Interdisciplinary Studies of Complex Systems
No. 24 (2024) 17–31

https://doi.org/10.31392/iscs.2024.24.017 UDC 37.09+378:004.9

Methodological aspects of the development of mathematical competence as a tool for decision-making under uncertainty

Valentyn Sobchuk[1,2], *Oleh Perehuda*[1,3], *Iryna Zamrii*[4], *Andrii Pankov*[5]

Методологічні аспекти розвитку математичної компетентності як інструменту прийняття рішень в умовах невизначеності

Валентин Собчук, Олег Перегуда, Ірина Замрій, Андрій Паньков

Abstract. The purpose of the work is to characterize the methodological foundations of the formation and development of mathematical and information-digital competences of students of general secondary education institutions as a tool for forming their abstract thinking for decision-making in conditions of uncertainty. It is based on the concept of the development of abstract thinking as a process of mental activity of an individual as a higher form of thinking, which allows to operate with concepts, symbols, abstract ideas and representations, aimed at solving complex problems and making decisions in the conditions of underdefined or overdefined systems.
The effectiveness of the proposed pedagogical technology is ensured by a child-centered orientation to the system of educational tasks that determine the formation of a system of abstract concepts, understanding their essence, and the development of applied skills in operating these categories in applied aspects. The main advantage of this pedagogical technology is ensuring that students learn the basic methods of solving educational problems, the application of mathematical competence for the development of information and digital competences in the conditions of digitization of education. Such a combination is a key factor in increasing the effectiveness of their educational activities in modern conditions of youth potential development.
The proposed concept is an effective tool for the formation of students' mathematical and information-digital competences in the process of studying mathematics in the context of combined learning in indoor secondary education institutions, including in distance mode using synchronous and asynchronous communication tools.

Keywords: competencies, mathematical competence, information and digital competence, system of educational tasks, abstract thinking

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine
[2] v.v.sobchuk@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-4002-8206
[3] perehudao@knu.ua, https://orcid.org/0000-0002-7465-3173
[4] State University of Information and Communication Technologies, Kyiv, Ukraine. irinafraktal@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-5681-1871
[5] State Scientific Institution "Institute of Education Content Modernization", Kyiv, Ukraine. andriy.pankov@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-3787-4102

Анотація. Метою роботи є аналіз та характеристика методологічних засад формування та розвитку математичної та інформаційно-цифрової компетентностей учнів закладів загальної середньої освіти як інструменту формування їх абстрактного мислення для прийняття рішень в умовах неповної, надлишкової та точної інформації. В основі концепції розвитку абстрактного мислення як процесу мислиннєвої діяльності особистості як вищої форми мислення, яка дозволяє оперувати поняттями, символами, абстрактними ідеями та уявленнями, напрямленої на вирішення складних проблем та прийняття рішень в умовах недоозначених чи переозначених систем.
Ефективність запропонованих методологічних аспектів забезпечується дитиноцентричною орієнтацією на систему учбових задач, що обумовлюють формування системи абстрактних понять, розуміння їх суті та напрямленої на розвиток прикладних навичок, оперування цими категоріями в прикладних аспектах. Їх перевага полягає у забезпеченні засвоєння учнями основних методів розв'язування учбових задач, застосування математичної компетентності для розвитку інформаційно-цифрових компетентностей в умовах цифровізації навчання. Таке поєднання є ключовим чинником підвищення ефективності їх навчальної діяльності в сучасних умовах розвитку потенціалу молоді.
Запропонована концепція є дієвим інструментом формування математичної та інформаційно-цифрової компетентностей учнів у процесі вивчення ними математики в контексті комбінованого навчання у закладах загальної середньої освіти в тому числі у дистанційному режимі з використанням засобів синхронної та асинхронної комунікації.

Ключові слова: компетенції, математична компетентність,інформаційно-цифрова компетентність, система учбових задач, абстрактне мислення

Вступ

Постановка проблеми. Математичне моделювання є визначальним інструментом розв'язання технічних, економічних, соціальних, інженерних та інших наукових проблем, що ґрунтуються на використанні математичних моделей. Сучасні результати отримані в усіх сферах нашого технологічного світу були б неможливими без розробки та застосування ефективних підходів до математичного моделювання. Нині неможливо ефективно керувати складними процесами, приймати рішення в надскладних умовах повної чи часткової невизначеності без використання адекватних математичних моделей.

Вирішення переважної більшості наукових та інженерно-технічних задач (проектування і оптимізація систем, вивчення механізмів явищ, прогнозування розвитку процесів в часі, оптимальне управління об'єктами критичної інфраструктури тощо) ґрунтується на математичному моделюванні [1]. Вільне володіння теоретичною базою та інструментарієм математичного моделювання — невід'ємна складова фахових компетентностей сучасного дослідника, управлінця, керівника і т.і.

Практичні навички математичного моделювання є важливою складовою загальнолюдської культури й займають одну з чільних позицій серед загальних результатів освоєння учнівською та студентською молоддю основних освітніх програм [2]. Значущість таких навичок обумовлена стрімким розвитком числових методів, які ґрунтуються на математичному моделюванні як одному з ключових методологічних підходів до дослідження прикладних процесів.

