

### Література:

1. Атанов Г.А., Пустынникова И.Н. Обучение и искусственный интеллект, или основы современной дидактики высшей школы – Донецк: Изд-во ДООУ, 2002.
2. Зимняя И.А. Педагогическая психология. – Ростов н/Д: Феникс, 1997.
3. Кузьмина Н.В. Методы системного педагогического исследования. Учебное пособие. – Л.: ЛГУ, 1980.
4. Машбиц Е.И. Психологические основы управления учебной деятельностью. – К.: Вища школа, 1987.
5. Монахов В.М. Аксиоматический подход к проектированию педагогической технологии // Педагогика. - №6. – 1996. – с.26-31.
6. Назарова Т.С. Педагогические технологии: новый этап эволюции // Педагогика. - №3. - 1997. - с.20-27.
7. Підласий І.П., Підласий А.П. Педагогічні інновації // Рідна школа. - №12. – 1998. – с. 3-17.
8. Прокопенко І.Ф., Євдокимов В.І. Педагогічна технологія. – Харків, 1995.
9. Тальцина Н.Ф. Управление процессом усвоения знаний. – М.: Изд. МГУ, 1975.
10. Философский словарь / Под ред. И.Т. Фролова. – М.: Политиздат, 1987.
11. Фридман Л.М. Педагогический опыт глазами психолога. – М.: Просвещение, 1987.

Кліндухова В.М.  
НПУ імені М.П. Драгоманова

### Наближені обчислення в шкільному курсі алгебри.

У державних вимогах до рівня загальноосвітньої підготовки учнів зростає роль уміння здобувати інформацію з різних джерел, засвоювати та поповнювати її, а також оцінювати для подальшого активного творчого застосування. На це чітко вказується зокрема у стандарті базової і повної середньої освіти, який є одним з важливих нормативних документів, що визначає розвиток освіти на сучасному етапі [7, с.1]. Складовою частиною Державного освітнього стандарту є освітня галузь “Математика”, в межах якої і розглядається вищенаведена теза про розвиток інформаційної культури. Характеризуючи останню необхідно зауважити, що як сама інформація про реальні об’єкти, так і методи її обробки, в більшості випадків мають наближений характер. Цей факт безпосередньо пов’язує наближені обчислення з виконанням найважливіших завдань, які поставлено перед сучасною школою.

Розробці проблем методики вивчення наближених обчислень в школі присвячено багато праць. Більшість з них датовані 50-60-тими роками і спрямовані на удосконалення внутрішньомодельного розв’язання задач відповідно до діючих програм того часу, а також рівня обчислювальної техніки (О.Крилов, В.Брадів, М.Кравчук, А.Суткова, І.Лобанов, Р.Хабіб, В.Грібанов, В.Прочухаєв та інші). Починаючи з середини 70-х років в дисертаційних дослідженнях С.Аллабергена, Р.Мусаєлія, В.Фірсова, І.Адішева, М.Мадбаєва підіймалися проблеми прикладної спрямованості та міжпредметних зв’язків під час вивчення наближених обчислень в шкільному курсі математики. Важливий аспект, який стосувався використання обчислювальної техніки та її впливу на вивчення наближених обчислень частково відображено в роботах В.Демідовича та Н.Прайсмана, З.Слепкань, З.Литовченко та Н.Єлизаветиної, А.Цорієвої. Усі ці роботи датуються 80-ми та початком 90-х років. Тому в них питання місця, мети та змісту наближених обчислень відповідно до сучасного розвитку обчислювальної та комп’ютерної техніки, не могли бути вирішені. На необхідності подальших досліджень вивчення наближених обчислень в школі з урахуванням особистісної орієнтації навчального процесу, неодноразово зверталась увага сучасних дослідників [1, с.14], [2, с.5], [5, с.9], [9, с.42], [14, с.192].

**Основним завданням** даної статті є уточнення обсягу та змісту поняття наближені обчислення, зокрема відображення його в шкільному курсі математики; аналіз елементів теорії наближених обчислень в шкільних програмах з алгебри; виявлення особливостей вивчення наближених обчислень в сучасних умовах.

