A n n o t a t i o n

We study the use of ternary scale with two redundant digits to specifying and studying linear fractal sets resulting of prohibition of the use of digits from the alphabet.

УДК517.51

Василенко Н. А.

ПРО РОЗПОДІЛ ЗНАЧЕНЬ НЕПЕРЕРВНОЇ НІДЕ НЕ ДИФЕРЕНЦІЙОВНОЇ ФУНКЦІЇ СЕРПІНСЬКОГО

В 1914 р. В.Серпінським було опубліковано наступний приклад неперервної ніде не диференційовної функції.

Нехай $A_5=\{0,1,2,3,4\}$ – алфавіт п'ятіркової системи числення. Визначимо на A_5 дискретну функцію

$$\gamma(\alpha)=\begin{cases} 0, \text{ якщо} & \alpha=0, \\ 1, \text{ якщо} & \alpha\in A_5\setminus\{0,4\}, \\ 2, \text{ якщо} & \alpha=4. \end{cases} \qquad (1)$$

Для кожної послідовності $(\alpha_k)\in L\equiv A_5^\infty=A_5\times A_5\times\ldots$ визначимо послідовність (c_k) наступним чином

$$c_1=0, \qquad c_k=\begin{cases} c_{k-1}, & \text{якщо} \quad \alpha_{k-1}\in A_5\setminus\{2\}, \\ 1-c_{k-1}, & \text{якщо} \quad \alpha_{k-1}=2. \end{cases} \qquad (2)$$

Розглянемо на [0,1] функцію, аргумент якої подається п'ятірковим дробом:

$$x=\frac{\alpha_1}{5}+\frac{\alpha_2}{5^2}+\ldots+\frac{\alpha_k}{5^k}+\ldots\equiv\Delta^5_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \quad \alpha_k\in A_5, \qquad (5)$$

а значення функції має трійковий розклад:

$$f(x)=\frac{\beta_1}{3}+\frac{\beta_2}{3^2}+\ldots+\frac{\beta_k}{3^k}+\ldots.\equiv\Delta^3_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k\ldots}, \quad \beta_k\in\{0,1,2\}\equiv A_3, \qquad (6)$$

де

$$\beta_k=\begin{cases} \gamma(\alpha_k), & \text{якщо} \quad c_k=0, \\ 2-\gamma(\alpha_k), & \text{якщо} \quad c_k\neq 0. \end{cases} \qquad (7)$$

До формул (7), можна дати інший (еквівалентний) запис перетворювача цифр β_k

$$\beta_k=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad \left[\begin{array}{l} \alpha_k=0 \quad i \quad c_k=0, \\ \alpha_k=4 \quad i \quad c_k=1, \end{array}\right. \\ 1, & \text{якщо} \quad \alpha_k\in\{1,2,3\}, \\ 2, & \text{якщо} \quad \left[\begin{array}{l} \alpha_k=0 \quad i \quad c_k=1, \\ \alpha_k=4 \quad i \quad c_k=0. \end{array}\right. \end{cases} \qquad (8)$$

Зауваження 1 Легко бачити, що β_k, взагалі кажучи, залежить не лише від α_k, але і від $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{k-1})$, але може і не залежити, якщо всі $\alpha_i\in\{1,2,3\}$, $i=\overline{1,k-1}$.

Дослідженню властивостей функції Серпінського присвячено роботи [1],[7], тому нагадаємо лише деякі з них, які далі будуть використані.

Множиною рівня y_0 функції f називається множина $f^{-1}(y_0)=\{x: f(x)=y_0\}$.

Лема 1. [6] Якщо $y_0=\Delta^3_{d_1d_2\ldots d_m(1)}$ ($m\in\mathbb{N}_0$), то для множини рівня y_0 має місце рівність $f^{-1}(y_0)=C[5,V]\equiv\{x:\alpha_i(x)\in V=A_5\setminus\{0,4\}\}$, отже, вона має властивості [6]:

1) є континуальною; 2) ніде не щільною множиною; 3) нульової міри Лебега;4) розмірність Хаусдорфа-Безиковича якої дорівнює $\log_5 3$

Лема 2. [6] Якщо в трійковому зображенні точки $y_0 = \Delta^3_{\beta_1\beta_2...\beta_k...}$

1) всі цифри $\beta_k \in A_3 \setminus \{1\}$ $(k \in N)$, то множина $f^{-1}(y_0)$ містить єдину точку;

2) міститься рівно n цифр "1", то множина $f^{-1}(y_0)$ складається з 3^n точок.

