4. Збірник задач з алгебри. Частина 1. За редакцією Рокіцького І.О.-- Вінниця: ВДПУ, 2002.-- 176 с.
5. Збірник задач з алгебри. Частина 2. За редакцією Рокіцького І.О.- Вінниця: ВДПУ, 2002.-- 200 с.
6. Збірник задач з теорії чисел. За редакцією Рокіцького І.О. - Вінниця: ВДПУ, 2001.-- 116 с.
7. Збірник задач з теорії многочленів. За редакцією Рокіцького І.О.— Вінниця: "Планер", 2004.-- 139 с.
8. Hefferon J. Linear Algebra, Vermont, 2000. -- 146 c.
9. Bolina O. Noter of Linear Algebra, Univercity of California, 2001. -- 436 c.
10. Рокіцький І.О. Алгебра. Частина 1. Методична розробка. Вінниця: ВДПУ, 1996, -- 50 с.
11. Рокіцький І.О., Сохацький Ф.М., Тимошенко О.З. Алгебра. Частина 2. Методична розробка. Вінниця: ВДПУ, 1996. -- 36 с.
12. Рокіцький І.О., Сохацький Ф.М., Тимошенко О.З. Алгебра. Частина 3. Методична розробка. Вінниця: ВДПУ, 1997. -- 30 с.
13. Рокіцький І.О. Алгебра. Частина 4. Методична розробка. Вінниця: ВДПУ, 1999. -- 36 с.
14. Куликов Л.Я., Москаленко Л.И., Фомин А.А. Сборник задач по алгебре и теории чисел. Москва: «Просвещение», 1993. -- 288 с.
15. Сборник задач по алгебре. Под редакцией Кострикина А.И. Москва: «Факториал», 1995. -- 454 с.

Дюженкова Л.І.
НПУ імені М.П.Драгоманова

Про доведення важливих тверджень в курсі математичного аналізу для студентів педагогічних вузів

Математичний аналіз відіграє важливу роль у підготовці високоякісного вчителя математики, який повинен не тільки вміти доводити основні твердження шкільного курсу математики, володіти основними прийомами, способами та методами їх доведень, а й уміти навчити цьому своїх учнів.

У курсі математичного аналізу є ряд надзвичайно важливих теорем, які треба доводити детально, не жалкуючи на це часу. Інші твердження можна пояснювати або на інтуїтивному рівні, або виділяти лише ідейну сторону доведення, або давати студентам для самостійного опрацювання.

З чого починати і як проводити доведення твердження, які вивчаються в курсі математичного аналізу? Відповідь на це питання і є метою даної статті.

Ефективним способом доведення тверджень є такий: спочатку формулюється певна задача (проблема), проводиться її доведення, а вже потім за допомогою студентів формулюється доведене твердження.

Перед доведенням бажано розглянути конкретну практичну задачу, яка б привела до необхідності введення потрібних понять, чи означень, які використовуватимуться в даній теоремі. Досить довгі доведення бажано розбити на окремі частини, щоб студент відчував, на якому етапі що саме треба доводити. Після закінчення доведення, якщо це можливо, повернутися до попередньої задачі і розв'язати її, а також з'ясувати питання про інші застосування доведеного твердження.

Рекомендується особливу увагу звернути на глибоке вивчення тих питань, які пов'язані із шкільним курсом математики. При цьому доцільно не тільки зупинятися на тому, як те чи інше питання розглядається в школі, а й вказати на логічні прогалини, причини їх виникнення та можливі шляхи усунення засобами математичного аналізу. Такий підхід дасть змогу формувати не лише математичну, а й методичну культуру майбутнього вчителя. Крім того, необхідно звернути увагу на можливість застосування методів та прийомів математичного аналізу до розв'язування рівнянь і нерівностей, доведення тотожностей та інших задач шкільного курсу математики [1].

Бажано деякі важливі факти курсу аналізу розглядати в два етапи. На першому етапі виклад матеріалу має носити пропедевтичний рівень, а потім можна знову повернутися до цього матеріалу, вивчаючи його на глибшому рівні. Це стосується, зокрема, вивчення теорії рядів. Елементарну теорію числових та функціональних рядів [7] можна викласти зразу після вивчення границі та неперервності функції, а питання, що стосуються диференціювання та інтегрування функціональних (зокрема, степеневих) рядів, можна подати пізніше у відповідних розділах. Такий підхід визначає роль рядів як основного апарату дослідження функцій (ряди – один із способів аналітичного представлення функцій). Тому, користуючись розвиненнями функцій у степеневі ряди, можна раніше вивчати властивості елементарних функцій, обчислювати їхні наближені значення, чи інтеграли від таких функцій, а також деякі границі функцій.

Основні означення (границі, неперервності, ряду, похідної) та деякі твердження можна формулювати і доводити одночасно для функцій дійсної і комплексної змінних. Це дає змогу значно розширити застосування цих понять та економить час на їх вивчення в курсі комплексного аналізу.

Вивчаючи основні поняття математичного аналізу, треба з'ясувати їх суть (наприклад, що означають наближені рівності $f(x)\approx a$, $f(x)\approx f(x_0)$, $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, $f(x)\approx\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, коли $x\approx x_0$, і який їх геометричний зміст).

Для перевірки засвоєння студентами теоретичного матеріалу при проведенні практичних занять важливим фактором є чітко і грамотно сформульовані питання. Вони можуть бути такого типу: перевірити, чи є вказані твердження правильними; серед заданих тверджень знайти правильні; розв'язати усно (наприклад, обчислити інтеграл $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$); навести приклади (функції, що одночасно є парною і непарною, опуклою догори та донизу, періодом якої є довільне дійсне число); чи можливо таке (уявний степінь уявного числа є дійсним числом)?; чи існує (логарифм від'ємного числа)?; якими способами можна розв'язати даний приклад, чи довести певне твердження (обчислити інтеграл $\int \sqrt{a^2 \pm x^2}\,dx$; означити основні елементарні функції)? [3].

Спираючись на досвід моїх колег (див. вказану літературу) та свій власний досвід, продемонструємо сказане вище на прикладах розгляду деяких важливих тверджень в різних розділах математичного аналізу, зокрема тих, які пов'язані із шкільним курсом математики.

У вступі до аналізу особливої уваги заслуговує теорія дійсного числа, поняття функції, границі та неперервності.

На початку слід дати коротку історичну довідку виникнення і розвитку математичного аналізу, з'ясувати його предмет вивчення (функція) та основний метод дослідження (граничний перехід).

Теорію дійсного числа можна ввести аксіоматично, вибравши найпростіший варіант аксіоми неперервності, а саме: якщо $A \le B$ в тому розумінні, що $a \le b \quad \forall a \in A$ і $\forall b \in B$, то існує число c таке, що $A \le \{c\} \le B$. Підкреслити, що пізніше цю аксіому можна замінити еквівалентними твердженнями (наприклад, аксіомами Кантора і Архімеда або теоремою Вейєрштрасса про існування супремуму (інфімуму) для обмеженої зверху (знизу) множини).

Поняття функції, границі та неперервності є фундаментальними поняттями математики і є основою для вивчення всіх наступних розділів курсу математичного аналізу.

Прагнення досліджувати об'єкти різної природи однаковими методами приводить до найбільш загальних понять, таких як множина, функція, простір та ін.

Бажання одержати більш глибокі властивості тих чи інших об'єктів і практичні застосування загальної теорії приводить до конкретизації найбільш загальних понять, виділення вужчих класів. Наприклад, із класу усіляких функцій виділяють клас числових функцій, а з нього конкретні класи основних елементарних функцій (сталих, показникових, логарифмічних, степеневих, тригонометричних і обернених тригонометричних), з яких, у свою чергу, утворюють клас елементарних функцій [8].