У науковій та методичній літературі можна знайти декілька тлумачень поняття наближені обчислення. Так наближеними називають обчислення, в яких дані і результат (або принаймі тільки результат) є наближеними [4, с.192]. З іншого ж боку під наближеними обчисленнями розуміють сам процес одержання наближених розв’язків різноманітним математичних задач, до яких приводить математичне моделювання реальних процесів та явищ [12, с.192]. Своєрідним узагальненням цих тлумачень є твердження А.Суткової, яке наводиться в її дисертаційному дослідженні: наближеними називаються обчислення, які виконуються тільки над наближеними значеннями величин; або тільки над точними значеннями величин наближеними методами; або над наближеними і точними значеннями величин наближеними методами [15, с.21].

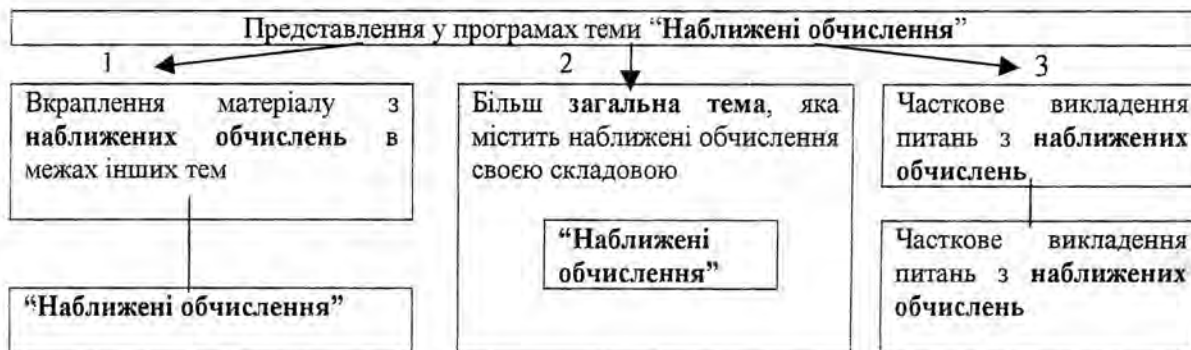
Як бачимо, вищеназвані тлумачення ініціюють існування принаймі двох різних методологій вивчення наближених обчислень в шкільному курсі математики. Основною ознакою першої з них є наявність наближених значень величин, а другої – наближених математичних моделей. Кожна з них охоплює досить велику за обсягом хронологічну та змістову частину шкільної математики і потребує окремого дослідження поза межами даної статті, у відповідності з віковими особливостями учнів та психолого педагогічними засадами організації навчального процесу.

У даній статті наближені обчислення в шкільному курсі математики будемо розглядати в більш вузькому розумінні. Воно полягає в тому, що аналізуючи шкільні програми з математики братимемо до уваги лише ті

теми, які мають чітку вказівку на наявність основних методів та провідних понять елементарної теорії наближених обчислень. Перелік таких елементів знань чітко подано в сучасній методичній літературі [14, с.192-194]. Так до провідних понять теорії наближених обчислень відносять: “точне і наближене значення числа (величини)”, “абсолютна похибка”, “відносна похибка”, “значущі цифри”, “точність наближених значень”, “правильні цифри”. Основними методами наближених обчислень в шкільній математиці вважають правила підрахунку правильних цифр, метод меж та метод врахування границь похибок. Перший з них є методом нестрогого врахування похибок, інші ж два належать до методів строгого врахування похибок.

Згідно вищенаведеного переліку, а також аналізу програм починаючи з 1959 року (бо саме тоді, за словами Г.П.Бевза [2, с.223], “вперше тема “Наближені обчислення” почала опрацьовуватись в наших школах”) можна спостерігати різні варіанти представлення наближених обчислень у шкільних програмах. Так вони можуть подаватись або у вигляді окремої теми, або повністю міститись у більш загальній темі, або бути розпорощеними по різних темах та класах (див. схему 1):

Схема 1



В першому випадку, як правило, тема називалась “Наближені обчислення” і на її вивчення відводилося на них від 11 до 20 годин. Одним із факторів такого коливання годин є фрагментарне вкраплення матеріалу з наближених обчислень в інші теми, яке може відбуватися, як в попередніх (“Наближені значення чисел і величин”) так і в наступних (“Абсолютна та відносна похибка”) темах.

У другому випадку, коли наближені обчислення є частиною більш загальної теми, вони виступають в ній як структурні елементи змісту. Узагальнені теми можуть мати будь-яку назву та термін вивчення, а кількість годин, що відведено безпосередньо на вивчення наближених обчислень, встановлюється кожним вчителем самостійно. Прикладом такого випадку може служити чинна програма з математики, яка в межах дев'ятого класу містить тему “Елементи прикладної математики”(10 годин): Наближені значення чисел і величин. Абсолютна і відносна похибки наближення. Оцінка похибок. Додавання, віднімання, множення і ділення наближених значень.

