Віхрова О.В., Білоусова Г.М.
Криворізький державний педагогічний університет

Навчання розв'язуванню логічних задач на уроках математики.

Стаття присвячена проблемі навчання учнів розв'язуванню логічних задач у шкільному курсі математики. Запропонована типізація логічних задач на основі понять і законів логіки, які домінують у процесі розв'язання задачі.

The article is devoted to the problem of preparing the pupils to set up the logical exercises in school course of mathematics. The given tipisation of logical exercises is based on the notions and laws of logic, which dominate in the process of setting up the exercises.

Одним із найважливіших завдань освіти є розвиток логічного мислення учнів. Логічне мислення необхідне для чіткого лаконічного і вичерпного висловлювання думок, упевненості в міркуваннях, формування вмінь абстрагуватися від конкретного змісту і зосереджуватись на структурі своєї думки, прогнозувати результат на основі всебічного аналізу вихідних умов, розвитку інтуїції тощо.

Розвитку логічного мислення школярів сприятиме розв'язування на уроках математики логічних задач.

Логічними, як правило, називаються задачі, які дають змогу навчити учнів розмірковувати, критично мислити, аналізувати задані умови, виділяючи з них зайві, знаходити правильне розв'язання проблеми виходячи із даних посилок, переносити відомі способи дій у нові ситуації.

У шкільному курсі математики логічні задачі займають особливе місце і це зумовлено рядом причин.

По-перше, вони не вимагають трудомістких арифметичних або алгебраїчних обчислень, проте їх розв'язання неможливе без специфічних "логічних" навичок та вмінь. Формування ж останніх найчастіше передбачає ознайомлення учнів з основами математичної логіки або теорії множин.

По-друге, логічні задачі не зв'язані з жодною конкретною темою або розділом шкільної програми, тому можуть розглядатися протягом всього вивчення математики і від вчителя залежить визначення місця і ролі їх у навчальному процесі.

По-третє, внаслідок "нестандартності" логічних задач не існує загальних підходів, готових алгоритмів їх розв'язання, що безперечно ускладнює процес навчання розв'язуванню даного виду задач.

Аналізуючи літературу з даної проблематики ми дійшли висновку, що при пошуку розв'язку конкретної задачі суттєвим для вчителя виявляється передусім чітке визначення тих основ математичної логіки (понять, законів, методів, логічного апарату), які домінують у процесі її розв'язування. [3, 4].

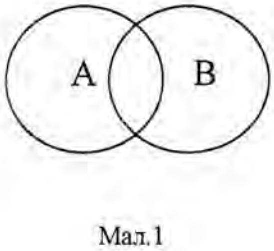
<u>Мета нашої статті</u> полягає в обгрунтуванні запропонованої типізації логічних задач проведеної на основі понять і законів логіки, що домінують у процесі розв'язування задач.

Виходячи з цього пропонуємо таку типізацію логічних задач, які доцільно розглядати у шкільному курсі математики.

I. Задачі теоретико-множинного (комбінаторного) змісту.

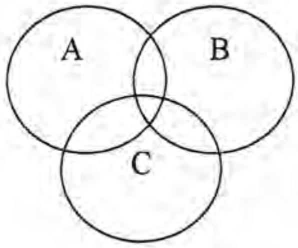
Ці задачі передбачають розуміння основного апарату теорії множин (поняття множини, операцій над множинами, їх основних властивостей). Процес розв'язання таких задач стає більш наочним і зрозумілим при використанні графічної моделі (діаграми), яка відображує зв'язок між заданими умовами і шуканими величинами.

Перед розв'язуванням задач даного типу вчитель повинен запропонувати чітке означення операцій над множинами, ввести відповідну символіку і наочно проілюструвати виконання операцій над множинами, побудувавши діаграми для всіх можливих випадків взаємного розташування множин. Оскільки в задачах даного типу мова йде про скінченні множини, доцільно встановити, як пов'язані кількість елементів, що входять до об'єднання і перерізу множини з кількістю елементів даних множин для випадку двох множин (мал.1) і трьох множин (мал.2).



