

Математичне моделювання при вивченні механіки

1. Загальне уявлення про математичне моделювання.

У цьому столітті, очікується чергова промислова революція, серцем якої, за нашими розрахунками, стануть методи математичного моделювання оточуючої нас дійсності. Ці методи, ще із часів Ньютона, посіли непорушні позиції у світовій науці.

Наступний розвиток цих ідей і технологій що вирости з них говорить про те, що в найближчому майбутньому методи математичного моделювання повинні перетворитися в справжній локомотив світового науково-технічного прогресу. Реальною основою для такого прогнозу є фантастичне зростання потужності цих методів і грандіозне розширення списку областей їхнього реального застосування. На підтвердження безумовної справедливості цих слів варто лише нагадати, що методи математичного моделювання послужили теоретичною базою для багатьох фундаментальних досягнень ХХ століття, включаючи сюди й розробку всіх аспектів атомної проблеми, і підкорення космосу, і множини інших складних проблем, багато в чому принципово змінили життя всього людства. І саме тому важливо підкреслити, що вплив цих найбільших досягнень не обмежився лише зазначеними спеціальними галузями людської діяльності, а безпосередньо торкнувся й всіх самих глибинних істотних основ розуміння загального устрою світу сучасної цивілізації, тобто всього чисто філософського, а значить і будь-якого іншого аспекту людського буття.

При цьому варто особливо звернути увагу на той фундаментальний факт, що основна роль в справі створення в середині минулого століття комп'ютерів, які в момент своєї появи були призначені тільки для обслуговування математичного моделювання (модель – алгоритм – програма), належить методам математичного моделювання і тим хто їх розробив. І тільки по закінченні деякого часу, освоївши відносно тісний плацдарм, запланований їхніми творцями, комп'ютери надзвичайно швидко стали розвиватися самі й захоплювати все нові й нові території для свого застосування. До кінця ХХ століття комп'ютери зайняли своє особливе місце в структурі сучасної цивілізації. І, завдяки особливій важливості зайнятого ними місця, вони сьогодні є одним з найважливіших двигунів світового науково-технічного й економічного прогресу, змушуючи на диво дуже швидко вдосконалюватися і вдосконалювати всі природно пов'язані з ними, а часом і просто викликані до життя їхнім народженням, технології.

Але попереду, як нам вважається, новий поворот - істотна зміна стратегічної тенденції світового технологічного розвитку. Комп'ютери, продовжуючи вдосконалюватися, можливо, навіть ще більш швидкими темпами, ніж колись, поступляться таки своєю роллю одного з найголовніших каталізаторів і стимуляторів технологічного прогресу. Ця роль поступово повернеться, але вже зовсім на іншому рівні, до того, що стимулювало саме виникнення комп'ютерів, до так званого математичного забезпечення обчислювальних, але вже зовсім і не обов'язково чисельних, процесів обробки інформації.

Такий стан справ вимагає глибокого й повного усвідомлення ролі й місця в історичному процесі методів математичного моделювання оточуючої нас дійсності, - змушує дуже серйозно замислитися про необхідність підготовки фахівців, до принципово нових, відповідно зазначених задач, та паралельно знову переосмислити багато, можливо навіть прямо не пов'язаних з цим, проблем навчання.

Однак, що таке «модель» і «моделювання» та «математична модель» і «математичне моделювання»? Однозначного визначення цих понять у науці немає. Ми будемо дотримуватися формулювання філософа В. А. Штоффа: «Під моделлю ми розуміємо систему, що представляється або матеріально реалізується й, відображаючи або відтворюючи об'єкт дослідження, здатна заміщати його так, що її вивчення дає нам нову інформацію про цей об'єкт» [163, с. 19]. У моделі об'єкт спрощується. Абстрагуючись від другорядного, у ній можна виділити, істотні зв'язки й відносини. У процесі дослідження в моделі розкриваються нові зв'язки, які потім переносяться на реальний об'єкт. У цьому й полягає евристична функція моделі. Отже моделювання це процес спрощення реальної системи, абстрагування від другорядного, виділення істотних зв'язків та відношень. Тепер перейдемо до терміну «математична модель». З цим визначенням ситуація приблизно така сама – існує декілька визначень, які з більшою або меншою мірою різняться між собою. Проаналізувавши ці визначення ми прийшли до наступного: явище або процес який описаний за допомогою математичного апарату певного рівня та зв'язки між елементами якого та зовнішнім середовищем, визначені математичними співвідношеннями називається математичною моделлю. Звідси і випливає що процес математичного моделювання це виділення системи, визначення її елементів та зв'язків між ними та зовнішнім (по відношенню до системи) середовищем, та встановлення математичного співвідношення, яке б описувало стан або зміну станів системи.

2. Математичні моделі механіки в шкільному курсі фізики.

Математичне моделювання є чудовим та універсальним інструментом, який можна застосовувати для досліджень у будь-якій не гуманітарній галузі, але нашою метою є аналіз математичного моделювання саме під час вивчення механіки. Основа математичного моделювання під час вивчення фізики закладається саме під час вивчення механіки. Ми не даремно на початку цієї статті згадали, що методи математичного моделювання посіли панівне місце ще з часів Ньютона, адже саме його можна вважати батьком динаміки – одного з розділів механіки. Шкільний курс механіки наскрізь пронизаний математичними моделями. Навіть формулювання

основної задачі механіки підтверджує цей факт: «Основна задача механіки полягає у з'ясуванні закону або рівняння руху тіла через характеристики, що його описують, - координати, довжину пройденого шляху, переміщення, кут повороту, швидкість, прискорення тощо». Отже, за мету ставиться пошук математичної моделі яка б описувала рух тіла.

Застосовуючи математичні моделі на заняттях з механіки, можливі два шляхи розв'язку задач за їх допомогою:

1. Дається готова математична модель (студент або учень знають цю модель), досліджуючи яку можна розв'язати задачу – шлях ідентифікації моделі. Тобто під певну проблему, задачу ми ідентифікуємо (знаходимо та ставимо у відповідність) математичну модель.

2. Даються початкові умови, змінюючи які певним чином та за певними правилами ми повинні дістати математичну модель певної проблеми або задачі, поширити її (якщо це можливо) на якийсь коло задач та дослідити, таким чином, розв'язуючи певну задачу.

Виходячи зі специфіки навчання, а саме з того, що у шкільному курсі фізики математичні моделі здебільшого вводяться емпірично можна запропонувати перший шлях застосування математичних моделей саме для шкільного курсу фізики. Це також зумовлено рівнем математичної підготовки учнів та знаннями взаємозв'язків між величинами, що входять в емпірично виведену математичну модель. В шкільному курсі фізики (наприклад, кінематика), учні ще не знають основних (диференціальних) зв'язків між координатою, швидкістю та прискоренням матеріальної точки, що в свою чергу ще не дозволяє ним будувати модель, але дозволяє ідентифікувати її та поширювати на певний клас задач.

Другий шлях видається дещо складнішим, але саме його краще пропонувати у курсі теоретичної фізики, йдучи цим шляхом відбувається більш глибоко усвідомлена, самостійна актуалізація і систематизація знань з певного розділу фізики, повторення взаємозв'язків між певними величинами та встановлення системи – математичної моделі. Звичайно, не є якоюсь аксіомою суворе слідування тому чи іншому методу. У кожному конкретному випадку викладач повинен сам вибирати який шлях застосовувати, або якщо треба їх комбінацію на різних етапах розв'язку задачі, очевидно, опираючись на такі фактори як рівень математичної підготовки, рівень глибини знань фізики, цілей які він ставить перед собою.

Математичні моделі механіки в шкільному курсі фізики здебільшого вводяться емпірично. Виникає логічне запитання: «Чи можна вважати кожен формулу, яка подається у шкільному курсі механіки математичною моделлю?». Ми вважаємо що так, дійсно можна, але з такою кількістю моделей, ще на початку вивчення механіки (йдеться про кількість моделей які отримуємо по закінченню шкільного курсу) ми не зможемо досягти оптимального навчання, саме для цього пропонується ця методика. Тому ми дещо уточнили список математичних моделей – надалі розглядатимемо математичні моделі явищ та процесів.

Перший розділ шкільної механіки це «Кінематика». Основи механіки (зокрема, «Кінематики») починають вивчати у 7 класі, але ніяких математичних моделей явищ чи процесів у цьому курсі не вводять У 7 класі вивчаються такі величини та поняття з розділу «Кінематика»: механічний рух, час, траєкторія, шлях швидкість, середня швидкість. У шкільному курсі фізики за 9 клас, середньої загальноосвітньої школи у розділі «Кінематика» вивчаються наступні поняття і величини: механічний рух, система відліку, траєкторія руху, матеріальна точка, шлях і переміщення, швидкість, прискорення. Це все є ніщо інше як елементи системи, математичну модель якої і треба знайти. Лише після описання елементів системи вводиться модель що описує найпростіший вид руху – рівномірний прямолінійний рух. Наступні математичні моделі – прямолінійний рівнозмінний рух та рух тіла по колу. Проаналізувавши навчальну літературу по цьому розділу ми дійшли висновку, що в результаті вивчення розділу «Кінематика» вивчається процес руху тіла (матеріальної точки) і в результаті цього процесу розглядаються наступні явища (класифікація математичних моделей явищ, за ознакою послідовності їх введення в курс шкільної механіки):

1. Явище рівномірного прямолінійного руху.

$$x = x_0 + v_{0x} t$$

2. Явище рівноприскореного прямолінійного руху, або руху тіла по нахиленому жолобу.

$$x = x_0 + v_{0x} t \pm \frac{a_x t^2}{2}$$

$$v = v_{0x} \pm a_x t$$

3. Явище руху тіла що падає вертикально вниз або кинуто вертикально вгору.

$$h = v_0 t \pm \frac{gt^2}{2} \text{ або у випадку руху вздовж осі OX від т. O } x = v_{0x} t \pm \frac{gt^2}{2}$$

$$v = v_0 \pm gt$$

$$v_x = v_{0x} \pm gt$$

4. Явище руху тіла кинутого під кутом до горизонту.

$$x = v_0 t \cos \alpha$$

$$y = v_0 t \sin \alpha \pm \frac{gt^2}{2}$$

5. Явище руху тіла по колу.

$$\omega = \frac{\varphi}{t}$$

$$v = \omega R$$

Ці математичні моделі шкільної «Кінематики» дуже тісно пов'язані між собою. Наприклад, модель явища «руху тіла кинутого під кутом до горизонту» ми отримуємо з моделей явищ «прямолінійного рівнозмінного руху» та «прямолінійного рівномірного руху». Математична модель явища «тіла що падає вертикально вниз, або кинута вертикально вгору» отримуємо з моделі явища «рівнозмінного прямолінійного руху». Навіть, використовуючи ті нескладні математичні співвідношення (правила що відомі) між основними величинами, ми маємо змогу переходити від однієї моделі до іншої, такої яка задовольняє поставленій задачі. Виходить, що для того щоб розв'язувати задачі з кінематики не має необхідності знати всі формули. Необхідно знати (в залежності від рівня знань математичних зв'язків між моделями) одну чи, як у шкільному курсі з кінематики дві математичні моделі і розв'язувати за допомогою побудови математичних моделей цілий клас задач – задачі з «кінематики».

3. Математичні моделі механіки в загальній і теоретичній фізиці.

Математичні моделі механіки в загальній і теоретичній фізиці, на прикладі «кінематики» лише поглиблюють знання з кінематики уточнюючи, розширюючи та розкриваючи додаткові більш складніші математичні зв'язки між представленими математичними моделями. Якщо розглядати, наступні розділи механіки «Динаміку», «Механіку рідин і газів», «Закони збереження» тощо, то можна зробити висновок, що в загальному випадку, коли в загальному та теоретичному курсі фізики розглядаються явища, що вже були описані математичними моделями раніше – в шкільному курсі фізики, математичні моделі добуваються за ієрархічним методом (ускладнюються). Тобто має місце загальний принцип побудови математичної моделі – постійне її наближення до оригіналу. Таким чином, виробляється певна навичка бачення картини світу в цілому та самоорганізації. Лише деякі явища, що не розглядаються у шкільному курсі фізики отримують нові математичні моделі, які знову ж таки вже не емпірично, а індуктивно виводяться з попередніх моделей. Прикладом нових зв'язків між параметрами математичних моделей є зв'язок координати, швидкості та прискорення у диференціальній формі. Причому знову ж таки цей зв'язок носить універсальний характер, отже, його можна застосовувати для побудови моделей для будь-якої задачі.

Проаналізувавши навчальну та методичну літературу курсу загальної фізики, використовуючи рівень математичної підготовки та рівень знань зв'язків між математичними моделями, що набувається в курсі загальної фізики, дійшли висновку, що можливо класифікувати математичні моделі «Кінематики» за їх загальністю. Ми використаємо майже той самий список математичних моделей, що вивчається у шкільному курсі механіки, тільки побудуємо ієрархічний ланцюжок від більш універсальної моделі до конкретної:

1. Процес рівноприскореного прямолінійного руху.

$$x = x_0 + v_{0x}t \pm \frac{a_x t^2}{2}$$

на відміну від моделі з шкільного курсу, математична модель у курсі загальної

фізики складається з одного рівняння, бо є відповідні знання що таке похідна від координати по часу $\frac{dx}{dt}$ і є

відповідно рівняння $x = x(t)$ з якого шляхом диференціювання можна отримати рівняння $v = v(t)$

2. Явище руху тіла що падає вертикально вниз або кинута вертикально вгору.

$$h = v_0 t \pm \frac{gt^2}{2} \text{ або якщо вздовж осі } OX \text{ від т. } O \quad x = v_{0x} t \pm \frac{gt^2}{2}$$

$$v = v_0 \pm gt \quad v_x = v_{0x} \pm gt$$

основі заміни «вільного» параметра a на величину прискорення вільного падіння (конкретні умови даної задачі) g .

3. Явище рівномірного прямолінійного руху.

$x = x_0 + v_{0x} t$ математична модель на відміну від шкільного курсу виводиться з математичної моделі рівноприскореного руху тіла, через перетворення більш загальної моделі (спрощення).

4. Явище руху тіла кинутого під кутом до горизонту.

$$x = v_0 t \cos \alpha$$

ця математична модель є узагальненням рівномірного прямолінійного та

$$y = v_0 t \sin \alpha \pm \frac{gt^2}{2}$$

рівноприскореного прямолінійного руху тіла, вона поєднує ці два види руху в результаті чого отримуємо шукану модель шляхом поєднання двох більш універсальних математичних моделей із застосуванням можливостей які відкривало знайомство з векторами.

5. Явище руху тіла по колу.

$$\omega = \frac{\varphi}{t} \quad \text{математична модель цього явища отримана із встановлених зв'язків між лінійними та}$$

$$v = \omega R$$

кутовими величинами, та використання аналогії математичних зв'язків між лінійними величинами для встановлення відповідних співвідношень між кутовими величинами.

В курсі теоретичної фізики математичний вигляд моделей буде той самий, лише зміниться спосіб їх встановлення. Спосіб встановлення математичних моделей в теоретичній фізиці в розділі «Кінематика» використовує інтегральний зв'язок координати, часу та прискорення. Тому не будемо повторювати весь список моделей а лише покажемо ланцюжок взаємозв'язку. При отриманні моделей визначаємо характер руху,

наприклад, рух рівноприскорений отже $a = \frac{dv}{dt}$. Розділяємо змінні та розв'язуємо диференціальне рівняння

$$dv = a dt \Rightarrow v = \int a dt \Rightarrow v = at + const, \text{ де } const \text{ визначається початковими умовами (умовами даної задачі).}$$

Отже в результаті $v = v_0 + at$ або $v = at$, якщо ця математична модель не є розв'язком задачі (наприклад, треба

знайти координату тіла x у момент часу t), використаємо співвідношення $v = \frac{dx}{dt}$ та розв'яжемо рівняння

$$dv = (v_0 + at) dt \text{ або } dv = at dt \text{ в результаті отримаємо } x = v_0 t + \frac{at^2}{2} + const \text{ де } const \text{ визначається умовами даної}$$

задачі. Математична модель рівномірного руху отримується аналогічно (змінюються тільки початкові умови).

4. Висновки щодо дидактичного значення математичного моделювання під час вивчення механіки.

Таким чином, розглянувши курс шкільної, загальної та теоретичної фізики, курсу механіка та розділу «Кінематика» ми дійшли висновку, що математичні моделі які використовуються під час навчання у школі або у ВНЗ описують однакові явища та процеси, лише складність та шлях отримання математичної моделі явища чи процесу різняться між собою. Звичайно, не можна не згадати, такі процеси або явища, що вивчаються тільки в ВНЗ, або математичні моделі яких вводяться тільки в ВНЗ, але такі моделі є уточнюючими і в свою чергу, їх можна отримати із більш загальної моделі даного курсу. Коротко, у кожному курсі є загальна модель з якої, знаючи правила (зв'язки між величинами) можна отримати всі інші, навіть нові, математичні моделі. Це призводить до того, що використовуючи алгоритм побудови математичних моделей і знання про зв'язки між величинами можна розв'язати будь-яку задачу, шляхом побудови математичної моделі та її дослідження.

В результаті аналізу і узагальнення цього матеріалу ми вирішили запропонувати такий алгоритм побудови математичної моделі. З наступними основними етапами:

1. Визначення меж фізичної системи (межі фізичної системи визначаються переліком її елементів, таким чином система виділяється із зовнішнього середовища).
2. Виявлення властивостей елементів фізичної системи
3. Визначення зовнішніх умов (все, що не входить до переліку елементів фізичної системи вважаємо зовнішнім середовищем).
4. Виділення системо-утворюючих зв'язків між елементами системи та записуємо їх у математичній формі.
5. Дослідження отриманої математичної моделі.

Використовуючи математичне моделювання у вивченні механіки ми дійшли наступних висновків:

1. У процесі дослідження в моделі розкриваються нові зв'язки, які потім переносяться на реальний об'єкт. Це евристична функція моделі.
2. Будучи опорою для виконання розумових операцій і пізнавальних завдань, моделювання сприяє формуванню в учнів абстрактного мислення й підвищенню теоретичного рівня в навчанні. Особливо велике значення має моделювання при системному підході до вивчення складного теоретичного матеріалу.
3. Графічні й знакові (математичні моделі), сприяють осмисленню учнями сутності предметів і явищ та формуванню вмінь виконувати з ними відповідні перетворення, у достатньому ступені використовуючи їхні евристичні можливості.
4. Математичні моделі служать зовнішньою опорою для розумової діяльності учнів, спрямованої на виявлення або осмислення внутрішньої сутності досліджуваних явищ, теоретичної інтерпретації результатів спостережень (експериментів), проведених учнями, або фактів, про які вони довідалися від учителя або з підручника.
5. Широке застосування моделей різних видів і рівнів сприяє органічному переходу учнів від наочно-чуттєвого до абстрактного пізнання, від емпіричного до теоретичного, дозволяє підсилити науково-теоретичний рівень знань.
6. У зв'язку зі зростаючою роллю системного підходу та моделювання структура процесу навчання вдосконалюється, педагогічний арсенал учителя збагачується, його дидактичні можливості для підвищення ефективності навчально-виховного процесу й поліпшення якості знань учнів розширюються.