Розпорощення матеріалу з наближених обчислень, яке спостерігається у третьому випадку в основному відбувається в межах двох класів. Теми ж які для цього залучаються можуть бути найрізноманітнішими. Продемонструємо лише деякі з них за допомогою таблиці 1:

Таблиця 1

Проект програми 1967 року [13]	5кл.	Дії зі звичайними та десятковими дробами: (Наближені значення числа. Похибки наближених значень)	
	7кл.	Нерівності. Наближені обчислення. Добування коренів.	
Програма 1968 року	7кл.	Нерівності: (Застосування нерівностей до оцінки значень наближених обчислень)	
	8кл.	Організація обчислень та обчислювальна практика: (Наближені обчислення)	
Програма 1976 року	7кл.	Нерівності та їх застосування до наближених обчислень	
	8кл.	Наближені обчислення	
Програма 1992	5кл.	Нурк Е.Р.	Натуральні числа. Додавання і віднімання натуральних чисел: ([Наближене значення числа])
		Віленкін Н.Я.	Десяткові дроби. Додавання і віднімання десяткових дробів: ([Наближене значення десяткових дробів])
	7кл.	Степінь з натуральним показником: ([Абсолютна і відносна похибки наближеного значення])	
	8кл.	Раціональні дроби: ([Відносна похибка наближеного значення])	
	8кл.	Нерівності: ([Застосування властивостей нерівностей до оцінки значень виразу])	

Незалежно від обраного варіанту представленості наближених обчислень в шкільному курсі математики їх вивчення відбувається в декілька етапів.

Схема 2

Етапи вивчення наближених обчислень в шкільному курсі математики				
I	II	III	IV	V
Пропедевтика наближених обчислень	Формування уявлень про точні та наближені значення величин	Вивчення числових характеристик точності	Виконання дій над наближеними значеннями величин	Застосування наближених обчислень
Початкова школа	Основна школа			Старша школа

Послідовність етапів, поетапний розподіл навчального матеріалу, а також вікова відповідність основній та старшій школі, є досить умовними. Вони є лише концептуальним відображенням методичної системи вивчення наближених обчислень у шкільному курсі, яке впливає з аналізу математичних програм. Кожний з етапів, являючись складовою частиною упорядкованої системи знань, умінь та навичок, є здатним до певного саморозвитку, самореалізації, а також до продукування нових знань. Саме тому застосування наближених обчислень, яке ми умовно піднесли до старшої школи повинно відбуватись систематично. При цьому повинні широко використовуватись потенційні можливості, які існують в достатній кількості як в межах природничо-математичних дисциплін, так і поза ними. Фактично ж цей етап вивчення наближених обчислень зараз є нереалізованим, хоча саме він, власне, і є основним сенсом їх існування в шкільній математиці. Пов'язано це на нашу думку з тим, що зміст, обсяг та місце наближених обчислень в шкільному курсі математики дуже часто з певних причин змінювався (зміна освітніх пріоритетів, розвиток обчислювальних засобів, тощо). Саме тому кожного разу результати, які були досягнуті в ході методичних досліджень з приводу застосування наближених обчислень, просто "не встигали" за вищенаведеними змінами.

Проведений нами ретельний аналіз програм з математики, підручників, дисертаційних досліджень та науково-методичної літератури з приводу висвітлення в них вищенаведених етапів вивчення наближених обчислень в шкільному курсі математики, дозволив виявити ряд особливостей, які є сьогодні найбільш актуальними. Наведемо деякі з них.

#### 1. *Імовірнісні наближення та джерела одержання наближених значень величин*

Формування поняття точних та наближених значень величин базується на поступовому ознайомленні та подальшій систематизації основних джерел одержання останніх. На необхідності та важливості цього процесу наголошували як сучасні методисти [14, с.194] так і дослідники минулого. Так за словами І.Лобанова чим більше приділяється увага джерелам отримання наближених значень величин тим успішніше відбувається оволодіння усіма основними поняттями та правилами наближених обчислень [10, с.64]. Думки дослідників, щодо кількості вищевказаних джерел, певною мірою різнились, але в основному їх можна звести до трьох наступних: вимірювання, лічба та округлення. Усі вони детально представлені та проаналізовані в сучасній методичній літературі [14, с.194-195].

Особливий інтерес, в контексті активного впровадження у процес навчання математики стохастичної змістовної лінії, набувають, так звані, „імовірнісні наближення“. В науково-методичній літературі нами було знайдено два принципово різних підходи до його вивчення, але в жодному з них „імовірнісні наближення“ не отримали подальшого розвитку та розповсюдження. Основною причиною цього в першому випадку була відсутність на той час імовірнісно-статистичного матеріалу в шкільній математиці. В другому випадку авторами ставились зовсім інші цілі. Висвітливо більш детально вищезгадані підходи.

Згідно першого з підходів [8, с.9] „імовірнісні наближення“ розглядаються як четверте джерело одержання наближених значень величин, зміст якого полягає в наступному. Нехай розглядається деяка сукупність предметів, які володіють певною випадковою ознакою. Причому повне дослідження впливу цієї випадкової ознаки на загальну сукупність є практично неможливим або занадто складним. Саме тому, із загальної сукупності предметів обирається часткова сукупність, для якої робляться певні кількісні висновки, що пов'язані з вищезгаданою випадковою ознакою. Тоді з деякою ймовірністю можна стверджувати, що кількісні висновки, які отримано для часткової сукупності можна розповсюдити відповідним чином і для всієї загальної сукупності. Тобто деяке числове значення, що отримане шляхом теоретичних міркувань, є наближеним значенням істинної шуканої величини.

Згідно другого підходу „імовірнісні наближення“, змістовно зберігаючись, є лише складовою частиною наближеної лічби, тобто не виділяються, як окреме джерело одержання наближених значень величин. Дослідниками вказується [6, с.6], що якщо об'єкт спостереження являє собою сукупність однорідних елементів, то відбувається їх підрахунок. Результат лічби при цьому виражається натуральним числом. Підрахунок можна виконати абсолютно точно лише тоді, коли є можливість спостерігати усі елементи об'єкту. В усіх інших випадках висновки про об'єкти спостереження роблять за результатами підрахунків, які робляться по відношенню до одиниці об'єму, площі, довжини, маси об'єкту або до одиниці часу спостереження. При цьому точність таких висновків залежить від репрезентативності вибірки, а також правильності математичної моделі, яку обрано для узагальнення результатів підрахунків.



Реалізація будь-якого з цих підходів має важливе прикладне значення, а також започатковує якісно нове бачення джерел одержання наближених значень величин: одні з них приводять до апостеріорних наближених відповідей, а інші – до апіорних.

Таким чином гіпотетичне впровадження імовірнісних наближень в основній школі значною мірою сприятиме збагаченню та осучасненню змісту наближених обчислень, а також може бути пропедевтикою ймовірнісно-статистичних понять, зокрема таких як „відносна частота появи випадкової події”, „статистичне означення ймовірності”, „вибірковий метод”.

## **2. Розвиток обчислювальної техніки та основні методи наближених обчислень**

Рівень розвитку обчислювальної техніки, є одним з найважливіших факторів, який безпосередньо впливає на пріоритетність розвитку того чи іншого методу наближених обчислень в шкільному курсі математики. Саме тому, з моменту їх офіційного впровадження в шкільну математику, неабиякого розповсюдження в ній набули методи нестрогого врахування похибок. Зокрема це стосується правил підрахунку правильних цифр, які ще називались дослідниками елементарними наближеними розрахунками або практичними прийомами наближених обчислень. Методи нестрогого врахування похибок розглядалися, перш за все, як один із засобів раціоналізації обчислень, що є доступним для розуміння учнями на початку основної школи (звісно без строгих обґрунтувань та доведень). Причому під раціоналізацією розуміли в основному економію часу та позбавлення від „рутинної громіздкості”, яка супроводжувала деякі точні обчислення та використання методів строгого врахування похибок. Вищенаведеному розповсюдженню передувала, а в подальшому і супроводжувала його, широка науково-дослідницька робота, що була спрямована, як на обґрунтування самих методів нестрогого врахування похибок, так і на їх впровадження в навчальний процес. На цей період прийшовся своєрідний “пік” відповідних методичних пошуків, який відобразився у великій кількості дисертаційних досліджень, статей у періодичних виданнях та іншій науковій літературі.

