Листопад В.В.
Академія праці та соціальних відносин

Реалізація методу штучного базису для розв'язування екстремальних задач лінійного програмування засобами Microsoft Excel

Для продовження тематики, запропонованої в [2] і [3], розглянемо реалізацію розв'язування екстремальних задач лінійного програмування з допомогою методу штучного базису засобами Microsoft Excel.

Нагадаємо, що застосування електронних таблиць Microsoft Excel дає змогу:

- скоротити час розв'язування задачі в кілька разів;
- отримувати повну таблицю-результат та альтернативні розв'язки;
- реалізувати міжпредметні зв'язки;
- реалізувати можливість паралельного засвоєння теоретичного матеріалу даної теми;
- отримувати та аналізувати розв'язки прямих та двоїстих задач лінійного програмування;
- готувати систему вправ для самостійного виконання.

Щоб розв'язати канонічну задачу лінійного програмування симплекс-методом, потрібно знайти будь-який її опорний розв'язок. Якщо ж система рівнянь канонічної задачі не зведена до одиничного базису, то щоб розв'язати таку задачу симплекс-методом, систему рівнянь зводять до одиничного базису штучно, за допомогою введення до базису штучних одиничних змінних (штучного базису).

Розглянемо таку задачу [4, с. 25].

Потрібно знайти

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 +,,,+ c_nx_n \to \max \qquad (1)$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j \geq \overline{0,\ j} = 1, n. \qquad (3)$$

Тут $b_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,m, m < n$, і серед векторів

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix};\ P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix};\ \ldots P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix};$$

нема m одиничних.

Задача, яка полягає в знаходженні

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 +,,, + c_nx_n - Mx_{n+1} - \ldots - Mx_{n+m} \to \max \qquad (4)$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases} \qquad (5)$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,\ldots,n+m. \qquad (6)$$

де M – деяке досить велике додатне число, конкретне значення якого як правило не задається, називається *розширеною задачею* відносно задачі (1 – 3). Розширена задача (4 – 6) має опорний план $X = (0,\ldots,0,b_1,b_2,\ldots b_m)$, який визначається системою одиничних векторів $P_{n+1}, P_{n+2},\ldots,P_{n+m}$, що утворюють базис *m*-вимірного векторного простору, який називається штучним. Самі вектори, як і змінні x_{n+i}, $(i = 1,2,\ldots,m)$, називаються штучними. Оскільки розширена задача має опорний план, то її розв’язок то можна знайти за допомогою симплекс-методу.

Теорема. Якщо в оптимальному плані $X^* = (x_1^*, x_2^*,\ldots,x_n^*, x_{n+1}^*,\ldots,x_{n+m}^*)$ розширеної задачі (4 – 6) значення штучних змінних $x_{n+i}^* = 0$, $(i = 1,2,\ldots,m)$, то $X^* = (x_1^*, x_2^*,\ldots,x_n^*)$ буде оптимальним планом задачі (1 – 3).

Таким чином, якщо в знайденому оптимальному плані розширеної задачі значення штучних змінних рівні нулю, то тим самим одержано оптимальний план вихідної задачі. Зупинимося на деяких деталях знаходження розв'язку розширеної задачі.

При опорному плані $X = (0,...,0, b_1, b_2,..., b_m)$ розширене значення лінійної форми є $F = -M\sum_{i=1}^{m} b_i$, а значення $\Delta_j = Z_j - C_j$ рівні $-M\sum_{i=1}^{m} a_{ij} - c_j$. Таким чином F_0 та різниця $Z_j - C_j$ складаються з двох частин, одна з яких залежить від М (її писатимемо в рядкові *m+2*), а інша – не залежить від М (її писатимемо в рядкові *m+1*). При переході від одного опорного плану до іншого в базис вводять вектор, який відповідає найбільшому за модулеля від'ємному числу (*m+2*)-го рядка. Штучний вектор, виключений з базису в результаті деякої ітерації, надалі немає сенсу вводити ні в один з наступних базисів, а отже перетворення стовпчиків цього вектора є зайвим. Ітераційний процес за (*m+2*)-м рядком продовжують до тих пір, поки:

1. всі штучні вектори будуть виключені з базису;

2. не всі штучні вектори виключені, але (*m+2*)-й рядок не містить більше від'ємних елементів.

У першому випадку отриманий базис відповідає деякому опорному плану вихідної задачі і визначення її оптимального плану продовжують за (*m+1*)-м рядком.

У другому випадку, якщо елемент, який стоїть в (*m+2*)-му рядку стовпчика P_0 від'ємний, вихідна задача не має розв'язку; якщо ж він рівний нулеві, то знайдений опорний план вихідної задачі є виродженим і базис містить принаймні один з векторів штучного базису. Якщо вихідна задача містить кілька одичних векторів, то їх треба включити в штучний базис.

Проілюструємо реалізацію методу штучного базису на прикладах.

Приклад 1. Знайти мінімальне значення цільової функції

$$F = 2x_1 - x_2 - x_4 \to \min$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ -2x_1 - x_2 - 2x_4 \ge 18, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 \ge 36, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

Розв’язання. Перейдемо до обмежень-рівностей, та основної задачі.

$$F_1 = -F = -2x_1 + x_2 + x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ -2x_1 - x_2 - 2x_4 - x_5 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 - x_6 = 36, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$$

Випишемо вектори $P_0 - P_6$:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 18 \\ 36 \end{pmatrix};\ P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix};\ P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix};\ P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};\ P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};\ P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Серед векторів $P_1 - P_6$ тільки один одиничний (P_3), тому в ліву частину другого і третього рівняння системи обмежень додаємо додаткові невід’ємні змінні x_7 та x_8 і розглянемо розширену задачу.

$$F_1 = -2x_1 + x_2 + x_4 - Mx_7 - Mx_8 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ -2x_1 - x_2 - 2x_4 - x_5 + x_7 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 - x_6 + x_8 = 36, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,\ 8}.$$

Записуємо симплекс-таблицю:

I	Базис	$C_{баз}$	P_0	-2	1	0	1	0	0	-M	-M
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
1	P_3	0	10	1	-2	1	0	0	0	0	0
2	P_7	-M	18	-2	-1	0	-2	-1	0	1	0
3	P_8	-M	36	3	2	0	1	0	-1	0	1
4			0	2	-2	0	-1	0	0		

5		-M	-54M	-M	-M	0	M	M	M		

Запишемо симплекс-таблицю в MS Excel. На місцях, де розташовано (-М) будемо писати (-1).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1				-2	1	0	1	0	0	-1	-1	θі
2	Базис	Сбаз	Ро	Р1	Р2	Р3	Р4	Р5	Р6	Р7	Р8	
3	Р3	0	10	1	-2	1	0	0	0	0	0	
4	Р7	-1	18	-2	-1	0	-2	-1	0	1	0	
5	←Р8	-1	36	3	2	0	1	0	-1	0	1	← 18
6			0	2	-1	0	-1	0	0			
7		-M	-54	-1	↑ -1	0	1	1	1			

Обчислюємо елементи шостого і сьомого рядків першої симплекс-таблиці.

C6=СУММПРОИЗВ($B$3:C3); D6=СУММПРОИЗВ($B$3:D3) – D1, та розповсюджуємо на всі клітинки шостого рядка (не включаючи стовпці з штучними змінними). C7=СУММПРОИЗВ($B$4:$B$5;C4:C5), та розповсюджуємо на всі комірки сьомої строчки (крім двох останніх).

В сьомому рядку отриманої симплекс-таблиці є два від'ємних числа (-1 та -1), що говорить про те, що отриманий план не оптимальний. Переходимо до нової симплекс-таблиці. Оскільки обидва від'ємні елементи сьомого рядка однакові, то в базис можна ввести P_1 або P_2. Введемо, наприклад, вектор P_2. З базису виключимо P_8, оскільки лише елемент третього рядка додатній. P_8 не має сенсу вводити ні в один з наступних базисів, а тому надалі стовпчик даного вектора не заповнюється.

Переходимо до наступної таблиці. Розв'язувальним елементом буде $a_{32}^{(0)} = 2$ (E5). Для цього задаємо формули для обчислення елементів стовпця P_0 так, щоб розповсюдити їх на всі комірки нової таблиці.

C8=($E$5*C3-$E$3*C5)/$E$5, C9=($E$5*C4-$E$4*C5)/$E$5, C10=C5/$E$5.

Виділяємо значення утвореного стовпця та розповсюджуємо формулу (вправо) на всю таблицю. Таким чином перехід до нової симплекс-таблиці виконано. Елементи 11 та 12 рядків знайдемо аналогічно до першої таблиці (для підсумування першого і третього рядків можна двій в одній формулі скористатися функцією СУММПРОИЗВ).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
				-2	1	0	1	0	0	-1	-1	
	Базис	Сбаз	Ро	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	θi
8	P3	0	46	4	0	1	1	0	-1	0		
9	P7	-1	36	-0,5	0	0	-1,5	-1	-0,5	1		
10	P2	1	18	1,5	1	0	0,5	0	-0,5	0		
11			18	3,5	0	0	-0,5	0	-0,5			
12			-36	0,5	0	0	1,5	1	0,5			

Оскільки в останньому рядкові отриманої таблиці $P_0 = -36 < 0$, а всі елементи рядка невід’ємні, то задача не має розв’язку.

Приклад 2. [5, с. 46] Підприємство отримує від постачальників труби довжиною 3,6 м. Із них треба виготовити 500 заготовок довжиною 1,35 м., 720 заготовок довжиною 1 м. і 800 заготовок довжиною 0,7 м. Яку кількість треба замовити постачальникам і яким способом треба розрізати труби на заготовки, щоб залишки були мінімальними?

Розв’язування. Для побудови математичної моделі задачі розглянемо всі можливі способи розкрою труб на заготовки, відповідні цим способам розрізання залишки і оформимо отримані результати у вигляді наступної таблиці.

Заготовки	Способи розкрою								Кількість заготовок
	1	2	3	4	5	6	7	8	
1,35 м	2	1	1	1	0	0	0	0	500
1,00 м	0	2	1	0	3	2	1	0	720
0,7 м	1	0	1	3	0	2	3	5	800
Залишки(м)	0,2	0,25	0,55	0,15	0,6	0,2	0,5	0,1	

Позначимо через x_j кількість труб, які потрібно розрізати *j*-тим способом (*j*=1,2,…,8). Тоді кількість заготовок довжиною 1,35 м., які можна отримати при всіх способах розкрою, дорівнює $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4$; кількість заготовок довжиною 1 м. дорівнює $2x_2 + x_3 + 3x_5 + x_7$; кількість заготовок довжиною 0,7 м. дорівнює $x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_6 + 3x_7 + 5x_8$.

Позначаючи тепер через F сумарні залишки і враховуючи потреби підприємства у відповідних заготовках, отримуємо таку математичну модель задачі:

$$F = 0{,}2x_1 + 0{,}25x_2 + 0{,}55x_3 + 0{,}15x_4 + 0{,}6x_5 + 0{,}2x_6 0{,}5x_7 + 0{,}1x_8 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 500 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 = 720 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_6 + 3x_7 + 5x_8 = 800 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 (j = \overline{1,\ 8}).$$

Математична модель представляє собою канонічну задачу лінійного програмування, яку можна розв’язати за симплекс-методом (з допомогою електронних таблиць Microsoft Excel), вводячи штучні змінні. Оскільки змінна x_5 входить тільки до другого рівняння, а змінна x_8 – тільки до третього, то ці змінні можна обрати за базисні, якщо коефіцієнти біля них дорівнюватимуть одиниці. З цією метою поділимо обидві частини другого рівняння на 3, а третього на 5. Тоді для того, щоб система рівнянь була зведена до одиничного базису, досить ввести лише одну штучну змінну x_9 додавши її до лівої частини першого рівняння.

Таким чином розширена задача має вигляд:

$$F = 0{,}2x_1 + 0{,}25x_2 + 0{,}55x_3 + 0{,}15x_4 + 0{,}6x_5 + 0{,}2x_6 0{,}5x_7 + 0{,}1x_8 + Mx_9 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_9 = 500, \\ \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + x_5 + \frac{2}{3}x_6 + \frac{1}{3}x_7 = 240, \\ \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4 + \frac{2}{5}x_6 + \frac{3}{5}x_7 + x_8 = 160, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0\ (j = \overline{1,\ 9}),$$

де М – досить велике додатне число.

Розв’яжемо розширену задачу симплекс-методом за допомогою Microsoft Excel, шукаючи замість мінімуму F максимум функції

$-F=-0{,}2x_1-0{,}25x_2-0{,}55x_3-0{,}15x_4-0{,}6x_5-0{,}2x_6-0{,}5x_7-0{,}1x_8-Mx_9\to\max$. Запишемо всі дані в симплекс-таблицю, та виконаємо переходи до отримання першого розв'язку, як в прикладі 1.

			-0,2	-0,25	-0,55	-0,15	-0,6	-0,2	-0,5	-0,1	-1	
Базис	Cбаз	Po	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	
P9←	-1	500	2	1	1	1	0	0	0	0	1	
P5	-0,6	240	0	2/3	1/3	0	1	2/3	1/3	0	0	
P8	-0,1	160	1/5	0	1/5	3/5	0	2/5	3/5	1	0	
	Zi-Ci	-160	0,18	-0,15	0,33	0,09	0	-0,24	0,24	0	1	
	-M	-500	↑-2	-1	-1	-1	0	0	0	0	-1	
P1	-0,2	250	1	1/2	1/2	1/2	0	0	0	0		
P5	-0,6	240	0	2/3	1/3	0	1	2/3	1/3	0		360
P8←	-0,1	110	0	-0	0	1/2	0	2/5	3/5	1		275
	Zi-Ci	-205	0	-0,24	0,24	0	0	↑-0,24	0,24	0		
P1	-0,2	250	1	1/2	1/2	1/2	0	0	0	0		500
P5←	-0,6	56 2/3	0	5/6	1/6	- 5/6	1	0	- 2/3	-1 2/3		68
P6	-0,2	275	0	- 1/4	1/4	1 1/4	0	1	1 1/2	2 1/2		
		-139	0	↑-0,3	0,3	0,3	0	0	0,6	0,6		
P1	-0,2	216	1	0	2/5	1	- 3/5	0	2/5	1		
P2	-0,25	68	0	1	1/5	-1	1 1/5	0	- 4/5	-2		
P6	-0,2	292	0	0	2/7	1	1/3	1	1 2/7	2		
	Zi-Ci	-118,6	0	0	0,36	0	0,36	0	0,36	0		

Оскільки штучна змінна x_9 виведена з базису та всі $Z_i-C_i\geq 0$, то отриманий розв'язок $X_{1onm}=(216;68;0;0;0;292;0;0)$ оптимальний і йому відповідає мінімальне значення цільової функції $F_{\min}=118{,}6$.

Але, оскільки $Z_i-C_i=0$ не тільки для базисних змінних x_1, x_2, x_6, а й для базисних змінних x_4 та x_8, то це означає, що існують альтернативні розв'язки, яким відповідає те саме мінімальне значення цільової функції $F_{\min}=118{,}6$. Знайдемо ці три оптимальні розв'язки, починаючи з включення до базисних змінних, наприклад, змінної x_4. В результаті отримаємо ще три симплекс-таблиці, які дають альтернативні розв'язки задачі.

			-0,2	-0,25	-0,55	-0,15	-0,6	-0,2	-0,5	-0,1	
Базис	Сбаз	Po	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	θi
←P1	-0,2	216	1	0	2/5	1	- 3/5	0	2/5	1	←216
P2	-0,25	68	0	1	1/5	-1	1 1/5	0	- 4/5	-2	
P6	-0,2	292	0	0	2/7	1	2/7	1	1 2/7	2	292
		-118,6	0	0	0,36	↑0	0,36	0	0,36	0	
P4	-0,15	216	1	0	2/5	1	- 3/5	0	2/5	1	216
P2	-0,25	284	1	1	3/5	0	3/5	0	- 2/5	-1	
←P6	-0,2	76	-1	0	- 1/9	0	8/9	1	8/9	1	←76
		-118,6	0	0	0,36	0	0,36	0	0,36	↑0	
← P4	-0,15	140	2	0	1/2	1	-1 1/2	-1	- 1/2	0	
P2	-0,25	360	0	1	1/2	0	1 1/2	1	1/2	0	
P8	-0,1	76	-1	0	- 1/9	0	8/9	1	8/9	1	
		-118,6	0	0	0,36	0	0,36	0	0,36	0	
P1	-0,2	70	1	0	1/4	1/2	- 3/4	- 1/2	- 1/4	0	
P2	-0,25	360	0	1	1/2	0	1 1/2	1	1/2	0	
P8	-0,1	146	0	0	1/7	1/2	1/7	1/2	2/3	1	
		-118,6	0	0	0,36	0	0,36	0	0,36	0	

Повертаючись до економічної постановки задачі, можна дати наступну економічну інтерпретацію отриманих результатів. Є чотири варіанти розкрою труб на заготовки відповідної довжини, при яких буде виконано планове завдання щодо заготовок кожного виду і при яких залишки будуть мінімальними (сумарні залишки при всіх чотирьох варіантах розкрою становитимуть 118,6 м.).

Варіант 1: 216 труб розкроювати першим способом ($x_1 = 216$), 68 труб розкроювати другим способом ($x_2 = 68$) і 292 труби розкроювати шостим способом ($x_6 = 292$).

Варіант 2: 284 труби розкроювати другим способом ($x_2 = 284$), 216 труб розкроювати четвертим способом ($x_4 = 216$) і 76 труб розкроювати шостим способом ($x_6 = 76$).

Варіант 3: 360 труб розкроювати другим способом ($x_2 = 360$), 140 труб розкроювати четвертим способом ($x_4 = 140$) і 76 труб розкроювати восьмим способом ($x_8 = 76$).

Варіант 4: 70 труб розкроювати першим способом ($x_1 = 70$), 360 труб розкроювати другим способом ($x_2 = 360$) і 146 труби розкроювати восьмим способом ($x_8 = 146$).

На реалізацію будь-якого з чотирьох варіантів потрібно 576 труб.

Завдання для самостійного виконання.

Розв'язати за допомогою симплекс-методу (з використанням Ms Excel) задачі.

1. Знайти максимальне значення цільової функції

$$F = -45x_1 - 23x_2 - 7x_3 \to \max$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 8x_1 + 16x_2 - 4x_3 = 14, \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 28, \\ 6x_1 + 11x_2 - 3x_3 \geq 7. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,3}).$$

2. Знайти мінімальне значення цільової функції

$$F = -14x_1 - 21x_2 - 7x_3 - 7x_4 \to \min$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 7x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 \geq -7, \\ -7x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 70, \\ 28x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 8x_4 \leq 7. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,4}).$$

3. Виробник елементів центрального опалення виготовляє радіатори чотирьох моделей. Обмеження на виробництво обумовлені кількістю робочої сили і кількістю сталевих листів, з яких виробляються радіатори.

Ресурси	Модель радіатора				Запаси ресурсів
Робоча сила (людино-годин)	0,5	1,5	2	1,5	500
Сталеві листи ($м^2$)	4	2	6	8	2500
Прибуток від продажу (грн.)	5	5	12,5	10	

Виробник хотів би виготовляти радіатори в кількостях, які б максимізували його прибуток.

Література

1. Наконечний С.І., Савіна С.С. Математичне програмування: Навчальний посібник. – К.: КНЕУ, – 2005 – 452 с.

2. Листопад В.В. Розв'язування задач лінійного програмування засобами MICROSOFT EXCEL. // Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання математики:матеріали Всеукр. наук.-метод. конф. (3-4 грудня 2009 р., м. Суми:Вид-во СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2009 – С. 214-216.

3. Листопад В.В. Реалізація симплекс-методу для розв'язання економічних задач оптимізації з допомогою Microsoft Excel. // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія №5. Педагогічні науки: реалії та перспективи. – Випуск 19: збірник наукових праць / за ред. В.Д. Сиротюка. – К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2009 – С. 211-215.

4. Лавер О.Г. Застосування методів лінійного програмування до розв'язання прикладних задач економіки. // Методичний посібник для студентів економічного факультету. – Ужгород. – 1998 – 68 с.

5. Методичний посібник з курсу «Математичне програмування», / Укл. С.П. Круглова. – К., 2001. – 127 с.