Кільце многочленів від однієї змінної	*Кільце многочленів від багатьох змінних*
кільцем K утворює кільце; 2) кільце $K[x]$ є мінімальним підкільцем кільця L, яке містить як кільце K, так і елемент x.	$x_1, x_2, ..., x_n$ над кільцем K утворює кільце; 2) кільце $K[x_1, x_2, ..., x_n]$ є мінімальним підкільцем кільця L, яке містить як кільце K, так і елементи $x_1, x_2, ..., x_n$.
Теорема. Кільце многочленів від однієї змінної існує над довільним комутативним кільцем K з одиницею.	Теорема. Кільце многочленів від багатьох змінних існує над довільним комутативним кільцем K з одиницею.
Теорема. Нехай K і K_1 – комутативні кільця з одиницею, $K[x]$ – кільце многочленів від змінної x над K, $K_1[y]$ – кільце многочленів від змінної y над K_1. Тоді якщо $K \overset{\varphi}{\cong} K_1$, то $K[x] \overset{\psi}{\cong} K_1[y]$. **Наслідок.** З точністю до ізоморфізму кільце многочленів від однієї змінної над довільним комутативним кільцем K з одиницею – єдине.	Теорема. Нехай K і K_1 – комутативні кільця з одиницею, $K[x_1, x_2, ..., x_n]$ – кільце многочленів від змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ над K, $K_1[y_1, y_2, ..., y_n]$ – кільце многочленів від змінних $y_1, y_2, ..., y_n$ над K_1. Тоді якщо $K \overset{\varphi}{\cong} K_1$, то $K[x_1, x_2, ..., x_n] \overset{\psi}{\cong} K_1[y_1, y_2, ..., y_n]$. **Наслідок.** З точністю до ізоморфізму кільце многочленів від багатьох змінних над довільним комутативним кільцем K з одиницею – єдине.

Пропонований авторський підхід до введення поняття многочлена від багатьох змінних, як показує практика, і сприймається легше, оскільки узагальнює відомий студенту вже осмислений матеріал, і, що дуже важливо, дозволяє уникнути неточностей, пов'язаних із необхідністю доведення "рівноправності" змінних, про які йшла мова вище.

Використана література:

1. *Требенко Д. Я., Требенко О. О.* Методика введення поняття многочлена над комутативним кільцем з одиницею // Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія №5. Педагогічні науки: реалії та перспективи. – Випуск 17: збірник наукових праць. – К. : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2009. – С. 226-234.
2. *Требенко Д. Я., Требенко О. О.* Алгебра і теорія чисел: У 2 ч. – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2013. – Ч.2.
3. *Требенко Д. Я.,Требенко О. О.* Методика введення поняття многочлена над комутативним кільцем з одиницею // Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія №5. Педагогічні науки: реалії та перспективи. – Випуск 17: збірник наукових праць. – К. : Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 2009. – С. 226-234.
4. *Требенко Д. Я., Требенко О. О.* Алгебра і теорія чисел: У 2 ч. – К. : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2013. – Ч. 2.

Аннотация

Рассматривается авторский подход к введению понятия многочлена от многих переменных над коммутативным кольцом с единицей. Для определения понятия многочлена впервые предложено использовать понятие алгебраической независимости над кольцом конечного множества элементов.

Annotation

Authors' approach to the introduction of the concept of a polynomial in several variables over the commutative ring with identity is considered. A concept of algebraic independence over the ring of a finite set of elements for the definition of the polynomial is proposed for the first time.

УДК 511.72 + 517.51

Замрій І. В.

МНОЖИНИ ЧИСЕЛ З ПОСЛІДОВНІСТЮ ФІКСОВАНИХ $\overline{Q_3}$-СИМВОЛІВ ТА З ОБМЕЖЕННЯМ НА ВЖИВАННЯ ЦИФРИ

Існує багато різних моделей загальної аксіоматичної теорії дійсних чисел. Один з класів таких теорій використовує трисимвольний алфавіт $A = \{0,1,2\}$. Він включає і класичну теорію дійсних чисел як теорію трійкових рядів і її різнопланові узагальнення та модифікації. Разом з цим розвиваються теорії зображення дійсних чисел засобами нескінченного алфавіту [1-4]. Крім того між системами зображення чисел зі скінченними та нескінченними алфавітами можна встановити тісний зв'язок, як це зроблено в [3] для двійкової системи і системи Q_∞-зображення.

У даній роботі ми вводимо і модифікацію вже відомого Q_3-зображення [1, 2], яке є узагальненням класичного трійкового. І розглядаємо множину чисел у зображенні яких є фіксовані $\overline{Q_3}$-символи та множину чисел з обмеженням на вживання цифри у $\overline{Q_3}$-зображенні числа.

1. Модифіковане $\overline{Q_3}$-зображення дійсних чисел

Нехай $Q_3 = \{q_0, q_1, q_3\}$ – впорядкована множина додатних дійсних чисел, таких, що $q_0 + q_1 + q_2 = 1$; $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = q_0$, $\beta_2 = q_0 + q_1$.

Теорема 1. Для будь-якого $x \in [0,1]$ існує послідовність (α_n), $\alpha_n \in \{0,1,2\} \equiv A$ така, що

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left[\beta_{\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j}\right] = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}. \qquad (1)$$

Означення 1. Розклад числа x у ряд (1) називається його Q_3-представленням, а скорочений формальний запис

$$x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots} \qquad (2)$$

– Q_3 – зображенням. При цьому α_k називається k-тим Q_3-символом числа x.

Означення 2. Зображення

$$\overline{\Delta}^{Q_3}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots} \qquad (3)$$

$$x = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1}\underbrace{1\ldots1}_{a_2}\underbrace{2\ldots2}_{a_3}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{a_{3n-2}}\underbrace{1\ldots1}_{a_{3n-1}}\underbrace{2\ldots2}_{a_{3n}}\ldots}, \ a_n \in Z_0,$$

дійсного числа

називатимемо $\overline{Q_3}$ – зображенням числа x.

Очевидно, що воно є лише модифікацією Q_3-зображення, але на відміну від останнього використовує не трисимвольний алфавіт, а нескінченний алфавіт, який є множиною цілих невідємних чисел.

В модифікованому $\overline{Q_3}$ – зображенні з метою усунення некоректностей (неоднозначностей) введемо додаткові вимоги:

- у зображенні дійсного числа не може стояти підряд більше двох нулів, тобто $a_n a_{n+1} a_{n+2} \neq 000, \ n \in N$;
- для чисел, які мають періоди (0), (1) або (2) в Q_3-зображенні, а отже мають континуальну множину різних $\overline{Q_3}$-зображень, домовимось використовувати лише одне з них, а саме: $\Delta^{Q_3}_{\ldots(i)} = \overline{\Delta}^{Q_3}_{\ldots i00i00i00i\ldots}, \ i = 0,1,2$.

Після введення цих вимог довільне число $x \in [0,1]$ має єдине $\overline{Q_3}$-зображення.

Введемо необхідні поняття.

Означення 3. Циліндром рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m, c_i \in Z_0$, називається множина виду

$$\overline{\Delta}^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m} = \{x : a_k(x) = c_k, k = \overline{1,m}\},$$

де $a_k(x)$ – це k-й символ модифікованого $\overline{Q_3}$-зображення числа.

Означення 4. Множина $\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m}_{c_1c_2\ldots c_m} = \{x : a_{k_i}(x) = c_i, i = \overline{1,m}\}$ називається напівциліндром з основою

$$\begin{pmatrix} k_1k_2\ldots k_m \\ c_1c_2\ldots c_m \end{pmatrix}.$$

2. Множина чисел з послідовністю фіксованих $\overline{Q_3}$-символів

Означення 5. Нехай (c_m) – задана послідовність цілих невідємних чисел. Множиною чисел з послідовністю фіксованих $\overline{Q_3}$-символів називають множину виду:

$$\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m\ldots}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots} = \{x : x = \overline{\Delta}^{Q_3}_{a_1a_2\ldots a_m\ldots}, a_{k_m}(x) = c_m, m \in \mathrm{N}\}.$$

Із властивостей напівциліндрів випливає: $\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m\ldots}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m}_{c_1c_2\ldots c_m}$.

Теорема 2. Міра Лебега множини $\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m\ldots}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$ чисел з послідовністю фіксованих $\overline{Q_3}$-символів рівна нулю, тобто $\lambda(\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m\ldots}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}) = 0.$

Доведення. Нехай $\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m\ldots}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots} = K$ і $\bigcap_{i=1}^{m} \overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_i}_{c_1c_2\ldots c_i} = K_m$. Тоді очевидно, що

$$K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \ldots \supset K_m \supset \ldots \supset K,$$

тобто $K \subset K_m$ і $\lambda(K) \le \lambda(K_m)$ для всіх $m \in \mathrm{N}$. Маємо, $\lambda(\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m\ldots}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}) \le \lambda(\bigcap_{i=1}^{m} \overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_i}_{c_1c_2\ldots c_i}) \to 0.$ Отже, $\lambda(\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m\ldots}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}) = 0$. Що і треба було довести.

Теорема 3. Множина $\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m\ldots}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$ чисел з послідовністю фіксованих $\overline{Q_3}$-символів є:

1) точкою $\overline{\Delta}^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$, якщо $k_m - k_{m-1} = 1, m \in \mathrm{N}$ для всіх m і $k_1 = 1$;

2) ніде не щільною множиною при $k_m - k_{m-1} > 1, m \in \mathrm{N}$.

Доведення. 1) Якщо $k_1 = 1$ і $k_m - k_{m-1} = 1$ для довільного $m \in \mathrm{N}$, то напівциліндр $\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m}_{c_1c_2\ldots c_m}$ є циліндром $\overline{\Delta}_{c_1c_2\ldots c_m}$ $\overline{Q_3}$-зображення при всіх $m \in \mathrm{N}$. Тому множина $\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m\ldots}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$ є точкою.

2) Якщо $k_m - k_{m-1} = 1$ починаючи з деякого номера $p > 1$, то множина $\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m\ldots}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$ є зліченною. У випадку $k_m - k_{m-1} > 1$ для нескінченної множини номерів m, множина із послідовністю фіксованих $\overline{Q_3}$-символів є континуальною. Тобто при $k_m - k_{m-1} > 1, m \in \mathrm{N}$ довільну кількість разів, множина $\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m\ldots}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$ є ніде не щільною.

3. Множина чисел з обмеженням на вживання цифри

Розглянемо деяку множину $I \subset N$, яка має вигляд:

$$I = I[\overline{Q_3}, N_0 \setminus \{2\}] = \{x : x = \overline{\Delta}^{Q_3}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}, \text{äå } a_k \ne 2 \,\forall k \in N\}.$$

Якщо перейти від $\overline{Q_3}$ до Q_3, то отримаємо таке представлення:

$$I = I[\overline{Q_3}, N_0 \setminus \{2\}] = I[Q_3, \overline{ii}] = \{x : x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \text{äå } \alpha_k\alpha_{k+1} \ne ii \,\forall k \in N, i \in A\}.$$

Теорема 4. Множина $I[\overline{Q_3}, N_0 \setminus \{2\}]$ є ніде не щільною нуль-множиною Лебега.

Доведення. Нехай (a,b) – довільний інтервал, що належить $[0,1]$. Легко вказати циліндр, який міститься в ньому $\overline{\Delta}^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n} \subset (a,b)$. Тоді інтервал $int\overline{\Delta}^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n 2}$ не містить жодної точки множини $I[\overline{Q_3}, N_0 \setminus \{2\}]$. Таким чином, $I[\overline{Q_3}, N_0 \setminus \{2\}]$ – ніде не щільна.

Покажемо, що міра Лебега множини $I[\overline{Q_3}, N_0 \setminus \{2\}]$ рівна нулю.

Нехай $U_0 = (0,1]$, U_{2n} – обєднання циліндрів рангу $2n$, які містять точки множини $I[\overline{Q_3}, N_0 \setminus \{2\}]$, тоді $\overline{U}_{2(n+1)} = U_{2n} \setminus U_{2(n+1)}$. (4)

З властивостей циліндричних множин випливає $U_{2n} \supset U_{2(n+1)} \supset I[\overline{Q_3}, N_0 \setminus \{2\}] \quad \forall n \in N$, тобто

$$I[\overline{Q_3}, N_0 \setminus \{2\}] = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_{2n} = \lim_{n\to\infty} U_{2n}.$$

Тоді згідно з неперервністю міри Лебега зверху маємо:

$$\lambda(I[\overline{Q_3}, N_0 \setminus \{2\}]) = \lim_{n\to\infty} \lambda(U_{2n}).$$

Отже,

$$\lambda(I[\overline{Q_3}, N_0 \setminus \{2\}]) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\lambda(U_{2n})}{\lambda(U_{2(n-1)})}\cdot\frac{\lambda(U_{2(n-1)})}{\lambda(U_{2(n-2)})}\cdot\ldots\cdot\frac{\lambda(U_2)}{\lambda(U_0)}\right] = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{\lambda(U_{2k})}{\lambda(U_{2(k-1)})} =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda(U_{2k})}{\lambda(U_{2(k-1)})}. \qquad (5)$$

З (4) випливає

$$\lambda(I[\overline{Q_3}, N_0 \setminus \{2\}]) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda(\overline{U}_{2(k+1)})}{\lambda(U_{2k})}\right).$$

Останній нескінченний добуток збігається до нуля тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(\overline{U}_{2(k+1)})\lambda(U_{2k}) = \infty.$$

Нехай $\overline{\Delta}^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_{2k}}$ – циліндр з U_{2k}, тоді можливо, що: 1) $c_{2k} = 2$; 2) $c_{2k} \neq 2$.

Якщо $c_{2k} = 2$, то $int\overline{\Delta}^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}2} \bigcap I[\overline{Q_3}, N_0 \setminus \{2\}] = \varnothing$ і якщо $c_{2k} \neq 2$, то $int\overline{\Delta}^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_{2k}2} \bigcap I[\overline{Q_3}, N_0 \setminus \{2\}] = \varnothing$ і

$$0 < \frac{q^2_{\alpha_s}(1-q_{\alpha_s})}{(1-q_{\alpha_s-1})} \le \frac{\lambda(\overline{U}_{2(k+1)})}{\lambda(U_{2k})} \le \frac{q^2_{\alpha_s-1}(1-q_{\alpha_s-1})}{(1-q_{\alpha_s-2})} < 1.$$

Отже, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(\overline{U}_{2(k+1)})\lambda(U_{2k})$ розбігається і $\lambda(I[\overline{Q_3}, N_0 \setminus \{2\}]) = 0$.

Використана література:

1. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – К. : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. – 296.
2. *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. К. : Наукова думка, 1992. –208 .
3. *Лисенко І. М., Працьовитий М. В.* Модифікація класичного двійкового зображення // Єдність навчання і наукових досліджень – головний принцип університету : збірник наукових праць звітно-наукової конференції викладачів університету за 2011 рік, 9-10 лютого 2012 року. Частина 2. / укл. Г. І. Волинка, О. В. Уваркіна, О. П. Симоненко, О. П. Ємельянова.– К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. – 10-13.
4. *Гетьман Б. І.* Метричні властивості множини чисел, визначених умовами на їх розклад в ряд Енгеля // Наук. Час. НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2009. – № 10. – 88-99 .

Аннотация

Изучается модификация Q_3-изображения действительных чисел, которое является обобщением классического троичного изображения, и множества чисел в $\overline{Q_3}$-представлении которых последовательность фиксированных $\overline{Q_3}$-символов или запрет на употребление цифры.

Annotation

We study of modification of Q_3-representation of real numbers, which is a generalization of the classical ternary images, and sets numbers in the $\overline{Q_3}$-representation, which is a fixed sequence of $\overline{Q_3}$-symbols or a ban on the use of numbers.