Відтак, постає необхідність модернізації математичної освіти, метою якої, за таких обставин, є не лише отримання учнями певної сукупності математичних знань, але, насамперед, розвиток логічного та абстрактного мислення, освоєння математичного апарату, необхідного для вирішення прикладних і практичних задач в умовах невизначеності, формування умінь транслювати прикладні проблеми мовою математичних формалізмів.

Методологічна спроможність вирішувати такі завдання є основою компетентнісного потенціалу для зростання самомотивації та взаємомотивації молоді. Народження такої мотивації є наслідком усвідомлення дослідниками-початківцями спроможностей математичної науки в описі, дослідженні, прогнозуванні характеру процесів, явищ тощо. Дана концепція неодноразово описувалась багатьма провідними науковцями. Зокрема, видатний український педагог і математик Н. Я. Віленкін рекомендував, щоб перед постановкою проблемного завдання учням пропонувалися певні прикладні задачі, які допомагають засвоїти необхідні поняття та алгоритми, що допомагає учням розуміти зміст задачі для ефективного її розв'язування. Саме прикладні задачі дають учням можливість самостійно шукати шляхи розв'язування цих задач, тренують їх ініціативу та креативність. Учні вчаться застосовувати знання в реальних життєвих ситуаціях, що, з рештою, робить процес навчання більш ефективним, сприяє розвитку логічного мислення та самостійності учнів, а також готує їх до практичного застосування знань у майбутній професійній діяльності.

Іншими словами, кожна практична або прикладна задача, яку розв'язують з використанням математичного інструментарію, насамперед супроводжується трансляцією її умов на мову математичних формалізмів з подальшим використанням понять, фактів і математичних методів. Відтак, процес розв'язання таких задач є нічим іншим, як процесом математичного моделювання. Більше того, отримавши розв'язок задачі дослідники повинні повернутись до постановки початкової задачі і прийняти рішення, що ж в реальних обставинах робити з отриманим результатом. Таким способом вивчення змістових ліній методології математики, сюжетних задач і математичного моделювання є запорукою формування математичної компетентності та навичок прийняття рішень в умовах невизначеності.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Математичне моделювання як об'єкт дослідження в галузі математичної освіти описано в роботі [3]. В даній роботі розкрито взаємозв'язок між застосуванням математики та процесом навчання починаючи з початкової школи. У роботі [4] описано теоретичні та практичні аспекти методології математики, запропоновано методи і прийоми формування методологічної культури учнівської молоді.

У статті [5] розглянуто проблему формування в учнів умінь математичного моделювання у процесі розв'язування фізичних задач. Наводяться принципи побудови циклів задач для формування в старшокласників умінь математичного моделювання.

Дослідниками у [6] продемонстровано ефективність використання системи динамічної математики GeoGebra в процесі розв'язування математичних задач з метою активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів, наведено приклади комп'ютерних моделей. Особливу увагу приділено можливостям формування дослідницьких компетентностей учнів в процесі розв'язування евристичних та прикладних задач. Акцентується увага на ефективності STEM-освіти в процесі навчання учнів шкільному курсу математики.

У статті [7] досліджено дискусійні тенденції впровадження компетентнісного підходу в шкільну освіту. Проаналізовано пошуки теоретичних засад цієї проблеми як об'єктивної спрямованості навчання, оцінено навчальні досягнення учнів з точки зору сформованості їх ключових і предметних компетентностей. У [8] розглянуті дидактичні та методичні засади реалізації компетентнісного підходу в навчанні математики в основній школі, представлені система навчальних завдань, методів, прийомів, спрямованих на розвиток в учнів ключових і математичної компетентностей, методика постановки мети і завдань уроку, а також методика розроблення уроків математики з урахуванням розвитку компетентностей, діагностики, прогнозування та оцінювання рівня їхньої сформованості.

В роботі [9] досліджується проблематика формування практико- і професійно-орієнтованих умінь засобами загальноосвітніх предметних областей в умовах постійної модернізації освітніх стандартів вищої професійної освіти і реалізації концепції розвитку математичної освіти. Вивчається задача зближення в навчальному процесі теоретичної і прикладної математики, яка, власне, вирішується засобами ефективного використання ідей і методів математичного моделювання. Видаляється наскрізна змістовно-методична лінія математичних моделей, в реалізації якої закладається найбільший потенціал для зростання мотивації студентів до математичної діяльності.

Авторами [10] встановлено, що складні кореляції чотирьох структурних компонентів математичних здібностей (системоутворюючого, кодувально-формалізованого, когнітивно-узагальнюючого, мнемоузагальнюючого) можуть існувати з трьома вимірами зовнішнього прояву математичної компетентності (семантико-теоретичним, процесуально-діяльнісним, особистісно-психологічний). Показано, що розвиток математичних здібностей забезпечується шляхом актуалізації зовнішніх вимірів математичної компетентності в навчально-математичній діяльності. Наведено методику розвитку математичних здібностей учнів за результатами реалізації цієї ідеї та принципу наступності розвитку. Основою даної методики є розвивально-проблемний метод навчання математики як чотирирівневої проблемної структури, що уособлює в собі методи математичного та навчального (навчально-теоретичного) моделювання, метод сходження від абстрактного до конкретного, передбачає рефлексію процесу і результатів навчально-математичної діяльності.

Слід зазначити, що дослідники досить багато уваги приділили роботам присвяченим формуванню компетентності приймати рішення в умовах невизначеності на основі розв'язування задач з теорії ймовірностей і математичної статистики, сюжетних задач та математичного моделювання [11–14].

Однак дослідження методологічних засад формування та розвитку математичної та інформаційно-цифрової компетентностей учнів закладів загальної середньої освіти як інструменту формування їх абстрактного мислення для прийняття рішень в умовах невизначеності використовуючи комплекс алгебраїчних задач фактично не проводились.

Мета дослідження. Характерною ознакою сучасного освітнього процесу є зміна психолого-орієнтованої парадигми на компетентнісну. За таких обставин спостерігається загострення проблем і протиріч, пов'язаних з математичною підготовкою в системі освіти. Ключовими є протиріччя між:

- традиційними змістом математичної освіти і методикою викладання змістової лінії математичного моделювання, орієнтованістю на практичну і професійну складову;
- домінуванням в курсі математики теоретичних положень, їх докладним, часто переобтяжених штучними деталями обґрунтуванням, і необхідністю формування в молоді прикладних компетентностей;
- зростанням в освітньому процесі частки самостійної роботи і недостатнім для цього рівнем мотивації тощо.

За таких обставин особливої актуальності набуває проблема збалансованості в освітньому процесі теоретичної і прикладної математики, яка насамперед може бути успішно вирішеною при ефективному використанні ідей і методів математичного моделювання [15].

Складовою нашого дослідження є аналіз підходів та методологічних аспектів навчання елементів математичного моделювання і дидактичних технологій для розвитку навичок прийняття рішень в умовах невизначеності розв'язуючи задачі відповідної спрямованості. Використовуючи методи та прийоми активізації дослідницької діяльності учнівської молоді, обґрунтувати необхідність наскрізної змістовно-методичної лінії вивчення математичних дисциплін, напрямлену як на підвищення рівня інтелектуального розвитку так і на прикладну орієнтованість отриманих знань. При цьому самі математичні моделі виступають гносеологічним інструментарієм та універсальним методом пізнання.

Метою даної роботи є розробка теоретико-методологічних засад розвитку математичної компетентності як інструменту прийняття рішень в умовах невизначеності, визначення та обґрунтування комплексу методів та методологічних прийомів, спрямованих на розвиток математичної компетентності у контексті формування навичок прийняття рішень в умовах невизначеності. При цьому, на нашу думку, мова повинна йти не лише про орієнтацію на задачі з теорії ймовірностей, а, насамперед, широкого застосування традиційних алгебраїчних методів для формування та розвитку математичної компетентності прийняття рішень в умовах невизначеності.

У роботі з точки зору методології пізнання та практичної цінності висвітлюється потенціал алгебраїчних задач, який вимагає розвитку дослідницького арсеналу з метою адаптації математичного інструментарію для повного та всебічного аналізу множини розв'язків задач, які дозволяють розвивати математичну та інформаційно-цифрову компетентності учнів закладів загальної середньої освіти як інструменту формування їх абстрактного мислення для прийняття рішень в умовах невизначеності.

Використання загально-логічних методів і прийомів дослідження, таких як: компетентнісний підхід (спрямованість освітнього процесу на досягнення інтегральних результатів у навчанні — загальних та професійних компетентностей учнівської молоді) та системний підхід (як сукупність загальнонаукових методологічних принципів, в основі яких лежить розгляд об'єктів як цілісних систем). Такий підхід є запорукою для комплексного дослідження широкого кола сфер людської діяльності та побудови адекватних моделей реальних процесів і явищ, а відтак, приймати ефективні рішення в умовах невизначеності. Об'єктом нашого дослідження є процес розвитку математичної компетентності учнів закладів загальної середньої освіти, а предметом — методологічні аспекти розвитку математичної компетентності як інструменту прийняття рішень в умовах невизначеності.

Практична значимість роботи вбачається у наступному. Оскільки центральною ідеєю формування математичної компетентності є завданням сучасної освіти, що дає школярам необхідні знання та навички для успішного життя та кар'єри, то розв'язання задач ми пропонуємо здійснювати саме з точки зору спрямованості на формування логічного та абстрактного математичного мислення. Для цього в освітньому процесі потрібна цілеспрямована робота над розробкою комплексу методів та методичних прийомів, які можуть бути використані в процесі вивчення математики для розвитку математичної компетентності як компоненту загальнолюдської культури.

1 Методика дослідження

Модель дослідження. Дане дослідження було розроблено як тематичне дослідження з метою розвитку становлення математичної компетенції як результату наскрізного процесу вивчення курсу математики в закладах загальної середньої освіти. Робота спрямована на зближення в навчальному процесі теоретичної і прикладної спрямованості алгебраїчних задач, що вирішується засобами ефективного використання ідей і методів комбінаторного, логічного та аналітико-синтетичного мислення. Розвивається ідея виділення в математичних курсах наскрізних змістових ліній методології математики та математичного моделювання, в реалізації яких закладається значний потенціал для зростання мотивації учнів при освоєнні математичного інструментарію в розв'язанні прикладних задач, які вимагають прийняття рішень в умовах невизначеності. Такий підхід є носієм інноваційності, новизни в змісті курсів математики та методики її викладання. Широке впровадження прикладних задач в наскрізних математичних курсах спрямована на формування в школярів (майбутніх здобувачів вищої освіти) компетенції математичного моделювання, яка визначається як здатність актуалізувати і застосовувати математичні знання і вміння при побудові, аналізі та інтерпретації математичних моделей в процесі розв'язання практичних задач. Це в свою чергу забезпечує: спрямованість на досягнення інтегральних показників підготовки майбутніх фахівців; системність набуття основних груп компетентностей; поступове ускладнення, оновлення, збагачення і узагальнення знань; вдосконалення фахових (професійних) компетентностей.

Учасники. Дослідження було проведено за добровільної участі викладацького складу низки шкіл з поглибленим вивченням математики та кількох провідних закладів вищої освіти м. Києва, які спеціалізуються на викладанні математичного моделювання бакалаврам інженерних, технічних та економічних спеціальностей. Зацікавлених учасників обирали серед викладачів, які принаймні один раз викладали відповідні математичні курси і які на час збору даних все ще викладали в закладі вищої освіти. Обробку результатів і аналіз даних проводили всі автори статті.

Інструмент збору даних. Дані дослідження були зібрані від вищезазначених викладачів за допомогою напівструктурованої форми співбесіди, що включала питання про структуру навчальних курсів математики, особливості формування математичної компетентності використовуючи інструментарій математичного моделювання та аналітико-синтетичний підхід при розв'язуванні алгебраїчних задач, що вимагають прийняття рішень в умовах невизначеності на різних рівнях володіння математичного апарату. Відповідно до мети дослідження, отримано усні та письмові відповіді на запитання співбесіди з ілюстрацією прикладних аспектів організації освітнього процесу з математики, яким вони надають перевагу.

Важливо зазначити, що з викладачами-учасниками була проведена попередня зустріч, щоб ознайомити їх із змістом дослідження та суттю співбесіди. Їм також повідомили, що їх відповіді допоможуть реалізувати мету дослідження. Співбесіди проводились за визначеним графіком в індивідуальному порядку. Викладачів просили написати свої відповіді у напівструктурованому вигляді та надати відповіді на подальші запитання — якщо такі є.

Аналіз даних. Транскрибовані дані аналізувались описово. У цьому дослідженні використовувався описовий та систематичний аналіз, який є складовою методів описового аналізу. Даний метод передбачає транскрипцію діалогів, систематизацію та оцінку відповідей учасників. Дані були впорядковані, згруповані за тематикою та систематизовані. Використано метод індуктивного аналізу при інтерпретації результатів, заснованих на даних.

2 Результати дослідження

Понятійний апарат. Приклади завдань. Формування та розвиток математичної компетентності як феномену загальнолюдською культури є однією з ключових наскрізних ліній вивчення математики починаючи з молодшого шкільного віку і аж до періоду студентства.

З метою формування цілісної сучасної особистості, яка є конкурентоздатною на сучасних ринках праці саме підхід, який забезпечує відповідні математичні компетентності є вкрай важливим. Власне розвиток логічного та алгоритмічного мислення, загальної ерудиції та здатності до практичного застосування математичних знань й дозволяє в кінцевому випадку отримати того конкурентного фахівця, якого так потребує сучасний роботодавець.

Організація освітнього процесу для цільових груп підліткового та раннього юнацького віку має сприяти формуванню нового для них феномену розв'язування задач, які мають більш ніж один розв'язок. Традиційно, вивчаючи математику учні вміють знаходити послідовність кроків та перетворень, які ведуть до єдино вірного результату, який легко перевірити. І коли учні стикаються з ситуацією, що розв'язок може бути не один, більше того їх може бути взагалі кажучи багато, це викликає природні труднощі як у сприйнятті цього факту, так і, тим більше, пошуку усієї множини необхідних роз в'язків таких задач.

Таким способом побудова освітньої траєкторії учнів, яка б дозволяла сформувати навички розв'язування таких задач є невід'ємною складовою сучасної математичної освіти. Відомо, що пропедевтика задач, розв'язання яких вимагає повного перебору розпочинається ще з початкової школи. Починаючи з середнього шкільного віку варто у комплекс навчальних вправ включати вправи на розвиток логічного та алгоритмічного мислення, які вимагають аналізу задачі та визначення можливих комбінацій, систематизації та структурування даних та, власне, алгоритмів для перебору варіантів.

Розглянемо приклад такої задачі.

Приклад 1. Знайти усі пари натуральних чисел $(m;\ n)$, для яких

$$\frac{1}{m} + \frac{3}{n} = \frac{1}{12}.$$

Розв'язання. Виконавши прості перетворення, знайдемо з умови

$$m = \frac{12n}{n-36} = \frac{12n - 12\cdot 36 + 12\cdot 36}{n-36} = 12 + \frac{12\cdot 36}{n-36} = 12 + \frac{2^4\cdot 3^3}{n-36}.$$

Продовжуючи перетворення, розклавши на прості множники, дістанемо

$$(m-12)\,(n-36) = 2^4\cdot 3^3.$$

Отже, задача звелась до відшукання усіх дільників числа справа. Якщо систематизувати перебір, їх легко усі перерахувати. Ось вони: 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4; 3, $3\cdot 2$, $3\cdot 2^2$, $3\cdot 2^3$, $3\cdot 2^4$; 3^2, $3^2\cdot 2$, $3^2\cdot 2^2$, $3^2\cdot 2^3$, $3^2\cdot 2^4$; 3^3, $3^3\cdot 2$, $3^3\cdot 2^2$, $3^3\cdot 2^4$.

Варто зауважити, що такий запис ряду натуральних чисел називають порядком Шарковського [16]. Учні пізніше, вивчаючи вищу математику матимуть можливість детально ознайомитись з цією властивість ряду натуральних чисел. Але така задача сприяє як розвитку математичної компетентності так і формує пізнавальний інтерес до вивчення математики на наступних етапах навчання.

Зауважимо що, знайшовши добуток першого числа зліва на перше число справа, добуток другого числа зліва на друге число справа, добуток десятого числа зліва на десяте число справа, що усі ці добутки дорівнюють числу $2^4\cdot 3^3$.

Тому число $m-12$ набуватиме одного із вказаних двадцяти значень, якщо рухатись зліва направо, а число $n-36$ набуватиме відповідного значення, якщо рухатись справа наліво. Так, наприклад, взявши сьоме число зліва і сьоме число справа, дістанемо $m-12 = 3\cdot 2 = 6$, $n-36 = 3^2\cdot 2^3 = 72$, тобто $(m;n) = (18;108)$. Аналогічно записуються інші дев'ятнадцять пар $(m;n)$.

Остаточно отримаємо множину розв'язків даної нерівності:

$$\begin{gathered}\{(13;468)\,,\quad (14;252)\,,\quad (16;144)\,,\quad (20;90)\,,\quad (28;63)\,,\\ (3;180)\,,\quad (18;108)\,,\quad (24;72)\,,\quad (36;54)\,,\quad (60;45)\,,\\ (21;84)\,,\quad (30;60)\,,\quad (48;48)\,,\quad (84;42)\,,\quad (156;39)\,,\\ (39;52)\,,\quad (66;44)\,,\quad (120;40)\,,\quad (228;38)\,,\quad (444;37)\}.\end{gathered}$$

Задачі такого типу варто використовувати й у якості прикладу міжпредметних зв'язків, зокрема з інформатикою. Оскільки учні, розв'язуючи таку задачу, отримали чітке уявлення про можливість алгоритмізувати міркування, які лежать в основі розв'язання цієї дачі, то природно поставити проблему — скласти на уроках інформатики відповідний алгоритм для автоматизації її розв'язування. При цьому важливо наголосити на практичній значущості задач, які допускають цілий клас допустимих розв'язків. Більше того, такі задачі передбачають застосування сучасних інформаційних технологій для пошуку усіх допустимих розв'язків.

Продовжуючи системно розв'язувати нестандартні для учнів задачі варто запропонувати завдання, які є недоозначеними.

Приклад 2. Знайти усі трійки цілих чисел $(x,\ y,\ z)$, для яких

$$\begin{cases} x + 3y + xz = 7, \\ x + 2y - yz = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. На перший погляд система є недоозначеною, але рівняння, що описують систему, визначають скінчену множину цілих значень змінних. Покажемо яким чином, використовуючи властивості цілих чисел, можна отримати цю множину.

З другого рівняння системи знайдемо

$$x = 1 - 2y + yz$$

і підставимо це значення у перше рівняння системи. Після нескладних перетворень отримаємо рівняння

$$y\left(z^2 - z + 1\right) = 6 - z.$$

З умови випливає, що

$$y = \frac{6 - z}{z^2 - z + 1}$$

є цілим числом.

Підставляючи послідовно в отриману рівність значення $z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, отримаємо цілі числа тільки при $z = 0$, $z = 1$, $z = 6$.

При $z = 0$ $y = 6$; $z = 1$ $y = 5$; $z = 6$ $y = 0$. Відповідно до цих обчислених значень змінних, отримаємо : $x = -11$, $x = -4$, $x = 1$.

Розглянемо тепер два інші випадки.

Якщо $z \geq 7$, то $y < 0$. Звідки $y \leq -1$, а, отже,

$$\frac{6 - z}{z^2 - z + 1} \leq -1.$$

Розв'язуючи цю нерівність, пересвідчуємося, що остання нерівність не має розв'язків.

Якщо $z \leq -1$, то $y > 0$. Звідки $y \geq 1$, відтак,

$$\frac{6 - z}{z^2 - z + 1} \geq 1.$$

Ця нерівність рівносильна нерівності

$$z^2 - z + 1 \leq 6 - z,$$

або ж $z^2 \leq 5$. За умови $z \leq -1$, визначаємо, що достатньо перевірити цілі значення $z = -1$, $z = -2$.

Тоді при $z = -1$ отримаємо $y = \frac{7}{3}$, а при $z = -2$, $y = \frac{8}{7}$. Бачимо, що в жодному випадку число y не буде цілим.

Таким чином, отримали відповідь: $(1; 0; 6)$, $(-4; 5; 1)$, $(-11; 6; 0)$.

Даний приклад сприяє як розвитку математичного кругозору так і сприяє закріпленню навичок комбінаторного підходу до розв'язування алгебраїчних задач. Насамперед учні знайомляться з ситуацією, коли кількість змінних у системі алгебраїчних рівнянь більша, ніж самих рівнянь. Отже, учням необхідно помітити, при яких обмеженнях змінних y та z варто шукати розв'язки системи рівнянь. Виявляється, що для кожної змінної ці обмеження є, хоча й взаємообумовленими, проте різними за способом їх встановлення. Такий підхід є зовсім не типовим для сформованого на момент знайомства з такими завданнями підходами до логіки розв'язування систем алгебраїчних рівнянь.

Феноменологічною основою формування нестандартного широкого математичного мислення у підлітків є завдання саме такого типу. З однієї сторони система розв'язується використовуючи традиційні аналітико-синтетичні міркування. Але водночас учням необхідно помітити, що умову необхідно доозначити встановивши множину всіх можливих значень однієї зі змінних. Тобто техніка розв'язування доповнюється комбінаторними властивостями множини значень відповідної змінної.

Такі задачі мають прикладне значення в майбутній професійній діяльності, коли на практиці доводиться мати справу з задами з не до кінця встановленими умовами. Коли навички нестандартного мислення та прийняття рішень в умовах невизначеності сформовані ще в підлітковому віці, дорослим фахівцям легко знаходити множину допустимих варіантів і на їх основі приймати оптимальні рішення. Якщо ж було упущено момент формування та розвитку компетентностей прийняття рішень в умовах невизначеності, то набуття їх в процесі практичної діяльності є надто дорогим, а часто взагалі неприйнятним.

Розвиваючи кругозір корисно пропонувати завдання з параметром, адже такі задачі дозволяють закріпити та розвинути навички дослідження, які необхідні для розв'язання широкого кола задач.

Власне слід звернути увагу на широкі можливості розвитку математичної компетентності, які забезпечуються розв'язуванням алгебраїчних рівнянь та їх систем з параметрами. Зокрема, деякі системи алгебраїчних рівнянь з параметром мають аналітичний розв'язок, який можна виразити у вигляді формул. Інші системи мають лише чисельні розв'язки, які можна знайти за допомогою ітераційних методів. Для систем з двома рівняннями та двома невідомими можна використовувати методи підстановки, додавання та віднімання рівнянь. Для систем з більшою кількістю рівнянь та невідомих можуть використовуватися методи, пов'язані з перетворенням матриць, такі як метод Гауса або метод Крамера. Таким способом уже з підліткового віку ведеться активна підготовка до вивчення елементів вищої алгебри, що суттєво полегшить навчання на багатьох спеціальностях у закладах вищої освіти.

Розглянемо приклад задачі з параметром, який наочно показує яким чином можна «обійти» стандартне розуміння параметра.

Приклад 3. При яких значеннях параметра a кожне із рівнянь $x^2 - 4x - 5 = a$ та $x^2 + 7x + 2 = a$ має по два цілих корені?

Розв'язання. Запишемо умову у вигляді системи

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 5 = a, \\ x^2 + 7x + 2 = a. \end{cases}$$

Потрібно з'ясувати, при яких значеннях параметра a система має розв'язки (x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2), де x_1, x_2 — цілі, $y_1 \neq y_2$.

Насамперед має справджуватись рівність

$$x^2 - 4x - 5 = x^2 + 7x + 2,$$

у лівій і правій частині якої виділимо повні квадрати. Отримаємо рівність

$$4(x-2)^2 - 36 = 4\left(y + \frac{7}{2}\right)^2 - 41,$$

яку перетворимо до рівності

$$(2y+7)^2 - (2x-4)^2 = 5.$$

Розклавши ліву частину на множники, отримаємо

$$(2x + 2y + 3)\,(-2x + 2y + 11) = 5.$$

Це означає, що число 5 представлене добутком двох цілих множників. Власне таке можна зробити чотирма способами:

$$5 = 5 \cdot 1 = 1 \cdot 5 = (-1) \cdot (-5) = (-5) \cdot (-1)\,.$$

Таким способом, задача звелась до розв'язування чотирьох систем лінійних рівнянь. Ось одна із них

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3 = 5, \\ -2x + 2y + 11 = 1. \end{cases}$$

Розв'язавши останню систему рівнянь отримаємо, що $x = 3$, $y = -2$. Відтак, отримали значення параметра $a = -8$.

Перевірка свідчить, що це число справді задовольняє умову, оскільки перше рівняння $x^2 - 4x - 5 = -8$ має корені $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, а друге рівняння $x^2 + 7x + 2 = -8$ має корені $x_1 = -2$, $x_2 = -5$.

Повторюючи міркування для інших розкладів числа 5 на множники, легко зрозуміти також, що інші системи лінійних рівнянь, не дадуть нових значень параметра a. Отже, відповіддю є єдине значення $a = -8$.

Зауважимо, що розв'язування таких задач завжди важливо закінчувати перевіркою, яка має остаточно встановити множину шуканих розв'язків.

Загалом, саме математичній компетентності як феномену загальнолюдської культури, сформовані завдяки комплексу різнорівневих математичних задач ми завдячуємо культурі перевірки, самоперевірки, взаємоперевірки, а інтегральній — контролю та самоконтролю при розв'язуванні тих чи інших проблем. Математика одна з небагатьох навчальних дисциплін, якій властивий постійний покроковий контроль кожної операції при розв'язуванні будь-якої задачі. Ми суттєво недооцінюємо значення цього простого, на перший погляд, фактору, який є фундаментом успішності в дорослому житті. Адже лише завдяки чіткості, спланованості та контрольованості кроків стає можливим реально успішний будь-який стартап, проєкт чи то просто невелике рутинне практичне завдання. А ці навички є феноменологічним наслідком багаторічної роботи над розв'язуванням самих різноманітних математичних задач.

3 Висновки та перспективи подальших досліджень

В умовах постійної модернізації освітніх стандартів освіти і реалізації концепції розвитку математичної освіти актуалізується проблема формування практико- і професійно-орієнтованих умінь засобами загальноосвітніх предметних областей. Особливої актуальності набуває проблема зближення в навчальному процесі теоретичної і прикладної математики, яка вирішується засобами ефективного імплементації в змістових ліній методології математики та математичного моделювання.

Пропонується виділити в курсі математики закладів загальної середньої освіти спеціалізовані комплекси алгебраїчних задач, які вимагають розвитку дослідницького потенціалу школярів з метою адаптації математичного інструментарію для повного та всебічного аналізу множини розв'язків задач, які дозволяють розвивати математичну та інформаційно-цифрову компетентності учнів як інструменту формування їх абстрактного мислення для прийняття рішень в умовах неповної, надлишкової, точної та ймовірнісної інформації. В свою чергу таким способом закладається найбільший потенціал для зростання мотивації учнів (майбутніх здобувачів вищої освіти) до математичної діяльності.

Такий підхід є носієм інноваційності (затребуваності, новизни в змісті математики і методики її викладання, практико-орієнтованої спрямованості тощо). Реалізація широкого впровадження прикладних задач в математичних курсах спрямована на формування компетенції математичного моделювання, яку авторський колектив визначає як здатність актуалізувати і застосовувати математичні знання і вміння при побудові, аналізі та інтерпретації математичних моделей в процесі розв'язання навчальних і практичних задач. Математична модель розглядається як гносеологічний інструмент, універсальний метод пізнання, який має властивості системності, інформаційності, образності, абстрактності, фундаментальності.

Проведене нами дослідження дало змогу виявити недостатній рівень обізнаності із застосування алгебраїчних, аналітико-синтетичних методів та методів математичного моделювання при розв'язуванні задач, які вимагають прийняття рішень в умовах неповної, надлишкової, точної та ймовірнісної інформації. А також усвідомлення школярами актуальності цього інструментарію. Проведене дослідження не вичерпує всіх аспектів проблеми, що вивчається і має перспективу дослідження використання потенційних можливостей інформаційно-комунікаційних технологій для впровадження дієвих засобів навчання математики на різних освітніх платформах.

Література

[1] Математичне моделювання 2015 / А. М. Самойленко, К. К. Кенжебаєв, О. М. Станжицький, Є. Ю. Таран. Київ : Наукова думка, 327 с.

[2] Слєпкань З. І. Наукові засади педагогічного процесу у вищій школі. 2005. Київ : Вища школа, 2005. 240 с.

[3] Pollak H. 1969. How can we teach application of mathematics? *Educ. Stud. Math. №* 2, P. 393–404.

[4] Коваль Л. В., Скворцова С. О. 2011. Методика навчання математики: теорія і практика Харків : ЧП «Принт-Лідер». 414 с.

[5] Волошена В. 2015. Математичне моделювання в процесі розв'язування фізичних задач. *Математика в рідній школі.* № 6. С. 30–32.

[6] Гриб'юк О. О., Юнчик В. Л. 2015. Розв'язування евристичних задач у контексті STEM-освіти з використанням системи динамічної математики GeoGebra. *Modern Information Technologies and Innovation Methodologies of Education in Professional Training Methodology Theory Experience Problems.* № 43. С. 207–219. URL: https://vspu.net/sit/index.php/sit/article/view/4564

[7] Бібік Н. М. 2015. Переваги і ризики запровадження компетентнісного підходу в шкільній освіті. Український педагогічний журнал. № 1. С. 47–58.

[8] Компетентнісно орієнтована методика навчання математики в основній школі. 2015 / О. І. Глобін, М. І. Бурда, Д. В. Васильєва, В. В. Волошена, О. П. Вашуленко, Н. Д. Мацько, Т. М. Хмара. Київ : Педагогічна думка. 245 с.

[9] Методологічні аспекти навчання математичного моделювання в системі університетської освіти. 2022 / Собчук В., Замрій І., Барабаш О., Мусієнка А., Лукова-Чуйко Н. *Міждисциплінарні дослідження складних систем = Interdisciplinary Studies of Complex Systems* №21. С. 59–87. https://doi.org/10.31392/iscs.2022.21.059

[10] Semenets S. P. et al. 2022. Mathematical competence and mathematical abilities: structural relations and development methodology. *Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing.* 2288(1):012023. https://doi.org/10.1088/1742-6596/2288/1/012023

[11] Tomlinson M., Jackson D. 2021. Professional identity formation in contemporary higher education students. *Studies in Higher Education* Vol. 46(4). P. 885–900. https://doi.org/10.1080/03075079.2019.1659763

[12] Jeong H. C., So W. Y. 2020. Difficulties of online physical education classes in middle and high school and an efficient operation plan to address them. *International journal of environmental research and public health.* Vol. 17(19): 7279. https://doi.org/10.3390/ijerph17197279

[13] Chevallard Y., Bosch M. 2020. Didactic transposition in mathematics education. *Encyclopedia of mathematics education.* P. 214–218.

[14] Digital literacy and digital didactics as the basis for new learning models development 2020 / Liu Z. J., Tretyakova N., Fedorov V., Kharakhordina M. *International Journal of Emerging Technologies in Learning.* 15(14). P. 4–18. https://doi.org/10.3991/ijet.v15i14.14669

[15] Teaching of mathematical modeling elements in the mathematics course of the secondary school. 2018 / Krutikhina M., Vlasova V., Galushkin A., Pavlushin A. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education* 14(4). P. 1305–1315. https://doi.org/10.29333/ejmste/83561

[16] Пічкур В. В., Капустян О. В., Собчук В. В. 2020. Теорія динамічних систем. Луцьк : Вежа-Друк, 348с.

References

[1] Matematychne modeliuvannia. 2015 / A. M. Samoilenko, K. K. Kenzhebaiev, O. M. Stanzhytskyi, Ye. Iu. Taran. Kyiv : Naukova dumka. 327 s.

[2] Slepkan Z. I. 2005. *Naukovi zasady pedahohichnoho protsesu u vyshchii shkoli.* Kyiv: Vyshcha shkola. 240 s.

[3] Pollak H. 1969. How can we teach application of mathematics? *Educ. Stud. Math* №2, P. 393–404.

[4] Koval L. V., Skvortsova S. O. 2011. *Metodyka navchannia matematyky: teoriia i praktyka.* Kharkiv : Prynt-Lider. 414 s.

[5] Voloshena V. 2015. Matematychne modeliuvannia v protsesi rozviazuvannia fizychnykh zadach. *Matematyka v ridnii shkoli.* № 6. S. 30–32.

[6] Hrybiuk O. O., Yunchyk V. L. 2015. Rozviazuvannia evrystychnykh zadach u konteksti STEM-osvity z vykorystanniam systemy dynamichnoi matematyky GeoGebra. *Modern Information Technologies and Innovation Methodologies of Education in Professional Training Methodology Theory Experience Problems.* №43. S. 207–219. URL: https://vspu.net/sit/index.php/sit/article/view/4564

[7] Bibik N. M. 2015. Perevahy i ryzyky zaprovadzhennia kompetentnisnoho pidkhodu v shkilnii osviti. *Ukrainskyi pedahohichnyi zhurnal.* №1. S. 47–58.

[8] Kompetentnisno oriientovana metodyka navchannia matematyky v osnovnii shkoli. 2015 / Hlobin O. I., Burda M. I., Vasylieva D. V., Voloshena V. V., Vashulenko O. P., Matsko N. D., Khmara T. M. Kyiv : Pedahohichna dumka. 245 s.

[9] Metodolohichni aspekty navchannia matematychnoho modeliuvannia v systemi universytetskoi osvity. 2022 / Sobchuk V. V., Zamrii I. V., Barabash O. V., Musiienko A. P., Lukova-Chuiko N. V. *Interdisciplinary Studies of Complex Systems* №21. S. 59–87. https://doi.org/10.31392/iscs.2022.21.059

[10] Semenets S. P. et al. 2022. Mathematical competence and mathematical abilities: structural relations and development methodology. *Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing.* 2288(1): 012023. https://doi.org/10.1088/1742-6596/2288/1/012023

[11] Tomlinson M., Jackson D. 2021. Professional identity formation in contemporary higher education students. *Studies in Higher Education.* Vol. 46(4). P. 885–900. https://doi.org/10.1080/03075079.2019.1659763

[12] Jeong H. C., So W. Y. 2020. Difficulties of online physical education classes in middle and high school and an efficient operation plan to address them. *International journal of environmental research and public health.* Vol. 17(19): 7279. https://doi.org/10.3390/ijerph17197279

[13] Chevallard Y., Bosch M. 2020. Didactic transposition in mathematics education. *Encyclopedia of mathematics education.* P. 214–218.

[14] Digital literacy and digital didactics as the basis for new learning models development 2020 / Liu Z. J., Tretyakova N., Fedorov V., Kharakhordina M. *International Journal of Emerging Technologies in Learning.* Vol. 15(14). P. 4–18. https://doi.org/10.3991/ijet.v15i14.14669

[15] Teaching of mathematical modeling elements in the mathematics course of the secondary school. 2018 / Krutikhina M., Vlasova V., Galushkin A., Pavlushin A. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education* 14(4). P. 1305–1315. https://doi.org/10.29333/ejmste/83561

[16] Pichkur V. V., Kapustian O. V., Sobchuk V. V. 2020. Teoriia dynamichnykh system. Lutsk : Vezha-Druk. 348 s.