УДК 511.72+517

Працьовитий М. В., Климчук С. О.

НОРМАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ S-КОВОГО ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНОГО ЧИСЛА В ТЕРМІНАХ АСИМПТОТИЧНОГО СЕРЕДНЬОГО ЗНАЧЕННЯ ЦИФР

1. Вступ

Добре відомо, що для довільного дійсного числа $x \in [0;1]$ існує послідовність (α_n) така, що $\alpha_n \in A = \{0,1,\dots,s-1\}$ і

$$x = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s^n} + \dots \equiv \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}.$$

Останній запис називається s-ковим зображенням, а $\alpha_k = \alpha_k(x)$ – k-тою s-ковою цифрою числа x. Взагалі кажучи, k-та цифра числа як його функція, є некоректно визначеною, оскільки має місце рівність

$$\Delta^s_{c_1c_2\dots c_{k-1}c_k(0)} = \Delta^s_{c_1c_2\dots c_{k-1}[c_k-1](s-1)},$$

де (i) – період у зображенні числа. Числа такого виду називаються s-ково-раціональними, вони мають рівно два s-кових зображення. Решта чисел мають лише одне зображення і називаються s-ково-ірраціональними. Для коректності означення k-тої цифри досить домовитись використовувати лише перше s-кове зображення, а саме: те, що має період (0). Тепер $\alpha_n(x)$ є функцією, коректно визначеною на $[0;1]$.

Нехай $N_i(x,k)$ – кількість цифр $i \in A$ у s-ковому зображенні $\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k\dots}$ числа $x \in [0;1]$ до k-го місця включно, тобто

$$N_i(x,k) = \#\{j : \alpha_j(x) = i,\ j \le k\}$$

Означення 1. Частотою (асимптотичною частотою) цифри i у s-ковому зображенні числа $x \in [0;1]$ називається границя

$$\nu_i(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{N_i(x,k)}{k},$$

якщо вона існує.

Зрозуміло, що функція частоти $\nu_i(x)$ цифри i у s-ковому зображенні числа $x \in [0;1]$ є коректно визначеною для s-ково-ірраціональних чисел, а для s-ково-раціональних – після домовленості, яку зроблено вище, використовувати лише зображення з періодом (0).

Добре відомим є той факт (теорема Бореля), що для майже всіх (у розумінні міри Лебега) чисел $[0;1]$ має місце рівність

$$\nu_0(x) = \nu_1(x) = \dots = \nu_{s-1}(x) = \frac{1}{s}.$$

Такі числа називаються слабо нормальними або нормальними за основою s.

Означення 2. Асимптотичним середнім значенням цифр (або просто середнім значенням цифр) числа $x \in [0;1]$ будемо називати число

$$r(x) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x),$$

де $A \ni \alpha_i(x)$ – i-та цифра s-кового зображення числа x (якщо остання границя існує).

З початку XX століття ведуться дослідження властивостей множин дійсних чисел, визначених в термінах частоти символів (цифр) в зображенні у тій чи іншій системі числення. Варто відзначити оригінальні результати Е. Бореля та А. Лебега стосовно нормальних та слабо нормальних чисел, а також дослідження А. С. Безиковича, Г. Егглстона, П. Біллінгслі, О. Я. Хінчина, М. М. Постнікова, І.Й. П'ятецького, М. В. Працьовитого, Л. Олсена, Г. М. Торбіна та інших стосовно властивостей множин, визначених в термінах частот символів або комбінацій символів у тому чи іншому зображенні.

Ми цікавимося властивостями множин дійсних чисел, визначених в термінах асимптотичного середнього значення цифр в s-ковому зображенні. Зокрема, їх нормальними тополого-метричними та фрактальними властивостями. Тобто властивостями, які виконуються на множині повної міри Лебега.