3) міститься нескінченна кількість цифр "1", а саме $\begin{cases} \beta_{i_n}(y_0) = 1,\ n \in \mathrm{N}, \\ \beta_j(y_0) \neq 1 \text{ при } j \notin \{i_n\}, \end{cases}$

то множина $f^{-1}(y_0)$ є континуальною, причому в ній не існує пари точок x_1 і x_2 таких, що

$$\begin{cases} \alpha_{i_n}(x_1) = \alpha'_{i_n}(x_2), \\ \alpha_j(x_1) \neq \alpha'_j(x_2) \text{ при } j \notin \{i_n\}. \end{cases}$$

Розглянемо випадкову величину $X = \Delta^5_{\eta_1\eta_2...\eta_k...}$ з незалежними символами η_k свого п'ятіркового зображення, причому $P\{\eta_k = i\} = p_{ik},\ i \in A_5, k \in \mathrm{N}$. Властивості розподілу випадкової величини X вивчались в роботах [5] та ін., де було доведено, що розподіл X має чистий лебегівський тип, а саме: є чисто дискретним, чисто абсолютно неперервним або чисто сингулярно неперервним. Дослідимо структуру розподілу випадкової величини $Y = f(X)$.

Лема 3. Якщо $p_{2k} = 0$ для всіх $k \in \mathrm{N}$, то трійкові символи τ_k випадкової величини $Y = f(X) = \Delta^3_{\tau_1\tau_2...\tau_k...}$ є незалежними, причому

$$P\{\tau_k = 0\} = p_{0k},\ P\{\tau_k = 2\} = p_{4k},\ P\{\tau_k = 1\} = p_{1k} + p_{3k}.$$

Доведення. Оскільки $p_{2k} = 0$, то носієм розподілу випадкової величини X є множина $C[5, V]$, де $V = \{0,1,3,4\}$. Трійковий символ β_k числа $y = f(x)$, коли $\alpha_k \in V$ залежить лише від п'ятіркового символа α_k числа x, причому

$$\beta_k = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \alpha_k = 0, \\ 1, \text{ якщо } \alpha_k \in \{1,3\}, \\ 2, \text{ якщо } \alpha_k = 4. \end{cases}$$

Оскільки, $P\{\tau_1 = 0\} = P\{\eta_1 = 0\} = p_{01}$,

$$P\{\tau_1 = 1\} = P\{\eta_1 = 1 \vee \eta_1 = 3\} = P\{\eta_1 = 1\} + P\{\eta_1 = 3\} = p_{11} + p_{31},$$

$$P\{\tau_1 = 2\} = P\{\eta_1 = 4\} = p_{41}.$$

Тоді

$$P\{\tau_1 = 0 \wedge \tau_2 = 0\} = P\{\eta_1 = 0 \wedge \eta_2 = 0\} = P\{\eta_1 = 0\} \cdot P\{\eta_2 = 0\} = p_{01}p_{02},$$

$$P\{\tau_1 = 0 \wedge \tau_2 = 2\} = P\{\eta_1 = 0 \wedge \eta_2 = 4\} = P\{\eta_1 = 0\} \cdot P\{\eta_2 = 4\} = p_{01}p_{42},$$

$$P\{\tau_1 = 0 \wedge \tau_2 = 1\} = P\{\eta_1 = 0 \wedge \eta_2 \in \{1,3\}\} = P\{\eta_1 = 0\} \cdot (P\{\eta_2 = 1\} + P\{\eta_2 = 3\}) = p_{01}(p_{12} + p_{32}),$$

$$P\{\tau_1 = 1 \wedge \tau_2 = 0\} = P\{\eta_1 \in \{1,3\} \wedge \eta_2 = 0\} = (P\{\eta_1 = 1\} + P\{\eta_1 = 3\}) \cdot P\{\eta_2 = 0\} = (p_{11} + p_{13})p_{02},$$

$$P\{\tau_1 = 1 \wedge \tau_2 = 2\} = P\{\eta_1 \in \{1,3\} \wedge \eta_2 = 4\} = (P\{\eta_1 = 1\} + P\{\eta_1 = 3\}) \cdot P\{\eta_2 = 4\} = (p_{11} + p_{13})p_{42},$$

$$P\{\tau_1 = 1 \wedge \tau_2 = 1\} = P\{\eta_1 \in \{1,3\} \wedge \eta_2 \in \{1,3\}\} = (P\{\eta_1 = 1\} + P\{\eta_1 = 3\}) \cdot \big(P\{\eta_2 = 1\} + P\{\eta_2 = 3\}\big) = (p_{11} + p_{31}) \cdot (p_{12} + p_{32}),$$

$$P\{\tau_1 = 2 \wedge \tau_2 = 0\} = P\{\eta_1 = 4 \wedge \eta_2 = 0\} = P\{\eta_1 = 4\} \cdot P\{\eta_2 = 0\} = p_{41}p_{02},$$

$$P\{\tau_1 = 2 \wedge \tau_2 = 2\} = P\{\eta_1 = 4 \wedge \eta_2 = 4\} = P\{\eta_1 = 4\} \cdot P\{\eta_2 = 4\} = p_{41}p_{42},$$

$$P\{\tau_1 = 2 \wedge \tau_2 = 1\} = P\{\eta_1 = 4 \wedge \eta_2 \in \{1,3\}\} = P\{\eta_1 = 4\} \cdot (P\{\eta_2 = 1\} + P\{\eta_2 = 3\}) = p_{41} \cdot (p_{12} + p_{32}),$$

$$P\{\tau_2 = 0/\tau_1 = 0\} = \frac{p_{01}p_{02}}{p_{01}} = p_{02},\ P\{\tau_2 = 0/\tau_1 = 1\} = \frac{p_{02}(p_{11}+p_{31})}{p_{11}+p_{31}} = p_{02},$$

$$P\{\tau_2 = 0/\tau_1 = 2\} = \frac{p_{02}p_{21}}{p_{21}} = p_{02},\ P\{\tau_2 = 2/\tau_1 = 0\} = \frac{p_{22}p_{01}}{p_{01}} = p_{22},$$

$$P\{\tau_2 = 2/\tau_1 = 1\} = \frac{p_{22}(p_{11}+p_{31})}{p_{11}+p_{31}} = p_{22},\ P\{\tau_2 = 2/\tau_1 = 2\} = \frac{p_{22}p_{21}}{p_{21}} = p_{22},$$

$$P\{\tau_2 = 1/\tau_1 = 0\} = \frac{(p_{12}+p_{32})p_{01}}{p_{01}} = p_{12}+p_{32},$$

$$P\{\tau_2 = 1/\tau_1 = 1\} = \frac{(p_{12}+p_{32})(p_{11}+p_{31})}{p_{11}+p_{31}} = p_{12}+p_{32},$$

$$P\{\tau_2 = 1/\tau_1 = 2\} = \frac{(p_{12}+p_{32})p_{14}}{p_{14}} = p_{12}+p_{32}.$$

Аналогічно можна показати, що для довільного $k \in \mathrm{N}$, мають місце

$$P\{\tau_k = 0\} = p_{0k},\ P\{\tau_k = 2\} = p_{4k},\ P\{\tau_k = 1\} = p_{1k} + p_{3k}.$$

Наслідок Якщо $p_{2k} = 0 = p_{jk}$, де $j \in \{1,3\}$ для довільного $k \in \mathrm{N}$, то випадкова величина Y є випадковою величиною з незалежними трійковими символами, причому $P\{\tau_k = i\} = P\{\eta_k = j\}$, де $i = \gamma(j)$.

Лема 4. Якщо матриця $\| p_{ik} \|$ така, що $p_{1k} = p_{3k} \to \frac{1}{2}$ $k \to \infty$, то Y має чисто дискретний розподіл і точка $y_0 = \Delta^3_{(1)}$ є атомом розподілу.

Лема 5. Якщо $\prod_{k=1}^{\infty}(p_{1k} + p_{3k}) > 0$, то розподіл Y є чисто дискретним, при цьому X матиме:

1) сингулярний розподіл канторівського типу, якщо $\prod_{k=1}^{\infty}\max\{p_{0k}, p_{1k}, p_{3k}, p_{4k}\} = 0;$

2)дискретний розподіл, коли $\prod_{k=1}^{\infty} p_{ik} > 0$ для деякого $i \in \{1,3\}$.

Доведення. Позначимо $p^*_{0k} = p_{0k}$, $p^*_{1k} = p_{1k} + p_{3k}$, $p^*_{2k} = p_{4k}$. Оскільки за умовою $p_{2k} = 0$, то згідно попередньої леми, розподіл випадкової величини Y є розподілом з незалежними трійковими символами і тому випадкова величина X має чистий розподіл. Якщо ж при цьому $\prod_{k=1}^{\infty}\max\{p^*_{ik}\} > 0$, то як відомо, розподіл випадкової величини X є чисто дискретним. Якщо $\prod_{k=1}^{\infty}\max\{p^*_{0k}, p^*_{1k}, p^*_{2k}\} = 0$, то розподіл X є неперервним. Оскільки за умовою леми $p_{2k} = 0$ для довільного $k \in N$, то розподіл X є сингулярним розподілом канторівського типу.

Використана література:

1. W.Sierpinski Arytmetyczny przyklad funkcji ciaglej, nierozniczkowalnej.//Lwow, Wektor – 1914 r., z. 8. – 337-343.
2. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – К. : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
3. *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения.– К. : Наукова думка, 1992. – 208 с.
4. *Працьовитий М. В.* Структура досконаних множин і сингулярних розподілів ймовірностей в R_n // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2009. – С. 179-189.
5. *Василенко Н. А.* Функція Серпінського. Самоафінні властивості // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2009. – 121-131.

Аннотация

Для известной непрерывной недифференцированной функции Серпинского изучается лебеговская структура (содержание дискретной, абсолютно непрерывной и сингулярной компонент) и тополого-метрические свойства распределения ее значений.

Annotationt

For a well-known continuous non-differentiable Sierpinski function we study Lebesgue structure (content of discrete, absolutely continuous and singular components), topological and metric properties of values of functions.

УДК 377.016:51

Волянська О. Є.

ІННОВАЦІЇ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В ПРОФЕСІЙНО-ТЕХНІЧНІЙ ШКОЛІ

У 2012 році було прийнято 6 законів, які спрямовані на вирішення великої кількості проблем щодо організації професійно-технічної освіти і навчання в Україні. Одним з таких є закон України “Про внесення змін до деяких законів України щодо вдосконалення професійно-технічної освіти № 5498 від 20 січня 2012 року.

За останні 20 років МОН молоді і спорту у професійно-технічних закладах освіти встановлено 35 тисяч одиниць комп’ютерної техніки, з яких 28 тисяч нового покоління. Станом на 1. 09 1912 року на один комп`ютер припадає13 учнів.

Впровадження стратегічних завдань, визначених основними законотворчими документами залежить від розумного впровадження в практику професійно-технічних навчальних закладів досягнень психолого-педагогічної науки і позитивного педагогічного досвіду.

Сьогодні в Києві нараховується 28 державних навчальних закладів професійно-технічної освіти і близько 200 недержавних закладів освіти. Залишилось дуже мало професійно-технічних училищ, в більшості майбутніх робітників готують вищі професійні училища ВПУ.

Які ж проблеми сьогодні у професійно-технічній школі? Це, перш за все, невідповідність змісту освіти з тією роботою, яку треба виконувати на виробництві, матеріальна база професійно-технічних училищ застаріла, необхідно здійснювати більш тісні зв`язки з виробництвом.

Крім того у сучасному виробництві з`явилася велика кількість нових технологій, сучасних матеріалів. Тому майбутній робітник повинен бути дуже інформованим .

Економіка України потребує таких професій, серед них є і нові професії: оператор інформаційно-комунікаційних мереж, монтажник гіпсокартонних конструкцій, зварювальник, слюсар-складальних літаків.

Необхідно змінити психологію випускників шкіл на те, щоб вони після 9-ти класів пішли у професійні заклади, а потім далі, хто цього потребує у вузи.

Міцні знання з різних предметів, в тому числі з математики необхідні учням не тільки для оволодіння робітничою професією ,а для подальшого навчання у вузі вибраного профіля.

На уроках математики доцільно використовувати інновації навчання, які підвищать інтерес до предмету, активізують навчально-пізнавальну діяльність і будуть сприяти кращому засвоєнню знань учнів.

Слово “інновація” англійського походження, що означає новаторство, нововведення. Якщо розглянути термін “інновації” для педагогічного процесу, то це є моделі, які змінюють характер взаємодії учнів і вчителів.

А. В. Хуторський виділяє наступні напрями інновацій на уроці:

– творче самовираження учнів за допомогою евристичних завдань (відкритих завдань, які не мають однозначних “вірних” відповідей;

– перехід від логічної структури до ситуаційної;

– перехід від загальної освіти до індивідуальної;

– зміна принципу репродуктивного засвоєння матеріалу на принцип продуктивності.

Інновація у формах навчання привели до появи нестандартних уроків. Такі уроки передбачають використання інформаційно-комунікаційних технологій, дидактичних ігор, інтерактивне навчання, розв`язування прикладних задач, метод проектів.

Метод проектів дозволяє учневі професійної школи самостійно проектувати власні дії для розв`язування певної проблеми та самостійно чи разом з іншими учнями здійснювати ці дії в процесі виконання проекту. Проекти можуть бути як колективними, так і індивідуальними. Так перед учнями групи можна поставити завдання: розв’язати наступну задачу за допомогою похідної, я також за допомогою програми GRAN -2 D.

Задача 1. З прямокутного листа жерсті розмірами 5х8 дм виготовити коробку без кришки найбільшого об’єму. Якими мають бути її виміри?

Правило-орієнтир для учнів таке ж, як і для дослідження за допомогою похідної: