Зрозуміло, що будь-яке нововведення не може бути миттєвим. Це як правило тривалий процес, який може здійснюватися як через радикальні зміни (перебудова процесу навчання на основі комп'ютерної технології) так і шляхом поєднання відомих елементів в нове (комбінаторно) або через удосконалення існуючих – через їх модифікацію.

Література

1. Архангельський С.И. Учебный процесс в высшей школе, его закономерность, основы и методы: Учебно-метод. пособие. – М.: Высшая школа, 1980. – 368 с.
2. Голованова Н.Ф. Общая педагогика. Учебное пособие для вузов. – СПб.:Речь, 2005. – 317 с.
3. Ковальчук Г.О. Активізація навчання в економічній освіті.– К.: КНЕУ, 1999, – 128 с.
4. Краснов Н.В. Актуальные проблемы научной организации обучения // Вест. Высш. Шк. 1977. № 6. С. 16 – 26.
5. Пометун О.І. та ін. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання: Наук. – метод. Посібн. / О.І. Пометун, Л.В. Пироженко. За ред. О.І. Пометун. – К. Видавництво А.С.К., 2004. – 192 с.
6. Столяренко Л.Д. Педагогическая психология. Серия "Учебники и учебные пособия". – 2-е изд., перераб. и доп. – Ростов н/Д: "Фенікс", 2003 – 544 с.

УДК 539.128.32

О.О. Курченко,
Київський університет імені Тараса Шевченка,
К.В. Рабець,
Українська академія банківської справи

Границя послідовності мовою скінченності (альтернативний підхід до вивчення теми)

В статье изложена альтернативная методика изучения темы «Предел последовательности» в курсе математического анализа. Сущность предложенной методики состоит в систематическом использовании понятия конечных множеств.

Оперування з нескінченним
може стати надійним
лише через скінченне.
Д. Гільберт

1. Вступ

Серед розділів математики математичний аналіз виділяється систематичним застосуванням поняття границі. Ісаак Ньютон та Готфрід Лейбніц незалежно один від одного винайшли диференціальне та інтегральне числення, але не дали своєму винаходу належного логічного обґрунтування. Обґрунтувати диференціальне та інтегральне числення вдалося на основі теорії границь, якщо не створеної, то систематизованої Огюстом Коші на початку XIX століття. Без такого фундаменту поняття похідної та інтеграла були внутрішньо суперечливими, що викликало нищівну критику з боку філософів [1, с. 119]. Так, Джордж Берклі після критики „явних софізмів з ньютоновими флексіями (похідними)" пише: „Той, хто може перетравити другу або третю флюксію ... не повинен, як мені здається, прискіпуватися до будь-чого у богослов'ї."

Наш досвід викладання математичного аналізу у різних навчальних закладах свідчить, що поняття границі послідовності є глибоким абстрактним поняттям, досить складним для розуміння. Цю обставину вдало відобразив Саша Чорний в оповіданні „Ієрогліфи". Головний герой оповідання, Павло Федорович, читаючи у конспекті означення границі, „ ... представил себе бесконечный ряд мух, которые должны были бесконечно уменьшаться справа налево и стремиться к нулю. Но так как разность между двумя соседними мухами оставалась меньше сколь угодно малой величины, то мухи нисколько не уменьшались и были все одинакового роста. Он плюнул и сердито перевернул несколько страниц." [2,с. 49].

Таким чином, у методиці викладання математичного аналізу існує проблема висвітлення концепції границі. Один із способів розв'язання цієї проблеми ми вбачаємо у альтернативних підходах до введення поняття границі послідовності. Складність традиційного означення границі послідовності зумовлене поєднанням в одному висловленні трьох кванторів: загальності, існування і знову загальності. В основу пропонованої нами методики викладу теми „Границя послідовності" покладено простіше означення з використанням одного квантора загальності та більш зрозумілого поняття скінченності. Ідея такого означення зустрічається, наприклад, у роботах [3 - 5].

Мета цієї статті – викласти методику вивчення теми „Границя послідовності" на основі такого альтернативного означення границі, включаючи поняття фундаментальності та критерій Коші. Подібна методика може бути застосована у курсах вищої математики для студентів нематематичних спеціальностей, а у поєднанні із традиційною – для студентів-математиків класичних та педагогічних університетів. Це, на нашу думку, сприятиме формуванню компетентності майбутніх фахівців у галузі математики [6].

2. Границя послідовності

Послідовність дійсних чисел $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ позначимо символом (a_n).

Означення 1. Число a називається границею послідовності (a_n), якщо для довільного додатного числа ε існує таке натуральне число N, що для всіх натуральних чисел $n \ge N$ виконується нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$.

Позначення $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ походить від латинського слова limes — межа. Швейцарський математик С. Люільє (1750 – 1840) запровадив це слово для позначення границі. В наш час користуються символом lim. Водночас застосовують позначення $a_n \to a, n \to \infty$.

Запис означення 1 за допомогою кванторів має наступний вигляд:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbf{N} \ \ \forall n \ge N : |a_n - a| < \varepsilon .$$

Послідовність, яка має границю $a \in \mathbf{R}$, називається збіжною. Послідовність, яка не є збіжною, називається розбіжною.

Потрібно немало методичних зусиль, щоб студенти засвоїли це означення. Складність його сприйняття обумовлена тріадою кванторів $\forall, \exists, \forall$.

Наступне означення границі послідовності, сформульоване у термінах скінченності, видається нам менш складним для початкового ознайомлення з поняттям границі послідовності.

Означення 2. Число a називається границею послідовності (a_n), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ поза $\varepsilon -$ околом точки a знаходиться не більш ніж скінченне число членів послідовності (a_n).

Запишемо це означення за допомогою квантора загальності: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ множина $\{n \in \mathbf{N} \,|\, |a_n - a| \ge \varepsilon\}$ не більш ніж скінченна.

Ми називаємо не більш ніж скінченною множину, яка порожня або містить лише скінченне число елементів.

Теорема 1. Означення 1 і означення 2 границі послідовності еквівалентні

Доведення. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbf{R}$ у розумінні означення 1. Тоді $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbf{N} \ \ \forall n \ge N : |a_n - a| < \varepsilon$, тобто $\{N, N+1, N+2, ...\} \subset \{n \,|\, |a_n - a| < \varepsilon\}$. У цьому включенні перейдемо до доповнення: $\{1, 2, ..., N-1\} \supset \{n \,|\, |a_n - a| \ge \varepsilon\}$, тобто множина $\{n \,|\, |a_n - a| \ge \varepsilon\}$ не більш ніж скінченна. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbf{R}$ у розумінні означення 2.

Навпаки, нехай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbf{R}$ за означенням 2. Тоді $\forall \varepsilon > 0$ множина $A = \{n \,|\, |a_n - a| \ge \varepsilon\}$ не більш ніж скінченна. Якщо множина A порожня, то $\exists N = 1 \ \ \forall n \ge 1 : |a_n - a| < \varepsilon$. Якщо ж множина A не порожня і скінченна, то містить найбільший елемент, який ми позначимо через $N-1$. Тоді $\exists N \in \mathbf{N} \ \ \forall n \ge N : |a_n - a| < \varepsilon$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbf{R}$ у розумінні означення 1.

Теорему доведено. Зауважимо, що з рівності $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$ виконується для нескінченного числа номерів — всіх натуральних чисел, починаючи з деякого.

Далі ми розвиваємо методику викладу теми „Границя послідовності" на основі означення 2.

На рис. 1 зображена геометрична інтерпретація означення 2 границі послідовності (a_n).

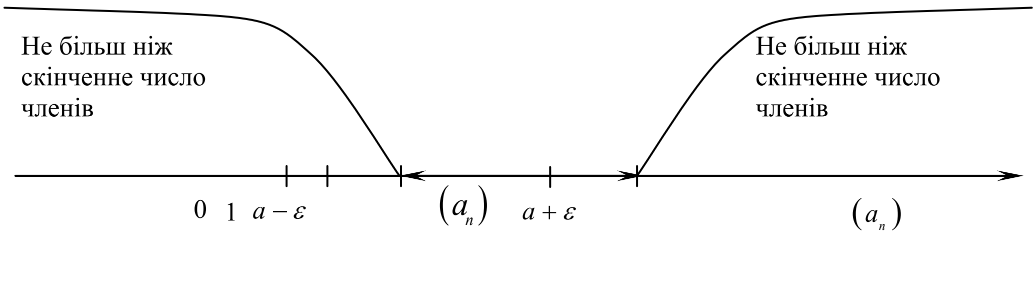

Рис. 1: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ кожний з променів $(-\infty, a-\varepsilon]$, $[a+\varepsilon, +\infty)$ містить не більш ніж скінченне число членів послідовність (a_n).

Приклад 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Дійсно, $\forall\varepsilon>0$ $\left|\frac{1}{n}-0\right|\ge\varepsilon\Leftrightarrow n\le\frac{1}{\varepsilon}$, а множина всіх таких натуральних чисел n не більш ніж скінченна.

Зауважимо, що доводити збіжність послідовності за допомогою означення 2 методично простіше.

Приклад 2. Послідовність $\left((-1)^{n-1}\right)$ розбіжна. Справді, якщо $a=1$, то для $\varepsilon=\frac{1}{2}$ поза околом $\left(1-\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$ лежить нескінченна кількість членів цієї послідовності – всі члени послідовності з парними номерами. Для $a\ne1$ існує $\varepsilon=\frac{1}{2}|a-1|$ таке, що поза околом $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ лежить нескінченна кількість членів послідовності $\left((-1)^{n-1}\right)$ – всі члени послідовності з непарними номерами. Таким чином, жодне дійсне число a не є границею послідовності $\left((-1)^{n-1}\right)$, тобто ця послідовність розбіжна.

Теорема 2 (про єдиність границі послідовності). Збіжна послідовність має рівно одну границю.

Доведення. Нехай (a_n) – збіжна послідовність і $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\in\mathbf{R}$. Доведемо, що число $b\in\mathbf{R}, b\ne a$ не є границею послідовності (a_n). Покладемо $\varepsilon=\frac{1}{2}|a-b|>0$. В силу означення 2, поза ε – околом точки a лежить лише скінченне число членів цієї послідовності. Отже, ε – окіл точки b містить лише скінченне число членів послідовності (a_n), і тому b не є границею цієї послідовності. Теорему доведено.

Теорема 3. Нехай (a_n), $(\tilde{a}_n)$ – послідовності дійсних чисел такі, що множина $\{n\mid a_n\ne\tilde{a}_n\}$ не більш ніж скінченна (відрізняються не більш ніж скінченною кількістю членів). Тоді ці послідовності збіжні або розбіжні одночасно, причому у випадку збіжності $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n$.

Доведення. Нехай послідовність (a_n) збіжна, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. Тоді $\forall\varepsilon>0$ множина $\{n\mid\ |a_n-a|\ge\varepsilon\}$ не більш ніж скінченна. Тоді множина $\{n\mid\ |\tilde{a}_n-a|\ge\varepsilon\}\subset\{n\mid\ |a_n-a|\ge\varepsilon\}\cup\{n\ \ |a_n\ne\tilde{a}_n\}$ – також не більш ніж скінченна, і тому $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=a$. Аналогічно, із збіжності послідовності $(\tilde{a}_n)$ випливає, що послідовність (a_n) збіжна і $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n$. Теорему доведено.

Серед розбіжних послідовностей виділяють ті, що мають границю символи $+\infty$ або $-\infty$.

Означення 3. Символ $+\infty$ називається границею послідовності (a_n), якщо для довільного числа $C\in\mathbf{R}$ множина $\{n\in\mathbf{N}\mid a_n\le C\}$ не більш ніж скінченна.

Запис: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$.

Аналогічно дається означення $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$.

За допомогою кванторів ці означення запишуться так: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty\Leftrightarrow\forall C\in\mathbf{R}$ множина $\{n\in\mathbf{N}\ \mid\ a_n\le C\}$ не більш ніж скінченна.

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty\Leftrightarrow\forall C\in\mathbf{R}$ множина $\{n\in\mathbf{N}\ \mid\ a_n\ge C\}$ не більш ніж скінченна.

На рис. 2 зображена геометрична інтерпретація $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$

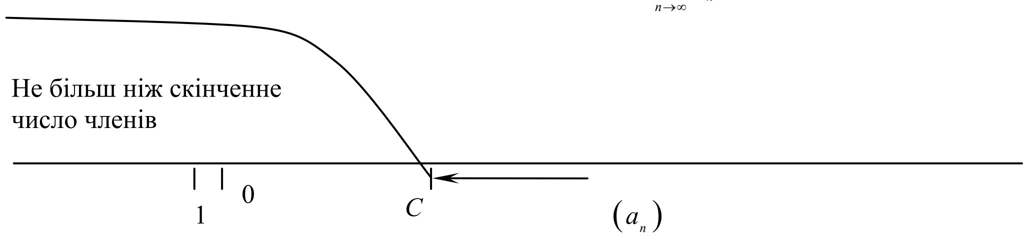

Рис. 2: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \quad \forall C \in \mathbf{R}$ промінь $\left(-\infty, C\right]$ містить не більш ніж скінченне число членів послідовності $\left(a_n\right)$.

Приклад 3. $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Справді, для довільного $C \in \mathbf{R}$ розглянемо нерівність $\sqrt{n} \le C$. Якщо $C < 1$, то ця нерівність не має розв'язків, а для $C \ge 1$ після піднесення до квадрату обох частин нерівності, отримуємо нерівність $n \le C^2$, яка виконується лише для скінченної множини натуральних чисел n.

Приклад 4. Нехай $a_n > 0$, $n \ge 1$. Доведемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$.

Доведення. Необхідність. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Тоді для довільного $C > 0$ нерівність $a_n \ge \frac{1}{C}$ виконується не більше ніж для скінченної множини номерів n. Обидві частини цієї нерівності додатні і тому вона еквівалентна нерівності $\frac{1}{a_n} \le C$. Отже, й остання нерівність виконується не більше ніж для скінченної множини номерів n. Для $C \le 0$ нерівність $\frac{1}{a_n} \le C$ не виконується для жодного номера n. Тому $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$.

Достатність. Нехай тепер $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ нерівність $\frac{1}{a_n} \le \frac{1}{\varepsilon}$ виконується не більш ніж для скінченної множини номерів n. Обидві частини цієї нерівності додатні, і тому вона рівносильна нерівності $a_n \ge \varepsilon$. Отже, й остання нерівність виконується не більш ніж для скінченної множини номерів n. Врахувавши, що $a_n > 0, \quad n \ge 1$, дістанемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

3. Основні властивості границь

Теорема 4. Збіжна послідовність обмежена.

Доведення. Нехай $\left(a_n\right)$ – збіжна послідовність, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тоді для $\varepsilon = 1$ множина $A = \left\{ n \;\middle|\; \left|a_n - a\right| \ge 1 \right\}$ не більш ніж скінченна і тому $\left\{ a_n \;\middle|\; n \in A \right\}$ обмежена як не більш ніж скінченна множина. Далі, $\left\{ a_n \;\middle|\; n \in \mathbf{N} \setminus A \right\} \subset \left(a-1, a+1\right)$ і тому також обмежена. Таким чином, множина значень послідовності $\left(a_n\right)$.

$$\left\{ a_n \;\middle|\; n \in \mathbf{N} \right\} = \left\{ a_n \;\middle|\; n \in A \right\} \cup \left\{ a_n \;\middle|\; n \in \mathbf{N} \setminus A \right\}$$

обмежена, як об'єднання двох обмежених множин. Отже, послідовність $\left(a_n\right)$ обмежена. Теорему доведено.

Теорема 5. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = p > q$. Тоді $\left\{ n \;\middle|\; a_n \le q \right\}$ не більш ніж скінченна.

Доведення. Покладемо $\varepsilon = p - q > 0$. Тоді множина $\left\{ n \;\middle|\; a_n \le q \right\} \subset \left\{ n \;\middle|\; \left|a_n - p\right| \ge \varepsilon \right\}$ – не більш ніж скінченна. Теорему доведено.

Теорема 6 (про арифметичні дії над границями). Нехай $\left(a_n\right)$, $\left(b_n\right)$ – збіжні послідовності дійсних чисел, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Тоді

1) для довільного $c \in R$ існує $\lim\limits_{n\to\infty} \left(c a_n\right) = ca$;
2) існує $\lim\limits_{n\to\infty} \left(a_n + b_n\right) = a + b$;
3) існує $\lim\limits_{n\to\infty} \left(a_n b_n\right) = ab$;
4) якщо $b \ne 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Доведення. Доведемо твердження 2) і 4). Твердження 1) і 3) доводять аналогічно.

2) помітимо, що

$$\forall n \in \mathbf{N}: \quad \left|\left(a_n + b_n\right) - \left(a + b\right)\right| \le \left|a_n - a\right| + \left|b_n - b\right|. \tag{1}$$

Тому $\forall \varepsilon > 0$ має місце включення

$$\{n | (a_n + b_n) - (a + b) \ge \varepsilon\} \subset \left\{n \middle| |a_n - a| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{n \middle| |b_n - b| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}. \qquad (2)$$

Дійсно, $\forall m \in \{n \mid |(a_n + b_n) - (a+b)| \ge \varepsilon\}$, в силу нерівності (1), виконується хоча б одна з нерівностей $|a_m - a| \ge \frac{\varepsilon}{2}$, $|b_m - b| \ge \frac{\varepsilon}{2}$. Звідси отримуємо, що $m \in \left\{n \mid |a_n - a| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{n \mid |b_n - b| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. Включення (2) доведено. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то множина $\left\{n \mid |a_n - a| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ не більш ніж скінченна. Аналогічно, множина $\left\{n \mid |b_n - b| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ не більш ніж скінченна. Об'єднання двох не більш ніж скінченних множин є не більш ніж скінченною множиною, а отже і множина $\{n | (a_n + b_n) - (a + b) \ge \varepsilon\}$, яка є підмножиною цього об'єднання, не більш ніж скінченна. Тому існує $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$. Твердження 2) доведено.

4) Нехай $b > 0$. Тоді множина $\left\{n \mid b_n \le \frac{b}{2}\right\}$ не більш ніж скінченна. Змінивши значення не більш ніж скінченного числа членів послідовності (b_n), перейдемо до послідовності $(\tilde{b}_n)$, такої, що $\tilde{b}_n > \frac{b}{2}$, $n \ge 1$. В силу теореми 3, $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{b}_n = b$, а послідовності $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ та $\left(\frac{a_n}{\tilde{b}_n}\right)$ збіжні або розбіжні одночасно, причому у випадку збіжності мають однакові границі. Маємо

$$\forall n \in \mathbf{N} : \left|\frac{a_n}{\tilde{b}_n} - \frac{a}{b}\right| = \frac{|a_n b - a\tilde{b}_n|}{|b\tilde{b}_n|} \le \frac{2}{b^2}\left(|a||\tilde{b}_n - b| + |b||a_n - a|\right).$$

Таким чином, $\forall \varepsilon > 0 : \left\{n \mid \left|\frac{a_n}{\tilde{b}_n} - \frac{a}{b}\right| \ge \varepsilon\right\} \subset \left\{n \mid |\tilde{b}_n - b| \ge \frac{\varepsilon b^2}{4(|a|+1)}\right\} \cup \left\{n \mid |a_n - a| \ge \frac{\varepsilon b^2}{4(|b|+1)}\right\}$.

Це включення доводиться так само, як включення (2) у доведенні твердження 2). Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{b}_n = b$, то $\left\{n \mid |\tilde{b}_n - b| \ge \frac{\varepsilon b^2}{4(|a|+1)}\right\}$ не більш ніж скінченна. Аналогічно, множина $\left\{n \mid |a_n - a| \ge \frac{\varepsilon b^2}{4(|b|+1)}\right\}$ не більш ніж скінченна. Далі повторюємо міркування з доведення твердження 2) і приходимо до висновку, що множина $\left\{n \mid \left|\frac{a_n}{\tilde{b}_n} - \frac{a}{b}\right| \ge \varepsilon\right\}$ не більш ніж скінченна. Тому існує $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\tilde{b}_n} = \frac{a}{b}$. Твердження 4) доведено.

Теорема 7 (про граничний перехід у нерівності). Нехай послідовності (a_n), (b_n) задовольняють наступні умови:

1) $\forall n \ge 1 : a_n \le b_n$;

2) існують $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

Тоді $a \le b$.

Доведення. Нехай $a, b \in \mathbf{R}$. Застосуємо метод від супротивного. Припустимо, $a > b$. Покладемо $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$. Тоді множини $A_1 = \{n \mid a_n \le a - \varepsilon\}$ та $A_2 = \{n \mid b_n \ge b + \varepsilon\}$ не більш ніж скінченні. Тому об'єднання $A_1 \cup A_2$ – не більш ніж скінченне і $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} = \overline{A_1 \cup A_2} \ne \varnothing$. Але для $n \in \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$ маємо $a_n > a + \varepsilon$ і $b_n < b + \varepsilon$, звідки $b_n < a_n$. Суперечність. Теорему доведено.

Теорема 8 (про три послідовності). Нехай (a_n), (b_n),(c_n) – три послідовності дійсних чисел і виконуються такі умови:

1) для довільного номера n: $a_n \le b_n \le c_n$;

2) $a_n \to a, \quad n \to \infty$ і $c_n \to a, \quad n \to \infty$.

Тоді $b_n \to a, \quad n \to \infty$.

Доведення. Нехай $a \in \mathbf{R}$. Оскільки $c_n \to a, \quad n \to \infty$, то для довільного $\varepsilon > 0$ поза інтервалом $(a - \varepsilon, \quad a + \varepsilon)$ лежить не більш ніж скінченне число членів послідовності (c_n). Зокрема, праворуч від точки $a + \varepsilon$ лежить не більш ніж скінченне число членів цієї послідовності. Але $b_n \le c_n, \quad n \ge 1$ і тому праворуч точки $a + \varepsilon$ також знаходиться не більш ніж скінченне число членів послідовності (b_n). Аналогічно, оскільки $a_n \to a, \quad n \to \infty$, то ліворуч точки $a - \varepsilon$ лежить не більш ніж скінченне число членів послідовності (a_n). Але $a_n \le b_n, \quad n \ge 1$ і тому ліворуч точки $a - \varepsilon$ лежить не більш ніж скінченна кількість членів послідовності (b_n). Отже, множина $\{n \mid \ |b_n - a_n| \ge \varepsilon\}$ не більш ніж скінченна і тому $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$. Теорему доведено.

4. Фундаментальність послідовність. Критерій Коші

Означення 4. Послідовність дійсних чисел (a_n) називається фундаментальною, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий номер N, що множина $\{n \mid \ |a_N - a_n| \ge \varepsilon\}$ не більш ніж скінченна.

За допомогою кванторів це означення запишеться так: (a_n) фундаментальна $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbf{N}$: множина $\{n \| a_N - a_n| \ge \varepsilon\}$ не більш ніж скінченна.

Приклад 5. Послідовність $a_n = \dfrac{\cos 1}{2^1} + \dfrac{\cos 2}{2^2} + ... + \dfrac{\cos n}{2^n}, n \ge 1$ фундаментальна.

Доведення. Нехай $N \in \mathbf{N}$ і $n > N$. Оцінимо $|a_n - a_N|$:

$$|a_n - a_N| = \left| \frac{\cos(N+1)}{2^{N+1}} + ... + \frac{\cos n}{2^n} \right| \le \frac{1}{2^{N+1}} + ... + \frac{1}{2^n} + ... = \frac{1}{2^N}.$$

Для довільного $\varepsilon > 0 : \dfrac{1}{2^N} < \varepsilon \Leftrightarrow N > \log_2 \dfrac{1}{\varepsilon}$. Нехай далі $N = N(\varepsilon) > \log_2 \dfrac{1}{\varepsilon}$ фіксоване. Тоді множина $\{n \mid \ |a_n - a_N| \ge \varepsilon\} \subset \{1, 2, ..., N-1\}$ і тому не більш ніж скінченна. Отже, послідовність (a_n) фундаментальна.

Теорема 9. Фундаментальна послідовність обмежена.

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 4 про обмеженість збіжної послідовності.

Теорема 10 (критерій Коші). Послідовність дійсних чисел збіжна тоді і тільки тоді, коли вона фундаментальна.

Доведення. Необхідність. Нехай (a_n) – збіжна послідовність, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ множина $\left\{n \mid \ |a_n - a| \ge \dfrac{\varepsilon}{4}\right\}$ не більш ніж скінченна і тому існує $N \in \mathbf{N}$: $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{4}$. Тоді множина $\{n \mid \ |a_n - a_N| \ge \varepsilon\} \subset \left\{n \mid \ |a_n - a| \ge \dfrac{\varepsilon}{4}\right\}$ – також не більш ніж скінченна. Отже послідовність (a_n) фундаментальна.

Достатність. Нехай послідовність (a_n) фундаментальна. В силу теореми 9, ця послідовність обмежена. Довільна послідовність дійсних чисел містить монотонну підпослідовність [7]. Нехай $(a_{n(k)})$ – монотонна підпослідовність (a_n). За теоремою Вейєрштрасса про збіжність монотонної обмеженої послідовності, існує $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n(k)} = a \in \mathbf{R}$.

Доведемо, що існує $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Послідовність (a_n) фундаментальна, і тому $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbf{N}$: множина $\left\{n \mid \ |a_n - a_N| \ge \dfrac{\varepsilon}{4}\right\}$ не більш ніж скінченна. Тому і множина $\left\{k \mid \ |a_{n(k)} - a_N| \ge \dfrac{\varepsilon}{4}\right\}$ не більш ніж скінченна, як і множина $\left\{k \mid \ |a_{n(k)} - a| \ge \dfrac{\varepsilon}{4}\right\}$. Тому $\exists K_1 \in \mathbf{N}, N_1 = n(K_1): |a_{N_1} - a_N| < \dfrac{\varepsilon}{4}$ і $|a_{N_1} - a| < \dfrac{\varepsilon}{4}$

Тоді множина $\{n \mid |a_n - a| \geq \varepsilon\} \subset \left\{n \mid |a_n - a_N| \geq \dfrac{\varepsilon}{4}\right\}$ – не більш ніж скінченна. Тому існує $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Теорему доведено.

5. Висновки

Методика викладання теми „Границя послідовності” на основі альтернативного означення 2 границі послідовності дозволяє в термінах скінченності довести основні властивості границь послідовності. Ця методика, поряд з традиційною, сприяє, на нашу думку, більш свідомому, компетентному засвоєнню розділу „Границя послідовності”, базового у нормативному курсі математичного аналізу для студентів математичних та педагогічних спеціальностей. Міркування у доведенні теореми про арифметичні дії над границями послідовностей пропедевтичні для курсів теорії міри та теорії ймовірностей.

Запропонована методика може бути використана при вивченні теми „Підпослідовності. Часткові границі”.

Література

1. Шилов Г. Е. Математический анализ. Функции нескольких переменных. – М.: Наука, 1972. – 622 с.
2. Черный Саша. Иероглифы // Избранная проза. — М.: Книга, 1991. С. 46 – 52.
3. Привалов И.И., Гальперн С.А. Основы анализа бесконечно малых. – М.: Наука, 1966. – 256 с.
4. Михалін Г.О., Дюженкова Л.І. Границя і неперервність функції. – К.: УДПУ, 1997. – 96 с.
5. Курченко О. О. Про границю послідовності // У світі математики. – Вип 20, 1991. с. 160 – 167.
6. Овчарук О. Компетентності як ключ до оновлення змісту освіти. // Стратегія реформування освіти в Україні. – К.: „К.І.С.”, 2003. – С. 13 – 41.
7. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз: Частина 1. – К.: Либідь, 1993. – 320 с.

Ломаєва Т.В., Шаповалова Н.В.
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова,
м. Київ

Деякі застосування ідей Лобачевского в механіці та фізиці

Досить цікаві спроби вивчити статистику і кінематику твердого тіла в просторі Лобачевського, які були зроблені Де-Тілі, Джаннокі, Ліндеманом, Андрадом та іншими привели до того ж результату, що й аналогія між статикою і кінематикою твердого тіла, яка має місце для евклідового простору (це відображено в роботах Пуансо, а саме в «Thèorie nouvelle de la rotation des corps» повинна існувати і в механіці неевклідових просторів. Тому цілком природно, що математична обробка цих двох галузей механіки вимагала нової побудови теорії векторів. До кінця XIX сторіччя в теорії векторів, тобто в тих геометричних теоріях, в яких доводиться мати справу з величинами, які пов’язані напрямком або положенням прямої, вектор завжди зображався або напрямленим відрізком, або впорядкованою сукупністю двох точок – початку та кінця вектора. Але оскільки в неевклідових просторах виконується принцип двоїстості не тільки для проективних, а й для метричних властивостей, то це наводить на думку про необхідність поряд з фігурою, утвореною двома точками, розглядати як елемент теорії векторів фігуру, що утворена двома площинами (точкою і площиною), а потім і фігуру, яка утворена двома прямими.

Вихідним пунктом для нової теорії векторів неевклідових просторів є задача про додавання двох векторів $\bar{p}$ та $\bar{q}$, які мають спільний початок. Закон додавання векторів (сил, швидкостей) в евклідовому просторі виражається в двох різних формах – геометричній (правило трикутника та правило паралелограма) та аналітичній – сукупності рівностей:

$$\frac{|\bar{p}|}{\sin(\bar{q},\bar{r})} = \frac{|\bar{q}|}{\sin(\bar{r},\bar{p})} = \frac{|\bar{r}|}{\sin(\bar{p},\bar{q})}, \tag{1}$$

де $|\bar{p}|, |\bar{q}|, |\bar{r}|$ - довжини складових векторів $\bar{p}$ та $\bar{q}$ і їх суми $\bar{r}$, а $(\bar{q},\bar{r})$ $(\bar{r},\bar{p})$ $(\bar{p},\bar{q})$ - кути між ними.

Яким же буде закон додавання векторів в неевклідовому просторі? Чи може він також виражатися в двох вище наведених формах? Це питання виникає перед нами коли вивчаємо механіку неевклідових просторів.

Якщо в неевклідовому просторі будемо розглядати нескінченно малі вектори, наприклад, нескінченно малі переміщення, то ми можемо без будь-яких змін застосовувати до них правило трикутника та правило паралелограма, а також формули (1), оскільки геометрія нескінченно малого околу неевклідового простору співпадає з геометрією Евкліда.

Для додавання скінчених векторів ми не можемо користуватися вище згаданими правилами, бо паралелограмів скінчених розмірів в неевклідовому просторі не існує. Інша справа з формулами (1). Оскільки вони однорідні відносно довжин векторів $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$, то зрозуміло, що вони залишаться справедливими і для таких