Очевидно, що $\alpha_0(E)$ прийматиме найбільшого значення при $\tau_0 = \tau_1 = \ldots = \tau_{s-1} = s^{-1}$. Тоді

$$\alpha_0(S) = -\frac{\ln \frac{1}{s}^{\frac{1}{s}} \frac{1}{s}^{\frac{1}{s}} \cdots \frac{1}{s}^{\frac{1}{s}}}{\ln s} = -\frac{\ln \frac{1}{s}^{\frac{1}{s}} + \ln \frac{1}{s}^{\frac{1}{s}} + \cdots + \ln \frac{1}{s}^{\frac{1}{s}}}{\ln s} = -\frac{\ln \frac{1}{s}}{\ln s} = 1.$$

Використана література:

1. *Borel É.* Leons sur la théorie des fonctions. – 2ème édition. – Paris: Gauthier-Villars, 1914. – 259 p.
2. *Eggleston H. G.* The fractional dimension of a set defined by decimal properties // Quart. J. Math. – 1949. – Oxford Ser. 20. – p. 31-36.
3. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
4. *Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Суперфрактальність множини чисел, які не мають частоти n-адичних знаків, та фрактальні розподіли ймовірностей // Укр. мат. журн. – 1995. – 47, № 7. – С. 971-975.
5. *Торбін Г. М.* Частотні характеристики нормальних чисел в різних системх числення // Фрактальний аналіз та суміжні питання. – К. : ІМ НАН України – НПУ ім. М. П. Драгоманова. – 1998, № 1. – С. 53-55.
6. *Турбин А. Ф., Працевитий Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – К. : Наук. думка, 1992. – 208 с.

Аннотация

Изучаются тополого-метрические и фрактальные свойства множества вещественных чисел отрезка $[0;1]$ *в терминах асимптотического среднего значения цифр. В частности, нормальные свойства s-адического изображения вещественного числа.*

Annotation

We study topological, metric and fractal properties of a set of real numbers from $[0;1]$ *in terms of asymptotic mean of digits. Namely, normal properties of s-adic representation of real number.*

УДК 517.5

Працьовитий М. В., Жабровець О. В., Свинчук О. В.

ІНОТЕГРУВАННЯ НЕПРЕРЕВНИХ ФУНКЦІЙ, ГРАФІКИ ЯКИХ Є СВМОАФІННИМИ АБО КВАЗІСАМОАФІННИМИ

Вступ. Історія розвитку теорії неперервних функцій однієї змінної, що не мають похідної в жодній точці області визначення, цікава і драматична. Прийнято вважати [1], що перший приклад такої функції побудував Больцано в 1830 р., але він був опублікований лише через 100 років, тобто в 1930 р. А першим опублікованим прикладом такої функції був приклад Вейєрштрасса (1872 р.). Після чого розпочалося "змагання" за "найпростіший" за аналітичним заданням приклад. Одним з таких був приклад Такагі (1903 р.), пізніше пропонували свої приклади Серпінський [2], Ван дер Варден [3] та ін. Практично всі вони ґрунтувались на принципі згущення особливостей та ідеї "самоподібності" – "автомодельності" конструкції. Новим етапом розвитку теорії стало узагальнення запропонованих раніше конструкцій, що привели до цілих класів скінченно та нескінченно параметричних сімей функцій. Одну з сімей достатньо простих функцій запропоновано в роботі [4].

Сьогодні загальна теорія таких функцій в зародковому стані і містить невелику кількість фундаментальних фактів, але інтерес і бажання її розвивати явно прослідковуються.

Ширший за С [0; 1] клас неперервних функцій утворюють неперервні ніде не монотонні функції (це функції, які не мають жодного як завгодно малого проміжку монотонності). Зрозуміло, що недиференційовна функція є ніде немонотонною (це слідує безпосередньо з теореми Лебега про диференційовність монотонних функцій: неперервна монотонна функція майже скрізь має скінченну похідну), але не кожна ніде не монотонна функція є недиференційовною . Недавно [5] була акцентована увага на ніде не монотонні сингулярні функції, похідна яких майже скрізь (у розумінні міри Лебега) дорівнює нулю. Цілі класи таких функцій можна отримати за допомогою застосування різних систем кодування дійсних чисел (зі скінченним та нескінченним алфавітами, з нульовою та ненульовою надлишковістю.

Одним із найпростіших класів неперервних недиференційовних функцій складають функції, графіки яких є самоафінними множинами. Саме їм присвячена дана робота.

Нагадаємо, що множина E евклідового простору R2 називається самоафінною, якщо існує скінченний набір афінних перетворень $f_1, f_2, ..., f_n,\ n > 1$, таких, що

$$E = f_1(E) \cup f_2(E) \cup ... \cup f_n(E).$$

Відомо, що довільне афінне перетворення f_i в ПДСК задається формулами вигляду

$$\begin{cases} x' = a_{11}^{(i)}x + a_{12}^{(i)}y + a_{10}^{(i)}, \\ y' = a_{21}^{(i)}x + a_{22}^{(i)}y + a_{20}^{(i)}; \end{cases}$$ де $$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}^{(i)} & a_{12}^{(i)} \\ a_{21}^{(i)} & a_{22}^{(i)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Число α_a, що є розв'язком рівняння

$$\left|\Delta_1\right|^{\frac{x}{2}} + \left|\Delta_2\right|^{\frac{x}{2}} + \ldots + \left|\Delta_n\right|^{\frac{x}{2}} = 1,$$

називається самоафінною розмірністю множини Е.

Самоафінна розмірність самоафінної множини, взагалі кажучи, характеризує “масивність” множини і є узагальненням самоподібної розмірності.

Основний об'єкт дослідження. Нехай $1 < s$ – фіксоване натуральне число, $(q_0, q_1, \ldots, q_{s-1})$ – набір додатних дійсних чисел таких, що $q_0 + q_1 + \ldots + q_{s-1} = 1$,

$\varphi(x)$ – розв'язок системи s функціональних рівнянь

$$f\left(\frac{i+x}{s}\right) = \beta_i + q_i f(x)$$, де $\beta_0 = 0$, $\beta_i = r_0 + r_1 + \ldots + r_{i-1}$,

тобто функція

$$y = \varphi(x) = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\beta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)}\right) = \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},$$

де $\alpha_k(x)$ – k-та s-кова цифра числа x∈[0;1]. Останній символічний запис числа у називається Q-зображенням , $\alpha_k(y)$ - k-тим Q-символом числа $y = \varphi(x)$ [7].

Нехай $(r_0, r_1, \ldots, r_{s-1})$ – задано новий набір дійсних чисел таких, що

$$|r_i| < 1 \text{ і } r_0 + r_1 + \ldots + r_{s-1} = 1.$$

Розглядається нова система s функціональних рівнянь

$$f(\varphi(x)) = \gamma_i + r_i f(x), \quad i = \overline{0, s-1}, \quad (1)$$

де $\gamma_0 = 0$, $\gamma_i = r_0 + r_1 + \ldots + r_{i-1}$, $i = \overline{1, s-1}$.

Т е о р е м а 1. Система (1) у класі C[0;1] неперервних на [0;1] функцій має єдиний розв'язок

$$f(x) = \gamma_{\alpha_1(\varphi(x))} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\gamma_{\alpha_k(\varphi(x))} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(\varphi(x))}\right),$$

причому графік Γ_f функції $f(x)$ є:

самоафінною множиною, якщо $r_0 r_1 \ldots r_{s-1} \neq 0$

і квазісамоафінною в протилежному випадку.

Д о в е д е н н я. Якщо існує неперервна на [0;1] функція, що є розв'язком системи (1) , то вона визначена у кожній точці [0;1] функція, і обмежена , а отже

$$f(x) = \gamma_{\alpha_1} + \gamma_{\alpha_2} r_{\alpha_1} + \gamma_{\alpha_3} r_{\alpha_1} r_{\alpha_2} + \ldots + \gamma_{\alpha_k} r_{\alpha_1} \ldots r_{\alpha_{k-1}} + \left(\prod_{j=1}^{k} r_{\alpha_j}\right)\left(\gamma_{\alpha_{k+1}} + r_{\alpha_{k+1}} f(x)\right).$$

Враховуючи, що

$$\prod_{j=1}^{k} r_{\alpha_j} \to 0$$ при $k \to \infty$, $\gamma_{\alpha_{k+1}} + r_{\alpha_{k+1}} f(x) < C = const$,

маємо

$$f(x)=\gamma_{\alpha_1}+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\gamma_{\alpha_1}\prod_{j=1}^{k-1}r_{\alpha_j}\right).$$

Т е о р е м а 2. Для інтеграла Лебега має місце рівність

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{\overline{q}\cdot\overline{\gamma}}{1-\overline{q}\cdot\overline{r}}$$, де $\overline{q}\cdot\overline{r}=\sum_{i=1}^{s-1}q_i r_i$, $\overline{q}\cdot\overline{\gamma}=\sum_{i=1}^{s-1}q_i\gamma_i$. (2)

Д о в е д е н н я. Використовуючи адитивну властивість інтеграла Лебега, маємо

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^{q_0} f(x)dx+\int_{q_0}^{q_0+q_1} f(x)dx+\ldots+\int_{\beta_{s-1}}^{1} f(x)dx=$$

$$=\sum_{i=0}^{s-1}\int_0^1\left(\gamma_i+r_i f\left(x\right)\right)d\left(q_i x+\beta_i\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{s-1}\left(q_i\int_0^1 r_i f(x)dx\right)+\left(q_0\gamma_0+q_1\gamma_1+\ldots+q_{s-1}\gamma_{s-1}\right)x\Big|_0^1=$$

$$=\left(q_0 r_0+q_1 r_1+\ldots+q_{s-1}r_{s-1}\right)\int_0^1 f(x)dx+\left(q_0\gamma_0+q_1\gamma_1+\ldots+q_{s-1}\gamma_{s-1}\right).$$

Звідси

$$(1-\overline{q}\cdot\overline{r})\int_0^1 f(x)dx=\overline{q}\cdot\overline{\gamma}$$ і $$\int_0^1 f(x)dx=\frac{\overline{q}\cdot\overline{\gamma}}{1-\overline{q}\cdot\overline{r}}.$$

Теорему доведено.

Зауваження. Вираз (2) не залежить від $\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_{s-1}$.

Т е о р е м а 3. Якщо $\psi\in C_{[0,1]}$ – довільна неперервна на відрізку [0;1] функція, графік якої Γ_ψ є самоафінною множиною, причому

$$\Gamma_\psi=\bigcup_{i=0}^{m}\varphi_i\left(\Gamma_\psi\right),$$

де $\varphi_i:\begin{cases}x'=q_i x+\beta_i,\\ y'=r_i y+\gamma_i,\end{cases}$, $\beta_i=q_0+\ldots+q_{i-1}$, $\gamma_i=r_0+\ldots+r_{i-1}$,

то

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{\overline{q}\cdot\overline{\gamma}}{1-\overline{q}\cdot\overline{r}}$$, де $\overline{q}\cdot\overline{r}=\sum_{i=1}^{s-1}q_i r_i$, $\overline{q}\cdot\overline{\gamma}=\sum_{i=1}^{s-1}q_i\gamma_i$.

В и к о р и с т а н а л і т е р а т у р а:

1. *Медведев Ф. А.* Очерки истории теории функций действительного переменного. – М. : Наука, 1975.–248 с.
2. *Sierpiński W.* Arytmetychny przykład funkcji ciagłej, nieróżniczkowalnej// Wektor.–1914.–nr 8.–Str. 337-343.
3. *Waerden B. L.* Van der. Ein einfaches Beispiel einer nicht differentierbaren stetigen Function // Math.Z. – 1930. – 32. – P. 474-475.
4. *Турбин А. Ф., Працевитый М. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – К. : Наукова думка, 1992. – 208 с.
5. *Працьовитий М. В.* Звивисті сингулярні функції // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2011. – 12. – С. 143-158.
6. *Працьовитий М. В, Калашніков А. В.* Самоафінні сингулярні та ніде не монотонні функції, пов'язані з Q-зображеннями чисел // Укр. мат. журнал. – 2013, т.65, № 3. – С. 381-393.
7. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – К. : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. – 296 с.

А н н о т а ц и я

Предлагаются результаты исследования интегральных свойств функций со сложным локальным строением, графики которых являются самоаффинными или квазисамоаффинными множества. Каждая из таких функций задается системой функциональных уравнений, зависимых от конечного числа параметров.

A n n o t a t i o n

We study integral properties of functions with complicated local structure such that their graphs are self-affine and quasi-self-affine sets. Every such function is defined by system of functional equations depending on finite number of parameters.

УДК 511.72

Працьовитий М. В., Сухоліт Ю. Ю.

ПРО ОДНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ТРІЙКОВОЇ СИСТЕМИ З ДВОМА НАДЛИШКОВИМИ ЦИФРАМИ

Вступ. Сьогодні для моделювання та дослідження об'єктів неперервної математики зі складною локальною будовою (множин, функцій, перетворень, мір, динамічних систем тощо) широко використовуються системи зображення (кодування дійсних чисел) зі скінченним, нетрадиційним та надлишковим алфавітом. В результаті отримані системи зображення мають суттєво не нульову надлишковість (числа мають нескінченну кількість зображень), це є зручним для задання об'єктів із фрактальною будовою, динамічних систем з хаотичною поведінкою, сингулярних розподілів з фрактальними носіями тощо. Однією з таких систем є трійково- п'ятіркова, яка використовує алфавіт з двома надлишковими цифрами, її геометрії і найпростішим застосуванням присвячена дана робота. Дослідження таких систем велося і раніше, але детально вивчити геометрію зображень чисел вдалось лише для окремих комбінацій основи та надлишкового набору цифр. Трійково-пятіркова система завдяки своїй відносно нескладній геометрії є багато обіцяючою в плані застосувань в різних галузях математики.

Геометрія трійково-п'ятіркового зображення чисел. Нехай A={0, 1, 2, 3, 4} – множина цифр (алфавіт) традиційної п'ятіркової системи числення.

Л е м а 1. Для будь-кого числа x$\in$[0;2] існує послідовність (β_k), $\beta_k \in A,$ така, що

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k}\beta_k \equiv \qquad (1)$$

$$\equiv \Delta_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k\ldots}. \qquad (2)$$

Вираз (1) числа x називають трійково-п'ятірковим представленням, а символічний запис (2) – *трійково-п'ятірковим зображенням* x ($5_3 -$ зображення).

Легко навести приклад числа, яке має різні трійково-п'ятіркові зображення. Наприклад, $\frac{1}{2} = \Delta_{111\ldots} = \Delta_{04111\ldots} = \Delta_{03411\ldots}$. Дані рівності мають місце завдяки тому, що

$$\frac{1}{3^k} + \frac{1}{3^{k+1}} = \frac{0}{3^k} + \frac{4}{3^{k+1}} \text{ і } \frac{4}{3^k} + \frac{1}{3^{k+1}} = \frac{3}{3^k} + \frac{4}{3^{k+1}}.$$

Л е м а 2. *Не змінює числа взаємозаміна пар двох послідовних цифр*: $\overline{10}$ на $\overline{03}$, $\overline{11}$ на $\overline{04}$, $\overline{20}$ на $\overline{13}$, $\overline{21}$ на $\overline{14}$, $\overline{30}$ на $\overline{23}$, $\overline{31}$ на $\overline{24}$, $\overline{33}$ на $\overline{40}$, $\overline{34}$ на $\overline{41}$, у 5_3 *– зображенні.*

Дане твердження є очевидним в силу рівності $\frac{a}{3^m} + \frac{b}{3^{m+1}} = \frac{3a+b}{3^{m+1}}.$

Питання кількості зображень $5_3 -$ зображень числа $x \in [0,2]$ детально вивчено в роботі [6].

Означення 1. Множина $\Delta_{c_1c_2\ldots c_m} = \{x: x = \Delta_{c_1c_2\ldots c_m\beta_{m+1}\beta_{m+2}\ldots},\ (\beta_{m+n})_{n=1}^{\infty} \in L\}$ називається $5_3 -$ циліндром рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$ ($L - A \times A \times A \times \ldots$).

Наступне твердження розкриває геометричний зміст "трійково-п'ятіркових цифр" числа.

Л е м а 3. Циліндри мають наступні властивості.

1. $$\Delta_{c_1\ldots c_k}\bigcup_{i=1}^{4}\Delta_{c_1\ldots c_k i}, \forall(c_m), c_m \in L.$$

2. Кожна циліндрична множина є відрізком, причому