На практиці основні елементарні функції відіграють важливу роль "цеглинок", з яких можна побудувати як завгодно складні об'єкти. Саме тому вони заслуговують глибокого вивчення в будь-якому математичному курсі і, зокрема, в курсі математичного аналізу [4].

Майбутній учитель математики повинен не тільки мати уявлення про основні елементарні функції, а й вільно володіти основними фактами теорії цих функцій.

Розглядаючи основні елементарні функції, в основу можна покласти експоненціальну функцію $f(x) = \exp x =: e^x$, означивши $\exp x$ за допомогою границі послідовності $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, і поставити проблему про можливість її означення іншими способами. Вивчаючи диференціальне числення, можна означити її як розв'язок відповідної задачі Коші. Далі в теорії рядів дати означення за допомогою суми відповідного ряду, а також за допомогою формули Ейлера, якщо вважати відомими функції синус і косинус. І, нарешті, проводячи повне дослідження основних елементарних функцій в теорії диференціального числення, можна сформулювати і довести характеристичні властивості цієї функції, пояснивши при цьому, чому ці властивості називають характеристичними.

Вводити поняття границі та неперервності функції слід з простих прикладів та геометричних ілюстрацій, які ґрунтуються на інтуїтивному уявленні про поведінку функції в достатньо малому околі точки x_0. Після наведення вказаних означень, слід з'ясувати їхню суть, тобто пояснити, що означають наближені рівності $f(x) \approx a$ і $f(x) \approx f(x_0)$, коли $x \approx x_0$.

Перед вивченням теми "Деякі важливі границі" можна запропонувати студентам розв'язати такі вправи: знайти наближені значення $\sin 0{,}0001$; $e^{-0{,}0001}$; $\ln 1{,}0001$ $(1{,}0001)^{10000}$; $(0{,}9999)^{10000}$; $\sqrt[3]{11}$ та ін.

Важливі границі досить легко можна довести, поклавши в основу границю $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, яку, до речі, можна зразу доводити для випадку комплексного числа z, а потім, використовуючи формули Ейлера, дати означення логарифма та степеня і довести всі інші границі [5].

Традиційними методами доведення цих границь (див. наприклад, [2]) набагато складніше і забирає значно більше часу.

В теорії числових рядів треба детально зупинитися на таких питаннях: необхідна умова збіжності ряду, критерій збіжності та достатні умови збіжності. При доведенні ознак збіжності додатних рядів підкреслити, до яких саме рядів зручно застосовувати ту чи іншу ознаку. Так, ознаки порівняння (першу та другу) зручно продемонструвати при дослідженні на збіжність рядів $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}tg\frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}tg\frac{1}{n^2}$, використовуючи при цьому важливу нерівність $|\sin x|\le|x|\le|tg\,x|$, $x\in$ □, та першу важливу границю.

Поняття похідної має формуватися на основі задач, які приводять до нього. Крім класичних задач (про дотичну до кривої, про миттєву швидкість, про продуктивність праці), які, крім того, дають змогу з'ясувати геометричний, механічний та економічний зміст похідної, можна розглянути й інші задачі, в яких доводиться знаходити швидкість зміни деякої функції, пов'язаної з границею спеціального вигляду. Саме різноманітністю задач можна підкреслити загальність поняття похідної та необхідність його введення для довільної функції.

Доцільно звернути увагу на алгоритмічність означення похідної, можливість складання такого алгоритму і використання його для знаходження похідних.

Необхідно виробити уявлення про те, що не всяка функція (навіть неперервна) є диференційовною (тобто має скінченну похідну) у кожній точці області визначення. На простих геометричних ілюстраціях слід показати, що графік диференційовної функції у відповідній точці має дотичну, не паралельну осі OY, а в точках неіснування похідної графік неперервної функції має злами. З'ясувати, що означає наближена рівність $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\,(x-x_0)$, коли $x\approx x_0$.