$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$$

Мал.1



Мал.2

$n(A \cup B \cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap C)-$
$-n(B \cap C)+n(A \cap B \cap C)$
$n(A \cap B \cap C)=n(A \cup B \cup C)-n(A)-n(B)-$
$-n(C)+n(A \cap B)+n(A \cap C)+n(B \cap C)$

Такі завдання є першим етапом вивчення змістової лінії "комбінаторика" і створюють умови для розвитку в учнів комбінаторного мислення.

У процесі розв'язування задач цього типу потрібно з'ясувати з учнями логічний зміст таких слів і словосполучень природної мови: "і", "або", "або... або", "тільки одне", "хоча б одне" та побудувати відповідну їм теоретико-множинну модель.

Перед розв'язуванням змістових задач, учням можна запропонувати розв'язати формальну задачу такого змісту.

Задача. Є дві множини А та В до складу яких входять 50 і 20 чоловік. Знайти максимальну та мінімальну кількість людей, що можуть входити до об'єднання цих множин та їх перерізу.

Висновки, здебільшого учні роблять, виходячи із наочного ілюстрування можливих випадків. В умовах дефіциту навчального часу, при навчанні розв'язуванню задач даного типу можна використовувати зошити з друкованою основою.

Наведемо приклади змістовних задач даного типу.

Задача 1. У класі 35 учнів. З них 20 займаються в математичному гуртку, 11 у біологічному, 10 учнів не відвідують жоден гурток. Скільки біологів займаються математикою.

Задача 2. Кожен учень у класі вивчає англійську чи французьку мову. Англійську мову вивчають - 25, французьку - 27, а ту і другу - 18 чоловік. Скільки учнів у класі?

Задача 3. У класі вчаться 40 учнів. Із них з української мови мають "задовільно" 19 учнів, з математики - 17 учнів, з фізики - 22 учня. Тільки з одного предмета мають оцінку "задовільно": з мови - 4 учня, з математики - 4 учня, із фізики - 11 учнів, 7 учнів мають "задовільно" і з математики і з фізики, із них 5 мають "задовільно" і з мови. Скільки учнів у класі навчаються на "добре" і "відмінно"? Скільки у класі задовільно встигають тільки по двом з трьох предметів?

Задача 4. У олімпіаді брали участь 50 школярів. Арифметичну задачу розв'язали 30 чоловік, геометричну - 10, логічну - 9. Всі 3 задачі розв'язали 2 чоловіка, арифметичну і логічну - 7, логічну і геометричну - 4, арифметичну і геометричну - 3. Скільки чоловік:

а) не розв'язали арифметичну або геометричну задачі;

б) розв'язали тільки арифметичну задачу;

в) розв'язали арифметичну і логічну задачі, але не розв'язали геометричної задачі;

г) розв'язали тільки логічну задачу;

д) не розв'язали жодної задачі. [5, 6]

II. Задачі на використання закону суперечності - цей клас задач розв'язується шляхом виключення випадків, що суперечать будь-якій із умов задачі.

Традиційним засобом розв'язання задач даного типу у шкільному курсі математики є побудова "умовної" таблиці, в клітинки якої вписують різноманітні комбінації елементів розглядуваних множин. Таблиця дозволяє не тільки розв'язувати логічну задачу, але й знаходити оптимальні (мінімальні за кількістю) "елементарні умови", що використовуються для знаходження розв'язку, допомагає, аналізуючи умови задачі, виявляти зайві з них, перевіряти суперечність і повноту, а також можливість розбиття задачі на підзадачі.

При розв'язуванні даного типу задач у школярів формується комбінаторне мислення, яке відіграє важливу роль у повсякденному житті.

Приклад. Воронов, Павлов, Левицький і Сахаров - чотири талановиті молоді людини. Один з них танцюрист, другий - художник, третій - співак, а четвертий - письменник. Ось що відомо про них.

Воронов і художник були в театрі в той вечір коли, співак виступав там з концертом.

Павлов і письменник разом позували художнику.

Письменник написав біографічну повість про свого друга Сахарова і збирається написати про іншого друга, Воронова. Назвіть фамілії танцюриста, художника, співака і письменника.

Розв'язання.

Будемо розв'язувати задачу, виключаючи ті випадки, які суперечать будь-якій умові задачі. Для зручності побудуємо таблицю, в яку по вертикалі запишемо прізвища молодих людей, а по горизонталі - їх спеціальності.

	Воронов	Павлов	Левицький	Сахаров
танцюрист				
художник	-	-		
співак	-			
письменник	-	-		-

В умові сказано, що художник і Воронов були в театрі, отже Воронов не художник і не співак. Ставимо у таблиці у відповідних клітинках знак мінус. Згідно умови письменник не Сахаров і не Воронов, отже відмічаємо це у таблиці у відповідних клітинка знаками мінус. Оскільки Павлов і письменник разом позували художнику, то Павлов не письменник і не художник - ставимо знаки мінус у відповідних клітинках.

За змістом задачі в кожному рядку і в кожному стовпчику повинен бути тільки один плюс, тому, що кожну спеціальність має тільки один з молодих людей, так як всього четверо спеціальностей і четверо чоловік.

Розглянемо перший стовпчик: в трьох клітинках стоять мінуси, отже Воронов - танцюрист, це позначимо знаком плюс. Тоді в останніх клітинках першого рядка ставимо мінуси. Розглянемо тепер другий стовпчик. Легко бачити, що співаком є Павлов. Поставимо плюс в другій клітинці третього рядка, в інших клітинках цього рядка мінуси. Отже художник - Сахаров, Левицький - письменник.

	Воронов	Павлов	Левицький	Сахаров
танцюрист	+	-	-	-
художник	-	-	-	+
співак	-	+	-	-
письменник	-	-	+	-

Наступні задачі пропонуємо учням для самостійного розв'язування.

Задача 5. В фіналі турніру з шахів зустрілися 6 представників військових звань: майор, капітан, сержант, старшина і єфрейтор, різних спеціальностей: льотчик, танкіст, артилерист, мінометник, сапер і зв'язківець.

У першому турі лейтенант виграв у льотчика, майор у танкіста, а сержант - у мінометника. В другому турі капітан виграв у танкіста. В третьому і четвертому турах мінометник через хворобу не брав участі в турнірі, тому вільними від гри були капітан і єфрейтор. В четвертому турі майор виграв у зв'язківця. Одержали перемогу в турнірі лейтенант і майор. Найгірше виступив сапер. З'ясуйте спеціальність кожного учасника.

Задача 6. В купе одного з вагонів їдуть шість пасажирів, які живуть в різних містах: Москві, Санкт-Петербурзі, Мінську, Києві, Харкові і Одесі. Їх прізвища: Андреєв, Борисов, Васильєв, Григор'єв, Дмитрієв і Єлисеєв.

Під час посадки Васильєв допомагав одеситу вантажити багаж. У дорозі з'ясувалося, що Андреєв і москвич - лікарі, Дмитрієв і пітерець - вчителі, Васильєв і мінчанин - інженери. Борисів і Єлисеєв - військові, а мінчанин в армії не служив. Андреєв і харків'янин вийшли в Києві, а Васильєв поїхав далі. Єлисеєв вів суперечку з пітерцем про користь нових лік. Визначте місце проживання кожного з пасажирів, а потім вкажіть їх професії.

Задача 7. Чотири льотчика-випробувача: Андрій, Борис, Микола і Сергій - одержали завдання випробувати чотири літака різних марок. Кожен літак повинен бути випробуваний кожним льотчиком. Випробування проводились одночасно і були виконані льотчиками за чотири дні. В перший день Андрій випробував літак Мі, в другий літак Ла, а в четвертий літак Ту. В ті дні, коли Андрій підіймався на літаках Мі і Ан, у Бориса на випробуваннях були Ан і Ту. У Миколи першим на випробуваннях був літак Ту, а останнім Мі. В якій послідовності випробував літаки Сергій?

III. Задачі на використання методу від супротивного.

Під час розв'язування задач методом від супротивного роблять припущення, протилежне тому, яке стверджує задача. Потім шляхом міркувань приходять до твердження, що суперечить або умові задачі, або іншим відомим фактам. На цій основі роблять висновок, що припущення невірне, а правильним буде твердження задачі. Цим самим реалізується одне з двох основних положень класичної двозначної логіки: істинним може бути або деяке твердження, або його заперечення – третього не дано (закон виключеного третього). Розв'язання логічних задач методом від супротивного дозволяє школярам опанувати цим загально-математичним методом доведення і дозволить учням ефективніше застосовувати його у курсі геометрії для доведення теорем і розв'язування задач на доведення.

Покажемо застосування методу від супротивного на прикладі розв'язування логічних задач.

Приклад 1. У магазин привезли 33 ящика з яблуками чотирьох сортів, причому в кожному ящику лежать яблука якого-небудь сорту. Чи можна знайти 9 ящиків з яблуками одного сорту.

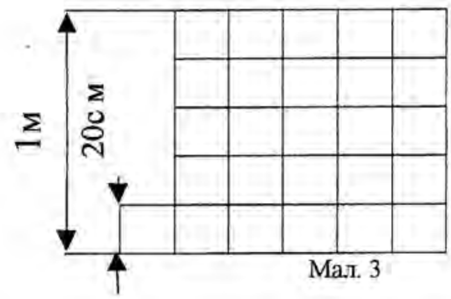
Розв'язання.

Припустимо, що серед привезених ящиків не можна знайти 9 ящиків з яблуками одного сорту. Тоді ящиків кожного сорту буде не більше ніж 8. Але в цьому випадку матимемо, що всіх ящиків не більше ніж 32($8\times4 = 32$).

А це суперечить умові задачі, (за умовою ящиків привезли 33). тому припущення неправильне, отже 9 ящиків з яблуками одного сорту можна знайти.

Приклад 2. У квадрат зі стороною 1 м кинули 51 точку. Доведіть, що принаймні три з них можна накрити квадратом зі стороною 20 см.

Розв'язання.



Мал. 3

Припустимо, що серед 25 утворених квадратів (мал. 3) не знайдеться квадрата, в якому буде 3 точки. Тоді в кожному з цих квадратів буде менше ніж три точки, тобто або 0, або 1, або 2.

У цьому випадку дістанемо, що кількість точок може дорівнювати числу, яке не більше ніж 50($25 \times 2 = 50$). Це суперечить умові ($50 < 51$) тому припущення неправильне.

Отже, знайдуться три точки, які можна накрити квадратом зі стороною 20 см.

IV. Задачі на несуперечність множини висловлень.

У звичайному шкільному курсі алгебри задачі розв'язують за допомогою складання рівнянь і систем рівнянь, які виражають кількісні відносини між відомими і невідомими величинами. При розв'язуванні логічних задач даними відомими величинами є певні твердження (висловлення), а їх логічний зв'язок виражається своєрідними рівняннями алгебри висловлень або системами (логічним добутком) даних рівнянь. Маючи дані висловлення і знаючи їх логічний взаємозв'язок у задачах даного класу шукають нові висловлення, які відповідають на поставлене в логічній задачі питання, (тобто шукають ті умови, при яких дана множина висловлень буде несуперечною).

Приклад: У змаганнях з гімнастики на першість школи беруть участь Алла, Валентина, Тетяна, Даша. Вболівальники висловили пропозиції щодо майбутніх переможців:

1) "Першою буде Тетяна, Валентина буде другою".
2) "Другою буде Тетяна, Даша – третьою".
3) "Алла буде другою, Даша – четвертою".

