реалізація моделі математичними методами.

Розв'язок рівняння (4) знайдемо, розкладаючи шукану функцію — температуру циліндра, в ряд Фур'є за системою ортогональних функцій — функцій Бесселя нульового $\left(J_0(\omega)\right)$ та першого порядку $\left(J_1(\omega)\right)$.

В задачі, що розглядається функція t не залежить від змінної φ і отже, рівняння (4) набуде вигляду:

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial t}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial^2 t}{\partial\zeta^2}+1=0 \tag{7}$$

з крайовими умовами

$$\left.\frac{\partial t}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=h}=\left.\frac{\partial t}{\partial\xi}\right|_{\xi=1}=\left.\frac{\partial t}{\partial\varsigma}\right|_{\substack{\varsigma=0\\\xi\notin[\xi_1;\xi_2]}}=0, \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial t}{\partial\zeta}\right|_{\substack{\zeta=0\\\xi_1\le\xi\le\xi_2}}=\aleph\chi(\xi_1,\xi_2,\xi)t\Big|_{\substack{\zeta=0\\\xi_1\le\xi\le\xi_2}}. \tag{9}$$

Розв'язок рівняння (7) представимо у вигляді:

$$t=\tau-\frac{1}{2}\zeta^2,$$

де τ — деяка невідома функція, тоді рівняння (7) і крайові умови набувають вигляду:

$$\frac{1}{\xi}\left(\xi\frac{\partial\tau}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial^2\tau}{\partial\zeta^2}=0, \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial t}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=h}=\left.\frac{\partial\tau}{\partial\xi}\right|_{\substack{\zeta=0\\\xi\notin[\xi_1;\xi_2]}}=0, \tag{11}$$

$$\left.\frac{\partial\tau}{\partial\xi}\right|_{\substack{\xi=1\\0\le\zeta\le h}}=0. \tag{12}$$

$$\left.\frac{\partial\tau}{\partial\zeta}\right|_{\substack{\zeta=0\\\xi_1\le\xi\le\xi_2}}=\aleph\chi(\xi_1,\xi_2,\xi)\Big|_{\substack{\zeta=0\\\xi_1\le\xi\le\xi_2}}. \tag{13}$$

Для розв'язування рівняння застосуємо метод Фур'є:

$$\tau=R(\xi)z(\zeta). \tag{14}$$

Тоді замість рівняння (10) матимемо:

$$\frac{\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{dR}{d\xi}\right)}{R}=\frac{-z''}{z}=-\omega^2. \tag{15}$$

Звідки

$$\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{dR}{d\xi}\right)+\omega^2 R=0, \tag{16}$$

$$z''-\omega^2 z=0. \tag{17}$$

Розв`язок рівняння (16) є функція Бесселя нульового порядку:

$$R(\xi)=J_0(\omega\xi). \tag{18}$$

Величину ω виберемо таким чином, щоб функція $J_0(\omega\xi)$ задовольняла умові (11), а для цього має виконуватися рівність:

$$\omega J_1(\omega)=0,$$

де $J_1(\omega)$ — функція Бесселя першого порядку.

Корені ω_n цього рівняння є коренями функції $J_1(\omega)$.

Розглянемо рівняння (17). Маємо:

$$z_n^{(1)}=e^{\omega_n\zeta}, \quad z_n^{(2)}=e^{-\omega_n\zeta}. \tag{19}$$

Якщо $n=0$, то

$$z_0=A_0\zeta+B_0. \tag{20}$$

З рівностей (18) — (20) випливає, що функція τ може бути представлена у вигляді:

$$\tau=A_0\zeta+B_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{\omega_n\zeta}+B_n e^{-\omega_n\zeta}\right)J_0(\omega_n\xi). \tag{21}$$

Ця функція задовольняє крайові умови (11).