Користуючись поняттям диференційовності функції, можна глибше вивчати властивості цієї функції. Теоретичну основу застосування диференціального числення становлять зв'язки між властивостями функцій та їхніх похідних. Відповідні теореми внаслідок свого важливого значення називають основними теоремами диференціального числення, або теоремами про середнє, оскільки в деякій мірі вони характеризують середнє значення функції на певному проміжку і, крім того, встановлюють зв'язок між властивостями функції на цьому проміжку та її похідною у деякій внутрішній точці даного проміжку. До цих теорем, в першу чергу, слід віднести теореми Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші [6]. При доведенні названих теорем доцільно звертатися до геометричних ілюстрацій. Саме використовуючи геометричне тлумачення теореми Ферма, можна сказати, що її наслідком є теорема Ролля.

Відкинувши в теоремі Ролля умову $f(a)=f(b)$, а всі інші залишивши без зміни, за допомогою рисунка можна зробити припущення про правильність твердження, яке описує теорема Лагранжа: $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. А потім сказати, що відношення у правій частині даної рівності є частинним випадком більш загального $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$, де $\varphi(x)=x$. Тому спочатку можна довести теорему Коші, а вже з неї зробити висновок про правильність теореми Лагранжа.

Записавши формулу Лагранжа через приріст функції, пояснити, що в такому вигляді її називають формулою про скінченні прирости і що вона уточнює формулу, яку доведено при застосуванні диференіла в наближених обчисленнях.

Використовуючи теореми про середнє, далі можна вивчати теореми Лопіталя, формулу і ряд Тейлора, умови монотонності функції, екстремум функції та умови опуклості функції.

Вивченню теми "Экстремум функції однієї змінної" можуть передувати питання: що більше e^{π} чи π^{e}?, а перед темою "Ряд Тейлора" можна запропонувати приклад на обчислення похідної будь-якого порядку функції $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, а також пояснити, чому цю функцію можна розвинути в степеневий ряд в околі точки 0 лише в інтервалі (-1;1), хоча вона є нескінченно диференційовною на всій числовій прямій (якщо розглядаються степеневі ряди з комплексними членами). Тут же доречно запропонувати пояснити відомий приклад Коші щодо функції $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x\neq 0$, $f(0)=0$, яку не можна розвинути в ряд Тейлора ні в якому околі точки 0, хоча ця функція також є скрізь нескінченно диференційовною.

Важливо звернути увагу на надзвичайно важливу роль формули та ряду Тейлора, зокрема на суті цих понять, які полягають в наближеній рівності $f(x)\approx\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, коли $x\approx x_0$, і пояснити геометричний зміст цієї рівності.

Вивчаючи теореми Лопіталя, вказати на те, що саме вони дають загальне правило розкриття невизначеностей при обчисленні границь. Зразу ж після їх вивчення можна вводити поняття асимптоти.

При проведенні повного дослідження функції, треба підкреслити роль диференціального числення у вивченні властивостей функцій, вказавши на значне розширення змісту шкільного курсу математики з питань повного дослідження функцій та побудови їхніх графіків.

Продемонструвати широке застосування математики до розв'язування задач з різних галузей науки (застосування похідної до розв'язування прикладних задач, зокрема задач на екстремум, наближених обчислень, обчислення границь тощо).

Нарешті, використовуючи диференціальне числення, провести дослідження основних елементарних функцій та деяких важливих елементарних функцій, зокрема гіперболічних та обернених до них. Тут також можна сформулювати і довести характеристичні властивості цих функцій.

Це твердження для експоненціальної функції дійсної змінної можна сформулювати так [6].