Після закінчення змагань виявилось, що в кожному реченні тільки одне з висловлень істинне, друге – хибне. Яке місце на змаганнях зайняла кожна з дівчат, якщо всі вони виявились на різних місцях.

Розв'язання.

Даними задачі є висловлення і необхідно знайти також висловлення. Позначимо задані висловлення буквами з індексами: буква відповідає імені дівчинки (перша літера), а індекс – місцю, яка дівчинка зайняла на змаганнях. Зазначимо, що вдалі позначення сприяють успішному розв'язанню задачі.

Оскільки у кожному реченні вболівальників тільки одне із висловлень істинне, а друге хибне, то істинними будуть висловлення, якщо в них твердження з'єднаємо словом "або", тобто диз'юнкцією.

Отже матимемо систему таких істинних висловлень (логічних рівнянь).

$T_1 \square B_2 = 1$ $\quad$ $T_2 \square D_3 = 1$ $\quad$ $A_2 \square D_4 = 1$

Перемножимо перше рівняння на друге $(T_1 \square B_2) \square (T_2 \square D_3) = 1$

$T_1 \square T_2 \square T_1 \square D_3 \square B_2 \square T_2 \square B_2 \square D_3 = 1$

Відкинемо перший і третій логічні добутки; адже в них мова йде про неможливі події. Тетяна не може бути одночасно на першому і другому місцях; (перший добуток), і на другому місці не можуть бути одночасно, дві дівчинки, так як всі вони за умовою задачі виявились на різних місцях. Отже результат множення перших двох умов такий: $T_1 \square D_3 \square B_2 \square D_3 = 1$. Помножимо його на останнє рівняння:

$(T_1 \square D_3 \square B_2 \square D_3)(A_2 \square D_4) = 1$

$T_1 \square D_3 \square A_2 \square T_1 \square D_3 \square D_4 / B_2 \square D_3 \square A_2 \square B_2 \square D_3 \square D_4 = 1$

Легко визначити, що необхідно викреслити три останні добутки (кожний з них хибний).

Остаточний добуток має вигляд: $T_1 \square D_3 \square A_2 = 1$. А це означає що:

Таня посіла перше місце у змаганнях. Алла – друге, Даша – третє, Валентина – четверте. Неважко перевірити, що дійсно кожен вболівальник виявився правий лише в одному припущенні.

Таку задачу даного типу пропонуємо для самостійного розв'язування учням.

Задача 8. Олексій, Борис і Григорій знайшли в землі посудину. Кожен з них висловив по два таких речення.

Олексій "ця посудина фінікійська, III століття".

Борис "ця посудина грецька V століття".

Григорій "ця посудина не грецька, IV століття".

Вчитель історії сказав хлопцям, що кожен з них правий тільки в одному з двох своїх речень. Де і в якому столітті була виготовлена посудина?

V. Задачі розв'язування яких зводиться до пошуку мінімальних нормальних форм.

При розв'язуванні даного класу задач необхідна алгебра логіки, яка дозволяє перетворювати і спрощувати складні висловлення, записані в символічній формі. Тому цей клас задач можна розв'язувати після вивчення учнями основ логічних знань, тобто при систематичному вивченні курсу логіки.

VI. Задачі, розв'язування яких передбачає зведення до досконалих нормальних форм формули алгебри висловлень, яка логічно моделює умови конкретної задачі.

По аналогії з попереднім типом, цей клас задач можна розглядати за умови ознайомлення учнів з основами курсу логіки.

При розв'язуванні змістових логічних задач у школярів виробляються стійкі навички щодо правильного безпомилкового використання логічної термінології, поглиблюється розуміння змісту логічних зв'язок підвищується культура їх пізнавальної діяльності, формується комбінаторне мислення, необхідне кожній людині і у загальнокультурному плані і для нормальної соціалізації особистості в сучасному суспільстві.