Реформа освіти кінця 60-х початку 70-х років співпала з початком розвитку обчислювальної техніки, що дозволило певним чином зміцнити позиції методів зі строгим врахуванням похибок. У програмах того часу знайшли своє відображення усі три основні методи наближених обчислень: у VII класі учні знайомились з методом меж, а у VIII класі – з методом врахування границь похибок та з правилами підрахунку правильних цифр. Як бачимо, методи нестрогого врахування похибок знаходяться в них вже далеко не на першому плані.

Подальші проекти програм, програми перехідних періодів та остаточні програми, які відносяться до реформування кінця 70-х початку 80-х років, по різному декларували зміст та місце як самих наближених обчислень так і їх основних методів (див. схему 1). Вищенаведені зміни супроводжувались зниженням науково-дослідницького інтересу до методики навчання наближеним обчисленням, який на сучасному етапі переріс на своєрідний “інформаційний вакуум”. Така ситуація, незважаючи на якісно-прогресивний розвиток обчислювальної математики, складовою якої є і наближені обчислення, створила ім’я “безпорядного атавізму шкільної математики”.

Відповідь на питання, коли і які саме методи наближених обчислень повинні вивчатись в сучасній шкільній математиці потребують окремих ґрунтовних досліджень. В даній же статті ми дозволимо собі лише зробити припущення про те, що пріоритетними методами наближених обчислень повинні стати саме методи строгого врахування похибок. Наше припущення базується на тому, що широке впровадження обчислювальної та комп’ютерної техніки в навчальний процес дозволяє доволі легко розв’язувати так звану “проблему громіздкості обчислень” при використанні методів зі строгим врахуванням похибок. Натомість він не розв’язує і не може розв’язати більш принципових проблем, які породжуються використанням методів нестрогого врахування похибок. Назвемо деякі з них. По-перше, це проблеми термінологічного характеру, зокрема пов’язані з формуванням поняття значущі цифри. По-друге - неоднозначність, яка отримується під час розв’язання деяких задач різними способами, використовуючи правила підрахунку правильних цифр. По-третє - принцип малої ймовірності великих похибок, який лежить в основі методів нестрогого врахування похибок. Усі ці проблемні фактори, на наш погляд, вносять плутанину в міркування учнів, викликають їх недовіру до методів наближених обчислень та взагалі не вкладаються в рамки сучасних вимог, щодо постійно зростаючої точності обчислень.

## **3. Наближені обчислення, математичне моделювання та різні профілі навчання**

Ще одним немаловажним фактором, який сигналізує про необхідність перегляду поглядів стосовно вивчення в шкільному курсі математики наближених обчислень є певна та подальше впровадження профільних програм. Однією із складових самої ідеї профільного навчання є прикладна спрямованість шкільного курсу математики, радикальним засобом реалізації якої є широке застосування методу математичного моделювання протягом усього курсу. Причому вищезгадане математичне моделювання повинно описувати не ідеалізовані об’єкти зі “зручними” числами, а реальні явища і процеси, які мають загальнокультурну значущість, а також вивчаються у суміжних предметах [11, с. 73]. Звісно, що такі реальні моделі мають безпосереднє відношення до наближених обчислень. Деякі питання взаємозв’язків наближених обчислень та математичного моделювання розглянуто в сучасній методичній літературі. Так З.Слепкань наприкладі вимірювань вказує, що з одного боку наближений характер величин, зокрема точність, суттєво впливає на кожний з усіх трьох етапів розв’язування практичних задач (вибір та побудову математичної моделі; вибір алгоритму внутрішньомодельного розв’язання; інтерпретацію та оцінювання точності одержаного математичного результату). А з іншого боку, “систематичне свідоме залучення всіх етапів математичного моделювання до процесу вивчення в школі наближених обчислень дає змогу забезпечити мотивацію вивчення й усвідомлення учнями прикладного

значення математики”[14, с.192]. Ці взаємозв'язки підкреслюються також і існуванням тем “Елементи прикладної математики”, які мають місце в програмах основної, старшої та профільної школи. Вони об'єднують в своєму складі поняття про математичне моделювання, елементи теорії наближених обчислень, початки теорії ймовірностей та статистики, що дозволяє, наприклад, трактувати відносну частоту як наближене значення ймовірності випадкової події; середнє арифметичне спостережених значень як наближене значення математичного сподівання, тобто реалізувати більш широкі методологічні можливості, сприяти кращому розумінню учнями прикладної значущості математики як науки, більш повному і свідомому оволодінню ними математичною культурою [11, с.53].

Наявність різних профілів навчання вимагає різних підходів щодо пріоритетності вивчення та подальшого використання основних методів наближених обчислень. Так для економічного профілю можливо буде доцільним акцентувати увагу на методі меж, який дасть можливість визначити максимальне та мінімальне значення певних затрат. Для природничого та фізико-математичного профілів таким методом може стати метод врахування границь похибок, враховуючи його необхідність для лабораторних робіт з фізики, хімії тощо. Для суспільно-гуманітарного, філологічного, художньо-естетичного та спортивного профілів можливо буде достатнім знайомство лише з методами нестроого врахування похибок. Кожне з цих гіпотетичних припущень потребує подальших досліджень та обґрунтувань. Але в будь-якому випадку їх реалізація повинна базуватись на відповідних знаннях, уміннях та навичках, які необхідно формувати не фрагментарно, а на протязі всього навчання в основній школі, використовуючи при цьому новітні технічні засоби, що дозволяють поєднати високі моделюючі та обчислювальні можливості при дослідженні різноманітних математичних об'єктів з унаочненням результатів на всіх етапах процесу навчання [11, с.133].

#### *Література:*

1. Бевз В.Г. Міжпредметні зв'язки як необхідний елемент предметної системи навчання//Математика в школі.-2003.-№6.-С.11-15.
2. Бевз Г.П.Величини у шкільному курсі математики//Математика в школі.-2003.-№8.-С.2-6.
3. Бевз Г.П.Методика викладання математики: Навчальний посібник.-К.:Вища школа,1989.-367с.
4. Бугай А.С.Короткий тлумачний математичний словник.-К.:Рад. Школа,1964.-428с.
5. Возня М.С., Гром'як М.І. Про встановлення взаємоузгодженості програм з математики та суміжних навчальних дисциплін//Математика в школі.-2003.-№6.-С.8-11.
6. Гордеев В.А.Основы теории ошибок измерений: Учебное пособие.- Екатеринбург: Изд-во Уральской гос. горно-геолог. Академии.-2000.-182с.
7. Державний стандарт базової і повної середньої освіти//Освіта України.-2004. №5(500).-С.1-8.
8. Елизаветина Н.В.О приближенных вычислениях с учетом погрешностей в курсе математики средней школы.-Омск:Запад.-Сибир. книжное изд-во, 1966.-48с.
9. Корінь Г.Вивчаємо наближені обчислення//Математика в школі.-2003.-№2.-С.35-42.
10. Лобанов И.Б.Приближенные вычисления в средней школе: Дис. ... канд.пед.наук:13.00.02.-Николаев,1955.-336 с.
11. Математика. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів.-К.:Навчальна книга,2003.-302с.
12. Наближені обчислення//УРЕ.-К.,1982.-Т.7.-С.192.
13. Проект программы средней школы по математике //Математика в школе.-1967.-№1.-С.4-23.
14. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник для студ. математ. спеціальностей пед. навч. закладів.- К.: Зодіак- ЕКО, 2000.-512с.
15. Суткова А.В. Питання наближених обчислень у загально трудовій політехнічній школі: Дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02.- К,1964.- 271с.

Лук'янова С.М.  
НПУ імені М.П. Драгоманова

#### **Використання типових текстових задач, що розв'язуються арифметичними способами, під час ознайомлення учнів із поняттями модель та математичне моделювання**

Розв'язування текстових задач арифметичними способами займало гідне місце в традиційному курсі арифметики вітчизняної шкільної освіти. І це не випадково. Ці задачі добре розвивають мислення, кмітливість, винахідливість учнів, готують їх до розв'язування текстових задач методом рівнянь, сприяють підсиленню прикладної спрямованості навчання та допомагають підтриманню сталого інтересу до математики.

Багато відомих вітчизняних методистів і математиків присвятили свої праці різним аспектам із проблеми використання текстових задач в навчанні математиці взагалі і використанню арифметичних способів для їх розв'язування зокрема. Різні проблеми використання типових текстових задач, що розв'язуються арифметичними способами розглядалися в працях І.В.Арнольда, О.М.Астряба, К.П.Арженікова, В.К.Беллюстіна, Є.С.Березанської, А.І.Гольденберга, О.С.Дубінчук, Д.М.Маєргойза, І.І.Олександрова, Г.Б.Поляк, С.І.Шохор-Троцького, Ф.І.Єгорова та інших і були тісно пов'язані з тими загальними цілями, які ставило суспільство перед шкільною освітою на певних етапах свого розвитку.