Теорема (*про характеристичні властивості експоненціальної функції*). Для того щоб функція $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ була експоненціальною, необхідно й достатньо, щоб вона задовольняла принаймні одну з умов:

1) $f(x)=f'(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$ і $f(0)=1$;

2) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\ \forall x\in\mathbb{R}$;

3) f – неперервна на множині $\mathbb{R}$ функція, $f(1)=e$ і

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)\qquad \forall x_1,x_2\in\mathbb{R}.$$

Зручно доведення цього твердження проводити за такою схемою:

$$f(x)=e^x\Rightarrow 1)\Rightarrow 2)\Rightarrow 3)\Rightarrow f(x)=e^x.$$

Для вчителя математики істотним є те, що найважливіші математичні поняття доцільно вводити різними способами, завдяки чому з'являється можливість побачити це поняття з різних сторін і зрозуміти, що в різних математичних курсах одне й те саме поняття вводиться по-різному.

У розділі "Інтегральне числення" звернути увагу на те, що інтегрування є оберненою операцією до диференціювання, і тому виводить із класу об'єктів, на якому пряма операція була замкненою. Тому треба навести приклади функцій, неінтегровних у скінченному вигляді.

Розглядаючи основні методи інтегрування, звернути увагу на те, в яких випадках зручно використовувати ці методи. Вивчаючи певні класи інтегровних функцій, зауважити, що одну й ту саму функцію (наприклад, $\sqrt{x^2+a^2}$) можна інтегрувати, використовуючи різні підстановки або частинами.

Вивчаючи визначений інтеграл, звернути увагу на важливість формули Ньютона – Лейбніца, підкресливши при цьому обмеженість її застосування на практиці. У зв'язку з цим виникає проблема наближеного обчислення інтегралів, зокрема за допомогою степеневих рядів (цим, зокрема, можна пояснити важливість вивчення теорії рядів у попередніх розділах).

Слід підкреслити основну ідею застосування визначеного інтеграла, що грунтується на складанні відповідної інтегральної суми та відшуканні її границі.

В теорії метричних просторів важливим твердженням є теорема Банаха про стискуюче відображення у повному метричному просторі.

Почати слід заздалегідь – перед введенням поняття повного метричного простору. Можна запропонувати таку задачу: знайти розв'язок рівняння $\cos x = x$. Звернути увагу на те, що маємо справу з трансцендентним рівнянням, точний розв'язок якого не можна знайти.

Побудувати графіки функцій $y=\cos x$ і $y=x$ та з'ясувати, що завдання полягає у відшуканні абсциси точки перетину цих графіків. Спочатку виділяємо наближено відрізок (*замкнену множину*), якому цей розв'язок належить. Неважко помітити, що можна розглянути відрізок $[0;\pi/3]$. Для перевірки цього припущення використаємо теорему Больцано – Коші про проміжні значення неперервної функції. Тому задане рівняння перепишемо у вигляді $\cos x - x = 0$ і розглянемо функцію $F(x)=\cos x - x$. Оскільки $F(0)=1>0$, а $F(\pi/3)=1/2-\pi/3<0$, то згідно з названою теоремою, існує така точка x^*, в якій $F(x^*)=0$, тобто графік функції $F(x)$ перетинає вісь OX. З рисунка можна помітити, що інших розв'язків не існує. Однак тут слід наголосити на тому, що не завжди можна побудувати необхідні графіки функцій, а тому стануть в нагоді аналітичні міркування. Враховуючи, що на вибраному проміжку $F'(x)=-\sin x-1<0$, тобто функція F є спадною на ньому, приходимо до висновку, що розв'язок рівняння $\cos x = x$ єдиний.

Далі треба звернути увагу на те, що розв'язком рівняння є точка x^*, для якої значення функції $f(x^*)$ дорівнює значенню аргумента. Таку точку і називають *нерухомою точкою* функції (відображення) f.

Наступний етап – введення поняття *стискуючого відображення*. Справді, помічаємо, що відрізок [$f(\pi/3)$; $f(0)$] = [1/2; 1] $\subset [0;\pi/3]$].

Далі можна підійти до методу відшукання розв'язку, а саме – *методу простих ітерацій* ($x_n = f(x_{n-1})$), або *методу послідовних наближень* (показати на рисунку, як це здійснюється). Потім обгрунтувати, що одержана послідовність є *фундаментальною* і вона є збіжною (цим можна здійснити пропедевтику введення поняття *повного метричного простору*).