2. Нормальні властивості множини дійсних чисел з наперед заданим асимптотичним середнім значенням цифр

Розглянемо множину чисел з відрізка $[0;1]$ з наперед заданим асимптотичним середнім значенням цифр, тобто множину

$$S_\theta = \left\{ x : r(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) = \theta \right\},$$

де константа θ – наперед заданий параметр з відрізка $[0; s-1]$.

Теорема 1. Властивість числа: $r(x) = \frac{s-1}{2}$ є нормальною, тобто множина дійсних чисел відрізка $[0;1]$, які нею не володіють, є множиною нульової міри Лебега.

Доведення. Відома теорема Бореля [1] стверджує, що для майже всіх (у розумінні міри Лебега) чисел відрізка $[0;1]$ у їх s-ковому зображенні існують частоти всіх цифр і рівні s^{-1}, тобто множина Безиковича-Егглстона $E[s^{-1}, s^{-1}, \ldots, s^{-1}]$ є множиною повної міри Лебега. Оскільки

$$\theta = \frac{1}{s} + \frac{2}{s} + \frac{3}{s} + \cdots + \frac{s-1}{s} = \frac{s-1}{2},$$

то $E[s^{-1}, s^{-1}, \ldots, s^{-1}] \subset S_\theta$. Тому $\lambda(S_\theta) = 1$. □

Розглянемо множину чисел з відрізка $[0;1]$, асимптотичне середнє значення цифр яких рівне числу $\frac{s-1}{2}$, тобто

$$S = \left\{ x : r(x) = \frac{s-1}{2} \right\}$$

Теорема 2. Множина S є множиною повної міри Лебега. Розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини S дорівнює 1

Доведення. М і р а Л е б е г а. Оскільки множина S містить множину нормальних за основою s чисел H, тобто чисел, частоти цифр яких рівні, тобто

$$\nu_0(x) = \nu_1(x) = \ldots = \nu_{s-1}(x) = \frac{1}{s},$$

то

$$\nu_1(x) + 2\nu_2(x) + \ldots + (s-1)\nu_{s-1}(x) = \frac{s-1}{2}.$$

Оскільки $\lambda(H) = 1$, то $\lambda(S) = 1$.

Р о з м і р н і с т ь Х а у с д о р ф а–Б е з и к о в и ч а володіє властивістю монотонності

$$E_1 \subset E_2 \Rightarrow \alpha_0(E_1) \le \alpha_0(E_2)$$

та властивістю зліченної стабільності

$$\alpha_0\left(\bigcup_n E_n\right) = \sup_n \alpha_0(E_n)$$

Розглянемо всеможливі підмножини Безиковича-Егглстона множини S, а саме: множини виду

$$E \equiv E[\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{s-1}] = \{x : \nu_i(x) = \tau_i,\ i = 0,1,\ldots,s-1\}.$$

Фрактальна розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини E обчислюється за формулою

$$\alpha_0(E) = -\frac{\ln \tau_0^{\tau_0} \tau_1^{\tau_1} \ldots \tau_{s-1}^{\tau_{s-1}}}{\ln s}.$$

Очевидно, що $\alpha_0(E)$ прийматиме найбільшого значення при $\tau_0 = \tau_1 = \ldots = \tau_{s-1} = s^{-1}$. Тоді

$$\alpha_0(S) = -\frac{\ln \frac{1}{s}^{\frac{1}{s}} \frac{1}{s}^{\frac{1}{s}} \cdots \frac{1}{s}^{\frac{1}{s}}}{\ln s} = -\frac{\ln \frac{1}{s}^{\frac{1}{s}} + \ln \frac{1}{s}^{\frac{1}{s}} + \cdots + \ln \frac{1}{s}^{\frac{1}{s}}}{\ln s} = -\frac{\ln \frac{1}{s}}{\ln s} = 1.$$

Використана література:

1. *Borel É.* Leons sur la théorie des fonctions. – 2ème édition. – Paris: Gauthier-Villars, 1914. – 259 p.
2. *Eggleston H. G.* The fractional dimension of a set defined by decimal properties // Quart. J. Math. – 1949. – Oxford Ser. 20. – p. 31-36.
3. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
4. *Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Суперфрактальність множини чисел, які не мають частоти n-адичних знаків, та фрактальні розподіли ймовірностей // Укр. мат. журн. – 1995. – 47, № 7. – С. 971-975.
5. *Торбін Г. М.* Частотні характеристики нормальних чисел в різних системх числення // Фрактальний аналіз та суміжні питання. – К. : IM НАН України – НПУ ім. М. П. Драгоманова. – 1998, № 1. – С. 53-55.
6. *Турбин А. Ф., Працевитий Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – К. : Наук. думка, 1992. – 208 с.

Аннотация

Изучаются тополого-метрические и фрактальные свойства множества вещественных чисел отрезка $[0;1]$ в терминах асимптотического среднего значения цифр. В частности, нормальные свойства s-адического изображения вещественного числа.

Annotation

We study topological, metric and fractal properties of a set of real numbers from $[0;1]$ in terms of asymptotic mean of digits. Namely, normal properties of s-adic representation of real number.

УДК 517.5

Працьовитий М. В., Жабровець О. В., Свинчук О. В.

ІНОТЕГРУВАННЯ НЕПРЕРЕВНИХ ФУНКЦІЙ, ГРАФІКИ ЯКИХ Є СВМОАФІННИМИ АБО КВАЗІСАМОАФІННИМИ

Вступ. Історія розвитку теорії неперервних функцій однієї змінної, що не мають похідної в жодній точці області визначення, цікава і драматична. Прийнято вважати [1], що перший приклад такої функції побудував Больцано в 1830 р., але він був опублікований лише через 100 років, тобто в 1930 р. А першим опублікованим прикладом такої функції був приклад Вейєрштрасса (1872 р.). Після чого розпочалося “змагання” за “найпростіший” за аналітичним заданням приклад. Одним з таких був приклад Такагі (1903 р.), пізніше пропонували свої приклади Серпінський [2], Ван дер Варден [3] та ін. Практично всі вони ґрунтувались на принципі згущення особливостей та ідеї “самоподібності” – “автомодельності” конструкції. Новим етапом розвитку теорії стало узагальнення запропонованих раніше конструкцій, що привели до цілих класів скінченно та нескінченно параметричних сімей функцій. Одну з сімей достатньо простих функцій запропоновано в роботі [4].

Сьогодні загальна теорія таких функцій в зародковому стані і містить невелику кількість фундаментальних фактів, але інтерес і бажання її розвивати явно прослідковуються.

Ширший за С [0; 1] клас неперервних функцій утворюють неперервні ніде не монотонні функції (це функції, які не мають жодного як завгодно малого проміжку монотонності). Зрозуміло, що недиференційовна функція є ніде немонотонною (це слідує безпосередньо з теореми Лебега про диференційовність монотонних функцій: неперервна монотонна функція майже скрізь має скінченну похідну), але не кожна ніде не монотонна функція є недиференційовною . Недавно [5] була акцентована увага на ніде не монотонні сингулярні функції, похідна яких майже скрізь (у розумінні міри Лебега) дорівнює нулю. Цілі класи таких функцій можна отримати за допомогою застосування різних систем кодування дійсних чисел (зі скінченним та нескінченним алфавітами, з нульовою та ненульовою надлишковістю.

Одним із найпростіших класів неперервних недиференційовних функцій складають функції, графіки яких є самоафінними множинами. Саме їм присвячена дана робота.

Нагадаємо, що множина E евклідового простору R2 називається самоафінною, якщо існує скінченний набір афінних перетворень $f_1, f_2, ..., f_n,\ n > 1$, таких, що

$$E = f_1(E) \cup f_2(E) \cup ... \cup f_n(E).$$