Провівши необхідні перетворення для того, щоб функція задовольняла крайовим умовам (12), (13), співвідношення (10) набуде вигляду:

$$\tau=h\zeta+B_0+2\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{ch\omega_n(h-\zeta)}{ch(\omega_n h)}J_0(\omega_n\xi). \tag{22}$$

Тепер можна знайти функцію t:

$$\tau=-\frac{1}{2}\zeta^2+h\zeta+B_0+2\sum_{n=1}^{\infty}b_n\times\frac{ch\omega_n(h-\zeta)}{ch(\omega_n h)}J_0(\omega_n\xi), \tag{23}$$

де $b_n=B_n e^{-\omega_n h}ch(\omega_n h)$, B_n — корені нескінченної системи рівнянь:

$$\begin{cases} h=2\aleph\left(\dfrac{\xi_2^2-\xi_1^2}{2}B_0+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_n e^{-\omega_n h}ch(\omega_n h)\alpha_{0n}\right) \\ -2\beta_m\omega_m e^{-\omega_n h}sh(\omega_n h)=\aleph\left(B_0\alpha_{0m}+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_n e^{-\omega_n h}ch(\omega_n h)\alpha_{mn}\right), \end{cases} \tag{24}$$

де

$$\alpha_{0n}=\frac{1}{\omega_n}\left(\xi_2 J_1(\omega_n\xi_2)-\xi_1 J_1(\omega_n\xi_1)\right);$$

$$\alpha_{nn}=\frac{1}{2}\left[\xi_2^2\left(J_1^2(\omega_n\xi_2)+J_0^2(\omega_n\xi_2)\right)-\xi_1^2\left(J_1^2(\omega_n\xi_1)-J_0^2(\omega_n\xi_1)\right)\right]$$

$$\alpha_{mn}=\alpha_{nm}=\frac{1}{\omega_n^2-\omega_m^2}[\xi_2\left(\omega_n J_0(\omega_m\xi_2)J_1(\omega_n\xi_2)-\omega_m J_0(\omega_m\xi_2)J_1(\omega_m\xi_2)\right)-$$

$$-\xi_1\left(\omega_n J_0(\omega_m\xi_1)J_1(\omega_n\xi_1)-\omega_m J_0(\omega_n\xi_1)J_1(\omega_m\xi_1)\right)];$$

$$\beta_n=\frac{1}{2}J_0^2(\omega_n).$$

IV. Розробка алгоритму для реалізації моделі на комп'ютері.

Алгоритм обчислення температури реалізується у вигляді наступної послідовності кроків.

1. Ввести значення сталих величин:

- радіус циліндра R;
- висота циліндра h;
- густина внутрішніх втрат q;
- коефіцієнт теплопровідності λ;
- кількість точок координати $z - n(z)$;
- коефіцієнт тепловіддачі k;
- температура зовнішнього середовища T_0;
- кількість членів ряду розкладу температури n;
- похибка розрахунків для B_0 та B_n.

2. Обчислити B_0 за формулою: $B_0 = \dfrac{h}{\aleph\left(\xi_2^2 - \xi_1^2\right)}$.

3. Обчислити B_n — як корені системи рівнянь (24).

4. Обчислити t за формулою (23).

5. Обчислити T за формулою $T = \dfrac{R^2 gt}{\lambda} + T_0$.

6. Серед значень Т вибираємо найбільше і найменше.

V. Створення програм, що перекладають модель та алгоритм на доступну комп'ютерну мову.

Програма, що відповідає побудованому алгоритму реалізована на алгоритмічній мові Bacis.

VI. Проведення обчислювального експерименту.

Підрахуємо значення температури циліндра при різних значеннях ρ_1 і ρ_2. В таблиці 1 подані результати обчислень при $\rho_1 = 0{,}5$, $\rho_2 = 0{,}7$, $R = 1$, $h = 1$, $\lambda = 0{,}1$,
$k = 0{,}04$, $q = 2$, $T_0 = 0$, точність для B_0, $B_n = 0{,}000001$, $n = 7$, $n(z) = 6$.