Нарешті, слід підкреслити, що для стискуючого відображення на певному відрізку досить, щоб похідна функції $|f'(x)|<1$, тобто дотична до графіка функції має утворювати з віссю Ox кут α: або $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ (для зростаючої функції), або $\frac{3\pi}{4}<\alpha<\pi$ (для спадної функції).

Доведення самої теореми Банаха можна розбити на такі етапи:

1) вибрати довільну точку x_0 із замкненої множини X, яка належить повному метричному простору, де розглядається стискуюче відображення f, та побудувати послідовність $x_n = f(x_{n-1}),\ n \in \mathbb{N}$;
2) довести фундаментальність послідовності (x_n), використовуючи означення стискуючого відображення;
3) враховуючи повноту метричного простору, зробити висновок, що побудована послідовність є збіжною у цьому просторі до точки x^*;
4) довести, що ця точка є нерухомою точкою відображення f;
5) показати, що нерухома точка єдина.

Після доведення теореми слід знову повернутися до прикладу, що розглядався раніше, перевірити для нього виконання всіх умов теореми Банаха і знайти наближений розв'язок заданого рівняння.

Розглядаючи різноманітні застосування цієї теореми, бажано розглянути найпростіші з них, зокрема, про існування розв'язку алгебраїчного чи трансцендентного рівняння вигляду $f(x)=x$ (де $f(x)$ – функція однієї дійсної змінної) та рівнянь вигляду $F(x)=0$ (де $F(x)$ –диференційовна на відрізку $[a;b]$ функція і $F(a)F(b)<0$), показавши при цьому, як саме останні рівняння зводяться до рівнянь попереднього типу.

Література

1. М.М.Білоцький, Л.І.Дюженкова, Г.О.Михалін. Щодо програми з курсу математичного аналізу для педагогічних університетів. // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики. Випуск 4. Том 1.–Кривий Ріг, Видавничий відділ НМетАУ, 2004. – .15-20.
2. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. Ч.1–3.– К.: Вища школа, 1990, 1991, 1992.– 384, 366, 360 с.
3. Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Лященко М.Я., Михалін Г.О., Шкіль М.І. Математичний аналіз у задачах і прикладах. Ч.1. – К.: Вища школа, 2002. – 462 с.
4. Михалін Г.О. Професійна підготовка вчителя математики у процесі навчання математичного аналізу. – К.: КДПУ ім. М.П.Драгоманова, "Дініт" 2003. – 320 с.
5. Михалін Г.О., Дюженкова Л.І. Границя і неперервність функції. – К.: КДПУ імені М.П.Драгоманова, 1997. – 166 с.
6. Михалін Г.О., Дюженкова Л.І. Диференціальне числення функцій однієї змінної. – К.: НПУ ім. М.П.Драгоманова, 1998. – 98 с.
7. Михалін Г.О., Дюженкова Л.І. Ряди. – К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2000. – 66с.
8. Михалін Г.О., Дюженкова Л.І. Елементи теорії множин і теорії чисел. – К.: НПУ ім. М.П.Драгоманова, 2003. – 136с.
9. Шкіль М.І. Математичний аналіз. Ч.1–2.– К.: Вища школа, 1994, 1995.– 424, 430 с.
10. Шкіль М.І., Колесник Т.В., Котлова В.М. Вища математика. Кн.1.– К.: Либідь, 1994.– 279 с.

Дюженкова Л.И., Михалин Г.А. Методы проблемного обучения – основные методы обучения математическому анализу будущих учителей математики // Материалы Международной научной конференции "Образование, наука и экономика в вузах. Интеграция в международное образовательное пространство", Высокие Татры – Словакия, 22–27 августа 2004. – Москва, Изд-во РУДН, Россия. – С.289–293.