Ми розглянули розв'язування логічних задач у шкільному курсі математики. Але оскільки їх розв'язання значно спрощується з використанням апарату алгебри висловлень, тому вважаємо, що логічні задачі мають бути необхідною складовою навчальних програм всіх учбових закладів в яких вивчається курс логіки і вища математика взагалі.

Література:

1. Бизам Д., Герцег Я. Игра и логика. 85 логических задач. - М. Мир, 1995. - 358 с.
2. Гжегорчик А. Популярная логика: Пер. с польск. - М.: Наука, 1979. - 111 с.
3. Ивин А.А. Строгий мир логики. - М.: Педагогика, 1988, 128 с.
4. Калужин Л.А. Что такое математическая логика. - М.: Наука, 1964. - 150 с.
5. Кухар В.М., Тадіян С.І., Тадіян В.П. Математика множини. Логіка. Цілі числа. К.: Вища школа, 1989. - 330 с.
6. Мельников В.Н. Логические задачи. - Київ, Одеса: Вища школа, 1989. - 344 с.

Вашуленко О.П.

Інститут педагогіки АПН України, м. Київ

Психолого-методичні принципи добору системи вправ з геометрії в основній школі

Систематичний курс геометрії, як навчальний предмет, має свої особливості. Строгість його логічного викладу вимагає знання багатьох пов'язаних між собою фактів та способів встановлення зв'язків між ними. Багаторічний досвід викладання геометрії в школі свідчить про те, що лише незначна частина учнів здатні усвідомити логічну структуру геометрії, як дедуктивної наукової системи. Спеціальні дослідження свідчать, що такі учні складають лише близько 30%. Однак, геометрія, як навчальний предмет, може забезпечити вироблення в учнів умінь і навичок, необхідних їм у практичній діяльності, вивченні суміжних дисциплін, продовженні освіти а також багатьох важливих психічних якостей.

Шкільна програма з математики передбачає опанування учнями, по-перше, понять і закономірностей та формування математичних уявлень, по-друге, вміння розв'язувати певні типи задач. При цьому вважається, що учні мають навчитися правильно оперувати поняттями та закономірностями і усвідомлювати методи, прийоми розв'язування задач. Однак з численних публікацій і результатів констатуючого експерименту навчання учнів основної школи геометрії не досягає поставленої мети. За результатами тематичних і підсумкових контрольних робіт виявлено такі загальні недоліки у засвоєнні навчального матеріалу з геометрії:

– учні не вміють застосовувати властивості фігур до розв'язування задач;
– викликає труднощі трансформація умови задачі з текстової у графічну, що свідчить про недостатній розвиток просторової уяви;
– учні не вміють застосовувати способи доведення до розв'язування задач;
– виконання малюнків нераціональне, в учнів недостатньо сформовані конструктивні навички;
– в учнів недостатньо сформовані навички обчислення значень геометричних величин.

Засвоєння учнями навчального матеріалу значною мірою залежить від системи вправ за якою здійснюється цей процес. Анкетування та бесіди з учителями свідчать про те, що діюча система вправ з геометрії в основній школі вимагає вдосконалення. 84% опитуваних доповнюють систему вправ підручника з інших джерел, 6% - компонують систему вправ самостійно. Один з головних недоліків діючої системи вправ з геометрії в основній школі є відсутність вправ для засвоєння змісту на початковому і середньому рівнях навчальних досягнень. Це пояснюється особливістю її компонентів. Учням відразу після вивчення теоретичного матеріалу пропонується геометрична задача, яка вимагає наявність багатьох вмінь (виконання рисунка, мисленої трансформації текстової інформації в графічну і навпаки і таке ін.) і таких психічних дій, як абстрагування (а виконання геометричної задачі з текстовою умовою вимагає кілька кроків абстрагування) та відшукання в уяві відповідних просторових образів. Ця проблема є особливо гострою на початковому етапі вивчення геометрії, якщо згадані вміння не відпрацьовуються окремо. Часто геометрична задача вимагає кількох логічних кроків або застосування кількох понять. За таких умов значна частина учнів не оволодіває