Таблиця 1

z/ro	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
0	205.61	208.34	206.41	198.94	207.38	208.94
2	210.49	210	208.74	208	209.47	210.33
4	212.27	212.11	211.79	211.74	212.11	212.34
6	214.02	213.98	213.92	213.95	214.06	214.12
8	215.18	215.17	215.17	215.19	215.24	215.26
1	215.58	215.58	215.58	215.6	215.63	215.64

Таблиця 2

z/ro	0	2	4	6	8	1
0	50	50	50	50	50	50
2	53.6	53.6	53.6	53.6	53.6	53.6
4	56.4	56.4	56.4	56.4	56.4	56.4
6	58.4	58.4	58.4	58.4	58.4	58.4
8	59.6	59.6	59.6	59.6	59.6	59.6
1	60	60	60	60	60	60

В таблиці 2 подані результати обчислень при $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 1$, $R = 1$, $h = 1$, λ=0,1, $k = 0{,}04$, $q = 2$, $T_0 = 0$, точність для B_0, $B_n = 0{,}000001$, $n = 7$, $n(z) = 6$.

VII. Аналіз результатів та перенесення їх на образ, що вивчається, вдосконалення моделі.

Аналізуючи результати обчислювального експерименту, бачимо як змінюється температура деталі циліндричної форми при її охолодженні кільцевою зоною з торця, а саме: зі збільшенням площі кільця охолодження температура циліндра зменшується, зменшується також різниця між максимальною та мінімальною температурою. Так для випадку, розглянутого в таблиці 1 $T_{max} = 215.64^0$, $T_{min} = 198.94^0$. Для випадку, розглянутого в таблиці 2 $T_{max} = 60^0$, $T_{min} = 50^0$. Це свідчить про те, що побудована модель достатньо точно описує процес теплообміну в деталі циліндричної форми при її локальному охолодженні.

Методологічно правильне розуміння понять "математична модель", "математичне моделювання", "евристична схема діяльності математичного моделювання" сприятиме підвищенню ефективності навчання математичному моделюванню як студентів вузів так і учнів загальноосвітніх шкіл.

Література:

1. Бевз Г.П. Алгебра: Проб. Підруч. для 7-9 кл. серед. шк. — К.: Освіта, 2001. — 303с.

2. Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Механика и прикладная математика: логика и особенности приложений математики. — М.: Наука, 1990. — 356 с.

3. Гнеденко Б.В. Математика и математическое образование в современном мире. — М.: Просвещение, 1985. — 192 с.

4. Гончаренко С.У. Український педагогічний словник. — К.: Либідь, 1997. — 376 с.

5. Каченовский М.И. Математический практикум по моделированию. — М.:Учпедгиз, 1959.— 183 с.

6. Крилова Т.В. Початки математичного моделювання. Наукові основи навчання математики студентів технічних спеціальностей. — К.: Вища школа, 1997. — 278с.

7. Кудрявцев Л.Д. Мысли о современной математике и ее изучении. — М.: Наука, 1977. — 110 с.

8. Нічуговська Л.І. Математичне моделювання в системі економічної освіти. — Полтава: ВВ.ПУСК У, 2003. — 289 с.

9. Панченко Л.Л. Математичні моделі локального охолодження циліндра та їх застосування /Некоторые модели в математической физике и методы их исследования/ Институт проблем матетиаловедения им. И.И.Францевича. — К., 1997. — 14 с., С. 141 -154, С. 173.

10. Самарский О.А. Математическое моделирование. Идеи, методы. Примеры. — М.:Физмалит, 2001. — 316 с.

11. Скафа Е.И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология. — Донецк: Изд-во ДонНУ, 2004. — 439 с.

12. Слєпкань З.І. Методика навчання математики. — К.: Зодіак-ЄКО, 2000. — 512 с.

13. Тихонов А.М. Математическая модель / Математическая энциклопедия, т. 3. — М.: Советская энциклопедия, 1982. — С. 574 - 575.

Скворцова С.О.
Південноукраїнський Державний педагогічний університет
ім. К.Д.Ушинського

Формування умінь розв'язувати типові задачі з пропорційними величинами.

Навчання учнів розв'язуванню сюжетних задач є одним із завдань, що виконуються при навчанні математики в школі. З поняттям „задача" учні знайомляться в першому класі і протягом наступних чотирьох років в них формуються уміння розв'язувати найпростіші задачі, а також задачі окремих типів. В 5-6 класах учні розв'язують сюжетні задачі арифметичним методом, знайомляться з новими видами задач на відсотки та суміші. У 6-му та здебільшого в 7-му класі вводиться алгебраїчний метод розв'язання сюжетних задач. Треба зазначити, що в дисертаційних роботах В.В.Малихіної, та В.В.Слугина, що присвячені проблемі навчання молодших школярів розв'язуванню задач та у роботі Л.А.Сафонової, яка розглядала проблему наступності у формуванні умінь розв'язувати задачі в середній та початковій школі, автори стверджують, що учні мають великі труднощі при розв'язанні сюжетних задач. Таким чином, перед методистами та вчителями стоїть проблема пошуку шляхів навчання учнів розв'язуванню задач.

Проблемі формування умінь розв'язувати сюжетні задачі присвячені дослідження: М.О.Бантової, Г.В.Бельтюкової, М.І.Бурди, Н.Я.Віленкина, В.Л.Дрозд, Н.Б.Істоміної, Ю.М.Колягіна, С.Є.Царьової, Л.М.Фрідмана та інші. Значне число праць присвячено навчанню окремим прийомам розв'язування сюжетних задач. Зокрема, пропонується введення "зручних" одиниць вимірювання величин, які містяться в задачі (С.Є.Царьова), робота з різними формами подання даних (Т.А.Селеменева), наближення у часі розв'язання аналогічних сюжетних задач, підсилення уваги до роботи по перетворенню задач після їх розв'язання (Л.І.Шорнікова, С.Є.Царьова та інші). Н.Я.Віленкин, Н.Б.Істоміна, Б.А.Кордемський, Л.Ш.Левенберг, Л.С.Лунина, А.І.Островський, Л.Г.Петерсон, З.І.Турлакова, Д.С.Фонин, І.І.Целищева, М.Д.Черней пропонують при розв'язуванні сюжетних задач використовувати одномірні та двомірні діаграми.

Серед сюжетних задач окремо виділяють задачі, що містять різні групи пропорційних величин (відстань, швидкість та час; загальний виробіток, продуктивність праці та час роботи; загальна маса, маса 1 предмету та кількість предметів й тощо). Ці задачі містять три пропорційні величини. В залежності від особливостей їх математичної структури виділяють задачі таких типів: задачі на знаходження четвертого пропорційного, задачі на пропорційне ділення, задачі на знаходження невідомих за двома різницями, задачі на спільну роботу, задачі на знаходження середнього арифметичного тощо.

Уміння розв'язувати задачі певних типів розглядається методистами, як окреме спеціальне уміння (В.А.Мізюк, Л.М.Фрідман, С.Є.Царьова та інші). Щодо формування спеціальних умінь розв'язувати задачі, то вчені дають лише загальні поради. Предметом навчання і основним змістом навчання є: види задач, способи і зразки розв'язання задач конкретних типів (С.Є.Царьова); спосіб розв'язання типової задачі, його засвоєння є метою дії, а власне розв'язання окремої задачі є лише побічним продуктом (Й.І.Машбиць); задачі, їх генезис, особливості, структура повинні стати предметом глибокого вивчення учнями; при навчанні розв'язуванню задач певного виду на перших етапах слід розгорнути процес розв'язання як процес моделювання задач: