УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ,
ІНФОРМАТИКИ ТА ФІЗИКИ

КАФЕДРА МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

В. О. Швець

ТЕОРІЯ ТА МЕТОДИКА НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В СТАРШІЙ ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ: КУРС ЛЕКЦІЙ

Київ 2024

УДК 373.5.016:51](075.8)
Ш 35

Рекомендовано до друку Вченою радою
Українського державного університету імені Михайла Драгоманова
(протокол № 4 від 24 жовтня 2024 року)

Рецензенти:

Матяш О. І. доктор педагогічних наук, професор, професор кафедри алгебри і методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університет імені Михайла Коцюбинського;

Школьний О. В. доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри методики навчання математики Українського державного університету імені Михайла Драгоманова;

Панасенко О. Б. кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри алгебри і методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університет імені Михайла Коцюбинського;

Шаравіна Л. Ю. вчитель математики опорного закладу освіти «Немішаївський ліцей № 2», вчитель вищої категорії, старший вчитель.

Швець В. О. Теорія та методика навчання математики в старшій профільній школі: курс лекцій. – Київ.: Вид-во УДУ ім. Михайла Драгоманова, 2024. – 504 с.

ISBN 978-966-931-307-2

У підручнику подано авторські лекції з навчальної дисципліни «*Теорія та методика навчання математики в старшій профільній школі*», які впродовж кількох років читаються студентам-магістрантам в Українському державному університеті імені Михайла Драгоманова. Зміст лекцій містить теоретичні основи вибраних тем шкільного курсу математики старшої профільної школи, методичні рекомендації щодо їх вивчення. У підручнику представлено три розділи: 1. *Загальні питання методики навчання математики в старшій профільній школі*; 2. *Теорія та методика навчання алгебри і початків аналізу*; 3. *Теорія та методика навчання стереометрії*.

Підручник призначений для студентів магістратури: галузь знань 01 Освіта / Педагогіка, спеціальність 014 Середня освіта, предметна спеціальність 014.04 Математика. Він може бути корисним також вчителям математики, які працюють в старшій профільній школі, аспірантам, викладачам закладів вищої освіти, які цікавляться методикою навчання математики.

ISBN 978-966-931-307-2

З М І С Т

ПЕРЕДМОВА

За роки незалежності в Україні відбулись істотні зміни в системі освіти в цілому і в системах середньої та вищої освіти зокрема. На виконання законів України «Про освіту», «Про повну загальну середню освіту», «Про вищу освіту» створено *державні стандарти базової середньої освіти, базової і повної загальної освіти, вищої освіти, професійні стандарти*. Впровадження в старшій школі профільної диференціації провело до потреби вивчати математику в середніх закладах освіти на різних рівнях складності – рівень стандарту, профільний чи поглиблений рівні. Це в свою чергу позначилось на підготовці вчителя математики для середніх закладів освіти. На сьогодні, вчителем математики в школі може працювати і випускник закладу вищої освіти після закінчення навчання в бакалавраті, і випускник, який закінчив навчання в магістратурі. Їх освітня кваліфікація різна. Саме випускник магістратури якраз і покликаний навчати математики учнів профільних і спеціалізованих закладів середньої освіти, оскільки має володіти ширшою палітрою загальних, фахових та предметних компетентностей.

Основою методичної підготовки вчителя математики старшої профільної та спеціалізованої шкіл є навчальна дисципліна «Теорія та методика навчання математики в старшій профільній школі». Її вивчення, разом із фундаментальними математичними дисциплінами та іншими, зазначеними в навчальному плані (фундаментальними, за вибором), має забезпечити професійну підготовку майбутнього вчителя до роботи в сучасних умовах, здатного вміло організовувати процес навчання математики, ефективно і доцільно використовувати, у поєднанні з традиційними, інноваційні методи та технології навчання, готового до подальшого саморозвитку й професійного зростання, до ефективного розв'язування комплексних виробничих завдань у професійній, навчальній, інноваційній та виховній діяльності відповідно до вітчизняних та європейських стандартів якості освіти.

Пропонований підручник «Теорія та методика навчання математики в старшій профільній школі: курс лекцій» призначений для студентів-магістратури: галузь знань 01 Освіта / Педагогіка, спеціальність 014 Середня освіта, предметна спеціальність 014.04 Математика. Він повістю відповідає програмі навчальної дисципліни «Теорія та методика навчання математики», не має аналогів серед наявних в Україні навчальних посібників з методики навчання математики. Написаний на основі лекцій, які автор кілька років читав і читає нині для студентів-магістрантів. Він містить три розділи: 1. Загальні питання методики навчання математики в старшій профільній школі;

2. Теорія та методика навчання алгебри і початків аналізу; 3. Теорія та методика навчання стереометрії.

У першому розділі описані актуальні психолого-педагогічні особливості навчання математики учнів юнацького віку, розкрито шляхи і методи реалізації прикладної спрямованості курсів алгебри і початків аналізу та стереометрії, загальні вимоги до рівня підготовки випускників старшої профільної школи.

У другому і третьому розділах запропоновано авторську методику вивчення навчальних тем кожного з названих курсів, які виділені в програмі з математики профільного рівня.

Навчальний матеріал підручника викладений у формі лекцій, кожна з яких містить: план, достатньо повні конспективні відповіді на заявлені питання плану, методичні задачі для самостійного розв'язання. Підручник написаний для студента денної, вечірньої чи заочної форм навчання. Його, як засіб, за традиційною чи технологією перевернутого навчання, в режимі *онлайн* чи *офлайн*, студент може успішно використовувати і під час підготовки до складання іспиту з навчальної дисципліни «Теорія та методика навчання математики», адже питання, які розглядаються в лекції, можна розглядати як питання екзаменаційного білета. Методичні задачі для самостійного розв'язання запропоновані з метою поглиблення і розширення знань студента шляхом самоосвіти.

Зрозуміло, що не лише лекційним курсом формується фахова компетентність майбутнього вчителя математики. Для цього передбачені також практичні та семінарські заняття, виробнича практика, дослідницька робота та інші форми навчання. Проте, лекції, як на наш погляд, фундамент такої підготовки, а без гарного фундаменту годі сподіватись на міцну будівлю. Даний підручник розглядаємо як сходинки для сходження студента до висот фахової компетентності вчителя математики.

Виражаю щиру вдячність рецензентам за їхні поради, слушні зауваження, вичитку рукопису та виправлення. Все це сприяло поліпшенню змісту підручника, його структури. Уклінне їм спасибі!

Буду вдячний за відгуки, поради щодо покращення підручника, конструктивну критику, їх прошу надіслати на адресу: 01601, *м. Київ, вул. Пирогова*, 9.

УДУ імені Михайла Драгоманова, кафедра методики навчання математики.

З повагою, Щиро ВаШ
(Василь Швець)

РОЗДІЛ 1

ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В СТАРШІЙ ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ

Л Е К Ц І Я 1.1

Т Е М А ***Математика в старшій профільній школі: мета вивчення, зміст навчального матеріалу, вимоги до підготовки учнів***

П Л А Н

1.	***Профільна диференціація, старша профільна школа і її призначення***
2.	***Математика в старшій профільній школі як галузь знань, структура галузі, зміст навчального матеріалу, вимоги до підготовки учнів***
3.	***Алгебра і початки аналізу та геометрія як навчальні предмети з шкільного курсу математики старшої профільної школи***

К О Н С П Е К Т   Л Е К Ц І Ї

1. Профільна диференціація, старша профільна школа і її призначення

І держава, і батьки глибоко зацікавлені в тому, щоб підростаюче покоління було освіченим, готовим жити в соціумі, створювати матеріальні та духовні блага як для себе, так і для членів суспільства. Для цього й існують ***державні та приватні школи***: ***початкова*** (*в ній вчаться діти молодшого шкільного віку*), ***базова середня*** (*в ній вчаться діти переважно підліткового віку*) та ***середня*** (*де вчаться діти юнацького віку*).

На даний час багатьом стало зрозумілим, що школа не може обходитися єдиною для всіх учнів програмою з математики та інших шкільних предметів, що *освіта має бути диференційованою.* У навчанні дітей повинні враховуватись їх індивідуальні здібності, задатки, нахили, потреби, інтереси, майбутні професійні уподобання, вікові можливості тощо. Отже, система освіти, зокрема математичної освіти на різних ступенях навчання має вибудовуватись з урахуванням наступних важливих ***вихідних положень (принципів)***:

1.	Бути складовою цілісної системи формування особистості на основі досягнень математики, психолого-педагогічної науки, педагогічного досвіду.
2.	Бути безперервною і забезпечувати наступність на всіх ланках ступеневої освіти.
3.	Ґрунтуватись на принципах гуманізації навчально-виховного процесу і гуманітаризації змісту освіти.

4.	Здійснюватись з урахуванням *рівневої* та *профільної диференціації* навчально-виховного процесу на основі базового змісту математичної освіти.
5.	Бути спрямованою на виховання в учнів високоморальних якостей, на розвиток їх інтелектуальних здібностей, математичної культури, вміння вчитись і застосовувати отримані математичні знання (сформовані предметні компетентності) для розв'язування практичних та прикладних задач.
6.	Готувати учнів до активної діяльності у сучасному «цифровому» середовищі.

Зупинимося детально на диференціації та індивідуалізації навчання.

У психолого-педагогічній літературі науковці дають різне трактування цих понять. Будемо дотримуватись тих, які дає в своїй монографії Інга Унт (*Унт И. Э. Индивидуализация и дифференциация обучения. М. Педагогика, 1990*).

«*Індивідуалізація* (переклад наш) – це врахування в процесі навчання індивідуальних особливостей учнів у всіх його формах і методах, незалежно від того, які особливості і в якій мірі враховуються… Під *диференціацією* будемо розуміти врахування індивідуальних особливостей учнів у тій формі, коли учні групуються на основі якихось ознак для окремого навчання, зазвичай навчання в такому випадку проходить за кількома різними навчальними планами та програмами» [5, 6, 7].

Часто диференціацію розглядають як одну з форм індивідуального навчання. Термін ***диференціація*** (*від лат. differentia — відмінність*) означає дію, направлену на поділ, розчленування чого-небудь на окремі різнорідні елементи. Застосування цієї дії в освіті називають ***диференційованим підходом***. Якщо здійснюється поділ, то він завжди відбувається на основі ***критерію***, який трактують як ***підставу*** для оцінки, визначення, класифікації чогось, як мірило, мірку. За диференційованим підходом в освіті, зокрема, в шкільній математичній освіті, можна розділяти: зміст навчального матеріалу з математики для вивчення учнями; рівень допомоги учням у засвоєнні навчального матеріалу; обсяг, глибину і широту змісту освіти; процес навчання математики залежно від професійних уподобань учнів; тощо. Науковці виділяють наступні *два основних* ***види диференціації: внутрішню*** *(рівневу),* ***зовнішню*** *(профільну).*

Багато психологів, дидактів, математиків-методистів під ***рівневою диференціацією*** розуміють таку систему навчання, при якій кожний учень, отримуючи умовно визначений і прийнятий з даного навчального предмета мінімум підготовки, що є загально визначеним (обов'язкові результати навчання або інакше стандарт освіти) і який служить основою для адаптації до умов, що постійно змінюються, отримує право і гарантовану можливість зосереджувати свої зусилля на тих напрямках здобування знань, які в найбільшій мірі відповідають його здібностям та нахилам.

На практиці *рівнева диференціація* проявляється в тому, що навчаючись в одному класі, за однією програмою і підручником школярі можуть засвоювати *вивчений матеріал на різних рівнях*: *обов'язковому, підвищеному, поглибленому*.

Щоб проводити рівневу диференціацію ***за критерій часто обирають дві підстави***: *навченість* (обсяг знань, якими володіє учень на час вивчення нового матеріалу); *научуваність* (здатність учня вчитись, засвоювати новий матеріал).

Обидві якості, на практиці часто оцінюють оцінками – низька (Н), середня (С), висока (В). Тому, теоретично, учні класу можуть бути розділеними на групи відповідно до оцінок: (Н.Н), (Н.С), (Н.В), (С.Н), (С.С), (С.В), (В.Н), (В.С), (В.В). У реальності спостерігається груп менше. Малоймовірно, наприклад, щоб у класі були учні з високою навченістю і низькою научуваністю. Розділяючи учнів на групи, вчитель і вибудовує процес навчання свого предмета з урахуванням такого поділу.

Додатково за критерій можна обирати і *інші підстави.*

Наприклад, *освітні переваги учнів*:

- є учні (***візуали***), які краще засвоюють навчальний матеріал коли його подання супроводжується демонстрацією презентацій, таблиць, рисунків, ілюстрацій тощо;
- є учні (***аудіали***), які під час навчання віддають перевагу друкованим текстам, конспектам, записам, словесним узагальненням чи повідомленням і т. п.;
- є учні (***кінестетики***), які під час вивчення нового матеріалу про об'єкт краще засвоюють коли виготовляють щось своїми руками. Це також рівнева диференціація. Її, досвідчений вчитель, також може застосовувати під час щоденних занять з математики.

Зовнішня (профільна) диференціація навчання в середній школі покликана створити учням можливості отримувати освіту за різними напрямками відповідно за різними планами та програмами що узгоджуються з їх майбутніми професійними уподобаннями. Радянські вчені *Ю. М. Колягін, М. В. Ткачова, Н. Є. Федорова* у своїй роботі «Профільна диференціація в навчанні математики» (див. *Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова*. Профильная диференциация обучения математике // Математика в школе. 1990. № 4) рекомендують дотримуватись під час побудови системи профільної диференціації ***наступних принципів***:

1) профільна диференціація повинна вводитись після отримання учнями єдиної базової освіти, після утвердження ними в своїх нахилах;

2) на старшій ступені навчання має бути запропоновано якомога більше напрямків отримання освіти;

3) з кожного навчального предмета доцільно об'єднувати різні напрямки здобувачів освіти в блоки за принципом схожості цілей і завдань навчання, що дають можливість створювати єдині програми для кожного блоку;

4) під час створення програм і підручників, виборі організаційних форм та методів навчання слід враховувати вікові особливості учнів, які схильні до такого роду діяльності, і, в той же час, не виключають можливості змінити профіль навчання, якщо учень допустив помилку з вибором;

5) математика повинна входити в перелік обов'язкових навчальних предметів будь-якого з профілів.

Легко бачити, що в Україні профільна диференціація навчання вибудовується з дотриманням вказаних вище принципів. Відповідно до закону про освіту змінюється сітка шкіл, яка запроваджується з вересня 2024 року (див. рис. 1).

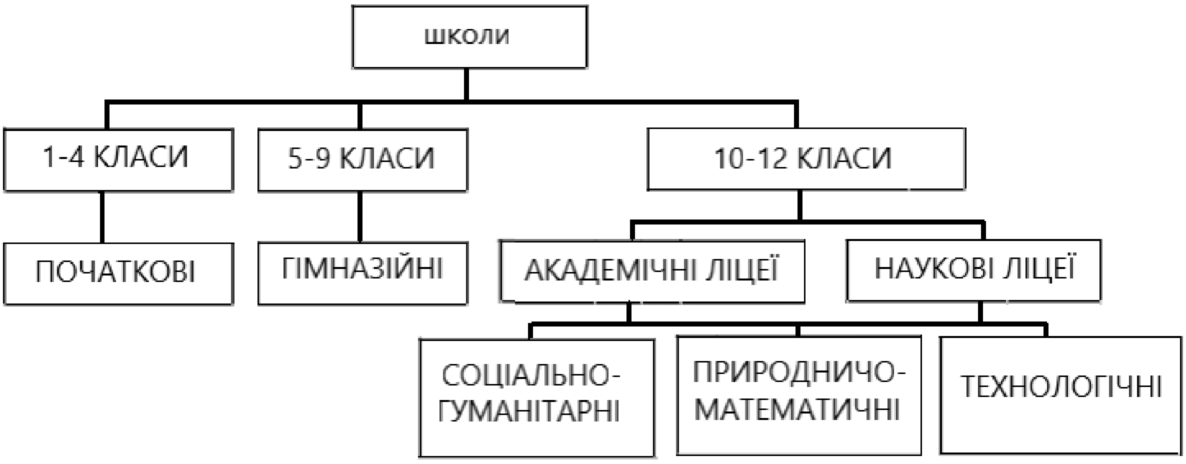


Рис. 1. Система шкільної освіти в Україні з 2024 року

На сьогодні математика в старшій школі вивчається за ***трьома різними програмами***: *рівня стандарту, профільного рівня, поглибленого рівня.* Тому, коли вживають термін **«старша профільна школа», то під ним розуміють насамперед старшу школу (академічні та наукові ліцеї, коледжі), де математика вивчається за програмою профільного рівня.** Призначення такої системи сформувати в учнів глибокі, розширені та міцні знання з математики, які потрібні будуть їм надалі для реалізації власних професійних уподобань.

2. Математика в старшій профільній школі як галузь знань, структура галузі, зміст навчального матеріалу, вимоги до підготовки учнів

Підготувати підростаюче покоління до життя в соціумі – означає сформувати в нього таку систему знань, яка допоможе безболісно включитися в доросле трудове життя, бути готовим до подолання труднощів, яких уникнути неможливо, до вирішення різного роду проблем сьогодення і майбутнього. Адже, перебуваючи в стінах школи школярі вчаться в одних умовах, а коли стають випускниками – то потрапляють в умови, що, зазвичай, вже змінилися.

Хто ж визначає цю систему знань? Зрозуміло, що це робить держава, а точніше її відповідні інституції. У різного роду державних нормативних документах таких як «Закон України про повну загальну середню освіту», «Державний стандарт базової і повної середньої освіти», та багато інших чітко виписано: завдання і умови підготовки, форми і зміст підготовки, результати підготовки, оцінювання результатів тощо. Все це в сукупності можна назвати «державним замовленням і умовами його виконання».

Основними державними документами для підготовки учнів старшої профільної школи з освітньої галузі «Математика» є стандарт освіти та його більш деталізоване продовження – навчальна програма з математики.

У нині діючому державному стандарті [1] названо різні галузі знань, одна з яких – Математика. В ньому чітко виписані *зміст математичної підготовки* з цієї галузі та *компетентності*, якими повинні оволодіти школярі.

Зміст шкільного курсу математики розглядається **як відібрана з науки математики затребувана вимогами науки і практики та адаптована до вікових можливостей учнів система математичних знань, необхідна школярам для вирішення завдань у побуті, у вивченні суміжних дисциплін, у здобуванні професійних знань та майбутній трудовій діяльності.** Саме з цієї причини окреслений в стандарті зміст математичної освіти отримав назву *базовий.* Він сформований на основі відомостей про такі фундаментальні математичні поняття та їх властивості як: *числа і дії над ними; вирази і їх перетворення; рівняння та нерівності; функції, їх властивості і графіки; похідна та інтеграл; елементи математичної статистики та початки теорії ймовірностей; геометричні фігури та їх властивості; координати і вектори; геометричні величини, їх вимірювання та обчислення.*

Кожне з названих понять зі своїми властивостями та вимогами до засвоєння утворюють так звану змістову лінію. Для старшої школи згідно стандарту [1], такими лініями є (див. таблицю 1).

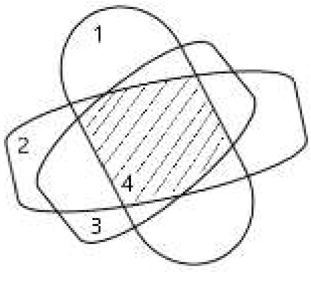
Таблиця 1

	СТАРША ШКОЛА	
	Змістові лінії	***Вимоги до підготовки учнів***
1	**Вирази**	
	Узагальнення поняття степеня. Синус, косинус, тангенс, котангенс кута та числа. Логарифм Степеневі, тригонометричні, ірраціональні, показникові, логарифмічні вирази та їх перетворення	- ***знати і розуміти*** означення синуса, косинуса, тангенса та котангенса, тригонометричні формули, що таке корінь *n*-го степеня, степінь з раціональним і дійсним показниками та їх властивості, означення логарифма та його властивості; - ***уміти*** знаходити значення виразів, наведених у змісті освіти, за значенням змінних, які входить до них, перетворювати тригонометричні вирази, вирази із степенями і коренями, логарифмічні вирази, застосовувати відповідні формули та алгоритми під час розв'язування задач
2	**Рівняння і нерівності**	
	Ірраціональні, тригонометричні, показникові, логарифмічні рівняння. Показникові і логарифмічні нерівності	- ***знати і розуміти***, що таке ірраціональні тригонометричні рівняння та показникові, логарифмічні рівняння і нерівності, основні методи їх розв'язування; - ***уміти*** розв'язувати нескладні ірраціональні, тригонометричні рівняння та показникові, логарифмічні рівняння і нерівності, застосовувати відповідні рівняння і нерівності для аналітичного опису відношень між реальними, зокрема геометричними та фізичними величинами
3	**Функції**	
	Властивості функцій. Степенева, тригонометричні, показникова та логарифмічна функції. Похідна. Інтеграл	- ***знати і розуміти*** означення характерних властивостей функцій (зростання, спадання, парність тощо), означення та властивості степеневої, тригонометричної, показникової та логарифмічної функції, зміст поняття неперервної функції, диференційованої функції, означення та властивості похідної та первісної; - ***уміти*** будувати та аналізувати графіки функцій, зокрема степеневої, тригонометричної, показникової та логарифмічної функцій, знаходити похідні та первісні деяких функцій, застосовувати похідну для встановлення властивостей функцій та побудови їх
4	**Елементи комбінаторики**	
	Класичне визначення ймовірності випадкової події. Комбінаторний підхід до обчислення ймовірностей випадкових подій. Генеральна сукупність та вибірка. Мода, медіана, середнє значення	- ***знати і розуміти***, що таке перестановки, розміщення, комбінації (без повторень), класичне визначення поняття ймовірності, що таке генеральна сукупність та вибірка, означення середнього значення, моди та медіани вибірки; - ***уміти*** обчислювати в найпростіших випадках кількість перестановок, розміщень, комбінацій, обчислювати ймовірності випадкових подій, використовуючи класичне визначення та комбінаторні правила і формули, обчислювати середнє значення, моду і медіану вибірки та інтерпретувати одержані результати, застосовувати ймовірнісні характеристики навколишніх явищ для прийняття рішень

5	**Геометричні фігури**	
	Аксіоми стереометрії. Взаємне розміщення прямих і площин у просторі. Многогранники і тіла обертання, їх види та властивості. Геометричні перетворення у просторі. Координати і вектори у просторі	- ***знати і розуміти*** аксіоми стереометрії та висновки з них, визначення понять многогранника (призми, піраміди), тіла обертання (кулі, сфери, циліндра, конуса), властивості зазначених геометричних фігур, визначення понять геометричних перетворень, координат і векторів у просторі та їх основні властивості; - ***уміти*** розрізняти означувані та неозначувані поняття, аксіоми і теореми, класифікувати за певними ознаками взаємне розміщення прямих, прямих і площин, площин у просторі, просторові тіла, зображувати просторові геометричні фігури та їх елементи, застосовувати вивчені означення, властивості та методи стереометрії під розв'язування найпростіших задач, зокрема прикладного змісту, для дослідження властивостей реальних об'єктів
6	**Геометричні величини**	
	Відстані у просторі. Міри кутів між прямими і площинами. Площі поверхонь і об'єми тіл	- ***знати і розуміти*** що таке відстань (від точки до прямої, від точки до площини, між мимобіжними прямими, від прямої до паралельної їй площини, між паралельними площинами), міра кута (між прямими, між прямою і площиною, між площинами), площа поверхні та об'єм геометричного тіла, формули для обчислення площ поверхонь та об'ємів многогранників і тіл обертання; - ***уміти*** обчислювати відстані та міри кутів, зокрема використовуючи координати і вектори у просторі, розв'язувати найпростіші задачі на вимірювання і обчислення площ поверхонь і об'ємів тіл, застосовувати вивченні означення, властивості і формули до розв'язування найпростіших задач прикладного змісту, суть яких полягає в обчисленні площ поверхонь і об'ємів тіл

У старші школі відбувається ***профілізація освітнього процесу***. Учні можуть обирати, виходячи з своїх уподобань, *різні профілі навчання*: *гуманітарний, природничий, спортивний, фізико-математичний* та інші.

Зміст їх математичної підготовки (профільний зміст), залежно від обраного профілю навчання, може змінюватися, при цьому базовий зміст має залишатися незмінним. Це і є так звані обов'язкові результати навчання з математики. Схематично це показано на рисунку 2.



1 Зміст математичної підготовки учнів гуманітарного профілю навчання.
2 Зміст математичної підготовки учнів природничого профілю навчання.
3 Зміст математичної підготовки учнів фізико-математичного профілю навчання.
4 Базовий зміст математичної підготовки учнів (*обов'язкові результати навчання*).

Рис. 2. Зв'язок профільного змісту математичної освіти з базовим

Серцевиною всіх профільних змістів математичної підготовки учнів залишаються визначені стандартом ***обов'язкові результати навчання***. Чи може змінюватися стандарт? Може! Це обумовлено тими змінами, що відбуваються в суспільстві, пов'язаними з потребами науки, виробництва, соціального життя. Розширення і поглиблення базового змісту математичної підготовки учнів відбувається в іншому державному нормативному документі – *програмі з математики*.

На сьогодні, в старшій школі ***діє три програми***: ***рівня стандарту, профільного рівня, поглибленого рівня.*** Школа сама обирає, залежно від обставин (бажань учнів, батьків, потреб регіону тощо) потрібну програму і здійснює за нею виконання державного замовлення в галузі математичної освіти.

Саме про програму профільного рівня і навчання за нею математики школярів старшої школи ми й ведемо мову далі.

3. Алгебра і початки аналізу та геометрія як навчальні предмети з шкільного курсу математики старшої профільної школи

У початковій та базовій середній школах освітня галузь «Математика» представлена навчальною дисципліною «Математика». За цією навчальною дисципліною учні отримують необхідні знання з арифметики, алгебри, геометрії, частково з інших розділів математики.

Такий підхід продовжується і в старшій школі, де математика, як навчальний предмет, вивчається за *програмою рівня стандарту* (інтегрований курс). У старшій профільній школі, де математика, як навчальний предмет, вивчається нині за програмою профільного рівня, освітня галузь «Математика» представлена двома навчальними предметами «Алгебра і початки аналізу» і «Геометрія». У курсі «Алгебра і початки аналізу» зміст навчального матеріалу включає змістові лінії 1-4 стандарту, які значно розширені і поглиблені новими знаннями та вимогами, а в курсі «Геометрія» – змістові лінії 5-6, які також розширені та поглиблені новими знаннями та вимогами до засвоєння.

Якщо за програмою рівня стандарту математика вивчається 3 год. щотижня, то у профільній школі 9 год: «*Алгебра і початки аналізу*» – 6 год та «*Геометрія*» – 3 год.

Задекларований в Україні перехід на 12-річну середню освіту, очевидно, змінить стандарт та програму, в яких розподіл навчального матеріалу за класами, годин на вивчення, черговість вивчення навчальних тем і т. п. буде іншим. І зміст навчального матеріалу, і вимоги до його засвоєння, і методика вивчення кожного з названих вище предметів розглянуто нами детально в наступних розділах підручника.

Зупинимося коротко на окремих методологічних аспектах теорії та методики їх вивчення в старшій профільній школі.

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ В СТАРШІЙ ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ

Вважаємо, що цей навчальний предмет в старшій профільній школі, зокрема, в природничо-математичному та технологічному ліцеях, має вивчатись не як загальноосвітній предмет, цього замало, а як професійно-орієнтований, спрямований на оволодіння в майбутньому випускниками професією, що здобувається на основі ґрунтовної шкільної математичної освіти. Навчального часу, якщо збережеться сьогоднішній розподіл – 6 год. на алгебру і початки аналізу та 3 год. геометрію на (на тиждень), достатньо щоб вивчити і теоретичний матеріал і виробити уміння і навички застосовувати його до розв'язання математичних задач і, що важливо, прикладних. Тому:

Метою вивчення алгебри і початків аналізу в старшій профільній школі має бути оволодіння учнями на теоретико-практичному рівні *системою наукових знань* з даного навчального предмета. Математичні поняття та властивості, теоретичні твердження, мають формуватись, доводитись, ілюструватись і застосовуватись ними на практиці. Адже саме такі здобутки є складовими їх майбутньої фахової компетентності.

У зміст курсу алгебри і початків аналізу слід включити (переглянувши традиційний з метою ущільнення, удосконалення чи розширення) теми «Наближені обчислення», «Дійсні числа і дії над ними. Числова пряма», «Множини і операції над ними». Зміст тем, які вивчаються нині, слід доповнити фундаментальними теоремами математичного аналізу (Вейєрштраса, Лагранжа і т. п.).

Це зробить курс більш науковим, строгим, практико застосовним, який буде згодом розширений у виші відповідно до програми математичної підготовки студентів.

Система прикладних задач з алгебри і початків аналізу як невід'ємна складова курсу, має включати задачі, сюжети яких пов'язані з сучасними технологіями виробництва, економіки, фінансів, робототехніки, будівництва, машинобудування та інших галузей людської діяльності. Їх розв'язання гарно вмотивовує вивчення курсу, формує пізнавальний інтерес як до математики, так і до майбутньої професії.

Важливим здобутком випускників старшої профільної є готовність і здатність застосовувати метод математичного моделювання до дослідження реальних процесів і явищ, планувати і виконувати проекти, дослідження, наукові роботи, захищати їх, оприлюднювати, застосувати сучасні ІКТ.

Новий погляд на мету і зміст шкільного курсу алгебри і початків аналізу має бути викладений в оновлених освітній, модульній та предметній програмах, реалізований в новому поколінні підручників, навчальних посібників, дидактичних матеріалів, зокрема і в комп'ютерних навчальних програмах.

ГЕОМЕТРІЯ

Так само як алгебра і початки аналізу, геометрія в старшій профільній школі, зокрема в природничо-математичному та технологічному ліцеях, також має вивчатись на теоретико-практичному рівні. Тому:

Метою вивчення геометрії в старшій профільній школі має бути оволодіння на теоретико-практичному рівні системою наукових знань з даного предмета. Геометричні поняття і їх властивості, теоретичні твердження мають формуватись, доводитись, ілюструватись і застосовуватись учнями на практиці. Такі знання якраз і формують геометричну компетентність випускників-ліцеїстів, складову їх майбутньої фахової компетентності.

У зміст шкільного курсу геометрії слід включати (переглянувши традиційний в сторону скорочення чи розширення та поглиблення) теми: «Перетворення фігур у просторі, подібність, гомотетія, рухи», «Побудова зображень просторових фігур на площині», «Поняття геометричного тіла. Геометричні тіла як моделі реальних об'єктів», «Об'єм і площа поверхні геометричного тіла», «Елементи сучасної геометрії. Фрактальна геометрія». Вивчення названих тем має розглядати систему відповідних понять, теорем і їх доведень, практичні і, що важливо, прикладні задачі на застосування отриманих знань з геометрії, можливість і необхідність застосування сучасних ІКТ.

Система прикладних задач з геометрії за сюжетами має торкатись сучасних технологій виробництва, дизайну, робототехніки, логістики, будівельної, економічної, машинобудівної та інших галузей виробництва. Їх розв'язання гарно вмотивовує вивчати геометрію, формує пізнавальний інтерес як до математики, так і до майбутньої професії.

Важливим здобутком випускників старшої профільної школи має бути здатність застосовувати метод математичного моделювання до дослідження реальних процесів і явищ, планувати і виконувати навчальні проекти, захищати їх, оприлюднювати, виконувати дослідницькі роботи з геометрії по лінії МАН.

Новий погляд на шкільний курс геометрії має бути викладений в оновлених освітній, модульній та предметній програмах, реалізований в нових підручниках, навчальних посібниках, дидактичних матеріалах, зокрема і в комп'ютерних навчальних програмах. Не можна «в старі міхи вливати молоде вино». Побіжний перелік названих вище завдань вказує на те, що перехід на нову систему шкільної освіти потребує проведення великої підготовчої роботи. Їх результати мають зменшити помилки, недоліки, які без сумніву будуть, але їх має бути менше.

П І Д С У М О К

Навчання математики в старшій школі здійснюється з дотриманням диференційованого підходу: застосовується рівнева (внутрішня) і профільна (зовнішня) диференціації. Старша школа, в якій навчання математики ведеться за програмою профільного рівня, називається старшою профільною школою (профільні, технічні, наукові ліцеї, коледжі тощо).

Програма з математики профільного рівня включає в себе зміст навчального матеріалу з математики та вимоги до його засвоєння, які визначені Державним стандартом освіти середньої школи. Ці компоненти стандарту розширені та поглиблені в програмі до такого обсягу, щоб підготувати випускників до отримання професій, основою якої є ґрунтовні математичні знання.

МЕТОДИЧНІ ЗАДАЧІ
для самостійного розв'язування

1. Опрацювати стандарти освіти: початкової школи, базової середньої освіти, середньої школи. З'ясувати які:
   а) змістові лінії з математики і яке їх наповнення включено до стандарту:
   - *початкової школи, - базової середньої школи, - середньої школи*;

   б) компетентності за вимогами стандарту мають бути сформовані в учнів по закінченні: - *початкової школи, - базової середньої школи, - середньої школи*

2. Опрацювати діючі програми з математики для середньої школи, рівня стандарту, профільного рівня, поглибленого рівня. З'ясувати, які доповнення, розширення і поглиблення внесені в них у порівнянні зі стандартом освіти

3. Описати ключові міжпредметні і математичні компетентності, які мають формуватися під час навчання математики в старшій профільній школі

Методика навчання математики не тільки наука, а й мистецтво

Л. Д. Кудрявцев

Л Е К Ц І Я 1.2

Т Е М А ***Прикладна спрямованість шкільного курсу математики старшої профільної школи***

П Л А Н

1.	***Прикладна спрямованість шкільного курсу математики та практична спрямованість його навчання: суть понять***
2.	***Методи і засоби реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики***
3.	***Приклади і методичні поради до розв'язання прикладних задач***

К О Н С П Е К Т Л Е К Ц І Ї

1. Прикладна спрямованість шкільного курсу математики та практична спрямованість його навчання: суть понять

Володіння певними видами математичної діяльності та навичками їх застосувань до розв'язування різноманітних задач не тільки в математиці є запорукою успішної участі особистості в сучасному суспільному житті.

Одним із вихідних положень на які нині спирається система математичної освіти в Україні, є спрямованість навчання математики на забезпечення міцного і свідомого оволодіння учнями системою математичних знань і вмінь, необхідних їм в повсякденному житті, достатніх для вивчення суміжних навчальних предметів загальноосвітньої школи, отримання якісної професійної освіти на наступних етапах. Сказане потребує додаткових уточнень.

Аналіз матеріалу звітів про світовий розвиток, які були підготовлені світовим банком на основі тестування математичних і природничих знань учнів та студентів окремих розвинутих країн, серед яких були і країни СНД, показує відмінності розуміння значимості цих завдань, а, відповідно, і різне ставлення до їх формувань [81].

Так, наприклад, якщо акцентувати увагу в навчанні учнів на одній із таких пріоритетних цілей навчання: 1) *формувати систему знань*; 2) *навчити використовувати знання на практиці*; 3) *навчити використовувати знання в нестандартних ситуаціях, то окреслюється різне бачення окремими країнами ступеня їх важливості* (рис. 1). На рисунку 1 зображені відхилення від середнього значення вибірки школярів 9-13 років.

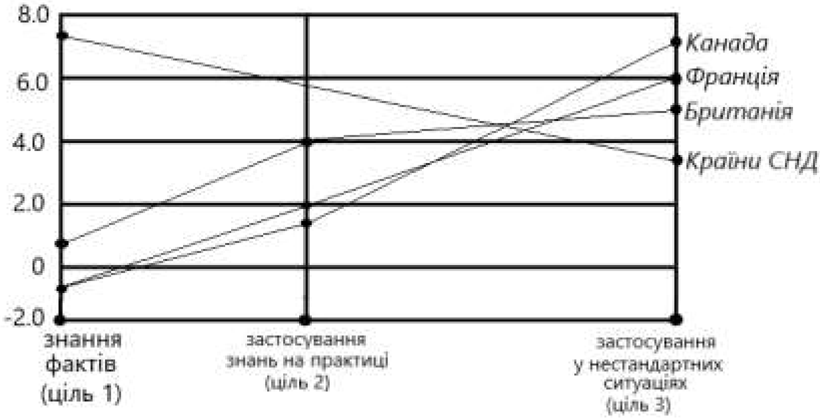


Рис. 1

Графіки, які наведені, свідчать про те, що в країнах колишнього СРСР традиційно пріоритетною була ціль сформувати в учнів середніх шкіл глибокі та міцні математичні і природничі знання, а двом іншим цілям приділялося уваги менше. У інших країнах, як видно, на рис. 1 акценти інші.

Україна, реформуючи систему освіти, намагається виправити такий ухил. У всіх державних нормативних документах, які стосуються проблеми змісту математичної освіти, вимог до математичної підготовки учнів, профілізації школи тощо, говориться про посилення прикладної спрямованості курсу математики (ціль 3). Заміна когнітивно-інформаційної парадигми освіти на компетентнісну не тільки заохочує виконувати це, але і зобов'язує. Стверджувати, що вже багато зроблено у цьому напрямі, неможливо в силу різних причин: інерційності системи освіти, складності у розв'язуванні даної проблеми, відсутності належного матеріального забезпечення і т. д. Але просування вперед є.

Прикладна спрямованість шкільного курсу математики як проблема, яку необхідно вирішувати та як мета навчання математики задекларовані у «Концепції математичної освіти 12-річної школи», у «Концепції профільної освіти у старшій школі», у «Державному стандарті базової шкільної середньої освіти: освітня галузь «Математика», у програмах з математики для середньої школи та в інших документах. На розробку технології її розв'язання були спрямовані наукові дослідження М. Я. Ігнатенка, З. І. Слєпкань, Л. О. Соколенко, А. В. Прус, В. О. Швеця та інших українських математиків-методистів. Зокрема, вони досліджували і продовжують досліджувати проблеми прикладної спрямованості шкільних курсів алгебри та початків аналізу, стереометрії, інтегрованого шкільного курсу Математика. Менш успішно, поки що, ця проблема вирішується у шкільних підручниках нового покоління з математики.

Тож, що ж це за поняття «*прикладна спрямованість шкільного курсу математики*»? Вперше його зміст описав радянський педагог-математик

В. В. Фірсов. Згодом, його визначення вдосконалювалося іншими вченими. У нашому розумінні сутність *прикладної спрямованості шкільного курсу математики* полягає в орієнтації цілей, змісту і засобів навчання математики у напрямку:

- здійснення цілеспрямованих змістових і методологічних зав'язків математики з потребами практичної діяльності людини;
- набуття учнями в процесі математичного моделювання знань, умінь і навичок, які будуть використовуватись ними в повсякденному житті, в майбутній професійній діяльності.

Остання теза передбачає включення в навчання математики таких специфічних моментів, які характерні для дослідження прикладних проблем, зокрема для розв'язування прикладних задач, під якими ми розуміємо задачі, що виникають за межами математики, але розв'язуються з використанням математичного апарату.

Часто, поряд з прикладною спрямованістю шкільного курсу математики, говорять про практичну спрямованість навчання математики. У нашому розумінні сутність практичної спрямованості навчання математики полягає в спрямованості цілей, змісту, засобів і методів навчання на формування в учнів вмінь і навичок розв'язування суто математичних задач.

Зрозуміло, що в реальному процесі навчання прикладна і практична спрямованість функціонують спільно, доповнюючи одна одну.

Якщо поняття прикладної спрямованості шкільного курсу математики охоплює цілі, зміст та засоби методичної системи навчання математики (рис. 2), то поняття практичної спрямованості навчання математики охоплює всю методичну системі : цілі, зміст, методи, організаційні форми та засоби навчання математики.

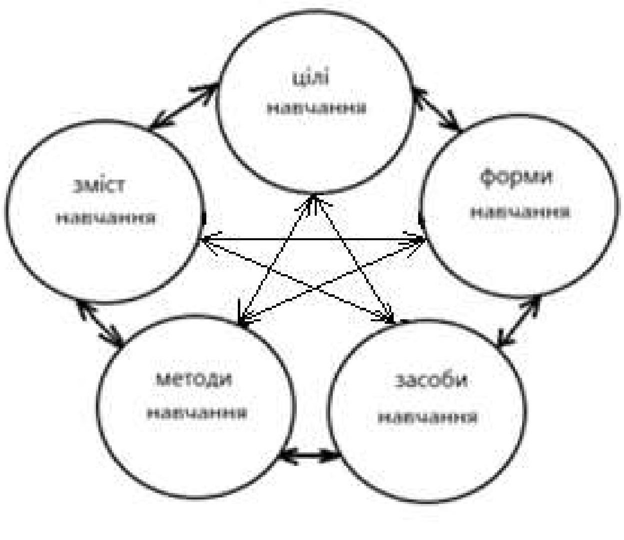


Рис. 2. Методична система навчання математики (за Пишкало А. І.)

Саме такі трактування змісту обох, очевидно різних понять, використовуються нами в наступних розділах підручника. Освітня галузь «Математика» представлена в старшій профільній школі двома навчальними предметами «Алгебра і початки аналізу» та «Стереометрія». Зупинимося детальніше на тлумаченні прикладної спрямованості обох дисциплін, виходячи з викладених вище загальних визначень.

Проекцюючи вище викладені міркування приходимо до наступних трактувань:

1) ***прикладна спрямованість шкільного курсу алгебри і початків аналізу*** – це орієнтація цілей, змісту і засобів навчання даного навчального предмета у напряму: - здійснення цілеспрямованих змістових і методологічних зв’язків алгебри і початків аналізу з практичними потребами реального життя; - набуття учнями під час вивчення даного предмета характерних для математичної діяльності знань, умінь і навичок, які будуть використовуватися ними в повсякденному житті, в майбутній професійній діяльності;

2) ***практична спрямованість навчання шкільного курсу алгебри і початків аналізу*** – це спрямованість цілей, змісту, організаційних форм, засобів та методів навчання даного предмета на розв’язання математичних задач і вправ, зокрема і прикладних притаманними йому алгебраїчними методами та методами математичного аналізу;

3) ***прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії*** – це орієнтація цілей, змісту і засобів навчання даного навчального предмета у напрямку: - здійснення цілеспрямованих змістових і методологічних зв’язків з практичними потребами реального життя; - набуття учнями під час вивчення даного предмета характерних для математичної діяльності знань, умінь і навичок, які будуть використовуватися ними в повсякденному житті, в майбутній професійній діяльності;

4) ***практична спрямованість навчання шкільного курсу стереометрії*** – це спрямованість цілей, змісту, засобів, організаційних форм та методів навчання даного предмета на розв’язання геометричних задач і вправ, зокрема і прикладних притаманних йому геометричними методами.

Давно визнано, що ефективним і потужним методом реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики та реалізації практичної спрямованості навчання обох предметів є – метод математичного моделювання, а дієвим засобом – задачі, особливо, ***прикладні задачі***. Тобто задачі, які виникають поза математикою, але розв’язання яких відбувається із застосуванням математичних знань.

Такі задачі (прикладні) у навчанні математики доцільно використовувати в двох випадках: - ***як доцільні***, (*метод доцільних задач*) які мотивують формування нових математичних знань (введення нових понять, вивчення їх властивостей, побудови нових математичних моделей, способів розв'язання задач тощо); - ***як демонстраційні***, для показу використання отриманих математичних знань в повсякденному житті (у побуті, у вивченні суміжних дисциплін, у майбутній трудовій діяльності тощо). Саме таке використання прикладних задач і рекомендоване нами в розділах 2 і 3 підручника.

2. Методи і засоби реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики

Математичною моделлю називають ідеальний об'єкт *A*, що заміняє реальний об'єкт *B*, у якому відношення між реальними елементами (тими, які цікавлять дослідника) замінені на математичні поняття та відношення між ними. Такі моделі можуть бути у вигляді рівнянь, нерівностей, функцій, геометричних моделей, тощо.

Вони використовуються у багатьох галузях природничих та суспільних наук і поділяються на: *аналітичні, графічні, імітаційні, віртуальні, системні та інші*. В багатьох аналітичних моделях використовують математичні методи, зокрема апарат математичного аналізу, геометрії та інших розділів математики, а в імітаційних – засоби інформатики.

Використання математичних моделей під час розв'язання прикладних задачах – метод дослідження різних реальних процесів і явищ шляхом створення до них математичних моделей, їх аналізом і дослідженням. За допомогою методу математичного моделювання можна замінити досліджуваний об'єкт на його «образ» – математичну модель – і, завдяки цьому, досліджувати та аналізувати створену математичну модель на підставі аналітичних методів та обчислювальних алгоритмів.

Для того, щоб успішно розв'язати прикладну задачу, потрібно чітко знати сам процес математичного моделювання, його етапи. Розглянемо схематично цей процес і його етапи, як пропонують В. Блум та Д. Лейс [82]:

1. Уважно вивчаємо та аналізуємо **реальну ситуацію**, яку запропоновано (яка виникла, яка потребує дослідження).
2. Осмислюємо та представляємо наведені дані у **ситуативну модель**, тобто створюємо в уяві ситуацію, за якої можливе, за наявності вказаних умов, виконання всіх зазначених вимог.
3. Виділяємо найголовніше з уявлюваної ситуації і таким чином вибудовуємо можливу **реальну модель** задачі.

4. Перекладаємо задачу з реальної (природної) мови галузі, де вона виникла, на мову математики, тобто створюємо можливу **математичну модель** задачі.
5. Досліджуємо дану математичну модель, використовуючи відомі знання з математики, отримуємо **(розв'язок) результати**.
6. Перекладаємо розв'язок математичної задачі з мови математики на мову галузі, де вона виникла, тобто **інтерпретуємо отримані результати в реальну модель задачі**, та перевіряємо чи всі вони задовольняють її.
7. Аналізуємо та співставляємо отримані результати з уявною ситуацією, тобто **перевіряємо результати на реальність існування**.
8. Пояснюємо та робимо **висновки щодо можливості існування** знайдених розв'язків у реальній ситуації. Ці етапи представлено нами у вигляді графічної схеми (рис. 3).

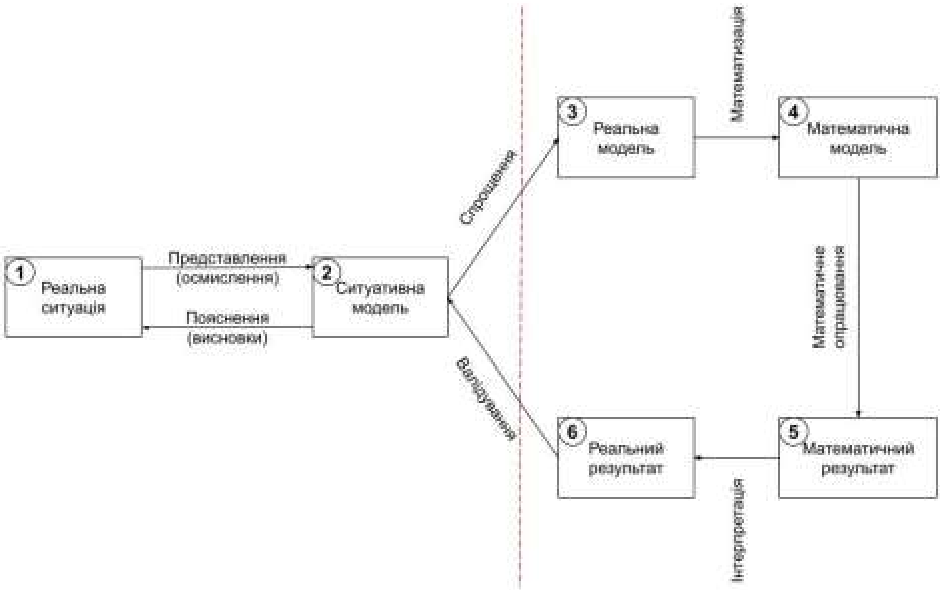


Рис. 3. Графічна схема процесу математичного моделювання (велике коло) (за В. Блумом і Д. Лейсом)

Запропонована графічна схема (рис. 3) притаманна процесу математичного моделювання в його повному і завершеному обсязі (*ми називаємо її великим колом*). Очевидно, що в такому вигляді її реалізувати під час навчання учнів математики неможливо в силу різних причин. Тому вважаємо, що у шкільному курсі алгебри і початків аналізу та стереометрії з учнями слід використовувати ***спрощену схему***, в якій представлені лише пункти 3-6 (рис. 4). Згідно цієї, урізаної схеми, готову реальну модель потрібно «перекласти» на математичну мову, після чого розв’язати отриману математичну задачу і перевірити на правильність та існування знайдені розв’язки, оскільки отримані розв’язки можуть бути і сторонніми. Інтерпретувати розв’язки математичної задачі як розв’язки прикладної. Наприклад, у задачах, де потрібно знайти кількість років, відповідь не може бути від’ємним числом.

Повну схему (*велике коло*) математичного моделювання, на наш погляд, корисно розглядати з учнями або на факультативних заняттях або під час виконування навчальних проєктів.

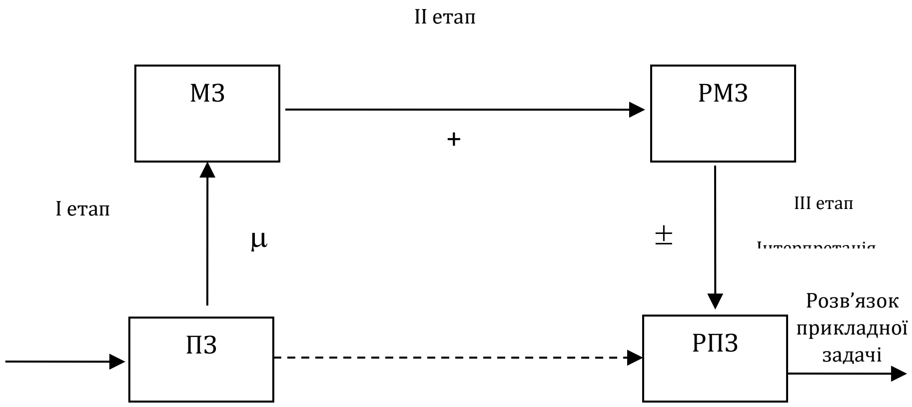


Рис. 4. Урізана графічна схема процесу математичного моделювання (*мале коло*) (*запропонована нами*)

Пояснення позначок на схемі:

ПЗ – прикладна задача;

МЗ – математична задача;

РМЗ – розв’язки математичної задачі;

РПЗ – розв’язки прикладної задачі;

∓ – дуже слабо володіють навичками;

\+ – добре володіють навичками;

± – навички сформовано недостатньо.

Спеціальні дослідження, які проводилися нами у 2009-2010 роках, показали, що з понад 1 600 випускників середньої школи, які вступали на навчання до НПУ імені М. П. Драгоманова (фізико-математичний факультет, факультет початкової освіти, факультет педагогічно-інженерний) найбільші труднощі в учнів виникали саме на етапі перетворення прикладної задачі з природної мови на мову математики, тобто створення відповідної математичної моделі (на схемах цей етап називається математизацією). Не справилися з таким завданням майже 70 % респондентів. Якщо ж учням запропонувати готову математичну модель (рівняння, систему рівнянь тощо) то з її розв'язанням більшість справляється на належному рівні. Таке завдання виконали правильно 75 % вступників. Подальші труднощі виникали на етапі інтерпретації розв'язку математичної задачі до розв'язку прикладної. Не справились з таким завданням майже половина респондентів.

Отже, на цьому етапі важливо також вчити учнів відшукувати правильні розв'язки та вміти пояснювати, чому в деяких випадках розв'язки математичної моделі будуть відрізнятися від розв'язку прикладної. Розв'язання прикладних задач на уроках математики потребує від вчителя особливої уваги та концентрації. Для організації ефективної роботи по формуванню в учнів вмінь і навичок математичного моделювання доцільно виокремити такі етапи, до кожного з яких варто використовувати *наступні прийоми*:

І етап: Створення математичної моделі (математизація)

- використати евристичні, навідні, орієнтовані на правильну відповідь (питання), чітко виокремити вимогу (вимоги);
- відділити властивості об'єктів прикладної задачі та умови її виконання (умови), які є неістотними для побудови математичної моделі і зосередитися на істотних, встановити характер залежностей між даними в умові задачі величинами;
- допомогти учням виділити та вказати відмінності між об'єктом та його моделлю;
- сформулювати умову задачі на математичній мові.

ІІ етап: Дослідження математичної моделі (математичне опрацювання)

- використати (за необхідності) додаткові теоретичні відомості та наукові джерела;
- зробити ілюстративні графіки чи ескізи, які можуть допомогти у пошуку розв'язку (за необхідності);
- якщо потрібно, то навести учням приклади схожих ситуацій;
- довести знайдений розв'язок до числового значення або розрахункової формули.

ІІІ етап: Відбір розв'язків прикладної задачі (інтерпретація)

- враховуючи область можливих значень для прикладної задачі, здійснити перевірку та відібрати правильні розв'язки;
- за необхідності, оцінити ступінь точності розв'язку.

Для розв'язання прикладних задач економічного, фінансового, природничого та іншого змісту можуть знадобитися додаткові матеріали та знання. В такому разі доцільно не повідомляти учням необхідний додатковий матеріал (формули, визначення тощо), а надати можливість самим проаналізувати та знайти потрібний матеріал в довідниках і застосувати отримані відомості. В цьому можуть допомогти спеціально підготовлені запитання або ж приклади схожих ситуацій. На таких уроках учні будуть зацікавлені роботою та пошуком розв'язання, їх активність та розуміння пройденого матеріалу, за допомогою закріплення його практичним використанням, буде зростати.

3. Приклади і методичні поради до розв'язання прикладних задач

Проілюструємо вище сказане на прикладі розв'язання кількох конкретних задач.

Задача 1. *Компанії «Омега» і «Тета» пропонують на біржі однакові партії однотипних автомобілів за різними цінами. Якщо компанія «Омега» продасть на 2, а компанія «Тета» на 3 автомобілі менше пропонованої кількості, то перша заробить 112 тис.год, а друга – 135 тис.год. Якщо ж, навпаки, компанія «Омега» продасть на 3 автомобілі, а компанія «Тета» – на 2 автомобілі менше пропонованої кількості, то компанія «Омега» заробить на 32 тис.год менше, ніж компанія «Тета». Який виторг від реалізації компаніями «Тета» і «Омега» усіх автомобілів? Скільки автомобілів збирається реалізувати кожна з компаній?*

Розв'язання

І етап Створення математичної моделі (математизація)

З умови задачі можна зробити висновок, що кількість автомобілів, які реалізувала кожна з компаній, однакова, але невідома. Отже, їх можна виразити через змінні: позначимо змінною x кількість реалізованих кожного компанією автомобілів. Тоді змінною y можна позначити ціну одного автомобіля з компанії «Омега», а змінною z – ціну автомобіля компанії «Тета». Оскільки кількість автомобілів та ціна кожної одиниці з них будуть натуральними числами, то робимо висновок, що змінні $x,\ y$ та z – натуральні числа.

Користуючись залежністю між кількістю товару (к), ціною (ц) і вартістю (в) (формулою В = к · ц) будуємо математичну модель. Отримуємо систему рівнянь – математичну модель прикладної задачі, вимога якої – знайти розв'язки системи.

$$\begin{cases} (x-2)y = 112, \\ (x-3)z = 135, \\ (x-2)z-(x-3)y = 32 \end{cases}$$

ІІ етап Дослідження математичної моделі (математичне опрацювання)

Розв'язуємо дану систему рівнянь, використовуючи знання з алгебри. Виразивши з першого рівняння $(x-2)$ через y, а з другого рівняння $(x-3)$ через z і підставивши у третє маємо: $112\frac{z}{y}-135\frac{y}{z}=32;$

Домножимо обидві сторони рівняння на $\frac{z}{y}$. Отримуємо рівняння:

$112(\frac{z}{y})^2 - 32\frac{z}{y} - 135 = 0.$

Позначивши $\frac{z}{y}$ через k, і зауважимо, що $k > 0$, отримуємо квадратне рівняння.

Розв'язуємо його: $112k^2 - 32k - 135 = 0;$

$D = 1024 + 60480 = 61504: \sqrt{D} = 248.$

Коренями рівняння будуть числа:

$$k_1 = \frac{32 + 248}{224} = \frac{280}{224} = \frac{5}{4};$$

$$k_2 = \frac{32 - 248}{224} = -\frac{216}{224} - \text{оскільки } k_2 - \text{від'мне число, то відкидаємо його.}$$

Далі повертаємось до заміни: $k = \frac{z}{y}$. Величина дробу $\frac{z}{y} = \frac{5}{4}$.

Але цю величину (як дріб) можна записати у вигляді $\frac{10}{8}, \frac{15}{12}, \frac{20}{16}, \frac{25}{24}$ ...

Щоб з'ясувати, які значення можуть приймати змінні z і y, перевіримо, які з пар (5; 4), (10; 8), (15; 12), (20; 16)… будуть задовольняти систему рівнянь:

$$\begin{cases}(x-2)y = 112,\\ (x-3)z = 135\end{cases}$$

З рівняння першого бачимо, що $x > 2$, а з другого, що $x > 3$.

Розкладемо числа 112 і 135 на множники. Число $112 = 4 \cdot 28 = 8 \cdot 14 = 16 \cdot 7$.

Звідки слідує висновок, що множник *y* не більший за 28.

Число $135 = 5 \cdot 27 = 9 \cdot 15 = 27 \cdot 15$.

Звідки слідує висновок, що множник z не більший за 27.

Такий аналіз вказує на те, що слід перевірити лише пари:

(5; 4); (10; 8); (15;12); (20; 16); (25; 20).

Отже, перевіряємо:

1) Пара (5; 4): – перше рівняння: $(x-2)y = 112;\ (x-2) \cdot 4 = 112;$

$$x - 2 = 28; x = 30.$$

– друге рівняння: $(x-3)z = 135;\ (x-3) \cdot 5 = 135;$

$$x - 3 = 27;\ x = 30.$$

Значення $z = 5, y = 4, x = 30$ – натуральні числа, розв'язки системи.

2) Пара (10; 8): – перше рівняння: $(x-2)y = 112;\ (x-2) * 8 = 112;$

$$x - 2 = 14; x = 16.$$

– друге рівняння: $(x-3)z = 135;\ (x-3) \cdot 10 = 135;$

$$x - 3 = 13{,}5;\ x = 16{,}5.$$

Змінна x не натуральне число. Отже, пара (10; 8) не є розв'язком системи.

3) Пара (15; 12): – перше рівняння: $(x-2)y = 112;\ (x-2)*12 = 112;$

$$x-2 = \frac{112}{12};\ x = 11\frac{1}{3}.$$

$x = 11\frac{1}{3}$ – не натуральне число. Отже, пара (15; 12) не є розв'язком системи.

4) Пара (20; 16): – перше рівняння: $(x-2)y = 112;\ (x-2)\cdot 16 = 112;$

$$x-2 = 7;\ x = 9.$$

– друге рівняння: $(x-3)z = 135;\ (x-3)\cdot 20 = 135;$

$$x-3 = 6{,}75;\ x = 9{,}75.$$

Змінна x – не натуральне число. Отже пара (10; 8) не є розв'язком системи.

5) Пара (25; 20): – перше рівняння: $(x-2)y = 112;\ (x-2)\cdot 20 = 112;$

$$x-2 = 5{,}6;\ x = 7{,}6.$$

$x = 7{,}6$ – не натуральне число. Отже, пара (25; 20) не є розв'язком системи.

Таким чином, встановлюємо, що розв'язком системи рівнянь будуть числа:

$x = 30, y = 4, z = 5.$

III етап Відбір розв'язків прикладної задачі (інтерпретація)

Виходячи з умови прикладної задачі маємо, що вартість одного автомобіля компанії «Тета» становить 5 тис. год, а одного автомобіля компанії «Омега» – 4 тис. год.

Кількість автомобілів, які збирається реалізувати кожна з компаній $x = 30$.

Отже, компанії збираються продати по 30 автомобілів кожна.

Знаходимо можливий виторг кожної з компаній:

$$5\cdot 30 = 150(\text{тис. грош. од.}) - \text{виторг компанії "Тета"};$$

$$4\cdot 30 = 120(\text{тис. грош. од.}) - \text{виторг компанії "Омега"}.$$

Формуємо відповідь до прикладної задачі.

Відповідь: компанії збираються реалізувати по 30 автомобілів кожна; можливий виторг компанії «Тета» становитиме 150 тис. грош.од., а компанії «Омега» 120 тис. грош.од.

Задача 2. *Бокал у вигляді конуса до країв наповнено соком. Петро хоче поділитися цим соком з Яном. Він перелив в інший, такий самий, бокал сік так, що у першому бокалі соку залишилося $\frac{3}{4}$ від попередньої висоти. У якому бокалі більше соку ? Відповідь обґрунтувати.*

Розв'язання

1. Створення математичної моделі задачі пропонуємо подати для учнів на екрані комп'ютера або на інтерактивній дошці. Можлива очікувана бесіда.

- *Що означає фраза «в якому бокалі більше соку»*?

Це означає – де більший об'єм. Тобто, об'єм якого тіла є більшим.

- *Об'єми яких тіл порівнюють*?

Двох конусів.

- *Що можна сказати про об'єм другого конуса*?

Він такий самий, як і об'єм зрізаного конуса, який утворюється якщо паралельно основі конуса на відстані $\frac{3}{4}H$ провести площину.

- *Площину проводять, відраховуючи відстань від чого*?

Від вершини, оскільки бокал – це ніби «перевернутий» конус.

- *Отже, можна говорити, що порівнюють об'єм конуса та об'єм зрізаного конуса. Тоді, як можна сформулювали умову та вимогу задачі, якщо позначити висоту бокала Н*?

Задача «Дано конус із висотою *Н*. На відстані $\frac{3}{4}H$ від вершини конуса провели переріз конуса площиною паралельно до основи. Порівняти об'єми утворених тіл – конуса та зрізаного конуса».

Умову математичної задачі, короткий запис із відповідними малюнками можна подати на екрані комп'ютера.

Зауважимо, що із розв'язуванням цієї задачі не всі учні можуть упоратися, оскільки їм «заважає» майже повна відсутність числових даних в умові. Зокрема, про розміри бокалу. Тому її доцільно розв'язувати колективно із повним записом розв'язання на дошці.

2. Розв'язання задачі всередині побудованої моделі.

1) Нехай $KO = EQ = r$, $MD = R$, очевидно, що $R > r$, $SO = \frac{3}{4}H$, $OQ = \frac{1}{4}H$, V_1 і V_2 – об'єми конуса та зрізаного конуса відповідно.

2) Обчислимо об'єми конусів.

$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{3}{4}H = \frac{\pi r^2 H}{4}$.

$V_2 = \frac{1}{3}\pi \frac{1}{4}H(r^2 + rR + R^2) = \frac{\pi H(r^2+rR+R^2)}{12}$.

3. Порівняємо ці об'єми. Якщо $V_2 > V_1$, тоді $\frac{\pi H(r^2+rR+R^2)}{12} - \frac{\pi r^2 H}{4} > 0$.

Доведемо. Справді, помноживши обидві сторони нерівності на $\frac{12}{\pi H}$, отримаємо рівносильну нерівність $r^2 + rR + R^2 - 3r^2 > 0$.

$$r^2 + rR + R^2 - 3r^2 = -2r^2 + rR + R^2 = (R^2 - 2rR + r^2) - 3r^2 + 3rR =$$
$$= (R - r)^2 + 3r(R - r) = (R - r)(R - r + 3r) = (R - r)(R + 2r).$$

Оскільки $R > r$, $R > 0$, $r > 0$, то $(R - r)(R + 2r) > 0$. А це означає, що $V_2 > V_1$.

Відповідь: об’єм зрізаного конуса більший за об’єм конуса з вершиною S.

Інтерпретація отриманого розв’язку. Отже, у Петрика соку залишилося менше, ніж у Яна.

Задача 3. Нехай популяція бактерій в момент часу t (час в секундах) нараховує $x(t)$ особин: $x(t) = 3000 + 100t^2$. Ця формула виражає залежність кількості особин від часу. Знайти швидкість росту популяції: а) в момент часу 1 с; б) в момент часу 60 с.

Розв’язання

1. Створення математичної моделі до задачі (*математизація*)
Розв’язання даної задачі передбачає розуміння поняття ***популяція***, тому перед створенням математичної моделі до задачі, варто учням наголосити на цьому: ***Популяція*** – це сукупність організмів одного виду, що займають обмежений ареал (територія поширення якогось об’єкта або явища), мають спільне походження за фенотипом та географічно ізольовані від інших популяцій даного виду, можуть вільно схрещуватися і дають плодюче потомство. В умові задачі задано функцію росту популяції залежно від часу , яка має наступний вигляд: $x(t) = 3000 + 100t^2$, де x – кількість особин, що виражається додатнім числом. Перекладаючи вимогу запропонованої задачі на мову математики, отримуємо математичну задачу: **визначити похідну функції $\boldsymbol{x(t) = 3000 + 100t^2}$ в точці $\boldsymbol{t = 1}$ та $\boldsymbol{t = 60}$**.
2. Хід розв’язання математичної задачі (*математичне опрацювання*)
Знаходимо похідну $X'(t)$ від заданої функції: $X'(t) = (3000 + 100t^2)' = 200t.$ Отже, маємо $X'(t) = 200t$ – швидкість росту популяції. Знаходимо значення похідної $X'(t)$ при $t = 1$ та $t = 60$: а) $X'(1) = 200 \cdot 1 = 200$ – швидкість росту популяції через 1 с; б) $X'(60) = 200 \cdot 60 = 1200$ – швидкість росту популяції через 60 с. *Розв’язання математичної задачі завершене.*
3. Інтерпретація розв’язків математичної задачі мовою біології (*інтерпретація*)
Отже, швидкість росту популяції в момент часу $t = 1$ становить 200 ос/с; а в момент часу $t = 60$ – 1200 ос/с.
Відповідь: а) 200 ос/с; 1200 ос/с.

Задача 4. Число *N* бактерій у деякій біомасі змінюється за законом

$N(t) = 450 + 52t + t^2$.

Скільки бактерій було в біомасі у початковій момент $t = 0$?

Яка швидкість приросту числа бактерій в момент часу 3,5 хв?

Розв'язання

1. Створення математичної моделі до задачі
Ознайомившись з умовою задачі, маємо функцію кількості бактерій, що виражена наступним чином: $N(t) = 450 + 52t + t^2$, де N – кількість бактерій, що виражається додатним числом. Зрозуміло, що у початковий момент часу $t = 0$ у біомасі було 450 бактерій. Оскільки швидкість приросту числа бактерій є похідною від чисельності популяції, тобто $v(t) = N'(t)$, то для відповіді на друге питання використаємо правило знаходження похідної. 1) Надамо t приросту Δt. 2) Знайдемо приріст залежної змінної ΔN: $\Delta N = N(t + \Delta t) - N(t) = 450 + 52(t + \Delta t) + 2(t + \Delta t^2) - (450 + 52t + 2\Delta t^2)$ $= 52\Delta t + 4t\Delta t + 2(\Delta t)^2 = \Delta t(52 + 4t + 2\Delta t)$ 3) Складемо відношення $\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} : \frac{\Delta N}{\Delta t} = 52 + 4t + 2\Delta t.$ Для того, щоб знайти швидкість приросту числа бактерій в момент часу t, необхідно знайти границю цього відношення. Отже, маємо математичну задачу: **знайти границю відношення** $\lim\limits_{\Delta t \to 0}(52 + 4t + 2\Delta t)$ **в момент часу $t = 3,5$ хв.**
2. Хід розв'язання математичної задачі
1) Знайдемо границю відношення, якщо $\Delta x \to 0$: $\lim\limits_{\Delta t \to 0}(52 + 4t + 2\Delta t) = 52 + 4t.$ 1) Знайдемо швидкість приросту числа бактерій при $t = 3{,}5$ хв. $N(3{,}5) = 52 + 4 \cdot 3{,}5 = 52 + 14 = 66$ (бакт./хв). *Розв'язання математичної задачі завершене.*
3. Інтерпретація розв'язків математичної задачі мовою біології
Отже, швидкість приросту числа бактерій в момент часу $t = 3{,}5$ хв становить 66 бакт./хв.
Відповідь: 450 бактерій, 66 бакт./хв.

Задача 5. Реакції організму на два види ліків як функції часу t (час виражено у годинах) складають $r_1(t) = te^{-t}$ та $r_2(t) = t^2e^{-t}$. У якого виду ліків максимальна реакція вища? Ліки якого виду діють повільніше?

Розв'язання

1. Створення математичної моделі до задачі
Після ознайомлення з умовою задачі та перекладаючи її на мову математики, ми маємо усвідомити, що розв'язання даної задачі зводиться до **відшукання максимумів функцій $\boldsymbol{r_1(t) = te^{-t}}$ та $\boldsymbol{r_2(t) = t^2e^{-t}}$.**
2. Хід розв'язання математичної задачі
Перш за все, продиференціюємо функції $r_1(t)$ та $r_2(t)$, що визначені та неперервні на проміжку $(0;\ \infty)$ і розв'язавши рівняння $(1-t)e^{-t} = 0$ і $(2-t)te^{-t} = 0$, з'ясуємо, що ці функції на вказаному проміжку мають такі стаціонарні точки $t_1 = 0$, $t_2 = 2, t_3 = 0$. Оскільки час $t > 0$, то на всій області визначення кожна функція має єдину стаціонарну точку $t_1 = 1$, $t_2 = 2$. При переході через стаціонару точку знак похідної змінюється з «+» на «-». Отже, на підставі достатньої умови існування екстремуму в точці робимо висновок, що точка $t_1 = 1$ є точкою максимуму функції $r_1(t)$, а точка $t_2 = 2$ є точкою максимуму функції $r_2(t)$. Знайдемо максимуми функцій $r_1(t)$ та $r_2(t)$: $r_1(1) = \frac{1}{e} \approx 0{,}37;$ $r_2(2) = \dfrac{4}{e^2} \approx 0{,}54.$ *Розв'язання математичної задачі завершене.*
3. Інтерпретація розв'язків математичної задачі мовою біології
Отже, знайшовши максимуми функції $r_1(1) = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$ та $r_2(2) = \frac{4}{e^2} \approx 0{,}54$, можна зробити висновок, що у другого виду ліків максимальна реакція вища і вони діють повільніше.
Відповідь: у другого виду ліків максимальна реакція вища і вони діють повільніше.

З розв'язанням задач 3-5 учні мають змогу переконатись, що застосування похідної не вичерпується лише фізико-математичними дисциплінами. Похідна має тісний зв'язок з біологією, медициною, хімією, екологією, економікою, тощо. Так, наприклад, в біології, похідна виступає як швидкість зміни чисельності популяції. Завдяки математичному апарату ми можемо пояснювати ті чи інші біологічні залежності та разом з тим формувати в учнів, як математичні, так і біологічні компетентності.

Задача 6. Повітря, яке знаходиться в циліндрі з поршнем стискають так, що тиск збільшується зі швидкістю 100 Па/с, а об'єм зменшується зі швидкістю $0{,}0001\ \text{м}^3/\text{с}$. Визначте, з якою швидкістю змінюється температура *T* в той момент, коли $T = 1{,}5 \cdot 10^5$ Па, $V = 0{,}02\ \text{м}^3$, $T = 400\ \text{К}$. Повітря вважати ідеальним газом.

Дана прикладна задача є засобом здійснення міжпредметних зав'язків. Оскільки вона має фізичний зміст, то для того щоб полегшити побудову математичної моделі слід записати її умову коротко, так як це прийнято для фізичних задач. Виходячи з того, що швидкість зміни функції це її похідна, маємо:

$P = 1{,}5 \cdot 10^5$ Па
$P = 10^3\ \frac{\text{Па}}{\text{с}}$
$V = 0{,}02\ \text{м}^3$
$V' = -10^{-4}\ \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$
$T = 400$ К
T – ?

Розв'язання

1 етап (*математизація*)
Математичною моделлю даної задачі є відоме зі шкільного курсу фізики рівняння стану ідеального газу (закон Менделєєва-Клапейрона), яке пов'язує три величини прикладної задачі: P – тиск, V – об'єм, T – температуру та дві сталі: v – кількість речовини (для даної задачі $v = const$), R – універсальну газову сталу: $PV = v\,RT$ (1) Аналіз умови задачі приводить до висновку, що решта величин задачі є похідними від P, V, T. Для введення решти величин з умови задачі необхідно продиференціювати рівняння (1).
2 етап (*математичне опрацювання*)
Продиференціюємо обидві частині рівняння (1). Одержимо: $P'V + PV' = vRT'$ (2) Розділивши (2) на (1) дістанемо : $\frac{P'}{P} + \frac{V'}{V} = \frac{T'}{T}$. Підставимо відомі величини: $\frac{10^3}{1{,}5 \cdot 10^5} - \frac{10^{-4}}{2 \cdot 10^{-2}} = \frac{T'}{400}$. Звідки $T' = \frac{40}{15} - 2 \approx 0{,}67$ (К/с).
3 етап (*інтерпретація*)
Отже, температура газу підвищується зі швидкістю $0{,}67$ (К/с).
Відповідь: $0{,}67$ К/с.

Тематика прикладних задач може бути дуже різноманітна.

Вчителю бажано мати їх добірку до кожної з тем.

П І Д С У М О К

Реалізація прикладної спрямованості шкільного курсу математики має стати пріоритетною ціллю навчання алгебри і початків аналізу та стереометрії в старшій профільній школі. Дієвим методом для досягнення поставленої мети слід обирати метод математичного моделювання, а ефективним засобом – прикладні задачі з математики, які слід використовувати як доцільні, тобто ті, що вмотивовують вивчення нових математичних знань, так і демонстраційні, тобто ті, що «розкривають учням очі на навколишній світ крізь математичні окуляри».

Добірки таких задач та методика їх розв'язання мають бути створені до кожної з навчальних тем алгебри і початків аналізу та стереометрії. Використання прикладних задач є необхідним, можливим і доцільним з багатьох причин. На прикладах їх розв'язання учням стає і цікаво, і більш вмотивовано вивчати математику. Задач має бути достатня кількість. Вони корисні для всіх учнів, і, зокрема, для тих, які планують вступати до вишу.

МЕТОДИЧНІ ЗАДАЧІ
для самостійного розв'язування

1. Проаналізувати діючі альтернативні підручники з алгебри і початків аналізу та стереометрії на предмет наявності в них прикладних задач з математики. З'ясуйте: а) яких галузей знань стосується сюжети задач; б) які найчастіше математичні моделі застосовуються для їх розв'язання; в) які методичні рекомендації пропонують автори підручників щодо навчання учнів розв'язуванню таких задач.
2. Проаналізуйте навчальну програму з математики профільного рівня і з'ясуйте, як в цілях навчання відображені вимоги щодо реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики.
3. Розв'яжіть прикладні задачі.
   а) Кількість речовини *x(t),* яка утворюється в деяких хімічних реакціях за час *t,* визначається формулою $x(t) = a(1 - e^{-kt})$. Знайти швидкість реакції.
   б) Розмір популяції бактерій в момент часу *t* (в год.) задається формулою $p(t) = 3000 + 100t^2$. Знайти швидкість росту популяції в момент $t = 5$.
   в) Епідемія повільно розповсюджується серед населення. Кількість хворих визначається формулою $A(t) = 200(t^{\frac{5}{2}} + t^2)$, де *t* – кількість тижнів, які пройшли з моменту початку епідемії.
   Знайти швидкість зміни кількості хворих в момент часу: *t = 1, t = 4, t = 9.*
   г) Профіль підйому гірської дороги має форму кривої $y = \frac{x}{1+x^2}$.
   Визначити кут нахилу підйому на його початку.
   д) Дріжджі ростуть у цукровому розчині так, що їх маса збільшується на 3 % за кожну годину. Визначте масу дріжджів через *t* годин, якщо її початкове значення дорівнює 1 г. Знайдіть швидкість зміни маси при: *t =1 год, t=2 год, t=5 год.*

Предмет математики такий серйозний, що корисно не нехтувати нагодою робити його трохи цікавим
Б. Паскаль

Л Е К Ц І Я 1.3

Т Е М А ***Психолого-дидактичні особливості навчання математики в старшій профільній школі***

П Л А Н

1.	***Психологічні особливості школярів юнацького віку і їх врахування під час навчання математики***
2.	***Дидактичні основи навчання математики учнів старшої профільної школи***
3.	***Методичні рекомендації щодо навчання математики учнів старшої профільної школи***

К О Н С П Е К Т Л Е К Ц І Ї

1. Психологічні особливості школярів юнацького віку і їх врахування під час навчання математики

Підрахунки показують, що в старшій профільній школі навчаються діти віком 15-18 років, тобто особи *юнацького віку*. Це період життя суб'єкта між підлітковим і дорослістю, який багато психологів визначають в межах 16-20 років для юнаків і 15-20 років для дівчат. Він досить виразно корелює з проблемою вибору майбутньої професії, самоактуалізації, проблемою вибору майбутньої професії, самоутвердження особи. У юнацькому віці стає помітним інтенсивний фізіологічний та психічний розвиток, спостерігається прискорення першого та певне відставання морального розвитку. У зв'язку з чим особливого значення набуває моральне виховання, якому і психологи, і педагоги рекомендують приділяти велику увагу.

Основним видом діяльності юнаків і юнок стає навчання і посильна праця, збільшується діапазон їх соціальних ролей (отримання паспорта, участь у виборах, участь у роботі громадянських організацій і т. і.). Ушинський К. Д. зазначав, що у юнацькому віці необхідно дбати «щоб матеріал, який в цей час вливається в душу юнака, був доброї якості».

Особи юнацького віку прагнуть завоювати авторитет серед своїх однолітків, для них їх оцінки скоєним вчинкам та діям є найавторитетнішими у порівнянні навіть з оцінками батьків та вчителів. Діапазон інтересів юної особи стає більш чіткішим за змістом і за їх межами. Відповідальні і складні завдання, які вирішуються юними особами, можуть призвести до гострих внутрішніх конфліктів і глибоких переживань, різних відхилень у поведінці від прийнятих у суспільстві норм.

Зрозуміло, що вчитель математики, навчаючи учнів старшої профільної школи своєму предмету не може не враховувати названі особливості.

У житті людини багато психологів виділяють наступні важливі тенденції: 1) задоволення життєвих потреб; 2) адаптивне самозбереження (адаптація до умов середовища); 3) творча експансія; 4) встановлення внутрішньої гармонії «Я» (прагнення до внутрішнього ладу).

Провідним мотивом виступає потреба у самоздійсненні або самовизначенні (всебічна реалізація самого себе). На цій основі німецький психолог Ш. Бюлер виділив п’ять фаз життя. Друга з яких приманна життю особи юнацького віку. ***Вона є періодом спроб***. Самовизначення має дифузний характер, особа пробує себе в різних сферах діяльності, налагоджує стосунки з особами протилежної статі. Особливістю внутрішнього світу молодої людини в цей період є прогнозування можливих шляхів подальшого життя.

На життєвому шляху кожного індивіда підстерігають різні вікові кризи. Американський психолог Е. Ерксон виділив вісім стадій психосоціального розвитку особи (від народження і до зрілості), п’ятою з яких є отроцтво і юність (приблизно від 12 до 18 років). У цьому віці наступає ***юнацька криза***, пов’язана з процесом входження індивіда у самостійне життя. Амбітність та величність планів притаманних юним особам, входять у конфлікт з обмеженістю можливостей. Предметом конфлікту є питання: «*Хто я? Які мої переконання, погляди та позиції?»*, а наслідками стають юнацький нігілізм, неприйняття встановлених норм і правил поведінки, яскраво виражений максималізм, категоризм, поява бар’єру між вчителем і учнем і т. п. Засобами подолання кризових явищ є вдумлива і наполеглива робота батьків та вчителів по формуванню в юнаків і юнок нормативно-ціннісної сфери, ідеалів, активної творчої, життєвої позиції, особистісної досконалості.

Часті проблеми в юнацькому віці створює обдарованість особи: неприязнь до школи, специфіка ігрових інтересів, нонконформізм, заглиблення у філософські проблеми, невідповідність між фізичним, інтелектуальним та соціальним розвитком, нереалістичність ідей, надчутливість, потреба в увазі дорослих, нетерпимість та ін.

Обдаровані діти можуть з нетерпінням ставитися до тих дітей, що поступаються їм в інтелектуальному розвитку. Вони можуть відштовхувати від себе оточуючих своїми зауваженнями, що виражають презирство або нетерплячість. Все це треба мати на увазі вчителю, який навчає математики учнів старшої профільної школи, долучається до процесу формування їх особливості.

У формуванні особистості психологи виділяють наступні послідовні стадії: досоціальна (немовлятство), *імпульсивна* (раннє дитинство), *самозахисна* (раннє дитинство), *конформістська* (дитинство-отроцтво), *свідома* (отроцтво-юність), *автономна* (юність-дорослість), *інтеграційна* (дорослість).

Як бачимо, на юнацький вік, припадає ***свідома стадія***, яка характеризується початком рефлективного мислення, залежністю моральних суджень від контексту ситуації. Про свої власні особливості, досягнення та ідеали індивід виносить судження, виходячи з власних принципів та суджень і норм ровесників та авторитетних для нього осіб. У нього з'являється здатність до самокритики. Важливо, щоб на цій стадії вчитель став для учня авторитетом, професіоналом у своїй справі, мудрим порадником.

Бурхливий розвиток і поширення комп'ютерних технологій (в основі яких лежить цифровий способі передачі сигналів) привів до появи нових термінів з різноманітних сфер людської діяльності, які набули характеристики «цифровий». Так, наприклад, у другій половині XX ст. заговорили про цифрову фізику, у 1995 р. з'явився термін «цифрова економіка», а в останні роки все частіше вживається словосполучення «цифрова педагогіка». Цифрова техніка, зв'язок, валюта стали звичними поняттями для сучасної людини, зокрема, для юнаків та юнок. Таким чином, покоління дітей, народжених наприкінці 1990-х років та пізніше, з раннього дитинства опинилися в умовах цифрового, комп'ютерно-орієнтованого, мобільного і часто віртуального середовища. Не дивно, що таке покоління теж називають цифровим. А ще – поколінням *Z*, центеніалами, цифровими аборигенами та художниками.

У 1990-х роках минулого століття американськими вченими В. Штраусом та Н. Хоувом була розроблена і презентувалась широкому загалу так звана «теорія поколінь». Відповідно до цієї теорії, кожному поколінню притаманний певний тип поведінки та цінності, які залежать від умов соціуму, в яких росла і виховувалась особа. Встановлено, що модель поведінки покоління повторюється циклічно: кожне п'яте покоління за своїми цінностями та психологічними особливостями в деякій мірі схоже на перше. Усього було виділено 4 такі моделі – «Пророк», «Мандрівник», «Герой», «Художник». Представники покоління *Z* – «художники», хоч і нагадують «художників» 1925-1942 рр. (так зване «мовчазне покоління»), однак відрізняються від них принципово новим типом мислення та способом сприйняття повідомлень.

Сучасні діти досить рано занурюються в Інтернет-простір. Якщо раніше розвиток когнітивних процесів, емоційно-вольової сфери та інших психічних та психологічних особливостей відбувався через живе спілкування, то тепер саме онлайн середовище має переважаючий вплив на ці процеси. Тому традиційне навчання у школі може давати невисокі результати через ігнорування психологічних особливостей цифрових учнів. За спостереженнями психологів, сучасні учні (центеніали):

- краще сприймають інформацію, яка подана невеликими порціями та з перервами («кліпове мислення»);
- не розуміють складно представлений матеріал, не можуть засвоювати великі обсяги інформації;
- залюбки працюють із шаблонами;
- мають переважно візуальний тип сприйняття інформації;
- гарно мотивуються через елементи гри у навчанні (на відміну від попереднього покоління, для якого пріоритетною була конкуренція серед однолітків), швидко відволікаються, якщо такого елементу немає;
- мають слабкі механізми саморегуляції (контроль, моделювання, оцінка) та, як наслідок, неспроможні самостійно шукати рішення, організовувати час для навчання, розподіляти часові та психічні ресурси в процесі навчання;
- відрізняються низьким рівнем відповідальності та високим рівнем самовпевненості;
- мають нерозвинуті комунікативні навички, не вміють говорити та виступати зі структурованими доповідями;
- є яскраво вираженими індивідуалістами, мають значний інтелектуальний потенціал;
- легко орієнтуються в інформаційних ресурсах;
- багато часу витрачають на соціальні мережі, тому з ентузіазмом ставляться до можливості публікувати результати власного навчання;
- понад усе цінують моральний та фізичний комфорт навчального середовища.

Викладені вище особливості, їх врахування під час навчання математики учнів старшої профільної школи приводять до дотримання вчителем математики таких важливий, на наш погляд, порад:

1) Шляхом вивчення успішності учня за попередні роки, результатів тестування, бесіди ***з’ясувати*** рівень навченості і научуваності кожного учня класу; рівень інтелектуального розвитку; індивідуальні освітні переваги сприйняття навчального матеріалу (*візуал, аудіал, кінестетик та змішаний тип*). Це допоможе вибудовувати навчання застосовуючи внутрішню (рівневу) диференціацію.

2) ***Встановити*** (за допомогою тестових технологій, анкетування, бесід з батьками учня і з самим учнем) мотиви вибору учнем вивчати математику за

профільною програмою. Це допоможе вчителю у здійсненні профільної диференціації під час навчання математики.

3) Для створення в класі творчої, ділової атмосфери ***з'ясувати***: лідерські якості учнів, уміння жити в колективі; їх ідеали, моральні цінності; рівень самооцінки кожного (занижена чи завищена), самокритичність, здатність сприймати зауваження, критику, інші властивості характеру, які можуть вплинути на успіхи у навчанні.

4) ***Вивчити*** умови проживання учня в сім'ї, характер стосунків з батьками, забезпечення засобами навчання (підручниками, комп'ютером, планшетом, смартфоном, іншою сучасною оргтехнікою).

5) ***З'ясувати*** рівень оволодіння учнями розумовими діями: порівняння, систематизація, узагальнення, аналогія, аналіз, синтез, конкретизація тощо. Це допоможе побудувати навчальний матеріал як систему знань, з достатніми обґрунтуваннями і залученням учнів до здобування знань самостійно, до засвоєння значного обсягу повідомлень.

6) Стосунки з учнями вибудовувати ***на тьютерській основі*** (*тьютор – від англійського tutor – наставник, особистий помічник у навчальному процесі*), водночас, при повазі до них зберігати принциповість, об'єктивність в оцінці результатів навчання.

Насамкінець зазначимо, що на сьогодні, як ніколи, актуальною є порада К. Д. Ушинського «*Якщо педагогіка хоче виховати людину в усіх відношеннях, то вона повинна перш за все впізнати її теж в усіх відносинах*».

2. Дидактичні основи навчання математики учнів старшої профільної школи

2.1. Вибір технології навчання

Цілком зрозуміло, що організовувати процес навчання математики в старшій профільній школі слід інакше, ніж в початковій чи базовій загальноосвітніх школах. На це вказують, наприклад, вікові зміни учнів, їх інтереси, інтелектуальні можливості тощо. Не заперечуючи загальноприйнятих дидактичних настанов і порад яких має дотримуватись вчитель, навчаючи учнів математики, зупинимось на окремих з тих, які рекомендуємо враховувати в старшій профільній школі.

Ми розглядаємо навчання взагалі і навчання математику зокрема, як діяльність, яка ініціюється важливою, державного значення зовнішньою потребою – підготувати молоде покоління до дорослого життя. Така потреба шляхом мотивації має стати *внутрішньою потребою самих учнів*. Тому навчання слід розглядати як дві складові: *викладання* (діяльність вчителя) та *учіння* (діяльність учня).

Обидві діяльності в реальному часі здійснюються одночасно при верховенстві першої. Бо саме вчитель планує навчальний процес, добирає і компонує навчальний матеріал, який потрібно вивчити на уроці, здійснює вибір ефективних технологій та методів навчання, організаційних форм і засобів навчання, форм контролю, навчальних засобів тощо.

На наш погляд, у навчанні математики в старшій профільній школі слід дотримуватися технологій *особистісно орієнтованого навчання*. Багато психологів (І. С. Якіманська та ін.) до реалізації таких технологій ставлять певні вимоги, які, з нашої точки зору навчання математики, звучать так:

1) зміст навчального матеріалу з математики має ґрунтуватись на суб'єктивному досвіді учня, отриманому за попередні роки вивчення математики в базовій школі;

2) викладання навчального матеріалу в альтернативних підручниках та вчителем на уроці має бути спрямоване на: розширення обсягу; структурування, поглиблення, інтегрування та узагальнення змісту навчального предмету; постійне перетворення і збагачення знань, суб'єктивного досвіду кожного учня;

3) під пильною увагою педагога має бути виявлення і оцінювання способів навчальної роботи учня, якими він користується самостійно, постійно та продуктивно;

4) результати навчання математики, сам процес викладання і учіння мають своєчасно контролюватись і оцінюватись, коригуватись, щоб уникнути небажаних помилок, недоліків та упущень.

2.2. Принципи навчання математики

Що стосується дидактичних принципів навчання, то ми переконані (на це вказує досвід вчителів новаторів В. Ф. Шаталова, О. Г. Гайштута, Р. Г. Хазанкіна та ін.), що навчання математики в старшій профільній школі, окрім загальних, має спиратись насамперед на принципи розвивального навчання, які сформулювані у 60–70-х роках XX ст. в роботах Л. В. Занкова.

До них відносимо наступні:

1. ***Провідна роль теоретичних знань***. Це означає, що уміння, навички, способи дій під час навчання математики мають формуватися після засвоєння основних понять, їх властивостей, тверджень, алгоритмів, правил, методів.

2. Вивчення навчального матеріалу кожної навчальної теми має ***відбуватись швидкими темпами*** і, не поелементно, а як системи логічно пов'язаних елементів знань. Це означає, що коли вивчається, наприклад, тема «Похідна», то традиційна схема процесу навчання (поелементно) коли формується та ілюструється поняття

похідної функції в точці, потім (на наступних уроках) виводяться формули для обчислення похідних відомих на час вивчення елементарних функцій, далі розв'язуються тренувальні вправи, потім вивчаються правила диференціювання в т. д., замінюється іншою схемою (поетапною): розглядаються доцільні задачі, які вказують на потребу у вивченні похідної; швидкими темпами (у формі шкільної лекції) формуються поняття похідної, подаються правила диференціювання та відповідні теореми і на цій основі створюється таблиця похідних та відповідні теореми; далі теоретичний матеріал відтворюється і поглиблюється та уточнюється на семінарі, перевіряється і оцінюється; наступний етап – на практичних заняттях відбувається розв'язування задач і вправ, зокрема прикладного змісту на вироблення відповідних умінь і навичок застосовувати вивчені теоретичний матеріал та метод математичного моделювання. Завершується така схема вивчення проведенням тематичного контролю навчальних досягнень учнів. Зрозуміло, що доцільною формою навчання при цьому має бути лекційно-практична, хоч окремі заняття можуть відбуватися і як традиційні уроки.

3. **Навчання має відбуватись на високому і водночас доступному рівні складності.** Учні, які зробили вмотивований вибір вивчати математику за програмою профільного рівня, мають опанувати її на високому, теоретико-практичному рівні. Вона потрібна їм як шкільна фундаментальна навчальна дисципліна, на знаннях якої відбувається їх майбутня професійна підготовка. Тому теоретичні відомості, розв'язування практичних та прикладних задач мають подаватися повно, ґрунтовно, з достатніми науковими обґрунтуваннями як система знань. Водночас це має відбуватись не в ущерб принципу доступності, з дотриманням, введеним ще в 30-х роках XX ст. психологом Л. С. Виготським, принципу двох зон – зони актуального та найближчого розвитку. Зрозуміло, що різні учні мають різні, притаманні кожному з них зони актуального та найближчого розвитку. Тому диференційований підхід, зокрема, рівнева диференціація у навчанні є вкрай необхідним.

4. **Усвідомлення всіма учнями процесу навчання.** За цим принципом учні мають розуміти і усвідомлювати важливість своєї діяльності, відповідально ставитися до виконання покладених на них обов'язків і завдань, активно готувати себе до вступу в доросле життя. Тут вагому роль має відігравати вчитель, як старший авторитетний товариш, фахівець.

5. **Систематична робота вчителя над покращенням загального розвитку учнів**. За цим принципом вчитель математики має дбати не тільки про формування математичних компетентностей учнів (графічної, обчислювальної, процедурної та ін.),

а й ключових, міжпредметних. У його полі зору має бути також розвиток розумових дій учнів, їх комунікативних можливостей, умінь викладати свої думки грамотно і послідовно тощо.

У навчанні математики учнів старшої профільної школи важливо дотримуватись також, визначеними у працях відомого психолога З. І. Калминової, психологічними принципами навчання, які, для даної вікової групи можна сформулювати в такій редакції:

1) навчаючи учнів математики слід систематично розвивати їх абстрактно-теоретичне мислення;

2) формування нових знань має відбуватись шляхом подолання проблемних ситуацій (проблемне навчання), бо, як відомо, учень включається в пізнавальний процес, виявляє особисту активність тоді, коли стикається з проблемною ситуацією (питанням, на яке не знає відповіді, задачею, яку не може розв'язати);

3) індивідуалізація та диференціація (рівнева і профільна) мають бути невід'ємними основами організації навчально-виховного процесу;

4) під час навчання математики слід формувати в учнів як алгоритмічні, так і евристичні прийоми розумової діяльності;

5) для поповнення і активного використання фонду дійових знань слід систематично удосконалювати мнемічну діяльність учнів (об'єм пам'яті, мнемічні прийоми, сигнальні опори, опорні конспекти і т. п.).

2.3. Вибір форм навчання математики

Що стосується організаційних форм навчання, то домінуючою у навчанні учнів математики має стати лекційно-практична форма. Традиційні уроки під час вивчення теми мають поступитись шкільним лекціям, семінарам, практичним заняттям. На лекціях має відбуватись повідомлення нового матеріалу, на семінарах – його відтворення, поглиблення і уточнення з метою вироблення еталонних знань, на практичних заняттях – формуються вміння розв'язувати практичні та прикладні задачі рівня вищого за обов'язковий (підвищеного та поглибленого рівнів).

Процес досягнення навчальної мети має відбуватись поетапно, так як показано на рис. 1.

Рис. 1. Етапи формування компетентностей

2.4. Дидактичні цикл і його складові

Сучасна дидактика розглядає процес навчання як поступальний рух циклів (витків спіралі). Поняття «цикл», «одиниця процесу навчання», «ланка» зустрічаються в роботах багатьох відомих дидактів, методистів, психологів. Тлумачення циклу навчання Н. Ф. Тализіною як «необхідної сукупності дій педагога і студента, яка приводить останнього до засвоєння визначеного фрагменту змісту навчання з наперед заданими показниками, тобто до досягнення поставленої мети» по суті співпадає з точкою зору Ю. К. Бабанського, Л. Я. Зоріної, І. Я. Лернера, В. В. Краєвського та інших. Кожний дидактичний цикл виконує функцію максимально повної передачі (в даних умовах) частини змісту освіти (наприклад, у нашому розумінні – навчальної теми) і засвоєння її до необхідного рівня застосування. Реалізація циклу може проходити або на одному уроці, або протягом системи уроків. Залежно від обсягу та наукової глибини навчального матеріалу.

Дидактичний цикл (одиниця процесу навчання) розглядається як взаємозв’язок елементів – ланок. Кожна така ланка є органічним елементом навчального процесу, що характеризується в основному певним видом пізнавальної діяльності учнів у відповідності з її специфічними і загальними функціями. Зоріна Л. Я., наприклад, у складі дидактичного циклу виділяє такі п’ять структурних елементів – ланок:

1. Постановка пізнавальної задачі і створення в учнів стимулів до навчання;
2. Представлення нового фрагменту навчального матеріалу різними способами і створення умов для його сприйняття;
3. Організація подальшого засвоєння учнями нового змісту до рівня, що вимагається, а також можливого в даному циклі;
4. Організація оберненого зв’язку, контролю за засвоєнням змісту;
5. Підготовка учнів до позакласної та позашкільної навчальної діяльності [57].

Кожна ланка навчального процесу виконує свої специфічні функції і забезпечує в сукупності з іншими ланками цілісність циклу. Проте, не виключено що виділені ланки можуть входити одна в одну, перетинатися. Наприклад, на певному етапі навчання переважає функція перевірки та оцінювання знань учнів, проте це не виключає наявності в даній ланці таких більш загальних функцій як засвоєння учнями знань, навичок і вмінь.

Діяльність вчителя (викладання) і діяльність учня (учіння) відбуваються одночасно в кожній ланці циклу. Їх взаємозв'язок показано на рис. 2.

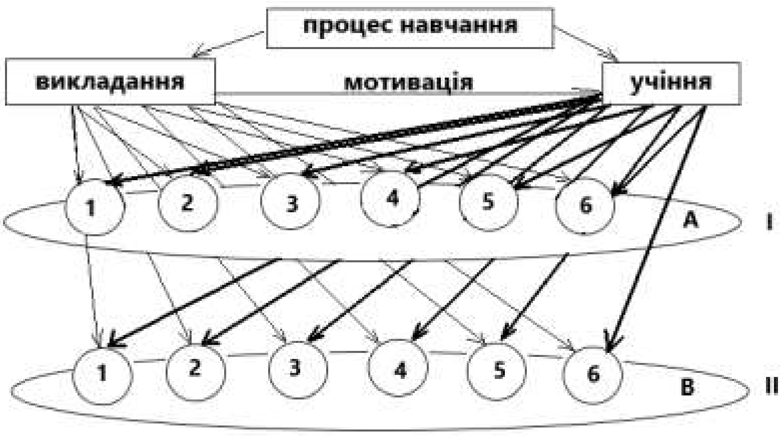


Рис. 2. Схема взаємозв'язку складових навчального процесу

На схемі позначено :

1, 2 – *ланки дидактичного циклу,*
А і В – *відрізки змісту навчального матеріалу,*
І, ІІ – *дидактичні цикли.*

Зі схеми видно, що навчальний модуль (тема) і навчальний цикл розглядаються нами в єдності, як об'єднання двох складників навчального процесу, часто як синоніми.

Такий погляд на процес навчання математики і його організацію в старшій профільній школі реалізується нами далі в розділах 2 і 3 підручника, під час розробки лекцій з теорії та методики навчання математики.

Одночасно з вивченням математики рекомендуємо постійно залучати учнів до самостійної роботи по оволодінню навчальним матеріалом, до контролю власних результатів навчання.

Таке залучання, як показує передовий досвід вчителів математики, опитування випускників гарно готує старшокласників до організації згодом самоосвіти, самоконтролю, що так потрібні дорослій людині.

3. Методичні рекомендації щодо навчання математики учнів старшої профільної школи

3.1. Тематичне планування

Навчальний матеріал обох курсів Алгебра і початки аналізу та Геометрія у програмі з математики профільного рівня розділена на навчальні теми, вказано обсяг часу на їх вивчення. Є теми, на вивчення яких, за програмою, відводиться приблизно 15-20 годин, а є такі, що час на вивчення сягає понад 60 годин.

Виходячи з вікових можливостей учнів рекомендуємо в такому випадку великі за обсягом теми розділяти на менші (*підтеми, ми їх називаємо також модулями*). Цей поділ слід робити так, щоб кожна підтема (модуль) була самостійною, логічно *завершеною частиною навчального матеріалу*.

Процес вивчення навчального матеріалу кожної теми (модуля) має бути чітко спланованим. Тематичне планування рекомендуємо проводити в кілька стадій, зміст і послідовність яких наступна:

1) виділення програмного модуля (теми);
2) формування навчальних цілей I, II, III рівнів (освітньої, розвивальної, виховної) до виділеного модуля;
3) здійснення логіко-дидактичного аналізу навчального матеріалу підручника, який цей модуль реалізує;
4) побудова структурно-логічної схеми навчального матеріалу модуля;
5) програмний модуль, за необхідності, поділяється на менші частини – навчальні теми і встановлюється черговість їх вивчення;
6) створення для виділеного модуля списку елементів знань та їх структурно-логічної схеми;
7) формування цілей дидактичних циклів, носієм яких є виділений модуль;
8) аналіз умов, в яких буде проходити навчання, можливостей учнів по досягненню цілей навчання, власні можливості вчителя;
9) прийняття рішення про послідовність вивчення матеріалу виділеного модуля, про вибір засобів навчання, виокремлення елементів знань, що виносяться на самостійне опрацювання;
10) створення за встановленою формою самого модельного (тематичного) плану.

У зв'язку з такими пропозиціями може виникнути запитання наступного змісту: *для чого вчителю проходити такі стадії і що дасть йому в результаті?*

Відповідь на першу частину запитання така: модульний план – модель навчального процесу, а всяка матеріальна чи ідеальна модель, як відомо, не може бути створена без наявності елементів, які входять до неї і знань про співвідношення між ними. Тому проходження стадій 1–9 необхідне для виявлення і елементів модульного плану, як моделі, і співвідношень між ними. Отримавши в результаті такого підходу необхідні дані, вчитель зможе на останній 10-й стадії, створити досконалий тематичний план. Що стосується другої частини запитання, то проходження стадій 1–10 в результаті дає змогу вчителю чітко визначити для обраного модуля (теми): начальну мету, об'єкти вивчення, нормативно-заданий рівень засвоєння матеріалу, що вивчаються, цілі модульного контролю, об'єкти контролю, вимірювачі знань і способів діяльності, систему пізнавальної діяльності, детерміновану ланками дидактичного циклу, час, відведений на вивчення вибраного відрізка змісту освіти, форми проведення занять, елементи знань для самостійного вивчення учнями і т. п.

3.2. Логіко-дидактичний аналіз змісту навчального матеріалу модуля (теми)

Вивчення навчальної теми буде більш успішним, якщо вчитель матиме чітке уявлення про елементи знань, що наповнюють тему і взаємозв'язки між ними. Для цього рекомендуємо перед вивченням теми здійснити логіко-дидактичний аналіз її змісту та вибудувати граф-схему (свого роду «рентгенівський знімок» теми). Звернемось до прикладу.

Розглянемо з курсу Алгебри і початків аналізу навчальну тему «Інтеграл та його застосування», яка вивчається в фінансових коледжах за підручником «Математика» (див. Швець В.О., Білянін Г.І. Математика: навчальний посібник. Чернівці: Зелена Буковина, 2003. 382 с.)

Виконаємо логіко-дидактичний аналіз цього навчального матеріалу теми. Найменшу, закінчену за змістом порцію навчального матеріалу, назвемо елементом змісту навчання. Виділеним в результаті аналізу елементам надамо наступні позначення:

(ВП) – відоме поняття – поняття, яке вважається відомим учням до вивчення нового матеріалу даної теми;

(ПФ) – поняття, що формується під час вивчення даної теми;

(ВТ) – відоме твердження, закономірність – твердження, яке вважається відомим учням до вивчення нового матеріалу даної теми;

(ТФ) – твердження, що формується, закономірність яка вивчається в даній темі;

(ВСД) – відомий спосіб дій – відомий учням до вивчення матеріалу даної теми;

(СДФ) – спосіб дій, що формується під час вивчення даної теми.

Список елементів змісту навчальної теми «Інтеграл та його застосування» буде таким:

(ПФ) 1. Первісна.
(ТФ) 2. Теорема про множину первісних даної функції.
(ПФ) 3. Невизначений інтеграл.
(ПФ) 4. Знак інтеграла.
(ПФ) 5. Під інтегральний вираз.
(ПФ) 6. Підінтегральна функція.
(ПФ) 7. Змінна інтегрування.
(СДФ) 8. Інтегрування.
(ТФ) 9. Властивості невизначеного інтеграла.
(ТФ) 10. Таблиця невизначених інтегралів.
(СДФ) 11. Метод безпосереднього інтегрування.
(СДФ) 12. Інтегрування методом заміни змінної (метод підстановки).
(СДФ) 13. Інтегрування частинами.
(ПФ) 14. Криволінійна трапеція.
(ТФ) 15. Площа криволінійної трапеції.
(ПФ) 16. Розбиття відрізка.
(ПФ) 17. Дрібність розбиття.
(ПФ) 18. Проміжні точки.
(ПФ) 19. Інтегральна сума.
(ПФ) 20. Границя інтегральної суми.
(ПФ) 21. Визначений інтеграл.
(ПФ) 22. Межі інтегрування.
(ПФ) 23. Геометричний зміст визначеного інтеграла.
(ТФ) 24. Теорема про необхідну умову інтегровності.
(ТФ) 25. Теорема про середнє.
(ТФ) 26. Властивості визначених інтегралів.
(ТФ) 27. Формула прямокутників.
(ТФ) 28. Формула трапеції.
(СДФ) 29. Наближене обчислення визначених інтегралів.
(ПФ) 30. Функція Барроу.
(ТФ) 31. Теорема Барроу.
(ТФ) 32. Формула Ньютона - Лейбніца.
(СДФ) 33. Методи обчислення визначених інтегралів.
(СДФ) 34. Обчислення площ плоских фігур.
(СДФ) 35. Обчислення об'ємів тіл за площами їх паралельних перерізів.
(ПФ) 36. Швидкість зміни обсягу продукції.
(СДФ) 37. Обчислення обсягу виробництва через визначений інтеграл.
(СДФ) 38. Обчислення дисконтного доходу через визначений інтеграл.
39. Повторення основних ідей вивченого та контроль засвоєння.
(ВП). а. Декартова система координат.

(ВП). б. Паралельні та перпендикулярні площини.
(ВП). в . Обсяг продукції.
(ВП). г. Продуктивність праці.
(ВП). д. Похідна
(ВП). є. Диференціал.
(ВП). є. Диференціальне числення.
(ВСД). ж. Диференціювання.
(ВП). з. Обсяг виробництва.
(ВП). и. Працезатрати.
(ВП). і. Основні засоби.
(ВП). ї. Дисконтний дохід.
(ВП). й. Процентна ставка .
(ВП). к. Початковий капітал.
(ВП). л. Прямокутник.
(ВТ). м. Теорема Лагранжа.
(ВТ). н. Площа прямокутника.
(ВП). о. Трапеція.
(ВТ). п. Площа трапеції.
(ВТ). р. Найбільше значення функції на відрізку (§ 28).
(ВТ). с. Найменше значення функції на відрізку (§ 28).
(ВТ). т. Площа простої фігури.
(ВП). у. Границі функції (§ 8).
(ВТ). ф. Неперервність функції на проміжку (§ 8).

Подаємо логічні взаємозв'язки між виділеними елементами змісту навчання у вигляді структурної схеми (граф-схеми) (рис. 3). Можливість і доцільність такого подання обґрунтована в ряді робіт науковців.

Кожному елементу змісту навчання на графі відповідає
кружок з номером або буквою, наприклад:

1 — первісна;
11 — метод безпосереднього інтегрування;
9 — властивості невизначеного інтеграла;
3 — декартова система координат і т. д.

Логічні зв'язки між елементами змісту навчання позначені стрілками (рис. 3). Як бачимо, по відношенню до елементів *а, б і в* стрілки є вихідними, тому такі елементи змісту навчання називають *початковими*. Для елемента 8 усі стрілки є вхідними, такий елемент у графі називають *кінцевим* або *тупиковим.* До кінцевих елементів також відносяться, зокрема, 24, 29, 34, 35, 37, 38 елементи графа.

Елементи, які мають велику кількість зв'язків з наступними і є базовими у їх формуванні, називають *значимими*. Наприклад, значимими є 1, 3, 9 і 11 елементи графа.

Елементи змісту навчання, які мають велику кількість зв'язків з попередніми і формуються на їх основі, називають *складеними*. До таких елементів віднесемо 12, 13, 21, 24, 35, 37, 38.

Якщо елементи змісту навчання мають зв'язки і з попередніми, і з наступними елементами, то їх називають *вузловими*. На графі вузловими є 2, 10, 21, 33.

Аналіз складеної граф-схеми дає можливість зробити певні висновки: різноманітність логічних зв'язків, наявність кількох складених і вузлових елементів змісту навчання разом з достатньо довгим терміном вивчення цього модуля (приблизно 7 робочих тижнів) обумовлюють доцільність її поділу на менші частини логічно завершеного навчального матеріалу і виділення навчальних тем.

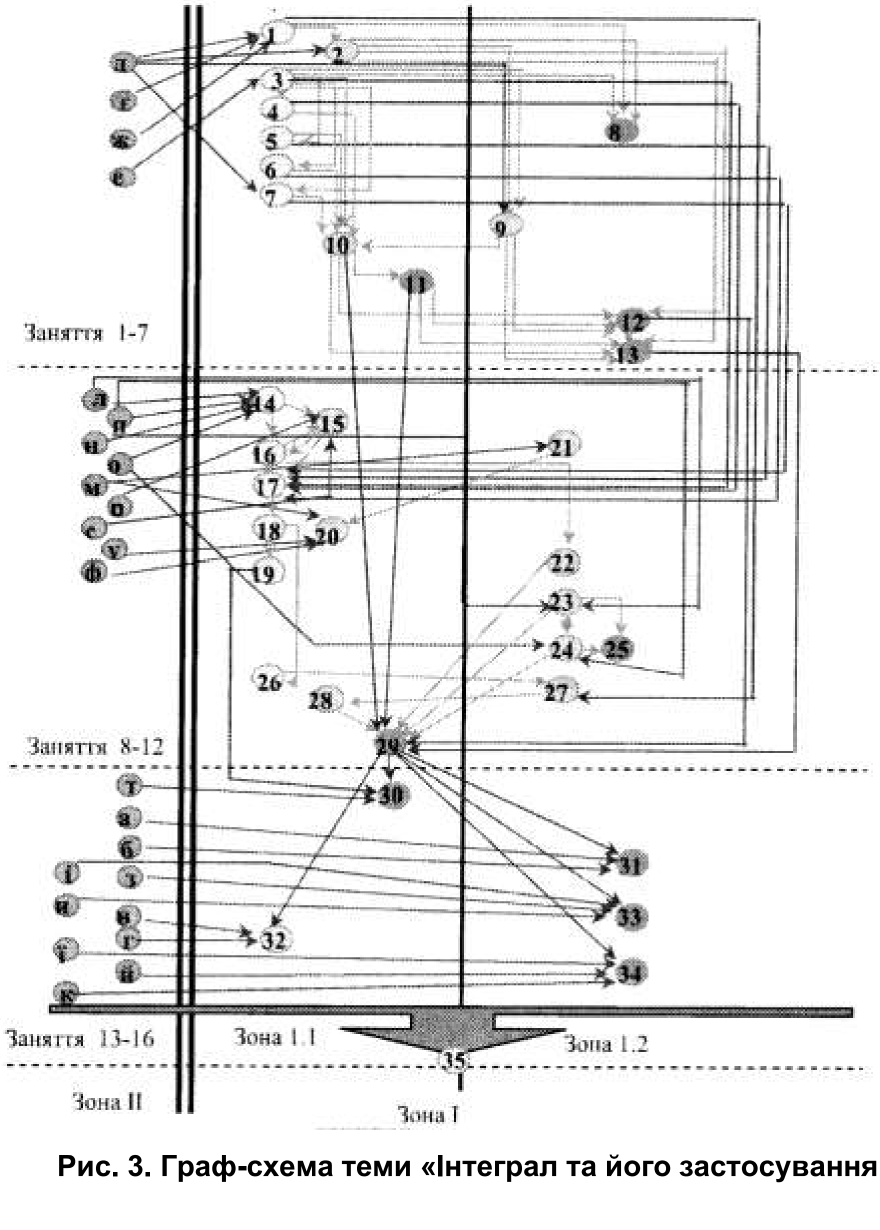


Рис. 3. Граф-схема теми «Інтеграл та його застосування»

З цією метою розділимо (з дидактичних міркувань) ***освітні цілі вивчення*** теми «Інтеграл та його застосування» *на окремі групи*:

перша: цілі, реалізація яких передбачає опанування загальними поняттями, способами дій, термінологією, пов'язаними з невизначеним інтегралом (мати поняття про дію інтегрування, первісну функції, невизначений інтеграл; знати означення первісної, невизначеного інтеграла, основні властивості первісних, правила знаходження невизначеного інтеграла, таблицю первісних; вміти знаходити невизначений інтеграл безпосередньо (перетворивши підінтегральний вираз так, щоб можна було зразу використати одне з правил або формулу з таблиці), доводити основну властивість первісної, правила знаходження невизначених інтегралів, володіти технікою інтегрування вказаними у змісті методами та використовувати їх до розв'язування вправ);

друга: цілі, реалізація яких передбачає опанування загальними поняттями, способами дій, термінологією, пов'язаними з визначеним інтегралом (мати поняття про криволінійну трапецію та її площу, визначений інтеграл, його геометричний зміст, наближені методи обчислення визначених інтегралів; знати формулу Ньютона-Лейбніца, основні властивості визначених інтегралів; вміти обчислювати найпростіші визначені інтеграли за допомогою формули Ньютона-Лейбніца, доводити властивості визначених інтегралів, теорему Барроу, формулу Ньютона-Лейбніца, володіти технікою інтегрування);

третя: цілі пов'язані з можливостями застосування інтегрального числення (мати поняття про площу та об'єм геометричної фігури; знати подані у змісті формули обчислення об'ємів тіл та площ їх поверхонь через визначений інтеграл; вміти знаходити площі плоских фігур, обчислювати об'єми тіл та площі їх поверхонь через визначений інтеграл, розв'язувати прикладні задачі економічного змісту за допомогою інтеграла).

Згідно такого розподілу цілей перша група визначає на граф-схемі блок 1-7, друга 8-12, третя 13-16.

Це утворює три дидактичні цикли: «Невизначений інтеграл», «Визначений інтеграл», «Застосування визначеного інтегралу».

Таке визначення дидактичних циклів підтримується розподілом навчального матеріалу підручника. Дійсно, аналізуючи його VI розділ, доходимо висновку, що у § 29 розкрита суть і визначений зміст невизначеного інтеграла, у § 30 визначеного, у § 31 застосування визначеного інтеграла.

Поділ програмної теми на три дидактичні цикли та на три навчальні підтеми (модулі) (рис. 3.1, 3.2, 3.3) узгоджується із психологічними особливостями учнів цієї вікової групи.

Термін опанування учнями програмної теми «Інтеграл та його застосування» занадто великий для юнаків і юнок, яким притаманні як швидке захоплення певною діяльністю, так і швидке «охолодження» до неї при відсутності достатньо близьких позитивних результатів.

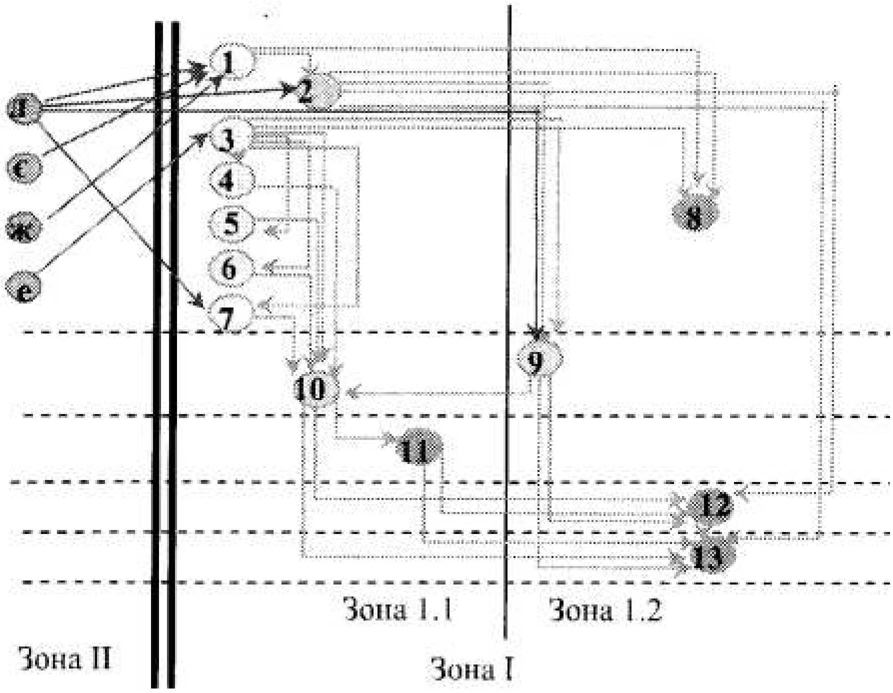


Рис. 3.1. Граф-схема теми «Невизначений інтеграл»

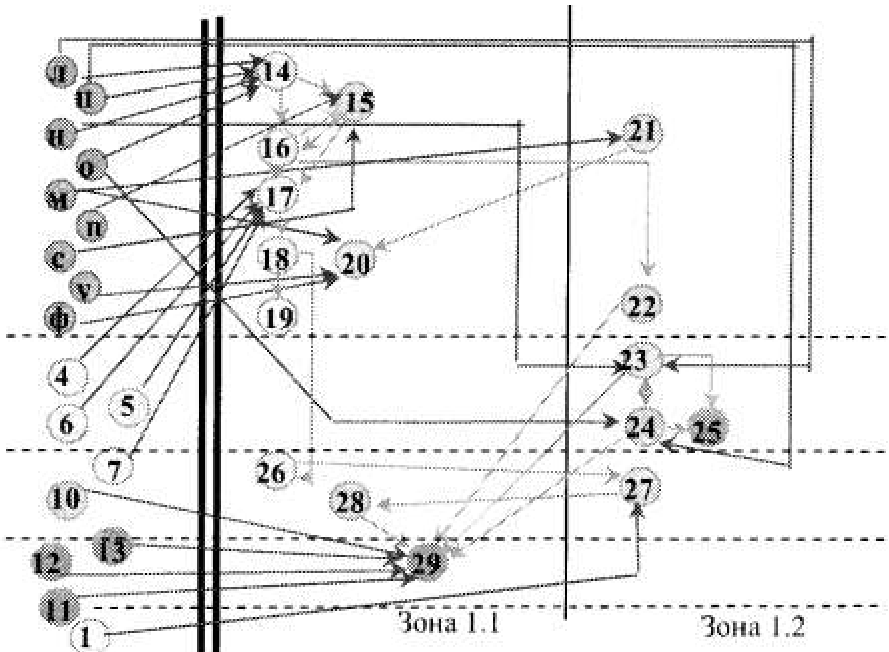


Рис. 3.2. Граф-схема теми «Визначений інтеграл»

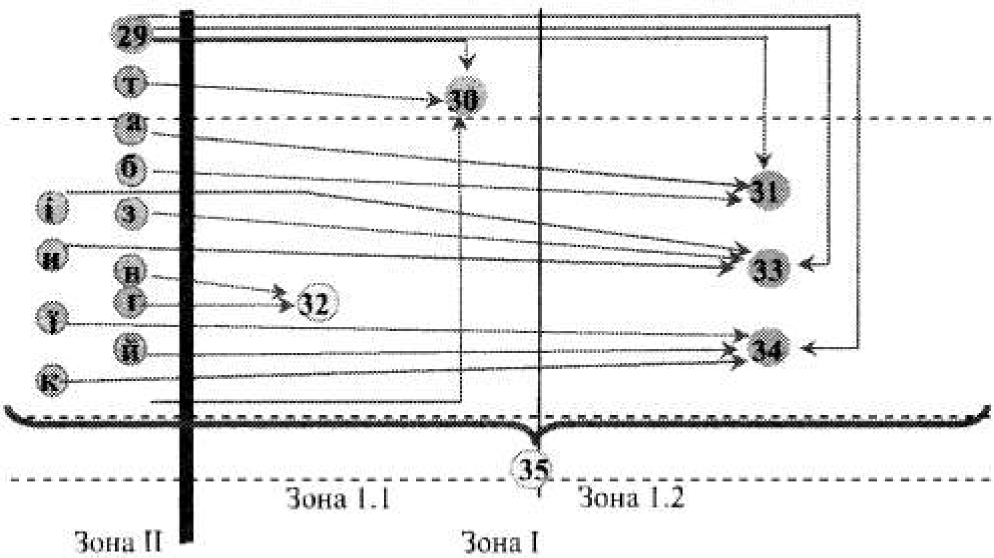


Рис. 3.3. Граф-схема теми «Застосування визначеного інтеграла»

Завершуючи опис проведення логіко-дидактичного аналізу програмної теми «Інтеграл та його застосування», зауважимо, що елементи змісту навчання розташовані в різних зонах (рис. 3.1, 3.2, 3.3).

У зоні I знаходяться елементи змісту навчання, які формуються в учнів у процесі вивчення теми. Кожен з цих елементів для учнів є образом, метою, на досягнення якої спрямована їхня навчальна діяльність. Такі елементи змісту навчання і логічні зв'язки між ними є для учнів *актуально усвідомлюваними*, а зона I – зона *актуально усвідомлюваного навчального матеріалу* (за Л. С. Виготським зона найближчого розвитку).

Елементи змісту навчання, що розташовані у зоні II, засвоєні і опановані учнями раніше (зона *актуально контрольованого матеріалу*). Вони не є для них образами-цілями у навчальній діяльності, вони використовуються (це видно із граф-схеми) для актуального усвідомлення елементів зони I. Такі елементи та їх зв'язки з елементами зони I є для учнів *свідомо-контрольованими*, а зона II – зона *свідомо контрольованого навчального матеріалу*. Зрозуміло, що елементи змісту навчання спочатку з'являються для учнів у зоні актуально усвідомлюваного навчального матеріалу (зона I) і з просуванням в опануванні навчальних тем зміщуються в зону свідомо контрольованого навчального матеріалу (зона II).

Дійсно, елементи 4, 5, 6, 7 у темі «Невизначений інтеграл» (рис. 3.1) знаходяться у зоні I і є актуально усвідомлювані. А під час вивчення теми «Визначений інтеграл» (рис. 3.2) ці ж самі елементи знаходяться вже у зоні II і є свідомо контрольованими учнями.

Підсумовуючи викладене вище приходимо до наступних загальних порад для вчителя-математики:

- робота по вивченню навчального матеріалу кожної програмної теми чи з курсу «Алгебри і початків аналізу» чи з курсу «Геометрія» має розпочинатись з *визначення освітніх цілей її вивчення*;
- наступним кроком слід провести *логіко-дидактичний аналіз* змісту навчального матеріалу і, при потребі, *скласти граф-схему* (керуючись діючим підручником);
- якщо тема велика за обсягом чи часом відведеним на вивчення, здійснити *поділ теми на підтеми* (модулі), визначити для кожної з них освітні цілі вивчення, продумати зміст кожного етапу дидактичного циклу.

Для кожного модуля *скласти тематичний план* (модель навчального процесу), у якому передбачені: *вибір методів навчання, вибір форм занять – лекція, семінар, практичні заняття; форми контролю навчальних досягнень учнів, засоби навчання які доцільно використати; що учні дізнаються на заняттях в класі, а що мають опанувати самостійно.*

На завершення пропонуємо скласти дидактичну картку до теми, що буде вивчатись. Як показує досвід, вона є гарним, дієвим підручним засобом протягом всього часу вивчення теми.

Примірний зразок якої подано нижче в таблиці 1 – Форма дидактичної картки.

Тільки по завершені ретельно проведеної підготовчої роботи рекомендуємо вчителю розпочинати викладання кожної теми (модуля) і бути впевненим у досягненні поставленої мети. Далі чекають на нього розробки занять, розв’язування задач, проведення контролю знань тощо.

Зауважимо, що на перших порах рекомендована нами підготовча робота забирає в учителя немало часу, але створені ним розробки, дидактичні картки, будуть слугувати в подальшому як дидактичні матеріали, в які він вноситиме правки, уточнення тощо і буде авторитетним, компетентним професіоналом у своїй справі. У його арсеналі має бути достатньо методів навчання, форм роботи, засобів навчання тощо, що перетворить кожне заняття на захоплюючу і творчу роботу.

Таблиця 1

Дидактична картка
Тема «Первісна, невизначений інтеграл» (10 год)

1. Мета:

1. *дидактична :* учні повинні засвоїти поняття первісної, невизначеного інтеграла, вміти їх відшукувати для основних елементарних функцій, користуючись правилами і таблицею первісних;
2. *розвивальна :* вчити учнів робити узагальнення, розвивати алгоритмічне мислення;
3. *виховна :* формувати в учнів науковий світогляд, матеріалістичне розуміння походження математичних понять.

2. Зміст навчального матеріалу теми:

Зміст навчального матеріалу

Первісна. [Існування первісної для неперервної на проміжку функції.] Основна властивість первісної. [Теорема Лагранжа і її застосування до доведення основної властивості первісної.]
Невизначений інтеграл. Основні правила відшукання невизначеного інтеграла. Таблиця первісних (невизначений інтеграл) відшукання невизначеного інтеграла для складених функцій.

Вимоги до підготовки учнів
Учень / учениця

- *Формулює* означення первісної і невизначеного інтеграла та їх властивості.
- *Доводить* теорему про властивість первісної, правила (3 правила) відшукання первісної.
- *Знає* таблицю первісних вивчених раніше функцій : $y = x^{\alpha}, y = sinx, y = cosx, y = e^{x}, y = a^{x},$
- $y = \ln x\,, y = \log_{n} x.$
- *Вміє* знаходити невизначений інтеграл складених функцій.

3. Елементи знань.

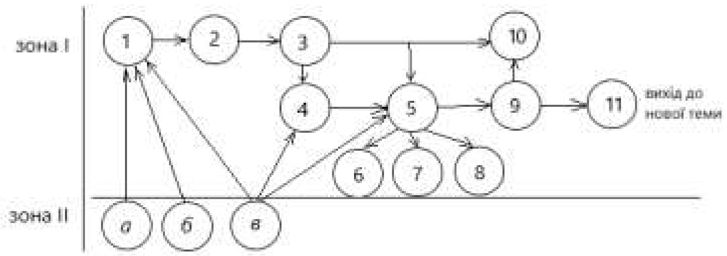
Зона II (актуально контрольованого матеріалу)

а) Похідна.
б) Диференціальне числення.
в) Операція диференціювання.

Зона I (актуально усвідомлюваного матеріалу)

1. Первісна.
2. Операція інтегрування.
3. Теореми про основну властивість первісної.
4. Теорема про множину первісних.
5. Невизначений інтеграл.
6. Знак інтеграла.
7. Підінтегральний вираз.
8. Підінтегральний функція.
9. Властивості невизначеного інтеграла.
10. Таблиця невизначених інтеграл.
11. Метод безпосереднього інтегрування.

4. Граф-схема теми «Первісна, невизначений інтеграл».



***) Примітка. Дидактична картка виготовлена під підручник: Алгебра 11 клас: загальноосвітн. навч. закладів: академічний рівень / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір.**

5. Орієнтовне планування навчального матеріалу.

№	*Тема заняття, види робіт*	*К-ть годин*	*Дата*	*Примітки*
1.	Дія інтегрування як обернена до дії диференціювання. Первісна.	1		*Шкільна лекція*
2.	Основна властивість первісної, невизначений інтеграл, початкові умови.	1		*Шкільна лекція*
	Таблиця первісних основних елементарних функцій. СР-1.	1		*Семінар*
3.	Правила відшукання первісних і їх застосування.	3		*Шкільна лекція*
4.	Інтегрування складених елементарних функцій за допомогою відповідних правил та таблиці первісних. СР-2.	3		*Практичні заняття*
5.	Контрольна робота.	1		*Контрольне заняття*
	Всього	10		

П І Д С У М О К

Щоб навчати математики учнів старшої профільної школи необхідно знати і враховувати їх вікові особливості.

У навчанні має здійснюватися рівнева та профільна диференціації.

Основною технологією навчання має виступати технологія особистісно-орієнтованого навчання з дотриманням дидактичних та психологічних принципів розвивального навчання. До проведення занять (у формі лекцій, семінарських та практичних занять) доцільно проводити підготовчу роботу з огляду на навчальну тему, яка буде вивчатися.

Така підготовка роботи має включати:

- формування навчальних цілей, вивчення теми (дидактичні, виховні, розвивальні);
- логіко-дидактичний аналіз навчального матеріалу;
- створення граф-схеми;
- поділ великої теми на менші (модулі);
- створення дидактичної картки до теми (за одним з альтернативних підручників, вибраним для навчання).

Далі успіх у досягненні поставлених цілей залежить від фахової майстерності вчителя, його компетентності.

МЕТОДИЧНІ ЗАДАЧІ
для самостійного розв'язування

1. В одному із класів, де вивчення математики відбувається за програмою профільного рівня, проведіть анкетування учнів. З'ясуйте чим був вмотивований вибір учнів вивчати математику за такою програмою. Виявіть головний (ні) мотиви.
2. Під час проходження виробничої педагогічної практики напишіть характеристику учнів класу, які вивчають математику за програмою профільного рівня.
3. Підготуйте дидактичну карту до однієї з навчальних тем курсу «Алгебра і початки аналізу» чи «Геометрія», спираючись на один з діючих альтернативних підручників.

Хороша схема цінніша від довгого пояснення

Б. Наполеон

Мудрий не той, хто багато знає, а той, чиї знання корисні

Есхіл

РОЗДІЛ 2
ТЕОРІЯ ТА МЕТОДИКА НАВЧАННЯ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ

Л Е К Ц І Я 2.1

Т Е М А ***Алгебра і початки аналізу як навчальний предмет в профільній школі***

П Л А Н

1.	***Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти про мету, завдання і зміст освітньої галузі «Математика»***
2.	***Алгебра і початки аналізу як навчальний предмет старшої профільної школи: мета вивчення, зміст курсу, вимоги до підготовки учнів з курсу (компетентності, якими мають оволодіти учні), тематичне планування навчального процесу***
3.	***Засоби навчання Алгебри і початків аналізу: альтернативні підручники, навчальні посібники, дидактичні матеріали***

К О Н С П Е К Т Л Е К Ц І Ї

1. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти про мету, завдання і зміст освітньої галузі «Математика»

Людська спільнота впродовж віків турбується про підростаюче покоління, про підготовку його до життя в соціумі.

Ця турбота стосується багатьох сфер: охорони здоров'я дітей, їх добробуту, отримання освіти, організації дозвілля; виховання поваги до старших, любові до рідного краю тощо. Тому й не дивно, що кожна держава, на яку покладається виконання багатьох життєдіяльних функцій, дбає про освіту і виховання молодого покоління, яке б, досягнувши працездатного віку, могло почувати себе комфортно і могло б успішно включатись в доросле життя.

З цією метою держава створює нормативні документи, в яких описує мету, зміст, вимоги, організаційні форми здобуття освіти дітьми на різних етапах дорослішання, тобто, виражає соціальне замовлення, яке мають виконати відповідні заклади освіти.

На сьогодні, в Україні на рівні шкільної освіти розроблені і діють:

- Державний стандарт початкової освіти (затверджений Постановою Кабінету Міністрів України, від 18 лютого 2018 р., № 87) діє в початковій школі 1-4 класи;

- Державний стандарт базової середньої освіти (затверджений Постановою Кабінету Міністрів України, від 30 вересня 2020 р., № 898) діє в основній школі 5-9 класи;
- Державний стандарт базової і повної загальної освіти (затверджений Постановою Кабінету Міністрів України, від 23 листопада 2011 р., № 1392) діє в старшій школі.

Кожний із них визначає основні засади і підходи до навчання в школі (початковій, базовій середній, старшій), перелік обов'язкових компетентностей та результатів навчання здобувача освіти, загальний обсяг навчального навантаження тощо.

Надалі будемо розглядати Державний стандарт базової і повної загальної освіти, а для скорочення вживати термін Стандарт-3. В ньому вживаються такі поняття як **компетенція** і **компетентність**.

Під терміном **компетенція** – розуміється перелік повноважень окремої особи чи установи, які вони мають виконувати. Особа, яка обізнана з цими повноваженнями і здатна їх виконувати вважається **компетентною**.

За Стандартом-3 **компетенція** – «*суспільно визнаний рівень знань, умінь, навичок, ставлень у певній сфері діяльності людини*», а **компетентність** – «*набута в процесі навчання інтегрована здатність учня, що складається із знань, умінь, досвіду, цінностей і ставлення, що можуть цілісно реалізовутись на практиці».* У Стандарті-3 виділяються **ключові компетентності** та **предметні (галузеві).** Серед обов'язкових освітніх (предметних) галузей називається «Математика». Основною метою є формування в учнів **математичної комтепентності** на рівні, достатньому для забезпечення життєдіяльності в сучасному світі, успішного оволодіння знаннями з інших освітніх галузей у процесі шкільного навчання, забезпечення інтелектуального розвитку учнів, розвитку учнів, розвитку їх уваги, пам'яті, логіки, культури мислення та інтуїції.

За Стандартом-3 завдання освітньої галузі «Математика»:

«■розкриття ролі та можливостей математики у пізнанні та описанні реальних процесів і явищ дійсності, забезпечення усвідомлення математики як універсальної мови природничих наук та органічної складової загальної людської культури;

■розвиток логічного, критичного і творчого мислення учнів, здатності чітко та аргументовано формулювати і висловлювати свої судження;

■забезпечення оволодіння учнями математичною мовою, розуміння ними математичної символіки, математичних формул і моделей як таких, що дають змогу описувати загальні властивості об'єктів, процесів та явищ;

■*формування здатності логічно обґрунтовувати та доводити математичні твердження, застосовувати математичні методи у процесі розв'язування навчальних і практичних задач, використовувати математичні знання і вміння під час вивчення інших навчальних предметів;*
■*розвиток умінь працювати з підручником, опрацьовувати математичні тексти, шукати і використовувати додаткову навчальну інформацію, критично оцінювати здобуту інформацію та її джерела, виокремлювати головне, аналізувати, робити висновки, використовувати отриману інформацію в особистому житті;*
■*формування здатності оцінювати правильність і раціональність розв'язання математичних задач, обґрунтовувати твердження, розпізнавати логічно некоректні міркування, приймати рішення в умовах неповної, надлишкової, точної та ймовірнісної інформації*».

Названі узагальнені завдання сформульовані так, що мають розв'язуватися в початковій, базовій і старшій школах, але є й конкретні, які стосуються кожної школи зокрема.

Конкретними завданнями старшої школи освітньої галузі «Математика» є:

« ■розширення компетентностей учнів щодо тотожних перетворень виразів (*степеневих, логарифмічних, ірраціональних, тригонометричних), розв'язування відповідних рівнянь і нерівностей;*

■*завершення формування поняття числової функції у результаті вивчення степеневих, показникових, тригонометричних класів функцій, формування вмінь їх досліджувати і використовувати для опису і вивчення явищ і процесів;*

■*ознайомлення з ідеями і методами диференціального та інтегрального числення, формування елементарних умінь їх практичного застосування;*

■*формування практичної компетентності щодо розпізнавання випадкових подій, обчислення їх ймовірності, застосування базових статистико-ймовірнісних моделей під час розв'язування навчальних і практичних задач та опрацювання експериментальних даних у процесі вивчення предметів природничого циклу;*

■*формування системи знань про просторові фігури та їх основні властивості, способи обчислення площ їх поверхонь і об'ємів, а також умінь застосовувати здобуті знання під час розв'язування навчальних і практичних задач;*

■*формування уявлення про аксіоматичну побудову математичних теорій.*

Зазначені завдання розв'язуються у процесі опанування навчального змісту освітньої галузі "Математика", в якому виокремлюються такі змістові лінії*: **числа, вирази, рівняння і нерівності, функції, елементи комбінаторики, теорії ймовірності та математичної статистики, геометричні фігури і геометричні величини***»

Зміст кожної лінії і результати навчання в Стандарті-3 представлені наступним чином (фрагмент Стандарту).

<table>
<tr><th colspan="2">Вирази</th></tr>
<tr><td>- Узагальнення поняття степеня.
- Логарифм числа.
- Перетворення тригонометричних, ірраціональних, показникових та логарифмічних виразів.</td><td>- Усвідомити поняття степеня з дробовим показником, логарифма числа та знати їхні властивості.
- Вміти перетворювати тригонометричні, ірраціональні, показникові та логарифмічні вирази.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Рівняння і нерівності</th></tr>
<tr><td>- Тригонометричні, ірраціональні, показникові та логарифмічні рівняння.
- Показникові і логарифмічні нерівності.</td><td>- Усвідомити поняття тригонометричного, ірраціонального, показникового, логарифмічного рівняння і нерівності та системи таких рівнянь.
- Вміти розв’язувати простіші рівняння і нерівності зазначених видів та нескладні системи, які зводяться до них.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Функції</th></tr>
<tr><td>- Числова функція.
- Тригонометричні, степеневі, показникові, логарифмічні функції.</td><td>- Мати уявлення про функцію як математичну модель залежностей між змінними будь-якої природи.
- Знати різні види функцій та їхні графіки.
- Вміти будувати графіки функцій, характеризувати за графіками їхні властивості.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Початки диференціального та інтегрального числення</th></tr>
<tr><td>- Неперервність функції.
- Похідна і визначений інтеграл.
- Застосування похідної і визначеного інтеграла.</td><td>- Мати уявлення про неперервність функції.
- Знати означення похідної, визначеного інтеграла, формули похідних основних функцій.
- Вміти знаходити похідні, визначені інтеграли, застосовувати похідну та інтеграл до розв’язування задач прикладного характеру.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Елементи теорії множин. Комбінаторика</th></tr>
<tr><td>- Сполуки без повторень: перестановки, розміщення, комбінації.</td><td>- Мати поняття про перестановки, розміщення, комбінації.
- Знати формули для обчислення числа кожного виду сполук без повторень.
- Вміти обчислювати число перестановок, розміщень, комбінацій і застосовувати набуті знання до розв’язування задач.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Початки теорії ймовірностей та елементи статистики</th></tr>
<tr><td>- Випадкові події. Ймовірність випадкової події. Умовні ймовірності. Незалежні випадкові події. Схема незалежних випробувань і уявлення про закон великих чисел.
- Способи представлення даних Статистичні таблиці. Ряди розподілу та наочне їх зображення. Мода і медіана. Середні значення та методи їх аналізу.</td><td>- Мати уявлення про класичну і статистичну ймовірності, схему незалежних випробувань, способи представлення даних.
- Знати теореми додавання і множення.
- Вміти застосовувати набуті знання до розв’язування задач, в тому числі прикладного змісту.</td></tr>
</table>

Геометричні фігури	
- Аксіоми стереометрії. Взаємне розміщення прямих і площин у просторі. - Многогранники і тіла обертання, їх види та властивості. Побудова в просторі. - Геометричні перетворення. Координати і вектори.	- Знати означення геометричних фігур в просторі та їх властивості, взаємне розміщення прямих і площин, види геометричних перетворень, методи, що застосовуються в стереометрії. - Вміти зображати геометричні фігури, розв'язувати простіші задачі, зокрема прикладного змісту.
Геометричні величини	
- Відстані. Міри кутів між прямими і площинами. - Площі поверхонь і об'єми.	- Мати уявлення про площу поверхні і об'єм тіла. - Знати означення відстані від точки до площини, міри кутів між прямими і площинами, формули площ поверхонь, об'ємів многогранників і тіл обертання. - Вміти знаходити відстані, міри кутів, розв'язувати простіші задачі на вимірювання і обчислення площ поверхонь і об'ємів тіл.

2. Алгебра і початки аналізу як навчальний предмет старшої профільної школи: мета вивчення, зміст курсу, вимоги до підготовки учнів з курсу (компетентності, якими мають оволодіти учні), тематичне планування навчального процесу

Освітня галузь «Математика» в старшій профільній школі представлена двома навчальними дисциплінами: *Алгебра і початки аналізу* та *Геометрія*.

Зупинимося детально на першій. В курсі Алгебри і початки аналізу реалізується вивчення перших шести змістових ліній (в курсі Геометрія решта дві: геометричні фігури та геометричні величини). Огляд змісту ліній показує, що курс Алгебра і початки аналізу – навчальна дисципліна, яка вивчається у старшій профільній школі. Її зміст включає знання з алгебри, математичного аналізу та стохастики. Ці знання приведені в чітку дидактичну систему, адаптовану до вікових можливостей учнів юнацького віку. Вивчення алгебри і початків аналізу відбувається за державною навчальною програмою, яка є другим, після Стандарту-3, нормативним документом, яким має керуватися в роботі вчитель математики.

Мета вивчення курсу Алгебра і початки аналізу:

- систематичне вивчення функцій як важливого математичного об'єкта засобами алгебри і математичного аналізу;
- розкриття політехнічного і прикладного значення загальних методів математики, пов'язаних з дослідженнями функцій;

- підготовка необхідного математичного апарату для вивчення геометрії, фізики та інших суміжних навчальних дисциплін;
- розвиток логічного мислення учнів, їх розумових здібностей.

Вимоги до математичної підготовки учнів наступні

У результаті вивчення курсу Алгебра і початки аналізу учні повинні оволодіти **уміннями** (*компетентностями*), які задають рівень обов’язкової підготовки (*вимоги до математичної підготовки учнів*):

1) будувати графіки вказаних в програмі функцій, спираючись на вивчені властивості цих функцій (графічна компетентність);
2) виконувати тотожні перетворення ірраціональних, тригонометричних, показникових і логарифмічних виразів, використовуючи формули як і вказані у програмі (процедурна та обчислювальна компетентності);
3) розв’язувати ірраціональні, тригонометричні, показникові та логарифмічні рівняння й нерівності, використовуючи тотожні перетворення для спрощення рівнянь і нерівностей (процедурна та аналітична компетентності);
4) застосовувати апарат математичного аналізу (таблиці похідних і первісних, формули диференціювання, які вказані у програмі, та формули обчислення первісних) для знаходження похідних, первісних і простіших визначених інтегралів (процедурна та аналітична компетентності);
5) досліджувати складені функції за допомогою елементарних прийомів і методів математичного аналізу, будувати на основі таких досліджень їх графіки (дослідницька та графічна компетентності);
6) обчислювати значення вивчених функцій, площі криволінійних трапецій, об’єми простіших тіл обертання за допомогою визначених інтегралів (обчислювальна та аналітична компетентності);
7) розв’язувати побутові та прикладні задачі, що ілюструють та виявляють ймовірнісні та статистичні закономірності (обчислювальна та дослідницька компетентності).

Орієнтовний тематичний план вивчення курсу Алгебри і початків аналізу (350 годин, 6 годин на тиждень *) подано у таблиці 1.

Таблиця 1

Клас	№ п/п	Теми занять, види письмових робіт	К-ть годин для вивчення теми
10	1	Функції, многочлени, рівняння і нерівності	60
	2	Степенева функція	30
	3	Тригонометричні функції	30
	4	Тригонометричні рівняння і функції	35
		Систематизація та узагальнення резервний час	20
		Разом:	175
11	5	Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування	50
	6	Показникова та логарифмічна функції	25
	7	Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики	15
	8	Інтеграл та його застосування	25
	9	Рівняння, нерівності та їх системи. Узагальнення та систематизація	20
		Повторення курсу Алгебри і початків аналізу	35
		Резерв	5
		Разом:	175

) за навчальною програмою з математики для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів, профільний рівень.

Як видно з таблиці, кількість годин на вивчення окремих тем при тижневому навантаженні 6 год., досить велика. Часто це створює труднощі для учнів на належному рівні засвоювати навчальний матеріал. Тому на практиці вчителі розділяють великі теми на підтеми – логічно завершені порції навчального матеріалу. Вивчаючи навчальний матеріал відповідної підтеми учень бачить в близькій перспективі, що він має засвоїти з теорії, які вміння і навички мають бути сформовані, які прогалини в знаннях утворилися і яким чином їх усунути, на якому рівні засвоєно навчальний матеріал.

Це гарно мобілізує школярів на вивчення наступної підтеми, стимулює уникнути помилок.

З огляду на таку обставину пропонуємо більш ***деталізований орієнтований план вивчення курсу Алгебри і початків аналізу*** (таблиця 2).

Таблиця 2

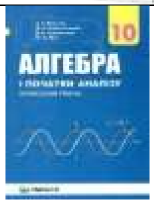
Клас	№ теми	№ підтеми	Теми занять, види письмових робіт	К-ть годин для вивчення теми
10	1. Функції, многочлени, рівняння і нерівності	1.1	Числові множини та операції над ними	12
		1.2	Вирази та їх перетворення	18
		1.3	Функції, їх властивості і графіки	15
		1.4	Рівняння і нерівності	15
	2. Степенева функції	2.1	Степенева функція, її властивості і графік. Ірраціональні вирази і їх перетворення	12
		2.2	Ірраціональні рівняння і нерівності	18
	3. Тригонометричні функції	3.1	Тригонометричні функції, їх властивості і графіки	12
		3.2	Тригонометричні вирази і їх перетворення	18
	4. Тригонометричні рівняння і нерівності	4.1	Тригонометричні рівняння	20
		4.2	Тригонометричні нерівності	15
	5.	Систематизація та узагальнення Резервний час		20
			Разом:	175
11	5. Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування	5.1	Послідовність. Границя послідовності	10
		5.2	Границя і неперервність функції	10
		5.3	Похідна та її застосування	30
	6. Показникова та логарифмічна функції	6.1	Показникова і логарифмічна функції	10
		6.2	Показникові та логарифмічні рівняння та нерівності	15
	7.	7.0	Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики	15
	8. Інтеграл та його застосування	8.1	Первісна та інтеграл	15
		8.2	Застосування інтегралу	13
	9.	9.0	Рівняння, нерівності та їх системи. Узагальнення та систематизація	20
	10.	Повторення курсу Алгебри і початків аналізу		20
			Резерв	12
			Резерв	5
			Разом:	175

3. Засоби навчання Алгебри і початків аналізу: альтернативні підручники, навчальні посібники, дидактичні матеріали

До засобів навчання відносять навчальні посібники, підручники, дидактичні матеріали, контрольні роботи, тести, технічні засоби, комп’ютерні програми тощо. Стосовно дисципліни Алгебра і початків аналізу всі вони мають бути зорієнтовані на профільний рівень вивчення математики в старшій школі.

***Основні підручники* (2022-2023 н.р., рекомендовані МОН України)**

10 Алгебра і початки аналізу (профільний рівень)
Нелін Є. П.
Видавництво Ранок
Наказ МОН від 31.05.2018, № 551

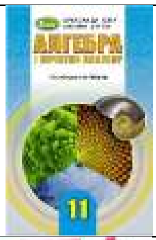


10 Алгебра і початки аналізу (профільний рівень)
Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С.
Видавництво Гімназія
Наказ МОН від 31.05.2018, № 551

10 Алгебра і початки аналізу (профільний рівень)
Бевз В.Г., Бевз Г.П., Владімірова Н.Г.
Видавництво ВД «Освіта»
Наказ МОН від 31.05.2018, № 551

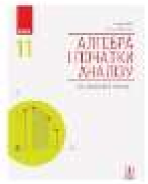
10 Алгебра і початки аналізу (профільний рівень)
Істер О.С., Єргіна О.В.
Видавництво Генеза
Наказ МОН від 31.05.2018, № 551

10 Алгебра і початки аналізу (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 кл., профільний рівень)
Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С.
Видавництво Гімназія
Наказ МОН від 31.05.2018, № 551



11 Алгебра і початки аналізу (профільний рівень)
Істер О.С., Єргіна О.В.
Видавництво Генеза
Наказ МОН від 12.04.2019, № 472

11 Алгебра і початки аналізу (профільний рівень)
Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С.
Видавництво Генеза
Наказ МОН від 12.04.2019, № 472

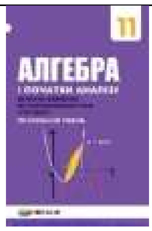


11 Алгебра і початки аналізу (профільний рівень)

Нелін Є. П., Долгова О.Є.

Видавництво Ранок

Наказ МОН від 12.04.2019, № 472



11 Алгебра і початки аналізу (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 кл., профільний рівень)

Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С.

Видавництво Гімназія

Наказ МОН від 12.04.2019, № 472

П І Д С У М О К

Алгебра і початки аналізу – обов’язкова навчальна дисципліна в старшій профільній школі. Її вивчення унормоване державними нормативними документами: стандартом загальної середньої освіти та програмою з математики для старшої профільної школи.

МЕТОДИЧНІ ЗАДАЧІ
для самостійного розв’язування

1. Опрацювати Стандарт-3 і виписати ключові компетентності, які мають формуватися в середніх закладах освіти.
2. Опрацювати Державний стандарт базової середньої освіти (затверджений Постановою Кабінету Міністрів України від 30.09.2020 р., № 898) і вписати:
   - ключові компетентності, які мають формуватися в учнів на даному рівні освіти;
   - змістові лінії галузі «Математика».
3. Здійснити порівняльний аналіз з ключовими компетентностями та змістовими лініями Стандарту-3. З’ясувати в чому проявляється їх схожість, відмінність, наступність.
4. Здійснити порівняльний аналіз навчальних програм з математики для старшої школи рівня стандарту і профільного рівня. З’ясувати в чому проявляється їх єдність і відмінність.
5. Ознайомитися з альтернативними підручниками з Алгебри і початків аналізу, профільний рівень.

Алгебра щедра, вона часто дає більше, ніж у неї просять

Ж. Даламбер

Л Е К Ц І Я 2.2

Т Е М А *Множини і операції над ними. Потужність множин*

П Л А Н

1.	***Місце теми «Вирази, функції, рівняння і нерівності» в програмі профільної школи, основна мета вивчення, вимоги до підготовки учнів, орієнтовне планування навчального процесу***
2.	***Методика вивчення підтеми «Числові множини і операції над ними». Поняття множини, стандартні множини, операції над ними***
3.	***Еквівалентність множини, потужність множини, зліченні множини і континуальні множини***
4.	***Числові множини в задачах шкільного курсу математики***

К О Н С П Е К Т Л Е К Ц І Ї

1. Місце теми «Вирази, функції, рівняння і нерівності» в програмі профільної школи, основна мета вивчення, вимоги до підготовки учнів, орієнтовне планування навчального процесу

Названа тема – перша навчальна тема курсу алгебри і початків аналізу старшої профільної школи. На її вивчення програмою відводиться 60 годин. В основній школі в учнів вже сформовані уявлення про вираз, функцію, рівняння та нерівність, вміння спрощувати окремі вирази, будувати графіки окремих елементарних функцій, розв’язувати певні типи рівнянь і нерівностей. Їх знання про такі об’єкти формувалися переважно на наочно-оперативному рівні. Оскільки в курсі алгебри і початків аналізу, згідно стандарту освіти, продовжується вивчення нових видів виразів, функцій, рівнянь і нерівностей, а учні з підліткового віку перейшли в юнацький, то є можливість і потреба узагальнити та систематизувати одержані знання, сформувати в подальшому нові на теоретико-практичному рівні.

Тому ***основна мета вивчення*** названої теми передбачає*:*

- актуалізувати, узагальнити та розширити знання учнів з алгебри про множини, алгебраїчні вирази, функції, рівняння і нерівності;
- сформувати удосконалені означення названих понять;
- повторити способи розв’язання типових задач на вказані поняття і їх властивості;
- підготувати основу для вивчення нових видів виразів, функцій, рівнянь та нерівностей.

Зміст навчального матеріалу теми, вимоги до підготовки учнів подані в таблиці 1 (*фрагмент навчальної програми*).

Таблиця 1

Зміст навчального матеріалу	**Навчальні досягнення учнів**
Тема 1. ФУНКЦІЇ, МНОГОЧЛЕНИ, РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ (60 год) Множини, операції над множинами. *Взаємно однозначна відповідність між елементами множин. Рівнопотужні множини [Зліченні множини].* Числові функції. Множина дійсних чисел. Числові функції. Область визначення і множина значень функції. Способи задання функцій. Графік функції. Зростання і спадання, парність і непарність функцій, найбільше та найменше значення функції. Властивості і графіки основних видів функцій. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень відомих графіків функцій. Рівносильність перетворення рівнянь. Рівняння-наслідки. Застосування властивостей функцій до розв’язування рівнянь. Рівносильні перетворення нерівностей. Метод інтервалів. Рівняння і нерівності, що містять знак модуля. *Рівняння і нерівності з параметрами.* *Графік рівняння з двома змінними. Нерівність з двома змінними. Графік нерівності з двома змінними.* *Системи рівнянь і нерівностей.* *Ділення многочленів. Теорема Безу та наслідки з неї.* *Метод математичної індукції*	*Зображує* на діаграмах чи числовій прямій об’єднання і переріз множин та *ілюструє* поняття підмножини. *Формулює* означення підмножини, об’єднання і перерізу множин. *Знаходить* об’єднання і переріз числових множин. *Користується* різними способами задання функцій. *Формулює* означення числової функції, зростання і спадання, парності і непарності функцій. *Знаходить* область визначення функціональних залежностей, значення функцій при заданих значеннях аргументу і значення аргументу, за яких функція набуває даного значення. *Встановлює* за графіком функції її властивості. *Виконує і пояснює* перетворення графіків функцій. *Досліджує* властивості функцій і *використовує* одержані результати при побудові графіків функцій. *Застосовує* властивості функцій та многочленів до розв’язування рівнянь і нерівностей. *Описує* зміст понять «рівняння-наслідок» і «рівносильні перетворення рівнянь та нерівностей». *Використовує* їх при розв’язуванні рівнянь та нерівностей. *Розв’язує* нерівності за допомогою методу інтервалів; рівняння і нерівності, які містять знак модуля і параметри. *Будує* нескладні графіки рівнянь та нерівностей з двома змінними

Запропонована для вивчення тема надто об’ємна за змістом навчального матеріалу, за метою і часом вивчення. Тому, виходячи з дидактичних міркувань, її доцільно розділити на окремі підтеми і вивчати кожну з них окремо. Як показує практика, це краще націлює учнів на кінцевий результат, гарно мотивує до подальшого вивчення курсу алгебри і початків аналізу, сприяє успішному засвоєнню навчального матеріалу.

Виходячи з приведених міркувань пропонуємо *розділити тему на такі підтеми*:

Підтема 1.1. Числові множини і операції над ними (12 год);

Підтема 1.2. Алгебраїчні вирази та їх перетворення (18 год);

Підтема 1.3. Функції, їх властивості і графіки (15 год);

Підтема 1.4. Рівняння і нерівності (15 год).

Розподіл часу на вивчення орієнтовний. Надалі розглянемо методику вивчення кожної з виділених підтем окремо.

2. Методика вивчення підтеми «Числові множини і операції над ними». Поняття множини, стандартні множини, операції над ними

Вивчення названої підтеми рекомендуємо розпочати з визначення змісту, навчального матеріалу, основної мети вивчення, вимог до підготовки учнів та орієнтовного планування навчального процесу. Ці вихідні атрибути організації навчання приведені нами в таблиці 2.

Календарне планування вивчення підтеми «Числові множини і операції над ними», основна мета вивчення, вимоги до підготовки учнів.

Таблиця 2

<table>
<tr><th>№</th><th>Теми занять,
види письмових робіт</th><th>К-ть годин</th><th>Дата</th><th>Вимоги до підготовки</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Множини, універсальна множина, операції над множинами</td><td>2</td><td></td><td rowspan="8">Основна мета вивчення:
Систематизувати, узагальнити, поглибити і розширити знання учнів про множини й операції над ними, зокрема, про множини натуральних, раціональних та дійсних чисел.
Ознайомити з методом математичної індукції і його застосуванням до розв'язування задач.
Підготувати теоретичну базу для вивчення нового виду виразів, числових функцій та їх властивостей.
Вимоги до підготовки учнів
Учень / Учениця:
- має поняття про множину, універсальну множину, стандартну множину;
- знає означення рівних, рівнопотужних множин, операцій об'єднання, перерізу множин;
- знає аксіому Кантора, зміст методу математичної індукції;
- має уявлення про зліченні множини і контипуальні множини;
- вміє зображати числа на прямій;
- знає теорему про точно нижню (точно верхню грань) числової множини;
- вміє застосовувати знання про числові множини і дії над ними під час розв'язування практичних задач з математики</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Взаємно однозначна відповідність між елементами множин.
Рівнопотужні множини</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Зліченні множини і континуальні множини С.Р.</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Множина натуральних чисел. Метод математичної індукції С.Р.</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>5.</td><td>Точка нижня і точка верхня грані обмеженої числової множини</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>6.</td><td>Числові множини в задачах з алгебри С.Р.</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>7.</td><td>Контрольна робота</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Всього :</td><td>12</td><td></td></tr>
</table>

Перше заняття на тему «Множина, універсальна множина, операції над множинами» пропонуємо провести у формі шкільної лекції, зміст якої подано нижче.

Шкільна лекція на тему

«Множина, універсальна множина, операції над множинами»

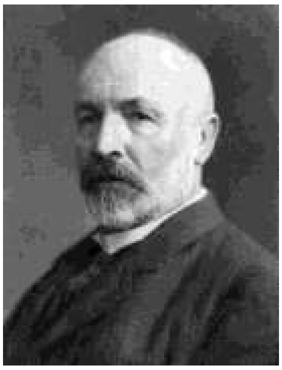
З основної школи учні мають уявлення про множину як про **сукупність** об'єктів будь-якої природи, що об'єднуються за певною характеристичною (відмітною) ознакою.

Наприклад, множина сторін трикутника, множина учнів класу, множина мешканців м. Києва, множина натуральних чисел.

Характеристичними (відмітними) ознаками цих множин відповідно є : три відрізки, що утворюють фігуру трикутник; учні, які навчаються в одному класі; громадяни, які проживають в м. Києві; числа, якими позначають кількість предметів.

Рівнозначними терміну множина в розмовній мові є слова *клас, група, комплекс, спільнота, об'єднання* тощо. Задати множину означає або перерахувати її елементи, або вказати характеристичну ознаку, користуючись якою можна визначати для будь-якого об'єкта належить він до даної множини (спільноти) чи ні.

Множини, як предмет вивчення, в науці математика – почали досліджуватися на початку XIX ст. Помітний внесок в створення теорії множин зробили: чеський математик Бернард Больцано, німецькі математики Георг Кантор і Ріхард Дедекінд, радянські математики Павло Александров, Андрій Колмогоров та багато інших.



Георг Кантор

Засновником науки теорії множин вважають Г. Кантора (1845–1918 р.).

Вплив створеної теорії множин на розвиток сучасної математики виявився дуже плідним. Вона, наприклад, стала фундаментом для розвитку нових математичних дисциплін: ***теорії функцій дійсної змінної; загальної топології; загальної алгебри; функціонального аналізу*** та інших.

Починаючи з середини XX ст. множини і операції над ними (*так звана «наївна» теорія множин*) почали вивчати і в шкільному курсі математики. Зупинимося на цьому детальніше.

У шкільному курсі математики поняття множина так само як точка, пряма, площина, належить до неозначуваних понять. Строге означення множини не дається, лише пояснюється. Предмети, з яких складається множина, називаються її елементами. Елементи множини зазвичай позначають малими буквами латинського або грецького алфавіту. Для позначення множини використовують великі літери і фігурні дужки. Наприклад, множину A з своїми елементами $a,\ b,\ c$ записують як $A = \{a, b, c\}$. Належність (включення) елемента даній множині позначається символом «∈», а якщо елемент не належить множині, то символом «∉». Наприклад, запис $a \in A$ читається «елемент a належить множині A» або коротко «a належить A». Запис $m \notin A$ читається «елемент m не належить множині A» або коротко «m не належить A».

Множину задають або переліком її елементів, або описанням характеристичної властивості її елементів. Наприклад,

1) $A = \{\boxdot,\ \triangle,\ \star\}$ – множина символів, задана переліком усіх її елементів;

2) $N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots\}$ – множина натуральних чисел, задана переліком її елементів (*три крапка означає що цей ряд продовжується безкінечно*);

3) $P = \{n \in N \,|\, \vdots\, 2\}$ – множина парних натуральних чисел, задана описом характеристичної властивості її елементів.

Фігурні дужки в записі вказують на те, що розглядається множина; знак | (вертикальна риска) замінює слова «таких що»; знак « ⋮ » читається які «діляться націло»; літерою *N* прийнято позначати множину натуральних чисел; знак ∈ означає «належить». Отже, такий запис можна читати:

а) «множина *P* – множина натуральних чисел *n* таких, що кожне з них націло ділиться на 2»;

б) «*P* – множина натуральних чисел, що ділиться на 2»;

в) «*P* – множина парних чисел».

4) D множина простих чисел (вказується лише характеристична властивість, яка дає змогу виписувати прості числа), задана описом характеристичної властивості її елементів.

Множини бувають скінченні і нескінченні, числові і нечислові. Множина учнів у класі, букв алфавіту – множини нечислові, скінченні. Названі вище множини *N, P, D* – числові, нескінченні. Множини точок прямої, відрізка, площини – нечислові, нескінченні. Для з’ясування вихідних положень, яких дотримуються під час вивчення множин в шкільному курс математики, розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. У чемпіонаті України з футболу розігрується три перші призові місця: *перше місце* – чемпіон; *друге місце* – віце-чемпіон; *третє місце* – бронзовий призер. У 2021-2022 році призерами стали: *перше місце* – ФК «Шахтар»; *друге місце* – ФК «Дніпро-1»; *третє місце* – ФК «Зоря».

Якщо записати множину призерів чемпіонату, то вона матиме вигляд {«Шахтар», «Дніпро-1», «Зоря»}. Характеристична ознака створеної множини містить вимоги:

призерів має бути три; їх слід вибирати з учасників чемпіонату України з футболу серед клубів вищої ліги; на першому місці в списку має йти чемпіон, за яким – віце-чемпіон, а за ним – бронзовий призер.

Отже, у множині {«Шахтар», «Дніпро-1», «Зоря»} кожний елемент записаний один раз, з дотриманням порядку, тобто ця множина упорядкована.

Приклад 2. На запитання, який у нього номер мобільного телефона, десятикласник Олег повідомив – 063-111-12-14. Такий набір цифр також можна розглядати як множину {0, 6, 3, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 4} з характеристичною властивістю, що включає вимоги :

- множина має містити десять цифр, взятих з цифрового алфавіту {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9};
- цифри у записі можуть повторюватися;
- кожній цифрі у записі визначено певне місце.

Зрозуміло, що порушення хоча б однієї з умов, може привести до нової множини, яка вже не буде номером телефона Олега. Отже, у множині {0631111214} важливим є: порядок запису елементів та те, що елементи в записі можуть повторюватися.

Приклад 3. Із 25 учнів 10-А класу потрібно виставити на шкільні змагання з волейболу команду з 6 гравців. До команди вибрали Віктора, Олексія, Леоніда, Василя, Миколу, Івана. Список членів команди {Віктор, Олексій, Леонід, Василь, Микола, Іван} – множина, для якої не важливий порядок запису гравців, головне що всі вони різні учні 10-А класу. Таким чином у такій множині всі елементи різні, кожен включається один раз, а в якому порядку відбувається запис – не істотно.

Із приведених прикладів випливають наступні важливі положення,
які потрібно враховувати під час вивчення множин:

1. Коли об'єкти об'єднуються за характеристичною ознакою в множину, то вони добираються з іншої, більш ширшої множини. Таку множину називають *універсальною*. Так, наприклад, множина натуральних чисел є універсальною для множин парних, непарних, простих, одноцифрових і т. п. чисел. Множина трикутників є універсальною множиною для множин прямокутних, рівнобедрених, рівносторонніх, різносторонніх трикутників;
2. Елементи множини можуть повторюватися в записі множин, а можуть записувати (включатись) лише один раз;
3. У множинах може встановлюватися вимога – який елемент за яким у записі слідує (така множина називається упорядкованою), а може такої вимоги і не бути (тоді множина називається неупорядкованою).

Якщо у множину кожен елемент включаються один раз і порядок запису не грає істотну роль, то її називають *стандартною множиною*. В іншому випадку множину називають *нестандартною*.

У прикладах 1, 2 – множини нестандартні, а в прикладі 3 – множина стандартна. У шкільному курсі математики, в переважній більшості розглядаються *стандартні множини.* Над такими множинами виконуються важливі, з точки зору науки, математичні *операції.* Розглянемо їх зміст і властивості.

Для цього спочатку назвемо ще одну множину, без якої вивчення операцій над множинами неможливе. З курсу алгебри відомо, що квадратне рівняння в множині дійсних чисел може мати два корені, один і жодного. Коли в рівняння є корені, то їх записують у вигляді множини. Коли ж коренів немає, то це прийнято позначати символом $\emptyset$ (перекреслена цифра нуль). Таким символом позначають *порожню множину,* тобто множину, яка не містить жодного елемента. Нехай задана універсальна множина U. З її елементів утворили сукупність множин A, D, C, D, … (Зауважимо, що розглядаються лише стандартні множини).

Множини, які складаються із одних і тих же елементів, називаються *рівними.* Якщо, наприклад, множини A і B рівні, то пишуть $A = B$. Якщо кожен елемент множини B є також і елементом множин A, то множина B називається *підмножиною* множини A.

За допомогою символів це записується так: $B \subset A$ або $A \supset B$ і читається «B міститься в A або A містить B». Знак $\subset$ називається *знаком строго включення*. Якщо множина B може і дорівнювати множині A, то вживається символ $\subseteq$ (знак нестрогого включення). Тоді запис має вигляд $B \subseteq A$ або $A \supseteq B$. Порожня множина $\emptyset$ вважається підмножиною будь-якої множини X, тобто $\emptyset \subset X$. Саму множину A можна розглядати як підмножину A, тобто $A \subseteq A$.

Приклад 4. Записати всі підмножини множини $A = \{1, 2, 3\}$.

Підмножинами даної множини є множини $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\emptyset$. Інших підмножин множина A немає. Сукупність таких підмножин (множин) називають ***булеаном* множини A. Нестроге включення має такі властивості:**

1) $A \subseteq A$ (рефлексивність);

2) якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$, то $A = B$ (антисиметричність);

3) якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$ (транзитивність).

Рівність множин має властивості: 1) $A = A$ (рефлексивність);

2) якщо $A = B$, то $B = A$ (симетричність);

3) якщо $A = B$ і $B = C$, то $A = C$ (транзитивність).

Переріз множин. Розглянемо множини всіх натуральних дільників числа 32, тобто $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$ та числа 24, тобто $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$. Неважко помітити, що множини A та B мають спільні елементи $\{1, 2, 4, 8\}$.

Множина *C*, яка складається з усіх тих і тільки тих елементів, які належать кожній з даних множин A та B, називається *перерізом* (*добутком*) множин A та B і позначається $C = A \cap B$ ($\cap$ $-$знак перерізу), або $A \cap B = \{x | x \in A \text{ і } x\epsilon B\}$. Для наведеного вище прикладу, $C = \{1, 2, 4, 8\}$. Схематично переріз множин можна ілюструвати за допомогою фігур так, як на рисунку 1 (діаграми Ейлера-Венна).

а) $\boldsymbol{A \cap B = C}$

б) $\boldsymbol{A \cap B} = \emptyset$

Рис. 1

Об'єднання множин. Об'єднанням (сумою) двох множин A і B називається така множина C, яка складається з усіх елементів множин A і B, і лише з них. У цьому випадку пишуть $C = A \cup B$ ($\cup$ $-$знак об'єднання), або $A \cup B = \{x | x \in A \text{ або } x\epsilon B\}$. Якщо множина A та B мають спільні елементи, то кожен з них береться в множину C тільки один раз. Для множин дільників чисел 32 і 24 об'єднанням буде множина $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32\}$.

Схематично об'єднання множин *A* і *B* зображено на рисунку 2 (зафарбована частина).

а) $\boldsymbol{A \cup B = C}$

б) $\boldsymbol{A \cup B = C}$

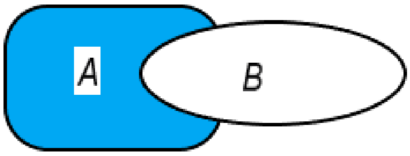
Рис. 2

Різниця множин. Доповнення множини

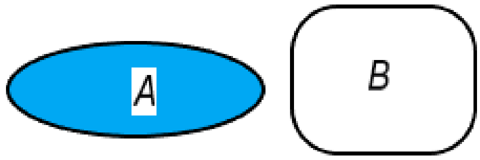
Різницею двох множин A і B називається така множина C, яка складається з усіх елементів множини A, які не належать множині B. Позначається $C = A \backslash B$ або $A \backslash B = \{x | x \in A \text{ або } x \notin B\}$. Для вказаних вище множин дільників чисел 32 і 24:

$C_1 = A \backslash B = \{16{,}32\}$ та $C_2 = B \backslash A = \{3, 6, 12, 24\}$.

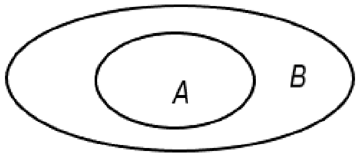
Схематично різницю двох множин A і B зображено на рисунку 3 (зафарбована частина). Якщо множина $B \subset A$ (рисунок 3 *г*)), то різниця $A \backslash B$ називається *доповненням* множини B до множини A. Результат операції «доповнення» суттєво залежить від тієї множини, до якої «доповнюється» задана множина. Наприклад, доповненням множини цілих чисел до раціональних є множина дробів, а доповненням цілих до дійсних – дробові та ірраціональні числа.



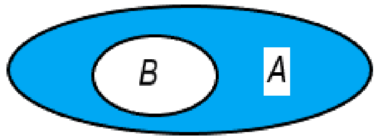
а) $\boldsymbol{A \backslash B = C}$



б) $\boldsymbol{A \backslash B} =$ ***A***



в) $\boldsymbol{A \backslash B} = \emptyset$



г) $\boldsymbol{A \backslash B = C}$

Рис. 3

Декартів добуток множин

Два елементи a і b, розташовані в певному порядку, називають *упорядкованою парою і записується* $(a,\ b)$. Елементи упорядкованої пари називають її *компонентами* або *координами*. Пари $(a_1;\ b_1)$ і $(a_2;\ b_2)$ називають *рівними* тоді і тільки тоді, коли $a_1 = a_2$ і $b_1 = b_2$. Упорядковану пару ще називають *кортежем* довжини 2 і позначають (a, b) або $\langle a, b \rangle$. Аналогічно вводиться поняття упорядкованої трійки (a, b, c), упорядкованої n-ки $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ – відповідно кортеж довжини 3, кортеж довжини n.

Декартовим добутком двох множин A і B називається множина C, яка складається із всіх пар (a, b), де $a \epsilon A$ і $b \epsilon B$. Позначається $A \times B$.
Наприклад, $A = \{a, b, c\}$ і $B = \{p, k\}$, тоді $A \times B = \{(a, p), (a, k), (b, p), (b, k), (c, p), (c, k)\ \}$ або $A \times B = \{(a, b)\ |a \epsilon A \text{ і } b \epsilon B\ \}$. Далі, перейдемо до розв'язування вправ на застосування отриманих знань.

КІНЕЦЬ ЛЕКЦІЇ

Продовжити знайомство учнів з відомостями про множини, зокрема числовими, рекомендуємо здійснити на практичному занятті. У підсумку учні мають усвідомлено і чітко відповідати на такі контрольні запитання та наводити при цьому ілюстративні приклади:

1. Що називають в математиці множиною?

2. Як позначаються множини та їх елементи?

3. Якими способами можна задати множину?

4. Яку множину називають: а) універсальною; б) стандартною; в) порожньою?

5. Які множини називають рівними?

6. Що називається перерізом множин?

7. Що називається об'єднанням множин?

8. Якими властивостями володіє: - відношення рівності множин; - відношення нестрого включення?

9. Що називається: - різницею двох множин; - доповненням множин?

10. Що називається декартовим добутком двох множин?

Важливо також на цьому занятті окрім тренувальних вправ розглянути і довести важливі закони, що стосуються операцій об'єднання, перерізу, різниці двох множин. Зокрема, якщо A, B і C – деякі множини, то мають місце рівності:

1) $A \cup B = B \cup A$ – переставний закон для об'єднання;

2) $A \cap B = B \cap A$ – переставний закон для перерізу;

3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – сполучний закон для об'єднання;

4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – сполучний закон для перерізу;

5) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

6) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

7) $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash (A \cap C)$;

8) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ – закон де Моргана. Тут риска над літерою означає, що бореться;

9) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ – доповнення множини до універсальної множини.

Якщо універсальна *U*, то $\bar{A} = U \backslash A$.

Пропонуємо щоб доведення однієї-двох рівностей, з ілюстраціями за допомогою діаграм Ейлера-Венна, провів вчитель, а інші доведення рекомендуємо щоб учні здійснили самостійно.

3. Еквівалентність множини, потужність множини, зліченні множини і континуальні множини

Множини і операції над ними є важливою основою для вивчення рівнянь, виразів, функцій та їх властивостей. Адже область визначення виразу, функції, область допустимих значень рівняння, нерівності та їх систем – все це множини. Не менш важливою властивістю множини є її потужність. Формування в учнів цього поняття, застосування потужності широко вживаних числових множин шкільного курсу математики, пропонуємо провести у формі шкільної лекції, зміст якої подано нижче.

Шкільна лекція на тему

«Потужності множини. Злічені і континуальні множини»

Як відомо, множини бувають скінченні і нескінченні. Якщо множина скінченна, то кількість її елементів можна виразити числом. Таке число називають потужністю множини. Наприклад, множина дільників числа 32 $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$ має потужність 6. Це записують так: $\bar{\bar{A}} = 6$. Дві риски зверху над позначенням множини вказують що розглядають потужність множини. Множина дільників числа 24 $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ має потужність $\bar{\bar{B}} = 8$. Отже, потужність множини B більша за потужність множини A.

Для скінченної множини її потужність – кількість елементів.

А якою буде потужність множини, якщо вона нескінченна? Проблемна ситуація.

Тут переліком елементів скористатися неможливо. Математики давно знайшли відповідь та таке запитання: *з'ясуємо в чому полягає зміст цієї відповіді*. Наприклад, зауважимо, що множини: N (множина натуральних чисел), Z (множина цілих чисел), Q (множина раціональних чисел), R (множина дійсних чисел) – ***нескінчені***. Співвідношення між ними виражається включенням $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Розглянемо спочатку доцільний приклад і, скориставшись отриманими відомостями, введемо нове поняття, яке необхідне для з'ясування відповіді на поставлене вище проблемне питання.

Приклад 1. Нехай маємо множину учнів класу і множину стільців у класній кімнаті. Як, не перераховуючи елементи однієї і другої множини, з'ясувати чи їх кількість однакова чи ні?

Відповідь на це питання визначається простою практичною дією. Досить запросити учнів сісти по одному на стілець. Якщо учням стільців не вистачить, то їх більше ніж стільців. Якщо ж певна кількість стільців залишиться вільною, то їх більше ніж учнів. А той випадок, коли всі учні всадяться на стільці і вільних місць не буде, вказує на те, що кількість стільців і кількість учнів однакова.

Наведений приклад приводить до введення для множин такого поняття, як кількісна ***еквівалентність множин*** (або коротко *еквівалентність множин*).

Означення 1. *Дві множини A і B називають кількісно еквівалентними або коротко еквівалентними, якщо кожному елементу множин A можна поставити у відповідність один елемент множини B і навпаки, кожен елемент множини B є відповідним одному елементу множини A. Еквівалентність множин A і B позначають символом «$\sim$», тобто $A \sim B$.*

Відношення еквівалентності має такі властивості:

1) $A \sim A$ (рефлексивність);

2) якщо $A \sim B$, то $B \sim A$ (симетричність);

3) якщо $A \sim B$ і то $B \sim C$, то $A \sim C$ (транзитивність).

Таку відповідність між елементами множин A і B називають *взаємно однозначною*. Її можна задати таблицею, схемою, формулою, описати словами.

Скористаємося цим поняттям для, наприклад, множини натуральних чисел N і множини додатних парних чисел P. Для довільного натурального числа n поставим у відповідність парне число $2n$ та навпаки, для довільного додаткового парного числа m (яке ділиться націло на 2) число $(m \vdots 2)$. Така відповідність між елементами множин N і P буде взаємно однозначною. Отже, множини N і P – кількісно еквівалентні. Легко довести, що еквівалентними будуть множина додатних непарних чисел P і множина додатних парних чисел, множина натуральних чисел і множина додатних непарних чисел.

Означення 2. *Множина, яка кількісно еквівалентна множині натуральних чисел називається **зліченною**.*

Отже, якщо множина зліченна, то це означає що її елементи можна перенумерувати.

Означення 3. *Якщо дві множини A і B еквівалентні, то їх називають **рівнопотужними**.*

Виходячи з даного означення отримуємо висновок – *всі зліченні множини рівнопотужні*. У теорії множин потужність множин натуральних чисел позначать символом «$\aleph$». Символ «$\aleph$» - перша буква древньоєврейського алфавіту, читається як «алєф», а вираз «$\aleph$» читається «алєф-нуль».

Для зліченних множин мають місце кілька важливих теорем. Розглянемо дві з них, якими будемо користуватися далі.

Теорема 1. ***Якщо множина B є підмножиною зліченної множини A, то вона або скінченна, або зліченна.***

Доведення. Нехай A зліченна множина. Занумеруємо її елементи, тоді ця множина може розглядатися як нескінченна послідовність:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \qquad (1)$$

Множина B буде частиною цієї послідовності. Нехай a_{n1} перший елемент послідовності (1) який є також елементом множини B. Нехай a_{n2} буде другим елементом в послідовності (1) і т.д.

Можливі два випадки: або після кінечної кількості кроків вибрані всі елементи множини B, яка таким чином буде скінченною, або одержимо нескінченну послідовність:

$$a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots, a_{nk}, \dots \qquad (2)$$

яка утворена із елементів множини *B* . Індекси $n1, \; n2, \; n3, \dots, \; nk$ показують, що ця множина еквівалентна множині натуральних чисел, тобто зліченна.

Наслідок 1. *Всяка нескінченна підмножина натуральних чисел – зліченна.*

Звідси слідує ще одне доведення того, що множина простих чисел, множина додатних парних, множина додатних непарних чисел – зліченні.

Теорема 2. ***Об'єднання зліченної кількості зліченних множин є множиною зліченною.***

Доведення. Нехай $A_1, A_2, A_3, \dots A_n, \dots$ – зліченні множини, а множина A – їх об'єднання. Занумеруємо елементи кожної множини і матимемо (перший індекс показує належність елемента множині, а другий номер елемента в послідовності):

$$A_1 = \{a_{11},\; a_{12},\; a_{13}, \dots, a_{1n}, \dots\} ;$$

$$A_2 = \{a_{21},\; a_{22},\; a_{23}, \dots, a_{2n}, \dots\} ;$$

$$A_3 = \{a_{31},\; a_{32},\; a_{33}, \dots, a_{3n}, \dots\} ;$$

$$A_k = \{a_{k1},\; a_{k2},\; a_{k3}, \dots, a_{kn}, \dots\} .$$

Тоді множину *A* можна записати наступним чином: $A = \{a_{11},\; a_{12},$ $a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, \dots\}$. При цьому, якщо в цій послідовності якийсь із елементів повторюється, то будемо його записувати один раз. Зрозуміло, що множина *A* буде еквівалентна множині натуральних чисел, тобто буде зліченою.

Наслідок 2. *Множина додатних раціональних чисел – зліченна.*

Дійсно, якщо позначити через A_1 множину всіх дробів з чисельником 1, то матимемо зліченну множину: $A_1 = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$.

Міркуючи аналогічно, виберемо по черзі чисельником 2, 3, 4, … матимемо злічену кількість злічених множин:

$$A_2 = \left\{\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \dots, \frac{2}{n}, \dots\right\}$$

$$A_3 = \left\{\frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{3}{n}, \dots\right\}$$

$$A_k = \left\{\frac{k}{1}, \frac{k}{2}, \frac{k}{3}, \dots, \frac{k}{n}, \dots\right\}$$

Їх об'єднання $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_k \cup \dots$ утворює множину додатних раціональних чисел. Згідно теореми 2 вона зліченна. А чи існують незліченні множини? Виявляється існують, але про це ми дізнаємося в наступній лекції.

КІНЕЦЬ ЛЕКЦІЇ

Закріплення вивченого матеріалу про зліченні множини рекомендуємо провести на практичному занятті. В якості задач можна з учнями довести, що:

1) множина цілих від'ємних чисел – зліченна;
2) множина цілих чисел – зліченна;
3) множина цілих чисел, які діляться націло на 2 зліченна;
4) множина раціональних чисел зліченна;
5) множина точок координатної площини з цілими координатами – зліченна;
6) об'єднання скінченної множини і зліченної множини – зліченна множина.

Завершити знайомство учнів з множинами і операціями над ними рекомендуємо провести повідомленням про множини потужності континууму. Його також варто провести у формі шкільної лекції, зміст якої подана нижче.

Шкільна лекція на тему

«Множини потужності і континуум»

Як було встановлено раніше множини N, Z, Q – зліченні. Доведемо, що множина чисел більших за нуль і менше за 1 незліченна. Позначимо її Q_1. До множини цих чисел належать раціональні числа і ірраціональні. З курсу алгебри відомо, що кожне раціональне число можна записати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу, а кожне ірраціональне число у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу.

Припустимо, що множина Q_1 – зліченна, тобто що всі її елементи можна перенумеровати. Запишемо кожне число цієї множини у вигляді нескінченного десяткового дробу.

Матимемо послідовність:

$$a_1 = 0, \propto_1 \propto_2 \propto_3 \ \dots \ \propto_n \dots$$

$$a_2 = 0, \propto_{21} \propto_{22} \propto_{23} \ \dots \ \propto_{2n} \dots$$

$$a_3 = 0, \propto_{31} \propto_{32} \propto_{33} \ \dots \ \propto_{3n} \dots$$

$$a_k = 0, \propto_{k1} \propto_{k2} \propto_{k3} \ \dots \ \propto_{kn} \dots$$

$\propto_{im}$ – число одиниць певного розряду у записі числа.

Утворимо нове число:

$a \ = 0, \beta_1 \, \beta_2 \beta_3 \ \dots \ \beta_n \dots$ де $\beta_1 \neq \propto_{11}$, $\beta_2 \neq \propto_{22}$, $\beta_3 \neq \propto_{33}$, $\dots$ $\beta_n \neq \propto_{nn}$, $\dots$

Воно буде більше 0 і менше 1 і не дорівнюватиме жодному з чисел a_i, де $i \in N$. Його в переліку чисел множини Q_1 немає, а за припущенням, воно має потрапити до переліку. Зроблене припущення, що числа множини Q_1 можна перелічити приводить до суперечності. Отже, *множина* Q_1 – ***не є зліченною.*** Потужність цієї множини більша за потужність зліченної множини. У теорії множини таку потужність називають «*потужністю континууму*» і позначають літерою C (перша буква латинського слова неперервне, суцільне *continuum*), а множину з такою потужністю називають ***континуальною***.

З'ясуємо, які ще множини шкільного курсу математики мають потужність континууму. Для цього розглянемо множину дійсних чисел R і множину точок прямої a, вибраної на площині. Із курсу планіметрії відомі аксіоми відкладання відрізка. Зауважимо, що під відрізком AB будемо розуміти фігуру, яка складається з двох точок прямої A і B, і всіх точок, що лежать між ними. Це так званий замкнутий відрізок. Додамо до вже відомих аксіом шкільного курсу планіметрії ще одну, яку називають ***аксіомою Кантора*** (*аксіома про вкладені відрізки*).

Аксіома Кантора. Нехай задана послідовність відрізків $[A_n;\ B_n]$, де $n \in N$, що лежать на одній прямій. Якщо

а) $[A_1;\ B_1] \supset [A_2;\ B_2] \supset [A_3;\ B_3] \supset \cdots \supset [A_n;\ B_n] \supset \cdots$, тобто кожний наступний відрізок міститься в попередньому;

б) довжина відрізка $[A_n;\ B_n]$ прямує до 0 із зростанням $n (n \to \infty)$;

то існує на прямій єдина точка C, спільна для всіх відрізків $[A_n;\ B_n]$, де $n \in N$, тобто $C \subset [A_n;\ B_n]$ для всіх $n \in N$.

Скористаємося даною аксіомою і встановимо взаємно однозначну відповідність між елементами множини дійсних чисел R і елементами (точками) прямої a, тобто переконаємося що ці дві множини ***еквівалентні.***

Покажемо спочатку як кожному дійсному числу можна поставити відповідну точку прямої. Позначимо на прямій a точку O (рис. 4), задамо напрям і одиничний відрізок OA_1. Поставимо у відповідність числу 1 точку A_1, числу 0 точку P. Відкладаючи послідовно то вправо то вліво одиничний відрізок OA_1, отримуємо точки $A_2, B_1, A_3, B_2, A_4, B_3$, … Числу 2 поставимо у відповідність точку A_2, числу 1 точку B_1, числу 3 точку A_3 і т. д.

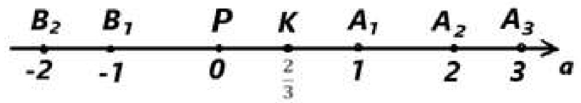


Рис. 4

Таким способом кожному цілому числу поставимо у відповідність одну точку прямої a. Розглянемо інше, дробове число, записане у вигляді звичайного дробу $\frac{m}{n}$, наприклад $\frac{2}{3}$. Розділимо одиничний відрізок OA, скориставшись теоремою Фалеса, у відношенні 2 : 3 (рис. 5).

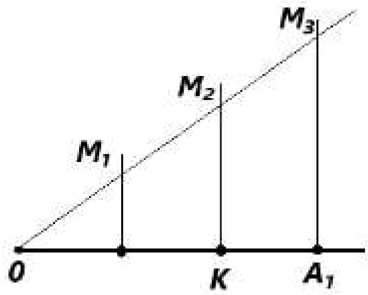


Рис. 5

Довжина відрізка OK буде становити $\frac{2}{3}$ довжини OA_1. відкладемо від точки O на прямій a відрізок OK. В такий спосіб поставимо у відповідність числу $\frac{2}{3}$ точку K (рис. 5). Виконуючи аналогічні дії з іншими дробовими числами поставимо кожному з них одну точку прямої a.

Як бачимо, різним раціональним числам поставимо у відповідність різні точки прямої a. З ірраціональними числами поступимо інакше. Нехай маємо ірраціональне число ∝, наприклад, число π. Таке число виражається нескінченним неперіодичним десятковим дробом, тобто $\pi = 3{,}14159265$ ... .

Утворимо дві послідовності *раціональних чисел*:

3,1 ; 3, 14; 3,141; 3,1415; 3,14159; … (1)

3,2 ; 3, 15; 3,142; 3,1416; 3,14160; … (2)

Для кожної з цих раціональних послідовностей (1) та (2) поставимо у відповідність (описаним вище способом) дві послідовності точок прямої a:

A_1 ; A_2 ; A_3; A_4; A_5; … (1’)

B_1 ; B_2 ; B_3; B_4; B_5; … (2’)

Утвориться послідовність відрізків $[A_1; B_1] \supset [A_2; B_2] \supset [A_3; B_3] \supset \cdots$, що лежать на прямій a. Довжина першого відрізка дорівнює 0,1, довжина другого 0,01, третього 0,001, …, тобто їх довжини прямують до нуля із зростанням номера. Згідно аксіоми

Кантора, на прямій a знайдеться єдина точка C, спільна для всіх відрізків. Її і поставимо у відповідність числу π. Отже, описаним вище способом вдалося *кожному дійсному числу $x \in R$ поставити у відповідність одну точку прямої a.*

Задамо зворотну відповідність, тобто як кожній точці прямої a поставити у відповідність одне дійсне число. Позначимо на прямій точку O і одиничний відрізок OE (рис. 6).

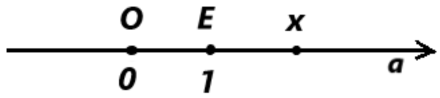


Рис. 6

Точці O поставимо у відповідність число 0, точці E число 1. Нехай x довільна точка прямо a.

Відклавши n разів відрізок OE (наприклад вправо від точки O), отримаємо що точка х лежить між точками A_1 і B_1.Якщо точка x співпадає з точкою A_1, то їй ставимо у відповідність ціле число K, якщо ні, то відрізок $[A_1; B_1]$ ділимо на 10 рівних частин. Тоді точка X буде міститися між двома новими поділками A_2 та B_2. Ціна кожної поділки 0,1 одиничного відрізка $[OE]$. Нехай для точки A_2 ця поділка буде $\propto_k$, тоді для поділки B_2 вона буде $\propto_{k+1}$, де $k = 0, 1, 2, \dots 9$.

Якщо точка X співпадає з точкою A_2, то їй ставимо у відповідність число $r = K$, $\propto_k$, якщо ні, то відрізок $[A_2; B_2]$ знову ділимо на 10 рівних частин і продовжуємо діяти так, само як і в попередньому випадку.

Якщо на якомусь кроці цей процес завершиться, то точці X буде поставлено у відповідність раціональне число $r = K$, $\propto_k, \propto_p, \propto_m, \dots \propto_n$, якщо ні, то такі дії слід продовжувати до нескінченності. В підсумку точці X буде поставлено у відповідність одне число, яке виражене нескінченним десятковим дробом $\propto = K$, $\propto_k \propto_p \propto_m$ ...

Отже, кожній точці X прямої a, описаним вище способом, буде поставлено у відповідність одне дійсне число. Таким чином ***доведено, що множина дійсних чисел R і множина точок прямої – еквівалентні множини.***

Ось чому пряму з відображеною на ній множиною дійсних чисел називають *числовою прямою.* Для такої прямої мають місце такі, часто вживані, терміни: точка B якій відповідає, наприклад, число 3 або точка B(3), або координата точки B дорівнює 3, або, коротко, точка 3; числовий проміжок $[0; 3]$, або сегмент $[0; 3]$. Коли числа 0 і 3 не включаються до проміжку то таку множину називають інтервал $(0; 3)$. У випадку, коли записують множини $(0;3]$, чи $[0;\ 3)$, то їх називають відповідно ***півінтервалом, півсегментом.***

Щоб зробити кінцеві висновки про незліченні множини, розглянемо ще два приклади відповідності між точками фігур на площині.

Приклад 1.

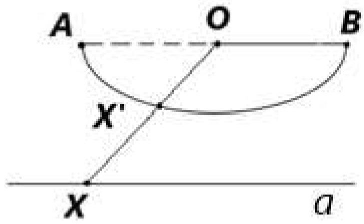


Рис. 7

Нехай задано півколо з центром O і діаметром AB і пряма a (рис. 7), $AB \parallel a$.
У півколо не включаються точки A і B.
Нехай множина точок півкола M, а
N – множина точок прямо a. Проведемо з точки O промінь OX до перетину з прямою a.

Цей промінь перетне півколо в точці X'. Таким способом поставимо у відповідність кожній точці X прямої точку X' півкола і навпаки, кожній точці півкола поставимо у відповідність одну точку прямої a. Отже, множини M і N ***еквівалентні*, тобто – *рівнопотужні.***

Приклад 2.

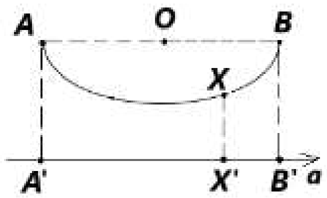


Рис. 8

Нехай задано півколо з центром O і діаметром AB і пряму a (рис. 8), $AB \parallel a$.
З кожної точки X півкола опустимо перпендикуляр на пряму a.

Таким способом кожній точці X півкола поставимо у відповідність одну точку відрізка $A'B'$ і навпаки, кожній точці відрізка $A'B'$ поставимо у відповідність одну точку півкола. Отже, множина точок півкола і множина точок відрізка – ***еквівалентні*, тобто – *рівнопотужні.***

Виходячи з того, що відношення еквівалентності множини транзитивне, отримуємо ***важливі для вивчення курсу Алгебри і початків аналізу висновки***: 1) множини точок відрізка, прямої, числового проміжку (0; 1), числової прямо – еквівалентні, тобто рівнопотужні; 2) оскільки множини чисел проміжка (0; 1) має потужність континууму, то таку ж потужність мають, множини точок, відрізка, прямої, числової прямої, числового променя.

КІНЕЦЬ ЛЕКЦІЇ

Закріпити вивчення теоретичних відомостей про множини, операції над ними і їх потужність рекомендуємо продовжити на практичних заняттях. Важливо, на одному з них ознайомити учнів з поняттями ***точно верхньої*** і ***точно нижньої*** грані ***обмеженої числової*** *множини*, оскільки вони будуть потрібні під час вивчення наступних тем не тільки з алгебри і початків аналізу, а й і з стереометрії. Орієнтовний зміст бесіди про формування вказаного поняття подано нижче.

Шкільна лекція на тему

«Точно верхня і точно нижня грані обмеженої множини»

Продовжимо знайомство з числовими множинами і їх властивостями. Нехай задана числова множина A. Якщо існує число $\propto$ від якого всі числа множини A більші або рівні $\propto$, то кажуть, що ***множина A обмежена числом $\propto$ знизу***. Якщо існує число β від якого всі числа множини *А* менші або рівні β, то кажуть, що ***множина A обмежена числом β зверху. Якщо множина A обмежена і знизу, і зверху, то її називають обмеженою***.

Для формування нових понять розглянемо кілька доцільних прикладів.

Приклад 1. Нехай задана скінченна числова множина $B = \{2, 8, 9, 11, 12, 15\}$.

Очевидно, що якщо вибрати число $\propto = 0$, то всі її елементи більші за $\propto$. Але ж можна вибрати і ще більше за нуль число, від якого всі числа множини B будуть більшим і навіть рівними. Це буде число 2. Зрозуміло, що більшого за 2 числа, від якого всі числа множини B будуть не менші, не існує В цьому випадку, число 2 називають точно нижньою гранню (межею) множини B і позначають $2 = infB$ (читається «2 інфімум множини B»). Міркуючи аналогічно бачимо, що всі елементи множини B не більші за число 15. У цьому випадку число 15 називають точно верхньою межею (гранню) множини B і позначають $15 = supB$ (читається 15 супремум множини B).

Очевидно, якщо множина скінченна, то в неї є і точно нижня і точно верхня межі, які містяться серед елементів множини. А якщо нескінченна?

Приклад 2. Розглянемо множину $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\}$.

Вона нескінченна. Легко бачити, що $supA = 1$. Найбільшим дійсним числом, від якого всі елементи множини A будуть більшими, буде число 0. Його й приймають за $infA$.

Наведені приклади приводять до введення для числових множин двох понять : точно нижньої грані та точно верхньої грані.

Означення. *Точно нижньою (верхньою) гранню числової множини A називається таке найбільше (найменше) число $\propto$, від якого всі елементи множини A не менші (не більші). Позначають $\propto = infA$ ($\propto = supA$).*

Виникає запитання «У яких числових множин існують точно нижня (точно верхня) грані?» Відповідь на нього дає наступна теорема.

Терема 3. Якщо непорожня множина дійсних чисел обмежена знизу (зверху), то вона має точно нижню (точно верхню) грань (межу).

Доведення. Доведемо існування точно нижньої грані для обмеженої знизу числом $\propto$ числової множини A. Відобразимо на числовій прямій OX множину A і число $\propto$ (рис. 9).

Рис. 9

Для кожного елемента $x \epsilon A$ має місце нерівність $x \geq \propto$.

Виберемо у множині A один з елементів, наприклад β і на першому кроці доведення розглянемо проміжок $[\propto;\ \beta]$. Поділимо його навпіл. Нехай серединою буде точка C. Отримуємо два проміжки $[\propto;\ C]$ і $[C;\ \beta]$.

Якщо в проміжку $[\propto;\ C]$ немає елементів множини A, то обираємо для наступного розгляду проміжок $[C;\ \beta]$. Якщо ж у проміжку $[\propto;\ C]$ є принаймні один елемент множини A, то до розгляду обираємо саме цей проміжок. Обраний для розгляду проміжок позначимо $[\propto_1;\ \beta_1]$. Його довжина зменшилася вдвічі в порівнянні з довжиною проміжком $[\propto;\ \beta]$.

Для обраного проміжку $[\propto_1;\ \beta_1]$ мають місце дві властивості:

1) він містить принаймні один елемент множини A;
2) елементів множини A, розміщених зліва на числовій осі від $\propto_1$ немає.

На другому кроці доведення, виконуємо з проміжком $[\propto_1;\ \beta_1]$ ті ж самі дії що й проміжком $[\propto;\ \beta]$. Отримуємо новий проміжок $[\propto_2;\ \beta_2]$. Продовжуємо здійснювати цей процес до нескінченності. Отримуємо послідовність вкладаних відрізків $[\propto;\ \beta] \supset [\propto_1;\ \beta_1] \supset [\propto_2;\ \beta_2] \supset \cdots [\propto_n;\ \beta_n] \supset \cdots$.

Довжина кожного з них дорівнює $\frac{\beta - \propto}{2^n}$, де $n =$ 1, 2, 3…, тобто прямує до 0. За аксіомою Кантора на числовій осі OX знайдеться єдина точка $\propto_0$, яка належатиме всім проміжкам. Вона і буде точно нижньою гранню множини A, тобто $\propto_0 = infA$.

Міркуючи аналогічно, доводять теорему існування точно верхньої грані.

4. Числові множини в задачах шкільного курсу математики

Отримані теоретичні знання про множини і операції над ними доцільно закріпити шляхом розв'язування практичних задач та вправ, зокрема задач на повторення з курсу алгебри 7-9 класів. Їх в діючих підручниках є вдосталь.

Розглянемо окремі з них разом із доречними коментарями та порадами. Це дасть змогу учням по новому подивитися на раніше отримання знання.

Задача 1. *Довести що множина ірраціональних чисел має потужність континууму.*

Доведення. Позначимо множину ірраціональних чисел літерою I. Скористаємось методом доведення від супротивного. Як відомо, множина дійсних чисел I має потужність континууму, а множина раціональних чисел Q – зліченна. Припустимо, що множина I – зліченна. Тоді з рівності $R = Q \cup I$ та з теореми про об'єднання зліченних множин, слідує, що множина R – зліченна. Отримали протиріччя. Отже, припущення, що множина I зліченна – хибне. Множина I – континуальна.

Задача 2. *Записати множини, перелічивши їхні елементи:*

1) $A = \{x \epsilon R : x^2 - 3x + 2 = 0\}$;   2) $A = \left\{x \epsilon R : x + \frac{1}{x} < 2 \text{ і } x > 0\right\}$.

Розв'язання

1) Множина A – множина дійсних коренів рівняння $x^2 - 3x + 2 = 0$. За теоремою оберненою до теореми Вієта (відому з курсу алгебри) знаходимо корені даного рівняння: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$. Отже, $A = \{1; 2\}$.

2) Множина A – множина дійсних додатних розв'язків систем нерівностей $\begin{cases} x + \frac{1}{x} \leq 2, \\ x > 0. \end{cases}$ Розв'яжемо її.

Зводимо першу нерівність до виду $\frac{x^2-2x+1}{x} \leq 0$ і враховуючи, що в другій нерівності вимагається, щоб змінна *x* приймала додатні значення, отримуємо нерівність $(x-1)^2 \leq 0$. Її множина розв'язків містить лише одне число *x* = 1. Отже, $A = \{1\}$.

Задача 3. *Знайти об'єднання, переріз та різницю множини A та B*

$A = \{x \epsilon R : (x^2 - 5x + 6)/(x - 4) < 0\}$; $B = \{x \epsilon R : (x - 1)/(x + 2) \geq 1\}$.

Розв'язання

Множина A – множина дійсних розв'язків нерівності $\frac{x^2-5x+6}{x-4} < 0$. Розв'яжімо цю нерівність. Чисельник $x^2 - 5x + 6$, як квадратний тричлен, можна подати у вигляді добутку $(x-2)(x-3)$, оскільки 2 і 3 його корені.

Тоді маємо нерівність $\frac{(x-2)(x-3)}{(x-4)} < 0$.

Розв'язуємо її методом інтервалів (відомий з курсу алгебри, 7-9 класи) (рис. 10).

Отже, $A = (-\infty; 2) \cup (3; 4)$.

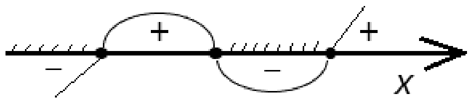


Рис. 10

Множина B – множина дійсних розв'язків нерівності $\frac{x-1}{x+2} \geq 1$. Перетворимо її:

$$\frac{x-1}{x+2} \geq 1; \frac{x-1-x-2}{x+2} \geq 0; \frac{-3}{x+2} \geq 0.$$

Звідки отримуємо нерівність $x+2<0$, її розв'язки $x<-2$.

Отже, $B=(-\infty;2)$. Отримали $A=(-\infty;2)\cup(3;4)$; $B=(-\infty;2)$. Тоді легко бачити, що а) $A\cup B=(-\infty;-2)\cup(3;4)$; б) $A\cap B=(-\infty;-2)$; в) $A\backslash B=(3;4)$.

Відповідь : $A\cup B=(-\infty;-2)\cup(3;4)$; $A\cap B=(-\infty;-2)$; $A\backslash B=(3;4)$.

Задача 4. *Для визначення впливу реклами на купівлю мийних засобів було проведено опитування. У результаті було встановлено, що при виборі товару 50 % осіб керувались рекламою, 30 % власною думкою про якість товару, 40 % порадами друзів і знайомих. Виявилося, що 10 % осіб керувались рекламою та власною думкою, 9 % рекламою та порадами друзів, 15 % власною думкою та порадами друзів. Скільки процентів опитуваних керувалися тільки рекламою, власною думкою та порадами друзів одночасно? Скільки процентів опитуваних керувалися лише рекламою, лише власною думкою, лише порадами друзів?*

Розв'язання

Нехай A – множина покупців, які керувалися під час покупки рекламою, B – множина покупців, які керувалися під час покупки власною думкою, C – множина покупців, які керувалися під час покупки порадами друзів. Тоді $A\cap B$ – множина покупців, які керувалися рекламою та власною думкою; $A\cap C$ – множина покупців, які керувалися рекламою та порадою друзів; $B\cap C$ – множина покупців, які керувалися власною думкою та порадою друзів; $A\cap B\cap C$ – множина покупців, які керувалися всіма трьома порадами.

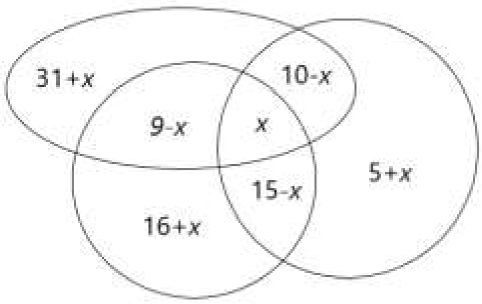


Рис. 11

Нехай на множину $A\cap B\cap C$ припадає x *%.* Скористаймося діаграмами Ейлера-Венна (рис. 11) множину всіх опитуваних приймаємо за 100 %.

Тоді маємо рівняння:

$$31+x+5+x+16+x+10-x+9-x+15-x+x=100$$

$$\Updownarrow$$

$$x+86=100$$

$$\Updownarrow$$

$$x=14\ \%$$

Отже, 14 % опитуваних користувалися всіма трьома порадами, 45 % опитуваних користувалися лише рекламою, 19 % лише власною думкою, 30 % лише порадою друзів і знайомих.

Відповідь : 14 %, 45 %, 19 %, 30 %.

П І Д С У М О К

Навчальна підтема «Множини і операції над ними» основоположна у навчанні математики в старшій профільній школі. Вивчивши її учні мають навчитися записувати числові множини, виконувати над ними операції: об'єднання, переріз, різницю, декартів добуток.

Знати які широко вживані числові множини та їх властивості вивчаються в курсі Алгебри і початку аналізу. Одержанні знання та вміння будуть необхідні учням в подальшому під час вивчення на теоретико-множинній основі рівнянь, виразів, функцій та їх властивостей, геометричних величин, початків теорії ймовірностей та інших розділів.

МЕТОДИЧНІ ЗАДАЧІ
для самостійного розв'язування

1. Доведіть, що сума, різниця, добуток і частка (якщо дільник не дорівнює 0) двох раціональних чисел завжди є раціональним числом.
2. Доведіть, що $[0; 1]$ і промінь $[0;\ +\infty)$ рівнопотужні.
3. Доведіть, що число $x = \sqrt{2} + \sqrt{5}$ є і раціональним.
4. Серед даних чисел знайти раціональні та записати їх у вигляді звичайних дробів: 1) $\sqrt{5}$; 2) 2,75; 3) 5,(82); 4) 3,12(3); 5) 4,26(9); 6) 1,010010001…; 7) $\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.
5. Доведіть, що $(9^n - 8n - 1) ⋮ 16$, де $n \in N$.
6. Знайти об'єднання, переріз та різницю множин A і B: $A = \{x \in R :\ (x^2 - 2x > 0\}$; $B = \{x \in R :\ (x^2 - 4x + 3 < 0\}$.
7. Для аналізу попиту населення на побутові прилади було проведено дослідження серед 1000 відвідувачів магазину. В результаті було встановлено, що протягом року: 500 осіб купили пральні машини; 150 електричні плити; 950 телевізори. Виявилося, що 100 відвідувачів - купили пральні машини та електричні плити, 90 - пральні машини та телевізори, 80 - електричні плити та телевізори, 20 - пральні машини, електричні плити та телевізори. Визначити скільки відвідувачів купили: *а) принаймні один; б) жодного; в) тільки один з названих побутових приладів.*
8. Проаналізуйте діючі альтернативні підручники з Алгебри і початків аналізу з теми «Множини і операції над ними». З'ясуйте які теоретичні знання закладені в них, чи потрібне їх поглиблення та розширення.
9. Підготуйте завдання для підсумкової контрольної роботи на тему «Множини і операції над ними» (два варіанти).

Під множиною розуміють об'єднання в одне спільне об'єктів, добре розрізнюваних нашою інтуїцією або нашою думкою

Г. Кантор

Л Е К Ц І Я 2.3

Т Е М А ***Алгебраїчні вирази та їх перетворення***

П Л А Н

1.	***Місце теми в програмі з математики старшої профільної школи, зміст теми, основна мета вивчення, вимоги до підготовки учнів, орієнтовне планування навчального процесу***
2.	***Коли і як має формуватися поняття алгебраїчного виразу в курсі Алгебри і початку аналізу. Огляд алгебраїчних виразів, вивчених в курсі алгебри основної школи***
3.	***Перетворення алгебраїчних виразів. Розв'язування вправ***

К О Н С П Е К Т Л Е К Ц І Ї

1. Місце теми в програмі з математики старшої профільної школи, зміст теми, основна мета вивчення, вимоги до підготовки учнів, орієнтовне планування навчального процесу

Підтема «Вирази і їх перетворення» одна із перших тем курсі Алгебри і початків аналізу, 10 класу. Її зміст, основна мета вивчення, вимоги до підготовки учнів подано у таблиці 1 – *календарне планування навчального процесу*.

Таблиця 1

№	**Теми занять, види письмових робіт**	**К-ть годин**	**Дата**	**Вимоги до підготовки**
1.	Алгебраїчні вирази. Область визначення. Тотожно рівні вирази. Значення виразу	2		*Основна мета вивчення:* сформувати в учнів поняття алгебраїчного виразу, актуалізувати знання про дії з алгебраїчними виразами. Здійснити огляд алгебраїчних виразів, які вивчались в курсі алгебри основної школи. Підготувати грунт для вивчення інших виразів в курсі алгебри і початків аналізу. **Вимоги до підготовки учнів** **Учень / Учениця:** - *пояснює* що таке алгебраїчний вираз; - *формулює* означення області визначення алгебраїчного виразу; - *знаходить* числове значення алгебраїчного виразу для задання значень змінних; - *знає і вміє* доводити основні алгебраїчні тотожності, вивченні в курсі алгебри основної школи; - *знає* теорему Безу і вміє користуватись під час вивчення многочленів; - *вміє виконувати* тотожні перетворення алгебраїчних виразів, вивчених в курсі алгебри основної школи.
2.	Огляд алгебраїчних виразів, вивчених в основній школі: одночлени, многочлени, дроби	4		
3.	Ділення многочленів. Теорема Безу та наслідки з неї	2		
4.	Тотожні перетворення дробово-раціональних виразів С.Р.	3		
5.	Тотожні перетворення алгебраїчних виразів з цілим показником С.Р.	3		
6.	Тотожні перетворення ірраціональних виразів С.Р.	3		
7.	Контрольна робота	1		
	Всього:	18		

2. Коли і як має формуватися поняття алгебраїчного виразу в курсі Алгебри і початку аналізу. Огляд алгебраїчних виразів, вивчених в курсі алгебри основної школи

Старша школа – наступна сходинка після основної у здобуванні середньої освіти школярами. Тепер навчання математики в ній відбувається за двома державними програмами: рівень стандарту та профільний рівень.

Найпершою темою 10 класу з Алгебри і початків аналізу розглядається тема «Вирази, функції, рівняння і нерівності». На її вивчення відведено 60 години. Відомо, що зміст курсу алгебри основної школи зосереджений переважно на розгляді ***трьох важливих змістових ліній***: *вирази і їх перетворення*, *функції та їх графіки*, *рівняння і нерівності*.

Знайомство учнів (підлітків) з теоретичним матеріалом відбулося, в основному, на наочно-оперативному рівні і має продовжуватись для старшокласників (юнацький вік) під час вивчення курсу Алгебри і початків аналізу на вищому, теоретико-практичному рівні. Саме тому важливо посилити теоретичні аспекти, зокрема визначитися не тільки з поняттям функція, рівняння (нерівність), а й з поняттям алгебраїчного виразу. Тим більше, що логіко-математичний досвід випускників основної школи цьому сприяє. Адже вони вже мають поняття про одночлен, многочлен, дробово-раціональний та ірраціональний вирази, вміють з ними виконувати відповідні перетворення. Надалі їх чекає вивчення степеневих (з раціональним показником), тригонометричних, показникових, логарифмічних та інших виразів. Тому доречним зупинитися на визначенні таких понять як **алгебраїчний вираз**, **тотожно рівні алгебраїчні вирази**, **перетворення виразу**, **обчислення його значення**, **доведення тотожної рівності двох алгебраїчних виразів** і т. п. На сьогодні, в старшій школі, це лишилося поза увагою, більше робляться акценти на визначенні таких понять як функція, рівняння, нерівність, та інших, пов'язаних з ними.

Поняття **алгебраїчний вираз** (та інші, пов'язані з ним) – фундаментальне в математиці, воно чітко визначається. Студенти-математики вишів, які вивчають, наприклад, вищу алгебру, загальну алгебру та інші математичні дисципліни, можуть відповісти на запитання "*Що таке алгебраїчний вираз*?" Їх відповідь буде лаконічна і зрозуміла лише для окремих фахівців.

Наприклад, вони можуть відповідати так: «*Нехай $(A;\ O)$ – деяка алгебра, а X – множина, яка не перетинається з A і O. Елементи множини X назвемо змінними. Алгебраїчним виразом (термом) в алгебрі $(A;\ O)$ називають: 1) всі елементи із A і всі елементи із X; 2) якщо операція $*_к \in O$ і має ранг n_k, а $B_1,\ B_2,\ \ldots\ B_n$ – терми* *(алгебраїчні вирази), то* $*_{к}$ *(*B_1*,* B_2*, …* B_{n_k}*) теж алгебраїчний вираз; 3) інших алгебраїчних виразів не існує»*.

Зрозуміло, що в шкільному курсі математики використати дане означення неможливо, його учні не зрозуміють. Тому, потрібно йти іншим шляхом: від простого до складного, поступово розкриваючи істотні властивості даного поняття. У зв'язку з цим пропонуємо скористатись методом доцільних задач. Для цього слід розв'язати спочатку з учнями, наприклад, таку нескладну прикладну задачу.

Задача 1. Відомо, що тарифи за комунальні послуги для населення становлять: світло – 0,9 грн/кВт; природний газ – 1,3 грн/м^3; квартплата (фіксована) – 456,96 грн. Скласти вираз, за яким можна буде розрахувати платежі за комунальні послуги щомісяця.

Для десятикласників вимога записати вираз особливих труднощів не викличе. Обговоривши з учнями їхні пропозиції приходимо до запису:

$S\ = 0{,}9 \cdot x + 1{,}3 \cdot y + 456{,}96$, де S – сума платежу, x – кількість кіловат енергії, спаленої за місяць, y – кількість кубічних метрів спаленого за місяць газу. Нагадуємо учням, що такий запис називають алгебраїчним виразом (а точніше – многочленом з двома змінними). Звертаємо увагу учнів на те, як в математиці будується такий запис: вибирається множина чисел A, множина латинських букв $X = \{a, b, c, \dots x, y, z\}$ – якими позначаються змінні величини та множина арифметичних операцій $O = \{+, -, \times, :\}$. Отож, що ж таке алгебраїчний вираз?

Відповідь напрошується сама собою.

***Алгебраїчний вираз* – це запис, складений із скінченного числа букв і чисел, поєднаних знаками арифметичних дій (додавання, віднімання, множення, ділення).**

Далі звертаємо увагу учнів на те, що множина A – може бути множиною натуральних N, цілих Z, дійсних R, комплексних Z чисел, а множина O, крім вказаних вище дій може містити одну дію, всі чотири, дію піднесення до степеню (з натуральним, цілим, раціональним, дійсним показником, добування кореня і ін.). Так як елементна база множин A, X, O може змінюватися, то очевидно в математиці існують різні види алгебраїчних виразів. Саме з цих позицій доцільно з учнями зробити ретроспективний аналіз тих знань, які вони отримали про вирази в основній школі, піднявши їх на вищий рівень сприйняття математичних знань, заклавши нову методологічну основу вивчення, не тільки нових тем курсу алгебри і початків аналізу, а й геометрії, теорії ймовірностей.

Доречними будуть також наступні повідомлення для десятикласників:

1) Нехай множина $A = N$ (множина натуральних чисел), $X \neq \emptyset$ (порожня множина) $O = \{+, -, \times, :\}$. Тоді, *алгебраїчними виразами* будуть записи:

$$53 + 48 : 9; \quad 243 \cdot (218 - 131) + 621; \quad (2203 - 513) \cdot 231 - 1923.$$

Їх учні вивчали в 5 класі та називали *числовими виразами.* Вчилися читати, обчислювати та використовувати під час розв'язування текстових задач арифметичними способами.

2) Нехай $A = Z$ (множина цілих чисел), $X = \emptyset$ (порожня множина) $O = \{+, -, \times, :\}$. Тоді, *алгебраїчними виразами* будуть записи :

$$(-2)\cdot 7 + 249; \quad 243 \cdot (131 - 218) - 621; \quad (513 - 2203) \cdot (-221) + 1923.$$

Їх учні вивчали в 6 класі та називали також *числовими виразами.* Вчилися читати, обчислювати значення та використовувати (як моделі) під час розв'язування текстових задач.

3) Нехай $A = Q$ (множина раціональних чисел), $X = \{a, b, c, \dots x, y, z\}$ – множина латинських букв, якими позначають змінні величини, $O = \{\times\}$ – множина, яка містить лише одну операцію – множення.

Тоді, *алгебраїчними виразами* будуть записи:

$$0{,}5\cdot x; \quad 2{,}1abc; \quad \frac{1}{3}ayz; \quad 0{,}3ab \cdot 12 \cdot ac; \quad \frac{xya}{2}.$$

Це відомі учням *одночлени*, які вони вивчали в 7 класі в курсі алгебри. Вони вміють зводити їх до стандартного виду, обчислювати числове значення для відомих числових значень змінних.

4) Нехай $A = Q$ (множина раціональних чисел), $X = \{a, b, c, \dots x, y, z\}$ – множина латинських букв, якими позначають змінні величини, $O = \{+, -, \times\}$. Тоді, *алгебраїчними виразами* будуть записи:

$$2x^2 + 3y + 2; \quad 6xy - 0{,}2y + z^2; \quad 1{,}2ax^2 + ax - a^2.$$

Це *многочлени*, які учні вивчали в 7 класі, при цьому вчились зводити їх до стандартного виду, вивчали формули скороченого множення, розкладали на множники, обчислювали числове значення для відомих числових значень змінних, доводили тотожності і т. п. Доречно буде повідомити, що якщо множина $A = Z,$ то матимемо *многочлени з цілими коефіцієнтами*, які мають чимало цікавих властивостей.

5) Нехай $A = Q$ (множина раціональних чисел), $X = \{a, b, c, \dots x, y, z\}$, а $O = \{+, -, \times, :\}$ (додали дію ділення). Тоді, *алгебраїчними виразами* будуть записи:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2; \quad \frac{4x^2 - 49}{2x + 5} \cdot \frac{1}{4x^2 + 14x} - \frac{2x + 7}{4x^2 - 10x}; \quad \frac{a - 5}{a^2 - 25}.$$

Це *дробово-раціональні вирази*, які учні вивчали у 8 класі, при цьому вчились їх спрощувати, доводити тотожності, обчислювати числові значення, використовувати як математичні моделі під час розв'язування прикладних задач тощо.

6) Нехай $A = R$ (множина дійсних чисел), $X = \{a, b, c, \dots x, y, z\}$, а $O = \{+, -, \times, :, \sqrt{}\}$ (додали ще одну дію – добування арифметичного квадратного кореня). Тоді, *алгебраїчними виразами* будуть записи:

$$\frac{3x}{7\sqrt{x}}; \qquad \frac{a\sqrt{a}-1}{a+\sqrt{a}+1}\ ; \qquad \frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{xy}+y}\ ; \qquad \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}+\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}.$$

Це *ірраціональні вирази* (містять змінну під знаком кореня), які учні вивчали у 9 класі, при цьому вчились встановлювати їх область допустимих значень змінних, перетворювати, доводити тотожності, обчислювати числові значення, використовувати під час розв'язування рівнянь і нерівностей та як математичні моделі під час розв'язування прикладних задач тощо.

Цікавими для учнів виявляться і такі повідомлення. Не з курсу алгебри основної школи.

7) Нехай $A = R$, $X = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots \vec{x}, \vec{z}\}$ – (множина векторів на площині), $O = \{+, -, \cdot\}$ – де "–" і "+" операції віднімання і додавання векторів, " · " операція множення вектора на число. Тоді, *алгебраїчними виразами* будуть записи:

$$2\vec{a}; \qquad \vec{a} + 2\vec{b}\ ; \qquad 2\cdot\left(\vec{a} - \vec{b}\right) + c\ ; \qquad 2\vec{a} - 3\vec{b}.$$

Це *векторні вирази*, які учні вивчали у курсі геометрії основної школи.

8) Нехай $A = \emptyset$ (порожня множина), $X = \{B, C, D, \dots U\}$ – множина, елементами якої є підмножини деякої універсальної множини *U.* $O = \{\cup, \cap, /\}$ – множина операцій над множинами: об'єднання, перетин, різниця. Тоді, *алгебраїчними виразами* будуть записи:

$$B \cup C; \qquad B \cup (C \cap D)\ ; \qquad B \cap C, \qquad B \backslash C.$$

З ними учні знайомі з основної школи, вчились використовувати під час розв'язування рівнянь, нерівностей і їх систем, під час відшукання області визначення функції і т. п. Список прикладів, при потребі, можна продовжити, але вистачить і цих, щоб десятикласники усвідомили істотне і зробили ***узагальнені висновки***:

– *алгебраїчний вираз це скінченний запис (певна символьна модель)*;

– *він зроблений за допомогою елементів множин A (множина чисел), $X = \{a, b, \dots\}$ – множина букв латинського алфавіту, O – множина операцій над елементами вказаних множин*;

– *залежно від елементної бази всіх трьох множин A, X, O – алгебраїчні вирази бувають різні, істотно відрізняються один від одного.*

Не менш важливим буде наголосити учням на важливості вивчення алгебраїчних виразів, оскільки вони мають широке застосування і в побуті, і у вивченні інших розділів математики та суміжних дисциплін, і у математичному моделюванні реальних процесів і явищ.

Такий підхід (конкретно-індуктивний) до формування поняття алгебраїчного виразу, як важлива методологічна основа, дає можливість надалі вивчати в курсі алгебри і початків аналізу:

– *степеневі вирази* з раціональним показником ($A = R$; $X = \{a^{r1}, a^{r2}, \dots\}$,
$O = \{+, -, \times, :\}$);

– *тригонометричні вирази* ($A = R$; $X = \{\sin a, \cos a, tga, ctga\}$, де $a \in R$,
$O = \{+, -, \times, :\}$;

– *показникові вирази* ($A = R$; $X = \{a^x, b^x$ ...$\}$, де a, b – додатні числа,
x, y – дійсні числа, $O = \{+, -, \times, :\}$;

– *логарифмічні вирази* ($A = R$; $X = \{lna, \log_a b\,, lgc \dots\}$, $O = \{+, -, \times, :\}$.

Учнів потрібно познайомити з такою перспективою. *Важливо також наголосити, що під час вивчення різного виду алгебраїчних виразів учні мають оволодіти такими компетентностями:*

– читати алгебраїчний вираз, встановлювати його область допустимих значень змінних;

– виконувати тотожні перетворювання алгебраїчного виразу, спираючись на відповідні тотожні рівності;

– доводити тотожню рівність двох алгебраїчних виразів;

– обчислювати значення алгебраїчного виразу для відомих числових значень змінних;

– застосовувати знання і вміння про алгебраїчні вирази під час розв'язування рівнянь, нерівностей, прикладних задач, де ці вирази являються математичними моделями реальних процесів і явищ.

Подальше поглиблене і розширене вивчення алгебраїчних виразів має відбуватись на факультативних заняттях, у вишах. Адже залишається ще багато не з'ясованого:

– *чому запис називається алгебраїчним і як це пов'язано з терміном алгебра;*

– *якою ще може бути елементна база множини X, крім латинських букв;*

– *що таке математична операція, якою вона буває, якими властивостями володіє і т. п.*

Такий поступальний рух і приведе школярів до поняття алгебраїчного виразу і його трактування, як це подано на початку лекції, та у посібнику. Шлях цікавий, всі формулювання коректні, наочні, доступні школярам, які обрали вивчення математики на профільному чи поглибленому рівні.

Завершити виклад теоретичного матеріалу про алгебраїчні вирази курсу алгебри основної школи і їх систематизацію пропонуємо за допомогою діаграм Ейлера-Венна та повторення властивостей степеня та формул скороченого множення.

3. Перетворення алгебраїчних виразів. Розв'язування вправ

Актуалізовані, розширені і поглиблені знання про алгебраїчні вирази мають бути закріплені шляхом розв'язування тренувальних практичних вправ. Способи розв'язання яких знайомі учням ще з основної школи. Однак є певні тонкощі, з якими вони не знайомі. У цьому і полягає сенс повторного розгляду способів розв'язування. Розглянемо окремі приклади з доречними методичними коментарями, на які слід звернути увагу учнів.

Приклад 1. Спростити вираз : $\frac{x^3-8}{x^3+8}\cdot\left(3+\frac{(x+2)^2}{(x-2)^2}\right):\left(3+\frac{(x-2)^2}{(x+2)^2}\right)$.

Розв'язання

Усно встановлюємо, що область допустимих значень виразу :

$$D=\{x: x\epsilon R; x\neq 2; x\neq -2\}.$$

Далі, покроково, виконуємо дії :

1) $3+\frac{(x+2)^2}{(x-2)^2}=\frac{3x^2-12x+12+x^2+4x+4}{(x-2)^2}=$
$=\frac{4x^2-8x+16}{(x-2)^2}=\frac{4(x^2-2x+4)}{(x-2)^2}$

2) $3+\frac{(x-2)^2}{(x+2)^2}=\frac{3x^2+12x+12+x^2-4x+4}{(x+2)^2}=$
$=\frac{4x^2+8x+16}{(x+2)^2}=\frac{4(x^2+2x+4)}{(x+2)^2}$

3) $\frac{4(x^2-2x+4)}{(x-2)^2}:\frac{4(x^2+2x+4)}{(x+2)^2}=$
$=\frac{4(x^2-2x+4)}{(x-2)^2}\cdot\frac{(x+2)^2}{4(x^2+2x+4)}=$
$=\frac{(x^2-2x+4)}{(x^2+2x+4)}\frac{(x+2)^2}{(x-2)^2}$.

4) $\frac{x^3-8}{x^3+8}\cdot\frac{(x^2-2x+4)}{(x^2+2x+4)}\frac{(x+2)^2}{(x-2)^2}=\frac{x+2}{x-2}$

Квадратні тричлени (x^2-2x+4) та (x^2+2x+4) для всіх $x\,\epsilon\, R$ відмінні від 0.

Відповідь : $\frac{x+2}{x-2}$, де $x\neq\pm 2$.

Методичний коментар

Розв'язуючи дану вправу найперше, на що потрібно звернути увагу учнів, з'ясувати суть вимог «спростити вираз». Учням слід нагадати, що «спростити вираз» означає *замінити його на тотожно рівний йому вираз*.

Але якщо два вирази тотожно рівні, то має бути вказана область допустимих значень змінних, на якій така рівність виконується.

Це можна зробити по-різному:

а) за зовнішньою будовою виразу визначити які значення можуть приймати змінні;

б) виконати всі перетворення виразу і по ходу розв'язання встановити область допустимих значень.

За зовнішнім виглядом даного виразу визначаємо, що його областю допустимих значень буде множина

$$D=\{x: x\epsilon R; x\neq 2; x\neq -2\}.$$

Приклад 2. Обчислити значення виразу : $\frac{(ab^{-3}-a^{-3}b)^{-1}\cdot(a^{-2}+b^{-2})}{(b^{-2}-a^{-2})^{-1}}$, при $a=2, b=10$.

Розв'язання

Позначимо даний вираз через $A(a;\ b)$.

Тоді $A(a;b)=\frac{(\frac{a}{b^3}-\frac{b}{a^3})^{-1}\cdot(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})}{(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2})^{-1}}=$

$=\frac{\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)}{\left(\frac{a}{b^3}-\frac{b}{a^3}\right)}\cdot\frac{a^2+b^2}{a^2\cdot b^2}\quad=$

$=(\frac{a^2-b^2}{a^2b^2})\cdot\frac{a^3\cdot b^3}{a^4-b^4}\quad\cdot\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$.

При $a\neq 0$ і $b\neq 0$ маємо :

$A(a;b)=\frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}{(a^4-b^4)\cdot ab}=\frac{(a^4-b^4)}{(a^4-b^4)\cdot ab}$

Якщо $a\neq b$, то : $A(a;b)=\frac{1}{ab}$.

Таким чином, вираз $A(a;b)$ тотожно рівний виразу $\frac{1}{ab}$, якщо $a\neq 0, b\neq 0, a\neq b$

При $a=2,\ b=10$ маємо:

$A(2;10)=\frac{1}{20}$

Відповідь : $\frac{1}{20}$.

Методичний коментар

Зрозуміло, що підставити у вираз значення змінних і проводити обчислення – не раціональні дії.

Очевидно, що спочатку потрібно даний вираз спростити, а потім обчислювати його значення при заданих значеннях змінних a : b.

Область визначення і належність їй $a=2$, $b=10$, краще визначити по ходу виконання проміжних перетворень.

На такого роду прикладах можна проілюструвати учням декартів добуток множин.

Якщо $a\in R$, $b\in R$, то область допустимих значень виразу буде множина

$D=\{(a;b)|\ a\in R, b\in R, a\neq 0; b\neq 0, a\neq b\}$

Тобто, це будуть всі точки координатної площини (рис. 1), без точок прямої $a=b$.

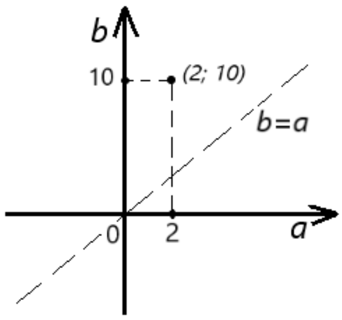


Рис. 1

Приклад 3. Довести тотожність : $\frac{x-1}{x+\sqrt{x}+1}:\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}-1}=x-2\sqrt{x}+1$.

Розв'язання

Область допустимих значень виразу

$M=\{x|\ x\in R, x\geq 0;\ x\neq 1\}$.

Перетворимо ліву частину тотожності:

$\frac{x-1}{x+\sqrt{x}+1}:\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}-1}=\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{x+\sqrt{x}+1}\cdot\frac{(\sqrt{x^3}-1)}{\sqrt{x}+1}=$

$=\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}+1}=(\sqrt{x}-1)^2=$

$=x-2\sqrt{x}+1$

Ліва частина дорівнює правій.

Для всіх $x\in M$

Тотожність доведено.

Методичний коментар

Виходячи з зовнішнього виду виразу помічаємо, що змінна x має приймати невід'ємні значення.

Оскільки $x\sqrt{x}-1=\sqrt{x^3}-1$, то $x\neq 1$.

Отже, область визначення виразу буде множина: $M=\{x|\ x\in R, x\geq 0;\ x\neq 1\}$.

Вимога «довести тотожність» означає, показати, що вираз зліва і вираз справа – тотожні рівні на вказаній області M.

Приклад 4. Спростити вираз: $\frac{x^3-y^3}{2y}\cdot(\frac{2y}{4-2y-2x+xy}+\frac{2xy+4y}{(x-y)(x^2-4)})$.

Розв'язання

Позначимо даний вираз через $A(x;y)$.

Тоді
$A(x;y)=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{2y}\cdot$
$\left(\frac{2y}{2(2-y)\cdot x(2-y)}+\frac{2y(x+2)}{(x-y)(x-2)(x+2)}\right)=$
$\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{2y}\cdot\left(\frac{2y}{(2-x)(2-y)}+\right.$
$\left.\frac{2y(x+2)}{(x-y)(x-2)(x+2)}\right)$.

Якщо $x\neq-2$, то можна провести скорочення другого дробу в дужках.

Тоді
$A(x;y)=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{2y}\cdot\frac{2y(x-y)+(y-2)}{(x-y)(x-2)(x-2)}$

Якщо y$\neq$ 0, $x\neq y$,
$A(x;y)=\frac{(x^2+xy+y^2)(x-2)}{(y-2)(x-2)}$

Звідки, при $x\neq 2$.
Маємо: $A(x;y)=\frac{x^2+xy+y^2}{y-2}$, де y$\neq$ 2.

Методичний коментар

У даному прикладі область допустимих значень змінних краще встановлювати по ходу виконання проміжних перетворень та проілюструвати її на координатній площині (рис. 2).

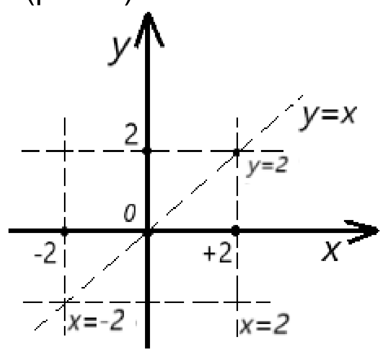


Рис. 2

Відповідь:
$A(x;y)=\frac{x^2+xy+y^2}{y-2}$,
на області визначення
$M=\{(x;y)|\ x\,\epsilon\, R, y\,\epsilon\, R, y\neq 0, x\neq 2, x\neq -2,\ y\neq 2, y\neq x\}$.

Після розгляду конкретних прикладів учні мають у підсумку засвоїти, що над алгебраїчними виразами виконуються такі основні перетворення: *а) спрощення виразу; б) доведення тотожної рівності двох виразів; в) обчислення значення виразу при заданих значеннях змінних.* У всіх названих перетвореннях завжди слід встановлювати область визначення виразу.

П І Д С У М О К

Головним завданням вивчення підтеми «Алгебраїчні вирази та їх перетворення» є сформувати в учнів поняття алгебраїчного виразу та повторити виконання на вищому, теоретико-множинному рівні дії над виразами, що вивчались в основній школі. Це має стати основою для вивчення тригонометричних, ірраціональних, показникових та логарифмічних виразів.

Важливо, щоб була усвідомлена загальна, методологічна схема вивчення всіх виразів:

а) з яких складових елементів вибудовуються вирази, що підлягають вивченню;

б) які тотожні рівності для них слід виділити, довести та віднести до основних, щоб надалі користувались ними як відомими істинними твердженнями;

в) навчитись виконувати найважливіші перетворення виразів: спрощувати, доводити тотожню рівність, знаходити числове значення.

МЕТОДИЧНІ ЗАДАЧІ
для самостійного розв'язування

1. Розв'язати вправи:

   а) доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної а значення виразу: $\frac{12a-4a^2}{2a+3}+\frac{1}{2a-3}:\left(\frac{4}{4a^2-9}-\frac{6a-9}{8a^3+27}\right)$ не залежить від значення $a;$

   б) спростить вираз: $\sqrt{\left(1-y\sqrt{y}\right)\cdot\frac{1-\sqrt{y}}{y+\sqrt{y}+1}}-\sqrt{y};$

   в) знайдіть значення виразу: $\sqrt{a+2\sqrt{a+1}+2}+\sqrt{a-2\sqrt{a+1}+2},$ якщо $a=-0{,}7$.

2. Проаналізувати діючі альтернативні підручники з Алгебри і початків аналізу на предмет наявності в них теоретичного матеріалу про алгебраїчні вирази З'ясуйте потребу у поглибленні чи розширенні відомостей з даної теми.

3. Розробити завдання для підсумкової контрольної роботи (два варіанти) на тему «Вирази та їх перетворення». Запропонувати зразки їх розв'язання.

4. Розробити зміст шкільної лекції на тему «Многочлени, теорема Безу і її застосування».

5. Знайдіть корені многочлена : $P(x)=\ x^4+10x^3+35x^2+50x+24.$

Алгебра – це мова, що послуговується не словами, а тільки математичними символами. Якщо ця мова символів нам знайома, то нею можна перекласти цікаві для нас вислови повсякденної мови

Д. Пойя

Алгебра – це стенографія математика

В. Сойєр

Л Е К Ц І Я 2.4

Т Е М А ***Методика вивчення змістової лінії «Функції і їх графіки»***

П Л А Н

1.	***Місце підтеми в програмі, зміст, основна мета вивчення. Орієнтовне планування навчального процесу***
2.	***Формування поняття функції, основні властивості функцій і їх доведення. Огляд функцій, вивчених в основній школі***
3.	***Побудова графіків і встановлення властивостей складених функцій за допомогою геометричних перетворень***

К О Н С П Е К Т Л Е К Ц І Ї

1. Місце підтеми в програмі, зміст, основна мета вивчення. Орієнтовне планування навчального процесу

Календарний план вивчення теми. Зміст теми розкриває таблиця 1.

Таблиця 1

№ п/п	Теми занять, види письмових робіт	К-ть годин	Дата проведення
Підтема 1.2. Функції і їх графіки			
1	Функція. Область визначення і область значень функції. Графік функції. Функції як моделі в прикладних задачах	2	
2	Числові функції і їх властивості (парність, непарність, нулі функції, проміжки зростання і спадання, періодичність)	2	
3	Огляд функцій і їх властивостей вивчених в основній школі (лінійна, квадратична і т. п.)	4	
4	Побудова графіків складених функцій за допомогою геометричних перетворень СР 1	4	
5	Оборотні функції. Графіки взаємо-обернених функцій СР 2	2	
6	Контрольна робота	1	
	Всього:	15	

Основна мета вивчення підтеми

Сформувати сучасне поняття функцій однієї змінної. Здійснити огляд базових елементарних функцій, які вивчались в курсі алгебри основної школи. Навчити учнів будувати графіки складених елементарних функцій і встановлювати їх властивості (область визначення і область значень, нулі функції, проміжки зростання і спадання, парність, непарність, періодичність, вертикальні і горизонтальні асимптоти) за допомогою геометричних перетворень графіків базових елементарних функцій.

Вимоги до підготовки учнів (компетентності)

Вивчивши тему *учень / учениця:*

- Формулює сучасне означення функції, числової функції;
- Формулює означення парної, непарної періодичної функції, монотонно зростаючої (спадної) функції на множині;
- Знаходити область визначення функції, значення функцій для заданих значень аргументу і значень аргументу за яких функція набуває даного значення;
- Встановлює за графіком функції її властивості і вміє їх довести, користуючись означенням;
- Будує графіки складених функцій методом геометричних перетворень графіків базових функцій.

2. Формування поняття функції, основні властивості функцій і їх доведення. Огляд функцій, вивчених в основній школі

Сформувати сучасне поняття функції доцільно абстрактно-дедуктивним методом.

Означення: *Нехай задано множину елементів X і множину елементів Y. Відповідність, при якій кожному елементу множини X відповідає один елемент множини Y називається функцією. Символічно це записується у вигляді рівності $y = f(x)$.*

Множина X – називається область визначення функції (її позначають символом $D(f)$).

Множина Y – називається множина значень функції (її позначають символом $E(f)$).

Способи задання функції:

табличний, графічний, аналітичний, словесно-описовий.

У шкільному курсі Алгебри і початків аналізу, розглядаються переважно числові функції (коли множини X і Y числові). У курсі алгебри 7-9 класів учні вивчали функції: $y = kx + b$ – лінійна; $y = \frac{k}{x}$ – обернена пропорційність; $y = x^2$, $y = x^3$, $y = ax^2 + bx + c$ – квадратична; $y = |x|$, $y = \sqrt{x}$. Графіком функції (числової) називається множина : $G = \{(x; y) | x \epsilon D(f), y = f(x)\}$.

Вивчення цих функцій відбувалося за найпростішою **методичною схемою (МС-1)**:

1) будувався, за складеною таблицею, схематичний графік функції (для цього учні знаходили декілька точок координатної площини, які належали графіку);

2) за отриманим графіком (в результаті візуального сприйняття) висловлювалися такі властивості функції як проміжки зростання, спадання, симетричність графіка відносно осі ОУ, чи початку координат.

Основними властивостями функцій називались (без доведень):

1) область визначення;

2) область значень;

3) парність;

4) проміжки зростання і спадання;

5) проміжки на яких функція додатня чи від'ємна;

6) нулі функції.

Побудова графіків складених функцій здійснювалася методом геометричних перетворень графіка базової функції $y = f(x)$. З учнями слід пригадати наступні перетворення та їх зміст:

$y = f(x) + a$, $y = f(x + a)$, $y = a \cdot f(x)$, $y = f(ax)$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$.

У 10 класі, в курсі Алгебри і початків аналізу, в учнів формуються означувані поняття: зростаючої та спадної функції на заданій множині; парної та непарної функції; періодичної функції. Тепер такі властивості мають доводитися. Тому, здійснюючи огляд функцій, які вивчалися в 7-9 класах на уроках алгебри, їх слід актуалізувати і провести для кожної з вивчених функцій означувані властивості. Отже, методична схема дослідження функції МС-1, тепер удосконалюється. Її можна назвати МС-2.

Огляд властивостей функцій, вивчених в основній школі

Огляд властивостей функцій доцільно здійснити шляхом розв'язання конкретних вправ (конкретно-індуктивним методом).

Наприклад, $y = \frac{1}{x}$ (обернена пропорційність).

Властивості:

1. Область визначення $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0;\ +\infty)$ (відкладається на *OX*).
2. Будуємо графік функції.

   Для цього складаємо таблицю і на координатній площині будуємо графік (рис. 1).

x	**-4**	**-2**	**-1**	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	**0**	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	**1**	**2**	**4**	**…**
y	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	**-1**	**-2**	**-4**	**не існує**	**4**	**2**	**1**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	**…**

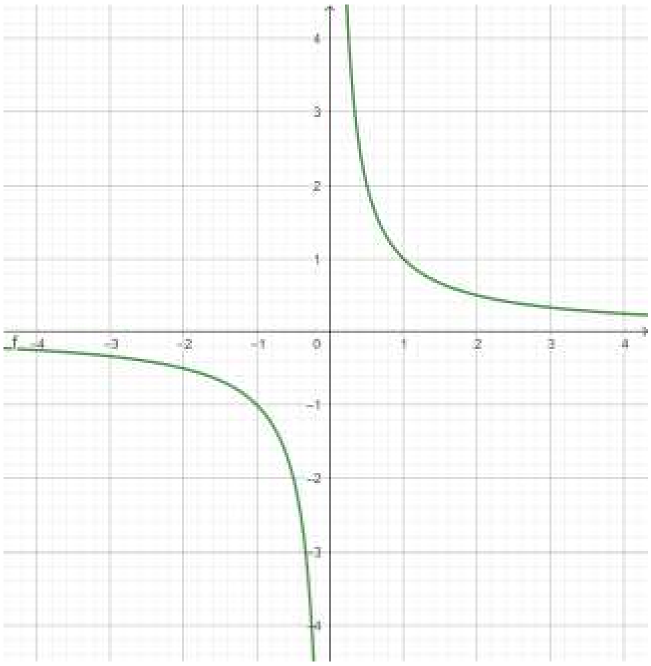


Рис. 1

Примітка. Учням варто запропонувати виготовити шаблон на міліметровому папері або придбати готові. Надалі такі шаблони доцільно мати для функцій $y = x^2$, $y = x^3$ і т. п.

3. Проміжки зростання і спадання.

Дивлячись на графік помічаємо, що на проміжках $(-\infty;\ 0)$ і на $(0;\ +\infty)$ функція спадає. Користуючись означенням, доведемо, що на проміжку $(0;\ +\infty)$ функція дійсно спадає.

Доведення

Нехай маємо два довільних значення аргументу: $x_1 > x_2$, де $x_1,\ x_2 \epsilon (0;\ \infty)$.

Маємо $y_1 = f(x_1) = \frac{1}{x_1}$, $y_2 = f(x_2) = \frac{1}{x_2}$.

Записуємо різницю: $y_1 - y_2 = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}$.

Чисельник – від'ємний, а знаменник додатний, тому різниця $y_1 - y_2$ від'ємна.

Отже, на проміжку $(0;\ +\infty)$ $y_1 < y_2$ - функція спадна.

Аналогічно доводиться, що функція спадна на проміжку $(-\infty;\ 0)$.

Примітка. Варто запитати учнів: спадна чи зростаюча функція на всій області визначення $D(f)$?

4. Парна чи непарна функція (властивість).

Дiємо згідно означення. Перевiряємо властивості:

а) якщо $a \,\epsilon\, D(f)$, то й $-a \,\epsilon\, D(f)$ – область визначення симетрична відносно початку координат;

б) якщо $f(a) = \frac{1}{a}$, $f(-\mathrm{a}) = \frac{1}{-a} = -\frac{1}{a} = -f(a)$.

Виконується рівність $f(-a) = -f(a)$.

Отже, функція непарна, її графік симетричний відносно початку координат (показати учням на графіку що це означає).

5. Функція $y = \frac{1}{x}$ неперіодична.

Доведення

Припустимо, що функція періодична.

Тоді, за означенням існує таке число $T \neq 0$, що для всіх x з області визначення $f(x) = f(x+T)$, тобто для $\forall\ x \in D(f)$ маємо рівність:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x+T} \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{x+T} = 0 \Leftrightarrow \frac{x+T-x}{x(x+T)} = 0 \Leftrightarrow \frac{T}{x(x+T)} = 0.$$

Рівність досягається коли $T = 0$, що суперечить умові.

Отже, функція неперіодична.

6. Область значень: $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

7. Асимптоти: горизонтальна OX, вертикальна OY.

За приведеною схемою побудови графіка і дослідження властивостей функцій $y = \frac{1}{x}$, як за зразком слід здійснити огляд інших, вивчених в курсі алгебри функцій: $y = kx + b$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = ax^2 + bx + c$.

Це учні можуть здійснити самостійно під керівництвом вчителя.

3. Побудова графіків і встановлення властивостей складених функцій

Алгоритм побудови графіка і встановлення властивостей складених функцій слід розглянути на прикладах розв'язання конкретних вправ.

Приклад. Встановити властивості і побудувати графік функції $y = \frac{2x+8}{x+3}$.

Розв'язання

Подамо функцію в іншому вигляді: $y = \frac{2x+6+2}{x+3} = \frac{2(x+3)+2}{x} = \frac{2}{x+3} + 2$, тобто $y = \frac{2}{x+3} + 2$.

Схема побудови графіка даної функції наступна (покрокова):

1) виділяємо базову елементарну функцію, властивості якої вже вивчені.

Це функція $y = \frac{1}{x}$. Її графік відомий і є шаблон для побудови (графік 1).

2) за допомогою перетворення, $y = af(x)$ будуємо графік функції $y = \frac{2}{x}$ – «розтягнем» графік 1 у два рази вздовж осі OY (графік 2).

3) за допомогою перетворення $y = f(x + \mathrm{a})$ будуємо графік функції $y = \frac{2}{x+3}$ – паралельним перенесенням графіка 2 на вектор $\vec{n}(-3;\ 0)$ (графік 3).

4) за допомогою перетворення $y = f(x) + \mathrm{a}$ будуємо графік функції $y = \frac{2}{x+3} + 2$ – паралельним перенесенням графік 3 на вектор $\vec{m}(0;\ 2)$ (графік 4).

Допоміжні графіки бажано будувати різним кольором

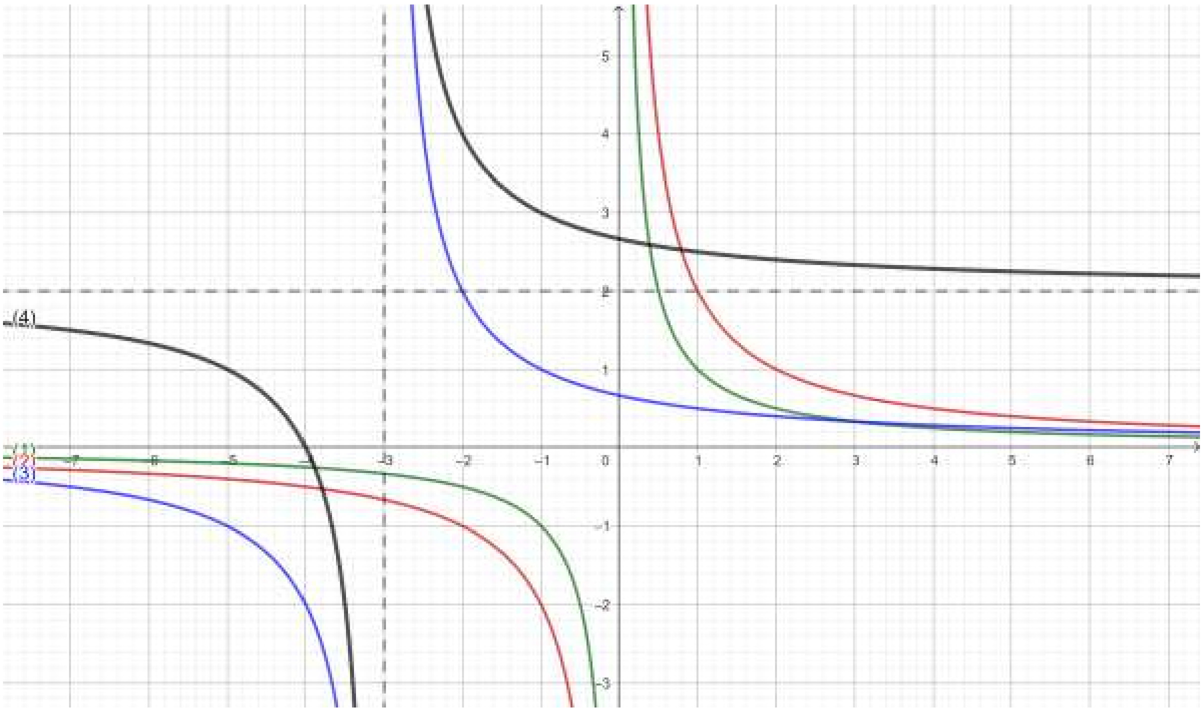


Рис. 2

Дивлячись на графік, читаємо *такі властивості функції* $y = \frac{2x+8}{x+3}$:

1. Область визначення $D(f) = (-\infty; -3) \cup (3;\ +\infty)$.
2. Область значень $E(f) = (-\infty; 2) \cup (2;\ +\infty)$.
3. Неперіодична.
4. Ні парна, ні непарна.
5. Точки перетину з віссю OX : $x = -4$.
6. Проміжки спадання $(-\infty; -3), (-3;\ \infty)$.
7. Горизонтальна асимптота $y = 2$.
8. Вертикальна асимптота $x = -3$.

Доводити названі властивості не потрібно, вони слідують із властивостей базової функції.

З іншими властивостями (неперервність функції, екстремуми функції, диференційованість тощо) учні не знайомі. Їм потрібно сказати, що згодом вони з ними ознайомляться і будуть встановлювати за допомогою отриманих знань про похідну. Тоді схема дослідження властивостей функції ще зазначає зміни.

П І Д С У М О К

У підсумку, вивчивши тему «Функції і їх графіки», учні мають засвоїти, що функції бувають числові і інші, що схема побудови графіка функції і встановлення її властивостей у курсі Алгебри і початків аналізу суттєво змінюється на Методичну схему 2 (МС 2), її суть:

Спочатку будується по точках або за допомогою шаблона графік базової функції. Потім методом геометричних перетворень будується графік складеної функції. За отриманим графіком постулюються такі властивості функції як парність, непарність, зростання на множині чи спадання, періодичність. Їх доведення необов'язкове, оскільки вони доведені для базової функції.

Методичної схеми (МС 2) варто дотримуватися в старшій школі до тих пір, поки учні не почнуть вивчати тему «Похідна і її застосування». Тоді методична схема побудови графіка функції і дослідження її властивостей зазнає суттєвих змін.

МЕТОДИЧНІ ЗАДАЧІ
для самостійного розв'язування

1.	На міліметровому папері виготовити шаблони графіків функцій: $y = \frac{1}{x}$; $y = x^2$; $y = x^3$.
2.	Скласти добірку вправ на побудову графіків складених функцій (методом геометричних перетворень) і встановлення їх властивостей, де базовими функціями будуть: $y = \frac{1}{x}$; $y = x^2$; $y = x^3$.
3.	Виготовити зразок розв'язання однієї із запропонованих вправ з дотриманням культури математичних записів
4.	Підготувати добірку прикладних задач розв'язання яких базується на отриманих знаннях про побудову графіка і встановлення властивостей функцій.

Функції потрібні не лише натуралістові, без них тепер не обійдеться й соціолог. Узагалі в теперішній час немає жодної галузі людського знання, куди не входили б поняття про функції та їх графічне зображення

К. Ф. Лебединцев

… Жодне інше поняття не відбиває явищ реальної дійсності з такою безпосередністю і конкретністю, як поняття функціональної залежності, в якій втілено і рухомість, і динамічність реального світу, і взаємну обумовленість реальних величин…

О. Я. Хончин

Л Е К Ц І Я 2.5

Т Е М А *Методика вивчення змістової лінії «Рівняння і нерівності»*

П Л А Н

1.	***Місце підтеми в програмі, зміст, основна мета вивчення, вимоги до підготовки учнів, орієнтовне планування навчального процесу***
2.	***Формування поняття рівняння (нерівності) з однією змінною, основні теореми про рівносильність рівнянь (нерівностей)***
3.	***Найпростіші рівняння. Складніші рівняння і їх розв'язання методом евристичної редукції. Ірраціональні рівняння і їх розв'язування***
4.	***Ірраціональні нерівності і їх розв'язування***

К О Н С П Е К Т Л Е К Ц І Ї

1. Місце підтеми в програмі, зміст, основна мета вивчення, вимоги до підготовки учнів, орієнтовне планування навчального процесу

Зміст *навчального матеріалу підтеми, орієнтовне планування навчального процесу* подано у таблиці 1.

Таблиця 1

№ п/п	Теми занять, види письмових робіт	К-ть годин	Дата проведення
Підтема 1.3. Рівняння і нерівності			
1	Рівняння, рівносильні рівняння, метод рівносильних переходів	1	
2	Огляд способів розв'язування рівнянь у курсі алгебри основної школи	2	
3	Рівняння вищих степенів. Теорема Безу	2	
4	Нерівності, рівносильні нерівності метод інтервалів	1	
5	Огляд способів розв'язування нерівностей в курсі алгебри основної школи СР 2	2	
6	Ірраціональні рівняння і способи їх розв'язання	2	
7	Ірраціональні нерівності і способи їх розв'язання	2	
4	Ділення многочленів, корені многочлена. Теорема Безу	2	
8	Рівняння і нерівності з параметром і їх розв'язання	2	
	Контрольна робота	1	
	Всього:	17	

Основна мета вивчення

Сформувати сучасне поняття рівняння (нерівності). Вивчити основні теореми про рівносильність рівнянь (нерівностей). Підготувати теоретичні основи для вивчення ірраціональних, тригонометричних, показникових, логарифмічних рівнянь (нерівностей). Актуалізувати знання і вміння розв'язування рівнянь (нерівностей), що вивчались в курсі алгебри основної школи.

Вимоги до підготовки учнів (компетентності)

Вивчивши тему *учень / учениця*:

- формулює означення рівняння (нерівності) з однією змінною, розв'язку рівняння (нерівності), які рівняння (нерівності) називають рівносильними;
- формулює основні теореми про рівносильні рівняння (нерівності);
- вміє застосовувати відповідні теореми під час розв'язування рівнянь (нерівностей), які вивчалися в основній школі.

2. Формування поняття рівняння (нерівності) з однією змінною, основні теореми про ріносильність рівнянь (нерівностей)

У методичній літературі, зокрема в підручнику з методики навчання математики З. І. Слєпкань, виокремлено *три підходи до визначення поняття «рівняння»,* що є загальноприйнятими.

Серед них означення рівняння дається через такі родові поняття і як вираз, функція і предикат.

Означення 1.1. (через вираз) *Рівнянням з одним невідомим x називається рівність $f_1(x) = f_2(x)$ двох виразів $f_1(x)$ і $f_2(x)$, які визначені на множинах M_1 та M_2, для якої потрібно знайти множину усіх значень x з $M_p \subseteq M = M_1 \cap M_2$ таких, щоб обидва вирази $f_1(x)$ і $f_2(x)$ мали рівні числові значення.*

Означення 1.2. (через функцію) *Рівнянням з одним невідомим x називається рівність $f_1(x) = f_2(x)$ двох аналітично заданих функцій $f_1(x)$ і $f_2(x)$, з областями визначення D_1 і D_2 і областями зміни Y_1 та Y_2, де $Y_1 \subseteq R$, $Y_2 \subseteq R$, для якої необхідно знайти всі значення x з $D_r \subseteq D = D_1 \cap D_2$ такі, щоб обидві задані функції мали рівні числові значення.*

Означення 1.3. (через предикат) *Предикат $f_1(x) = f_2(x)$ із множиною визначення D, для якого необхідно відшукати множину істинності $D_r \subseteq D$, називається рівнянням з однією змінною x.*

У більшості сучасних альтернативних підручників з алгебри та початків аналізу для старшої профільної школи означення поняття «рівняння» відсутнє. Проте, учні старшої профільної школи мають чітко усвідомити та розуміти зміст поняття «рівняння». Саме тому, пропонуємо користуватися наступним означенням рівняння, якого слід дотримуватися під час вивчення курсі алгебри і початків аналізу.

Означення. *Нехай дано дві аналітично задані функції $f(x)$ та $\varphi(x)$, що визначені на множинах $D(f)$ та $D(\varphi)$ відповідно і виникає потреба розглядати їх одночасно на спільній області D , яка є перетином заданих множин $D(f) \cap D(\varphi) = D$ (**умова**). Якщо ставиться вимога знайти таке значення аргументу х, при якому задані функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ мають рівні значення, $f(x) = \varphi(x)$ (**вимога**), то маємо задачу, яку **називають рівнянням**.*

У психологічній, методичній та педагогічній літературі відповідно проблемну ситуацію з заданою умовою (даними) та вимогою (метою) прийнято називати задачею. Таким чином, ***рівняння*** – ***це задача*** з відповідною умовою та вимогою, яку необхідно розв'язати. Дане визначення слід повідомити учням 10 класу вже на перших уроках алгебри та початків аналізу під час вивчення підтеми «Рівняння і нерівності». Нагадати, що називати коренем рівняння, множиною коренів. Далі учням слід повідомити, що якщо змінити ***вимогу*** у даному означенні, на вимогу «показати що для всіх значень аргументу x з області визначення D відповідні значення функцій рівні, тобто $f(x) = \varphi(x)$», то отримуємо нову задачу – **тотожність.** Якщо поставити вимогу іншу «знайти при яких значеннях аргументу х значення функцій $f(x)$ більш (менші) за значення іншої функції $\varphi(x)$, тобто $f(x) > \varphi(x)$, ($f(x) < \varphi(x)$), то одержуємо нову задачу – **нерівність**». Таким чином нерівність також задача з відповідною умовою та вимогою.

У залежності від того, які функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ розглядаються, отримуємо різні види рівнянь. Так, з курсу алгебри відомо:

- якщо $f(x)$ та $\varphi(x)$ – лінійні функції, то маємо лінійне рівняння (нерівність);
- якщо хоча б одна з функцій є квадратичною, то маємо рівняння (нерівність) другого степеня;
- якщо хоч одна із функцій дробово-раціональна, то отримаємо дробово-раціональне рівняння (нерівність).

У старшій школі вивчають інші числові функції, тому розглядають:

- якщо функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ – степеневі з дробово-раціональним показником, то матимемо ірраціональне рівняння (нерівність);

- якщо ж задані функції є тригонометричними, то отримаємо тригонометричне рівняння (нерівність);
- якщо $f(x)$ та $\varphi(x)$ – показникові або логарифмічні функції, то одержимо відповідно показникове чи логарифмічне рівняння (нерівність);
- якщо у рівнянні одночасно присутні різні з названих функцій і хоча б одна із них не є алгебраїчною, то маємо трансцендентне рівняння (нерівність).

Використання запропонованого підходу до визначення рівняння (нерівності), спрощує процес їх вивчення, оскільки відпадає потреба, щоразу давати тлумачення кожного виду рівняння (нерівності) окремо. Варто лише пам'ятати, що рівняння (нерівність) – це задача, яку необхідно розв'язати, тобто знайти множину розв'язків.

Означення 1.4. ***Коренем (розв'язком) рівняння (нерівності)*** *називається таке значення аргументу х, при якому задані функції мають рівні значення* $f(x) = \varphi(x), (f(x) < \varphi(x)$ або $f(x) > \varphi(x)$ *).*

Означення 1.5. *Якщо множини розв'язків двох рівнянь (нерівностей) співпадають, то такі рівняння (нерівності) прийнято називати* ***рівносильними****.*

Поняття рівносильності рівнянь (нерівності) є важливим з точки зору їх розв'язування, тому з учнями слід розглянути його більш детально. Спочатку слід зосередитися на рівняннях.

У процесі розв'язування рівнянь постає необхідність у їх перетвореннях, в результаті чого можна або втратити розв'язок, або, навпаки, – знайти зайвий. Щоб запобігти цьому, учням слід повідомити які з перетворень рівняння $f(x) = \varphi(x)$ приводять до рівносильного рівняння, чи рівняння-наслідку.

Найчастіше на практиці такими перетвореннями є:

- додавання або віднімання функції $y(x)$ до правої та лівої частин рівняння;
- множення правої та лівої частин рівняння на функцію $y(x)$;
- ділення правої та лівої частин рівняння на функцію $y(x)$;
- піднесення до степеня n, де $n \epsilon N$, $n \neq 1$ правої та лівої частин рівняння;
- логарифмування правої та лівої частин рівняння;
- потенціювання правої та лівої частин рівняння;
- тригонометричні перетворення над виразами, що стоять в рівнянні;
- функціональні перетворення з рівняннями.

Не всі ці перетворення є рівносильними. З наведених вище міркувань про рівносильність рівнянь випливає, що задане рівняння можна замінити рівносильним до нього та знаходити розв'язок останнього. Слід повідомити учням, що поняття рівносильності має властивість транзитивності, тобто з того, що рівняння $f_1(x) = \varphi_1(x)$ рівносильне рівнянню $f_2(x) = \varphi_2(x)$, а рівняння $f_2(x) = \varphi_2(x)$ в свою чергу рівносильне рівнянню $f_3(x) = \varphi_3(x)$ випливає рівносильність рівнянь $f_1(x) = \varphi_1(x)$ та $f_3(x) = \varphi_3(x)$.

Означення 1.6. *Нехай задано два рівняння $f_1(x) = \varphi_1(x)$ та $f_2(x) = \varphi_2(x)$ і відомо, що кожен корінь першого рівняння є коренем другого, тоді друге рівняння називається наслідком першого.*

Означення рівняння-наслідку слід супроводити використанням діаграм Ейлера-Венна, де чітко видно (рис. 2), що корені рівняння-наслідку, які не є коренями заданого рівняння є сторонніми.

Рис. 2. Співвідношення між множинами коренів даного рівняння та рівняння-наслідку

З учнями доцільно розглянути основні теореми про рівносильність рівнянь, які прийнято називати ***властивостями рівносильності рівнянь*** та довести їх.

Теорема 1.1. *Якщо до обох частин рівняння $f(x) = \varphi(x)$ додати функцію $y(x)$, визначену для всіх допустимих значень змінної x, то отримаємо нове рівняння $f(x) + y(x) = \varphi(x) + y(x)$, рівносильне даному.*

Доведення (доведення вчитель може провести разом з класом)

Нехай $\propto$ – корінь заданого рівняння, тоді $f(\propto) = \varphi(\propto)$. Проте $y(\propto)$ є деяким числом, так як за умовою функція $y(x)$ визначена для всіх допустимих значень змінної x. Додаємо до обох частин числової рівності $f(\propto) = \varphi(\propto)$ число $y(\propto)$, то отримаємо правильну рівність: $f(\propto) + \varphi(\propto) = \varphi(\propto) + y(\propto)$. Таким чином, у силу довільності вибору значення $\propto$, будь-який корінь першого рівняння є коренем другого. Отже, друге рівняння $f(x) + \varphi(x) = \varphi(x) + y(x)$ є наслідком рівняння $f(x) = \varphi(x)$.

І навпаки, нехай $\propto$ - корінь рівняння $f(x)+\varphi(x)=\varphi(x)+y(x)$, тоді $f(\propto)+\varphi(\propto)=\varphi(\propto)+y(\propto)$. Додаємо до обох частин рівняння число $(-y(\propto))$, причому функція $y(x)$ є визначеною для всіх допустимих значень змінної *x,* отримаємо $f(\propto)=\varphi(\propto)$, а це означає, що $\propto$ є коренем рівняння $f(x)=\varphi(x)$, тобто рівняння $f(x)=\varphi(x)$ є наслідком рівняння $f(x)+\varphi(x)=\varphi(x)+y(x)$, що й доводить рівносильність цих рівнянь.

З попередньої теореми випливає важливий наслідок.

Наслідок 1.1. *Якщо у рівнянні $f(x)=\varphi(x)$ перенести одну з функцій (задану в лівій чи правій частині рівняння) в іншу частину рівняння, змінивши при цьому знак на протилежний, то отримаємо рівняння рівносильне даному.*

Рівняння $f(x)-\varphi(x)=0$ або $\varphi(x)-f(x)=0$ рівносильні заданому рівнянню $f(x)=\varphi(x).$ Таким чином учні дізнаються, що *правило перенесення доданків з однієї частини рівняння до іншої,* з яким вони знайомі ще з курсу алгебри 7-9 класів, є наслідком теореми 1.1.

Теорема 1.2. *Якщо обидві частин рівняння $f(x)=\varphi(x)$ помножити на функцію $y(x)$ – визначену для всіх допустимих значень змінної x, причому $y(x)\neq 0$, то отримаємо нове рівняння $f(x)\cdot y(x)=\varphi(x)\cdot y(x)$, рівносильне даному.*

Довести теорему, користуючись аналогією, учні можуть самостійно.

З останньої теореми випливає важливий наслідок.

Наслідок 1.2. *Якщо обидві частини рівняння помножити на довільне відмінне від нуля число, то одержимо рівняння рівносильне даному.*

Розглянуті теорема 1 та теорема 2 стосуються всіх без винятку рівнянь, які вивчаються в шкільному курсі математики. Учням старшої профільної школи доцільно запропонувати ще одну загальну теорему (теорему 1.3), оскільки вони вивчають різноманітні тотожні перетворення виразів (тригонометричних, логарифмічних та інших). Наслідки та інші теореми, що можуть випливати з неї, можна прийняти без доведення, а в разі необхідності запропонувати старшокласникам самостійно провести доведення, залучивши їх до групової чи колективної форм роботи.

Теорема 1.3. *Якщо виконати тотожне перетворення однієї або обох частин рівняння $f(x)=\varphi(x)$ на множині D, то отримаємо рівняння рівносильне даному.*

Зауважимо, що тотожне перетворення заданого рівняння полягає в заміні виразу тотожно рівним йому (наприклад, розкриття дужок, використання відомих тотожностей та інші). Всі три теореми мають свідомо застосовуватись під час вивчення різних видів рівнянь курсу Алгебра і початків аналізу. Учні мають засвоїти, що якщо в рівнянні виконуються тотожні перетворення виразів, то в результаті отримують рівняння, рівносильне даному, якщо ж перетворення не є тотожним (наприклад, піднесення до степеня, потенціювання та інші), що призводить до розширення області D, то отримаємо рівняння-наслідок, а звуженні області D може відбутися втрата коренів.

Таким чином, всі ці перетворення необхідно розглядати стосовно окремих видів рівнянь, оскільки це може привести до виникнення додаткових тверджень та властивостей, яких слід дотримуватися під час розв'язування відповідних рівнянь.

Після розгляду теоретичних відомостей слід здійснити огляд способів розв'язування рівнянь, вивчених в курсі алгебра основної школи: квадратних, дробово-раціональних, біквадратних тощо.

Для нерівностей властивості рівносильності мають дещо інший зміст. Пропонуємо вчителю за аналогією про властивість для рівнянь, розробити їх самостійно (самостійна робота). І, після ознайомлення учнів з теоретичними відомостями, перейти до огляду способів розв'язання нерівностей та їх систем, що вивчались в курсі алгебри основної школи (лінійних, квадратичних, дробово-раціональних).

3. Найпростіші рівняння. Складніші рівняння і їх розв'язання методом евристичної редукції. Ірраціональні рівняння і їх розв'язування

У старшій профільній школі учні вивчають ірраціональні, тригонометричні, показникові, логарифмічні рівняння (нерівності) та їх системи. Всі типи названих рівнянь (нерівностей) рекомендуємо вивчати за однією й тією ж *дидактичною схемою,* що містить такі кроки:

1 крок, виділяються найпростіші рівняння (нерівності) і вивчаються способи відшукання множини їх розв'язків;

2 крок, розглядаються складніші рівняння (нерівності) і способи їх розв'язання шляхом зведення до найпростіших (метод евристичної редукції).

Проілюструємо зміст цієї дидактичної схеми на прикладі вивчення ірраціональних рівнянь, за якими учні частково знайомі.

За програмою з математики для старшої профільної школи (профільний рівень) *ірраціональні рівняння* вивчаються в темі «Степенева функція» (друга тема курсу Алгебра і початки аналізу).

Насамперед учням слід повідомити, що серед ірраціональних рівнянь виділяють два типи найпростіших рівнянь і пояснити до розв'язання яких рівносильних рівнянь (чи систем) зводиться відшукання їх множини розв'язків.

Тобто, слід ознайомити учнів з *правилом-орієнтиром*:

Найпростіші ірраціональні рівняння (типи)	Рівносильні їм рівняння
(1) $\sqrt[2n]{f(x)} = q(x)$, де $n \in N$	$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} f(x) = q^{2n}(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$ $(1')$
(2) $\sqrt[2n+1]{f(x)} = q(x)$	$\Leftrightarrow$ $f(x) = q^{2n+1}(x)$. $(2')$

Такий перехід від (1) до $(1')$, та від (2) до $(2')$ здійснюється шляхом піднесення до степеня обох частин рівняння (перетворення) з показником, рівним показнику кореня. Для рівняння (1) має враховуватися умова $q(x) \geq 0$, а для рівняння (2) така умова зайва.

Далі учням, на прикладах, слід проілюструвати дію правила-орієнтиру, заодно навчити їх культурі математичних записів.

Приклад 1. *Розв'язати рівняння* $\sqrt[5]{24x - 2x^3} = x$.

Розв'язання

Область визначення лівої і правої частин рівняння – всі дійсні числа. Зліва записано корінь непарного степеня. Тому, згідно правила-орієнтиру маємо:

$$\sqrt[5]{24x - 2x^3} = x \Leftrightarrow 24x - 2x^3 = x^5 \Leftrightarrow x^5 + 2x^3 - 24x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x^4 + 2x^2 - 24) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x - 0, \\ x^4 + 2x^2 - 24 = 0. \end{array}\right.$$

$x = 0$ – корінь рівняння. Інші корені знаходимо, розв'язавши біквадратне рівняння $x^4 + 2x^2 - 24 = 0$. Нехай $x^2 = t$, де $t > 0$.

Тоді отримуємо квадратне рівняння $t^2 + 2t - 24 = 0$.

За теоремою, оберненою до теореми Вієта, маємо: $\left[\begin{array}{l} t_1 = 4 \\ t_2 = -6 \end{array}\right.$.

Оскільки $t > 0$, то $t_2 = -6$ не задовольняє вказану вимогу.

Отже, $t = 4$. Звідки $x^2 = 4$. Тоді $x_{2,3} = \pm 2$.

Відповідь: $\{-2; 0; 2\}$.

Приклад 2. *Розв'язати рівняння* $\sqrt[4]{5x^2-6}=x$.

Розв'язання

Згідно правила-орієнтиру маємо:

$$\sqrt[4]{5x^2-6}=x \Leftrightarrow \begin{cases}5x^2-6=x^4\\ x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^4-5x^2+6=0\\ x\geq 0.\end{cases}$$

Розв'язуємо біквадратне рівняння $x^4-5x^2+6=0$. Нехай $x^2=t$, де $t\ >0$.

Тоді, отримуємо квадратне рівняння $t^2-5t+6=0$.

За теоремою, оберненою до теореми Вієта, маємо $t_1=2$, $t_2=3$.

Звідки слідує, що $\left[\begin{array}{l}x^2=2\\ x^2=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_{1,2}=\pm\sqrt{2},\\ x_{3,4}=\pm\sqrt{3}.\end{array}\right.$

Враховуючи вимогу, що $x\geq 0$, отримуємо множину коренів рівняння $\{\sqrt{2};\sqrt{3}\}$.

Відповідь: $\{\sqrt{2};\sqrt{3}\}$.

Учням варто зауважити, що у цьому випадку область визначення даного рівняння можна не знаходити, бо це призведе до додаткового розв'язання системи нерівностей: $\begin{cases}5x^2-6\geq 0\\ x\geq 0,\end{cases}$ що є зайвим.

Способи розв'язання складніших рівнянь і суть методу евристичної редукції слід показати учням використовуючи метод доцільних задач.

Приклад 3. *Розв'язати рівняння* $\sqrt{x+1}=8-\sqrt{3x+1}$.

Розв'язання

Знаходимо область допустимих значень рівняння з умови:

$$\begin{cases}x+1\geq 0\\ 3x+1\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -1\\ x\geq -\frac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{3}.$$

Отже, ОДЗ: $x\epsilon\left[-\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Далі маємо: $\sqrt{x+1}=8-\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{3x+1}=8$.

Піднесемо обидві сторони рівняння (перетворення) до квадрату.

Таке перетворення не є рівносильним, тому отримуємо рівняння-наслідок.

$x+1+2\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{3x+1}+3x+1=64 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{3x+1}=62-4x \Leftrightarrow \sqrt{x+1}\cdot\sqrt{3x+1}=31-2x$.

На встановленій ОДЗ одержуємо найпростіше рівняння $\sqrt{(x+1)(3x+1)}=31-2x$.

Звели складніше ***рівняння до найпростішого*** **(!)**

Знову підносимо обидві сторони рівняння до квадрату і отримуємо рівняння-наслідок:

$$(x+1)(3x+1)=(31-2x)^2 \Leftrightarrow 3x^2+3x+x+1=961-124x+4x^2 \Leftrightarrow x^2-128x+960=0.$$

За теоремою, оберненою до теореми Вієта, знаходимо корені отриманого квадратичного рівняння: $x_1 = 8$, $x_2 = 120$.

Оскільки перехід від початкового рівняння не був рівносильнім, то для отриманих коренів квадратного рівняння слід здійснити перевірку і встановити, які з них будуть коренями даного в умові рівняння.

Перевірка:

$x = 8,\ \sqrt{9} = 8 - \sqrt{25}$, тобто $3 = 3$. Правильна рівність. Отже, $x = 8$ – корінь даного в умові рівняння, $x = 120, \sqrt{121} = 8 - \sqrt{361}$, 11 = 8 – 19, 11 = -11 – неправильна рівність.

Отже, $x = 120$ – сторонній корінь.

Відповідь : $\{8\}$.

На прикладі розв'язання даного рівняння учням слід повідомити що такий спосіб розв'язання складніших ірраціональних рівнянь називають – *спосіб піднесення до степеня* (можливо і неоднократно). А оскільки таке перетворення рівняння може приводити до рівняння-наслідку, то повинна здійснюватися перевірка коренів.

Приклад 4. *Розв'язати рівняння* $\sqrt[3]{x-3} + 6 = 5\sqrt[6]{x-3}$.

Розв'язання

Знаходимо ОДЗ рівняння $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$. Отже, ОДЗ: $x \epsilon [3;\ +\infty)$.

Помічаємо, що $\sqrt[3]{x-3}$ на даній області допустимих значень можна розглядати як $\sqrt[6]{(x-3)^2}$. Вводимо нову змінну. Нехай $\sqrt[6]{x-3} = t$, $t \geq 0$.

Тоді $\sqrt[3]{x-3} = t^2$.

Маємо систему $\begin{cases} t^2 + 6 = 5t, \\ t \geq 0. \end{cases}$

Розв'язуємо перше рівняння системи:

$$t^2 + 6 = 5t \Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 2, \\ t_2 = 3. \end{array}\right.$$

Повертаємося до заміни.

1) $t_1 = 2$; $\sqrt[6]{x-3} = 2$ (найпростіше рівняння) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2 > 0 \\ x - 3 = 2^6 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = 67$.

2) $t_1 = 3$; $\sqrt[6]{x-3} = 3$ (найпростіше рівняння) $\Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ x - 3 = 3^6. \end{cases} \Leftrightarrow x_2 = 732$.

Усною перевіркою встановлюємо, що обидва числа 67 і 732 – корені початкового рівняння.

Відповідь : $\{67; 732\}$.

Учням варто повідомити, що такий спосіб розв’язання складніших ірраціональних рівнянь називають *способом введення нової змінної*, а перевірку коренів можна роботи й усно.

Приклад 5. *Розв’язати рівняння* $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1.$

Розв’язання

З огляду на рівняння і на функції які в ньому подані, встановлюємо що ОДЗ рівняння $x \in R$.

Підносимо обидві частини рівняння до кубу, користуючись формулою скороченого множення $(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 + 3ab(a \pm b)$, маємо:

$$\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1 \iff 2x-1+x-1+3\sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{x-1}\left(\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}\right)=1.$$

У рівняння такого типу, суму $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}$ (оскільки вона за умовою, якщо є корінь рівняння, дорівнює 1) замінюємо на 1 (перетворення не є рівносильним).

Тому можемо отримати рівняння-наслідок.

Отож, маємо:

$\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1 \Rightarrow 3x-2+3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}=1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x-1)(2x-1)}=1-x$ (найпростіше рівняння).

Розв’язуємо найпростіше рівняння відомим способом.

$$\sqrt[3]{(x-1)(2x-1)}=1-x \Leftrightarrow (x-1)(2x-1)=(1-x)^3 \Leftrightarrow (x-1)(2x-1)+(x-1)^3=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x-1+(x-1)^2)=0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x^2=0 \end{array}\right.$$

Отримуємо $x_1=1,\ x_2=0.$

Усною перевіркою встановлюємо, що $x=1$ – корінь рівняння, $x=0$ сторонній корінь.

Відповідь : $\{1\}$.

Звертаємо увагу учнів на той випадок у розв’язанні, коли суму коренів заміняли на число 1. Така заміна суми на вираз, який вказаний в початковому рівнянні, у подібних випадках не є рівносильним перетворенням, а тому отримані розв’язки потрібно перевіряти. Оскільки під час розв’язання використовувалось формула скороченого множення $(a \pm b)^3$, то цей спосіб називають *способом використання формул скороченого множення.*

Приклад 6. *Розв’язати рівняння* $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1.$

Розв’язання

Оскільки дискримінанти обох квадратних тричленів, що стоять під коренем, додатні (це легко встановити усно), то існує множина значень змінної x, для яких обидва корені мають відповідне значення.

Тому їх різниця може дорівнювати 1.

Знаходити ОДЗ рівняння в цьому випадку не обов'язково.

Для розв'язання рівняння вводимо спряжений вираз:

$\sqrt{3x^2+5x+8}+\sqrt{3x^2+5x+1}=A$, A – вираз залежний від x.

Тоді матимемо два рівняння:

$\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$,

$\sqrt{3x^2+5x+8}+\sqrt{3x^2+5x+1}=A$.

Скористаємося формулою скороченого множення $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

Перемножимо рівняння (перетворення) і отримаємо:

$$(3x^2+5x+8)-(3x^2+5x+1)=A.$$

Звідки маємо, $A=7$.

Знаючи значення $A=7$, додамо обидва утворені рівняння.

Отримаємо: $2\sqrt{3x^2+5x+8} \Leftrightarrow \sqrt{3x^2+5x+8}=4$ (найпростіше рівняння).

Розв'язуємо його: $3x^2+5x+8=16 \Leftrightarrow 3x^2+5x-8=0$.

Розв'язками такого квадратного рівняння є числа : $x_1=1$, $x_2=-2\frac{2}{3}$.

Необхідна перевірка коренів основного рівняння:

1) якщо $x=1$, то $\sqrt{3\cdot 1^2+5\cdot 1+8}-\sqrt{3\cdot 1^2+5\cdot 1+1}=\sqrt{16}-\sqrt{9}=4-3=1$.

Рівність правильна, $x=1$ – корінь рівняння.

2) якщо $x=-\frac{8}{3}$, то $\sqrt{3\cdot\frac{64}{9}-\frac{40}{3}+8}-\sqrt{3\cdot\frac{64}{9}-\frac{40}{3}+1}=\sqrt{\frac{64}{3}-\frac{40}{3}+8}-\sqrt{\frac{64}{3}-\frac{40}{3}+1}=$

$=\sqrt{8+8}-\sqrt{8+1}=4-3=1$.

Рівність правильна, $x=-2\frac{2}{3}$ – корінь рівняння.

Відповідь : $\left\{1;\ -2\frac{2}{3}\right\}$.

Знов ж таки учням варто повідомити, що такий спосіб розв'язання називають *спосіб введення спряжених виразів.*

Приклад 7. Розв'язати рівняння $\sqrt[4]{84-x}+\sqrt[4]{13+x}=5$.

Розв'язання

Із запису рівняння встановлюємо, що ОДЗ рівняння знаходиться з умови:

$$\begin{cases}84-x\geq 0,\\ 13+x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\leq 84,\\ x\geq -13\end{cases} \Leftrightarrow x\epsilon[-3;\ \ 84].$$

Для розв'язання рівняння введемо дві нові змінні: $\sqrt[4]{84-x} = U$, де $U \geq 0$, тоді маємо $84 - x = U^4$ (перетворення не є тотожним) $\sqrt[4]{13+x} = V$, де $V \geq 0$, тоді маємо $13 + x = V^4$. Додамо ці дві рівності і отримуємо: $U^4 + V^4 = 97$.

Отримуємо систему рівнянь: $\begin{cases} U + V = 5, \\ U^4 + V^4 = 97 \end{cases}$.

«Звели» рівняння до системи двох рівнянь з двома змінними.

Оскільки $U^4 + V^4 = (U^2 + V^2)^2 - 2n^2v^2 = ((U+V)^2 - 2UV)^2 - 2U^2V^2$,

а $U \quad + V \quad = 5$,

то друге рівняння системи перетвориться в рівняння $(25 - 2UV)^2 - 2U^2V^2 = 97$.

Нехай $UV = t$, де $t \geq 0$. Тоді маємо рівняння:

$(25 - 2t)^2 - 2t^2 = 97 \Leftrightarrow 625 - 100t + 4t^2 - 2t^2 = 97 \Leftrightarrow t^2 - 50t + 264 = 0$.

Звідки $t_1 = 6$, $t_2 = 44$.

Отримуємо сукупність систем:

$$\begin{cases} U + V = 5, \\ U^4 + V^4 = 97 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} U + V = 5, \\ UV = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \{(2;3),\ (3;2)\} \\ \begin{cases} U + V = 5, \\ UV = 44 \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset \end{array} \right.$$

Отже, маємо:

а) $\sqrt[4]{84-x} = 2$ (найпростіше рівняння) $\Leftrightarrow 84 - x = 16 \ \Leftrightarrow \ x_1 = 68$;

б) $\sqrt[4]{84+x} = 3$ (найпростіше рівняння) $\Leftrightarrow 84 + x = 81 \ \Leftrightarrow \ x_2 = 3$.

Розгляд рівнянь $\sqrt[4]{13+x} = 2$ і $\sqrt[4]{13+x} = 3$ приводить до таких же коренів.

Усна перевірка показує, що $x_1 = 68$, $x_2 = 3$ – корені рівняння.

Відповідь : $\{3;\ \ 68\}$.

Використаний спосіб розв'язання називають *спосіб зведення рівнянь до системи рівнянь.* Із розв'язку доцільних прикладів 3-7 учні дізнаються, що найбільш поширеними способами розв'язування складніших ірраціональних рівнянь є:

- піднесення до степеня;
- введення нової змінної;
- використання формул скороченого множення;
- зведення до систем рівнянь.

Чи є ще способи? Є, Їх учні можуть відшукувати самостійно (пошукова робота), розв'язуючи відповідні задачі з шкільних підручників чи збірників вправ. Шляхом аналізу і узагальнення викладених розв'язань 3-7 приводимо учнів до наступних важливих висновків.

1. Єдиного способу розв’язання ірраціональних рівнянь не існує.

2. Серед ірраціональних рівнянь виділяють найпростіші. Множину розв’язків яких знаходять за відомими правилами-орієнтирами.

3. Складніші ірраціональні рівняння розв’язуються методом евристичної редукції. Назва якого походить від термінів:

еврика *(з грецької)* – вигук для вираження радості, задоволення з приводу якого-небудь відкриття, появи вдалої думки і таке інше);

редукція *(від латинської)* – повернення, відновлення) процес або дія, що призводить до послаблення, спрощення чогось, повернення до витоків тощо.

Користуючись названим методом слід звести складніше рівняння певним способом до найпростішого чи найпростіших.

4. Під час розв’язання складнішого ірраціонального рівняння важливо не втратити його короні. Відкинути зайві (сторонні) корені можна або шляхом перевірки, або шляхом дотримання під час розв’язання рівносильних переходів.

4. Ірраціональні нерівності і їх розв’язування

Так само як і в ірраціональних рівняннях серед ірраціональних нерівностей виділяють найпростіші, виду:

(1) $\sqrt[2n]{f(x)} \le \varphi(x)$; **(2)** $\sqrt[2n]{f(x)} \ge \varphi(x)$; **(3)** $\sqrt[2n+1]{f(x)} \le \varphi(x)$; **(4)** $\sqrt[2n+1]{f(x)} \ge \varphi(x)$.

Їх розв’язання зводиться до нерівностей, які не містять знака кореня. Це робиться методом рівносильних переходів. Учням слід зауважити, що на відміну від ірраціональних рівнянь існує чотири правила-орієнтири розв’язання найпростіших ірраціональних нерівностей.

(I) $$\sqrt[2n]{f(x)} \le \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ \varphi(x) \ge 0, \\ f(x) \le \varphi^{2n}(x). \end{cases};$$

(II) $$\sqrt[2n]{f(x)} \ge \varphi(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ \varphi(x) \le 0. \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi(x) \ge 0, \\ f(x) \ge \varphi^{2n}(x). \end{cases} \end{array}\right.;$$

(III) $$\sqrt[2n+1]{f(x)} \le \varphi(x) \Leftrightarrow f(x) \le \varphi^{2n+1}(x);$$

(IV) $$\sqrt[2n+1]{f(x)} \ge \varphi(x)) \Leftrightarrow f(x) \ge \varphi^{2n+1}(x).$$

Далі учням слід проілюструвати дію правил-орієнтирів на прикладах.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\sqrt{4x-x^2} > x-2$.

Це найпростіша ірраціональна нерівність виду (2). Тому маємо:

$$\sqrt{4x-x^2} > x-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x-x^2 \geq 0, \\ x-2 < 0. \end{cases} \quad \text{(а)} \\ \begin{cases} 4x-x^2 \geq 0, \\ x-2 \geq ,0 \\ 4x-x^2 > (x-2)^2. \end{cases} \quad \text{(б)} - \text{ отримали сукупність двох систем.} \end{array}\right.$$

Розв'язання системи (а):

$$\begin{cases} 4x-x^2 \geq 0, \\ x-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-4) \leq 0, \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0;4], \\ x \in (-\infty;2) \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0;2)$$

Розв'язання системи (б):

$$\begin{cases} 4x-x^2 \geq 0, \\ x-2 \geq ,0 \\ 4x-x^2 > (x-2)^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0;4], \\ x \in [2;+\infty) \\ 4x-x^2 > x^2-4x+4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [2;4], \\ 2x^2-8x+4 < 0. \end{cases}$$

Але, $2x^2-8x+4 < 0 \mid :2$

$x^2-4x+2 < 0,$

$D = 16-8 = 8.$

$x_1 = 2-\sqrt{2},$

$x_2 = 2+\sqrt{2}.$

Отже, розв'язки системи (б) є числа з проміжка:

$x \in \left(2-\sqrt{2};\ 2+\sqrt{2}\right)$, $\quad x \in \left[2;\ 2+\sqrt{2}\,\right).$

Остаточна відповідь буде $x \in \left[0;\ 2+\sqrt{2}\,\right).$

Складніші ірраціональні нерівності доцільно розв'язувати методом інтервалів. Його суть варто розкрити на прикладах розв'язка доцільних вправ.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+7}+\sqrt{3x-2} > 9$.

Замінюємо дану нерівність рівносильною $\sqrt{x+7}+\sqrt{3x-2}-9 > 0$.

Ліву сторону нерівності розглядаємо як функцію $F(x) = \sqrt{x+7}+\sqrt{3x-2}-9$.

1) Знаходимо область визначення цієї функції:

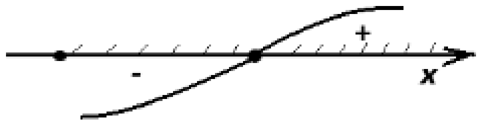
$$\begin{cases} x+7 \geq 0, \\ 3x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -7, \\ x \geq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\tfrac{2}{3};+\infty\right).$$

2) Розв'язуємо рівняння $F(x) = 0$, тобто $\sqrt{x+7}+\sqrt{3x-2} = 9$.

Способи розв’язання складніших рівнянь учням відомі.

Коренем рівняння є $x = 9$.

3) Число 9 розбиває область визначення функції $F(x)$ на два проміжки:



$\left[\frac{2}{3};\ 9\right)$ і $[9; +\infty)$.

Знаходимо знаки значень функції $F(x)$ на кожному з проміжків.

Нехай x = *1*. Тоді, $F(1) = \sqrt{1+7} + \sqrt{3 \cdot 1 - 2} - 9 = \sqrt{8} + 1 - 0 < 0$.

Отже, на проміжку $\left[\frac{2}{3};\ 9\right)$ функція $F(x)$ приймає від’ємні значення.

Нехай x = *11*. Тоді, $F(11) = \sqrt{18} + \sqrt{31} - 9 > 4 + 5 - 9 = 0$.

Отже, на проміжку (9; +∞) функція $F(x)$ приймає додатні значення.

Відповідь : $x \in$ (9; +∞).

Після розв’язання добірки навчальних вправ учнів, як у випадку з рівняннями варто підвести до наступних важливих ***висновків***.

1. Ірраціональні нерівності поділяють на найпростіші та інші (складніші). Найпростіші нерівності розв’язуються з дотриманням відомих правил-орієнтирів.

2. Складніші ірраціональні нерівності доцільно розв’язувати методом інтервалів, який базується на вміннях розв’язувати ірраціональні рівняння та на знаннях таких властивостей функції як її проміжки знакосталості, неперервність, парність, непарність тощо.

П І Д С У М О К

Головним завданням вивченням підтеми «Рівняння і нерівності» є сформувати в учнів поняття рівняння (нерівності), як задачі з відповідними умовою та вимогою та повторити на вищому, теоретико-множинному рівні способи розв’язування рівнянь, що вивчалися в основній школі.

Це має стати основою для вивчення інших видів рівнянь (нерівностей) ірраціональних, тригонометричних, показникових та логарифмічних.

Важливо, щоб була усвідомлена загальна, методологічна схема вивчення всіх рівнянь (нерівностей): а) які функції включаються до умови рівняння (нерівностей), що підлягають вивченню; б) які з рівнянь (нерівностей) обераються за найпростіші і як вони розв’язуються; в) навчитись розв’язувати складніші рівняння (нерівності) методом евристичної редукції.

МЕТОДИЧНІ ЗАДАЧІ
для самостійного розв’язування

1. Проаналізуйте один із діючих альтернативних підручників з алгебри і початків аналізу та з’ясуйте які способи розв’язування пропонують автори:
а) ірраціональних рівнянь;
б) ірраціональних нерівностей.

2. Випишіть і доведіть основні теореми та наслідки з них про рівносильність нерівностей.

3. Підготуйте завдання для підсумкової контрольної роботи з підтеми «Рівняння і нерівності» (два варіанти).
Запропонуйте зразки їх розв’язання.

4. Розв’яжіть рівняння:
а) $|x^2 - x - 12| = 8 - 2x$; б) $\frac{x+2}{x-1} + \frac{x+3}{x+1} + \frac{x+5}{1-x^2} = 0$;
в) $\frac{x^2-2x-6}{x} - \frac{3x}{x^2-2x-6} - 2 = 0$; г) $x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 24 = 0$.

5. Розв’яжіть нерівність:
а) $x^2 - |5x + 6| > 0$;
б) $\frac{(x^2+2x-3)(x^2+5x+4)}{(x^2+x-2)(x^2+5x+6)} \leq 0$;
в) $x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24 < 0$.

Рівняння – це золотий ключ, що відчиняє усі математичні сезами

С. Коваль

Мені доводилось ділити свій час між політикою і рівняннями. Проте рівняння, на мій погляд, набагато важливіші, тому що політика існує тільки для даного часу, а рівняння будуть існувати вічно

А. Енштейн

Л Е К Ц І Я 2.6

Т Е М А ***Обчислення значень функцій, виразів за допомогою калькулятора***

П Л А Н

1.	***Чому необхідно вчити учнів обчислювати значення функцій та виразів за допомогою калькулятора*?**
2.	***На чому ґрунтується обчислення значень функцій за допомогою калькулятора*?**
3.	***Формування в учнів умінь обчислювати значення функцій:*** $y = sin\,x$, $y = cos\,x$, $y = tgx$, $y = a^x$, $y = x^r$ (де *r* – раціональне число), $y = log_a x$, $y = lnx$
4.	***Обчислення значень виразів, що містять вказані в програмі з математики функції***

К О Н С П Е К Т   Л Е К Ц І Ї

1. Чому необхідно вчити учнів обчислювати значення функцій та виразів за допомогою калькулятора?

Як відомо, однією з цілей вивчення алгебри і початків аналізу в старшій профільній школі є – систематичне вивчення функцій як важливого математичного об'єкта засобами алгебри і математичного аналізу.

Мова йде про вивчення функцій: $y = sin\,x$, $y = cos\,x$, $y = tgx$, $y = x^r$ (де r – раціональне число), $y = e^x$, $y = a^x$, $y = lnx$, $y = log_a x$, $y = x^{\propto}$, (де *α* – дійсне число).

Вивчаючи такі функції, учні *повинні навчитись*:

- будувати (схематично) їх графіки, «читати» ці графіки і використовувати під час розв'язування практичних та прикладних задач;
- знаходити значення функцій для заданих значень аргументів, в тому числі і для того випадку, коли аргументом є наближене число. Оцінювати точність таких наближених значень;
- обчислювати вирази, що містять вказані в програмі функції з наближеними значеннями даних.

У недалекому минулому, в старшій школі такі вміння ретельно формувались. Учнів вчили обчислювати значення функцій, виразів за допомогою *чотиризначних математичних таблиць* В. М. Брадіса (фото 1).

Фото 1

Сьогодні користуватись такими таблицями в школах не вчать, а потреба в перерахованих вище уміннях є. Оскільки з’явилися потужні *обчислювальні засоби* – калькулятори, ПК тощо, то учнів старшої профільної школи слід навчити користуватися ними на уроках математики, і не тільки математики, для різних обчислень, зокрема і значень функцій.У програмі з математики для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів та в такій же програмі, для класів з поглибленим вивченням математики, профільного рівня, говориться, що випускник загальноосвітнього навчального закладу (вимога): «*виконує математичні розрахунки (дії з числами, представленими в різних формах, дії з відсотками, наближені обчислення, тощо), раціонально поєднуючи усні, письмові, інструментальні обчислення*».

Більш чіткіше ця вимога звучить як навчальне досягнення учня, під час вивчення окремих тем курсу «Алгебра і початки аналізу»:

Тема 1	«Функції, многочлени, рівняння і нерівності»	***Учень / учениця*** ***знаходить*** значення функцій при заданих значеннях аргументу і значення аргументу, за яких функція набуває даного значення
Тема 2	«Степенева функція»	***Учень / учениця*** ***обчислює, оцінює та порівнює*** значення виразів, які містять корені і степені з раціональним показником
Тема 3	«Тригонометричні функції»	***Учень / учениця*** ***обчислює*** значення тригонометричних виразів за допомогою тотожних перетворень

Аналогічна вимога має виконуватися і під час вивчення показникової та логарифмічної функцій, хоч вона в програмі чітко **не виділена**.

Якщо ж переглянути діючі альтернативні підручники з Алгебри і початків аналізу, то практичних завдань, направлених на реалізацію вказаної вимоги майже немає. А мали б бути! Її виконання призведе до формування в учнів обчислювальної компетентності. Таке державне замовлення слід виконувати.

2. На чому ґрунтується обчислення значень функцій за допомогою калькулятора?

Навчання учнів можна розпочати з, наприклад, розв'язання наступного завдання: обчислити $sin \propto$, де $\propto$ дорівнює: а) 0,785; б) $\approx 0{,}785$.

Скориставшись калькулятором учні знаходять:

а) $sin0{,}785 = 0{,}706825181$. Очевидно, що це наближене значення, яке знайдене з точністю $t = 10^{-9}$. Всі цифри в його запису правильні і в разі потреби його можна округлити до певного десяткового знаку. Зауважимо, що значення $\propto = 0{,}785$ розглядається як точне число.

б) якщо $\propto \approx 0{,}785$, то калькулятор знову показує що $sin0{,}785 \approx 0{,}706825181$, тобто, те ж саме значення що й для точного значення аргументу.

Якою буде точність цього значення ***не ясно***.

Таким чином перед учнями постає проблемна ситуація, яка спонукає їх навчитись: знаходити значення функції $y = sinx$, коли значення аргументу – наближене число; визначати з якою точністю це значення потрібно розглядати! Пропонуємо авторський підхід до розв'язання вказаної проблеми.

Наші пропозиції ґрунтуються на властивостях вивчених функцій.

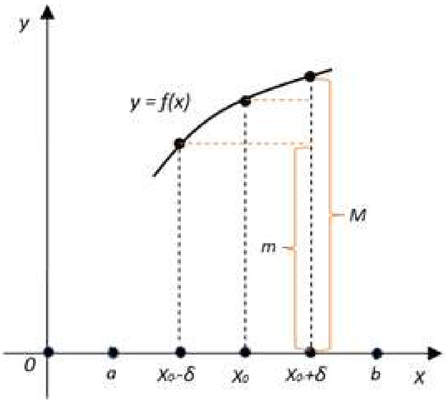


Рис. 1

Нехай розглядається неперервна, монотонна (зростаюча, чи спадна) на проміжку $[\alpha; b]$ функція $y = f(x)$ (рис. 1). Нехай $x = x_0 \epsilon [\alpha; b]$.

Виберемо мале, додатне значення δ так, щоб $x_1 = x_0 - \delta$, та $x_2 = x_0 + \delta$ належали проміжку $[\alpha; b]$.

Знаходимо $f(x_0 - \delta) = m$ і $f(x_0 + \delta) = M$. (розглядаємо зростаючу функцію, у випадку, коли функція буде спадна, міркують за аналогією).

Якщо числа m і M знайдені, то виходячи з властивостей функції $y = f(x)$ (неперервна і монотонно зростаюча) можна стверджувати, що $f(x_0) \approx \frac{M+m}{2}$, а похибка не перевищуватиме що $h = \frac{M-m}{2}$. У цьому і є суть нашого підходу.

3. Формування в учнів умінь обчислювати значення функцій:

$y = sin\,\mathrm{x}, \quad y = cos\,\mathrm{x}, \quad y = tgx, \quad y = a^x,$

$y = x^r$ *(де r – раціональне число),* $y = log_a x, \quad y = lnx$

Отримані учнями теоретичні відомості слід навчити використовувати під час знаходження значень функцій для наближених значень аргументів.

Проілюструємо сказане ***на прикладах.***

Приклад 1. Обчислити $\sqrt[8]{x}$, якщо: а) $x = 2{,}44$; б) $x \approx 2{,}44$.

Розв'язання

а) Число $x = 2{,}44$ – точне, тому за допомогою калькулятора знаходимо: $\sqrt[8]{2{,}44} = 2{,}44^{0{,}125} = 1{,}11795347\ldots$ Значення кореня знайдене з точністю $t = 10^{-8}$. Залежно від потреби його можна округлити до певного десяткового знаку. Всі цифри в записі числа правильні. Отже, $\sqrt[8]{2{,}44} \approx 1{,}11795347$.

б) Число $x \approx 2{,}44$ подане з точністю до сотих. Можна вважати що похибка наближення не перевищує $h = 0{,}005$. Отже, має місце нерівність $2{,}435 < 2{,}44 < 2{,}445$.

Функція $y = \sqrt[8]{x}$ монотонно зростає на проміжку $[0; +\infty)$.

Знаходимо: $m = \sqrt[8]{2{,}435} = 2{,}435^{0{,}125} \approx 1{,}117\,66685$

$$M = \sqrt[8]{2{,}445} = 2{,}445^{0{,}125} \approx 1{,}118\,23957$$

Помічаємо, що в обох значеннях співпадають три перші цифри. Розбіжність починається з третього десяткового знаку після коми.

Округлюємо: число *m* до тисячних з недостачею, маємо 1,117 (бажано, щоб учні пояснили чому округлення робиться з недостачею); число M до тисячних з надлишком, маємо 1,119 (теж саме питання, що й в попередньому випадку).

Отримуємо, що $\sqrt[8]{2{,}44}\ \epsilon\ [1{,}117; 1{,}119]$.

Тому, $\sqrt[8]{2{,}44} \approx \frac{1{,}117+1{,}119}{2} = 1{,}118$, а похибка не перевищує $h = \frac{1{,}119-1{,}117}{2} = 0{,}001$.

Отже, $\sqrt[8]{2{,}44} = 1{,}118 \pm 0{,}001$ (умовна рівність) або $\sqrt[8]{2{,}44} \approx 1{,}118$ (наближена рівність, цифра 8 сумнівна).

Відповідь : а) $\approx 1{,}117\,95347$ б) $\approx 1{,}118$.

Приклад 2. Знайти значення кореня $\sqrt[7]{3{,}14}$, де 3,14 – число точне.

Розв'язання

Під знаком кореня 3,14 – число точне. Скориставшись знову калькулятором, який показник $\frac{1}{7}$ подає як нескінчений періодичний десятковий дріб 0,(142857), помічаємо, що показник потрібно округлити. Тому для подальших обчислень скористаємось нерівністю: $0{,}142 < \frac{1}{7} < 0{,}143$. Межі взяті з трьома значущими цифрами, бо під коренем число 3,14 з трьома значущими цифрами. З властивостей степенової функції слідує нерівність $(3{,}14)^{0{,}142} < \sqrt[7]{3{,}14} < (3{,}14)^{0{,}143}$. Знаходимо за допомогою калькулятора:

$(3{,}14)^{0{,}142} = 1{,}17\ 642436\ldots$;

$(3{,}14)^{0{,}143} = 1{,}17\ 777123\ldots$.

Розбіжність у значеннях починається з третього десяткового знака після коми.

Тоді $m = 1{,}176$, $M = 1{,}178$.

Тому $\sqrt[7]{3{,}14} \approx \frac{1{,}178+1{,}176}{2} = 1{,}177$, а похибка не перевищує $h = \frac{1{,}178-1{,}176}{2} = 0{,}001$.

Отже, $\sqrt[7]{3{,}14} = 1{,}177 \pm 0{,}001$ (умовна рівність) або $\sqrt[7]{3{,}14} \approx 1{,}177$ (наближена рівність, остання цифра 7 – сумнівна).

Відповідь : $\sqrt[7]{3{,}14} \approx 1{,}177$.

Приклад 3. Обчислити значення функції $y = x^r$, де $x \approx 2{,}3$, $r \approx\approx 0{,}35$.

Розв'язання

І аргумент і показник степеня взяті з точністю до сотих. Тому маємо: $2{,}25 < x < 2{,}35$, $0{,}345 < r < 0{,}355$. Функція $y = x^r$ монотонна (подвійна монотонність і з огляду аргументу, і з огляду показника). Тому, щоб не вдаватися у подробиці, пропонуємо поступати таким чином. Виконати обчислення за схемою:

$$2{,}25 \quad < \quad x \quad < \quad 2{,}35$$
$$0{,}345 \quad < \quad r \quad < \quad 0{,}355$$

$2{,}25^{0{,}345} = 1{,}3\ 2282675\ldots$ (!)

$2{,}25^{0{,}355} = 1{,}3\ 3359757\ldots$ (!)

$2{,}35^{0{,}345} = 1{,}3\ 4282189\ldots$ (!)

$2{,}35^{0{,}355} = 1{,}3\ 5434432\ldots$ (!)

Очевидно, що найбільшим з цих чотирьох значень буде $2{,}35^{0{,}355}$, а найменшим $2{,}25^{0{,}345}$. Тому обераємо: $m = 1{,}32$, $M = 1{,}36$.

Тоді, $2{,}3^{0{,}35} \approx \frac{1{,}32+1{,}36}{2} = 1{,}34$, а похибка не перевищує $h = \frac{1{,}36-1{,}32}{2} = 0{,}02$.

Отже, $2{,}3^{0{,}35} = 1{,}34 \pm 0{,}02$ (умовна рівність), або $2{,}3^{0{,}35} \approx 1{,}3$ (наближена рівність).

Відповідь : $2{,}3^{0{,}35} \approx 1{,}3$.

Приклад 4. Обчислити значення функції $y = sinx$, якщо $x \approx 0{,}785$.

Розв'язання

Аргумент поданий з точністю до тисячних. За відомостями про наближені числа робимо висновок, що похибка не перевищує $\varepsilon = 0{,}0005$. Тому можна вважати, що $0{,}7845 < 0{,}785 < 0{,}7855$.

Будемо вважати числа $x_1 = 0{,}7845$ та $x_2 = 0{,}7855$ – точними. Вони належать проміжку $[0; \frac{\pi}{2}]$, на якому функція $y = sinx$ неперервна і монотонно зростає. Тому знаходимо за допомогою калькулятора:

$$m = \sin 0{,}7845 = 0{,}706471399 \ldots$$

$$M = \sin 0{,}7855 = 0{,}707178787 \ldots$$

Помічаємо, що в обох значеннях співпадають три перших цифри. Розбіжність починається і третього десяткового знака.

Заокруглюємо число *m* до тисячних з недостачею і маємо $\boxed{0{,}706}$.

Заокруглюємо число *M* до тисячних з надлишком і маємо $\boxed{0{,}708}$.

Отримуємо, що $sin\,0{,}7845\,\epsilon\,[0{,}706;\ \ 0{,}708]$.

Тоді маємо: $sin0{,}785 \approx \frac{0{,}706+0{,}708}{2} = 0{,}707$, а межа похибки $h = \frac{0{,}708-0{,}706}{2} = 0{,}001$.

Отже, $sin0{,}785 = 0{,}707 \pm 0{,}001$ – умовна рівність; $sin0{,}785 \approx 0{,}707$ – наближена рівність. Всі цифри в запасі значення $sin0{,}785$ правильні, крім останньої, оскільки вона стоїть на місці тисячних, а одна тисячна не перевищує межі похибки h.

Тому вона сумнівна, проте в проміжних обчисленнях вона враховується.

Відповідь : $sin0{,}785 = 0{,}707 \pm 0{,}001$, або $sin0{,}785 \approx 0{,}71$.

Приклад 5. Обчислити значення функції $y = lgx$, якщо $x \approx 5{,}243$.

Розв'язання

Аргумент поданий з точністю до тисячних. Функція $y = lgx$ – неперервна і монотонно зростаюча.

Скориставшись попередніми рекомендаціями, маємо: $x\,\epsilon\,[5{,}2425;\ \ 5{,}2435]$.

Вважаючи числа 5,2425 і 5,2435 – точними, маємо:

$lg\,5{,}2425 = 0{,}719538439 \ldots$

$lg\,5{,}2435 = 0{,}719621272 \ldots$

Помічаємо, що в обох значеннях співпадають три десяткові знаки після коми, розбіжність починається з четвертого десяткового знака.

Округлюємо : для m з недостачею і маємо $m = 0{,}7195$;

для M з надлишком і маємо $M = 0{,}7197$.

Тоді отримуємо: $lg\,5{,}243 \approx \frac{0{,}7195+0{,}7197}{2} = 0{,}7196$,

а межа похибки $h = \frac{0{,}7197-0{,}7195}{2} = 0{,}0001$.

Отже, $lg\,5{,}243 = 0{,}7196 \pm 0{,}0001$ або $lg\,5{,}243 \approx 0{,}7196$.

За такою методикою слід вчити учнів знаходити значення інших елементарних функцій, коли йде їх безпосереднє вивчення, переводити градусну міру кута в радіанну і навпаки, знаходити значення виразів зі змінними, якщо значення змінних – наближені числа, визначати точність таких значень, відносну точність, робити відповідні висновки про якість обчислень.

4. Обчислення значень виразів, що містять вказані в програмі з математики функції

Отримані знання і вміння виконувати наближені обчислення стануть в нагоді під час розв'язування на уроках математики практичних та прикладних задач (дані в яких зазвичай наближені числа), фізики (особливо під час виконання лабораторних робіт), хімії (практичні роботи), тощо. Наведемо кілька прикладів розв'язань таких задач.

Задача 1. Знайти з точністю до одиниці сторону b ΔABC, у якому $\alpha \approx 36$ *см*, $c \approx 52$ *см*, кут $\beta \approx 48°$.

За теоремою косинусів $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta}$. Щоб обчислити значення такого виразу необхідно знайти наближене значення $\cos\beta$, оцінити точність наближення. Після цього можна обчислювати значення виразу або методом меж, або методом підрахунку правильних цифр, або методом меж похибок, виходячи з того яким способом учень володіє.

Отже, знаходимо спочатку $cos48^0$. Оскільки значення кута β – наближене число, то маємо: $47^0 < \beta < 49^0$ (тут межа похибки дорівнює 1^0).

Тоді, $cos47^0 \approx 0{,}68199836 \ldots$ $\quad$ $cos49^0 \approx 0{,}656059029 \ldots$

На проміжку $[0^0;\ 90^0]$ функція $\mathrm{y} = cos\mathrm{x}$ – спадна. Тому $M = 0{,}69$ (округлення з надлишком), $m = 0{,}65$ (округлення з недостачею).

Тоді $cos48^0 \approx \frac{0{,}69+0{,}65}{2} = 0{,}67$, $h = \frac{0{,}69-0{,}65}{2} = 0{,}02$. Тобто $cos48^0 = 0{,}67 \pm 0{,}02$.

В умовній рівності цифра 6 – правильна, а цифра 7 – сумнівна.

Її беремо для проміжних обчислень.

Тому $cos48^0 \approx 0{,}67$.

Далі, за правилом підрахунку цифр обчислюємо вираз:

$$b = \sqrt{36^2 + 52^2 - 2 \cdot 36 \cdot 52 \cdot 0{,}67} = \sqrt{1296 + 2704 - 2508{,}48} = \sqrt{1491{,}5} = 38{,}619943 \approx 38 \ (см).$$

(в записі залишаємо дві значущі цифри)

Відповідь : $b \approx 38$ см.

Задача 2. Внаслідок зростання температури води Північного моря виникла екологічна катастрофа – забруднення синьо-зеленими водоростями території довжиною біля 10 *км* (площа, на якій повністю вбито морське життя). Визначте середній приріст синьо-зелених водорослей протягом доби, виражений у відсотках, якщо кожного місяця їх кількість збільшується у 10 разів.

Розв'язання

Використаємо відому формулу $l = l_0(1+p)^t$ (математична модель), де l – довжина забрудненої водоростями території в момент часу $t,$ l_0 – початкова довжина забрудненої території, p – середній приріст водорослей протягом доби, виражений $у$ %, t – час, вимірюється добами. Звідси, згідно даних задачі одержуємо рівність: $10(1+p)^{30} = 100$, якій рівносльна рівність $(1+p)^{30} = 10$. Для визначення p можна піднести обидві частини рівняння до степеня $\frac{1}{30}$ і, виконавши певні перетворення, одержати $p = \sqrt[30]{10} - 1$.

Для обчислення значення виразу спочатку знайдемо значення функції $y = \sqrt[30]{x}$, де $x = 10$. Оскільки $\frac{1}{30} = 0{,}03333$ ..., то маємо $0{,}033 < \frac{1}{30} < 0{,}034$.

Тоді, $10^{0{,}033} = 1{,}07894672$ ..., $m =$ 1,07; $10^{0{,}034} = 1{,}08143395$ ..., $M =$ 1,09.

Отже, $\sqrt[30]{10} \approx \frac{1{,}09+1{,}07}{2} = 1{,}08$, h = 0,01.

Умовна рівність $\sqrt[30]{10} = 1{,}08 \pm 0{,}01$, наближена рівність $\sqrt[30]{10} \approx 1{,}08$.

Тоді $p = \sqrt[30]{10} - 1 \approx 0{,}08$, $p \approx 8$ %.

Відповідь : ≈ 8 %.

Можна діяти по-іншому.

Прологарифмувавши рівність $(1+p)^{30} = 10$ за основою 10 і скориставшись властивістю логарифма, одержуємо: $30lg(1+p) \quad = 1$, звідси $lg(1+p) \quad = \frac{1}{30}$. Тобто, маємо рівняння, в якому змінна міститься лише під знаком логарифма. Такі рівняння називають *логарифмічними*. Розв'язуємо і приходимо до тієї ж відповіді.

Відповідь: 8 %.

Задача 3. Обчислити заряд кульки q, маса якої $m \approx 2{,}0$ *г*, що обертається на нитці завдовжки $l \approx 1{,}2$ *м* навколо нерухомого такого самого точкового заряду $q.$ Період обертання кульки $\mathrm{T} \approx 3{,}2$ *с*, а кут відхилення від вертикалі $\propto \approx 25°$.

Розв'язання задачі зводиться до обчислення значення виразу:

$$q = l \cdot \sin\alpha \cdot \sqrt{4\pi\varepsilon_0 m\left(q \cdot tg\alpha - \frac{4\pi^2}{T^2} l \cdot sin\alpha\right)},\ \text{де}\ q = 9{,}8\ \text{м/с}^2.$$

Розв'язання

Із таблиць знаходимо значення електричної сталої $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н}\cdot\text{м}^2}$.

1) Знаходимо спочатку значення $tg \propto$, $sin \propto$, якщо $\propto \approx 25^\circ$.

Виберемо за межу похибки для кута $\propto$ один градус (ціна поділки).

Тоді маємо: $24^\circ < \propto < 26^\circ$.

$tg24^\circ = 0{,}445228685 \ldots$ $\quad m_1 = 0{,}44,\ \ M_1 = 0{,}49.$

$tg26^\circ = 0{,}487732589 \ldots$ $\quad tg25^\circ \approx 0{,}465,\ \ h_1 = 0{,}025.$

$sin24^\circ = 0{,}406736643 \ldots$ $\quad m_2 = 0{,}40,\ \ M_2 = 0{,}44.$

$sin26^\circ = 0{,}438371147 \ldots$ $\quad sin25^\circ \approx 0{,}42,\ \ h_2 = 0{,}02.$

Обидва значення функції беремо з двома значущими цифрами.

Отже, $tg25^\circ \approx 0{,}46$, $sin25^\circ \approx 0{,}42$.

2) $q \cdot tg \propto = 9{,}8 \cdot 0{,}46 = 4{,}508 \approx 4{,}51.$

3) $\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot l \cdot sin \propto = \frac{4\cdot 3{,}14^2}{3{,}2^2} \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}42 = 1{,}94110875 \approx 1{,}94.$

4) $ctg \propto - \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot l \cdot sin \propto \approx 4{,}51 - 1{,}94 = 2{,}57.$

Зауважимо, що $m = 2 \cdot 10^{-4}$ *кг*.

5) $\sqrt{4\pi\ \ \varepsilon_0 \cdot m \cdot 2{,}57} = \sqrt{4 \cdot 3{,}14\ \ \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \ \cdot 2{,}57} \approx 23{,}9 \cdot 10^{-8}.$

6) $q = l \cdot sin \propto \cdot 23{,}9 \cdot 10^{-8} \approx 1{,}2 \cdot 0{,}42 \cdot 23{,}9 \cdot 10^{-8} \approx 12 \cdot 10^{-8}.$

Відповідь : $q = 12 \cdot 10^{-8}$ *Кл*.

П І Д С У М О К

Формування обчислювальної компетентності є актуальною і важливою проблемою, яка недостатньо реалізується в навчанні математики. Цим варто зайнятися як дослідникам, так і практичним педагогам-математикам.

Для розв'язання даної проблеми слід, насамперед, чітко (в програмі з математики для школи) визначити зміст і вимоги до підготовки учнів з кожної навчальної теми, що в комплексі становитиме суть обчислювальної компетентності.

У відповідності до прийнятої програми шкільного курсу математики має бути нове наповнення шкільних підручників вправами, прикладними задачами, розв'язання яких і давало би змогу формувати вказану компетентність.

Названа проблема має стати предметом дослідження науковців, а результатом таких досліджень мають стати розроблені ефективні методики (технології) формування обчислювальної компетентності.

Розроблені методики мають стати предметом вивчення майбутніми вчителями математики, а також діючими вчителями в системі їх неперервної освіти.

МЕТОДИЧНІ ЗАДАЧІ
для самостійного розв'язування

1. Розробіть методичні рекомендації для обчислення значень функції $y = x^r$, якщо x та показник *r* – наближені числа.
   Розгляньте випадки:
   а) коли $x\epsilon(0; 1)$;
   б) коли $x\epsilon(1; +\infty)$.

2. Створіть добірку вправ на обчислення значень функції та добірку прикладних задач (де ця функція використовується в якості математичної моделі):
   1) $y = x^n$, 2) $y = \sqrt[n]{x}$, 3) $y = x^r$, де *r* – раціональне число,
   4) $\mathrm{y} = \sin x$, 5) $y = \cos x$, 6) $y = tg\,\mathrm{x}$,
   7) $y = e^x$, 8) $y = a^x$, 9) $y = \lg x$,
   10) $y = lnx$.

3. До створених добірок вправ і задач розробіть зразки оформлення їх розв'язання з дотриманням культури математичних записів.

4. *На прикладі розв'язання кількох прикладних задач дослідить доцільність виконання наближених обчислень:
   а) методом меж; б) методом підрахунку цифр; в) методом меж похибок.

***) Задачі 1,4 можуть бути темами для курсової чи дипломної роботи.**

… Хоч би який був точний математичний розв'язок, він не може бути точніший від тих наближених засновників, на яких він ґрунтується
О. М. Крилов

Віддайте ж людині – людське, а обчислювальній машині машинне
Н. Вінер

Л Е К Ц І Я 2.7

Т Е М А ***Границя та неперервність функції***

П Л А Н

1.	***Місце теми в програмі з математики, зміст навчального матеріалу. Вимоги до математичної підготовки учнів, орієнтовне планування навчального процесу***
2.	***Формування поняття границі послідовності, основні теореми про границю послідовності***
3.	***Границя і неперервність функції. Основні теореми про границю функції***
4.	***Розширення схеми дослідження властивостей функції та побудови її графіка. Приклади розв'язування вправ***

К О Н С П Е К Т Л Е К Ц І Ї

1. Місце теми в програмі з математики, зміст навчального матеріалу. Вимоги до математичної підготовки учнів, орієнтовне планування навчального процесу

Згідно діючої програми з математики для старшої профільної школи відомості про границю та неперервність функції учні отримують в 11 класі під час вивчення теми 5 «Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування» (таблиця 1). Таке запізніле вивчення обґрунтовується тим, що знання про границю функції потрібні для вивчення похідної, а згодом і неозначуваного та означуваного інтегралів.

1) Зміст навчального матеріалу, календарне планування навчального процесу вивчення підтеми «Границя та неперервність функції».

Таблиця 1

Зміст навчального матеріалу	***Навчальні досягнення учнів***
Тема 5. Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування (50 год). *Границя послідовності. Основні теореми про границі послідовності.* *Границя функції в точці.* *Основні теореми про границі функції в точці.* *Неперервність функції в точці і на проміжку.* *Властивості неперервних функцій.* *Точки розриву функції.* *Поняття границі функції та нескінченності.* *Нескінченна границя функції.* *Вертикальні та горизонтальні асимптоти графіка функції.*	*Формулює* означення границі послідовності і границі функції в точці, неперервності функції. *Формулює* основні властивості границі функції та *використовує* їх для знаходження границь заданих функцій. *Пояснює* геометричний і фізичний зміст похідної. *Формулює* означення похідної функції в точці, правила диференціювання, достатні умови зростання і спадання функції, необхідні й достатні умови екстремуму функції.

(Чудові границі) Задачі, які приводять до поняття похідної. Похідна функції, її геометричний та фізичний зміст. *Рівняння дотичної до графіка функції*. Правила диференціювання: похідна суми, добутку і частки функцій. *Складена функція. Похідна складеної функції.* *Похідні* степеневої та *тригонометричних функцій.* Ознака сталості, зростання й спадання функції. Екстремуми функції. Найбільше і найменше значення функції на проміжку. *Застосування похідної для розв'язування рівнянь та доведення нерівностей.* *Друга похідна. Поняття опуклості функції. Точки перегину.* *Знаходження проміжків опуклості функції та точок її перегину.* *Застосування першої та другої похідних до дослідження функцій та побудови їх графіків.* *Асимптоти графіка функції.* Застосування похідної до розв'язування задач, зокрема прикладного змісту	*Знаходить* кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції в даній точці. *Знаходить* похідні функції. *Застосовує* похідну до знаходження проміжків монотонності та екстремумів функції. *Знаходить* найбільше і найменше значення функції на проміжку. *Досліджує* функції за допомогою похідної та *будує* графіки функцій. *Розв'язує* прикладні задачі на знаходження найбільших і найменших значень реальних величин. *Застосовує* результати дослідження функції за допомогою похідної до розв'язування рівнянь і нерівностей та доведення нерівностей; *Описує* поняття опуклості функції та точок перегину. *Застосовує* другу похідну до знаходження проміжків опуклості функції та точок її перегину. *Досліджує* функції за допомогою першої та другої похідних і використовує одержані результати для побудови графіків функцій

На наш погляд, даний порядок вивчення ***має бути змінено***: *із теми 5 слід виокремити підтему «Границя та неперервність функції» і вивчати її відразу в 10 класі після теми 2 «Множини, вирази, функції, рівняння і нерівності».*

Доцільність такої перестановки обумовлена тим, що далі, після теми 2 вивчаються властивості і графік степеневої, тригонометричних, показникової та логарифмічної функцій.

Їх істотними властивостями є не тільки проміжки зростання і спадання, парність та непарність, періодичність, а також і неперервність графіка. Виходячи з такої потреби, пропонуємо здійснити запропоновані зміни та скористатися авторською методикою вивчення підтеми 5.1. «Границя та неперервність функції».

Зміст навчального матеріалу теми, орієнтовне планування навчального процесу, основна мета вивчення та вимоги до підготовки учнів подано в таблиці 2.

Таблиця 2

№ п/п	Теми занять, види письмових робіт	К-ть годин	Дата проведення
1	Числова послідовність, вид послідовностей	1	
2	Границя послідовності. Основні теореми про границі послідовності. Теорема Вейєрштраса. Перша чудова границя, число e СР 1	2	
3	Обчислення границь числових послідовностей СР 2	2	
4	Границя функції в точці. Односторонні границі. Основні теореми про границю функції	2	
5	Обчислення границі функції в точці СР 3	2	
6	Неперервність функції в точці, неперервність функції на проміжку $\langle a, b \rangle$	1	
7	Дослідження вивчених функцій на неперервність СР 4	2	
8	Контрольна робота	1	
	Всього:	13	

2) *Основна мета вивчення*: сформувати в учнів поняття границі функції в точці, неперервності функції в точці і на проміжку. Вивчити основні теореми про границі, навчити застосовувати отримані знання для побудови графіків функцій.

3) *Вимоги до підготовки учнів*.

Учень / учениця:

- *знає* що таке числова послідовність;
- *наводить* приклади числових послідовностей і називає їх властивості (скінченна, нескінченна, зростаюча, спадна і т. п.)
- *формулює* означення границі послідовності, функції в точці, неперервності функції в точці;
- *формулює* основні властивості границі функції (послідовності);
- *використовує* отримані знання для дослідження вивчених функцій на неперервність.

2. Формування поняття границі послідовності, основні теореми про границю послідовності

Теоретичні відомості про числову послідовність, границю послідовностей, основні властивості (теореми) сформованих понять пропонуємо подати учням у формі шкільної лекції, зміст якої викладно нижче.

Лекція на тему

«Числова послідовність, збіжні послідовності, основні теореми»

Залежність між елементами X і Y при якій кожному елементу з множини A відповідає один елемент множини Y, називають функцією.

Символічно записують $y = f(x)$.

Нехай множиною X буде множина натуральних чисел N, а множиною Y – множина дійсних чисел R. Тоді функцію $y = f(n)$, задану на множині N називають *числовою послідовністю* і дотримуються наступного означення.

Означення. *Числовою послідовністю називається числова функція, задана на множині натуральних чисел*.

Має місце загальний запис такої функціональної залежності:

$$f(1) = a_1,\ f(2) = a_2,\ f(3) = a_3,\ \dots,\ f(n) = a_n,\ \dots$$

числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \dots$ – називають відповідно перший, другий, … , n-й, … член послідовності. Серед цих записів виділяють a_n – n-й (загальний) член послідовності, а саму функцію записують часто у вигляді (a_n).

Зауважимо, що окремим видом числової послідовності є арифметична та геометрична прогресія, які вивчалися в курсі алгебри основної школи.

Способи задання послідовності такі ж як і для довільної функції. Але є й особливості. Найбільш поширеними є ***аналітичний*** та ***графічний.*** Розглянемо детальніше кожен з них a_4.

1. *Аналітичний спосіб* задання послідовності:

а) за допомогою формули n-го члена

Наприклад, $a_n = \frac{1+(-1)^2}{2}\ (n \epsilon N)$.

1) Для обчислення будь-якого члена даної послідовності, вибирають *n* (номер). Наприклад, $a_1 = \frac{1+(-1)^1}{2} = 0$, $a_2 = \frac{1+(-1)^2}{2} = 1$, $a_3 = \frac{1+(-1)^3}{2} = 0, \dots$.

б) за допомогою упорядкованого числового ряду

Наприклад.

2) 0, 1, 0, 1, 0, 1 … – послідовність, в якій на непарних місцях розміщено 0, а на парних 1.

в) *за допомогою рекурентного співвідношення*

Коли задається формула, за допомогою якої обчислюється довільний член послідовності через відомі попередні – *формула рекурентного співвідношення*. Наприклад, формула $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ пов'язує кожен член послідовності a_n з двома попередніми членами a_{n-1} та a_{n-2} . Якщо $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, то отримаємо послідовність: $1;\ 0;\ -1;\ -2;\ -3;\ -4;\ \dots$, а при інших значеннях a_1, a_2 послідовність зміниться.

2. *Графічний спосіб* задання послідовності

Послідовність можна задавати графічно (рис. 1 та рис. 2).

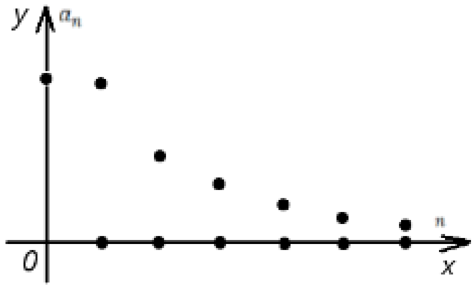


Рис. 1

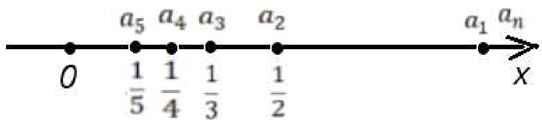


Рис. 2

Якщо кількість членів послідовності (a_n) скінченна, то її називають ***скінченною*** і позначають $(a_n)^k{}_{n=1}$, в іншому випадку – ***нескінченною*** і позначають $(a_n)^\infty{}_{n=1}$.

Наприклад.

1) $(a_n)^5{}_{n=1}$: $1; 2;\ -3;\ -4; 0$ (скінченна послідовність);

2) $(a_n)^\infty{}_{n=1}$: $1; \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots;\ \frac{1}{n}$ (нескінченна послідовність).

Якщо кожний наступний член послідовності більший за попередній, тобто $a_{n+1} > a_n$ $(n \in N)$, то таку послідовність називають *зростаючою*.

Якщо має місце зворотна нерівність, то послідовність називають *спадною*.

У випадку, коли всі члени послідовності рівні, таку послідовність називають *сталою*. Зростаючу і спадну послідовності називають *монотонними*. Якщо послідовність не монотонна і не стала, то її називають *коливною*.

Наприклад.

(1) 2; 4; 8; … ; 2^n; … (монотонно зростаюча послідовність);

(2) 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; … ; $\frac{1}{n}$; … (монотонно спадна послідовність);

(3) 1; -1; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; … ;$-\frac{1}{n}$; $\frac{1}{n}$; … (коливна послідовність);

(4) 5; 5; 5; … ; 5; … (стала послідовність).

Якщо для послідовності (a_n) існує число b від якого всі її члени більші (менші), то така послідовність називається *обмежена знизу (зверху) числом* b. Послідовність, яка обмежена одночасно і знизу і зверху називається *обмеженою*. Із наведених вище прикладів послідовність (1) – обмежена знизу, але необмежена зверху, послідовності (2), (3), (4) – обмежені.

З геометричної точки зору всі члени обмеженої знизу (зверху) послідовності, лежать на числовій прямій справа (зліва) від числа $b,$ тобто, належать променю $[b;\ +\infty)$ $(-\infty;\ \ b]$, а обмеженої – належать деякому числовому проміжку $[a\ ;b]$.

Розглянемо ще один вид послідовностей, які у вивченні багатьох розділів математики відіграють важливу роль. Розпочнемо з конкретного прикладу.

Нехай дано послідовність $(a_n) = \frac{1}{n}$, де $(n \epsilon N)$. Якщо відкласти її на числовій прямій (рис. 2), то стає помітним «скупчення» нескінченої кількості членів біля числа 0. Виберемо додатнє число $\varepsilon_1 = 0{,}1$ і побудуємо проміжок $[-0{,}1\ ; 0{,}1]$ (ε окіл точки 0). Визначимо, які члени послідовності попадають в цей окіл. Для цього очевидно, слід розв'язати нерівність $-0{,}1 < \frac{1}{n} < 0{,}1$. Оскільки n натуральне число, то отримуємо нерівність $-0{,}1n < 1 < 0{,}1 \cdot n$, звідки маємо $n > \frac{1}{0{,}1}$, тобто $n > 10$. Отже, в ε –окіл точки $0\ (-0{,}1; 0{,}1)$ попадають всі члени послідовності $(a_n) = \frac{1}{n}$ з номером більшим за $N = 10$.

Зменшуємо радіус околу. Нехай $\varepsilon_2 = 0{,}01$. Тоді з нерівності $-0{,}01 < \frac{1}{n} < 0{,}01$, одержуємо $n > \frac{1}{0{,}01}$, тобто $n > 100$. І знову виявляється, що якщо число $\varepsilon_2 = 0{,}0\ 1$, то всі члени даної послідовності з номерами більшим за 100 належать ε – околу точки $0\ (-0{,}1; 0{,}01)$. Очевидно, що коли і надалі зменшуватимемо число ε, то щоразу матимемо один і той же ***наслідок***:

знайдеться такий номер N, залежний від обраного числа ε, починаючи з якого всі члени даної послідовності з номерами більшими за N попадатимуть в окіл точки 0 $(-\boldsymbol{\varepsilon};\ \boldsymbol{\varepsilon})$.

Оскільки число 0 для даної послідовності володіє такою властивістю, то його назвали границею послідовності $(a_n) = \frac{1}{n}$ і записують $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. У записі символ $\lim$ - *від латинського слова «limes»*, означає «границя». Читається даний запис так «границя послідовності $\frac{1}{n}$ при *n*, що прямує до нескінченості, дорівнює 0».

Розгляд вище викладеного прикладу приводить до потреби введення для числових послідовностей важливого означення.

Означення. *Число α називається границею числової послідовності (a_n), якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке натуральне число $N = N(\varepsilon)$ (залежне від ε), що для всіх $n > N$ виконується нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$, тобто всі члени послідовності з номерами більшими за N належать ε-околу числа α ($\alpha - \varepsilon;\ \ \alpha + \varepsilon$).*

Символічно це записують так: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ або $a_n \to a$ $(n \to \infty)$.

Послідовності, що мають границю, називають *збіжними*.

Ті ж послідовності, які границі не мають, називають *розбіжними*.

Якщо границя числової послідовності (a_n) дорівнює нулю, то таку послідовність називають *нескінченно малою* і записують $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Послідовність (a_n) називається *нескінченно великою,* якщо, яке б не було число $M > 0$, існує натуральне число $N = N(M)$, що для всіх членів послідовності з номерами $n > N$ виконується нерівність $|a_n| > M$. Це записують $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Збіжні послідовності мають чимало цікавих властивостей. Зупинимося на кількох з них, якими будемо послуговуватись в дальнішому.

Нехай маємо збіжну послідовність (a_n), тобто $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Чи може бути в цієї послідовності ще одна границя? Припустимо, що існує ще одна границя, тобто $\lim_{n\to\infty} a_n = b$, де $b \neq a$ (нехай $b > a$).

Розділимо $[a\,;\,b]$ навпіл точкою $c = \frac{b+a}{2}$. Виберемо додатне число $\varepsilon < \frac{b+a}{2}$ і побудуємо ε-окіл точки α та ε-окіл точки *b* (рис. 3).

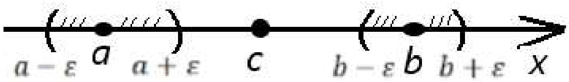


Рис. 3

Тоді згідно означення границі $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ для даного ε знайдеться таке число $N_1 = N(\varepsilon_1)$, що для всіх членів послідовності (a_n) з номерами $n > N_1$ виконується нерівність $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, тобто всі такі члени послідовності належать проміжку $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$.

Те ж саме і для границі $b = \lim_{n\to\infty} a_n$. Для даного числа ε знайдеться таке число $N_2 = N(\varepsilon)$, що для всіх членів послідовності (a_n) з номерами $n > N_2$ виконується нерівність $b - \varepsilon < a_n < b + \varepsilon$, тобто всі члени послідовності з номерами $n > N_2$ належать проміжку $(b - \varepsilon;\ b + \varepsilon)$.

Якщо з двох чисел N_1 і N_2 вибрати більше, то отримаємо *парадоксальний висновок*: для всіх $n > N = max\{N_1\,;\,N_2\}$ члени послідовностей (a_n), мають належати одночасно двом проміжкам $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$ і $(b - \varepsilon;\ b + \varepsilon)$, які не перетинаються. Отримали суперечність, яка вказує на те, що припущення неправильне. Отже, має місце теорема, яка дає відповідь на поставлене запитання.

Теорема 1 (про єдиність границі).

Числова послідовність може мати тільки одну границю.

Отже, маємо, що $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Легко бачити, що границя сталої послідовності дорівнює сталій. Тобто $\lim_{n\to\infty} c = c$.

Продовжимо розглядати збіжну послідовність (a_n). Нехай $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Виберемо число $\varepsilon > 0$ і побудуємо ε-окіл точки α (рис. 4).

Рис. 4

Тоді, згідно означення, знайдеться таке число $N = N(\varepsilon)$, що для всіх членів послідовності з номерами $n > N$ виконується нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$, тобто всі такі члени послідовності належать проміжку $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$. А, поза вказаним проміжком лежить «лишок» послідовності, в якому їх кількість скінчена, вони можуть розміщуватися:

(1) або на промені $(-\infty;\ a-\varepsilon]$;

(2) або на промені $[a+\varepsilon; +\infty)$;

(3) або частина на промені $(-\infty;\ a-\varepsilon]$, а частина на промені $[a+\varepsilon; +\infty)$.

У випадку (1) виберемо серед членів лишку *найменший*, нехай він дорівнює *b*.

Тоді для всіх членів послідовності має місце нерівність: *b*$\leq a_n < a_n + \varepsilon$.

Отже, послідовність *обмежена*.

У випадку (2) виберемо серед членів лишку *найбільший*, нехай він дорівнює c.

Тоді для всіх членів послідовності має місце нерівність: $a - \varepsilon < a_n < c$.

Отже, послідовність обмежена.

У випадку (3), міркуючи аналогічно отримуємо, що для всіх членів послідовності має місце нерівність $b < a_n < c$. Що вказує на обмеженість послідовності.

Викладені вище міркування приводять до теореми, яка має важливе практичне застосування.

Теорема 2 (про обмеженість збіжної послідовності).

Якщо послідовність збіжна, то вона обмежена.

Слід зауважити, що обернене твердження не правильне. Наприклад, послідовність a_n=$\frac{1+(-1)^n}{2}$ – обмежена, але не збіжна.

З даної теореми випливає важливий наслідок.

Наслідок 1. *Якщо послідовність необмежена, то вона розбіжна.*

Проводячи міркування, аналогічні до попередніх для збіжних послідовностей легко встановити ще одну важливу теорему.

Теорема 3 (про границю проміжної послідовності).

Нехай члени послідовностей (a_n), (b_n), (c_n), починаючи з деякого номера n задовольняють нерівність $a_n \le b_n \le c_n$ і $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$, то послідовність (b_n) також збіжна і $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

Доведіть самостійно.

Важливе значення для вивчення початків аналізу, і не тільки, має також теорема про границю обмеженої монотонної послідовності.

Сформулюємо її і доведемо.

Теорема 4 (теорема К. Вейєрштрасса).

Будь яка обмежена зверху (знизу) зростаюча (спадна) числова послідовність збіжна.

Доведення

Доведемо дану теорему лише для монотонно зростаючої числової послідовності (a_n), яка обмежена зверху деяким числом β. На множину її елементів можна дивитися як на обмежену числову множину $A = \{a_1,\ a_2, \dots, a_n, \dots\}$. Тоді за відомою теоремою про існування точно верхньої грані такої множини отримуємо, що існує $a = supA$. Це число α і буде границею послідовності (a_n).

Дійсно, якщо побудувати ε-окіл точки $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$, то в силу того що послідовність зростає знайдеться таке число $N = N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N$ виконуватиметься вимога $a_n \,\epsilon\, (a-\varepsilon;\ a]$. А це ознака того, що $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Для вивчення в дальнішому, початків аналізу важливе застосування має числова послідовність $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$, де $n \,\epsilon\, N$. В іншому вигляді (a_n): 2; $\frac{9}{4}$; $\frac{27}{8}$; … ; $(1+\frac{1}{n})^n$; …

Виявляється, що вона монотонно зростає. Із загально-відомої нерівності Джона Непера $2 \le (1+\frac{1}{n})^n < 3$, для всіх $n \,\epsilon\, N$ слідує, що вона обмежена, а, отже, за теоремою 4 – *збіжна*.

Доведення цих фактів, в силу громіздкості, пропустимо. Це може бути темою учнівської наукової роботи. Однак, зазначимо, що

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e \qquad (1)$$

де літерою e – *позначено число*, до якого прямують члени даної послідовності. Таке позначення запропонував відомий швейцарський математик Леонард Ейлер (1707-1783 рр.).

Леонард Ейлер

У середині XVIII ст. німецький математик Йоган Ламберт (1728-1777 рр.) довів, що число e – ірраціональне.

$$e = 2{,}718281828459045\ldots$$

Границю (1) в математиці називають «*чудовою границею*».

Повідомлені вище означення та теореми є основою для вивчення наступних тем курсу Алгебри і початків аналізу.

КІНЕЦЬ ЛЕКЦІЇ

Закріпити викладені в лекції теоретичні відомості пропонуємо на наступному практичному занятті, де учні самі, в своїх виступах, розповідатимуть про числові послідовності і їх види, наводитимуть приклади, формулюватимуть означення і теореми, відтворюватимуть доведення теорем та пропонуватимуть свої доведення теореми 3. Важливо, щоб під час такого семінарського заняття обговорювались та усувалися їх помилкові судження, недоліки, формувався еталон відповіді. Старання учнів потрібно всіляко заохочувати. Це стане в нагоді, під час здачі заліку з теоретичного матеріалу з теми.

Наступну частку теоретичного матеріалу про арифметичні властивості збіжних числових послідовностей пропонуємо подати також у формі шкільної лекції, зміст якої подано нижче.

Лекція на тему

«Арифметичні властивості збіжних числових послідовностей»

Розглянемо дві числові послідовності (x_n) та (y_n). Тоді послідовність:

(1) $(c_n) = (x_n) \pm (y_n)$ – називають їх сумою (різницею);

(2) $(d_n) = (x_n) \cdot (y_n)$ – називають їх добутком;

(3) $(q_n) = \frac{(x_n)}{(y_n)_n}$ – називають їх часткою.

Знаходження границі числової послідовності на основі тільки означення границі викликає значні труднощі. Тому на практиці для збіжних послідовностей користуються часто вживаними теоремами.

Теорема 1. Сума (різниця) збіжних послідовностей $(\boldsymbol{x_n})$ та $(\boldsymbol{y_n})$ є збіжною послідовністю, і $\lim\limits_{n\to\infty}((\boldsymbol{x_n}) \pm (\boldsymbol{y_n})) = \lim\limits_{n\to\infty}(\boldsymbol{x_n}) \pm \lim\limits_{n\to\infty}(\boldsymbol{y_n})$.

Іншими словами границя суми (різниці) двох збіжних послідовностей існує і дорівнює сумі (різниці) їх границь.

Доведення

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Задамо довільне число $\varepsilon > 0$.

За означенням границі послідовності існують такі номери $N_1(\varepsilon)$ та $N_2(\varepsilon)$, що:

$|a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ для $n > N_1(\varepsilon)$; $|b - y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ для $n > N_2(\varepsilon)$.

Виберемо $N^* = max\{N_1(\varepsilon); \quad N_2(\varepsilon)\}$.

Тоді для всіх $n > N^*$ одночасно мають місце нерівність: $|a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ та $|b - y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Оцінимо різницю $|(a + b) - (x_n \pm y_n)|$ для всіх $n > N^*$:

$$|(a + b) - (x_n \pm y_n)| = |(a - x_n) \pm (b - y_n)| \leq |a - x_n| + |b - y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(використана числова нерівність $|u \pm v| \leq |u| + |v|$).

Це означає, що послідовність $(x_n) \pm (y_n)$ – *збіжна*.

Теорему доведено.

Наслідок 1. *Теорема справедлива і для більшої кількості доданків.*

Теорема 2. Добуток двох збіжних послідовностей $(\boldsymbol{x_n})$ та $(\boldsymbol{y_n})$ є збіжною послідовністю, і $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x_n} \cdot \boldsymbol{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x_n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{y_n}$.

Іншими словами границя добутку двох збіжностей послідовностей існує і дорівнює добутку їх границь.

Доведення

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Зі збіжності обох послідовностей слідує їх обмеженість. Отже, існує таке число A, що $|x_n| < A$, $n \epsilon N$ та таке число B, що $|y_n| < B$, $n \epsilon N$. Очевидно, що $|a| < A$ і $|b| < B$.

Виберемо довільно число $\varepsilon > 0$, тоді існують такі номери $N_1(\varepsilon)$ та $N_2(\varepsilon)$, що для всіх $n > N_1$ виконується нерівність $|a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2B}$, а для всіх $n > N_2$ нерівність $|b - y_n| < \frac{\varepsilon}{2A}$.

Тепер візьмемо число $N^* = max\{N_1;\ N_2\}$. Тоді для всіх $n > N^*$ маємо:

$$|ab - x_n y_n| = |ab - x_n b + y_n b - x_n y_n| = |(a - x_n)b + (b - y_n)x_n| \leq$$

$$\leq |a - x_n| \cdot |b| + |b - y_n| \cdot |x_n| \leq \frac{\varepsilon}{2B} \cdot B + \frac{\varepsilon}{2A} \cdot A = \varepsilon.$$

Це означає, що послідовність $(x_n) \cdot (y_n)$ – *збіжна*.

Теорему доведено.

Наслідок 2. *Теорема справедлива і для більшої кількості множників.*

Наслідок 3. Якщо послідовність (x_n) збіжна, то збіжною буде і послідовність (cx_n), де c – стале число, і $\lim\limits_{n\to\infty} cx_n = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Іншими словами сталий множник можна виносити за знак границі.

Наслідок 4. Якщо послідовність (x_n) збіжна, то послідовність $({x_n}^k)$, де k – натуральний показник, також збіжна, і $\lim\limits_{n\to\infty} {x_n}^k = (\lim\limits_{n\to\infty} {x_n}^k)$.

Справедливість наслідків (1), (2), (3), (4) – *обґрунтуйте самостійно*.

Теорема 5. Частка двох збіжних послідовностей (x_n) та (y_n) за умови, що $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$ також є збіжною послідовністю, і $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.

Іншими словами границя частки двох збіжних послідовностей дорівнює частці їх границь, якщо границя знаменника відмінна від 0.

Доведення. Для доведення теореми скористаємось *лемою*.

Лема. Якщо послідовність (y_n) збіжна і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$, то починаючи з деякого номера визначеного і збіжною буде послідовність $\left(\frac{1}{y_n}\right)$, при чому $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$.

(доведення леми, в якості самостійної пошукової діяльності, пропонуємо учням знайти самостійно)

Тоді за теоремою 2 маємо : $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\frac{1}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{y_n}=a\cdot\frac{1}{b}=\frac{a}{b}.$

Проілюструємо типове застосування доведених теорем для знаходження границь числових послідовностей.

Вправа 1. Обчисліть границі числових послідовностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-3}{4n+8}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+3)^2}{5n^2-n+1}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, де $a_1=0,\ a_2=1$ і $a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n-1}}{2}.$

Розв'язання

<table>
<tr>
<td>а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-3}{4n+8}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}}{4+\frac{8}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{3}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\frac{8}{n}\right)}=$
$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2-3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}4+8\lim\limits_{n\to n}\frac{1}{n}}=\frac{2-3\cdot0}{4+8\cdot0}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$
Відповідь : $\frac{1}{2}$.</td>
<td>***Методичний коментар***
Розділимо чисельник і знаменник на n.
Відомо, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$
Далі скористаємося теоремами 1-3
і наслідками з них.</td>
</tr>
<tr>
<td>б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+3)^2}{5n^2-n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+6n+9}{5n^2-n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+\frac{6}{n}+\frac{9}{n^2}}{5-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=$
$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}5-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{1+6\cdot0+9\cdot0}{5-0+0}=\frac{1}{5}.$
Відповідь : $\frac{1}{5}$.</td>
<td>***Методичний коментар***
Скористаємося формулою скороченого множення і запишемо,
що $(n+3)^2=n^2+6n+9$.
Розділимо чисельник і знаменник дробу на n^2 і застосуємо теореми 1-3 та наслідками з них.</td>
</tr>
<tr>
<td>в) Зауважимо, що всі члени послідовності додатні числа. Розглянемо два довільні сусідні члени послідовності $a_n,\ a_{n+1}$ (рис. 1)


Рис. 1.</td>
<td>***Методичний коментар***
Послідовність (a_n) задана рекурентно
$a_1=0,a_2=1,a_3=\frac{1}{2},a_4=\frac{3}{4},a_5=\frac{5}{8},\ldots$
Формулу $n-$го члена встановити важко.
Щоб знайти границю послідовності потрібно встановити що вона збіжна, а потім обчислювати саму границю. Хід розв'язання цієї вправи буде іншим, від попередніх.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Оскільки $a_{n+2}=\frac{a_{n+1}+a_n}{2}$ їх середнє арифметичне, то a_{n+2} – середина проміжка $[a_n;a_{n+1}]$. Проміжок $[a_{n+1};a_{n+2}]$ має довжину вдвічі меншу за довжину проміжка $[a_n;a_{n+1}]$ і включається в нього. Тому матимемо: $[a_n;a_2]\supset[a_2;a_3]\supset[a_3;a_4]\supset\cdots\supset[a_n;a_n]\supset$...
За аксіомою про вкладені відрізки знайдеться число *b*, до якого прямують члени послідовності (a_n). Отже, послідовність *збіжна*. За умовою:
$2a_3=a_1+a_2$
$2a_4=\quad a_2+a_3$
$2a_5=\qquad a_3+a_4$
. . . .
$2a_{n+1}=\qquad a_n+a_{4-1}$
Додамо ліві і праві частини цих рівностей. Матимемо :
$2(a_3+a_4+a_5+\cdots+a_{n+1})=a_1+a_n+2(a_2+a_3+\cdots+a_{n-1})$
Звідки, після перетворення отримуємо :
$2a_{n+1}=a_1+2a_2-a_n$
$a_{n+1}=\frac{a_1+2a_2-a_n}{2}$
Тоді, $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2-a_n}{2}$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ – існує і дорівнює *a*.
Отримуємо, $b=\frac{a_1+2a_2-b}{2}$. Звідки $b=\frac{a_1+2a_2}{3}$. Але $a_1=0,a_2=1$. Тому $b=\frac{2}{3}$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{2}{3}$.
Відповідь : $\frac{2}{3}$.</td>
</tr>
</table>

2. Границі і неперервність функції. Основні теореми про границі функції

Формування поняття «границя функції» варто розпочати з розгляду конкретного прикладу (метод доцільних задач), а потім сформулювати загальне означення поняття границі, функції в точці (конкретно-індуктивний метод). Як і в попередніх випадках рекомендуємо повідомлення нового навчального матеріалу здійснити у формі шкільної лекції з наступними удосконаленнями та доповненнями його на практичних заняттях (лекційно-практична форма навчання).

Лекція на тему

«Границя і неперервність функції»

Теоретичні та практичні заняття про числові послідовності є основою для вивчення нових властивостей функції та їх графіків. Приступаємо до їх вивчення.

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$.

Очевидно, що її область визначення $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Число $x = 1 \not\subset D(f)$.

Дослідимо її «поведінку» в околі точок $x = 1$.

Задамо послідовність значень аргументу (x_n) : 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 0,95; … , яка збігається до 1 (всі члени послідовності наближаються до 1 зліва).

Знайдемо відповідні значення функції $f(x_n)$. Вони також утворюють послідовність (y_n) : 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 1,95; … , яка збігається до 2.

Отже, для даного вибору маємо: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = 2$.

Розглянемо іншу послідовність, наприклад: (x_n) : 1,9; 1,7; 1,5; 1,3; 1,1; 1,01; … , всі члени якої наближаються до 1 справа. Значення функції $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ утворюють послідовність $f(x_n)$: 2,9; 2,7; 2,5; 2,3; 2,01; … , яка збігається до числа 2.

Отже, і для даного випадку маємо: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = 2$.

Як бачимо, в обох випадках, незалежно від того зліва чи справа послідовність аргументів (x_n) прямує до 1, отримуємо, що $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = 2$. Така поведінка функції в особливих точках давно зацікавила математиків і привела до введення нового математичного поняття – *границі функції в точці.*

Означення (за Г. Е. Гейне*). *Нехай $y = f(x)$ функція визначена на деякому проміжку $\langle a;\ b\rangle$, крім можливо точки $x_0 \epsilon\langle a;\ b\rangle$. Число A називають **границею функції $f(x)$ в точці x_0,** якщо для **довільної послідовності значень аргументу (x_n)** взятої з цього проміжку, для якої $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $x_n \neq x_0$, $n \epsilon N$, послідовність відповідних* *значень функції* $(f(x))$ *має границю, яка дорівнює числу* A. *Це записують так* $\lim\limits_{n \to x_0} f(x) = A.$

Генріх Гейне Едуард (1821-1881 рр.)
Німецький математик, член-кореспондент Берлінської академії наук

(*Зауваження*: символом $\langle a; b\rangle$ тут і далі позначитемо множину чисел: інтервал $(a; b)$, сегмент $[a; b]$, проміжки $(a; b]$ або $[a; b)$).

У окремому випадку, коли послідовність аргументу (x_n) обирається так, що всі її члени розташовані зліва (справа) від x_0, границя A називається лівосторонньою (правосторонньою) і позначається: $A = \lim\limits_{n \to x_0 -} f(x)$ $\left(A = \lim\limits_{n \to x_0 +} f(x)\right)$.

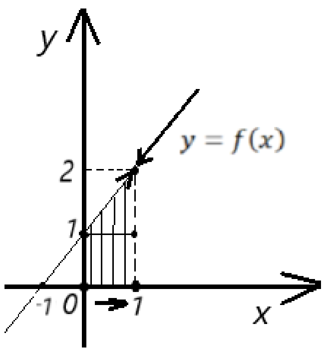
Зрозуміло, що границя функції $y = f(x)$ в точці x_0, яка належить проміжку $\langle a; b\rangle$, існує тоді, коли існують одночасно лівостороння та правостороння границі і вони рівні між собою.

Якщо точка x_0 є одним з кінців проміжка $[a; b]$, то мова може йти лише про правосторонню чи, відповідно лівосторонню границю.

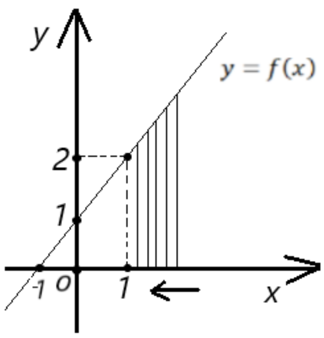
Розглянемо геометричну інтерпретацію введених понять на прикладі функції $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. Очевидно, що її можна записати як $f(x) = x + 1$, де $x \neq 1$.

На рис. 5 зображено:

а) лівостороннє прямування значень функції до числа 2, якщо значення аргументів (x_n) прямують до 1 зліва; *б)* правостороннє прямування значень функції до числа 2, якщо значення аргументів $(\propto_n)$ прямують до 1 справа.



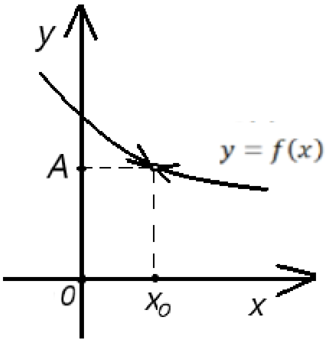
а)



б)

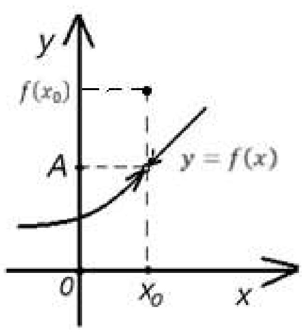
Рис. 5

У точці $x = 1$ функція не визначена. Її графік розірваний. У цьому і виявляється важлива роль границі функції в точці – вона показує поведінку графіка функції в околі розглядуваної точки. Можливі різні випадки такої поведінки. На рис. 6 показано випадки поведінки графіка функції в залежності від існування границі та значення функції $y = f(x)$ в точці x_0.



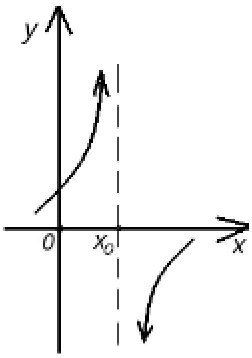
а) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A,\ f(x_0)$ – не існує.

Графік функції в точці $x = x_0$ розривається.



б) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \neq\ f(x_0), f(x_0)$ – існує.

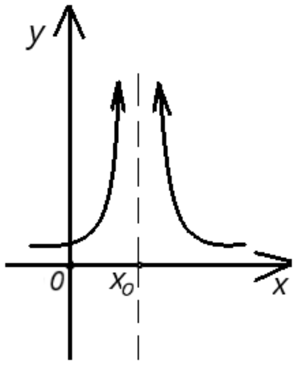
Графік функції в точці $x = x_0$ розривається.



в) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ – не існує,

$f(x_0)$ – не існує.

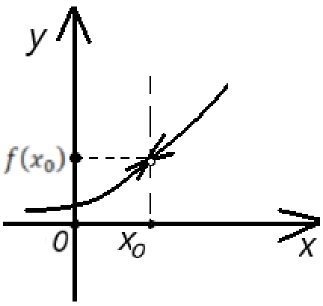
Графік функції в точці $x = x_0$ розривається.



г) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ – не існує,

$f(x_0)$ – не існує.

Графік функції в точці $x = x_0$ розривається.



д) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,

Графік функції в точці $x = x_0$ не розривається **(!)**

Рис. 6.

У випадках *а) – г)* функція $f(x)$ називається *розривною* в точці $x = x_0$, а у випадку *д)* – неперервною в точці $x = x_0$.

Границя функції в точці, так само як і границя послідовності, має ряд важливих властивостей, представлених у вигляді теорем. Назвемо найважливіші з них, якими будемо послуговуватися в дальнішому.

Терема 1. (про єдиність границі). Якщо функція $y = f(x)$ в точці $x_0 \epsilon < a; b >$ має границю, то ця границя єдина.

Терема 2. (про границю проміжної функції). Якщо функції $y = f(x)$ та $y = \varphi(x)$ мають границю в точці $x_0 \epsilon < a; b >$, при чому $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = A$, а в деякому околі точки x_0, крім можливо самої точки x_0,
Існує інша функція $y = h(x)$ така, що $f(x) \leq h(x) \leq \varphi(x)$, то функція $y = h(x)$ також має границю в точці x_0, при цьому $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$.

Терема 3. (про арифметичні властивості границі функції). Якщо кожна з функцій $y = f(x)$ та $y = \varphi(x)$ має границю в точці $x_0 \epsilon < a; b >$, то в цій точці існують також границі функцій $f(x) \pm \varphi(x)$, $f(x) \cdot \varphi(x)$, $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ (остання за умови, що $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) \neq 0$), при цьому мають місце формули:

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} \varphi(x);$$

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \varphi(x);$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)}.$$

Доведення теорем 1-3 ґрунтується на знаннях відповідних теорем для числових послідовностей. Покажемо це на прикладі доведення теореми про границю частки двох функцій.

Нехай маємо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ та $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = B$, де $B \neq 0$.

Виберемо довільну послідовність $(x_n) \to x_0$.

Згідно означення границі функції в точці $x = x_0$ матимемо:

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x_n) = A$, $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x_n) = B$.

За теоремою про границю частки двох послідовностей матимемо:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)} = \frac{\lim\limits_{x \to \infty} f(x_n)}{\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(xx_n)} = \frac{A}{B}.$$

Так як послідовність (x_n) – довільна, то звідси слідує, що $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x\ \ )}{\varphi(x\ \ )} = \frac{A}{B}$.

Що й потрібно було довести.

Інші теореми доведіть самостійно.

Повернемося до випадку на рис. 6 *д)*. Він особливий та потребує окремого розгляду. Його особливість в тому, що графік функції в точці $x = x_0$ *не розривається*. Для таких випадків має місце означення.

Означення. *Якщо функція $y = f(x)$ в точці $x_0 \epsilon < a; b >$ має границю, яка дорівнює значенню функції в цій точці, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, то функція називається неперервною в точці $x = x_0$.*
Якщо функція неперервна в кожній точці проміжка $< a; b >$, то вона називається неперервною на проміжку $< a; b >$.

Сказане стосується кінців проміжка $< a; b >$.

У математиці часто доводиться розглядати задачі, коли треба визначити, чи буде функція неперервною?

Такий процес називається дослідженням функції на неперервність.

Алгоритм дослідження функції та неперервність в точці наступний:

1. Знайти значення функції в точці x_0. Якщо в точці x_0 функція не визначена, то це точка розриву.
2. Знайти границю функції в точці x_0. Якщо в точці x_0 границі не існує, то це точка розриву.
3. Порівняти ДВА значення: функції та її границі в точці x_0. Якщо вони рівні, то функція – неперервна в точці x_0, якщо ж ні – то це точка розриву.

Названий алгоритм буде необхідним в подальшому під час вивчення властивостей і графіка степеневої, тригонометричних, показникової та логарифмічної функції.

КІНЕЦЬ ЛЕКЦІЇ

4. Розширення схеми, дослідження властивостей функції та побудови їх графіка. Приклади розв’язування вправ

Розширення і поглиблення відомостей про границю і неперервність функції слід провести на практичних заняттях. На них учні разом із вчителем можуть продемонструвати доведення теорем 1-3, уточнити поняття границі функції, коли аргумент *x* прямує до нескінченності, неперервність функції на кінцях проміжку $< a; b >$ та інші незрозумілі питання.

Важливо повідомити учням, що вивчення нових функцій і огляд раніше вивчених має тепер включати також розгляд ще однієї властивості – неперервність графіка та наявність точок розрив. З цією метою, на прикладі однієї з раніше вивчених функцій, наприклад, $y = \frac{1}{x}$, показати, що на всій області визначення її графіка складається з двох неперервних кривих ліній, а точка $x = 0$ – точка розриву графіка (в цій точці функція має розрив). Таким чином, учні мають зрозуміти, що коли досліджується функція і будується її графік, то встановлюються насамперед такі її властивості як:

1) область визначення;

2) парність чи непарність;

3) проміжки зростання, спадання;

4) нулі функції;

5) періодичність;

6) неперервність і точки розриву;

7) область значень.

Методична система дослідження функції $(M_2C - 2)$ таким чином розширилася.

Застосування вивчених терем слід показати під час розв'язування типових задач на відшукання границі функції та дослідження її на неперервність.

Розглянемо приклади розв'язання деяких з них.

Приклад 1. *Знайдіть границю функції* $f(x) = 9x^2 - 6x + 8$ *при* $x \to 1$*.*

Розв'язання

Використавши теореми про границі суми, різниці і добутку функцій, отримаємо:

$$\lim_{x\to1}(9x^2 - 6x + 8) = \lim_{x\to1}(9x^2) - \lim_{x\to1}(6x) + \lim_{x\to1} 8 = 9\left(\lim_{x\to1} x\right)\left(\lim_{x\to1} x\right) - 6\lim_{x\to1} x + 8 = 9 \cdot 1 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + 8 = 11$$

Відповідь: 11.

Приклад 2. *Знайдіть границю функції* $f(x) = \frac{x^3+8}{x+2}$ *при* $x \to -2$*.*

Розв'язання

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3+8}{x+2} = \lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2} = \lim_{x\to2}(x^2 - 2x + 4) = 12$$

) $x = -2$ не належить області визначення функції.

Тому $x + 2 \neq 0$ і скорочення дробу провести можна.

Відповідь: 12.

Приклад 3. *Знайдіть границю функції* $f(x) = \frac{3x^3+x+4}{14-x^2-x^2}$ *при* $x \to \infty$*.*

Розв'язання

Аргумент x стає як завгодно великим. Кажуть, аргумент прямує до нескінченності. Більший степінь x у чисельнику і більший степінь змінної x у знаменнику виносимо за дужки, проводимо скорочення дробу та переходимо до границі виразів чисельника і знаменника. Отже, маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+x+4}{14-x^2-x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(3+\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}{\left(\frac{14}{x^3}-\frac{10}{x}-1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{\frac{14}{x^3}-\frac{1}{x}-1}=\frac{3+0+0}{0-0-1}=\frac{3}{-1}=-3.$$

Відповідь: -3.

Приклад 4. *Знайти границю* $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

Розв'язання

Помножимо і розділимо даний вираз на спряжений.

Матимемо:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\infty}=0.$$

Відповідь: 0.

Приклад 5. *Дослідить на неперервність функцію:*

а) $f(x)=\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$, *в точці* $x=0$.

Розв'язання

$D(f)=[0;1)\cup(1;+\infty]$, точка $x=0\in D(f)$.

Знайдемо правосторонню границю функції в точці $x=0$.

$$\lim_{x\to0_+}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to0_+}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to0_+}\sqrt{x}=0,\ f(0)=\frac{0-\sqrt{0}}{\sqrt{0}-1}=-1.$$

Границя і значення функції в точці $x=0$ не рівні.

Отже, $x=0$ – точка розриву функції.

б) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geq1,\\ -x^2, & x<1.\end{cases}$ *в точках* $x=1, x=0, x=2$.

Розв'язання

Нехай $x=1$, тоді відшукуємо дві границі – лівосторонню і правосторонню:

$$\lim_{x\to1_-}f(x)=\lim_{x\to1_-}(-x^2)=-1\ ;\qquad \lim_{x\to1_+}f(x)=\lim_{x\to1_+}\sqrt{x}=1.$$

Обидві границі не рівні між собою, отже в точці $x=1$ дана функція має розрив.

Нехай $x=0$, тоді $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(-x^2)=0$. $f(0)=(-0^2)=0$.

Границя функції і значення функції рівні.

В точці $x=0$ – функція неперервна.

Нехай $x=2$, тоді $\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\sqrt{x}=\sqrt{2}$. $f(2)=\sqrt{2}$.

Границя функції і значення функції рівні.

В точці $x=2$ – функція неперервна.

ПІДСУМОК

Головним завданням вивченням теми «Границя та неперервність функції» є ознайомити учнів з поняттям неперервності графіка функції, навчити досліджувати поведінку функції в точці за допомогою границі функції в точці і її значення в цій точці.

Учні мають усвідомити:

1) чому графіки лінійної, квадратичної та інших функцій, які вивчалися в курсі алгебри, будуються як неперервні криві лінії;
2) вивчення нових функцій в курсі Алгебри і початків аналізу має відбуватися шляхом встановлення їх (основних властивостей) області визначення, парності чи непарності, періодичності, проміжків зростання і спадання, нулів функції, неперервності графіка і точок розриву, області значень;
3) графік функції будується або шляхом складання таблиці значень, або методом геометричних перетворень графіків базових функцій з урахуванням встановлених властивостей.

МЕТОДИЧНІ ЗАДАЧІ
для самостійного розв'язування

1. Проаналізувати в діючих альтернативних підручниках з Алгебри і початків аналізу теоретичний матеріал з теми «Границя та неперервність функції». З'ясуйте потребу в доповненні новими відомостями.
2. Доведіть теореми, винесені в лекції на самостійне опрацювання.
3. Підготуйте завдання для підсумкової контрольної роботи з теми «Границя та неперервність функції» (два варіанти). Запропонуйте зразки їх розв'язання.
4. Розв'яжіть вправи:
   1) користуючись властивостями границь, обчислити границю послідовності:
   а) $\left(\frac{n!}{(n+1)!-n!}\right)$; б) $\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$; в) $\left(a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}\right),\ a_1=\sqrt{2}$.
   2) обчислити границю функції:
   а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^4-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x\ \ -5}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$.
   3) дослідити функцію на неперервність:
   $$f(x)=\begin{cases}x^2-2x, & x\geq 1,\\ 2-x\ \ , & x<1.\end{cases}\ \textit{в точках}\ x=1, x=0, x=2.$$
   4) встановити основі властивості функції і побудуйте її графік шляхом перетворення графіка базової функції: $y=\frac{2}{x+1}+1$.

Математика – це наука про нескінченне, в якій людина, істота скінченна, ставить собі за мету осягнути нескінченне за допомогою знаків
Г. Вейль

Аналіз нескінченно малих, безперечно, стоїть поряд з найвидатнішими завоюваннями людської культури, подібно еволюційній теорії в біології і молекулярним теоріям у фізиці й хімії
О. Я. Хінчин

Л Е К Ц І Я 2.8

Т Е М А ***Степенева функція: властивості та графік***

П Л А Н

1.	***Місце теми в програмі, зміст навчального матеріалу, основна мета вивчення, вимоги до підготовки учнів. Орієнтовне планування навчального процесу***
2.	***Корінь n–го степеня, арифметичний корінь n–го степеня, дії з коренями Обчислення коренів***
3.	***Функція*** $y = \sqrt[n]{x}$ $(n \in N)$, ***її властивості та графік***
4.	***Степінь з раціональним показником і його властивості. Перетворення виразів, що містять степені з раціональним показником***
5.	***Степенева функція*** $y = x^r$, ***де*** $(r \in Q)$, ***її властивості та графік***

К О Н С П Е К Т Л Е К Ц І Ї

1. Місце теми в програмі, зміст навчального матеріалу, основна мета вивчення, вимоги до підготовки

Тема «Степенева функція» вивчається в 10 класі. Зміст теми обширний (дивись таблиця 1), тому її вивчення доцільно розділити на дві підтеми.

Зміст теми «Степенева функція» за діючою програмою

Таблиця 1

Зміст навчального матеріалу	*Навчальні досягнення учнів*
Тема 2. СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ (30 год) Корінь n*-го* степеня. Арифметичний корінь n*-го* степеня, його властивості. Перетворення виразів з кореня n*-го степеня.* Функція $y = \sqrt[n]{x}$ та її графік. Ірраціональні рівняння. *Ірраціональні нерівності. [Системи ірраціональних рівнянь].* Степінь з раціональним показником, його властивості. Перетворення виразів, які містять степінь з раціональним показником. Степенева функція, її властивості та графік. *Оборотні функції. Взаємно обернені функції. Ірраціональні рівняння, нерівності з параметрами. [Системи рівнянь та нерівностей з параметром]*	*Формулює* означення кореня n*-го* степеня, арифметичного кореня n*-го* степеня, степеня з раціональним показником, властивості коренів та степеня з раціональним показником; *Обчислює, оцінює та порівнює* значення виразів, які містять корені та степені з раціональними показниками. *Зображує* графік степеневої функції. *Розв'язує* ірраціональні рівняння та нерівності, зокрема з параметрами. *Застосовує* властивості функцій до розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей

Підтема 2.1. Степінь з раціональним показником. Степенева функція з раціональним показником (14 год).

Підтема 2.2. Ірраціональні рівняння і нерівності та їх розв'язання (16 год).

Методика вивчення підтеми 2.2. описана в лекції 5 «Методика вивчення рівнянь і нерівностей в старшій профільній школі». Зупинимося на методиці вивчення підтеми 2.1. «Степінь з раціональним показником. Степенева функція з раціональним показником».

Підтема 2.1. Степінь з раціональним показником.
Степенева функція з раціональним показником (14 год)

Основна мета вивчення: сформувати поняття степеня з раціональним показником і вивчити його властивості та властивості і графік функції $y = x^r$, де r – раціональне число.

Вимоги до підготовки учнів (компетентності):

- *формулює* означення кореня n-*го* степеня, арифметичного кореня n-*го* степеня, степеня з раціональним показником, властивості арифметичних коренів та степеня з раціональним показником;
- *обчислює, оцінює та порівнює* значення виразів, які містять корені та степені з раціональними показниками;
- *будує* графік (схематично) степеневої функції з раціональним показником та називає її властивості.

Орієнтовне планування навчального процесу

Таблиця 2

№	**Теми занять, види робіт**	**К-ть годин**	**Дата**	**Примітки**
1	Функція $y = x^n$ $(n \in N)$, її властивості і графік	1		
2	Корінь n-*го* степеня $(n \neq 1, n \in N)$. Арифметичний корінь n-*го* степеня і його властивості	2		
3	Перетворення виразів що містять корені n-*го* степеня СР-1	2		
4	Функція $y = \sqrt[n]{x}$ та її графік	1		
5	Степінь з раціональним показником і його властивості	2		
6	Перетворення виразів, які містять степені з раціональним показником СР-2	2		
7	Степенева функція з раціональним показником, її властивості і графік СР-3	3		
8	Контрольна робота	1		
	Всього :	14		

2. Корінь n-го степеня, арифметичний корінь n-го степеня, дії з коренями. Обчислення коренів

Знайомство з поняттям кореня n-го степеня доцільно розпочати з розгляду функції $y = x^n$, де n – натуральне число, більше за 1.

Тут слід розглянути два випадки*:* а) коли n – парне; б) коли n – непарне число.

а) коли n – парне, тобто $\boldsymbol{n \in \{2; 4; 6; 8; \dots\}}$.

Скориставшись комп’ютерною презентацією учням слід продемонструвати готові графіки функцій $y = x^n$, де $n \in \{2; 4; 6; \dots\}$ (рис. 1) (випадки для $n = 2$ і $n = 3$ учні розглядали в основній школі).

Візуально спостерігаючи за графіком учні мають назвати властивості функції: (методична схема МС-2).

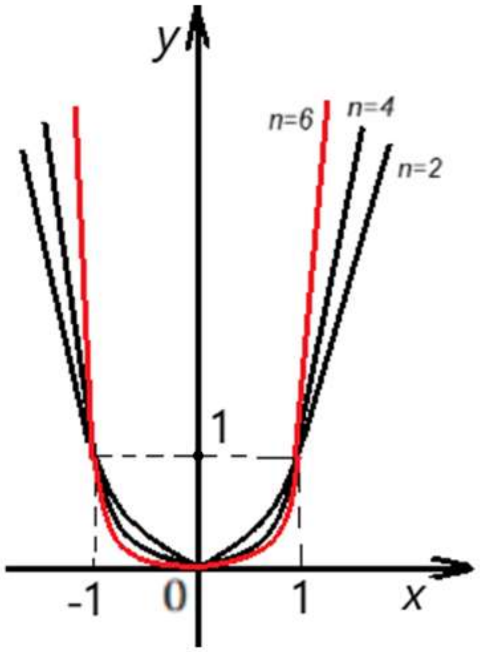


Рис. 1

1) $D(x^n) = R$;

2) $x = 0, y = 0;\ x = 1, y = 1$;

3) на проміжку $[0;\ +\infty)$ зростає;

на проміжку $(-\infty;\ 0]$ – спадає;

4) неперіодична;

5) парна;

6) неперервна;

7) $E(x^n) = [0;\ +\infty)$.

Названі властивості 3) - 6) слід довести, користуючись відповідними означеннями. Це учні можуть зробити самостійно.

б) коли n – непарне, тобто $\boldsymbol{n \in \{3; 5; 7; \dots\}}$.

Скориставшись знову комп’ютерною презентацією учням слід продемонструвати готові графіки функцій $y = x^n$, де $n \in \{3; 5; 7; \dots\}$ (рис. 2).

Як і в попередньому випадку учні мають назвати (методична схема МС-2) властивості функції.

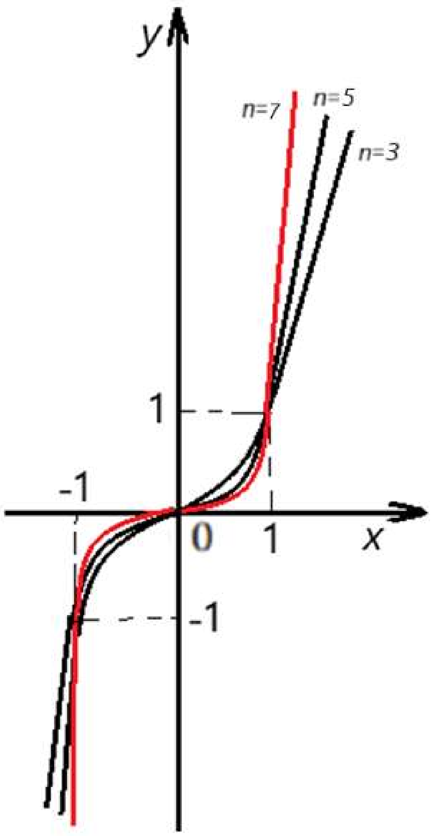


Рис. 2

1) $D(x^n) = R$;

2) $x = 0, y = 0;\ x = 1, y = 1$;

3) функція зростає на всій області визначення;

4) непарна;

5) неперіодична;

6) неперервна;

7) $E(x^n) = R$.

Властивості 3) - 6) учні мають вміти доводити, користуючись відомими означеннями.

* *В обох випадках слід звернути увагу на той факт, що – функція не може бути періодичною, оскільки на проміжку* $[0;\ +\infty)$ *зростає і її значення не повторюються*.

Після вивчення властивостей і графіка функції $y = x^n$ слід перейти до розгляду рівняння $x^n = a$, $n \epsilon N$, $n \neq 1$.

Ілюстрацію розв’язання такого рівняння провести графічним методом.

Тут слід розглянути також два випадки:

а) коли $n \epsilon \{2; 4; 6; \dots\}$.

(1) функція $y = x^n$

(2) функція $y = a$

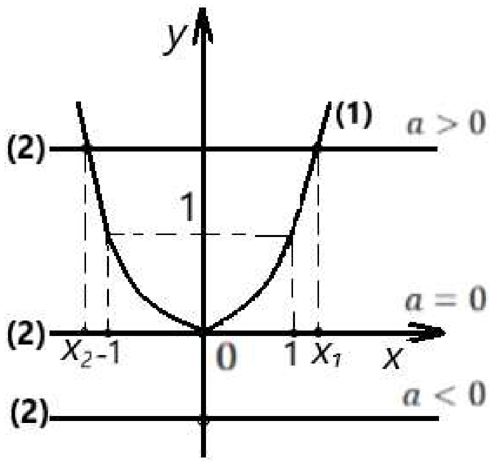


Рис. 3

б) коли $n \epsilon \{3; 5; 7; \dots\}$.

(1) функція $y = x^n$

(2) функція $y = a$

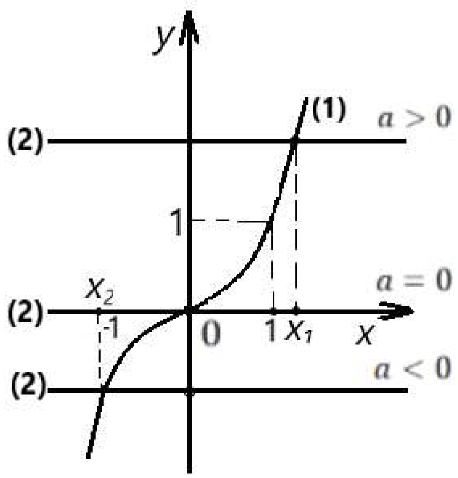


Рис. 4

Розв'язки рівняння $x^n = a$

1) якщо $a > 0$, то рівняння $x^n = a$ має два розв'язки x_1 та x_2. Це протилежні числа. Вони називаються коренями *n-го* степеня. Додатний корінь позначають $x_1 = \sqrt[n]{a}$, протилежний $x_2 = -\sqrt[n]{a}$;

2) якщо $a = 0$, то $x = 0$ корінь рівняння;

3) якщо $a < 0$, то рівняння коренів не має.

1) рівняння $x^n = a$ має один розв'язок. якщо $a > 0$, то розв'язок (корінь) – додатний. Його позначають також $x_1 = \sqrt[n]{a}$;

2) якщо $a = 0$, то $x \quad = 0$;

3) якщо $a < 0$, то корінь позначають $x_2 = -\sqrt[n]{|a|}$. В цьому випадку отримують рівність: $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{\alpha}$ (де $a > 0$).

Після обговорення розв'язків рівняння $x^n = a$ слід сформулювати визначення кореня n-*го* степеня з числа «a» та арифметичного кореня n-*го* степеня з числа «a».

Означення 1. *Коренем n-го степеня з числа a називається таке число $\propto$, n-ий степінь якого дорівнює α, тобто $\propto^n = a$.*

Означення 2. *Арифметичним коренем n-го степеня з додатного числа a називається таке додатне число $\propto$, n-ий степінь якого дорівнює a, тобто $\propto^n = a$, позначають $\propto = \sqrt[n]{a}$.*

Арифметичний корінь n-го степеня та його властивості

З поняттям алгебраїчного виразу учні знайомі (дивись лекція 3).

Тому, насамперед, потрібно сформувати в них поняття ірраціонального алгебраїчного виразу.

Далі слід пригадати що таке квадратний корінь, арифметичний квадратний корінь та які властивості. Потім, користуючись аналогією, сформулювати властивості арифметичного кореня n-го степеня довести їх.

Властивості арифметичного квадратного кореня (актуалізувати)

1) $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, де $a \geq 0$;

2) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, де $a \geq 0, b \geq 0$;

3) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, де $a \geq 0, b > 0$;

4) $\sqrt{a^{2k}} = a^k$, де a – невід'ємне, k – натуральне;

5) $\left(\sqrt{a}\right)^k = \sqrt{a^k}$, де $a \geq 0, k \epsilon N$;

6) $\sqrt{a^2} = |a|$.

Властивості арифметичного кореня (вивчити)

1) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, де $a \geq 0$;

2) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, де $a \geq 0, b \geq 0$;

3) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, де $a \geq 0, b > 0$;

4) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} =$, де $\sqrt[nk]{\alpha}$, де $a \geq 0$;

5) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$, де $a \geq 0$;

6) $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$, де $a \geq 0$.

Доведення властивостей арифметичного кореня n-го степеня здійснюється з використанням відповідного означення. Проілюструємо, наприклад, доведення властивості (4): $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{\alpha},$ де $a \geq 0$.

Доведення

За умовою $a \geq 0$, нехай $\sqrt[n]{\sqrt[k]{x}} = x$, $\sqrt[nk]{a} = y$.

Тоді за властивостями степеня з натуральним показником маємо:

$x^{nk} = (x^n)^k = ((\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}})^n)^k = (\sqrt[k]{a})^k = a;$

$y^{nk} = (\sqrt[nk]{a})^{nk} = a;$

Звідси слідує, що $x^{nk} = y^{nk}$, тобто $x = y$, що й потрібно будо довести.

Аналогічно доводяться інші властивості.

Варто пропонувати учням довести інші властивості самостійно.

Після вивчення властивостей слід припустити до розв'язання вправ на їх застосування: перетворення виразів, доведення тотожних рівностей, обчислення числових значень коренів (дивись лекцію 3).

3. Функція $y = \sqrt[n]{x}$ $(n \in N)$, її властивості та графік

Графік і властивості функцій $y = \sqrt[n]{x}$ слід розглядати в залежності від показника кореня n.

Тут слід розглядати два випадки:

1) коли *n* парне число, тобто $n \in \{2; 4; 6; ...\}$

Функція $y = x^n$ на проміжку $[0; +\infty)$ монотонно зростає. Тому на цьому проміжку вона оборотна, тобто має обернену функцію $y = \sqrt[n]{x}$, графік якої симетричний графіку функції $y = x^n$ (з областю визначення $x \geq 0$), відносно прямої $y = x$.

Отже, графіком функції $y = \sqrt[n]{x}$ буде крива лінія, симетрична відносно прямої $y = x$ до вітки параболи $y = x^n$ (рис. 5).

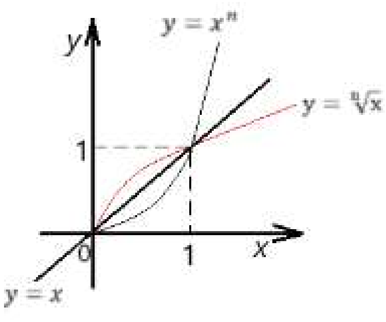


Рис. 5

Властивості функції $y = \sqrt[n]{x}$, де n парне число

1) $D(\sqrt[n]{x}) = [0; +\infty)$;
2) функція зростає на всій області визначення;
3) ні парна, ні непарна;
4) неперіодична;
5) $x = 1, y = 1$;
6) неперервна;
7) $E(\sqrt[n]{x}) = [0; +\infty)$.

Доводити властивості не обов’язково, адже більшість з них успадковані від прямої функції.

2) коли *n* непарне число, тобто $\boldsymbol{n \in \{3; 5; 7; \dots\}}$

Функція $y = x^n$ монотонно зростає на множині R. Тому вона оборотна, тобто має обернену функцію $y = \sqrt[n]{x}$, графік якої симетричний до графіка функцій $y = x^n$ відносно прямої $y = x$.

Отже, графіком функції $y = \sqrt[n]{x}$ буде крива лінія, симетрична відносно прямої $y = x$ до графіка прямої функції $y = x^n$ (рис. 6).

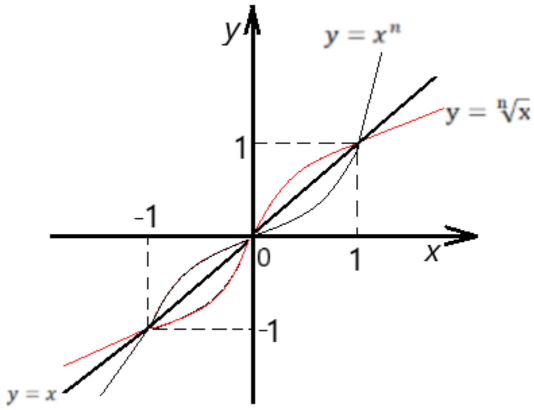


Рис. 6

Властивості функції $y = \sqrt[n]{x}$, де *n* непарне число

1) $D(\sqrt[n]{x}) = R$;

2) функція зростає на всій області визначення;

3) функція непарна;

4) неперіодична;

5) $x = 1, y = 1$;

6) неперервна;

7) $E(\sqrt[n]{x}) = R$.

Як і в попередньому випадку, доводити властивості не обов’язково, оскільки більшість з них успадковані від прямої функції.

4. Степінь з раціональним показником і його властивості. Перетворення виразів, що містять степені з раціональним показником

Перед тим як розглядати це питання з учнями, слід повторити поняття степеня числа «a» з натуральним, цілим показником. Повторити властивості цих степенів. Після цього сформувати в учнів поняття степеня числа a з раціональним показником. Так як раціональне число r можна подати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де m – ціле число, а n – натуральне число, то повідомити, що $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, де під коренем розуміють арифметичний корінь.

Далі, виходячи з означення отримуємо, що степінь з раціональним показником визначений лише для $a > 0$. Варто нагади учням, що слід розуміти під алгебраїчними виразом з раціональним показником (дивись лекцію 3) та які дії з такими виразами виконуються (спрощення виразів, доведення тотожних рівностей, обчислення значень виразів). Учні мають усвідомити, що степінь з раціональним показником має схожі властивості з степенем з натуральним та цілим показником. Зокрема:

(1) $(ab)^r = a^r \cdot b^r$; (3) $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$;

(2) $(\frac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r}$; (4) $\frac{a^{r_1}}{a^{r_2}} = a^{r_1-r_2}$;

(5) $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 \cdot r_2}$.

Учням слід показати доведення цих властивостей, на прикладі однієї з них. Проілюструємо, наприклад, доведення властивості (2).

Доведено, що $(\frac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r}$, де $a > 0,\ b > 0$.

Доведення

Оскільки r – раціональне число, то $r = \frac{m}{n}$. За означенням, маємо:

$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a^r}{b^r}$, що й потрібно було і довести.

Інші властивості учні мають уміти доводити самостійно. Після встановлення властивостей 1)-5) потрібно перейти до розв'язування вправ на їх застосування. Набір таких вправ в діючих підручниках достатній.

5. Степенева функція $\boldsymbol{y = x^r}$, де $(\boldsymbol{r \in Q})$, її властивості та графік

Оскільки для довільного додатнього числа a і раціонального числа r можна поставити у відповідність число, що дорівнює його степеню a^r, то для кожного числа r можна розглядати таку відповідність як функцію. Така функція отримала назву ***степенева***, з раціональним показником r.

Означення. *Функція виду $y = x^r$, де r – раціональне число, називається степеневою функцією з раціональним показником.*

Множина раціональних чисел Q містить натуральні числа, протилежні натуральним числам, число 0 і дробові числа. Для натурального показника r властивості і графік функції $y = x^n$ описані вище. Тому слід розглянути властивості і графік функції $y = x^n$, коли:

а) показник r – від'ємне ціле число;

б) показник r – дробове число.

У випадку, коли показник r – від'ємне ціле число, тобто $r = -m$, *де* m – натуральне число, слід розглядати два випадки:

1) коли $\boldsymbol{m}$ парне число, тобто $\boldsymbol{m \in \{2; 4; 6; 8; \dots\}}$

Скориставшись комп'ютерною презентацією, учням слід продемонструвати готові графіки функції $y = x^{-m}$, де $m \in \{2; 4; 6; \dots\}$ (рис. 7).

Спостерігаючи графіки учні мають назвати властивості розглядуваної функції (керуючись методичною схемою МС-2).

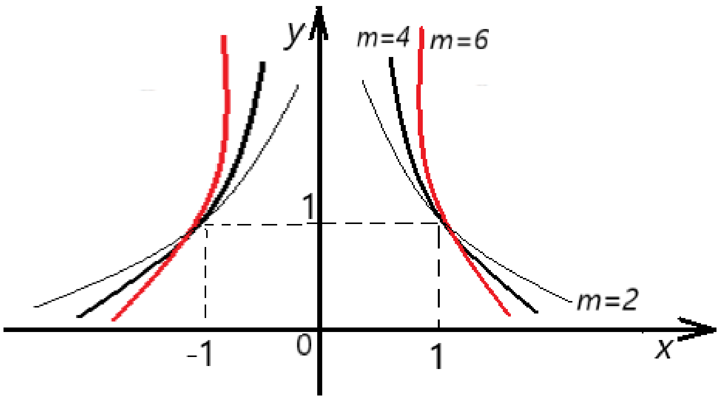


Рис. 7

1) $D(x^{-m}) = (-\infty; 0) \cup (0;\ +\infty)$;
2) $x = 1, y = 1$;
3) функція парна;
4) на проміжку $(-\infty; 0)$ зростає, на проміжку $(0;\ +\infty)$ спадає;
5) неперіодична;
6) точка $x = 0$ точка розриву графіка, на обох проміжках функція неперервна;
7) $E(x^{-m}) = (0;\ +\infty)$.

Названі властивості учні спроможні довести самостійно, цього від них слід вимагати.

2) коли m непарне число, тобто $m \in \{1; 3; 5; \ldots\}$

Знову, скориставшись комп'ютерною презентацією, учням слід продемонструвати готові графіки функції $y = x^{-m}$, де $m \in \{1; 3; 5; \ldots\}$ (рис. 8).

Спостерігаючи графіки учні мають назвати властивості розглядуваної функції (керуючись методичною схемою МС-2).

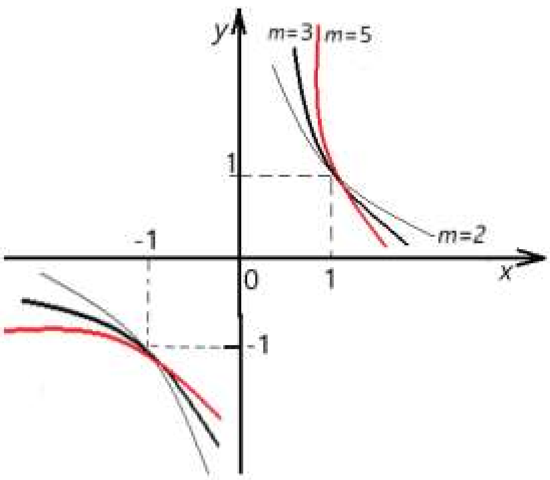


Рис. 8

1) $D(x^{-m}) = (-\infty; 0) \cup (0;\ +\infty)$;
2) $x = 1, y = 1$;
3) функція непарна;
4) на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ та $(0;\ +\infty)$ спадає;
5) неперіодична;
6) точка $x = 0$ точка розриву графіка, на обох проміжках функція неперервна;
7) $E(x^{-m}) = (-\infty; 0) \cup (0;\ +\infty)$.

Названі властивості учні спроможні довести самостійно, цього від них слід вимагати.

* **Зауваження.** Коли показник $r = 0$, то для будь-якого дійсного числа $x \neq 0$ маємо $x^0 = 1$. Тоді у цьому випадку степенева функція має вигляд $y = 1$, з областю визначення $D(f) = R,\ x \neq 0$ (рис. 9). Практично вона не розглядається.

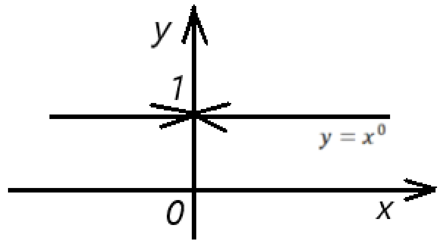


Рис. 9

У випадку, коли показник r – дробове число, то необхідно досліджувати чотири випадки: *а)* $r > 1$; *б)* $0 < r < 1$; *в)* $r < -1$; *г)* $-1 < r < 0$.

Перш ніж розглядати властивості функції $y = x^n$, слід нагадати учням, що степінь з дробовим показником визначений лише для дадатних чисел. Тому це слід пам’ятати для визначення області визначення функції. Далі розглядати всі чотири випадки а)-г):

а) розглянути функцію $y = x^r$, коли $r > 1$

Скориставшись комп’ютерною презентацією побудувати кілька графіків для конкретних значень показника r.

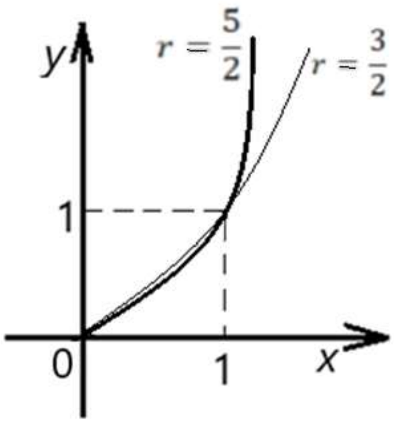


Рис. 10

1) $D(f) = [0;\ +\infty)$;

2) для $x = 0, y = 0$; $x = 1, y = 1$;

3) функція ні парна, ні непарна;

4) неперіодична;

5) зростає на всій області визначення;

6) неперервна на всій області визначення;

7) $E(f) = [0;\ +\infty)$.

Зрозуміло, що властивості 1)-6) мають бути учнями обґрунтовані. За такою ж схемою варто розглянути інші випадки: *б), в), г).*

Це можна запропонувати учням зробити самостійно і доповісти, використовуючи власні заготовки, на практичному занятті.

* **Зауваження.** Слід звернути увагу учнів на відмінності між функціями $y = x^{\frac{1}{3}}$ та $y = \sqrt[3]{x}$ та подібних до них. Як показує практика, багато учнів ототожнюють їх, чим допускають грубі помилки.

Розгляд функції $y = x^{\propto}$, де $\propto$ – ірраціональне число, в даній темі проводити не рекомендуємо. Її варто розглядати під час вивчення показникової функції, коли буде дано визначення степеня з дійсним показником.

Вивчення теми «Степенева функція: властивості та графік» пропонуємо супроводжувати розв'язанням не тільки практичних, а й прикладних задач, де отримані знання виступають в якості математичних моделей.

Приклади таких задач подано нижче.

Задача 1. Діаметр труби для водопроводу визначають за формулою

$D = \sqrt{\frac{4Q}{1000 \cdot \pi \cdot \vartheta}}$, де D – діаметр труби (*мм*), Q – витрати води (*л/с*), ϑ – швидкість води в трубах (*м/с*). Знайти діаметр труб, для вказаних даних (заповнити таблицю):

Q	ϑ	D
2	1,2	50 *мм*
6	1,6	70 *мм*
21	1,8	125 *мм*

Отримані за формулою дані замінити найближчими значеннями стандартних розмірів труб (в міліметрах):

$$D = \{15, 20, 25, 32, 40, 50,70, 80, 100, 125,175, 200, 225, 275, 300\}.$$

Розв'язання

Спростимо для зручності виконання обчислень задану в умові задачі формулу і скористаємося калькулятором: $D = \frac{2}{10}\sqrt{\frac{Q}{10 \cdot \pi \cdot \vartheta}} = 0{,}02 \cdot \sqrt{\frac{10Q}{\pi \cdot \vartheta}}$.

1. якщо $Q = 2,\ \vartheta = 1{,}2,$

то $D_1 = 0{,}02 \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot 2}{\pi \cdot 1{,}2}} = 0{,}02 \cdot \sqrt{\frac{200}{\pi \cdot 1{,}2}} = 0.02 \cdot \sqrt{\frac{100}{6\pi}} \approx 0{,}046065886 \approx 0{,}05$ (*м*).

округлимо D_1 до *мм* : $D_1 \approx 50$ *мм*.

2. якщо $Q = 6,\ \vartheta = 1{,}6,$

то $D_2 = 0{,}02 \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot 2}{\pi \cdot 1{,}6}} = 0{,}02 \cdot \sqrt{\frac{600}{\pi \cdot 16}} =\approx 0{,}069098829 \approx 0{,}07$ (*м*).

$D_2 \approx 70$ *мм*.

3. якщо $Q = 21,\ \vartheta = 1{,}8,$

то $D_3 = 0{,}02 \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot 21}{\pi \cdot 1{,}8}} = 0{,}02 \cdot \sqrt{\frac{2100}{\pi \cdot 18}} =\approx 0{,}12187888 \approx 0{,}122$ (*м*).

$D_3 \approx 122$ *мм*.

Знаючи розміри стандартних труб (в *мм*), першу трубу можна замінити – на 50 *мм*, другу – на 70 *мм*, а третю – на 125 *мм*.

Задача 2. Залежність максимальної кількості опадів від їх тривалості в місцевості N описується за допомогою залежності I = 13,1 $\cdot t^{-0,56}$, де I – максимальна інтенсивність опадів (*мм/год*), t – тривалість опадів (*год*). Знайдіть: 1) максимальну інтенсивність опадів при їх тривалості 0,5 *год*, 1 *год*, 2 *год*; 2) при якій тривалості опадів максимальна інтенсивність дорівнює 3,6 *мм/год*? 3) при якій тривалості опадів максимальна інтенсивність вища:

при $t_1 = \frac{2}{3}$ *год* чи $t_2 = \frac{3}{4}$ *год*?

Розв'язання

Залежність, про яку йде мова в задачі виражається степеневою функцією з раціональним показником $r = -0{,}56$.

1) Потрібно знайти значення цієї функції для значень аргументу t :

0,5 *год*, 1 *год*, 2 *год*.

Тому I (0,5) = 13,1 $\cdot (0{,}5)^{-0{,}56} \approx 19{,}3129267466 \approx 19$ (*мм/год*),

I (1) = 13,1 $\cdot (1)^{-0{,}56} \approx 13{,}1 \approx 13$ (*мм/год*),

I (2) = 13,1 $\cdot (2)^{-0{,}56} \approx 8{,}88575833 \approx 9$ (*мм/год*).

2) Щоб знайти тривалість опадів, при якій максимальна інтенсивність буде дорівнювати $3{,}6$ (*мм/год*) потрібно розв'язати рівняння 3,6 = 13,1 $\cdot t^{-0{,}56}$

звідки знаходимо, що $t = \left(\frac{13{,}1}{3{,}6}\right)^{\frac{1}{0{,}56}} \approx 7{,}2$ (*год*).

3) Функція $I =$13,1 $\cdot t^{-0{,}56}$ – визначена для $t > 0$, неперервна і спадна,

Оскільки $t_1 = \frac{2}{3}$ (*год*)$<$ $t_1 = \frac{3}{4}$ (*год*), то $I(\frac{2}{3}) > I(\frac{3}{4})$.

Тобто, при тривалості опадів $t_1 = \frac{2}{3}$ (*год*) максимальна інтенсивність вища.

ПІДСУМОК

Навчальна тема «Степенева функція: властивості та графік» – перша тема систематичного курсу Алгебри і початків аналізу. Всі попередні теми слід розглядати як теоретичну основу для його вивчення. На відміну від методики вивчення функції та їх графіків, яка практикувалась в курсі алгебри, тепер побудова графіка спочатку носить допоміжний характер, щоб помітити властивості функції, потім, користуючись відповідними означеннями, довести їх і використовуючи отримані знання, схематично будувати графік з «прив'язкою його в окремих точках до координатної площини» (методична схема 2).

За такою схемою вивчаються згодом інші функції: тригонометричні, показникова та логарифмічна. Вивчені функції з їх властивостями, в свою чергу, стають підґрунтям для вивчення відповідних алгебраїчних виразів, рівнянь та нерівностей.

Важливо показати, як вивчені функції стають математичними моделями для розв'язування різноманітних прикладних задач.

МЕТОДИЧНІ ЗАДАЧІ
для самостійного розв'язування

1. Залежність між витратами води у водопровідній трубі, діаметром труби і швидкістю течії води в трубі визначається за формулою $Q = 0{,}9\pi D^2\vartheta$ де Q – витрати води (л/год), D – діаметр труби (мм), ϑ – швидкість (м/с).
Користуючись формулою, заповнити таблицю:

Q	D	ϑ		Q	D	ϑ
-	32	0,8		3000	40	-
-	70	0,9		1500	25	-
2000	-	0,5		500	15	-
4000	-	0,6		600	150	-
240 000	-	0,8		-	-	-

2. Виконати завдання, які пропонуються в лекції учням для самостійного розв'язання.
3. З'ясувати чим схожі та чим відмінні властивості і графік функцій $y = x^{\frac{3}{2}}, y = \sqrt[3]{x^2}$.
4. Складіть добірку прикладних задач на застосування степеневої функції та її графіка і розв'яжіть їх.
5. Доберіть завдання (з розв'язаннями) для контрольної роботи на тему «Степенева функція: властивості та графік» (два варіанти).

Математика і фізика з іншими природничими науками
є основною технічного прогресу
М. В. Келдиш

Л Е К Ц І Я 2.9

ТЕМА ***Методика вивчення тригонометричних функцій***

П Л А Н

1.	***Місце теми в програмі, зміст навчального матеріалу, вимоги до підготовки учнів. Орієнтовне планування навчального процесу***
2.	***Тригонометричні вирази і їх перетворення***
3.	***Тригонометричні функції, їх властивості та графіки***
4.	***Тригонометричні рівняння (нерівності) і способи їх розв’язання***

К О Н С П Е К Т   Л Е К Ц І Ї

1. Місце теми в програмі, зміст навчального матеріалу, вимоги до підготовки учнів. Орієнтовне планування навчального процесу

Тригонометричні функції, як предмет вивчення в курсі Алгебри і початків аналізу, нині вивчаються в 10 класі старшої профільної школи. Зміст навчального матеріалу про такі функції в програмі викладений в двох навчальних темах: «Тригонометричні функції» 30 годин та «Тригонометричні рівняння і нерівності» 35 годин.

Розподіл навчального матеріалу в часі, його зміст та вимоги до підготовки учнів представлені в таблиці (таблиця 1) фрагмент програми з математики.

Таблиця 1

Зміст навчального матеріалу	***Навчальні досягнення учнів***
Тема 3. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ (30 год) Радіанне вимірювання кутів. Синус, косинус, тангенс, котангенс кута. Тригонометричні функції числового аргументу. Періодичність функцій. Властивості та графіки тригонометричних функцій. Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу. Формули зведення. Тригонометричні формули додавання, формули подвійного аргументу, формули перетворення суми і різниці тригонометричних функцій у добуток, формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму, *формули пониження степеня, формули потрійного аргументу, формули половинного аргументу. Вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу*	*Виконує* перехід від радіанної міри кута до градусної і навпаки. *Встановлює* відповідність між дійсними числами і точками на одиничному колі. *Обчислює* значення тригонометричних виразів за допомогою тотожних перетворень. *Формулює* означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса кута числового аргументу; властивості тригонометричних функцій; властивості періодичних функцій. *Будує* графіки періодичних функцій і на них *ілюструє* властивості тригонометричних функцій. *Перетворює* тригонометричні вирази.

Тема 4. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ (35 год) Обернені тригонометричні функції: означення, властивості, графіки. Найпростіші тригонометричні рівняння. Основні способи розв'язування тригонометричних рівнянь та їх систем. *Тригонометричні нерівності. Тригонометричні рівняння і нерівності з параметрами. Рівняння і нерівності, які містять обернені тригонометричні функції.*	*Формулює* означення обернених тригонометричних функцій. *Обґрунтовує* формули коренів тригонометричних *рівнянь* $sinx = a$, $cosx = a$, $tgx = a$, $ctgx = a$. *Розв'язує* тригонометричні рівняння, тригонометричні нерівності, зокрема з параметрами.

Успішне вивчення обох тем, на наш погляд, можливе за умови, коли: відбудеться розділення, навчального матеріалу на окремі, логічно завершені підтеми; чітко визначена основна мета вивчення кожної підтеми та навчальні досягнення учнів; буде створене орієнтовне календарне планування навального процесу.

Нижче викладені пропозиції рекомендаційного характеру щодо розподілу і вивчення тригонометричного матеріалу.

Підтема 3.1. Тригонометричні вирази та їх перетворення.

Підтема 3.2. Тригонометричні функції, їх властивості і графіки.

Підтема 3.3. Тригонометричні рівняння і нерівності.

Підтема 3.1. «Тригонометричні вирази і їх перетворення» (21 год)

Таблиця 2

Зміст навчального матеріалу	***Навчальні досягнення учнів***
Числова міра кута. Кут повороту і його міра. Синус, косинус, тангенс і котангенс числа – як тригонометричні числа. Поняття про тригонометричний вираз. Основні тригонометричні тотожності: - співвідношення між тригонометричними числами однієї і тієї змінної, - тригонометричні формули: додавання, зведення, половинної та подвійної змінної, - формули перетворення суми і різниці тригонометричних чисел в добуток, - перетворення добутку тригонометричних чисел у суму. Дії з тригонометричними виразами: спрощення, доведення тотожної рівності, обчислення значень	*Виконує* перехід від градусної міри кута до числової і навпаки. *Формулює* визначення синуса, косинуса, тангенса числа та вміє знаходити їх на одиничному тригонометричному колі. *Має поняття* про тригонометричний вираз, тотожню рівність двох тригонометричних виразів. *Вміє користуватися* таблицею тригонометричних формул під час виконання дій з тригонометричними виразами. *Вміє виконувати* дії над тригонометричними виразами під час розв'язування практичних вправ та прикладних задач

Основна мета вивчення: сформувати в учнів поняття тригонометричного (алгебраїчного) виразу, встановити основні тригонометричні тотожності і навчити застосовувати їх до виконання дій над тригонометричними виразами: спрощення; доведення тотожної рівності; обчислення значень.

Орієнтовне календарне планування вивчення підтеми 3.1. «Тригонометричні вирази і їх перетворення» (див. таблицю 3).

Таблиця 3

№ п/п	Теми занять, види письмових робіт	К-ть год	Дата проведення
1	Радіанна міра кута. Кут повороту, числова міра кута повороту. Синус, косинус, тангенс, котангенс, як тригонометричні числа. Тригонометричні вирази	2	
2	Основні співвідношення між тригонометричними числами, знаки тригонометричних чисел СР-1	3	
3	Формули суми тригонометричних чисел. Формули зведення, подвійного і половинного аргументу СР-2	4	
4	Формули перетворення суми тригонометричних чисел в добуток СР-3	3	
5	Формули перетворення добутку тригонометричних чисел в суму СР-4	3	
6	Дії над тригонометричними виразами: спрощення, доведення тотожної рівності, обчислення значень СР-5	3	
7	Тригонометричні вирази як математичні моделі розв’язування прикладних задач	2	
8	Контрольна робота	1	
	Всього:	21	

Підтема 3.2. Тригонометричні функції, їх властивості і графіки (17 год)

Таблиця 4

Зміст навчального матеріалу	***Навчальні досягнення учнів***
Тригонометричні функції числового аргументу. Періодичність функцій. Властивості та графік тригонометричних функцій. Обернені тригонометричні функції, властивості та графіки обернених тригонометричних функцій. Тригонометричні функції як математичні моделі реальних процесів	*Знає* визначення тригонометричних та обернених тригонометричних функцій числового аргументу. *Формулює* властивості тригонометричних і обернених функцій. *Будує* графіки тригонометричних і обернених тригонометричних функцій за їх властивостями

Основна мета вивчення: ознайомити учнів з тригонометричними та оберненими функціями, встановити їх властивості і навчити будувати графіки.

Орієнтовне календарне планування вивчення підтеми 3.2. «Тригонометричні функції, їх властивості і графіки» (див. таблицю 5).

Таблиця 5

№ п/п	Теми занять, види письмових робіт	К-ть годин	Дата проведення
1	Тригонометричні функції $y = sinx,\ y = cosx$ числового аргументу, їх властивості та графіки СР-1	4	
2	Тригонометричні функції $y = tgx,\ y = ctgx$ числового аргументу, їх властивості та графіки СР-2	3	
3	Обернені тригонометричні функції $y = arcsinx,\ y = arccosx$ числового аргументу, їх властивості та графіки	2	
4	Обернені тригонометричні функції $y = arctgx,\ y = arccotgx$ числового аргументу, їх властивості та графіки	2	
5	Побудова графіків і дослідження властивостей складених тригонометричних функцій СР-3	3	
6	Тригонометричні функції як математичні моделі прикладних задач	2	
7	Контрольна робота	1	
	Всього:	17	

Підтема 3.3. Тригонометричні рівняння і нерівності (29 год)

Таблиця 6

Зміст навчального матеріалу	***Навчальні досягнення учнів***
Найпростіші тригонометричні рівняння $sin = a, cosx = a,\ tgx = a, ctgx = a$ та їх розв'язання. Формули коренів. Основні способи розв'язання складніших тригонометричних рівнянь методом евристичної редукції. Найпростіші тригонометричні нерівності та їх розв'язання. Основні способи розв'язання складніших тригонометричних нерівностей методом евристичної редукції. Тригонометричні рівняння і нерівності з параметрами та їх розв'язання. Рівняння і нерівності які містять обернені тригонометричні функції	*Знає* формули коренів найпростіших тригонометричних рівнянь $sin = a, cosx = a,\ tgx = a, ctgx = a$ та *вміє* їх обґрунтовувати. *Вміє* знаходити множини розв'язків найпростіших тригонометричних нерівностей. *Розв'язує* складніші тригонометричні рівняння, тригонометричні нерівності, зокрема з параметрами

Основна мета вивчення: обґрунтувати формули розв'язків найпростіших тригонометричних рівнянь і нерівностей. Навчити розв'язувати тригонометричні рівняння і нерівності зведенням їх до найпростішого.

Орієнтовне календарне планування вивчення підтеми 3.3. «Тригонометричні рівняння і нерівності» (див. таблицю 7).

Таблиця 7

№ п/п	Теми занять, види письмових робіт	К-ть годин	Дата проведення
1	Тригонометричні рівняння $sinx = a,\ cosx = a$ і їх розв’язання	2	
2	Тригонометричні рівняння $tgx = a,\ ctgx = a$ і їх розв’язання	2	
3	Основні способи розв’язання складніших тригонометричних рівнянь СР-1	4	
4	Системи тригонометричних рівнянь і особливості їх розв’язання	2	
5	Найпростіші тригонометричні нерівності і їх розв’язання	3	
6	Основні способи розв’язання складніших тригонометричних нерівностей СР-2	2	
7	Системи тригонометричних нерівностей і особливостей їх розв’язання	2	
8	Контрольна робота 1	1	
9	Рівняння і нерівності, які містять обернені тригонометричні функції	3	
10	Тригонометричні рівняння і нерівності з параметрами та їх розв’язання СР-3	4	
11	Тригонометричні рівняння і нерівності як математичні моделі прикладних задач	3	
12	Контрольна робота 2	1	
	Всього:	29	

2. Тригонометричні вирази і їх перетворення

Перше заняття з підтеми «Тригонометричні вирази та їх перетворення» рекомендуємо провести у формі шкільної лекції, на якому розкрити суть поняття тригонометричного числа як числової характеристики кута, розповісти про числову міру кута та кута повороту, сформувати поняття тригонометричного виразу.

Шкільна лекція на тему
«Числова міра кута. Тригонометричні числа»

Термін «тригонометрія» походить *від грецьких слів τρίγονο — трикутник* та *μετρειν — вимірюю*, в прямому розумінні означає «вимірювання трикутника». Його вжив вперше у 1595 році німецький математик ***Варфаламей Пітіск*** (1561-1613 рр.). Вимірюванням трикутників займались активно ще древні математики, коли вели астрономічні спостереження чи вимірювання на місцевості. Тому можна стверджувати, що тригонометрія, як математична наука, була довгий час частиною астрономії та географії. Згодом, вона виокремилася в самостійну галузь математики, а в шкільному курсі математики була довгий час навіть окремим навчальним предметом. З розвитком науки і техніки, зокрема, обчислювальної техніки, потреба в такому окремому предметі в шкільній освіті відпала.

На сьогодні тригонометричні знання представлені в шкільному курсі математики у вигляді окремих тем: *у геометрії* – «Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника» (8 кл.); *у курсі алгебри і початків аналізу* – «Тригонометричні функції» та «Тригонометричні рівняння і нерівності» (10 кл.).

З історії математики ми дізнаємось, що градусну міру кута запропонували *древні вавилоняни*. Спостерігаючи за рухом сонця на небесній сфері, вони помітили, що диск Сонця (рис. 1) на траєкторії руху зі Сходу і до Заходу вміщається 180 разів. Це природнє явище і було використане вавілонянами для вибору еталону вимірювання кутів. Кут, під яким з поверхні Землі видно диск Сонця прийняли за одиницю вимірювання, а пізніше, вона отримала назву ***градус*** (*від латинського gradus - крок*). Таким чином Сонце на небесній сфері за світловий день робить 180 кроків.

Рис. 1

Саме тому в геометрії розгорнутий кут дорівнює 180°. А оскільки у древніх вавилонян використовувалася шістдесяткова система числення, то $\frac{1}{60}$ градуса отримала назву мінута, а $\frac{1}{60}$ мінути – секунда. Отже, $1^{\circ} = 60'$, $1' = 60''$ (подібні назви збереглися і до нині, для вимірювання часу). Градус застосовують і як одиницю вимірювання дуг кола.

Вивчаючи трикутники, древні математики помітили, що у всіх прямокутних трикутників із заданими гострим кутом $\propto$ (рис. 2) відношення протилежного катета a до гіпотенузи c одне й теж.

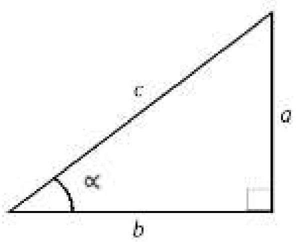


Рис. 2

Таке відношення (число) $\frac{a}{c}$, характерне для кожного гострого кута $\propto$ прямокутного трикутника, вони й використовували в своїх астрономічних та географічних вимірюваннях та обчисленнях.

Назва *синус* для такого відношення і історія його введення поки що остаточно не встановлені. Відомо, що знак $sin \propto$ ввів швейцарський математик Леонард Ейлер у 1748 році, а древні грецькі математики, для потреб практики, склали *тригонометричні таблиці*. У них містилися довжини хорд, що відповідали центральним кутам кола сталого радіуса. Фактично це були таблиці синусів, оскільки лінія синусів дорівнює половині хорди. Перші тригонометричні таблиці синусів склав давньогрецький астроном і математик Гіппарх (біля 150 років до нашої ери), він же визначив відстань від Землі до Місяця. Таблиці синусів складали також індійські, середньоазіатські математики. Вони розглядали і інше відношення в прямокутному трикутнику – прилеглого катета до гіпотенузи $\frac{b}{c}$. Таке відношення отримало назву *косинус* кута $\propto$, а з подання Л. Ейлера отримало знак $cos \propto$ (*від латинського complementi sinus – доповнення до синуса*). Пізніше математики ввели в практику інші тригонометричні числа для гострого кута прямокутного трикутника: *тангенс і котангенс, секанс і косеканс*. Довгий час в шкільному курсі математики використовувалися чотиризначні таблиці В. М. Брадіса. На сьогодні, у зв'язку з появою потужних обчислювальних засобів – калькуляторів, персональних комп'ютерів, потреба в таких таблицях відпала.

Тепер трикутники, і не тільки прямокутні, а й довільні, вчать розв'язувати у школі на уроках геометрії, користуючись теоремами синусів, косинусів та вище названими відношеннями. Будемо надалі, для зручності, для кожного кута $\propto$ називати його числові характеристики $sin \propto$, $cos \propto$, $tg \propto$, $ctg \propto$ *тригонометричними числами*.

З розвитком науки математика, зокрема, математичного аналізу, інших наук – фізики, механіки, електротехніки – виявилось, що градусна міра кута в багатьох застосуваннях незручна, оскільки доводиться вести обчислення за правилами шістдесяткової системи числення та правилами десяткової системи числення. Ці незручності спонукали математиків до введення числової міри кута (її ще іноді називають *радіанною мірою*).

Якщо розглянути два концентричних кола (рис. 3) з радіусами r_1 та r_2 (ці кола подібні), то в обох відношеннях довжини дуг A_1B_1 та A_2B_2, на які спирається вписаний кут $\propto$, до їх радіусів r_1 та r_2 – стале. Тобто $\frac{A_1B_1}{r_1} = \frac{A_2B_2}{r_2}$.

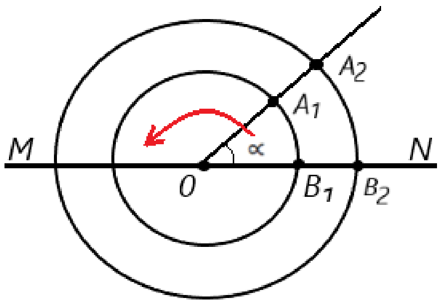


Рис. 3

Цей факт і став визначальним у виборі нової одиниці вимірювання кутів. За числову одиницю вимірювання кутів вибрали величину кута, який спирається на дугу рівною за довжиною радіусу.

Таку одиницю вимірювання назвали *радіаном* (*від латинського radius - промінь*). Дрібніші одиниці відповідно дорівнюють 0,1; 0,01; 0,001; … радіана. Оскільки розгорнутий кут MON дорівнює $180°$, а довжина півкола дорівнює πr, то розгорнутий кут MON в радіанах буде дорівнювати числу $\propto = \frac{\pi r}{r} = \pi$.

Звідси випливають формули переведення градусної міри кута в радіанну (числову) і навпаки:

а) $180° = \pi$, $1° = \frac{\pi}{180}$ (радіанна)$\approx 0{,}017453292 \ldots \approx 0{,}017$ (радіан);

б) $\pi = 180°$, $1\text{рад.} = \left(\frac{180°}{\pi}\right) \approx 57{,}2957795 \ldots \approx 57{,}3^{\circ} = 57^{\circ}18'$.

У таблиці 8 приведені градусна і радіанна міри найчастіше вживаних кутів.

Таблиця 8

кут ∝	градусна міра	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$150°$	$180°$
	числова міра	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

У загальному випадку для довільного кута (як геометричної фігури) його міра в градусах $\propto^{\circ}$, а міра в радіанах $\propto$ визначаються за формулами (1) та (2):

$$\propto^{\circ} = \frac{\propto \cdot 180^{\circ}}{\pi} \qquad (1)$$

$$\propto = \frac{\propto^{\circ} \cdot \pi}{180^{\circ}} \qquad (2)$$

Оскільки міра дуги кола дорівнює мірі центрального кута, що на неї спирається, то й дуги стали вимірювати як в градусах, так і в радіанах. На практиці кути вимірюють транспортиром (градусним або радіанним)

Бурхливий розвиток в XIX ст. техніки, вивчення коливних та обертальних рухів у механіці, призвели до виникнення такого поняття як *кут повороту* та його міри, а з ним і поняття синуса, косинуса кута повороту.

Що ж таке ***кут повороту***? З'ясуємо зміст цього поняття. Розглянемо коло і розміщену на ньому зі своїм початком в центрі цього кола прямокутну декартову систему координат XOY (рис. 4). Його називають ***тригонометричним колом***.

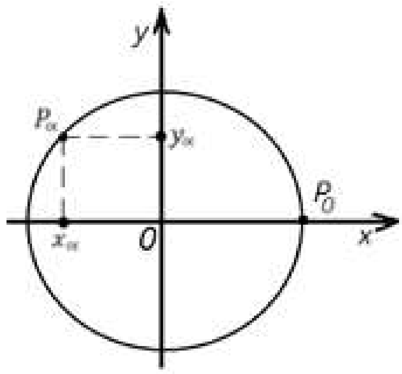


Рис. 4

Рух точки P_0 по колу називають ***кутом повороту***. Довжина дуги ∝, яку проходить точка P_0, рухаючись по колу, $P_0P_\propto$ називають ***мірою кута поворотку***. Якщо рух відбувається проти годинникової стрілки, то таке число береться зі знаком «+», а якщо за годинниковою стрілкою, то зі знаком «-».

Міра кута повороту таким чином стала виражатися і в градусах, а в радіанах, бути додатною чи від'ємною. Модулі цих чисел можуть бути і як завгодно великі, і як завгодно малі. Точка $P_\propto$ в системі координат *XOY* має абсцису $x_\propto$ та ординату $y_\propto$.

Виходячи з таких тлумачень, стали розглядати синус кута повороту ∝ та косинус кута повороту ∝ як відношення:

$$sin \propto = \frac{y_{\propto}.}{R},\ cos \propto = \frac{x_{\propto}.}{R}, \text{ де } R \text{ – радіус кола.}$$

Таким поняттям в техніці, механіці, фізиці послуговується і нині.

Математики, які вивчають числові функції та їх властивості, провели узагальнення названих понять.

Оскільки кожному дійсному числу ∝ можна поставити у відповідність за допомогою тригонометричного кола кут повороту ∝, а йому, в свою чергу, відповідно $sin \propto$ та $cos \propto$, то були введені такі поняття як **синус числа** ∝ та **косинус числа** ∝.

А для того, щоб спростити відношення $sin \propto$ і $cos \propto$, коло стали оберати з радіусом рівним одиниці довжини (*одиничне тригонометричне коло*).

Тепер в математиці, зокрема в курсі Алгебри і початків аналізу дотримуються наступних означень.

Означення 1. *Синусом числа $\propto$ називається ордината точки $P_{\propto}$ одиничного кола, в яку переходить початкова точка $P_0(1;0)$ при повороті навколо центра кола на кут повороту $\propto$ рад, і позначається $sin\propto$.*

Означення 2. *Косинусом числа $\propto$ називається абсциса точки $P_{\propto}$ одиничного кола, в яку переходить початкова точка $P_0(1;0)$ при повороті навколо центра кола на кут повороту $\propto$ рад, і позначається $cos\propto$.*

Виходячи з названих означень розглядаються також відношення $\frac{sin\propto}{cos\propto}$ і $\frac{cos\propto}{sin\propto}$.

Їх назвали відповідно тангенсом числа $\propto$ та котангенсом числа $\propto$ і позначають $tg\propto=\frac{sin\propto}{cos\propto}$, $ctg\propto=\frac{cos\propto}{sin\propto}$.

Таким чином, для кожного дійсного числа $\propto\epsilon R$ існують його числові характеристики (тригонометричні числа) $sin\propto$, $cos\propto$, а також якщо $cos\propto\neq 0$ то існує і $tg\propto$, якщо $sin\propto\neq 0$ то існує і $ctg\propto$.

З'ясуємо, де ж відкладаються в одиничному тригонометричному колі названі числа.

Відповідь на це запитання подано на рис. 5, 6, 7.

для $sin\propto$, $cos\propto$

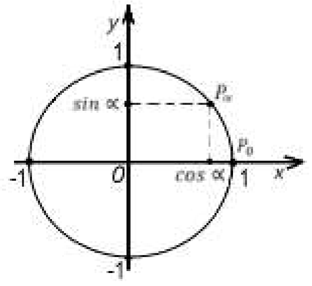


Рис. 5

для $tg\propto$

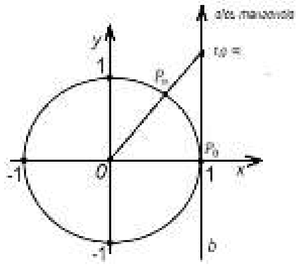


Рис. 6

для $ctg\propto$

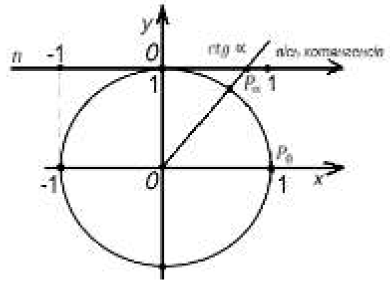


Рис. 7

Фактично, одиничне коло з вісями OX, OY, b (вісь тангенсів) та n (вісь котангенсів) є ***графічною моделлю***, за якою встановлюється відповідність між множиною дійсних чисел R і тригонометричними числами $sin\propto$, $cos\propto$, $tg\propto$, $ctg\propto$. Саме коло, можна розглядати як кругову шкалу з початком в точці P_0, за якою на колі відкладаються додатні та від'ємні дійсні числа.

За допомогою одиничного тригонометричного кола, для окремих часто вживаних кутів була створена таблиця відповідних їм тригонометричних чисел (таблиця 9).

Таблиця 9

$\propto$	$0(0^0)$	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	$\frac{2\pi}{3}$ (120°)	$\frac{3\pi}{4}$ (135°)	$\frac{5\pi}{6}$ (150°)	π (180°)	$\frac{3\pi}{2}$ (270°)	2π (360°)
$sin \propto$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$cos \propto$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$tg \propto$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	не існує	0
$ctg \propto$	не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	не існує	0	не існує

***) відповідність в таблиці між числами і їх тригонометричними числами обґрунтуйте самостійно**

Надалі будемо вивчати тригонометричні вирази та їх перетворення. Розглядатимемо множину дійсних чисел R, множину тригонометричних чисел $T = \{sin \propto, cos \propto, tg \propto, ctg \propto\}$, де $\propto \epsilon R$ та множину арифметичних операцій над числами $O = \{+, -, \times, :\}$.

Тригонометричним виразом (*алгебраїчним виразом*) будемо називати запис, складений із скінченної кількості дійсних чисел з множини R, тригонометричних чисел, з множини T, поєднаних знаками арифметичних операцій з множини O.

Наприклад, тригонометричними виразами є записи:

а) $2sin \propto +cos \propto$; б) $sin3 \propto -cos \propto$; в) $tg^2 \propto -cos2 \propto$.

Основною метою такого вивчення буде:

- навчитись спрощувати такі вирази;
- доводити тотожню рівність виразів;
- обчислювати числове значення виразу для заданих значеннях змінних.

КІНЕЦЬ ЛЕКЦІЇ

Після проведеної лекції, пропонуємо задати учням в якості домашнього завдання виконати:

- вивчити зміст лекції;
- обґрунтувати значення тригонометричних чисел для кутів, які подані в таблиці 9;
- обґрунтувати введення формул (1) та (2).

На наступному занятті (практичному) перевірити виконання домашнього завдання і приступити до розв’язування вправ на:

- переведення градусної міри кута в радіанну і навпаки;
- відкладання чисел на одиничному тригонометричному колі і навпаки, на запис всіх чисел, для точки $P_\propto$, вибраної на одиничному тригонометричному колі;
- на обчислення $sin \propto, cos \propto, tg \propto, ctg \propto$ для заданих значень $\propto$, за допомогою калькулятора.

Після розв’язання достатньої кількості тренувальних вправ (вони є в діючих підручниках з алгебри і початків аналізу) рекомендуємо *перейти до виведення основних тригонометричних тотожностей*:

1) знаки значень $sin \propto, cos \propto, tg \propto, ctg \propto$ залежно від значення числа $\propto$;
2) співвідношень між тригонометричними числами для одного й того ж числа $\propto$;
3) формул для тригонометричних чисел суми, різниці двох чисел;
4) формул для подвійного і половинного кутів;
5) формул зведення (з встановлення загального правила);
6) формул переведення суми тригонометричних чисел в добуток і навпаки, добутку двох тригонометричних чисел в суму.

У результаті в учнів буде створений (власними руками) довідник основних тригонометричних тотожностей. Окремі, з яких, наприклад, $cos(\propto -\beta) = cos \propto cos\beta + sin\alpha sin\beta$, $sin\alpha + sin\beta = 2sin\frac{\alpha+\beta}{2} + cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, вони довели разом вчителем, а інші самостійно, користуючись колективними доведеннями як зразками.

Зрозуміло, що виведення формул можна проводити як за лекційно-практичною формою навчання чи за класно-урочною. Бажано всіляко заохочувати учнів до самостійних доведень чи до повідомлень готових доведень, розміщених у підручниках. Гарним стимулом до роботи є похвала, позитивна оцінка, вибір найкращого доведення тощо. Разом із виведеннями слід розв’язувати тренувальні вправи, які виступають як ілюстрації застосувань вивчених формул.

Окремо, увагу слід звернути на розв’язання вправ підвищеного і поглибленого рівнів на спрощення тригонометричних виразів, доведення тотожних рівностей, обчислення числових значень виразів, коли доводиться застосовувати не одну основу тотожність, а кілька.

Розглянемо приклади таких вправ і особливості їх розв’язання.

1. *Спростить вираз* $\frac{(1-cos^2\propto)(cos4\propto-cos2\propto)}{sin\alpha-2sin3\propto+sin5\propto}$.

Розв’язання

Оскільки знаменник виразу може дорівнювати 0, то встановлювати область визначення виразу будемо по ходу виконання дій.

Позначимо даний вираз $A(\propto)$.

Тоді:

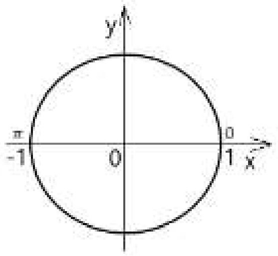
$$A(\propto)=\frac{(1-cos^2\propto)(cos4\propto-cos2\propto)}{sin\alpha-2sin3\propto+sin5\propto}=$$

$$=\frac{sin^2\propto(-2)sin\frac{4\propto+2\propto}{2}\cdot sin\frac{4\propto-2\propto}{2}\cdot}{2sin\frac{\propto+5\propto}{2}\cdot cos\frac{5\propto-\propto}{2}-2sin3\propto}=$$

$$=-\frac{2sin^2\propto\cdot sin3\propto\cdot sin\alpha\cdot}{2sin3\propto\cdot cos2\propto-2sin3\propto}=-\frac{2sin^3\propto\cdot sin3\propto}{2sin3\propto(cos2\propto-1)}=$$

$$=\frac{sin^3\propto\cdot sin3\propto}{2sin3\propto\cdot sin^2\propto}=\frac{sin\propto}{2},$$

за умови, що $sin3\propto\neq 0, sin\propto\neq 0$.



Скористаємось одиничним тригонометричним колом

а) $sin3\propto=0$, коли $3\propto=n\pi$, де $n\in Z$.
Звідси $\propto=\frac{\pi}{3}n$, де $n\in Z$.

б) $sin\propto=0$, коли $\propto=n\pi$, де $n\in Z$. Множина значень $\propto=\frac{\pi}{3}n$, де $n\in Z$ включає в себе множину значень $\propto=n\pi$, де $n\in Z$. Тому область визначення виразу *A*(∝) буде $\propto\in R$, де $\propto\neq\frac{\pi}{3}n, n\in Z$.

Відповідь: A(∝)=$\frac{1}{2}sin\propto, \propto\neq\frac{\pi}{3}n, n\in Z$.

Методичний коментар

Щоб спростити даний вираз (замінити його на тотожно рівним йому) слід знати область визначення. Її краще встановлювати по ходу виконання перетворень.

Для виконання перетворень потрібно скористатись основними тотожностями:

$$sin^2\propto+cos^2\propto=1,$$

$$cos\propto-cos\beta=-2\,sin\frac{\propto+\beta}{2}\cdot sin\frac{\propto-\beta}{2},$$

$$sin\propto+sin\beta=2\,sin\frac{\propto+\beta}{2}\cdot sin\frac{\propto-\beta}{2}.$$

Варто звернути увагу учнів на те, що множина чисел $\propto=\frac{\pi}{3}n$, $n\in Z$ є зліченною.

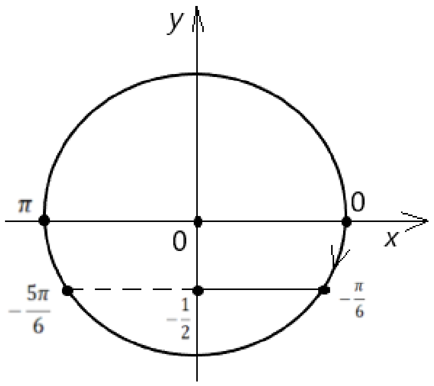
2. *Доведіть тотожність* $\frac{sin3\alpha+cos2\propto-sin\propto}{cos\alpha+2sin2\propto-cos3\propto}=ctg2\propto$.

Розв’язання

Доведемо, що вираз зліва дорівнює виразу справа, на якій області визначення це відбувається встановимо по ходу доведення:

$\frac{sin3\alpha+cos2\propto-sin\propto}{cos\alpha+2sin2\propto-cos3\propto}=\frac{(sin3\alpha-sin\propto)+cos\propto}{(cos\alpha-cos3\propto)+sin2\propto}=\frac{2sin\propto\cdot cos2\propto+cos2\propto}{2sin\propto\cdot sin2\propto+sin2\propto}=\frac{cos2\alpha(2sin\propto+1)}{sin2\alpha(2sin\propto+1)}=\frac{cos2\propto}{sin2\propto}=ctg2\propto,$ за умови, що $2sin\propto+1\neq 0$ і $sin2\propto\neq 0$.

Знайдемо за допомогою одиничного тригонометричного кола значення ∝, при яких ці вирази не дорівнюють 0.



а) $sin2 \propto = 0$, коли $2\propto = n\pi$, де $n \epsilon Z$.

Звідси $\propto = \frac{\pi}{2}n$, де $n \epsilon Z$.

б) $2sin \propto +1 = 0$, коли $sin \propto = -\frac{1}{2}$.

Звідки $\propto_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, де $n \epsilon Z$,

$\propto_2 = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, де $n \epsilon Z$.

Отже, рівність правильна для $\propto \neq \frac{\pi}{2}n$, де $n \epsilon Z$,

$\propto \neq -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \epsilon Z$ та $\propto \neq -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \epsilon Z$.

3. *Обчисліть значення виразу* $\frac{1}{tg3\alpha + tg\propto} - \frac{1}{tg5\alpha - tg\propto}$, якщо $\propto = 15^{\circ}$.

Розв'язання

Зрозуміло, що щоб обчислити значення даного виразу його слід спочатку спростити, встановити область допустимих значень та переконатись що $\propto = 15^{\circ}$ буде належати цій області. Тільки тоді провести обчислення. Позначимо вираз $A(\propto)$.

$$A(\propto) = \frac{1}{tg3\alpha + tg\propto} - \frac{1}{tg5\alpha - tg\propto} =$$
$$= \frac{1}{\frac{sin4\propto}{cos3\propto \cdot cos\propto}} - \frac{1}{\frac{sin4\propto}{cos5\propto \cdot cos\propto}} = \frac{cos3\propto \cdot cos\propto - cos5\propto \cdot cos\propto}{sin4\propto} =$$
$$= \frac{cos\propto(cos3\propto - cos5\propto)}{sin4\propto} = \frac{2cos\propto \cdot sin\propto \cdot sin4\propto}{sin4\propto} =$$
$$= 2sin \propto cos \propto = sin2 \propto$$

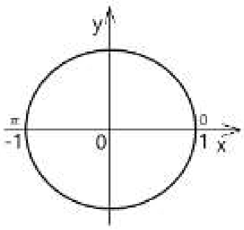
за умови, що $cos \propto \neq 0, cos3 \propto \neq 0$ та $cos5 \propto \neq 0, sin4 \propto \neq 0$.

За допомогою одиничного тригонометричного кола, знайдемо якою буде область допустимих значень виразу $A(\propto)$.

Методичний коментар

Для спрощення виразу використайте формули:

$$tg \propto + ctg\beta = \frac{\sin(\propto + \beta)}{cos\propto \cdot cos\beta}.$$
$$tg \propto - ctg\beta = \frac{\sin(\propto - \beta)}{cos\propto \cdot cos\beta}.$$
$$cos \propto - cos\beta = -2\, sin\frac{\propto + \beta}{2} \cdot sin\frac{\propto - \beta}{2}.$$



1) якщо $sin4 \propto = 0$, то $4\propto = n\pi$, де $n \epsilon Z$.
$\propto_1 = \frac{\pi}{4}n$, де $n \epsilon Z$.

2) якщо $cos \propto = 0$, то $\frac{\propto}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, де $n \epsilon Z$.

3) якщо $cos3 \propto = 0$, то $3 \propto = \frac{\pi}{2} + \pi n$, де $n \epsilon Z$.
$\propto_3 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n$, де $n \epsilon Z$.

4) якщо $cos5 \propto = 0$, то $5\propto = \frac{\pi}{2} + \pi n$, де $n \epsilon Z$.
$\propto_4 = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}n$, де $n \epsilon Z$.

За умови $\propto = 15^{\circ} = \frac{\pi}{12}$ не дорівнює жодному з чисел $\propto_1$, $\propto_2$, $\propto_3$, $\propto_4$. Отже, $\frac{\pi}{12}$ належить області визначення виразу $A(\propto)$. Тому $A(\frac{\pi}{12}) = sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

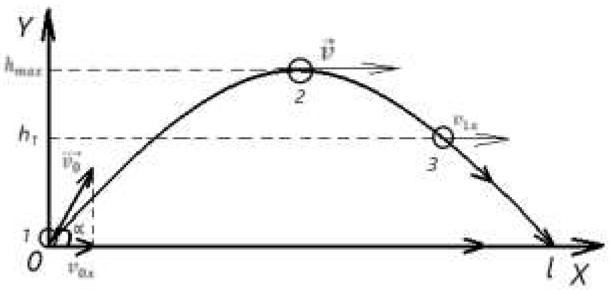
Відповідь: $\frac{1}{2}$.

4. *Прикладна задача з фізики.* Міну випущено з мінометa зі швидкістю v_0 під кутом $\propto$ до горизонту. Визначте максимальну висоту h_{max} підняття міни і на яку відстань пролетить міна при такій швидкості. Під яким кутом до горизонту слід пускати міну, щоб дальність польоту була максимальною? Обчисліть названі величини для армійського мінометa М120-15 «Молот» (українського виробництва), знаючи що його дульна швидкість становить 325 *м/с*, а постріл зроблено під кутом 60°, опором повітря знехтувати.

Розв'язання

1) Побудова математичної моделі для розв'язання задач.

Виконаємо ілюстративний рисунок, на якому зазначимо положення міни і напрямок швидкості її руху приведені міркування учні можуть знайти в шкільному підручнику з фізики для 10 класу.



Оскільки опір повітря відсутній, то можна скористатися законом збереження енергії. Пригадаємо, що під час руху тіла під дією сили тяжіння проекція швидкості на горизонтальну вісь *OX* не змінюється

$v_x = v_{0x} = v_0 cosa.$

У верхній точці траєкторії швидкість руху тіла напрямлена горизонтально, тому $v_x = v$. Для кожного положення міни запишемо вираз для розрахунку повної механічної енергії:

1. $W = \frac{mv_0^2}{2} + mgh_0 = \frac{mv_0^2}{2}$;

2. $W = \frac{mv_0^2}{2} + mgh_{max} = \frac{mv_0^2 cos^2 \propto}{2} + mgh_{max}$;

3. $W = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1$.

Оскільки повна механічна енергія зберігається, маємо дві рівності:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_0^2 cos^2 \propto}{2} + mgh_{max}; \qquad \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1.$$

Помноживши обидві рівності на 2 та скоротивши на m, знайдемо невідому величину h_{max} :

$$v_0^2 = v_0^2 cos^2 \propto + 2gh_{max} \Rightarrow 2gh_{max} = v_0^2 - v_0^2 cos^2 \propto \Rightarrow$$

$$h_{max} = \frac{v_0^2 sin^2 \propto}{2q} \qquad (1)$$

Тоді $l = v_0 cos \propto \cdot 2t$, де t – час підйому на висоту h_{max}, тобто час протягом якого вертикальна складова швидкості зменшиться до 0 $t = \frac{v_0 sin\propto}{q}$.

Отже, $l = v_0 cos \propto \cdot 2 \cdot \frac{v_0 sin\propto}{q} = \frac{v_0^2 sin2\propto}{q} \Rightarrow$

$$l = \frac{v_0^2 sin2\propto}{q} \qquad (2)$$

Формули (1) і (2) математичні моделі, за якими розв'язується дана фізична задача.

Дальність польоту міни для заданої швидкості v_0 буде максимальною у випадку, коли $sin2 \propto = 1$. За допомогою одиничного тригонометричного кола знаходимо, що в цьому випадку $2 \propto = 90^0$, $\propto = 45^0$.

Отже, найдовшу відстань міна пролетить тоді, коли постріл здійснено під кутом 45^0 до горизонту.

Обчислимо шукані величини для мінамета М120-15 «Молот».

Відомо, що $v_0 = 325$ м/с, $q = 9{,}8$ м/с, $\propto = 60^0$.

Тоді,

$$h_{max} = \frac{325^2\ sin^2 60^0}{2\cdot 9{,}8} = \frac{105\ 625\cdot 0{,}75}{19{,}6} = 4041{,}7726 \approx 4042 \text{ м},$$

$$l = \frac{325^2\ sin\ \ 120^0}{2\cdot 9{,}8} \approx \frac{105\ 625\cdot 0{,}866}{9{,}8} \approx 9334 \text{ м}.$$

Відповідь : $h_{max} = \frac{v_0^2 sin^2\propto}{2\cdot q}$, $l = \frac{v_0^2 sin\ \ 2\propto}{q}$, $h_{max} \approx 4042$ м, $l = 9334$ м.

***) якщо враховувати опір повітря, то значення знайдених величин будуть меншими. У технічних характеристиках мінамета М120-15 «Молот» вказується, що ефективна дальність стрільби з нього до 7000 *м*.**

В усіх чотирьох прикладах для визначення області визначення виразу використовуємо одиничне тригонометричне коло.

Це не випадково, оскільки тему «Тригонометричні рівняння» учні будуть вивчати пізніше, а таке використання є гарною пропедевтикою їх вивчення.

КІНЕЦЬ ЛЕКЦІЇ

П І Д С У М О К

Основним результатом вивчення теми «Тригонометричні вирази і їх перетворення» мають стати міцні вміння учнів виконувати дії з тригонометричними виразами: спрощення виразів; доведення тотожних рівностей; обчислення значень виразу для заданих значеннях змінних. Учні можуть користуватись довідником основних тотожностей, а ще краще коли вони їх пам'ятають і вміло використовують.

Отримані знання є базовими для успішного вивчення тригонометричних функцій, тригонометричних рівнянь та нерівностей.

МЕТОДИЧНІ ЗАДАЧІ
для самостійного розв'язування

1. Складіть добірку прикладних задач в розв'язанні яких використовуються тригонометричні вирази і дії над ними. Запропонуйте зразки їх розв'язання.
2. Довести тригонометричні тотожності для $sin3\propto$, $cos3\propto$.
3. Складіть текст контрольної роботи на тему «Тригонометричні вирази та їх перетворення (два варіанти)»
4. Розв'язати вправи:
   а) спростить вираз (3-4 $cos4\propto$+ $cos8\propto$)(1- $cos2\propto$);
   б) доведіть, що 3 $(sin^4\propto + cos^4\propto) - 2(sin^6\propto + cos^6\propto)=1$;
   в) визначте $sin^3\propto - cos^3\propto$, якщо $sin\propto + cos\propto = m$;
   г) обчисліть $\left(\frac{sin\propto - sin3\propto}{cos\propto - cos3\propto}\right)(1 - cos4\propto)$, якщо $\propto = -\frac{\pi}{24}$.

3. Тригонометричні функції, їх властивості та графіки:

а) попередні повідомлення, які корисно знати вчителю математики

Тригонометричні функції – перші трансцендентні функції, що вивчаються в школі. Їх роль і місце в шкільному курсі математики визначається в основному двома обставинами:

- тригонометричні функції дають чудовий апарат для розв'язування задач планіметрії, стереометрії, фізики;
- тригонометричні функції гарно ілюструють такі важливі властивості функції як: періодичність, парність і непарність; обмеженість; монотонність; неперервність і т. п.

Перша обставина загальновідома, в минулому їй надавалась навіть надмірна увага (коли читався цілий курс «тригонометрії»). Тепер такої уваги приділяється менше.

Дві сторони в поглядах на важливість вивчення тригонометричних функцій поклали початок двох можливих шляхів їх вивчення: а) аналітичному; б) геометричному.

Перший шлях – аналітичний. Можливі такі підходи введення поняття тригонометричної функції:

1) *розглядаються диференціальні рівняння* $f''(x) = -c \cdot f(x)$.

Шукаються розв'язки такого рівняння. Задання функції, яка була б розв'язком такого рівняння приводить до появи тригонометричних функцій $y = sinx$ та $y = cosx$. У діючій програмі та альтернативних підручниках з Алгебри і початків аналізу розглянуто зворотний шлях: спочатку вводяться тригонометричні функції, а потім доводиться що вони є розв'язками вказаного диференціального рівняння. Очевидно, що такий метод введення тригонометричних функцій можливий, але в школі не практикується;

2) *розглядаються степеневі ряди*.

Серед них виділяють наступні:

1) $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$; 2) $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$;

Перший і другий ряди представляють собою деякі функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$. Встановлюють властивості цих функцій і визначають їх як $f_1(x) = cosx,\ \ f_2(x) = sinx$.

Такий підхід для середньої школи, мабуть, також малореальний, хоч і можливий.

Другий шлях – геометричний. Цей шлях звичайний, існує та удосконалюється більше 100 років. Є багато різновидностей цього шляху:

а) тригонометричні функції вводяться як відношення сторін прямокутного трикутника; труднощі, які виникають при цьому – перехід до кутів більших за 90°, та при переході до тригонометричних функцій числового аргументу;

б) введення тригонометричних функцій через так звані тригонометричні лінії в крузі;

в) через відношення координат радіуса – вектора;

г) через проекції одиничного вектора;

д) через координати точки одиничного кола.

У сучасних діючих шкільних альтернативних підручниках з Алгебри і початків аналізу реалізується останній підхід, тобто тригонометричні функції вводяться як координати точки одиничного кола.

Таке введення, хоч і наочне, вимагає певної підготовки учнів: учні повинні володіти знаннями про перетворення фігур; мати уявлення про рівняння з двома невідомими; знати основні формули координатного методу; досить впевнено спиратися на поняття функції; вміти будувати графіки функцій за допомогою геометричних перетворень тощо.

Ще одна особливість введення тригонометричних функцій полягає в тому, що раніше учні, за видом функції, уміли знаходити для заданого значення аргумента відповідне значення функції ($y = x^2, y = \sqrt{x}, y = ax^2 + bx + c$ і т. п.). Тепер же, доводиться звертатися або до одиничного тригонометричного кола, або до таблиць. Цю особливість дітям слід розповісти.

б) тригонометричні функції $y = sinx, y = cosx, y = tgx, y = ctgx$,

їх властивості і графік

Знайомство учнів з тригонометричними функціями $y = sinx, y = cosx, y = tgx,$ $y = ctgx$ пропонуємо провести у формі двох шкільних лекцій.

Конспект перщої з них подано нижче.

Перша шкільна лекція на тему

«Функції $y = sinx$ та $y = cosx$, їх властивості і графік»

Одиничне тригонометричне коло, як графічна модель, що поєднує в собі колову рівномірну числову шкалу та прямокутну декартову систему координат, дає змогу встановити відповідність при якій кожному дійсному числу $\propto$ відповідає кут повороту $\propto$, а йому, в свою чергу, координати і точки $P_\propto$: $x_\propto$ і $y_\propto$ (рис. 1).

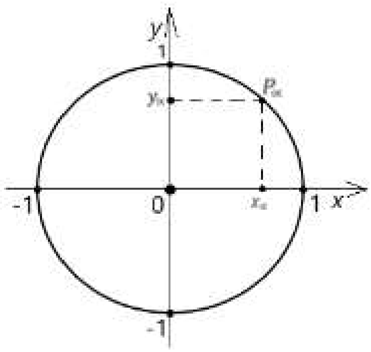


Рис. 1

Така відповідність, як відомо, в математиці називається *функцією*. Отже, маємо:

$$\forall \propto \epsilon R \quad \begin{matrix} \nearrow & y_\propto \epsilon [-1; 1] \\ \searrow & x_\propto \epsilon [-1; 1] \end{matrix}$$

Функцію $\propto \epsilon\ R \rightarrow y_\propto \epsilon [-1; 1]$ – називають синусом число $\propto$ і позначають $y = sinx$, а функцію $\propto \epsilon\ R \rightarrow x_\propto \epsilon [-1; 1]$ – називають косинусом числа $\propto$ і позначають $y = cosx$.

Розглянемо окремо властивості і графік кожної з них, діючи за встановленою раніше методичною схемою МС-2.

Властивості і графік функції $y = sinx$

1) *Область визначення функції* $y = sinx.$ Так як для будь-якого дійсного числа $\propto$ існує $sin \propto$, то $D(sinx) = R$. З одиничного тригонометричного кола бачимо, що область значень функції буде $E(sinx) = [-1; 1]$.
2) Щоб встановити інші властивості функції, побудуємо спочатку схематично, скориставшись одиничним тригонометричним колом, її графік (рис. 2).

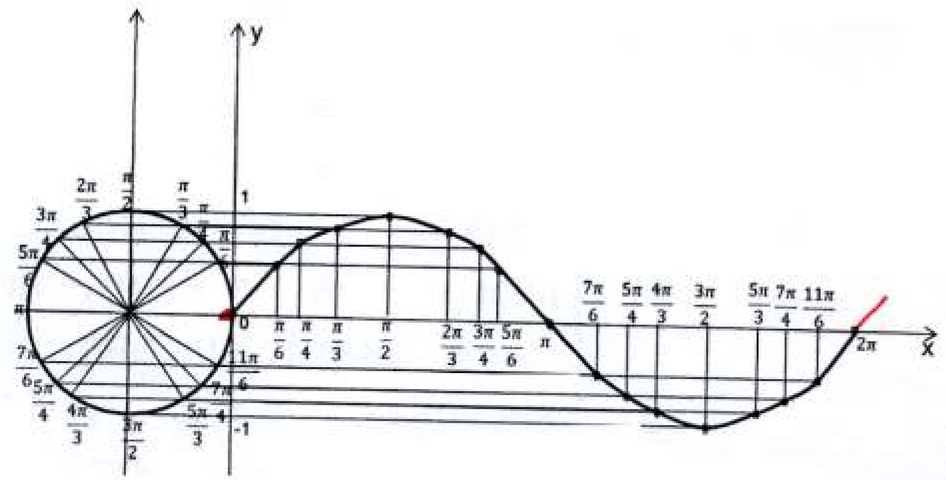


Рис. 2

3) *Парність чи непарність функції.*

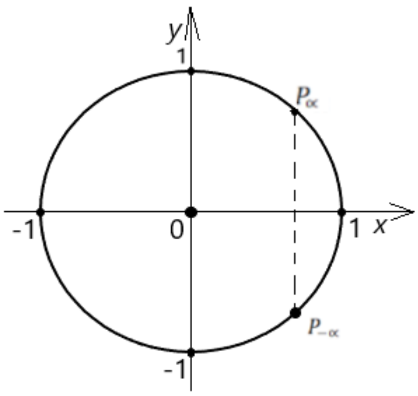


Рис. 3

Для будь-якого $\propto\ \epsilon\ R$, $-\propto\ \epsilon\ R$. За допомогою одиничного кола помічаємо, що відповідні їм точки $P_\propto$ і $P_{-\propto}$ симетричні відносно осі OX.

Тому $y_\propto$ та $y_{-\propto}$ – протилежні числа.

Тобто, виконується рівність: $-sin \propto = \sin(-\propto)$.

За означенням, функція $y = sinx$ непарна.

Її графік симетричний відносно початку координат.

4) *Періодичність функції.*

Якщо продовжувати побудову графіка (рис. 2) для інших чисел, помічаємо, що він повторюється.

Доведемо, що функція періодична і знайдемо найменший додатний період T.

За означенням періодичності функції має існувати таке число $T \neq 0$, що для всіх $x\ \epsilon\ R$ виконується рівність: $sinx = \sin(x + T)$.

Визначимо з цієї рівності число T. Маємо для всіх $x\ \epsilon\ R$ тотожню рівність $\sin(x + T) - sinx = 0$, тобто $2\sin\frac{T}{2}cos(2x + T) = 0$.

Зрозуміло, що існують такі числа x, що $cos(2x + T) \neq 0$. Тому тотожня рівність $2\sin T \cdot cos(2x + T) = 0$ буде тоді, коли $\sin\frac{T}{2} = 0$.

Звідки, за допомогою одиничного тригонометричного кола знаходимо, що $T = 2\pi n$, де $n\ \epsilon\ Z$. За формулами зведення для будь-якого $x\ \epsilon\ R$ $sinx = \sin(x + 2\pi n)$.

Отже, періодом T може бути будь-яке число з множини $A = \{\pm 2\pi;\ \pm 4\pi;\ \pm 6\pi; \ldots\}$.

Найменшим додатним періодом є $T_0 = 2\pi$.

Таким чином доведено, що функція $y = sinx$ періодична, з найменшим додатним періодом $T = 2\pi$.

5) *Проміжки зростання і спадання функції* $y = sinx$.

Розглянемо проміжок $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Виберемо два значення з цього проміжка x_1 і x_2, $(x_2 > x_1)$. Оцінимо різницю $sinx_2 - sinx_1$.

$$sinx_2 - sinx_1 = 2sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

Оскільки $-\frac{\pi}{2} < x_1 < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < x_2 < \frac{\pi}{2}$, то додавши обидві нерівності і поділивши суму на 2 отримуємо, що $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_1+x_2}{2} < \frac{\pi}{2}$. Тому $cos\frac{x_1+x_2}{2} > 0$.

Звідси слідує, що знак різниці $sinx_2 - sinx_1$, співпадає зі знаком $sin\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)$.

Але $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_2-x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$, тому $sin\,(x_2 - x_1) > 0$.

Отже, $sinx_2 - sinx_1 > 0$, тобто $sinx_2 > sinx_1$.

Виконується умова зростання функції $y = sinx$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Оскільки функція $y = sinx$ періодична з найменшим додатним періодом $T = 2\pi$, то вона зростає на кожному із проміжків $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, де $n \in Z$.

Аналогічно доводиться, що функція $y = sinx$ спадна на кожному із проміжків $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi т; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, де $n \in Z$. (Доведіть самостійно).

6) *Найбільше і найменше значення функції* $y = sinx$, *нулі функції.*

За допомогою одиничного тригонометричного кола знаходимо, що :

$y_{max} = 1$, тобто $sinx = 1$, якщо $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, де $k \in Z$.

$y_{min} = -1$, тобто $sinx = -1$, якщо $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, де $k \in Z$.

$y = 0,\ sinx = 0,$ якщо $x = \pi k$, де $k \in Z$.

7) *Неперервність функції* $y = sinx.$

Виберемо довільну точку $x_0 \in R$. Доведемо, що функція $y = sinx$ неперервна в цій точці, тобто, що він $\lim\limits_{x \to x_0} sinx = sinx_0$.

Розглянемо різницю $sinx_0 - sin\,x = 2sin\frac{x_0-x}{2}cos\frac{x_0+x}{2}$.

$$|sinx_0 - sin\,x| = 2\left|sin\ \frac{x_0-x}{2}\right| \cdot \left|cos\ \frac{x_0+x}{2}\right|.$$

Оскільки $\left|cos\ \frac{x_0+x}{2}\right| \leq 1$, то $|sinx_0 - sin\,x| \leq 2\left|sin\ \frac{x_0-x}{2}\right|$. Позначимо $\frac{x_0-x}{2} = t$.

Нехай $t > 0$. Якщо $x \to x_0$, то $t \to 0$. Оцінимо $|sint|$. За допомогою одиничного тригонометричного круга маємо (рис. 4).

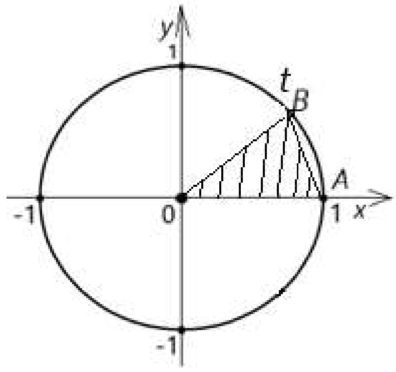


Рис. 4

Площа ΔOAB менша за площу сектора OAB. Тому, $S_{\Delta AOB} < S_{\text{сек}AOB}$, тобто $\frac{1}{2} sint < \frac{1}{2} t$, тобто $sint < t$. Тому завжди $|sin\ t| < |t|$.

Нерівність, очевидно, правильна як для додатного t , так і для від'ємного.

Отже, маємо :

$$|sinx_0 - sin\ x| \leq 2\left|sin\ \frac{x_0 - x}{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|\frac{x_0 - x}{2}\right| \leq |x_0 - x|.$$

Звідси слідує, що коли $x \to x_0$, то $|x_0 - x| \to 0$, а отже, $|sinx_0 - sin\ x| \to 0$.

Таким чином $\lim\limits_{x \to x_0} |sinx_0 - sin\ x| = 0$, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} sinx = sinx_0$.

Таким чином, доведено що функція $y = sinx$ – неперервна на всій своїй області визначення, її графіком є неперервна лінія, яку називають ***синусоїдою*****.**

8) *Графік функції $y = sinx$.*

Знаючи основні властивості і особливі точки функції $y = sinx$ будуємо схематично її графік (рис. 5).

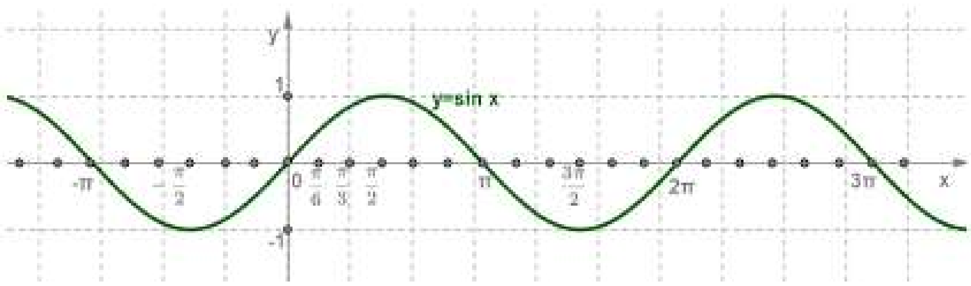


Рис. 5

Властивості і графік функції $y = cosx$

Знаючи основні властивості і особливі точки функції $y = sinx$ легко встановити властивості і побудувати графік функції $y = cosx$. Із формул зведення відомо, що $cosx = \sin(x + \frac{\pi}{2})$. Тож користуючись геометричними перетвореннями графіка функції $y = sinx$ отримує графік функції $y = cosx$ перенесенням синусоїди на вектор $\vec{n}(-\frac{\pi}{2}; 0)$ (рис. 6).

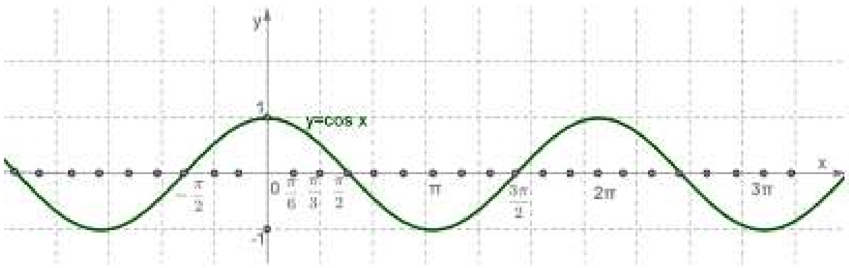


Рис. 6

Графік функції $y = cosx$ називають ***косинусоїдою.***

Зчитуємо з нього властивості функції $y = cosx$, доводити які нема потреби.

Отже, для даної функції маємо :

1. Область визначення $D(cosx) = R$, множина значень $E(cosx) = [-1; 1]$.

2) Функція парна, тобто $\cos(-x) = cosx$. Графік симетричний відносно осі $OX.$

3) Функція періодична з найменшим додатним періодом $T = 2\pi$.

4) Функція зростає на проміжках $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$, де $n \epsilon Z$, спадає на проміжках $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, де $n \epsilon Z$.

5) $cosx = 0$, якщо $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, де $n \epsilon Z$;

6) найбільше значення $cosx = 1$, якщо $x = 2\pi n$, де $n \epsilon Z$; найменше значення $cosx = -1$, якщо $x = \pi + 2\pi n$, де $n \epsilon Z$;

7) Функція неперервна на всій своїй області визначення.

КІНЕЦЬ ЛЕКЦІЇ

Домашнє завдання: учні мають вивчити теоретичний матеріал лекції і виготовити шаблон графіка функції $y = sinx$, який будуть використовувати на практичних заняттях під час розв'язування вправ на побудову графіка і встановлення властивостей складених тригонометричних функцій.

Друга шкільна лекція на тему

«Функції $\boldsymbol{y = tgx}$ та $\boldsymbol{y = ctgx}$, їх властивості і графік»

Дослідження властивостей функції $y = tgx$ та $y = ctgx$, побудову їх графіків проведемо за схожою схемою, яка була використана в попередній лекції. Скористаємося знову одиничним тригонометричним колом з нанесеними на ньому осями тангенсів та котангенсів (рис. 7).

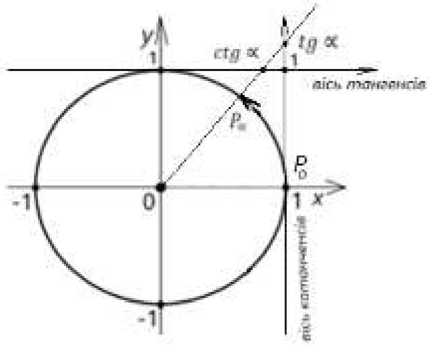


Рис. 7

Виберемо дійсне число $\propto \epsilon R$, йому буде відповідати на колі точка $P_\propto$, а їй, в свою чергу, на осях тангенсів та котангенсів числа $tg \propto$ та $ctg \propto$.

Отже, отримаємо: відповідність:

$$\propto \rightarrow P_\propto \begin{matrix} \nearrow tg \propto \\ \searrow ctg \propto \end{matrix}$$

Функцію $\propto \epsilon R \rightarrow tg \propto -$ називають тангенсом числа *x* та позначають $y = tgx$, а функцію $\propto \epsilon R \rightarrow ctg \propto -$ називають котангенсом числа *x* та позначають $y = ctgx$.

Властивості і графік функції $y = tgx$

1) *Область визначення функції* $y = tgx.$ З рисунку 7 видно, що тангенс існує для всіх дійсних чисел, крім чисел $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, де $k \epsilon Z$, бо тоді промінь $OA \parallel OY$ і не перетне вісь тангенсів. Отже, $D(tgx) = R$, крім $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, де $k \epsilon Z$. Областю значень функції буде вся множина дійсних чисел, тобто $E(tgx) = R$.

2) *Парність чи непарність функції* $y = tgx.$ За одиничним тригонометричним колом легко бачити, що якщо $\propto \epsilon D(tgx)$, то й $-\propto \epsilon D(tgx)$.

Перевіримо яку рівність задовольняють значення $tg(\propto)$ і $tg(-\propto)$.

$tg(-\propto)=\frac{\sin(-\propto)}{\cos(-\propto)} = \frac{-sim\propto}{cos\propto} = -tg \propto$.

Маємо : $tg(-\propto)=-tg \propto -$ виконується ознака непарної функції. Отже, функція $y = tgx$ – *непарна*, її графік симетричний відносно початку координат.

3) *Періодичність функції* $y = tgx.$ Якщо функція періодична, то має існувати таке число $T \neq 0$, що для всіх $x\epsilon D(tgx)$, $x + T\epsilon D(tgx)$ і виконується тотожна рівність $tg(x) = tg(x + T)$.

Визначимо з цієї рівності число *T*. Для всіх $x\epsilon D(tgx)$ має виконуватись тотожна рівність $tg(x + T) - tgx = 0$. Тобто $\frac{\sin(T)}{cos(x+T)\cdot cosx} = 0$.

Числа $\cos(x + T)$ та $\cos(x)$ не можуть дорівнювати тотожньо 0, тому маємо: $sinT = 0$. Звідки отримуємо, що $T = \pi n,\ n \epsilon Z$.

З одиничного тригонометричного кола видно, що коли $x\epsilon D(tgx)$, то і $x + n\pi \epsilon D(tgx)$. Отже, кожне з чисел множини $A = \{\pm\pi;\ \pm2\pi;\ \pm3\pi; \ldots\}$ є періодом функції $y = tgx$. Найменшим додатним періодом буде число $T_0 = \pi$. Таким чином доведено, що функція $y = tgx$ періодична, з найменшим додатним періодом $T_0 = \pi$.

4) *Проміжки зростання і спадання функції* $y = tgx.$

Розглянемо проміжок $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Виберемо два довільних значення x_2, x_1 $(x_2 > x_1)$ з цього проміжка.

Оцінимо різницю tgx_2- tgx_1. tgx_2- tgx_1=$\frac{sin(x_2-x_1)}{cosx_2\cdot cosx_1}$, числа $(x_2 - x_1)$, x_2, x_1, належать проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, тому $sin(x_2 - x_1) > 0$, $cosx_2 > 0,\ cosx_1 > 0$.

Отже, tgx_2- $tgx_1 > 0$.

Це означає, що функція $y = tgx$ на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ – зростає.

Оскільки її графік симетричний відносно початку координат, то вона буде зростаючою і на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$. На проміжку $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ $tgx > 0$, а на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$ $tgx < 0$. Тому завжди, для будь-яких x_2, x_1 $(x_2 > x_1)$ із проміжка $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ $tgx_2 > tgx_1$.

Отже, функція $y = tgx$ – зростаюча на даному проміжку. Враховуючи, що вона періодична, вона буде зростаюча на кожному із проміжків $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, де $k \epsilon Z$.

5) *Неперервність і точки розриву функції* $y = tgx$.

Виберемо довільну точку $x_0 \epsilon D(tgx)$.

Знайдемо $\lim\limits_{x \to x_0} tgx$: $\lim\limits_{x \to x_0} tgx = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{sinx}{cosx} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} sinx.}{\lim\limits_{x \to x_0} cosx} = \frac{sinx_0}{cosx_0} = tg(x_0)$.

Границя функції $y = tgx$ в точці x_0 дорівнює значенню функції в цій точці, отже, функція $y = tgx$ – неперервна в кожній точці області визначення. Для $x = \frac{\pi}{2}$ маємо:

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} tgx = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{sinx} = \frac{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} sinx.}{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} cosx} = \frac{1}{0} = \infty$ – не існує.

Функція $y = tgx$ в точці $x = \frac{\pi}{2}$ має розрив. А так, як вона періодична, то вона має розрив в кожній точці $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, де $k \epsilon Z$.

6) *Графік функції* $y = tgx$.

Знаючи властивості функції і значення для окремих значень аргументу будуємо схематичний графік функції $y = tgx$ (рис. 8). Скористаємося таблицею:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
y	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$

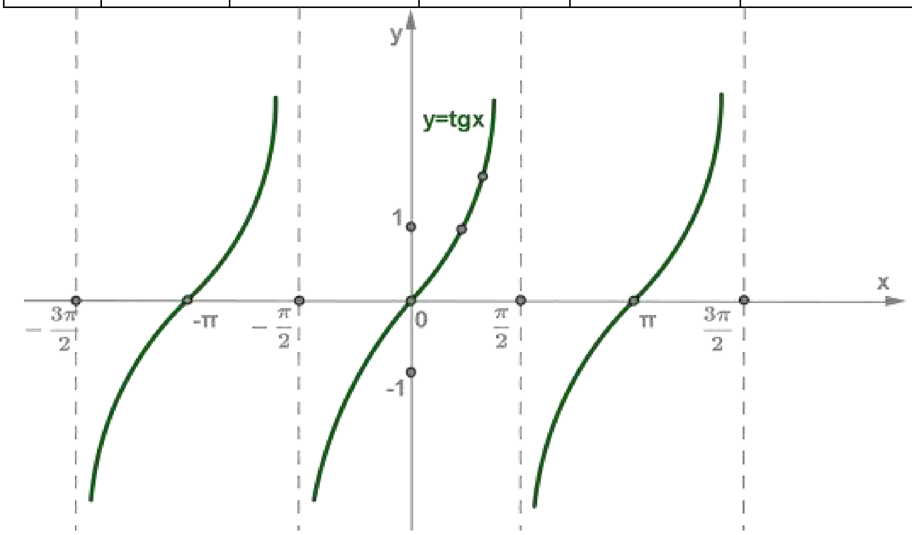


Рис. 8

Отримали графік, який називають ***тангенсоїдою***.

Властивості і графік функції $y = ctgx$

Оскільки $y = ctgx = tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -tg(x - \frac{\pi}{2})$, то графік функції $y = ctgx$ (рис. 9) одержуємо з графіка функції $y = tgx$ за допомогою відповідних геометричних перетворень.

За графіком читаємо властивості функції:

1) Область визначення функції: $D(y) = R$, $x \neq \pi n, n \in Z$.

2) Область значень функції: $E(y) = R$.

3) Функція непарна.

4) Функція періодична з найменшим додатним періодом $T = \pi$.

5) Нулями функції є точки $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, де $n \in Z$.

6) Функція спадає на кожному із проміжків $(\pi n;\ \pi + \pi n)$, $n \in Z$.

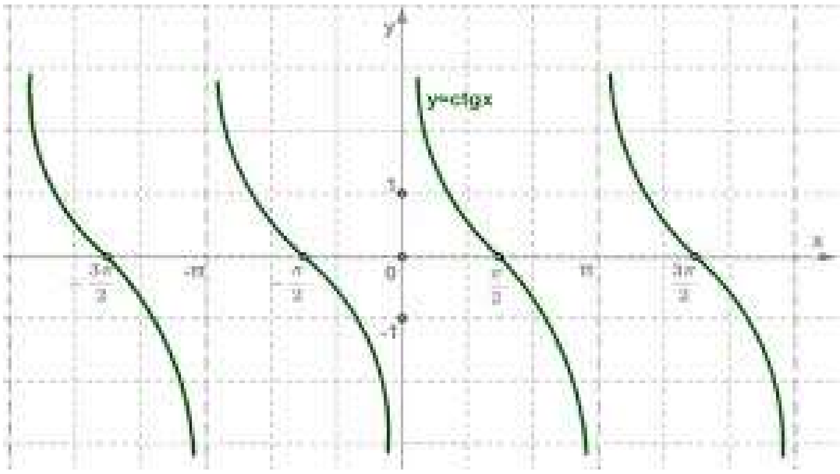


Рис. 9

Домашнє завдання: учні мають вивчити теоретичний матеріал лекції і виготовити шаблон графіка функції $y = tgx$, який будуть використовувати на практичних заняттях під час розв'язування вправ на побудову графіка і встановлення властивостей складених тригонометричних функцій.

Властивості функцій $y = sinx, y = cosx, y = tgx, y = ctgx$ рекомендуємо закріпити шляхом розв'язання тренувальних вправ, яких є вдосталь в діючих альтернативних шкільних підручниках з Алгебри і початків аналізу.

Рекомендуємо також довести, що:

1) сумою двох гармонічних коливань $y = A_1 \sin(\omega x + \varphi_1)$ та $y = A_2 \sin(\omega x + \varphi_2)$ є гармонічне коливання з тією ж частотою ω;

2) найменшим додатним періодом функції $y = \sin\ \omega x$ є число $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Важливо також застерегти учнів від поширеної помилки під час побудови графіка функції $y = f\ (ax + \propto)$ за допомогою геометричних перетворень графіка базової елементарної функції $y = f\ (x)$. Суть помилки полягає в тому, що учні часто графік функції $y = f\ (ax{+}\propto)$ будують за допомогою паралельного перенесення графіка функції $y = f\ (x)$ на вектор $\vec{n} = (-\propto; 0)$, хоча насправді, потрібно зробити перенесення на вектор $\vec{n} = \left(-\frac{\propto}{a}; 0\right)$.

Завершити вивчення властивостей названих вище елементарних функцій, як базових, рекомендуємо виконанням домашньої графічної роботи на побудову графіків складених функцій і встановлення їх властивостей.

Обернені тригонометричні функції

$y = arcsinx$, $y = arccosx$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$, їх властивості і графік

Тригонометричні функції $y = sinx, y = cosx, y = tgx, y = ctgx$ мають проміжки, на яких вони монотонно зростають, чи спадають згідно відомої теореми, на кожному з цих проміжків вони мають обернену функцію, графік якої симетричний графіку прямої функції відносно прямої $y = x$. Розглянемо їх.

Третя шкільна лекція на тему

«Обернені тригонометричні функції, їх властивості і графік»

Функція $y = arcsinx$

Означення. ***Арксинусом*** числа α, де $-1 \le a \le 1$, називається таке число $\propto$ з проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює α. Тобто запис $arcsina =\propto$ виконується за умов $\propto\ \epsilon\ \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ та $sin \propto= a$.

Оскільки функція $y = sinx$, на проміжку $x\ \epsilon\ \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ приймає кожне своє значення тільки один раз (функція зростає), то вона має на цьому проміжку обернену функцію. Нею є функція $y = arcsinx$. Функція $y = arcsinx$ та $y = sinx$ – взаємо обернені. Користуючись тим, що графіки взаємо обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$, будуємо графік функції $y = arcsinx$ (рис. 10).

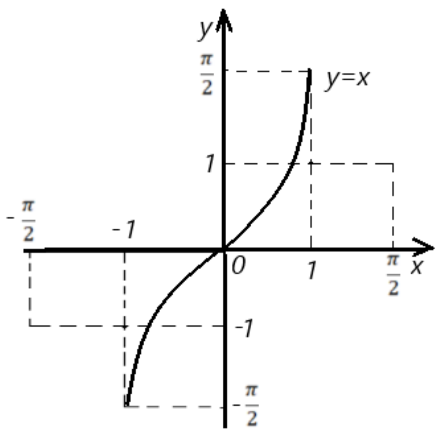


Рис. 10

Із побудованого графіка встановлюємо властивості функції $y = arcsinx$:

1. Область визначення функції $D(y) = [-1; 1]$.

2. Область значень функції $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Функція непарна, графік симетричний відносно початку координат. Звідси слідує, що $\arcsin(-x) = -arcsinx$.

4. Функція неперіодична.

5. Функція монотонно зростаюча на всій області визначення.

6. Функція неперервна.

7. Графік функції проходить через точку $O(0; 0)$. Якщо $x \epsilon [-1;\ 0)$, то $y < 0$, якщо $x \epsilon (0;\ 1]$, то $y > 0$.

Функція $y = arccosx$

Означення. ***Арккосинусом*** числа α, де $-1 \leq a \leq 1$, називається таке число $\propto$ з проміжку $[0; \pi]$, косинус якого дорівнює a. Тобто запис $\propto = a$ це рівносильний умовам: що якщо $\propto\ \epsilon\ [0;\ \pi]$, то $cos \propto = a$.

Оскільки функція $y = cosx$ спадає на проміжку $[0; \pi]$ і приймає кожне своє значення тільки один раз, то вона має на цьому проміжку обернену функцію. Нею є функція $y = arccosx$. Функція $y = arccosx$ та $y = cosx$ – взаємо обернені. Будуємо графік функції $y = arccosx$ (рис. 11).

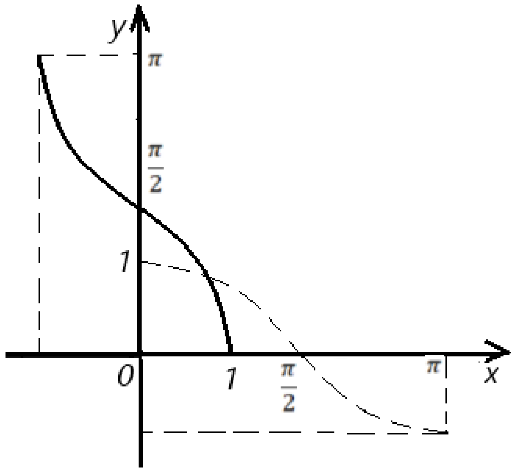


Рис. 11

Властивості функції $y = arccosx$:

1. Область визначення функції $D(y) = [-1; 1]$.

2. Область значень функції $E(y) = [0;\ \pi]$.

3. Функція індиферентна. Користуючись графіком, можна встановити рівність $\arccos(-x) = \pi - arccosx$.

4. Функція неперіодична.

5. Функція монотонно спадна на всій області визначення.

6. $(1;0)$; $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ – точки перетину графіка з осями Ox та Oy відповідно.

7. Функція неперервна.

Функція $y = arctgx$

Означення. ***Арктангенсом*** числа a, де $a\,\epsilon R$, називається таке число $\propto$ з проміжку $(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2})$, тангенс якого дорівнює α. Тобто запис $arctg \propto = a$ це рівносильний умовам: якщо $a\ \epsilon\ (-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2})$, то $tg \propto = a$.

Оскільки на проміжку $(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2})$ функція $y = tgx$ зростає, тобто кожному числу *у* відповідає тільки одне число *х*, то існує обернена функція $y = arctgx$.

Функції $y = arctgx$ та $y = tgx$ – взаємо обернені.

Аналогічно до попередніх ситуацій будуємо графік функції $y = arctgx$ (рис. 12).

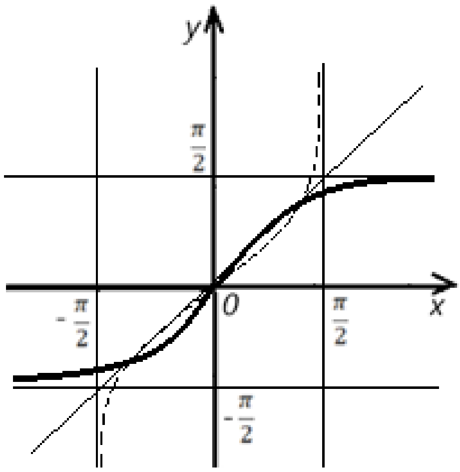


Рис. 12

Властивості функції $y = arctgx$:

1. Область визначення функції $D(y) = R$.

2. Область значень функції $E(y) = (-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2})$.

3. Функція непарна, тобто $\mathrm{arc}tg(-x) = -arctgx$.

4. Функція неперіодична.

5. Функція, монотонно зростає на всій області визначення.

6. Нулі функції $y = 0$, якщо $x = 0$.

7. Функція неперервна.

Функція $y = arcctgx$

Означення. ***Арккотангенсом*** числа a, де $a\ \epsilon\ R$, називається таке число $\propto$ з проміжку $(0;\pi)$, котангенс якого дорівнює a. Тобто запис $arcctg \propto = a$, рівносильний умові: якщо $a\ \epsilon\ [0;\ \pi]$, то $ctg \propto = a$.

Оскільки на проміжку від $(0;\pi)$ функція $y = ctgx$ спадає, тобто кожному числу y відповідає тільки один кут x, то існує обернена функція $y = arcctgx$. Функції $y = arctgx$ та $y = arcctgx$ – взаємо обернені. Графіком функції $y = arcctgx$ служить гілка кривої (рис. 13), отримана із графіка функції $y = ctgx$.

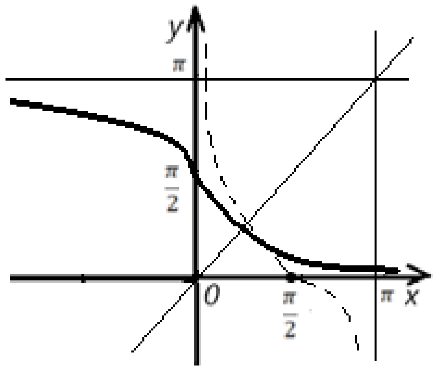


Рис. 13

Властивості функції $y = arcctgx$:

1. Область визначення функції $D(y) = R$.
2. Область значень функції $E(y) = (0;\pi)$.
3. Функція індиферентна. Користуючись графіком, можна встановити рівність: $\mathrm{arc}ctg(-x) = \pi - arcctgx$ (доведіть самостійно).
4. Функція неперіодична.
5. Функція, монотонно спадна.
6. Точка перетину графіка функції з віссю Oy – точка $(0;\frac{\pi}{2})$.
7. Функція неперервна.

КІНЕЦЬ ЛЕКЦІЇ

4. Тригонометричні рівняння (нерівності) і способи їх розв'язання

Вивчення теми рекомендуємо розпочати з актуалізації поняття рівняння (нерівності) з однією змінною. Учням відомо, що рівняння (нерівність) це задача, в умові якої задано:

а) дві аналітично задані функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$, які розглядаються на множині $D = D(f_1(x)) \cap D(f_2(x))$;

б) рівність (нерівність) $f_1(x) = f_2(x)$ ($f_1(x) < f_2(x)$ або $f_1(x) > f_2(x)$).

Вимагається знайти такі значення аргумента $x \epsilon D$, при яких виконується вказана рівність (вказана нерівність).

Виходячи з такого визначення слід повідомити, що коли $f_1(x)$ і $f_2(x)$ тригонометричні функції, то такі рівняння (нерівність) ***називають тригонометричними***.

Для таких рівнянь чинними є всі, доведені раніше, теореми про рівносильні рівняння (нерівності) та наслідки з них. Розв'язати рівняння (нерівність) означає знайти множину його (її) розв'язків $D_r \subset D$.

Загальна методична схема розв'язання рівнянь (нерівностей) учням відома, коли вони вчилися розв'язувати ірраціональні рівняння (нерівність). Тому її варто відтворити.

Суть названої схеми наступна:

1) слід виділити найпростіші рівняння (нерівності) та встановити формули відшукання множини їх розв'язків;
2) вивчити основні способи розв'язання складніших рівнянь (нерівностей) методом евристичної редукції.

Далі перейти з учнями до розгляду найпростіших тригонометричних рівнянь (нерівностей) і виведення формул для відшукання множини розв'язків. У діючих альтернативних шкільних підручниках таке виведення здійснюється або за допомогою одиничного тригонометричного кола, або за допомогою графіків тригонометричних функцій (*рекомендуємо здійснити самостійний огляд таких виведень*).

Найпростішими тригонометричними рівняннями (нерівностями) є:

а) $sinx = a$, $(sinx > a,\ sinx < a)$; в) $tgx = a$, $(tgx > a,\ tgx < a)$;

б) $cosx = a$, $(cosx > a,\ cosx < a)$; г) $ctgx = a$, $(ctgx > a,\ ctgx < a)$.

Основні способи розв'язання складніших тригонометричних рівнянь подані на схемі 1. Рекомендуємо розглянути їх та вставити в схему номери вправ за одним із діючих альтернативних підручників.

Завдання 1.

1. Заповнити сектори внутрішнього восьмикутника номерами вправ з шкільного діючого підручника, які розв'язуються вказаним способом;

2. Ознайомити учнів з даною схемою, як орієнтовною основою дій під час самостійного розв'язання складніших тригонометричних рівнянь (підвищеного та поглибленого рівнів складностями).

Завдання 2.

Побудуйте схожу графічну схему для тригонометричних нерівностей і способів їх розв'язання, орієнтуючись на один із діючих альтернативних шкільних підручників з алгебри і початків аналізу.

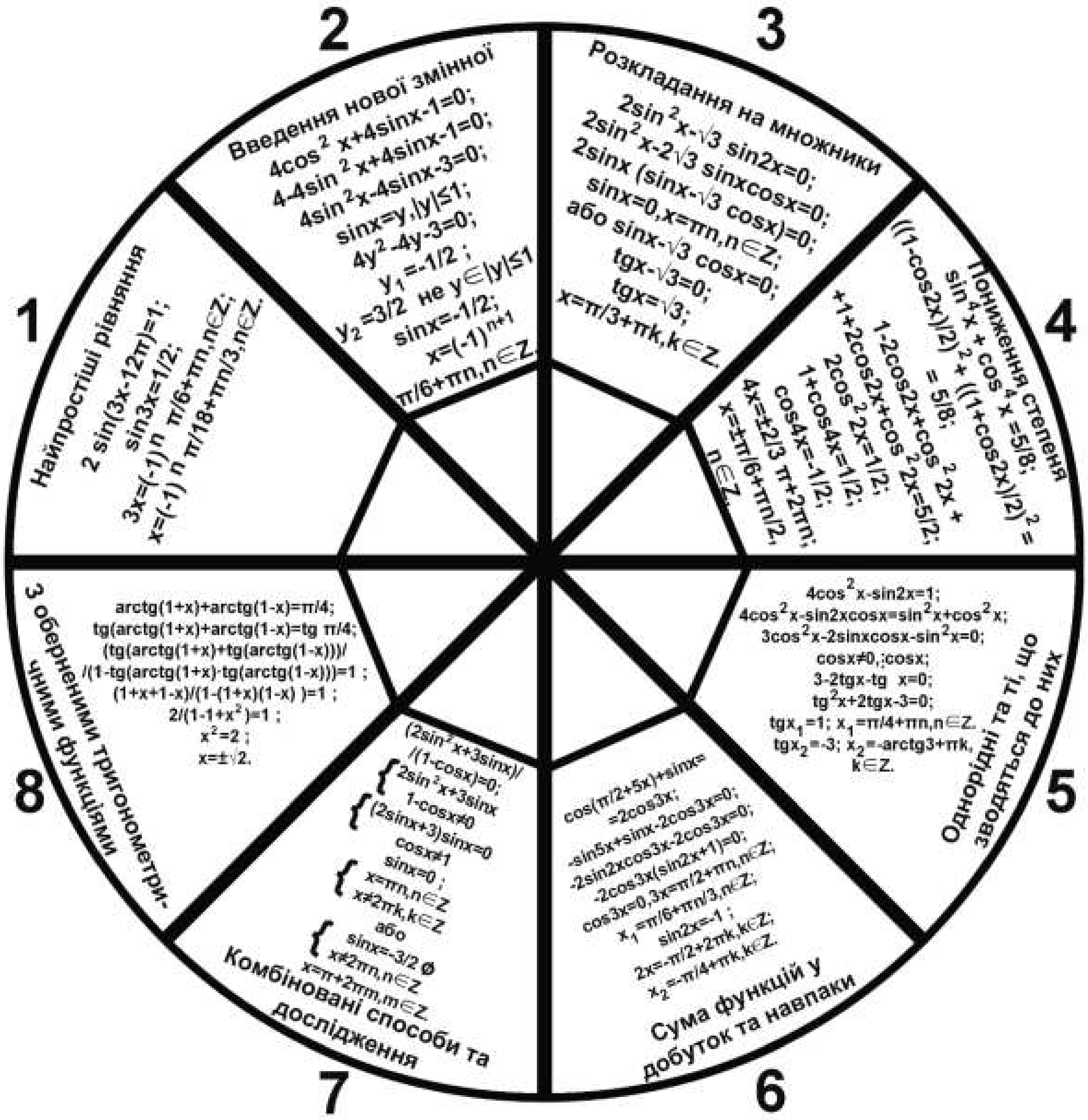


Схема 1. Октагон способів розв’язання тригонометричних рівнянь

П І Д С У М О К

Тригонометричні вирази, тригонометричні функції, їх властивості і графіки та тригонометричні рівняння і нерівності доцільно вивчати як три самостійні, логічно завершені теми. Саме в такій послідовності. Тоді знання про тригонометричні вирази стають основою до вивчення функцій, а знання, почерпнуті з обох перших тем стають гарною основою для вивчення тригонометричних рівнянь та нерівностей.

Основною метою вивчення першої теми «Тригонометричні вирази і їх перетворення» має бути формування в учнів поняття тригонометричного виразу, вироблення в учнів міцних умінь та навичок перетворювати такі вирази, доводити їх тотожну рівність, обчислювати числове значення для заданих числових значень змінних.

Основною метою вивчення другої теми «Тригонометричні функції, їх властивості і графіки» полягає в тому, щоб учні вивчили основні властивості тригонометричних та обернених тригонометричних функцій, навчились впевнено схематично будувати їх графіки, в тому числі і складених тригонометричних функцій шляхом геометричних перетворень графіків основних функцій.

Основною метою вивчення третьої теми «Тригонометричні рівняння і нерівності» навчити учнів впевнено розв'язувати найпростіші тригонометричні рівняння (нерівності), виробити в них вміння і навички розв'язування складніших рівнянь (нерівностей) методом евристичної редукції.

МЕТОДИЧНІ ЗАДАЧІ
для самостійного розв'язування

1. Проаналізуйте один із діючих альтернативних підручників з алгебри і початків аналізу з теми «Тригонометричні рівняння і нерівності», з'ясуйте, які способи розв'язання складніших тригонометричних рівнянь (нерівностей) пропонують автори такого видання.
2. Складіть добірку прикладних задач у розв'язуванні яких, в якості засобів, використовуються тригонометричні вирази, функції, рівняння і нерівності.
3. З'ясуйте в чому полягають особливості розв'язання систем тригонометричних рівнянь, представлення множини їх розв'язків.
4. Розв'яжіть вправи:

   а) Спростіть вираз $\left(\frac{1}{cos\propto}+\frac{1}{cos3\propto}\right)\cdot(cos\propto+cos5\propto)-2,$
   та обчисліть його значення якщо $\propto=-\frac{\pi}{12}$.

   б) Довести, що $\sqrt{0,5-0,5\sqrt{0,5+0,5cos\propto}}=cos\frac{\propto}{4}$, де $\pi<\propto<2\pi$.

   в) Побудуйте за допомогою геометричних перетворень графіка функції $y=sinx$ графік функції $y=\left|\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1\right|$.

   г) Розв'яжіть рівняння $sin2x=cos^4\frac{x}{2}-sin^4\frac{x}{2}$.

   д) Знайдіть всі значення *x* та *y*, що задовольняють рівняння
   $12sinx+5cosx=2y^2-8y+21.$

Мабуть, жодна інша галузь математики не посідає такого проміжного становища … як тригонометрія
Й. Ф. Гербарт

Л Е К Ц І Я 2.10

ТЕМА ***Похідна та її застосування до розв’язування задач***

П Л А Н

1.	***Місце теми в програмі, зміст навчального матеріалу, вимоги до підготовки учнів, орієнтовне календарне планування навчального процесу***
2.	***Методика формування поняття похідної. Правила диференціювання. Похідна складеної функції, оберненої функції. Таблиця похідних***
3.	***Застосування похідної до дослідження властивостей функції і побудови її графіка***
4.	***Похідна як математична модель під час розв’язування практичних та прикладних задач***

К О Н С П Е К Т   Л Е К Ц І Ї

1. Місце теми в програмі, зміст навчального матеріалу, вимоги до підготовки учнів, орієнтовне календарне планування навчального процесу

На кінець 50-х років минулого століття стала відчутною проблема оновлення змісту математичної освіти середніх закладів освіти. Цього вимагав технічний прогрес, зміст підготовки фахівців у вишах країни.

Тому в середині 60-х років в СССР в зміст шкільної математичної освіти були включені елементи диференціального та інтегрального числення. На зміну підручнику А. П. Кисельова «Алгебра» (*Учпед. 1963 р.*) у 1964 році було запропоновано навчальний посібник для учнів 10 і 11 класів середніх шкіл «Алгебра і елементарні функції» (*Автори: Є.С. Кочетков і К. С. Кочеткова*), який містив такі нові і цікаві теми з вищої математики як «Функції і їх границі», «Похідна та її застосування до дослідження функцій». У підручнику А.П. Кисельова «Алгебра» таких тем не було. Оскільки в 1966 році замість 11-річної середньої школи почала знову діяти 10-річна середня школа, то посібник Є. С. Кочеткова і К. С. Кочеткової був розподілений відповідно на два : «Алгебра і елементарні функції» ч. І для 9 класу і ч. ІІ для 10 класу. Він витримав кілька видань і за ним працювала школа до початку 80-х років. Тема «Похідна та її застосування до дослідження функції» вивчалась як окремий розділ дисципліни «Алгебра і елементарні функції» і слідувала органічно за темою «Функції і їх графіки».

Це був великий новий розділ програми з математики, опрацьовувати який автори пропонували в такій послідовності.

Розділ Х. Похідна та її застосування до дослідження функції

§ 217. Рівномірний і змінний рух по прямій. Швидкість і середня швидкість руху.

§ 218. Закон руху. Миттєва швидкість руху.

§ 219. Похідна функції.

§ 220. Диференційовні функції.

§ 221. Дотична до кривої.

§ 222. Геометричне тлумачення похідної.

§ 223. Винесення сталого множника за знак похідної.

§ 224. Похідна суми функції.

§ 225. Диференціювання добутку двох функцій.

§ 226. Похідна дробу.

§ 227. Похідна сталої функції.

§ 228. Похідна многочлена.

§ 229. Диференціювання тригонометричних функцій.

§ 230. Диференціювання функції $y = f(ax + b)$.

§ 231. Поняття про другу похідну. Похідні вищих порядків.

§ 232. Вираження коефіцієнтів многочлена через значення його похідних.

§ 233. Формула бінома Ньютона.

§ 234. Про одну властивість біноміальних коефіцієнтів.

§ 235. Застосування формули бінома Ньютона до наближених обчислень.

§ 236. Застосування похідної до знаходження ділянок зростання і спадання функції.

§ 237. Застосування похідної до знаходження локальних екстремумів.

§ 238. Найменше і найбільше значення функції в заданому інтервалі.

§ 239. Використання похідних для дослідження диференційовних функцій і побудови їх графіків.

§ 240. Застосування похідної до графічного розв'язування рівнянь.

§ 241. Історичні зауваження.

Як бачимо, похідна вивчалась десятикласниками ґрунтовно з широким її застосуванням до розв'язування задач на дослідження функцій. Рівень математичної підготовки задавався досить високим і дивного в цьому нічого не було, оскільки середня освіта була не обов'язковою. Вона покликана була готувати випускників до вступу у вищі навчальні заклади.

З переходом школи на загальну обов'язкову середню освіту в середині 70-х років, введенням в шкільний курс математики програми, розробленої під керівництвом академіка А. М. Колмогорова та його підручника «Алгебра та початки аналізу» (*Навчальний посібник для 9 і 10 класів середньої школи М.: «Просвещение», 1980* р.), рівень підготовки і зміст освіти з теми «Похідна» дещо змінився. По-перше, тема не стала подаватись як цілісна і була розосереджена на 9 і 10 класи. Так дев'ятикласники почали вивчати Розділ І. «Функція», який містив § 1 «Дійсні числа», § 2. Границя послідовності, § 3. Границя і неперервність функції; Розділ ІІ. Похідна та її застосування, складовою частиною якого стали § 4. Похідна, § 5. Застосування похідної до наближених обчислень, геометрії, і фізики, § 6. Застосування похідної для дослідження функцій. Потім продовжувалася ця сюжетна лінія вже у 10 класі, в Розділі ІІІ. Тригонометричні функції. § 10. Похідні тригонометричних функцій. У 10 класі, в Розділі V. Показникова, логарифмічна і степенева функції. В § 16 вивчались похідна показникові й логарифмічної функцій, а в § 17 – похідна степеневої функції.

Зокрема, розділ VІ. «Похідна та її застосування», автори посібника пропонували вивчати в такій послідовності:

§ 4. Похідна

16. Зростання та спадання функцій.
17. Прирости функції.
18. Означення похідної.
19. Правила обчислення похідних.
20. Складена функція.
21. Похідна складеної функції.

§ 5. Застосування похідної до наближених обчислень, геометрії і фізики

22. Головна частина приросту функції.
23. Дотична до графіка функції.
24. Швидкість і прискорення.

§ 6. Застосування похідної до дослідження функції

25. Достатня умова зростання і спадання функції.
26. Критичні точки функції, її максимуми та мінімуми.
27. Схема дослідження функцій.
28. Найбільше і найменше значення функцій.
29. Відомості з історії.

Слід відзначити, що названа тема йшла після вивчення поняття «границя функції» і тому поняття похідної логічно витікало з попереднього, хоча й тут були певні труднощі. Така схема вивчення теми «Похідна і її застосування» протривала до 1986 року, коли на зміну діючим посібнику і програмі прийшов новий посібник «Алгебра і початки аналізу». Навчальний посібник для 9 і 10 класів середньої школи. (*За ред. А.Н. Колмогорова. – М.: «Просвещение», 1986 р.*) та удосконалена програма з математики для середньої школи. За цими посібниками і програмою середня школа працювала до 90-х років минулого століття. З проголошенням незалежності, Україна, як самостійна держава, сама почала визначати і піклуватись математичною освітою української молоді. Зрозуміло, що накопичений значний досвід вивчення елементів диференціального та інтегрального числення був покладений в основу створення нових навчальних програм і підручників.

На сьогодні тема «Похідна і її застосування» вивчається за програмою профільного рівня в 10 класі і частково в 11 класі. Зміст теми 10 класу, навчальні досягнення учнів подано в таблиці 1 «Похідна та її застосування» (10 клас).

Таблиця 1

Зміст навчального матеріалу	***Навчальні досягнення учнів***
Тема 5. Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування (50 год) *Границя послідовності. Основні теореми про границі послідовностей.* *Границя функції в точці.* *Основні теореми про границі функції в точці.* *Неперервність функції в точці і на проміжку. Властивості неперервних функцій.* *Точки розриву функції.* *Поняття границі функції на нескінченності. Нескінченна границя функції.* *Вертикальні та горизонтальні асимптоти графіка функції.* *[Чудові границі.]* Задачі, які приводять до поняття похідної. Похідна функції, її геометричний і фізичний зміст. *Рівняння дотичної до графіка функції.* Правила диференціювання: похідна суми, добутку і частки функцій. *Складена функція. Похідна складеної функції.* *Похідна степеневої та тригонометричних функцій.* Ознаки сталості, зростання й спадання функції. Екстремуми функції. Найбільше і найменше значення функції на проміжку. *Застосування похідної для розв'язування рівнянь та доведення нерівностей.* *Друга похідна. Поняття опуклості функції. Точки перегину.* *Знаходження проміжків опуклості функції та точок її перегину.* *Застосування першої та другої похідних до дослідження функцій та побудови їх графіків. Асимптоти графіка функції.* Застосування похідної для розв'язування задач, зокрема прикладного змісту.	*Формулює* означення границі послідовності функції в точці; неперервності функції. *Формулює* основні властивості границі функції та *використовує* їх до знаходження границь заданих функцій. *Пояснює* геометричний і фізичний зміст похідної. *Формулює* означення похідної функції в точці, правила диференціювання, достатні умови зростання і спадання функції, необхідні й достатні умови екстремуму функції. *Знаходить* кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції в даній точці. *Знаходить* похідні функцій. *Застосовує* похідну для знаходження проміжків монотонності і екстремумів функції. *Знаходить* найбільше і найменше значення функції. *Досліджує* функції за допомогою похідної та будує графіки функцій. *Розв'язує* прикладні задачі на знаходження найбільших і найменших значень реальних величин. *Застосовує* результати дослідження функції за допомогою похідної до розв'язування рівнянь і нерівностей та до доведення нерівностей. *Описує* поняття опуклості функції та точок перегину. *Застосовує* другу похідну для знаходження проміжків опуклості функції та точок її перегину. *Досліджує* функції за допомогою першої та другої похідних і використовує одержані результати для побудови графіків функцій.

У 11 класі учні з поняттям похідної зустрічаються знову, під час вивчення показникові, логарифмічної та степеневої функції з дійсним показником. За обсягом навчального матеріалу і часом, відведеним на її вивчення, тема велика. Оскільки, нами виокремлено з неї, як окрему підтему «Границя і неперервність функції. Основні теореми», то пропонуємо в 10 класі тему «Похідна та її застосування», виходячи з дидактичної доцільності розділити на три самостійні, логічно завершені теми:

1) «Похідна».
2) «Застосування першої та другої похідної до дослідження функцій».
3) «Застосування похідної до розв’язування математичних і прикладних задач.

Зміст навчального матеріалу, вимоги до підготовки учнів, календарне планування навчального процесу для кожної з них подано в таблицях № 2, № 3, № 4.

Тема 5.1. Похідна (12 год)

Основна мета вивчення: сформувати в учнів поняття похідної як математичної моделі, яка описує реальні процеси і явища. Навчити учнів диференціювати елементарні функції за правилами диференціювання.

Таблиця 2

Зміст теми	***Вимоги до підготовки учнів***
Задачі, які приводять до поняття похідної. Похідна функції, її геометричний і фізичний зміст. Рівняння дотичної до графіка функції. Правила диференціювання: похідна суми, добутку і частки функцій. Складена функція. Похідна складеної функції. Похідна оберненої функції. Похідні степеневої та тригонометричних функцій	Учень/учениця: Знає: - які задачі приводять до поняття похідної, - означення похідної в точці, похідної функції, - правила диференціювання, - правило знаходження похідної складеної та оберненої функцій; Вміє: - диференціювати елементарні функції, користуватись таблицею похідних і правилами диференціювання; Пояснює: - зв’язок між диференційовністю функції з неперервністю.

Таблиця 3

Орієнтовне календарне планування вивчення теми «Похідна»

№	Теми занять, види роботи	К-ть год.	Дати	Примітки
1.	Задачі, які приводять до поняття похідної. Похідна функції в точці. Похідна функції: алгоритм відшукання похідної.	1		
2.	Основні елементарні функції. Похідні елементарних функцій. Таблиця похідних.	2		
3.	Правила диференціювання. Розв’язування вправ. С.Р.-1.	2		
4.	Похідна складеної функції. Розв’язування вправ. С.Р.-2.	2		
5.	Похідна оберненої функції. Розв’язування вправ. С.Р.-3.	2		
6.	Друга похідна, похідні вищих порядків. Фізичний зміст першої і другої похідної. Геометричний зміст похідних.	1		
7.	Похідна і неперервність функції. Розв’язування вправ. С.Р.-4.	1		
8.	Контрольна робота.	1		
	Всього:	12		

***)Зауважимо,** що календарне планування орієнтовне, його вміст може змінюватися, залежно від того яку форму навчання обрано; поурочне вивчення теми чи лекційно-практична форма навчання.

Тема 5.2 Застосування першої та другої похідної до дослідження функції (20 год)

***Основна мета вивчення*:** вивчити основні властивості функцій: - зростання, спадання, сталості, випуклості, екстремуми; - ознаки, за якими встановлюються вказані властивості за допомогою похідної. Навчити досліджувати функцію за допомогою похідної і схематично будувати її графіки.

Таблиця 4

Зміст теми	***Вимоги до підготовки учнів***
Ознака сталості функції. Достатні умови зростання і спадання функції. Екстремуми функції. Найбільше і найменше значення функції на проміжку. Друга похідна. Поняття опуклості функції. Точки перегину. Знаходження проміжків опуклості функції та точок її перегину. Застосування першої та другої похідних до дослідження функцій і побудови їх графіків. Асимптоти графіка функції.	Учень/учениця: *Знає:* означення зростання, сталості, спадання, екстремуми, вгнутості, точки перегину функції; *Вміє:* знаходити за допомогою похідної проміжки зростання, спадання, опуклості, екстремуми, точки перегину функції, найбільше і найменше значення функції на проміжку; *Досліджує і будує* (схематично) графіки елементарних функцій за допомогою першої і другої похідної.

Таблиця 5

Орієнтовне календарне планування вивчення теми: «Застосування першої та другої похідної до дослідження функції»

№	Теми занять, види роботи	К-ть годин	Дата	Примітки
1.	Зростання і спадання функції на проміжку. Ознаки зростання і спадання диференційовної функції на проміжку. С.Р.-1.	3		
2.	Екстремуми функції. Теорема Ролля, теорема Лагранжа. Правила знаходження екстремумів функції на проміжку. Ознака сталості функції. С.Р.-2	4		
3.	Найбільше і найменше значення диференційовної на проміжку функції. Алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значення. С.Р.-3	2		
4.	Випуклість і вгнутість функції на проміжку. Точки перегину. Ознаки знаходження проміжків випуклості і вгнутості, точок перегину диференційовної функції. С.Р.-4	3		
5.	Похилі асимптоти функції і їх знаходження за допомогою похідної.	2		
6.	Дослідження і побудова графіка диференційовної функції за допомогою першої і другої похідної. С.Р.-5	4		
7.	Контрольна робота.	1		
8.	Аналіз контрольної робота. Робота над помилками.	1		
9.	Підсумок за тему.	1		
	Всього:	20		

Тема 5.3. Застосування похідної до розв'язування математичних і прикладних задач (10 год)

Основна мета вивчення: навчити застосовувати похідну як математичну модель до розв'язування математичних і прикладних задач.

Таблиця 6

Зміст теми	*Вимоги до підготовки учнів*
Застосування похідної для розв'язування рівнянь та доведення нерівностей. Застосування похідної до розв'язування задач, зокрема прикладного змісту.	Учень/учениця: *Усвідомлює,* що похідна це математична модель, за допомогою якої розв'язуються практичні та прикладні задачі; *Вміє застосовувати* похідну для: • обчислення наближених значень функції; • доведення тотожностей та нерівностей; • прикладних задач фізичного, економічного та іншого змісту.

Таблиця 7

Орієнтовне календарне планування вивчення теми «Застосування похідної до розв'язування математичних і прикладних задач»

№	Тема занять, види роботи	К-ть годин	Дата	Примітки
1.	Знаходження наближеного значення функції в точці за допомогою похідної.	1		
2.	Застосування похідної до доведення тотожностей.	1		
3.	Застосування похідної до доведення нерівностей. С.Р.-1	1		
4.	Розв'язування прикладних задач на знаходження найбільшого та найменшого значення за допомогою похідної. С.Р.-2	2		
5.	Розв'язування задач природничого змісту на застосування похідної. С.Р.-3	2		
6.	Розв'язування прикладних задач економічного та фінансового змісту за допомогою похідної. С.Р.-4	2		
7.	Контрольна робота	1		
	Всього:	10		

2. Методика формування поняття похідної. Правила диференціювання. Похідна складеної функції, оберненої функції. Таблиця похідних

2.1. Поняття похідної

Формування поняття похідної функції $y = f(x)$ в точці x_0 рекомендуємо здійснити методом доцільних задач. Вони можуть бути різні за змістом.

Пропонуємо розглянути кілька з них.

Задача № 1 (*про миттєву швидкість*). Із курсу фізики учням відомо, що *миттєвою швидкістю руху тіла* називають середню швидкість, виміряну за нескінченно малий проміжок часу. Таким чином, миттєва швидкість трактується як швидкість руху тіла в даний момент часу. Алгоритм її визначення учням відомий. Якщо тіло рухається за законом $S = S(t)$, де S-відстань, яку проходить тіло за час t, то миттєву швидкість в момент часу t_0 визначають наступним чином. Надають часу t_0 приріст Δt.

До моменту часу t_0 пройдений шлях дорівнює $S_0 = S(t_0)$, а до моменту часу $(t_0 + \Delta t)$ шлях $S_0 + \Delta S = S(t_0 + \Delta t)$ (рис. 1). Тоді за проміжок часу Δt середня швидкість буде $V_{\text{сер.}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$.

Чим менше Δt, тим точніше буде обчислена середня швидкість, яка характеризує рух точки в момент t_0. Тому під швидкістю тіла в момент часу t_0 (миттєвою швидкістю) звичайно розуміють границю середньої швидкості за проміжок часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$, якщо $\Delta t \to 0$, тобто

$$V_{\text{мит.}} = \lim_{\Delta t \to 0} V_{\text{сер.}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \qquad (1)$$

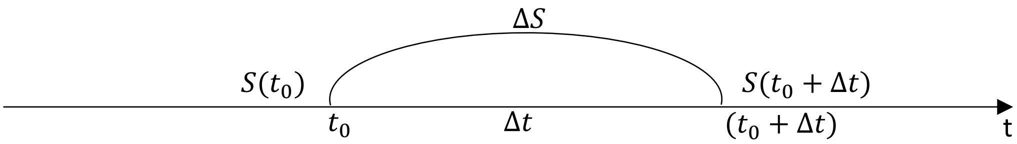


Рис. 1

Задача № 2 (*про продуктивність праці*). Нехай функція $u = u(t)$ виражає кількість виробленої продукції U протягом часу t і необхідно знайти продуктивність праці в момент часу t_0. За період часу від t_0 до $t = t_0 + \Delta t$ кількість виробленої продукції змінюється від значення $u = u(t_0)$до значення $u = u(t) = u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$; тоді середня продуктивність праці за цей період часу $\Pi_{\text{сер.}} = \frac{\Delta U}{\Delta t}$. Цілком природньо, що продуктивність праці в момент часу t_0 можна визначити як граничне значення середньої продуктивності за період часу від t_0 до $t = t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \to 0$, тобто

$$\Pi_{\text{мит.}} = \lim_{\Delta t \to 0} \Pi_{\text{сер.}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta t} \qquad (2)$$

Задача № 3 (*залежність попиту на товар від ціни на нього*). Нехай функція $D = f(P)$ виражає залежність попиту на товар *D* від ціни на нього *P*. Тоді товарообіг в грошовому виразі дорівнює добутку реалізованого попиту на ціну товару $Z = P \cdot f(P)$. Ставиться задача: з якою швидкістю змінюється товарообіг при зміні ціни. За проміжок зміни ціни від P_0 до $P = P_0 + \Delta P$, товарообіг змінюється від значення $Z_0 = P_0 \cdot f(P_0)$ до $Z = P \cdot f(P)$, тобто $\Delta Z = Z - Z_0$. Тоді можна знайти середнє значення товарообігу $Z_{\text{сер.}} = \frac{\Delta Z}{\Delta P}$.

Природньо, що зміну товарообігу в момент ціни P_0 можна визначити як граничне значення

$$Z_{\text{сер.}} \text{ при } \Delta P \to 0, \text{тобто } Z_{\text{мит.}} = \lim_{\Delta P \to 0} \frac{\Delta Z}{\Delta P} \qquad (3)$$

Після розгляду задач 1-3 учні мають помітити, що їх розв'язання зводиться до визначення особливої границі.

Тому є потреба дослідити цю границю (як математичну модель) для заданої функції $y = f(x)$. Узагальнюючи розглянути приклади підводимо учнів до формулювання означення похідної в заданій точці.

Означення похідної

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в області *D(f).* Зафіксуємо довільну точку $x_0 \in D(f)$. Тоді різницю $\Delta x = x - x_0$ називають **приростом аргументу** функції, а різницю $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ – **приріст функції**. Частку $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ називають середнє значення функції $y = f(x)$ на проміжку $(x_0; x)$. Тоді $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ – (якщо існує) буде називатися швидкість зміни функції в заданій точці x_0 , її називають <u>похідна функції</u> в точці x_0.

Означення. *Границя відношення приросту функції в точці x_0 до приросту аргументу в цій точці, якщо приріст аргументу Δx прямує до нуля, називають **похідною функції** в точці x_0 і позначають* $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

На письмі існують різні позначення похідної функції в точці: $y', f', \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}$. Іноді в позначенні похідної використовують індекс, який вказує по якій змінній взята похідна, наприклад, y'_x, f'_t.

Знаходження похідної функції називається **диференціюванням** цієї функції. **Якщо функція в точці х має скінченну похідну, то така функція називається диференційовною в цій точці**. Функція, диференційовна в усіх точках на проміжку $[a; b]$, називається **диференційовною на цьому проміжку**.

Якщо повернутись до наведених вище прикладів, то із задачі про швидкість слідує **механічний зміст похідної**: похідна шляху по часу $S'(t_0)$ є миттєва швидкість в даний момент часу.

Із задачі про продуктивність праці слідує, що **похідна обсягу виробленої продукції по часу $u'(t_0)$ є продуктивність праці в момент часу t_0**.

Із задачі про залежність попиту від ціни слідує, що **похідна товарообігу в грошовому вимірі по ціні дає швидкість зміни товарообігу при ціні P_0**.

Підсумовуючи все сказане, можна сказати, що **похідна – це швидкість зміни функції для заданого значення аргументу**.

Викладений вище матеріал пропонуємо подати учням у формі шкільної лекції. А на закінчення лекції проілюструвати їм (заготовлені раніше, як презентації) розв'язання кількох прикладних задач, розв'язання яких здійснюється з використанням поняття похідної (відбувається так зване первинне застосування). Приклади таких задач та їх розв'язки приведені нижче. Такі приклади гарно мотивують учнів до вивчення похідної. Їх розв'язувати не обов'язково, але проілюструвати розв'язки корисно.

Приклад 1. Вільне падіння тіл відбувається за законом $S(t) = \frac{qt^2}{2}$, де q – прискорення вільного падіння (9,8 $\text{м}/\text{с}^2$). Яка швидкість тіла буде, якщо $t_0 = 10$ с.

Нехай $\Delta t = t - t_0$.

Тоді $\Delta S = S(t) - S(t_0) = \frac{qt^2}{2} - \frac{qt_0^2}{2} = \frac{q(t^2 - t_0^2)}{2}$.

Тоді $V_{\text{сер.}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{q(t^2 - t_0^2)}{2(t - t_0)} = \frac{Q(t - t_0)(q + t_0)}{2(t - t_0)} = \frac{q(t + t_0)}{2}$.

Отже, $V_{\text{мит.}} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim\limits_{t \to t_0} \frac{q(t + t_0)}{2} = \frac{Q(t_0 + t_0)}{2} = qt_0$.

Тому якщо $t_0 = 10$ с, то $V_{\text{мит.}} = 98\ \text{м}/\text{с}$.

Відповідь: $V_{\text{мит.}} = 98\ \text{м}/\text{с}$.

Приклад 2. Об'єм продукції U, виробленої бригадою робітників, може бути описаним рівнянням $u = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50$ (одиниць), $1 \le t \le 8$, де t – час в годинах. Обчислити продуктивності праці, швидкість її зміни через 1 год. після роботи і за 1 год. до закінчення.

Зафіксуємо довільне t_0 та розглянемо проміжок часу $\Delta t = t - t_0$. Тоді:

$$\Delta U = \left(-\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50\right) - \left(-\frac{5}{6}t_0^3 + \frac{15}{2}t_0^2 + 100t_0 + 50\right)$$
$$= -\frac{5}{6}(t^3 - t_0^3) + \frac{15}{2}(t^2 - t_0^2) + 100(t - t_0)$$

Тому

$$\Pi_{\text{сер}} = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{-\frac{5}{6}(t - t_0)(t^2 + tt_0 + t_0^2) + \frac{15}{2}(t - t_0)(t + t_0) + 100(t - t_0)}{t - t_0} = -\frac{5}{6}(t^2 + tt_0 + t_0^2) + \frac{15}{2}(t + t_0) + 100$$

Отже,

$\Pi_{\text{мит.}} = \lim\limits_{t \to t_0}(-\frac{5}{6}(t^2 + t \cdot t_0 + t_0^2) + \frac{15}{2}(t + t_0) + 100) = -\frac{5}{6} \cdot 3t_0^2 + \frac{15}{2} \cdot 2t_0 + 100 = -\frac{5}{2}t_0^2 + 15t_0 + 100$.

Через 1 год після початку $t_0 = 1$, тому $\Pi(1) = -\frac{5}{2} + 15 + 100 = 112{,}5$ (одиниць), а за одну годину до закінчення $t_0 = 8 - 1 = 7$. П(7)=82,5 (одиниць).

Відповідь: 112,5; 82,5.

Приклад 3. Відомо, що між ціною *P* і величиною попиту *D* існує залежність $D = 8{,}97 - 0{,}78P + 0{,}01P^2$. Який товарообіг буде якщо ціна 2 у.г.о. за одиницю товару.

Якщо $D = 8{,}97 - 0{,}78P + 0{,}01P^2$, то $Z = 8{,}97P - 0{,}78P^2 + 0{,}01P^3$.

Тоді $\Delta Z = (8{,}97P - 0{,}78P^2 + 0{,}01P^3) - (8{,}97P_0 - 0{,}78P_0^2 + 0{,}01P_0^3) = 0{,}01(P^3 - P_0^3) - 0{,}78(P^2 - P_0^2) + 8{,}97(P - P_0)$.

Тому $\frac{\Delta Z}{\Delta P} = 0{,}01(P^2 + PP_0 + P_0^2) - 0{,}78(P - P_0) + 8{,}97$.

Отже,

$$Z_{\text{мит.}} = \lim_{P \to P_0}(0{,}01(P^2 + PP_0 + P_0^2) - 0{,}78(P - P_0) + 8{,}97) = 0{,}01 \cdot 3P^3 - 0{,}78 \cdot 2P_0 + 8{,}97 = 0{,}03P_0^2 - 1{,}56P_0 + 8{,}97.$$

Тоді, якщо $P_0 = 2$, то маємо: $Z(2) = 0{,}03 \cdot 4 - 1{,}56 \cdot 2 + 8{,}97 = 0{,}12 - 3{,}12 + 8{,}97 = 5{,}97$ (у.г.о.).

Отже, якщо ціна 2 у.г.о. за одиницю товару, зміна товарообігу в грошовому вимірі буде 5,97 (у.г.о.).

Відповідь: 5,97 у.г.о.

2.2. Алгоритм знаходження похідної і його застосування

Насамперед учням слід ще раз роз'яснити різницю між поняттями «похідна функції в заданій точці», та «похідна функції», щоб вони чітко знали зміст кожного з них.

Нехай задана функція $y = f(x)$ з областю визначення $D(f), x_0 \in D(f)$. Похідна функції в точці x_0 це число, яке показує швидкість зміни функції $y = f(x)$ в цій точці. Тобто, $f'(x_0)$ – число.

Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в кожній точці $D(f)$, то маємо відповідність, при якій кожному значенню аргумента *x* ставиться у відповідність число $f'(x)$. Тобто, маємо нову функцію, яка утворилась з функції $y = f(x)$ за допомогою її диференціювання. Тому таку *функцію називають похідною від функції* $y = f(x)$ і позначають $y = f'(x)$.

Для встановлення правил диференціювання рекомендуємо спочатку акцентувати увагу учнів на алгоритмі знаходження похідної функції, який лежить в основі встановлення правил диференціювання і потренуватися ним користуватись.

Алгоритм знаходження похідної функції. Дотримуючись означення похідної функції $y = f(x)$ можна задати **алгоритм** її знаходження. Щоб знайти похідну функції $y = f(x)$ в точці x_0 потрібно:

1) Зафіксувати дане значення $x_0 \in D(f)$ та надати йому приросту $\Delta x = x - x_0$.
2) Знайти приріст функції в точці x_0: $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
3) Скласти відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
4) Знайти границю цього відношення, якщо $\Delta x \to 0$, тобто $y'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (якщо така границя існує).

Так як x_0 – довільне з $D(f)$, то матимемо, що $\forall x \in D(f)$: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

У математиці серед числових функцій виділяють ***основні елементарні***, до яких у старшій школі відносять: сталу $y = C$, де C – *const;* степеневу $y = x^{\alpha}$ де a – дійсне число; тригонометричні $y = \sin x\,, y = \cos x\,, y = \operatorname{tg} x\,, y = ctgx$; обернені тригонометричні $y = arcsinx, y = arccosx, y = arctgx, y = arcctgx$; показникову $y = a^x, a \geq 0, a \neq 1$; логарифмічну $y = \log_a x\,, a > 0, a \neq 1.$ За допомогою чотирьох арифметичних операцій з основних елементарних функцій можна утворити нові функції. Так як на час вивчення похідної учні вже отримали відповідні знання про властивості і графіки переважної більшості основних елементарних функцій, то можна приступати до знаходження їх похідних, користуючись вказаним вище алгоритмом. Цим самим буде започатковано побудову таблиці похідних основних елементарних функцій. Користуючись приведеним вище алгоритмом учні можуть самостійно (чи за допомогою вчителя) знайти похідну таких функцій як:

$$y = C \text{ (стала)}; y = x; y = \sqrt{x}; y = \frac{1}{x}; y = x^2; y = \sin x.$$

Приклади знаходження похідних вказаних функцій, подано нижче (маємо гарний тренажер на застосування алгоритму).

Приклад 4. Нехай $f(x) = C$, де $x \in R$, C – деяка константа. Знайти $f'(x)$.

1. Фіксуємо x_0, тоді $\Delta x = x - x_0$.

2. Приріст функції буде $\Delta f = f(x) - f(x_0) = C - C = 0.$

3. Складаємо відношення $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0.$

4. $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0} 0 = 0.$

Так, як x_0 – довільне, то $f'(x_0) = 0$. **Отже,** $(\boldsymbol{C})' = \mathbf{0}.$

Приклад 5. Нехай $f(x) = x, x \in R$. Знайти $f'(x)$.

1. Фіксуємо x_0, тоді $\Delta x = x - x_0$.

2. $\Delta f = f(x) - f(x_0) = x - x_0$ (бо $f(x) = x, f(x_0) = x_0$).

3. $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$.

4. $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} 1 = 1$.

Так, як x_0 – довільне, то $f'(x_0) = 1$. Отже, $(\boldsymbol{x})' = \mathbf{1}$.

Приклад 6. Нехай $f(x) = x^2, x \in R$. Знайти $f'(x)$.

1. Фіксуємо x_0, тоді $\Delta x = x - x_0$.

2. $\Delta f = f(x) - f(x_0) = x^2 - x_0^2$.

3. $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0$.

4. $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0$.

Так, як x_0 – довільне, то $f'(x_0) = 2x$. Отже, $(\boldsymbol{x^2})' = \boldsymbol{2x}$.

Приклад 7. Нехай $f(x) = \sqrt{x}, x \in R$. Знайти $f'(x)$.

1. Фіксуємо x_0, тоді $\Delta x = x - x_0$.

2. $\Delta f = f(x) - f(x_0) = \sqrt{x} - \sqrt{x_0}$.

3. $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$.

4. $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

Так, як x_0 – довільне, то $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Отже, $(\sqrt{\boldsymbol{x}})' = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{x}}}$.

Приклад 8. Нехай $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0, x \in R$. Знайти $f'(x)$.

1. Фіксуємо x_0, тоді $\Delta x = x - x_0$.

2. $\Delta f = \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - x}{x \cdot x_0} = \frac{-\Delta x}{x \cdot x_0}$.

3. $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = -\frac{\Delta x}{x \cdot x_0} \cdot \frac{1}{\Delta x} = -\frac{1}{x - x_0}$.

4. $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} (-\frac{1}{x \cdot x_0}) = -\frac{1}{x^2}$. Отже, $(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}})' = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x^2}}$.

Приклад 9. Нехай $y = \sin x, x \in R$. Знайти $f'(x)$.

1. Фіксуємо x_0, тоді $\Delta x = x - x_0$.

2. $\Delta f = sinx - sinx_0 = 2sin\frac{x - x_0}{2} \cdot cos\frac{x + x_0}{2}$.

3. $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2sin\frac{x - x_0}{2}cos\frac{x + x_0}{2}}{x - x_0} = \frac{sin\frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \cdot \cos(\frac{x + x_0}{2})$.

4. $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{sin\frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \cdot \cos(\frac{x + x_0}{2}) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{sin\frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \cdot \lim\limits_{x \to x_0} \cos(\frac{x + x_0}{2})$.

Позначимо $\frac{x-x_0}{2}=t$. Якщо $x \to x_0$, то $t \to 0$. Тоді $\lim_{t\to 0}\frac{sint}{t}=1$ (перша чудова границя). Оскільки функція $y=cosx$ неперервна на всій області визначення, то $\lim_{x\to x_0} cos\frac{x+x_0}{2}=\cos(x_0)$.

Тому, $f'(x)=\lim_{t\to 0}\frac{sint}{t}\cdot \lim_{x\to x_0} cos\frac{x+x_0}{2}=1\cdot cosx=cosx$.

Отже, $(\boldsymbol{sinx})'=\boldsymbol{cosx}$**.**

З наведених прикладів 4-9 одержуємо таблицю похідних деяких функцій.

Таблиця 8

Функція	C	x	x^2	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{x}$	$sinx$
Похідна функції $y=f'(x)$	0	1	$2x$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{x^2}$	$cosx$

Створення таблиці 8 і її заповнення пропонуємо здійснити на практичному занятті. Доречним буде зауважити, що знаходження похідних для інших основних елементарних функцій за допомогою алгоритму громіздке, а тому користуються відомими правилами, зміст і доведення яких буде викладено в наступних заняттях. Таким чином вмотивовуються наступні дії учнів у вивченні похідної, зокрема правил диференціювання та диференціювання складеної та оберненої функцій.

2.3. Правила диференціювання, похідна складеної та оберненої функцій

Відшукання похідної даної функції щоразу за допомогою алгоритму – дія громіздка. Учням слід повідомити, що є інший спосіб, який ґрунтується на використанні певних відомих правил (як у випадку з відшуканням границі функції в точці) та базових теорем.

Далі рекомендуємо викласти самі правила та їх доведення, а також базові теореми у формі шкільної лекції. Орієнтовний зміст лекції подано нижче.

Лекція на тему
«Правила диференціювання та базові теореми знаходження похідної функції»

1. Умови існування похідної.

Ми вже з'ясували що називають похідною функції $y=f(x)$ в точці x_0, похідною функції, знаємо алгоритм її відшукання, а для деяких функцій (див. Таблиця 1) навіть відшукали відповідні похідні. Виникає питання «За яких умов функція $y=f(x)$, задана на множині $D(f)$, може мати похідну в точці $x_0 \in D(f)$, похідну функцію? » Відповідь на це запитання дає теорема.

Теорема 1 (необхідна умова існування похідної). Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в точці x_0, то вона неперервна у цій точці.

Доведення. За умовою теореми функція $y = f(x)$ в точці x_0 має похідну. Це означає, що існує $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$, де $f'(x_0)$ – число. Тоді для досить малих значень $\Delta x = x - x_0$ (за означенням границі) можна записати, що $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + \alpha(x)$, де $\alpha(x)$ – нескінченно мала величина при умові коли $x \to x_0$. Звідси маємо: $f(x) = f(x_0) + \left(f'(x_0) + \alpha(x)\right) \cdot \Delta x$. Якщо в цій рівності перейти до границі, при умові що $x \to x_0$ $(\Delta x \to 0)$, то матимемо: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(f'(x_0) + \alpha(x)\right) \cdot \Delta x = f(x_0)$. Отже, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Одержана рівність вказує на неперервність функції в точці x_0.

Із доведеної теореми випливає кілька *наслідків*:

1) Щоб функція $y = f(x)$ була диференційовна в точці x_0, ***необхідно*** щоб вона була неперервна в цій точці.
2) Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна на множині $D(f)$, то вона неперервна на цій множині.
3) Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0, то в цій точці $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Співвідношення між неперервністю функції на множині X і її диференційовністю на цій множині можна виразити за допомогою діаграм Ейлера-Венна (рис. 2.).

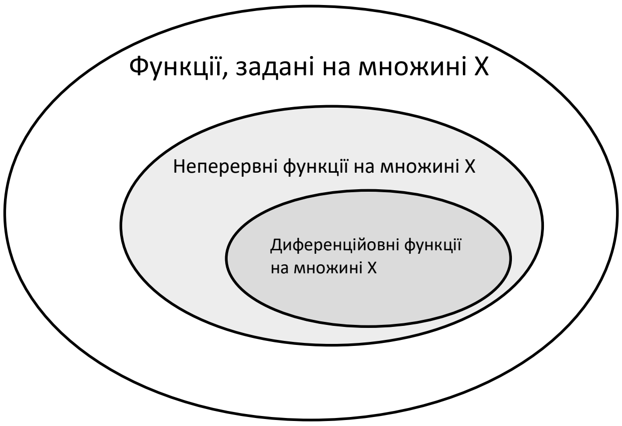


Рис. 2

Чи правильними буде обернене твердження: «Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0, то вона диференційовна в цій точці». У неправильності цього твердження можна переконатись, розглянувши конкретний приклад.

Наприклад, нехай дано функцію $y = |x|$. Вона неперервна на всій множині дійсних чисел. Виберемо точку $x_0 = 0$ і надамо аргументу приріст $\Delta x > 0$.

Тоді $\Delta y = |0 + \Delta x| - |0| = \Delta x$. Звідки $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$. $\lim\limits_{\Delta x \to 0_+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$.

Якщо аргументу надати приріст $\Delta x < 0$, то $\Delta y = |0 + \Delta x| - |0| = -\Delta x$.

Звідки $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$. $\lim\limits_{\Delta x \to 0_-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$.

Похідна, як границя відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, коли $\Delta x \to 0$, не існує.

З наведеного прикладу слідує ще один важливий наслідок: «Неперервність функції $y = f(x)$ в точці x_0 є необхідною, але не достатньою умовою диференційовності цієї функції в точці x_0».

2. Правила знаходження похідних.

1. Похідна суми, добутку і частки двох функцій. Ознайомимося з основними правилами знаходження похідної. Розглянемо випадок – похідна від суми.

Правило 1. Якщо довільні дві функції $U(x)$ і $V(x)$ мають похідні в заданій області X, то їх сума теж має похідну в цій області, причому похідна від суми дорівнює сумі похідних. Формулою це записується $(U(x) + V(x))' = U'(x) + V'(x)$ або коротко $(U + V)' = U' + V'$.

Доведення: За умовою $U'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{U(x) - U(x_0)}{x - x_0}$ та $V'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{V(x) - V(x_0)}{x - x_0}$.

Введемо позначення $f(x) = U(x) + V(x)$ та знайдемо похідну функції $f(x)$ за означенням:

1. Фіксуємо x_0, тоді $\Delta x = x - x_0$.
2. Знайдемо приріст функції $f(x)$. Отже, якщо $f(x) = U(x) + V(x)$ і $f(x_0) = U(x_0) + V(x_0)$, то $\Delta f = U(x) + V(x) - U(x_0) - V(x_0) = U(x) - U(x_0) + V(x) - V(x_0)$.
3. Складемо відношення $\frac{\Delta f}{\Delta x}$: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{U(x) - U(x_0) + V(x) - V(x_0)}{x - x_0} = \frac{U(x) - U(x_0)}{x - x_0} + \frac{V(x) - V(x_0)}{x - x_0}$.
4. Обчислимо границю $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, скориставшись правилом, що границя від суми дорівнює сумі границь: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{U(x) - U(x_0)}{x - x_0} + \lim\limits_{x \to x_0} \frac{V(x) - V(x_0)}{x - x_0} = U'(x_0) + V'(x_0)$ – за умовою. Оскільки x_0 – довільне, то можна записати $f'(x) = U'(x) + V'(x)$ що і треба було довести.

Зауваження. Методом математичної індукції доводиться правильність формули $(U_1(x) + U_2(x) + \cdots + U_n(x))' = U_1'(x) + U_2'(x) \ldots + U_n'(x)$. Два інші правила, які ми розглянемо, - це похідна добутку і похідна частки двох функцій.

Правило 2. Якщо функції $U(x)$ і $V(x)$ мають похідні в заданій області, то їх добуток в цій області теж має похідну, причому вона обчислюється за формулою: $(U(x)\cdot V(x))' = U'(x)\cdot V(x) + U(x)\cdot V'(x)$, або коротко $(U\cdot V)' = U'\cdot V + U\cdot V'$.

Правило 3. Якщо функції $U(x)$ і $V(x)$ мають похідні в заданій області X,$V(x)\neq 0$, то їх частка теж має похідну,$(\frac{U(x)}{V(x)})' = \frac{U'(x)\cdot V(x) - V'(x)\cdot U(x)}{V^2(x)}$, або коротко $(\frac{U}{V})' = \frac{U'V - V'U}{V^2}$.

Правила 2 і 3 доводяться (так як і правило 1) з використанням алгоритму відшукання похідної. Пропонуємо довести їх самостійно, користуючись діючим підручником.

З правила 2 випливають два важливі ***наслідки:***

Наслідок 1. Константу можна виносити за знак похідної. Дійсно:

$$(C\cdot f(x))' = f'\cdot f(x) + f'(x)\cdot C = 0\cdot f(x) + C\cdot f'(x) = C\cdot f'(x).$$

Наслідок 2. Похідна від різниці двох диференційовних функцій дорівнює різниці похідних. Дійсно:

$$(U(x) - V(x))' = (U(x) + (-V(x)))' = U'(x) + (-V(x))' = U'(x) - V'(x).$$

Використання встановлених правил для відшукання похідної розглянемо на готових прикладах (див. презентація 1).

Презентація 1

Приклад 1. Знайдіть похідні функцій:

а)$y = x^2 - x + 7$

$y' = (x^2 - x + 7)' = (x^2)' - (x)' + (7)' = 2x - 1$

б)$y = \sqrt{x} - x^2 - 3x$

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2x - 3$

Відповідь: $2x - 1$, $\frac{1}{2\sqrt{x}} - 2x - 3$.

Приклад 2. Знайти похідні функцій:

а)$y = x^3(8 - x^2)$

$y' = (x^3)'(8 - x^2) + (8 - x^2)'x^3 = 3x^2(8 - x^2) + (-2x)\cdot x^3 = 24x^2 - 5x^4$

б)$y = 2\sqrt{x}$; $y' = (2)'\cdot\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

в)$y = (x^2 - 9)(x + 1)$; $y' = 2x(x + 1) + 1\cdot(x^2 - 9) = 2x^2 + 2x + x^2 - 9 = 3x^2 + 2x - 9$.

Відповідь: $24x^2 - 5x^4$; $\frac{1}{\sqrt{x}}$; $3x^2 + 2x - 9$.

Приклад 3. Знайти похідну функції $y = \frac{3x-1}{5x+4}$.

$y' = \frac{(3x-1)'(5x+4) - (5x+4)'(3x-1)}{(5x+4)^2} = \frac{3(5x+4) - 5(3x-1)}{(5x+4)^2} = \frac{17}{(5x+4)^2}$

Відповідь: $\frac{17}{(5x+4)^2}$.

***) *Методичний коментар*: рекомендуємо зробити презентацію розв'язань усіх прикладів і прокоментувати як працюють «правила». Такий коментар може проводити вчитель, і, що дуже важливо, учні також. Відбувається первинне знайомство з способом дій за правилами. Радимо звернути увагу на *використання таблиці*.**

Завершити лекцію пропонуємо доведенням двох важливих теорем.

3. Похідна складеної і оберненої функцій.

а) Похідна складеної функції.

Теорема 2. Нехай функція $y = g(x)$ має похідну в своїй області визначення $D(x)$, а функція $Z = \varphi(x)$ визначена в області, що містить множину значень функції $f(g)$, і має теж похідну в ній. Тоді складена функція $f(x) = \varphi\big(g(x)\big)$ також має похідну в цій області, яка обчислюється за формулою $f'(x) = \varphi'(x) \cdot g'(x)$.

Доведення. Виберемо довільну точку $x = x_0 \in D(q)$і знайдемо Δx та Δq.

Якщо $\Delta x \to 0$, то й $\Delta q \to 0$.

Розглянемо рівність $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\varphi(g(x))-\varphi(g(x_0))}{x-x_0}$, де за умовою $y = g(x), y = g(x_0)$, тому $\Delta y = y - y_0 = g(x) - g(x_0) = \Delta q$.

Врахувавши це, попередню рівність можна записати:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\varphi\big(g(x)\big)-\varphi(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)} \cdot \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta q} \cdot \frac{\Delta q}{\Delta x}.$$

Тоді $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta q} \cdot \frac{\Delta q}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta q} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta x} = \varphi'_q \cdot q'_x$.

Що й потрібно було довести.

(!) З теореми 2 випливає наступний алгоритм відшукання похідної складеної функції $y = f(g(x))$:

1. Знайти похідну зовнішньої функції $y'_q = f'(q)$ (по змінній *q*).
2. Знайти похідну внутрішньої функції $q'_x = q'(x)$ (по змінній *x*).
3. Похідну $y'_x = (f(g(x)))'$ знайдіть як добуток $y'_q \cdot q'_x$.

б) Похідна оберненої функції.

Теорема 3. Якщо функція $f(x)$ та обернена їй $f^{-1}(y)$ мають похідні в своїх областях визначення, то $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$.

Доведення. Розглянемо складену функцію $f^{-1}(f(x))$, де $y = f(x)$ – пряма функція, а $Z = f^{-1}(y)$ – їй обернена.

За означенням оберненої функції $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$.

Тоді, за теоремою про похідну складеної функції $(f^{-1}(y))' \cdot f'(x) = 1$.

Звідки і слідує формула, яку потрібно було довести.

(!!) З теореми 3 випливає наступний алгоритм відшукання похідної оберненої функції $y = f(x)$, якщо $y = \varphi(x)$ – пряма функція:

1. Знайдіть похідну прямої функції $y'_x = \varphi'(x)$.
2. Запишіть дріб $\frac{1}{\varphi'(x)}$ і змініть в ньому аргумент x на змінну y оберненої функції $y = f(x)$.
3. Похідну $y'_x = (f(x))'$ знайдіть за формулою $y'_x = \frac{1}{\varphi'(f(x))}$.

Використання обох теорем (як і у випадку з правилами 1-3) для відшукання похідної розглянемо на готових прикладах (див. презентація 2).

Презентація 2

Приклад 4. Знайдіть похідну $y = \sqrt{x^2 - 1}$.
Тут зовнішня функція $y = \sqrt{g}$, а внутрішня $g = x^2 - 1$. Маємо $y' = \frac{1}{2\sqrt{g}} \cdot g'$. Похідна внутрішньої функції $g'(x) = 2x$. Тому $y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot (x^2 - 1)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.
Відповідь: $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

Приклад 5. Знайти похідну $y = \frac{1}{x^3}$, $x > 0$.
Дана функція – обернена до функції $y = x^3, x > 0$. Отже, $y'_x = 3x^2$. Записуємо дріб $\frac{1}{3x^2}$ і змінюємо аргумент x на $y = x^{\frac{1}{3}}$. Тоді маємо: $y'_x = \frac{1}{(y^3)'} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3(x^{\frac{1}{3}})^2} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$.
Відповідь: $y'_x = \frac{1}{2}x^{-\frac{2}{3}}$.

КІНЕЦЬ ЛЕКЦІЇ

По закінченню лекції учням слід оголосити контрольні запитання на які вони мають знати відповіді.

Питання для контролю і обговорення на семінарському занятті:

А) Мінімальний рівень

1. Сформулюйте і доведіть теорему про похідну від суми двох функцій.
2. Сформулюйте теореми про похідну добутку і частки двох функцій.
3. Які наслідки слідують з правил похідних?
4. Сформулюйте теореми про похідну складеної і оберненої функцій.

Б) Підвищений рівень

5. Доведіть теореми про похідну добутку, частки та їх наслідки.
6. Доведіть теореми про похідну складеної і оберненої функцій.

Викладений вище навчальний матеріал стосується теми 5.1. «Похідна».

На завершення її вивчення рекомендуємо з’ясувати з учнями геометричний зміст похідної та можливість існування похідної у оберненої функції, коли пряма функція – диференційовна.

Такі знання необхідні для заповнення таблиці похідних раніше вивчених основних елементарних функцій: $y = cosx, y - arccosx, y = tgx, y = arctgx$ та інших.

Пропонуємо повідомлення здійснити у формі шкільної лекції, зміст якої наведено нижче.

Лекція на тему

«Геометричний зміст похідної. Умови існування похідної оберненої функції»

Щоб з’ясувати геометричний зміст похідної потрібно визначитись, що називають дотичною до графіка функції, оскільки ці два поняття тісно пов’язані між собою.

1. Означення дотичної і нормалі до кривої. В курсі геометрії вже було введено поняття дотичної до кола, а саме: дотична до кола визначалась як пряма, що розташована в одній площині з колом і має з ним тільки одну спільну точку.

Однак таке означення дотичної не можна застосувати для випадку довільної кривої.

Так, наприклад, осі OX і OY мають по одній спільній точці з параболою $y = x^2$.

Але вісь OX – дотична до параболи, а вісь OY – не є дотичною до неї.

Дамо визначення дотичної до кривої L в точці M_0 для загального випадку.

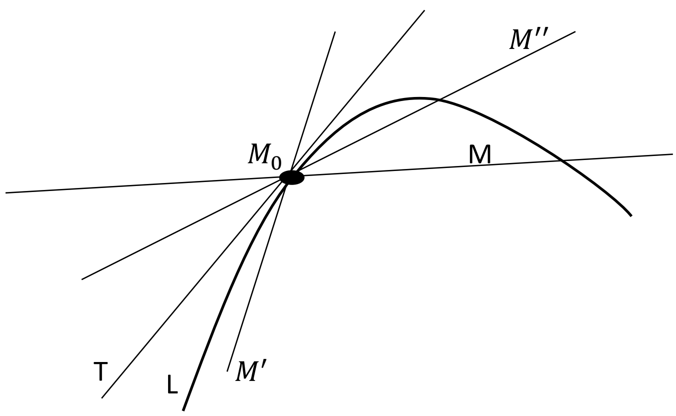


Рис. 1

Нехай M – довільна точка кривої L, яка відмінна від M_0 і може розміщатись на кривій L як зліва, так і справа (рис. 1) від неї. Пряма MM_0, яка проходить через дві точки M і M_0, називається січною кривої L. Якщо точку M преміщати по кривій L, наближаючи до точки M_0, то січна M_0M буде повертатись навколо точки M_0, займаючи відповідно місця M_0M, M_0M', M_0M'' і т.д. Якщо існує граничне положення січної M_0M при умові коли M прямує до M_0 і зліва і справа, наприклад, M_0T, то пряма M_0T **називається дотичною до кривої L** в точці M_0.

Відзначимо, що не всяка крива в кожній точці має дотичну. Так, наприклад, Такою кривою є графік функції $y = |x|$, яка в т. (0;0) не має дотичної.

Пряма, яка проходить через точку M_0 перпендикулярно дотичній, проведеній в цій точці, **називається нормаллю** до кривої L в точці M_0.

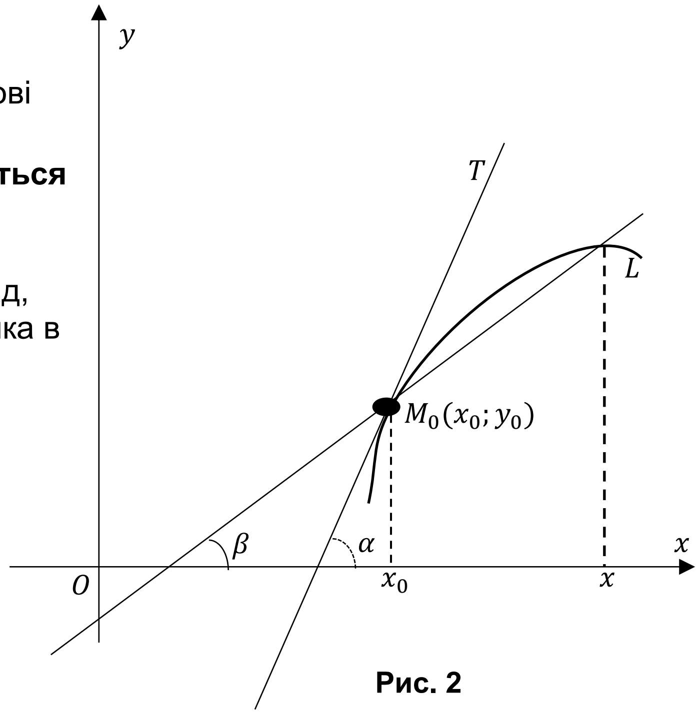


Рис. 2

Скористаємось рис. 2 і з’ясуємо геометричний зміст похідної функції $y = f(x)$ в точці x_0.

2. Геометричний зміст похідної. Нехай крива L є графіком неперервної функції $y = f(x), x \in (a;b)$ (рис. 2). На кривій L розглянемо точки $M_0(x_0;y_0)$ і $M(x;y)$, та проведемо січну M_0M, яка перетне вісь Ox під кутом β. Очевидно, що $k = tg\beta$ – її кутовий коефіцієнт. Тоді

$$tg\beta = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad ...(1)$$

Якщо при цьому точку M на графіку рухати до M_0 , то січна буде повертатись навколо точки M_0. Іншими словами, якщо $x \to x_0$, то MM_0 перейде в M_0T, яка нахилена до осі OX під кутом α і є дотичною до кривої в цій точці.

Якщо функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0, то рівність (1) прийме вигляд:

$$\lim_{x\to x_0} tg\beta = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}; \text{але } \lim_{x\to x_0} tg\beta = tg\alpha;\ \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Тому $f'(x_0) = tg\alpha$.

Отримана рівність дає можливість дати геометричні інтерпретацію похідної: **значення похідної функції $f(x)$ в точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції в точці $(x_0; f(x_0))$.**

3. Рівняння дотичної і нормалі. Знаючи рівняння кривої $f(x)$, можна знайти рівняння дотичної в точці x_0. Дійсно, із курсу геометрії відомо, що в загальному вигляді рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ має вигляд

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad (2)$$

Тому поклавши в (2) $y_0 = f(x_0), k = f'(x_0)$, отримаємо рівняння дотичної до кривої L в точці $(x_0; f(x_0))$: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ або

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad (3)$$

Як відомо, за умовою перпендикулярності прямих з кутовими коефіцієнтами k_1 і k_2 є умова $k_1 \cdot k_2 = -1$. Отже, рівняння нормалі до кривої L в точці M_0 має вигляд

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \qquad (4)$$

Зауваження. Рівняння (4) задає рівняння нормалі, якщо $f'(x_0) \neq 0$. Якщо ж $f'(x_0) = 0$, то дотична до кривої L в такій точці буде паралельна осі OX і її рівняння, як видно з (3), буде $y = f(x_0)$. Із означення нормалі в цьому випадку слідує, що її рівняння матиме вигляд $x = x_0$. Якщо ж $f'(x_0) = \infty$, то дотична в точці x_0 до кривої L паралельна осі OY і має вигляд $x = x_0$, нормаль – відповідно $y = f(x_0)$.

Для спрощення замість терміну «дотична до графіка функції $\boldsymbol{y = f(x)}$», будемо говорити «дотична до кривої $\boldsymbol{f(x)}$».

4. Існування похідної оберненої функції, якщо пряма функція диференційовна.

Нехай на множині А задана функція $y = f(x)$. Відомо, що якщо вона монотонно зростаюча (монотонно спадна) на цій множині, то вона оборотна, тобто має обернену собі функцію $y = \varphi(x)$.

Їх графіки симетричні відносно прямої $y = x$. Якщо ж пряма функція $y = f(x)$ диференційовна на множині А, то в кожній точці $x_0 \in A$ існує дотична до її графіка. Так як при симетрії дотична до графіка функції $y = f(x)$ в точці x_0, переходить у дотичну до графіка оберненої функції у відповідній точці, то з цього слідує , що й обернена функція $y = \varphi(x)$ диференційовна в кожній точці $x_0 \in D(\varphi) = E(f)$.

Звідси слідує важливий наслідок – теорема, якою будемо користуватися надалі.

Теорема. *Якщо пряма функція $y = f(x)$, задана на проміжку $\langle a; b\rangle$ диференційовна і монотонна, то обернена їй функція $y = \varphi(x)$ також диференційовна і монотонна.*

Зауваження. Сформульована теорема є доповненням до теореми 3 (доведеної раніше) про відшукання похідної оберненої функції. Її застосування актуальне для монотонних диференційовних функцій. А саме такими і є, на відповідних проміжках, вивчені раніше (і ті, які будуть вивчатись далі) основні елементарні функції. Користуючись правилами диференціювання і встановленими теоремами, продовжимо заповнювати таблицю похідних (див. таблиця 1).

Похідна функції $y = cosx$ та $y = arccosx$. Функцію $y = cosx$ можна розглядати як складену функцію $y = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$. Тоді, користуючись теоремою про похідну складеної функції маємо: $y = sint$ – зовнішня функція; $t = \frac{\pi}{2} - x$ – внутрішня функція.

Отже,

$$y' = (cosx)' = (\sin(\frac{\pi}{2} - x))' = (sint)'_t \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)'_x = cost \cdot (-1) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -sinx$$

$$(cosx)' = -sinx \qquad (1)$$

На проміжку $[0; \pi]$ функція $y = cosx$ монотонно спадна і диференційовна, має обернену функцію $y = arccosx$. Користуючись теоремою про похідну оберненої функції маємо: $y = cosx$ – пряма функція; $y = arccosx$ – обернена функція.

Тоді

$$(arccosx)' = \frac{1}{(cosx)'} = \frac{1}{-sinx} = [\text{замінюємо } x \text{ на } arccosx] = \frac{1}{\sin(arccosx)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad (2)$$

Похідна функції $y = tgx$ та $y = arctgx$. Функцію $y = tgx$ можна розглядати як частку $y = \frac{sinx}{cosx}$. Тоді, користуючись правилом диференціювання для частки двох функцій, маємо:

$$y' = (tgx)' = (\frac{sinx}{cosx})' = \frac{(sinx)' \cdot cosx - sinx \cdot (cosx)'}{cos^2x} = \frac{cos^2x + sin^2x}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x}$$

$$(tgx)' = \frac{1}{cos^2x} \qquad (3)$$

На проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функція $y = tgx$ монотонно зростає і диференційовна, має обернену функцію $y = arctgx$. Користуючись теоремою про похідну оберненої функції маємо:

$$(arctgx)' = \frac{1}{(tgx)'} = cos^2x = [\text{замінюємо } x \text{ на } arctgx] = cos^2(arctgx) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(arctgx)' = \frac{1}{1 + x^2} \qquad (4)$$

Якщо розглянути всі основні елементарні функції, які вивчаються в курсі алгебри і початків аналізу, то таблиця 1 набуде завершеного вигляду (див. таблиця 2).

5. Таблиця 9 (*розширена таблиця похідних*).

№	$f(x)$	$f'(x)$
1	C	0
2	X	1
3	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
4	x^n	nx^{n-1}, де $n \in N$
5	x^z	zx^{x-1}, де $z = \frac{m}{n} -$ раціональне число
6	$sinx$	$cosx$
7	$cosx$	$-sinx$
8	tgx	$\frac{1}{cos^2x}$
9	$ctgx$	$-\frac{1}{sin^2x}$
10	$arccosx$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11	$arcsinx$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12	$arctgx$	$\frac{1}{1+x^2}$
13	$arcctgx$	$-\frac{1}{1+x^2}$
14*	e^x	e^x
15*	a^x	$a^x lna$
16*	lnx	$\frac{1}{x}$
17*	$\log_a x$	$\frac{1}{lna \cdot x}$
18*	x^α	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$, де $\alpha -$ дійсне число

Решта формул таблиці 9, крім формул 14*-18*, заповніть самостійно, виконавши необхідні доведення. Формули 14*-18* будуть доведені пізніше, коли вивчатимуться показникова та логарифмічна функції.

6. Похідні вищих порядків. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $(a; b)$, та нехай в кожній точці цього проміжку вона має похідну $f'(x)$, тоді $f'(x)$ можна назвати **першою похідною** (або **похідною першого порядку**) заданої функції. Розглянемо функцію $g(x) = f'(x)$. Якщо $g(x)$ має похідну в точці $x_0 \in (a; b)$, то цю похідну називають **другою похідною** (або похідна другого порядку) даної функції $f(x)$ в точці x_0, і позначають $f''(x)$. Іншими словами, друга похідна – це похідна від першої похідної, тобто

$$y'' = (y')' \text{ або } (f'(x))' = f''(x).$$

Якщо задана функція шляху $S = S(t)$ від часу t, то перша похідна виражає швидкість руху $v(t) = S'(t)$. Друга похідна показує зміну швидкості, тобто прискорення. Тому фізичний зміст другої похідної – прискорення руху.

Похідна від $f''(x)$, тобто $(f''(x))'$= $f'''(x)$, називається ***третьою похідною*** (або ***похідна третього порядку***) даної функції $f(x)$ і т. д. Взагалі $n -$ ою похідною функції в точці x (або на деякому інтервалі $(a; b)$) називається похідна від похідної $(n-1) -$ ого порядку в цій точці (або на інтервалі $(a; b)$). Вона позначається $y^{(n)}$ або $f^{(n)}(x)$.

Наприклад. Якщо $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$, то $f'(x) = 3x^2 + 6x$; $f''(x) = 6x + 6$; $f'''(x) = 6$; $f^{IV}(x) = f^{V}(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = 0$.

Знаючи таблицю 9, правила диференціювання і відповідні теореми (встановлені вище) про знаходження похідної складеної та оберненої функції, можна диференціювати складніші елементарні функції. Чим ми й займемось на наступних практичних заняттях.”

КІНЕЦЬ ЛЕКЦІЇ

Питання для контролю:

1. Назвіть формули знаходження похідних обернених тригонометричних функцій.
2. Що називають другою похідною, похідною n –го порядку?
3. Який фізичний зміст другої похідної?
4. Назвіть рівняння дотичної та нормалі до графіка диференційовної функції $y = f(x)$ в точці x_0.
5. Доведіть формули 4-13 із таблиці 2.
6. Назвіть геометричний зміст похідної функції $y = f(x)$ в точці x_0.

Всі наступні практичні заняття теми 5.1 рекомендуємо спрямувати на формулювання вмінь і навичок диференціювання складених елементарних функцій.

Добірок тренувальних вправ у альтернативних підручниках з алгебри та початків аналізу та збірниках задач є вдосталь.

3. *Застосування похідної до дослідження властивостей функції і побудови її графіка*

Щоб навчити учнів застосовувати похідну, як математичну модель, до розв'язування практичних задач, насамперед, слід познайомити їх з теоретичними знаннями, які уможливлюють таке застосування. Тоді вибір способу розв'язання, обґрунтування вибору тих чи інших дій буде усвідомленим і обґрунтованим. До таких теоретичних знань ми відносимо ознаки сталості функції, зростання, спадання, існування екстремумів і т. п.

Виклад теоретичного матеріалу пропонуємо здійснити у форматі шкільної лекції (скориставшись лекційно-практичною формою навчання).

Нижче подаємо орієнтовний зміст такої лекції.

Лекція на тему
«Основні теореми для дослідження властивостей диференційовних функцій за допомогою похідної»

Для доведення основних теорем будемо розглядати диференційовну на інтервалі $(a;b)$ функцію $y=f(x)$. Відомо, що функція може бути зростаючою (спадною), сталою на інтервалі, мати екстремуми в деяких точках інтервалу (локальний максимум чи локальний мінімум). Елементарними способами встановити такі властивості функції $y=f(x)$ часто буває надто складно. Але якщо функція $y=f(x)$ диференційовна на інтервалі $(a;b)$, то за допомогою похідної це зробити легше. Що ж це за теореми і які з них випливають важливі наслідки та правила.

1) Умови зростання та спадання функції.

Теорема 1 (достатні ознаки зростання (спадання) функції в точці). Якщо функція $y=f(x)$ в точці $x_0\in(a;b)$ має похідну $f'(x_0)$ і $f'(x_0)>0$ ($f'(x_0)<0$), то вона в цій точці зростає (спадає).

Доведення. Нехай відомо, що в точці $x_0\in(a;b)$ існує $f'(x_0)>0$.За означенням похідної $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, де $\Delta x=x-x_0$. За умовою $f'(x_0)>0$.

Тоді знайдеться окіл $(x_0-\delta;x_0+\delta),\delta>0$ точки x_0 такий, що для всіх $x\in(x_0-\delta;x_0+\delta)$ виконується нерівність $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0\ (1)$. Якщо $x\in(x_0-\delta;x_0)$, то $x<x_0$. Тоді з (1) маємо, що $f(x)-f(x_0)<0$. Тобто, що $f(x)<f(x_0)$. Якщо ж $x\in(x_0;x_0+\delta)$, то $x>x_0$. Тоді з нерівності (1) слідує, що $f(x)>f(x_0)$.

Отже, існує окіл точки x_0, тобто інтервал $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, такий що для $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ $f(x) - f(x_0) < 0$, а для $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ $f(x) > f(x_0)$.

Це означає, що в точці x_0 функція $y = f(x)$ - зростає.

Випадок, коли $f'(x_0) < 0$ доводиться аналогічно.

Відомо, що якщо функція $y = f(x)$ зростає (спадає) в кожній точці проміжку $\langle a; b \rangle$, то вона називається зростаючою (спадною) на цьому проміжку. Із доведеної теореми випливає важливий наслідок.

Наслідок 1. *Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна на $(a; b)$ і в кожній точці цього інтервалу $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$, то така функція є зростаючою (спадною) на цьому інтервалі.*

З отриманого наслідку випливає практично важливе правило – орієнтир відшукання проміжків, на яких задана диференційовна функція $y = f(x)$ зростає (спадає) на інтервалі.

Правило–орієнтир 1. Для того щоб знайти на яких проміжках зростає (спадає) диференційовна на $(a; b)$ функція $y = f(x)$ необхідно:

1) *Знайти похідну функцію $f'(x)$;*
2) *Розв'язати нерівність $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$. За умови, що $x \in (a; b)$.*
3) *Кожний із знайдених проміжків – розв'язків, на якому виконується розглянута нерівність і буде проміжком зростання (спадання) функції $y = f(x)$.*

2) Знаходження екстремумів функції.

Нехай дана диференційовна на інтервалі $(a; b)$ функція $y = f(x)$. Згадаємо, що точка називається точкою мінімуму функції $f(x)$, якщо існує такий окіл точки x_0, що для всіх $x \neq x_0$ із цього околу виконується нерівність $f(x) \geq f(x_0)$. Її позначають x_{min} і називають **точкою локального** мінімуму (локальний від латинського *localis* – місцевий).

Точка x_0 називається **точкою максимуму** функції $f(x)$, якщо існує такий окіл точки x_0, що для всіх $x \neq x_0$ із цього околу виконується нерівність $f(x) \leq f(x_0)$. Позначають x_{max} і називають точкою локального максимуму.

Точки максимуму і мінімуму функції називаються точками екстремуму функції (або локальні екстремуми), а значення функції в цих точках – відповідно максимумами та мінімумами функції або екстремумами функції. Розглянемо необхідні умови існування екстремумів для диференційовної на інтервалі $(a; b)$ функції $y = f(x)$.

Теорема 2. Якщо точка x_0 є точка екстремуму функції $f(x)$ і в цій точці існує похідна $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

Доведення. Нехай x_0 – це x_{max} (для випадку коли $x_0 = x_{min}$ доведення аналогічне).

Згідно з означенням, тоді існує $\delta - \text{окіл}$ точки x_0 такий, що для всіх $x \neq x_0$ в цьому околі $f(x) \leq f(x_0)$.

За умовою теореми функція $y = f(x)$ в точці x_0 має похідну. Тоді:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Якщо $x - x_0 < 0$ і $f(x) - f(x_0) \leq 0$, то для всіх $x \in (x_0 - \delta; x_0), f'(x_0) \geq 0$.

Якщо $x - x_0 > 0$ і $f(x) - f(x_0) \leq 0$ для всіх $x \in (x_0; x_0 + \delta), f'(x_0) \leq 0$.

Отже, $f'(x_0)$ одночасно не менша і не більша нуля.

Тому $f'(x_0) = 0$.

П'єр Ферма (1601-1665 рр.)
французький математик, засновник аналітичної геометрії і теорії чисел

Доведену теорему називають ***теоремою Ферма*** (на честь французького математика П'єра Ферма).

Вона вказує лише на ***необхідну ознаку існування екстремуму*** диференційованої на інтервалі $(a; b)$ функції $y = f(x)$ – екстремуми можуть бути в точках, в яких $f'(x_0) = 0$ (!)

Зауважимо, що точки, в яких $f'(x_0) = 0$, називають ***стаціонарними точками***, а точки, в яких $f'(x)$ – не існує – ***критичними***.

З'ясуємо достатні умови ввівши таку термінологію: будемо говорити, що деяка функція $\varphi(x)$ змінює знак з плюса на мінус при переході через точку x_0, якщо існує такий $\delta - \text{окіл}\ (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0, що зліва від точки x_0, тобто для $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ функція $\varphi(x) > 0$, а справа від точки, тобто для $x \in (x_0; x_0 + \delta)$, функція $\varphi(x) < 0$. Аналогічно домовимось про зміну: мінуса на плюс при переході через точку x_0.

Теорема 3. Нехай функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і в її $\delta - \text{околі}$ має похідну, крім, можливо, самої точки x_0.

Тоді: а) *якщо* $f'(x)$ при переході через точку x_0 змінює знак з плюса на мінус, то точка x_0 є точкою максимуму функції $f(x)$;

б) *якщо* $f'(x)$ похідна при переході через точку x_0 змінює знак з мінуса на плюс, то точка x_0 є точкою мінімуму функції $f(x)$;

в) *якщо* існує $\delta - \text{окіл}$ точки x_0, я якому похідна зберігає знак, то в точці задана функція $f(x)$ екстремуму не має.

Доведення. Нехай похідна $f'(x)$ при переході через точку x_0 змінює знак з плюса на мінус. Це означає, що існує число $\delta > 0$ таке що $f'(x) > 0$, для всіх $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ і $f'(x) < 0$ для всіх $x \in (x_0; x_0 + \delta)$. Оскільки $f'(x) > 0$ для $x \in (x_0 - \delta; x_0)$, то за теоремою 2 функція $f(x)$ на цьому проміжку зростає. Тому для всіх $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ $f(x) < f(x_0)$.

Через те, що $f'(x) < 0$ для всіх $x \in (x_0; x_0 + \delta)$, то міркуючи аналогічно, отримуємо що функція $y = f(x)$ на проміжку $(x_0; x_0 + \delta)$ спадає. Отже, точка x_0 – точка локального максимуму функції. Випадки б) і в) – доводяться аналогічно (пропонуємо довести самостійно).

З теорем 2 і 3 випливає правило-орієнтир відшукання екстремумів диференційовної на інтервалі функції $y = f(x)$.

Правило-орієнтир 2. Для того, щоб знайти екстремуми диференційовної на інтервалі $(a; b)$ функції $y = f(x)$ необхідно:

1) Знайти, розв'язавши рівняння $f'(x) = 0$, стаціонарні точки.
2) Розбити інтервал $(a; b)$ стаціонарними точками на проміжки.
3) Знайти знаки похідної функції $f'(x)$ на кожному з цих проміжків.
4) Вибрати серед стаціонарних точок ті, в яких похідна $f'(x)$ змінює знак.
   Це і будуть точки екстремуму функції $y = f(x)$ (локальні максимум чи мінімум).

3) Ознаки сталості функції на проміжку $[a; b]$.

Заповнюючи таблицю похідних ми довели, що якщо функція $y = f(x)$ – стала, тобто $f(x) = C$ для всіх $x \in R$, то $f'(x) = 0$. (Похідна сталої функції дорівнює нулю). А чи буде правильним обернене твердження? Тобто, якщо диференційовна на проміжку $[a; b]$ функція $y = f(x)$ має для будь-якого $x \in [a; b]$ рівну нулю похідну, то вона на цьому проміжку стала ($f(x) = const$). Відповідь на це запитання випливає з двох теорем: Теореми Ролля та Теореми Лагранжа. Доведення приведено нижче, з яким пропоную розібратись самостійно (як домашнє завдання).

Теорема 4. (*Ролля*) Якщо диференційовна на проміжку $[a;b]$ функція $y = f(x)$ на кінцях проміжка набуває однакових значень $f(a) = f(b)$, то всередині інтервалу $(a;b)$ знайдеться хоча б одна точка $x_0 \in (a;b)$ в якій $f'(x) = 0$.

Доведення.

Мішель Ролле (1652-1719 рр.)
французький математик, найбільш відомий завдяки теоремі Ролля

Випадок 1.

Якщо функція $y = f(x)$ на проміжку $[a;b]$ стала: $f(x) = const$.

Тоді за точку x_0 можна прийняти довільну точку інтервала $(a;b)$.

Таким чином для сталої функції теорема справджується.

Випадок 2.

Якщо функція $y = f(x)$ на проміжку $[a;b]$ не є тотожно сталою. Оскільки вона, за умовою диференційовна, а, отже, неперервна на $[a;b]$, то вона на цьому проміжку набуває найбільшого та найменшого значення (теорема Вейєрштраса). Позначимо їх через M і m $(m < M)$ відповідно. Оскільки $f(a) = f(b)$, то хоча б одне зі значень M або m досягається функцією всередині інтервалу $(a;b)$.

Тобто існує хоча б одна точка $x_0 \in (a;b)$ в якій функція $y = f(x)$ досягає, наприклад значення M (або значення m).Отже, $f(x_0) = M$.Покажемо, що $f'(x) = 0$.

Якщо M – найбільше значення, яке приймає функція $y = f(x)$ на проміжку $[a;b]$, то M буде найбільшим значенням для довільного $\delta - \text{окіл}$ $(\delta > 0)$ точки x_0 $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \subset [a;b]$. Тоді для всіх $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ має місце невірність $f(x) - f(x_0) < 0$. Розглянемо відношення $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Якщо $x \in (x_0 - \delta; x_0), \text{то } \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$. Якщо $x \in (x_0 - \delta; x_0)$, то $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$.

За умовою теореми в точці x_0 існує похідна $f'(x_0)$, як границя такого відношення. Вона одночасно має бути не від'ємною і не додатною. Тому $f'(x) = 0$.

Теорема доведена.

Теорема 5. (*Лагранжа*) Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна на проміжку $[a;b]$, то знайдеться хоча б одна точка $x_0 \in (a;b)$, в якій справджується рівність $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Жозеф Луї Лагранж
(1736-1813 рр.)
французький математик, фізик і астроном італійського походження

Доведення.

Розглянемо дві точки графіка функції $y = f(x)$: $A(a; f(a))$ і $B(b; f(b))$.

Через ці точки проходить пряма AB, рівняння якої буде $\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{x-a}{b-a}$.

Звідси отримуємо, що

$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a) + f(a)$.

Маємо лінійну функцію.

Розглянемо нову функцію $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a) - f(a)$, як різницю двох диференційовних на проміжку $[a; b]$ функцій. Легко бачити, що $F(a) = F(b)$.

За теоремою Ролля всередині інтервалу $(a; b)$ знайдеться хоча б одна точка x_0, така, що $F'(x_0) = 0$. Тобто: $F'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$. Звідси $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Теорему доведено.

І теоремі Ролля, і теоремі Лагранжа можна дати наступну геометричну ілюстрацію (рис. 1 *а*) та рис. 1 *б*)).

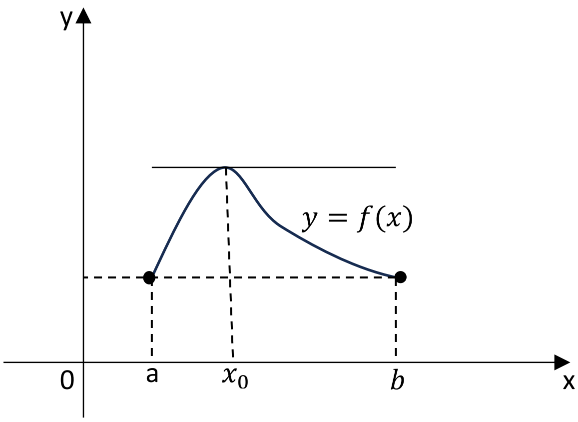


Рис. 1 *а*)

В інтервалі $(a; b)$ існує точка x_0, дотична до графіка функції в якій паралельна осі OX.

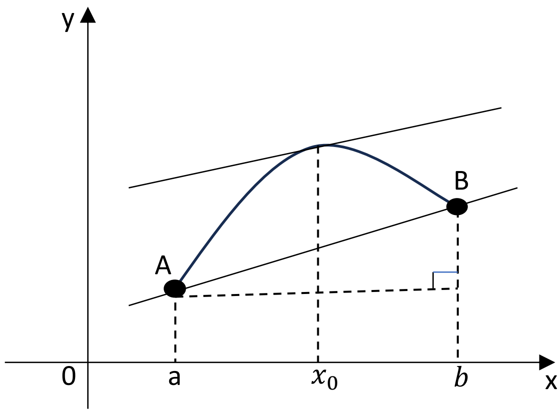


Рис. 1 *б*)

В інтервалі $(a; b)$ існує точка x_0, дотична до графіка функції в якій паралельна прямій AB.

Із обох теорем випливає наступна ознака сталості функції $y = f(x)$ на проміжку $[a; b]$.

Теорема 6 (*ознака сталості функції*). Функція $y = f(x)$ стала на проміжку $[a; b]$ тоді і тільки тоді, коли її похідна існує в кожній точці проміжка $[a; b]$ і дорівнює нулю.

Доведення

Випадок 1.

Якщо функція $y = f(x)$ на проміжку $[a; b]$ стала $(f(x) = const)$, то вона диференційовна і, як було доведено раніше, $f'(x) = 0$.

Випадок 2.

Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в кожній точці x проміжка $[a; b]$ і $f'(x) = 0$, то виберемо довільну точку $x \in (a; b)$.

На проміжку $[a; x]$ для функції $y = f(x)$ справджується теорема Лагранжа.

Отже, існує хоча б одна точка $x_0 \in [a; x]$ в якій $f'(x_0) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Звідси маємо: $f(x) - f(a) = 0;\ f(x) = f(a)$.

Тобто, для кожної точки $x \in [a; b], f(x) = f(a)$.

Функція $y = f(x)$ – стала на проміжку $[a; b]$.

Теорема доведена.

Питання для контролю та обговорення на семінарському занятті.

А) Достатній рівень

1. Сформулюйте достатню ознаку зростання (спадання) функції на проміжку.
2. Сформулюйте теорему Ферма, Ролля, Лагранжа про похідну диференційовної на проміжку $[a; b]$ функції $y = f(x)$.
3. Які точки у диференційовної на проміжку $[a; b]$ функції $y = f(x)$ називаються критичними, стаціонарними?
4. Сформулюйте достатню ознаку існування екстремуму диференційовної функції.
5. Сформулюйте ознаку сталості диференційовної на проміжку $[a; b]$ функції $y = f(x)$.

Б) Підвищений рівень

1. Доведіть: - достатню умову зростання (спадання) функції на проміжку;
   - достатню ознаку існування екстремуму функції;
   - достатню ознаку сталості функції на проміжку.
2. Доведіть теореми: Ферма; Ролля; Лагранжа.

КІНЕЦЬ ЛЕКЦІЇ

Запропоновану лекцію доцільно провести на початку вивчення теми 5.2 «Застосування першої та другої похідної до дослідження функції». Ознайомивши учнів з основними теоремами, ознаками, які з них випливають та алгоритмами дослідження функції на зростання (спадання), та екстремум пропонуємо провести наступне практичне заняття – *семінар на їх застосування*. На такому семінарі учні навчаться самостійно відтворювати доведення вивчених теорем, в ході дискусії сформують еталон відповіді на поставлені запитання, навчатимуться критично оцінювати відповіді своїх товаришів (буде здійснюватись формувальне оцінювання), правильно реагувати на вказані помилки та недоліки, а головне ще раз усвідомити та запам’ятати теоретичні основи майбутніх практичних дій.

Після семінарського заняття слід перейти до розв’язування типових вправ на знаходження проміжків зростання (спадання) функції, екстремумів, найбільшого і найменшого значення функції на заданому проміжку. Таких вправ у діючих підручниках є вдосталь.

Наступним кроком рекомендуємо навчити учнів досліджувати функцію на встановлення проміжків випуклості функції, точок перегину її графіка, наявності в неї похилих асимптот. Як і в попередньому випадку, пропонуємо здійснити це за допомогою шкільної лекції, зміст якої викладено нижче.

Лекція на тему

«Дослідження функції на випуклість та точки перегину. Асимптоти функції»

Спостерігаючи, наприклад, графік функції $y = sinx$, можна побачити, що на одних проміжках він випуклий вверх, на інших вниз, а в певних точках відбувається перегинання графіка. Виявляється, що коли досліджувати функцію, то важливо знати наперед, такі особливості графіка. Як це встановити? Відповідь на це запитання допомагає знайти друга похідна диференційовної функції. З’ясуємо, як саме. Насамперед з’ясуємо коли графік функції називається випуклим вверх на проміжку $(a; b)$ (кажуть функція випукла вверх на $(a; b)$), а коли вниз (кажуть функція випукла вниз на проміжку $(a; b)$).

Графік функції $f(x)$, $x \in (a; b)$ називається **випуклим вверх** на інтервалі $(a; b)$ (рис. 2.1), якщо $f(x)$ нижче дотичної, проведеної в довільній точці $\big(x; f(x)\big)$ $x \in (a; b)$, та **випуклим вниз** на інтервалі $(a; b)$ (рис. 2.2), якщо лінія $f(x)$ вище дотичної, проведеної в довільній точці $\big(x; f(x)\big)$ $x \in (a; b)$.

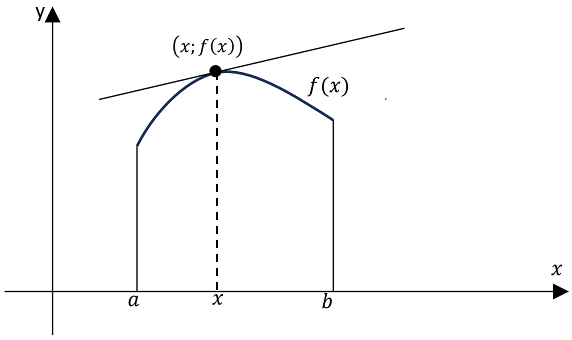


Рис. 2.1

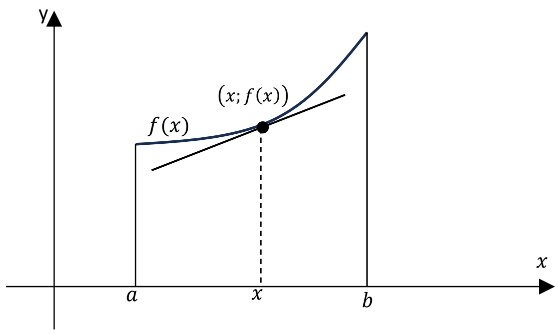


Рис. 2.2

Інтервали, на яких графік функції випуклий вверх або вниз, називаються інтервалами випуклості графіка функції. Точка графіка функції, абсциса якої є одночасно кінцем інтервалу випуклості вверх і кінцем інтервалу випуклості вниз, називається точкою перегину графіка функції.

На практиці для встановлення проміжків випуклості та точок перегину користуються відомими в математичному аналізі алгоритмом, який ґрунтується на трьох важливих теоремах, наводимо їх зміст нижче, без доведень (*доведення виходить за межі шкільної програми*).

Теорема 1. Якщо функція $f(x)$, $x \in (a;b)$ має першу і другу похідні і, якщо $f''(x) < 0$ для всіх $x \in (a;b)$, то на інтервалі $(a;b)$ графік функції випуклий вверх, якщо $f''(x) > 0$, то випуклий вниз.

Теорема 2. Якщо функція $f(x)$ має на проміжку $(a;b)$ неперервну похідну другого порядку і, якщо точка з абсцисою $x_0 \in (a;b)$ є точкою перегину графіка цієї функції, то $f''(x) = 0$.

Це є необхідна умова існування точки перегину.

Теорема 3. Нехай функція $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$ має похідну другого порядку. Тоді, якщо $f''(x)$ змінює знак при переході аргументу через точку $x_0 \in (a;b)$, то x_0 є абсцисою точки перегину графіка даної функції.

Це є достатня умова існування точки перегину.

На основі цих теорем

маємо алгоритм дослідження функції на випуклість і точки перегину:

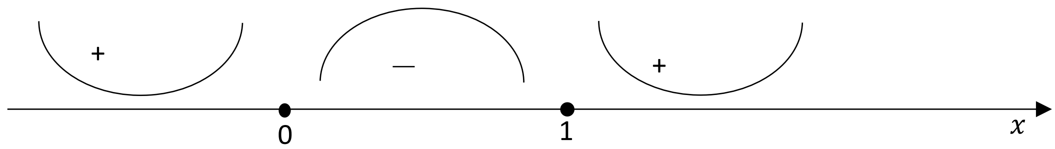
1. Знайти всі точки, в яких $f''(x) = 0$ або $f''(x)$ не існує (їх називають **критичними для першої похідної**).
2. Нанести такі точки на числову пряму, розбивши область визначення на проміжки.
3. Знайти знак другої похідної на кожному з інтервалів. На тих інтервалах, на яких $f''(x) < 0$ – функція випукла вверх, на тих інтервалах, на яких $f''(x) > 0$ – функція випукла вниз.
4. Маючи знаки $f''(x)$, вибираємо точки перегину – ті, де $f''(x)$ змінює знак.

Приклад 1. Дослідити на випуклість та знайти точки перегину графіка функції $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$.

Знайдемо похідні:

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2;$ $\qquad\qquad$ $f''(x) = 12x^2 - 12x.$

Тоді $12x^2 - 12x = 0; x_1 = 0;\ x_2 = 1$ – критичні точки першої похідної. Наносимо їх на числову пряму, досліджуємо знаки для другої похідної.



Отже, на проміжках $(-\infty; 0)$ і $(1; \infty)$ - функція випукла вниз, а на проміжку (0;1) – випукла вверх. $x = 0$ і $x = 1$ є точками перегину графіка функції.

Асимптоти функції. Розглядаючи графік функції $y = \frac{1}{x}$, можна помітити, що коли $x \to +\infty$, то графік функції наближається до осі OY. Таке наближення графіка до прямої називають ***асимптотичним,*** а прямі – ***асимптотами***.

З'ясуємо, як знаходити асимптоти графіка функції.

Кажуть, що пряма $y = kx + l$ називається асимптотою графіка функції $y = f(x)$ при $x \to \infty$, якщо

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - (kx + l)) = 0.$$

Таким чином, якщо пряма $y = kx + l$ є асимптотою графіка функції $f(x)$ при $x \to +\infty$, то функція $a(x) = f(x) - kx - l$ є нескінченно малою при $x \to +\infty$.

Звідси слідує, що $k = \frac{f(x)}{x} - \frac{l+a(x)}{x}$ і тому $l = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx)$, бо $\lim_{x\to\infty}\frac{l+a(x)}{x} = 0.$

Із тієї ж рівності $l = f(x) - kx - a(x)$ і тому $l = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx)$.

Формули $k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ і $l = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx)$ дають можливість знайти асимптоти $y = kx + l$, які ще називають **похилими**.

Пряма $x = a$ називається вертикальною асимптотою графіка функції $f(x)$, якщо $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.

Зауважимо, що при знаходженні вертикальних асимптот графіка функції $f(x)$ в якості точки a, через яку може проходити вертикальна асимптота, **треба розглядати точки розриву даної функції**.

Приклад 2. Знайти асимптоти графіка функції $f(x) = \frac{2x^2+x}{x+1}$.

Так як

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+x}{x(x+1)} = 2,$$

$$l = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}(\frac{2x^2+x}{x+1} - 2x) = \lim_{x\to\infty}(-\frac{x}{x+1}) = -1$$

то пряма $y = 2x - 1$ є похила асимптота графіка функції при $x \to \infty$ і $x \to -\infty$.

Так як $x = -1$ – точка розриву, перевіримо її на вертикальну асимптоту.

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2+x}{x(x+1)} = \frac{1}{0} = \infty$$

Отже, $x = -1$ - вертикальна асимптота.

Питання для контролю і обговорення на семінарському занятті:

1. Коли графік функції $y = f(x)$ називається випуклим вверх, вниз на проміжку $(a; b)$?
2. Яка точка графіка функції називається точкою перегину?
3. Сформулюйте ознаку випуклості графіка диференційованої функції $y = f(x)$ на проміжку $(a; b)$.
4. Сформулюйте алгоритм дослідження функції на випуклість і точки перегину.
5. Що називається асимптотою графіка функції.
6. Виведіть формули знаходження асимптот графіка функції.

Закінчення вивчення теми «Застосування першої та другої похідної до дослідження функції» рекомендуємо присвятити ознайомленню учнів з удосконаленою методичною системою МС-3, яка в порівнянні з МС-2 містить більше властивостей.

Така розширена і удосконалена методична система передбачає:

1. Знайти область визначення $D(y)$ функції.
2. Перевірити парність, непарність функції.
3. Дослідити на періодичність.
4. Знайти нулі функції та проміжки знакосталості.
5. Знайти асимптоти графіка функції.
6. Дослідити функцію на монотонність та екстремальні точки.
7. Знайти інтервали випуклості і точки перегину.
8. Побудувати графік.

Описану схему рекомендуємо продемонструвати учням розглянувши кілька прикладів.

Приклад 3. Дослідити властивості і побудувати графік функції $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$.

Розв'язання

1. $D(y) = R, x \neq 1$.
2. Перевіряємо парність: $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = \frac{-x^3}{x^2-1} = -\frac{x^3}{x^2-1} = -f(x)$.

   Область визначення $D(y)$ симетрична відносно початку координат.

   Отже, функція непарна, графік симетричний відносно початку координат, тому подальші дослідження проводимо тільки для $x \geq 0$.
3. Періодичність. Припустимо, що функція – періодична.

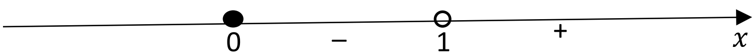
   Тоді точки розриву мають також повторюватись, що не відбувається.

   Отже, $f(x+T) = \frac{(x+T)^3}{(x+T)^2-1} \neq f(x)$ – функція неперіодична.
4. Знайдемо нулі та проміжки знакосталості: $\frac{x^3}{x^2-1} = 0$;

   О.Д.З. $x^2 - 1 \neq 0; x \neq \pm 1$

   $x^3 = 0; x = 0$

   Беремо тільки $x \geq 0$:



   При $x \in (0;1)$ – графік нижче осі OX, а при – вище осі OX. Нуль функції точка $(0;0)$.
5. Знайдемо асимптоти.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(x^2-1)} = 1; l = \lim_{x\to\infty} (\frac{x^3}{x^2-1} - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{\infty} = 0$$

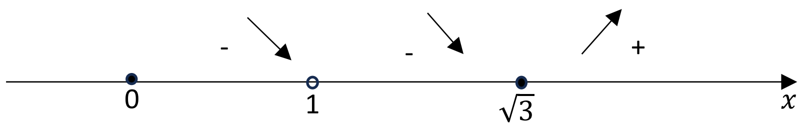
   Отже $y = x$ – похила асимптота. $x = 1$ – точка розриву. Перевіримо, чи буде пряма $x = 1$ вертикальною асимптотою

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{0} = \infty. \text{Отже } x = 1 - \text{вертикальна асимптота.}$$

6. Монотонність: $f'(x) = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$; О.Д.З. $x \neq \pm 1$

$$x^2(x^2-3) = 0; x = 0; x = -\sqrt{3}; x = \sqrt{3}.$$

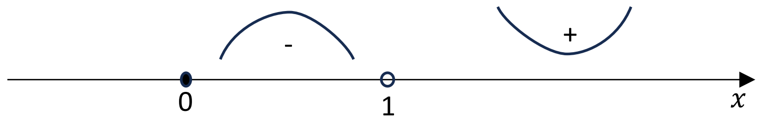
   Критичні точки наносимо на вісь:



На проміжках (0;1) і (1;$\sqrt{3}$) – функція спадає, а на проміжку ($\sqrt{3}$;∞) – зростає; $x_{min} = \sqrt{3} \approx 1{,}7$ - точка екстремуму; $f(x_{min}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}6$. Позначимо $A(1{,}7; 2.6)$.

7. Випуклість: $f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$, О.Д.З. $x \neq \pm 1; 2x(x^2+3) = 0;\ x = 0.$

Критичні точки для першої похідної наносимо на числову пряму для $x \geq 0$.



На основі проведених досліджень побудуємо графік для $x \geq 0$ і симетрично відобразимо відносно початку координат.

З графіка видно, що область значень функції вся числова пряма.

8. Графік функції (рис. 3).

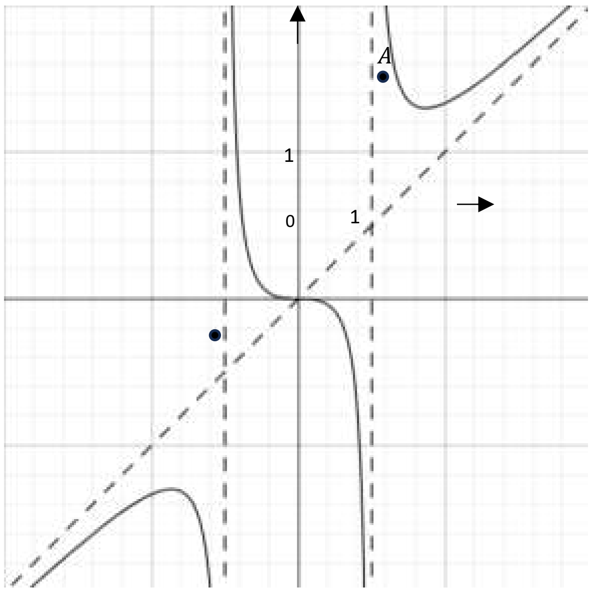


Рис. 3

КІНЕЦЬ ЛЕКЦІЇ

Вироблення вмінь і навичок учнів на застосування удосконаленої методичної системи МС-3 дослідження функції і побудови її графіка рекомендуємо здійснити шляхом розв’язання на практичних завданнях вправ. А перевірку отриманих навчальних досягнень найкраще здійснити шляхом виконання ними індивідуальної домашньої розрахунково-графічної роботи, з наступним обговоренням і захистом (*індивідуально-групова форма роботи*).

4. Похідна як математична модель під час розв'язування практичних та прикладних задач

Вивчення похідної розпочиналось з розгляду доцільних прикладних задач. Тепер, коли «Похідна», як математична модель, учнями досліджена, важливо показати її різноманітні застосування. Таких застосувань багато. Зупинимось на окремих з них.

1) Застосування похідної до знаходження наближених значень функції

Якщо функція диференційовна в точці x_0, то це означає , що $\lim\limits_{\Delta x} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Тому для ***досить малих*** $\boldsymbol{\Delta x}$ виконується наближена рівність: $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x_0)$.

З неї слідує, що $\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$ або $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x$.

Отже, маємо:

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x + f(x_0)} \qquad (1)$$

Ця формула часто застосовується для знаходження значень функції.

Приклад 1. $y = \sqrt[n]{x}$. Користуючись формулою (1) матимемо:

$$\sqrt[n]{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x_0} + \frac{\sqrt[n]{x_0}}{n \cdot x_0} \cdot \Delta x \quad (x \neq 0) \qquad (2)$$

Застосування.

а) Обчислити $\sqrt{4{,}01}$.

Згідно формули (2) маємо:

$\sqrt{4{,}01} = \sqrt{4 + 0{,}01} = \sqrt{4'} + \frac{\sqrt{4}}{2 \cdot 4} \cdot 0{,}01 = 2 + 0{,}25 \cdot 0{,}01 = 2{,}0025.$

Якщо обчислення здійснити за допомогою калькулятора чи таблиць,

то $\sqrt{4{,}01} \approx 2б002498440$ (з дев'ятьма знаками після коми).

Отже, $\sqrt{4{,}01} \approx 2{,}0025.$

б) Обчислити $\sqrt[5]{1028}$.

Оскільки $1028 = 1024 + 4 = 2^{10} + 4$, то $\sqrt[5]{1028} = \sqrt[5]{1024 + 4}$.

Щоб скористатись формулою (2) винесемо з під знака кореня число 1024.

Маємо:

$\sqrt[5]{1028} = 4 \cdot \sqrt[5]{1 + \frac{4}{1024}} = 4 \cdot \sqrt[5]{1 + \frac{1}{256}} \approx 4 \cdot \left(\sqrt[5]{1} + \frac{\sqrt[5]{1}}{5 \cdot 1} \cdot \frac{1}{256}\right) = 4 \cdot \left(1 + \frac{1}{1280}\right) = 4 + \frac{1}{320} \approx$
$4 + 0{,}003125 = 4{,}003125.$

Якщо провести обчислення на калькуляторі, то отримуємо $\sqrt[5]{1028} \approx 4{,}00312013$. Отже, можна вважати, що $\sqrt[5]{1028} \approx 4{,}0031$.

Примітка. *Застосовуючи формулу (1) важливо підібрати «вдало» аргумент x_0 так, щоб значення $f(x_0)$ можна було відшукати швидко і при цьому значення Δx було достатньо малим. У випадках а) і б) ця рекомендація і була врахована.*

2) Застосування похідної для знаходження рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в точці x_0

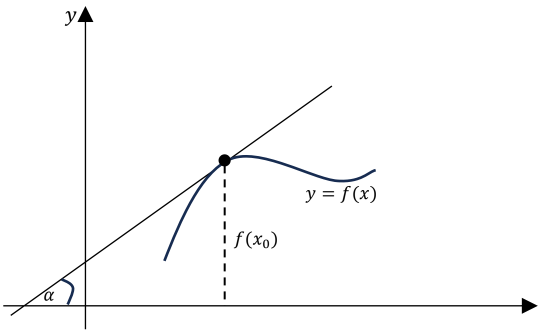


Рис. 4

Нехай задана функція $y = f(x)$ (рис. 4).
Дотична – пряма.
Її рівняння $y = kx + l$.
Оскільки пряма проходить через точку $(x_0; y_0)$ то має місце рівність $y_0 = k \cdot x_0 + l$, звідки $l = y_0 - kx_0$.

Але з геометричного змісту похідної відомо, що $f'(x_0) = tg\alpha$, де α – кут, який утворює дотична з додатним напрямом осі OX.

У рівнянні прямої k – кутовий коефіцієнт, який дорівнює $tg\alpha$.

Отже, $k = tg\alpha$.

Тому рівняння дотичної буде: $y = f'(x_0)x + y_0 - f(x_0)x_0$,

тобто

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \qquad (3)$$

Рівняння нормалі буде

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) \qquad (4)$$

Приклад 2. Запишіть рівняння дотичної і нормалі до параболи $y = x^2 - 2x + 5$ в точці $x_0 = -1$.

Розв'язання

Знаходимо $f'(x) = (x^2 - 2x + 5)' = 2x - 2$. $f'(-1) = -4$. $f'(x_0) = f(-1) = 8$.

Отже рівняння дотичної до графіка даної функції в точці $x_0 = -1$ буде:

$y = 8 - 4(x + 1)$ або $y = -4x + 4$.

Рівняння нормалі: $y = 8 + \frac{1}{4}(x + 1) = 8x + 8\frac{1}{4}$.

Відповідь: $y = -4x + 4$; $y = 8x + 8{,}25$.

3) Застосування похідної до доведення тотожностей

Приклад 3. Доведіть тотожності: а) $arcsinx + arccosx = \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання

а) Розглянемо функцію $y = arcsinx + arccosx$.

Її область визначення $D(y) = [-1; 1]$.

Знайдемо похідну цієї функції: $y' = (arcsinx + arccosx)' = (arcsinx)' + (arccosx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$, для будь-якої точки $x \in (-1; 1)$.

Отже, на проміжку $(-1; 1)$ – функція стала (за ознакою сталості функції).

Нехай $x = 0$.

Тоді $y(0) = \arcsin 0 + arccos0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Отже, для всіх $x \in (-1; 1)$ $y(x) = \frac{\pi}{2}$.

Якщо: $x = -1$, то $y(-1) = \arcsin(-1) + \arccos(-1) = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}$; $x = 1$,то $y(1) = \arcsin(1) + \arccos(1) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$.

Таким чином доведено, що для всіх $x \in [-1; 1]$ $arcsinx + arccosx = \frac{\pi}{2}$.

Тотожність доведена.

б) $ctg\alpha - tg\alpha - 2tg2\alpha = 4ctg4\alpha$.

Розв'язання

Визначимо область визначення даної тотожності.

Щоб існували $ctg \propto$ і $tg \propto$ число $\propto \neq \frac{\pi}{2}n$, де $n \epsilon Z$.

Вираз $tg2 \propto$ існує, якщо $\propto \neq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}k$, $k \epsilon Z$.

Вираз $ctg4 \propto$ існує, якщо $\propto \neq \frac{\pi}{4}m$, $m \epsilon Z$.

Позначимо ці числа на одиничному тригонометричному колі (рис. 5).

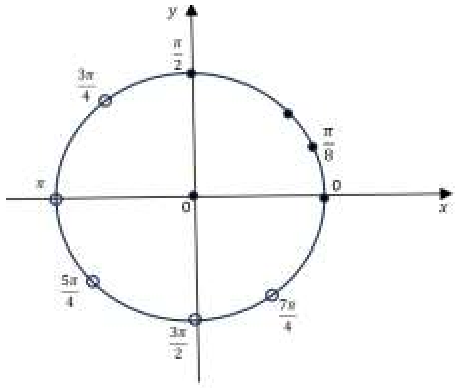


Рис. 5

Отже, область визначення тотожності $\alpha \in R$ крім, $\alpha = \frac{\pi}{4}n,$ де $n \in Z.$

Розглянемо функцію $y(\alpha) = ctg\alpha - tg\alpha - 2tg2\alpha - 4ctg4\alpha.$

Знайдемо її похідну в точці $\alpha \neq \frac{\pi}{4}n,$ де $n \in Z$: $y'(\alpha) = (ctg\alpha - tg\alpha - 2tg2\alpha - 4ctg4\alpha)' = -\frac{1}{sin^2\alpha} - \frac{1}{cos^2\alpha} - 2\cdot\frac{1}{cos^2 2\alpha}\cdot 2 + \frac{4}{sin^2 4\alpha}\cdot 4 = -\frac{1}{sin^2\alpha cos^2\alpha} - \frac{4}{cos^2 2\alpha} + \frac{16}{sin^2 4\alpha} = -\frac{4}{sin^2 2\alpha} - \frac{4}{cos^2 2\alpha} + \frac{16}{sin^2 4\alpha} = -\frac{4}{sin^2 2\alpha cos^2 2\alpha} + \frac{16}{sin^2 4\alpha} = \frac{-4}{sin^2 2\alpha cos^2 2\alpha} + \frac{4}{sin^2 2\alpha cos^2 2\alpha} = 0.$

Отже, $y'(\alpha) = 0$ для будь-якого $\alpha \in D(y)$.

Тому на кожному із проміжків функція стала.

Розглянемо проміжок $(0;\frac{\pi}{4})$.

Нехай $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

Тоді маємо:

$$y\left(\frac{\pi}{8}\right) = ctg\frac{\pi}{8} - tg\frac{\pi}{8} - 2tg\frac{\pi}{4} - 4ctg\frac{\pi}{2} = ctg\frac{\pi}{8} - tg\frac{\pi}{8} - 2 - 4\cdot 0 = \frac{\cos\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}} - \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}} - 2 =$$

$$\frac{cos^2\frac{\pi}{8} - sin^2\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}} - 2 = \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}} - 2 = \frac{2\cos\frac{\pi}{4}}{sin\frac{\pi}{4}} - 2 = 2 - 2 = 0.$$

Отже, для всіх $x \in \left(2k\pi;\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$ $y(\alpha) = 0.$

Тотожна рівність правильна.

Міркуючи аналогічно, переконуємось, що для всіх $\alpha \neq \frac{\pi}{4}n, n \in Z$ тотожна рівність правильна.

4) Застосування похідної до доведення нерівностей

Доведення нерівностей за допомогою похідної спирається на властивості диференційовності функції.

Правило-орієнтир доведення нерівностей за допомогою похідної

Доведення нерівності $\phi(x) > g(x)$ $(\phi(x) < g(x))$ за допомогою похідної здійснюється так:

1) Розглядають допоміжну функцію $f(x) = \phi(x) - g(x)$ на її області визначення або на заданому проміжку;
2) Досліджують за допомогою похідної поведінку функції $f(x)$ на її області визначення або на заданому проміжку (зростання чи спадання, або її найбільше чи найменше значення);

3) Обґрунтовують, спираючись на результати дослідження поведінки функції $f(x)$, що $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ на її області визначення або на заданому проміжку, і доходять висновку про правильність нерівності $\phi(x) > g(x)$ $(\phi(x) < g(x))$.

Приклад 1. Для всіх $a \geq 2$ довести нерівність $a^6 - a^4 \geq 2a^5 - 16$.

Дана нерівність еквівалентна нерівності $a^6 - a^4 - 2a^5 + 16 \geq 0$, якщо $a \geq 2$. Доведемо її.

Розглянемо функцію $f(a) = a^6 - a^4 - 2a^5 + 16$.

Знайдемо її похідну $f'(a) = 6a^5 - 4a^3 - 10a^4$.

Критичними точками функції $f(a)$ будуть корені рівняння $f(a) = 0$:

$6a^5 - 4a^3 - 10a^4 = 0, 3a^5 - 5a^4 - 2a^3 = 0, a^3(3a^2 - 5a - 2) = 0, a_1 = 0, a_2 = 2, a_3 = -\frac{1}{3}$.

Похідну $f'(a)$ запишемо так: $f'(a) = 6a^3(a-2)(a+\frac{1}{3})$.

Коли $a > 2$, $f'(a) > 0$.

Отже на проміжку $[2; +\infty]$ функція $y = f(a)$ зростає.

Тому найменшого свого значення на цьому проміжку вона набуде в точці $a = 2$: $f(2) = 0$.

Тоді для будь-якого $a \geq 2$ значення $f(a) \geq 0$, тобто $a^6 - a^4 - 2a^5 + 16 \geq 0$, що й потрібно було довести.

Приклад 2. Довести, що $a^5 + b^5 \geq \frac{1}{16}$, якщо $a + b = 1, ab > 0$.

Оскільки $ab > 0$, то a і b – числа одного знака.

Оскільки їх сума дорівнює 1, тому a і b – додатні, отже $a \in [0; 1]$ і $b \in [0; 1]$.

Позначимо $a = x$, тоді $b = 1 - x$.

Задана нерівність набере вигляду $x^5 + (1-x)^5 \geq \frac{1}{16}$, де x $\in [0; 1]$.

Розглянемо функцію $f(x) = x^5 + (1-x)^5 - \frac{1}{16}$.

Знайдемо її похідну і критичні точки:

$f'(x) = 5x^4 - 5(1-x)^4 = 5(x^4 - (1-x)^4) = 5(x^2 - (1-x)^2)(x^2 + (1-x)^2) = 5(2x-1)(x^2 + (1-x)^2)$.

Розв'язавши рівняння $f'(x) = 0$, знаходимо, що $x_0 = \frac{1}{2}$.

Коли $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right) f'(x) < 0$, а коли $x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right] f'(x) > 0$.

Отже, $x_0 = \frac{1}{2}$ – точка мінімуму і в цій точці значення функції дорівнює $f_{min}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{16} = 0$.

Звідси випливає, що для всіх $x \in [0; 1]$ $f(x) \geq 0$, тобто $a^5 + b^5 \geq \frac{1}{16}$.

Приклад 3. Довести, що $e^{\pi} > \pi^{e}$.

Прологарифмуємо обидві частини даної нерівності, одержимо еквівалентну їй нерівність $\pi \ln e > e \ln \pi$.

Поділимо одержану нерівність на число $\pi \cdot e > 0$.

Одержимо рівносильну нерівність $\frac{\ln e}{e} > \frac{\ln \pi}{\pi}$.

Доведемо її. Для цього розглянемо функцію $y = \frac{\ln x}{x}$, де $x \in (e; +\infty)$.

Її похідна дорівнює:

$$y' = (\frac{\ln x}{x})' = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Отже, $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. Для всіх $x > e, y'(x) < 0$.

Функція $y = \frac{\ln x}{x}$ на проміжку $[e; +\infty)$ спадна.

Оскільки $e < \pi$, то $y(e) > y(\pi)$, тобто $\frac{\ln e}{e} > \frac{\ln \pi}{\pi}$, що й треба було довести.

5) Застосування похідної до розв’язування прикладних задач на знаходження найбільшого (найменшого) значення величин

Приклад 2. Із квадратного листа картону з стороною a потрібно виготовити коробку з квадратною основою без кришки, щоб об’єм був найбільшим.

Для розв’язання цієї задачі потрібно утворити функцію, яка задає об’єм коробки.

Для цього позначимо через x – довжину сторони квадрата, який вирізається в кожному куті (рис 6.).

Так як в основі коробки квадрат, то $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$ і розміри його будуть:

висота - x; сторона основи - $(a - 2x)$.

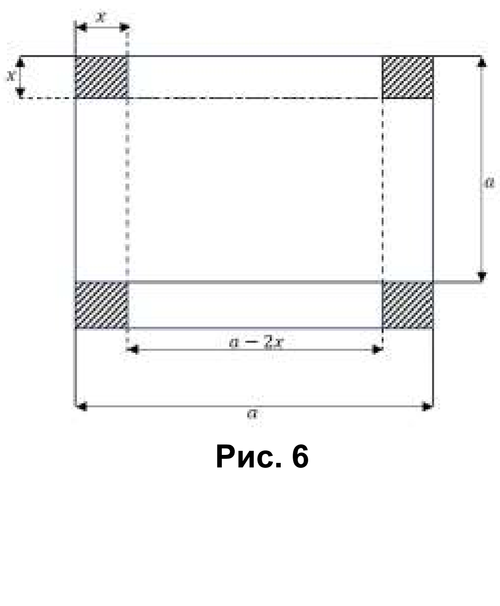


Рис. 6

Тому $V = (a - 2x)^2 \cdot x$, де $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$.

Таким чином, задача звелася до знаходження найбільшого значення функції $V(x)$ на відрізку $[0; \frac{a}{2}]$. так як $V'(x) = a^2 - 8ax + 12x^2$, то критичними точками із рівняння $a^2 - 8ax + 12x^2 = 0$ будуть $x_1 = \frac{a}{6}$; $x_2 = \frac{a}{2}$.

Тому знаходимо $V(0) = 0$; $V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2a^3}{27}$; $V\left(\frac{a}{2}\right) = 0$.

Отже функція приймає найбільше значення в точці $x = \frac{a}{6}$, тому найбільший об’єм буде, якщо коробка має розміри: висота $\frac{a}{6}$, сторона дна $\frac{2a}{3}$. Тоді $V_{max} = \frac{2a^3}{27}$.

Приклад 3. Електрична лампочка переміщається (нехай на блоці) вздовж вертикальної прямої OB (рис. 7). На якій відстані від горизонтальної площини слід її розмістити, щоб в точці цієї площини освітленість була найбільшою $(OA = a)$.

Розв’язання

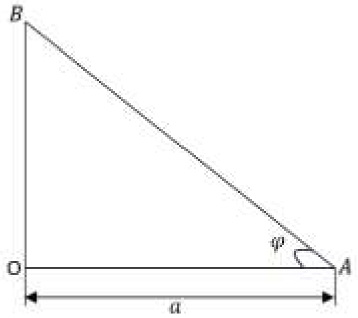


Рис. 7

З курсу фізики відомо, що освітленість прямо пропорційна $sin\varphi$ і обернено пропорційна квадрату відстані $AB = r$, тобто $E = k \cdot \frac{sin\varphi}{r^2}$, де r– коефіцієнт пропорційності, який залежить від сили світла лампочки.

Беремо $x = OB$ – незалежна змінна, тоді $sin\varphi = \frac{x}{r}$; $r = \sqrt{x^2 + a^2}$, $0 < x < \infty$, тому $E = k \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^{\frac{2}{3}}}$.

Знайдемо $E'(x)$: $E' = k \cdot \frac{a^2-2x^2}{(x^2+a^2)^{\frac{5}{2}}}$, тоді $k \cdot \frac{a^2-2x^2}{(x^2+a^2)^{\frac{5}{2}}} = 0$.Звідси $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$– критична точка.

Оскільки функція $E(x)$ має тільки одну критичну точку, а в умові задачі сказано, що існує положення лампочки, при якому освітлення в точці A найбільше, то $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$– шукана відстань.

6) Застосування похідної до розв’язування прикладних задач природничого та економічного змісту

Похідна постає як фундаментальне поняття математичного аналізу, за допомогою якого досліджують процеси і явища в природничих, соціальних і економічних науках. Вона характеризує швидкість зміни функції по відношенню до зміни незалежної змінної. В геометрії похідна характеризує кривизну графіка, в механіці – швидкість нерівномірного руху, в біології – швидкість розмноження колонії мікроорганізмів, в економіці – вихід продукту на одиницю витрат, в хімії – швидкість хімічної реакції.

Розглянемо використання похідної на прикладі розв’язання задач біологічного змісту та методику їх розв’язання.

Задача 1. Нехай популяція бактерій в момент часу t (час в секундах) нараховує $x(t)$ особин: $X(t) = 3000 + 100t^2$. Ця формула виражає залежність кількості особин від часу. Знайти швидкість росту популяції:

а) в момент часу 1 с;

б) в момент часу 60 с.

Розв'язання

1. Створення математичної моделі до задачі
Розв'язання даної задачі передбачає розуміння поняття ***популяція***, тому перед створенням математичної моделі до задачі, варто учням наголосити на цьому: ***Популяція*** – це сукупність організмів одного виду, що займають обмежений ареал (територія поширення якогось об'єкта або явища), мають спільне походження за фенотипом та географічно ізольовані від інших популяцій даного виду, можуть вільно схрещуватися і дають плодюче потомство. В умові задачі задано функцію швидкості росту популяції, яка має наступний вигляд: $X(t) = 3000 + 100t^2$, де x – кількість особин, що виражається додатнім числом. Перекладаючи вимогу запропонованої задачі на мову математики, отримуємо математичну задачу: **визначити похідну функції $\boldsymbol{X(t) = 3000 + 100t^2}$ в точці $\boldsymbol{t = 1}$ та $\boldsymbol{t = 60}$.**
2. Хід розв'язання математичної задачі
Знаходимо похідну $X'(t)$ від заданої функції: $X'(t) = (3000 + 100t^2)' = 200t.$ Отже, маємо $X'(t) = 200t$ – швидкість росту популяції. Знаходимо значення похідної $X'(t)$ при $t = 1$ та $t = 60$: А) $X'(1) = 200 \cdot 1 = 200$ – швидкість росту популяції через 1 с; Б) $X'(60) = 200 \cdot 60 = 1200$ – швидкість росту популяції через 60 с. *Розв'язання математичної задачі завершене.*
3. Інтерпретація розв'язків математичної задачі мовою біології
Отже, швидкість росту популяції в момент часу $t = 1$ становить 200 ос/с; а в момент часу $t = 60$ – 1200 ос/с.
Відповідь: а) 200 ос/с; 1200 ос/с.

Задача 2. Реакція організму на введені ліки може виражатися в підвищені кров'яного тиску, зменшення температури тіла, зміні пульсу або інших фізіологічних показників. Ступінь реакції залежить від призначених ліків та їх дози. Припустимо, що *X* позначає дозу призначених ліків, тоді *У* – функція ступеня реакції, що виражається формулою $y = x^2(a - x)$, де a – біомаса. При якому значенні *X* реакція максимальна?

Розв'язання

1. Створення математичної моделі до задачі

За умовою задачі маємо функцію ступеня реакції, яка задана залежністю

$y = x^2(a - x)$, де a – біомаса.

Для того, щоб розв'язати дану задачу на мові математики, знайдемо похідну функції та визначимо максимальну межу до настання побічних реакцій організму на введені ліки.

Маємо математичну задачу: **знайти найбільше значення функції $\boldsymbol{y = x^2(a - x)}$.**

2. Хід розв'язання математичної задачі

Знайдемо похідну заданої функції:

$$y'(x) = (x^2(a - x))' = 2ax - 3x^2$$

Зауважимо, що доза призначених ліків знаходиться в наступних межах $0 < x < a$, так як біомаса a виражається натуральним числом.

Знайдемо стаціонарні точки.

Для цього прирівняємо отриману похідну до нуля, тобто $y'(x) = 0$.

Отримаємо: $2ax - 3x^2 = 0$.

Це можна подати в іншому вигляді: $x = \frac{2a}{3}$. Тоді $y'(x) = 0$ при $x = \frac{2a}{3}$.

В цій точці $y''\left(\frac{2a}{3}\right) = -2a < 0$. Тоді $x = \frac{2a}{3}$ – точка максимуму.

Оскільки друга похідна від'ємна, то в точці $x = \frac{2a}{3}$ функція досягає найбільшого значення.

Розв'язання математичної задачі завершене.

3. Інтерпретація розв'язків математичної задачі мовою біології

Виходячи зі змісту задачі, одержаний результат показує, що максимальна реакція на прийняття ліків досягається при $x = \frac{2a}{3}$ дозі ліків , де a – біомаса.

Відповідь: Максимальна реакція на прийняття ліків досягається при $x = \frac{2a}{3}$, де a – біомаса.

На уроках математики учні набувають не тільки математичної компетентності, а й інших, зокрема – економічної. Для прикладу проілюструємо одну з прикладних задач з економіки, яку ми можемо запропонувати учням, як задачу, яку доцільно буде розв'язати з ними на уроках з алгебри та початків аналізу під час вивчення поняття похідної та завдяки якій в учнів відбуватиметься формування не лише математичної, а й економічної компетентності.

Задача 3. Нехай у короткостроковому періоді виробнича функція залежить тільки від чисельності персоналу і має вигляд: $Q = 6L^2 - 0{,}2L^3$, де Q – випуск продукції; L - кількість працюючих. Якою має бути чисельність персоналу, щоб випуск Q досягав максимального значення?

Розв'язання

1. Створення математичної моделі до задачі

Вивчивши умову задачі учні мають з'ясувати для себе зміст термінів: виробництво, виробнича функція, що таке випуск продукції і від чого він залежить. Для цього вони можуть скористатись або підказкою вчителя, або довідниками. Зокрема, учні мають усвідомити, що:

- ***Виробництво*** це процес використання праці та обладнання (капіталу) разом з природними ресурсами і матеріалами для створення необхідних продуктів та надання послуг. Виробничі послуги праці, капіталу, землі та підприємницьких здібностей називаються факторами виробництва.
- ***Виробнича функція*** це відношення між будь-яким набором факторів виробництва та максимально можливим обсягом продукції, виробленим за допомогою цього набору факторів: $Q = f'(L, K, M)$, де Q - обсяг виробництва: L - затрати праці; K - затрати капіталу; M - матеріали.

В умові задачі виробнича функція виражена залежністю $Q = 6L^2 - 0{,}2L^3$, де Q - випуск продукції, L - кількість працюючих. Таку залежність в математиці називають функцією. Таким чином, задано функцію $Q = 6L^2 - 0{,}2L^3$. Очевидно, виходячи зі змісту задачі, що Q і L - значення і аргумент функції є натуральні числа.

Перекладаючи вимогу запропонованої задачі на мову математики, отримуємо математичну задачу: **знайти максимум функції $\boldsymbol{Q = 6L^2 - 0{,}2L^3}$, де $\boldsymbol{L}$ - натуральний аргумент.**

2. Хід розв'язання математичної задачі

Для визначення максимуму заданої функції знайдемо її похідну: $Q'(L) = (6L^2 - 0{,}2L^3)' = 12L - 0{,}6L^2$. Знайдемо стаціонарні точки. Для цього розв'яжемо рівняння $12L - 0{,}6L^2 = 0$; $L_1 = 0, L_2 = 20$. Оскільки аргумент L, за умовою, не дорівнює 0, то розглядаємо лише $L_2 = 20$.

Для визначення виду екстремуму в точці $L = 20$, знаходимо другу похідну: $Q'' = 12 - 1{,}2L$. При $L = 20$, $Q''(20) < 0$. Отже, $L = 20$ - *точка максимуму*, а $Q_{max}(20) = 6 \cdot 20^2 - 0{,}2 \cdot 20^3 = 800$.

Розв'язання математичної задачі завершене.

3. Інтерпретація розв'язків математичної задачі мовою економіки

Отже, випуск продукції Q досягає максимального значення – 800 одиниць при чисельності персоналу в 20 осіб. (Оскільки отримали $L = 20$ – точку максимум)

Відповідь:

Список прикладних задач можна продовжувати. Важливо, щоб вчитель мав їх добірку і зумів переконати учнів у важливості вивчення теми «Похідна і її застосування» та знав методику формування в них умінь застосовувати отримані знання на практиці.

П І Д С У М О К

Тема «Похідна і її застосування до розв'язування задач» велика за обсягом і за часом на її вивчення. Її доцільно, виходячи з дидактичних міркувань розділити на три самостійні, логічно завершені теми: 1) «Похідна»; 2) «Застосування першої і другої похідної до дослідження функції»; 3) «Застосування похідної до розв'язування математичних і прикладних задач». Головною метою вивчення першої з них має бути: а) сформувати в учнів поняття похідної функції в точці і похідної функції, створити таблицю похідних основних елементарних функцій; б) навчити учнів диференціювати складені елементарні функції, користуючись відповідними правилами і теоремами.

Головна мета другої теми – навчити учнів за допомогою похідної досліджувати властивості складених елементарних функцій (опанувати методичною схемою МС-3) і будувати схематично їх графіки. У третій темі головною метою її вивчення має бути формування в учнів застосовувати похідну, як потужну математичну модель, до розв'язування математичних і прикладних задач.

МЕТОДИЧНІ ЗАДАЧІ
для самостійного розв'язування

1. Проаналізуйте задачний матеріал в діючих альтернативних підручниках з алгебри і початків аналізу для старшої профільної школи на предмет його ефективності і достатності для вивчення теми «Похідна і її застосування до розв'язування задач».

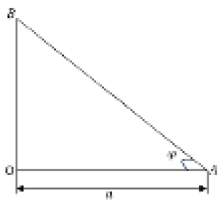
2. Створіть добірку задач на застосування похідної до розв'язування: а) математичних задач; б) прикладних задач. Розв'яжіть їх, опишіть методику розв'язання.

3. Розв'яжіть вправи:

а) Обчисліть з допомогою похідної $\sqrt[3]{27{,}03}$, встановіть точність наближення результату;

б) Дослідить і побудуйте графік функції $y = \frac{5(x-2)}{x^2}$;

в) Електрична лампочка переміщується (за допомогою блока) вздовж вертикальної прямої (стовпа). на якій відстані від землі слід її розмістити, щоб об'єкт, який розміщений в точці A був освітлений найяскравіше ($OA = a$).



*) *Вказівка.* З курсу фізики відомо, що освітленість прямо пропорційна $sin\varphi$ і обернено пропорційна квадрату відстані $AB = r$, тобто $E = k \cdot \frac{sin\varphi}{r^2}$, k - коефіцієнт пропорційності, який залежить від світла лампочки.

г) З'ясуйте без допомоги калькулятора, що більше $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$ чи $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$?

д) Визначити розміри відкритого басейну з квадратним дном і об'ємом 32 $м^3$, щоб на облицювання його стін і дна було витрачено найменшу кількість матеріалу.

… Сила і загальність методу диференціального та інтегрального числень такі, що, не ознайомившись з ними, не можна як слід зрозуміти все значення математики для природознавства й техніки і навіть повністю оцінити всю красу та захопливість самої математичної науки

А. М. Колмогоров

Л Е К Ц І Я 2.11

ТЕМА *Методика вивчення показникової та логарифмічної функцій*

П Л А Н

1.	***Місце теми в програмі, зміст навчального матеріалу, основна мета вивчення, вимоги до підготовки учнів. Орієнтовне календарне планування вивчення теми***
2.	***Степінь з дійсним показником та його властивості. Логарифми. Перетворення показникових і логарифмічних виразів***
3.	***Показникова і логарифмічна функції, їх властивості і графік***
4.	***Показникові і логарифмічні рівняння (нерівності) та їх способи розв'язування***
5.	***Показникова і логарифмічна функції як моделі під час розв'язування прикладних задач***

К О Н С П Е К Т Л Е К Ц І Ї

1. Місце теми в програмі, зміст навчального матеріалу, основна мета вивчення, вимоги до підготовки учнів. Орієнтовне календарне планування вивчення теми

За діючою програмою профільного рівня названа тема вивчається в 11 класі. Зміст навчального матеріалу та вимоги до підготовки учнів подано у таблиці 1.

Таблиця 1

Зміст навчального матеріалу	*Навчальні досягнення учнів*
Тема 8. Показникова та логарифмічна функції (25 год) *Степінь із дійсним показником*. Показникова функція. Логарифми та їх властивості. Логарифмічна функція. *Показникові та логарифмічні рівняння і нерівності та їх системи, зокрема з параметрами.* *Похідні показникової і логарифмічної функцій*. *Застосування показникової та логарифмічної функцій у прикладних задачах*	*Формулює* означення показникової та логарифмічної функцій та їх властивості. *Формулює* означення логарифму та властивості логарифмів. *Будує* графіки показникових і логарифмічних функцій. *Перетворює* вирази, які містять логарифми. *Знаходить* похідні показникових, логарифмічних, степеневих функцій і застосовує їх до дослідження цих класів функцій. *Розв'язує* показникові та логарифмічні рівняння і нерівності та їх системи, зокрема з параметрами

Основна мета вивчення теми : сформувати поняття степеня з дійсним показником і вивчити його властивості; навчити учнів будувати схематично графіки показникової та логарифмічної функцій за їх властивостями, розв'язувати показникові та логарифмічні рівняння і нерівності.

За чинною програмою на вивчення теми рекомендується витрати 25 годин.

Ми вважаємо, що цього замало. Тому пропонуємо розділити дану тему на дві підтеми і збільшити кількість годин. Такий поділ подано нижче.

Підтема 6.1. Показникова функція, її властивості і графік (18 год)

Зміст навчального матеріалу, вимоги до підготовки учнів, календарне планування та основна мета вивчення теми подано в таблиці 2.

Таблиця 2

№	Назва теми заняття, види робіт	К-ть годин	Навчальні досягнення учнів (учень/учениця)
1	Степінь з дійсним показником і його властивості	2	- пояснює зміст поняття степеня з дійсним показником, знає його властивості; - знає визначення і властивості показникової функції; - вміє будувати схематичні графіки показникових функцій за їх властивостями, знаходити похідну показникової функції; - розв'язує показникові рівняння і нерівності відомими способами, прикладні задачі, в яких математичною моделлю є показникова функція ***) основна мета вивчення теми:*** вивчити властивості показникової функції, навчити будувати її графік, розв'язувати показникові рівняння і нерівності
2	Перетворення виразів що містять степінь з дійсним показником СР-1	2	
3	Показникова функція її властивості і графік. Похідна показникової функції	3	
4	Побудова графіків показникової функції СР-2	2	
5	Показникові рівняння і способи їх розв'язування СР-3	3	
6	Показникові нерівності і способи їх розв'язування СР-4	3	
7	Показникові рівняння (нерівності) з параметрами	2	
8	Контрольна робота	1	
	Всього	**18**	

Підтема 6.2. Логарифмічна функція, її властивості і графік (17 год)

Зміст навчального матеріалу, вимоги до підготовки учнів, календарне планування та основна мета вивчення теми подано в таблиці 3.

Таблиця 3

№	Назва теми заняття, види робіт	К-ть годин	Навчальні досягнення учнів (учень/учениця)
1	Логарифм, основні властивості логарифмів	1	- знає визначення і властивості логарифмів, логарифмічної функції; - вміє будувати схематичні графіки логарифмічних функцій за їх властивостями, знаходити похідну логарифмічної функції; - розв'язує логарифмічні рівняння і нерівності відомими способами, прикладні задачі, в яких математичною моделлю є логарифмічна функція ***) основна мета вивчення теми:*** вивчити властивості логарифмічної функції, навчити будувати її графік, розв'язувати логарифмічні рівняння і нерівності
2	Перетворення логарифмічних виразів СР-1	2	
3	Логарифмічна функція, її властивості і графік. Похідна логарифмічної функції	3	
4	Побудова графіків логарифмічної функції СР-2	2	
5	Логарифмічні рівняння і способи їх розв'язування СР-3	3	
6	Логарифмічні нерівності і способи їх розв'язування СР-4	3	
7	Логарифмічні рівняння (нерівності) з параметрами	2	
8	Контрольна робота	1	
	Всього	**17**	

2. Степінь з дійсним показником та його властивості. Логарифми. Перетворення показникових і логарифмічних виразів

1) Вивчення показникової і логарифмічної функції слід розпочати з визначення степеня з дійсним показником та вивчення його властивостей. З поняттям степеня з раціональним показником та його властивостями учні знайомилися під час вивчення теми «Степенева функція, її властивості і графік». Тому доцільно пригадати з учнями відповідні визначення і властивості, які стають необхідними для формування нового поняття – степеня з дійсним показником. Оскільки множина дійсних чисел $R = Q \cup I$, де Q – множина раціональних чисел, а I – множина ірраціональних чисел, то залишається визначитися з поняттям степеня з ірраціональним показником.

Рекомендуємо формувати це нове поняття конкретно-індуктивним методом, тобто, розпочати з конкретних прикладів, а потім зробити узагальнення і сформулювати означення для довільного ірраціонального показника.

Отже, розглянемо степінь $2^{\sqrt{3}}$, де $\sqrt{3}$ – ірраціональне число.

Відомо, що $\sqrt{3} = 1{,}7320508075688772235274463415059\ldots$ – нескінченний неперіодичний десятковий дріб.

Для числа $\sqrt{3}$ можна побудувати дві послідовності раціональних чисел:

$$x_0 = 1 < \sqrt{3} < 2 = x_0^/$$

$$x_\mathrm{i} = 1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8 = x_\mathrm{i}^/$$

$$x_2 = 1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74 = x_2^/$$

$$x_3 = 1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733 = x_3^/$$

$$x_4 = 1{,}7320 < \sqrt{3} < 1{,}7321 = x_4^/$$

$$x_5 = 1{,}73205 < \sqrt{3} < 1{,}73206 = x_5^/$$

$$x_6 = 1{,}732050 < \sqrt{3} < 1{,}732051 = x_6^/$$

$$x_7 = 1{,}7320508 < \sqrt{3} < 1{,}7320519 = x_7^/$$

За аксіомою про вкладені відрізки маємо:

$$\left[x_0;\ x_0^/\right] \supset \left[x_1;\ x_1^/\right] \supset \left[x_2;\ x_2^/\right] \supset \cdots \sqrt{3} = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n^/$$

Послідовність $(x_n)_0^\infty$ та $(x_n')_0^\infty$ – раціональні числа.

Степінь 3^{x_n} та $3^{x_n'}$, де $n = 0; 1; 2; \ldots$ визначено.

Побудуємо дві нові послідовності (1) і (2) :

(1) (2)

$a_1 = 2^1 = 2$ $b_1 = 2^2 = 4$

$a_2 = 2^{1,7} = \mathbf{3},249009585$ $b_2 = 2^{1,8} = \mathbf{3},482202253$

$a_3 = 2^{1,73} = \mathbf{3},\mathbf{3}17278183$ $b_3 = 2^{1,74} = \mathbf{3},\mathbf{3}40351678$

$a_4 = 2^{1,732} = \mathbf{3},\mathbf{32}1880096$ $b_4 = 2^{1,733} = \mathbf{3},\mathbf{32}4183446$

$a_5 = 2^{1,7320} = \mathbf{3},\mathbf{32}1880096$ $b_5 = 2^{1,7321} = \mathbf{3},\mathbf{3221}1036$

$a_6 = 2^{1,73205} = \mathbf{3},\mathbf{32}995226$ $b_6 = 2^{1,73206} = \mathbf{3},\mathbf{3220}18252$

$a_7 = 2^{1,732050} = \mathbf{3},\mathbf{321}995226$ $b_7 = 2^{1,732051} = \mathbf{3},\mathbf{3221}997529$

$a_8 = 2^{1,7320508} = \mathbf{3},\mathbf{321997}068$ $b_8 = 2^{1,7320509} = \mathbf{3},\mathbf{321997}298$

За властивостями степеня з раціональним показником послідовності (1) монотонно зростає, а послідовність (2) монотонно спадає.

Перша – обмежена зверху, друга – обмежена знизу.

За аксіомою про вкладені відрізки

$$[a_1;\ b_1\ ] \supset [a_2;\ b_2\ ] \supset [a_3;\ b_3\ ] \supset \cdots$$

де довжини відрізків прямують до 0, ці послідовності збігаються до одного числа.

Отже, маємо, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Тому, прийнято вважати, що $2^{\sqrt{3}} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 3{,}321997$ ...

Отже, $2^{\sqrt{3}} = 3{,}32199$ ...

Варто розглянути ще один приклад, коли основа степеня менша одиниці. Нехай основа степеня дорівнює 0,5 а показник знову дорівнює $\sqrt{3}$. Скористаймося ще раз двома послідовностями (x_n) і $(x_n^/)$, одна з яких монотонно зростає, а друга монотонно спадає. $\sqrt{3} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^/$.

Побудуємо дві нові послідовності:

(3) (4)

$m_1 = 0{,}5^1 = \mathbf{0},5$ $m_1^/ = 0{,}5^2 = 0{,}25$

$m_2 = 0{,}5^{1,7} = \mathbf{0},307786103$ $m_2^/ = 0{,}5^{1,8} = \mathbf{0},\mathbf{2}87174589$

$m_3 = 0{,}5^{1,73} = \mathbf{0},\mathbf{30}1451957$ $m_3^/ = 0{,}5^{1,74} = \mathbf{0},\mathbf{29}9369676$

$m_4 = 0{,}5^{1,732} = \mathbf{0},\mathbf{30}1034345$ $m_4^/ = 0{,}5^{1,743} = \mathbf{0},\mathbf{29}8747801$

Тепер послідовність (3) монотонно спадна і обмежена знизу, а послідовність (4) монотонно зростаюча і обмежена зверху (наслідок того, що $a < 1$) обидві послідовності збіжні.

За аксіомою про вкладені відрізки $[m_1^/ \; ; m_1] \supset [m_2^/ \; ; m_2] \supset \left[m_3^/ \; ; m_3\right] \supset [m_4^/ \; ; m_4]$.

Довжини відрізків прямують до 0. Маємо, що $\lim\limits_{n\to\infty} m_n^/ = \lim\limits_{n\to\infty} m_n$

Тому прийнято вважати, що $0{,}5^{\sqrt{3}} = \lim\limits_{n\to\infty} m_n^/ = \lim\limits_{n\to\infty} m_n = 0{,}30102 \ldots$

Отже, $0{,}5^{\sqrt{3}} = 0{,}30102 \ldots$

Після розгляду доцільних прикладів можна зробити узагальнення і сформулювати означення степеня з ірраціональним показником.

Нехай дано $a > 0$ та задано ірраціональне число $\propto$. Для даного ірраціонального числа є дві послідовності раціональних чисел $(\propto_n)$ і $(\propto_n^/)$ таких, що обидві монотонні, одна з них буде обмежена знизу (наприклад $(\propto_n)$), а друга (наприклад $(\propto_n^/)$ обмежена зверху. Обидві збіжні до числа $\propto$. Тоді маємо:

Означення. *Степенем числа a з ірраціональним показником $\propto$ називається $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\propto_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{\propto_n}$, тобто $a^{\propto} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{\propto_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{\propto_n}$, де $(\propto_n)$ і $(\propto_n^/)$ – послідовності раціональних чисел, що прямують до числа $\propto$.*

Таким чином, для будь-якого числа $a > 0$, степінь a^x, де *x* – довільне дійсне число – визначений і дорівнює додатному дійсному числу.

Після цього учням слід повідомити основні властивості, з якими вони знайомилися раніше, але лише для раціонального показника : тепер же, для $a > 0$ і дійсних чисел *x* мають місце ті ж самі тотожні рівності:

(1) для будь-якого $x \in R$, $a^x > 0$;

(2) якщо $a > 1, x > 0,$ то $a^x > 1$.

Залишаються правильними також рівності :

(1) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$; (2) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$;

(3) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; (4) $a^x : a^y = a^{x-y}$;

(5) $(a^x)^y = a^{xy}$.

Тотожні рівності 1-5 можна прийняти без доведення (строгі доведення, як дослідницьку роботу) можна запропонувати окремим учням. Для цього вони мають скористатись основними теоремами про границю послідовності.

Далі, працюючи з учнями за вже відомою їм схемою, з якою вони були ознайомлені під час вивчення алгебраїчних, степеневих та тригонометричних виразів, повідомляємо які вирази називають ***показниковими***.

Зокрема, таке повідомлення може виглядати наступним чином: *розглянемо множину дійсних чисел* R*, множину степенів з дійсних показником* $S = \{a^x,\ b^x, \dots\}$ *і множину арифметичних дій* $Q = \{+,\ -, \dots\}$*. Запис, утворений з елементів множин* R *і* S*, поєднаних знаками дій з множини* Q *називають* ***показниковим виразом.***

Наприклад,

а) $16^{0,25+\sqrt{20}} : 16^{2\sqrt{5}}$;   б) $x^{\sqrt{7}}$;   в) $(x^2-1)^{\sqrt{5}}$;   г) $a^{x^2-x} \cdot a^{x+1}$.

Вивчаючи показникові вирази учні мають навчитися:

- встановлювати область визначення виразу;
- спрощувати вираз, тобто зводити його до тотожно рівного йому виразу;
- доводити тотожну рівність двох показникових виразів;
- обчислювати числове значення показникового виразу для заданих значень змінних.

Отже, має бути розв'язана з учнями достатня кількість тренувальних вправ, щоб такі уміння в них сформувалися. В діючих навчальних підручниках добірка таких вправ достатня.

2) Поняття логарифма числа та його властивостей пропонуємо формувати в учнів абстрактно-дедуктивним методом, скориставшись розглядом дії, зворотної до дії піднесення до степеня. Суть такого підходу полягає в наступному.

До цих пір учні для даного числа $a > 0$ вчились відшукувати значення степеня a^x, де x – задане дійсне число (показник степеня).

Пряма дія виконувалася за схемою: дано число $a > 0$, для $x \in R \to$ відшукувалося число $b = a^x$.

Зворотна дія може розглядатися за схемою: дано число b і число $a > 0$ $\to$ необхідно знайти такий показник степеня $x \in R$, щоб $a^x = b.$

Таким чином, дія зворотна до дії піднесення числа до степеня з дійсним показником приводить до математичної задачі: «Для заданого числа $a > 0$ і $b > 0$ знайти таке дійсне число x, щоб виконувалась рівність $a^x = b$». Розв'язком такої задачі займались незалежно один від одного: *шотландський математик* Джон Непер (1550-1617 р.р.) та *швейцарський математик* Юстус Бюргі (1552-1632 р.р.).

Джон Непер назвав розв'язком рівняння $a^x = b$ число x – логарифмом числа b за основою a (*від грецького logos – слово і aritmos – число*). Пізніше, математики запровадили символічний запис для такого числа x: $x = \log_a b$, а творцем логарифмів стали вважати Джона Непера (*рекомендуємо запропонувати учням підготувати* *історичну довідку про відкриття логарифмів і їх потребу для практичних обрахунків*).

Після таких повідомлень учням слід сформулювати означення.

Означення. *Логарифмом додатного числа* b *за основою* a *(*$a > 0, a \neq 1$*) називається показник степеня, до якого треба піднести число* a*, щоб одержати* b*. Позначення* $\log_a b$.

Зразу ж учням слід повідомити, що оскільки $a > 0$ та $a \neq 1$, а $x = \log_a b$ – показник, то мають місце *наступні властивості*:

1) $b > 0,$ бо $b = a^x$ (тобто логарифм існує лише для додатних чисел b);

2) $a^{log_a^b} = b$ (основна логарифмічна тотожність).

Якщо $a = 10$, то логарифм називають ***десятковим і позначають*** $\boldsymbol{lgb}$.

Якщо $a = e$ (число Ейлера), то логарифм називають ***натуральним і позначають*** $\boldsymbol{lnb}$.

З властивостей степеня з дійсним показником

слідують наступні властивості логарифмів:

1)	$\log_a 1 = 0$	логарифм одиниці за будь-якою основою дорівнює 0;
2)	$\log_a a = 1$	логарифм числа, рівного основі, дорівнює 1;
3)	$\log_a(x \cdot y) = log_a x + log_a y$	логарифм добутку додатних чисел дорівнює сумі логарифмів множників;
4)	$\log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y$	логарифм частки додатних чисел дорівнює різниці логарифмів діленого і дільника;
5)	$\log_a x^{\propto} = \propto \cdot\, log_a x$	логарифм степеня додатного числа дорівнює добутку показника степеня на логарифм основи цього степеня

Інші властивості, наприклад, про перехід до нової основи – можуть бути встановлені з учнями під час розв'язування справ.

Властивості 1-2 очевидні, а властивості 3-5 варто з учнями довести.

Рекомендуємо вчителю довести разом із учнями одну з них, а інші – запропонувати учням довести самостійно.

Проілюструємо можливе доведення, наприклад, властивості (4).

Довести, що $log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y$*, де* $x > 0,\ y > 0.$

Доведення: нехай $log_a \frac{x}{y} = \propto,\ log_a x = \propto_1,\ \ log_a y = \propto_2.$

Тоді за означенням логарифма маємо: $xy = a^{\propto},\ x = a^{\propto_1},\ y = a^{\propto_2}.$

$x \cdot y = a^{\propto_1} \cdot a^{\propto_2} = a^{\propto_1+\propto_2}$ *(за властивістю степеня з дійсним показником)*

Але $xy = a^{\propto}$*. Отримали тотожню рівність* $a^{\propto} = a^{\propto_1+\propto_2}$.

Звідки слідує, що $\propto = \propto_1 + \propto_2$*, тобто що* $log_a xy = log_a x + log_a y$.

Далі формуємо в учнів поняття ***логарифмічного виразу***.

Зміст відповідного повідомлення може бути наступним:

Розглянемо множину дійсних чисел R*, множину логарифмів* $L = \{\log_a b,\ lgc,\ lna, \ldots\}$ *і множину арифметичних дій* $Q = \{+,\ -,\ x, :\}$*. Запис, утворений з елементів множини* R *і* L*, поєднаних знаками дій з множини* Q*, називають* ***логарифмічним виразом.***

Наприклад,

а) $\log_2 7 + 2\log_2 7 + \log_2 8$;   б) $\log_c b + 5\log_a c - \log_a p$;   в) 10^{2+lg16}.

Вивчаючи логарифмічні вирази, учні мають навчитися:

- встановлювати область визначення виразу;
- спрощувати вираз, зокрема, логарифмувати вирази та потенціювати;
- доводити тотожну рівність двох логарифмічних виразів;
- обчислювати числове значення логарифмічного виразу для заданих значень змінних.

Для цього має бути розв'язана з учнями достатня кількість тренувальних вправ, щоб названі уміння сформувались. Їх в діючих підручниках вистачає.

3. Показникова і логарифмічна функції, їх властивості і графік

1. *Показникова функція, її властивості і графік*. Перед тим, як давати означення показникової функції, учням слід повідомити, що вони вміють для заданого додатного числа α і довільного дійсного показника *x* визначати значення степеня a^x. Така відповідність називається функцією. А тому отримуємо:

Означення. *Функція виду* $y = a^x$*, де* $a > 0$ *і* $a \neq 1$*, називається* ***показниковою функцією.***

Якщо $a = e$ – число Ейлера, то таку показникову функцію називають ***експонентою***.

Властивості і графік показникової функції рекомендуємо встановлювати за вказаною раніше методичною схемою:

1) $D(f) = R$ – область визначення функції – множина дійсних чисел, оскільки степінь a^x, для $a > 0$, визначений для всіх дійсних значень показника *x*;

2) Для всіх $x \epsilon R$ $a^x > 0$ – це випливає з властивостей степеня: $x = 0, y = 1$;

3) Монотонність функції.

Розглянемо два довільних значення аргумента $x_1 \colon x_2,\ x_2 > x_1$.

$a^{x2} - a^{x1} = a^{x1}(a^{x2-x1} - 1)$:

а) якщо $a > 1$, то $a^{x2-x1} > 1$, тому різниця $(a^{x2-x1} - 1)$ – додатна.

Отже, $(a^{x2} - a^{x1})$ – додатна. Це означає, що функція $y = a^x$, для $a > 1$ монотонно зростає на всій області визначення;

б) якщо $0 < a < 1$, то $a^{x2} - a^{x1} = a^{x2-x1} \cdot (a^{x2-x1} - 1)$ – від'ємна, бо $a^{x2-x1} < 1$.

Отже, для $0 < a < 1$ показникова функція $y = a^x$ – монотонно спадає на всій області визначення;

4) Оскільки функції монотонна на всій області визначення, то вона ні парна, ні непарна, неперіодична;

5) Похідна функції $y = a^x$.

Скориставшись основою логарифмічною тотожністю представимо функцію $y = a^x$ у вигляді $y = e^{lna \cdot x}$. Тоді за правилами диференціювання складеної функції матимемо: $y' = (a^x)' = (e^{lna \cdot x})' = (e^t)' \cdot (lna \cdot x)'$, де $t = lna \cdot x$.

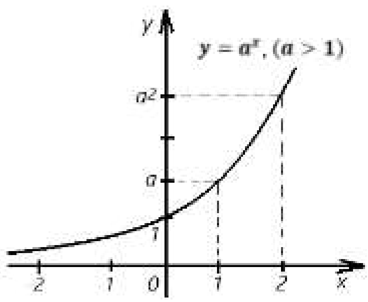
Отже, $(a^x) \quad = (e^t)' \cdot (lna \cdot x)' = lna \cdot (e^t)'$.

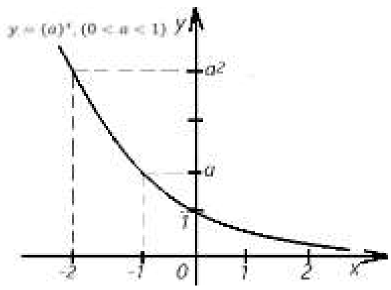
Скористаємось відомим твердженням, що $(e^t)' = e^t$ – обґрунтування якого зробимо пізніше.

Матимемо, що: $$(a^x)' = a^x \cdot lna \qquad (1)$$

Отже, функція $y = a^x$ – диференційована в кожній точці області визначення, а це означає, що вона неперервна на всій області визначення.

6) Графік показникової функції $y = a^x$ (схематичної) (рис. 1 *а*), 1 *б*)).





x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a}$	1	a	a^2

Рис. 1 *а*)

x	-2	-1	0	1	2
y	a^2	a	1	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a^2}$

Рис. 1 *б*)

7) Область значень функції $y = a^x$. $E(a^x) = (0;\ +\infty)$.

На завершення вивчення властивостей показникової функції слід довести лему, що $(e^x)' = e^x$, якою скористались вище.

Лема. Похідна функції $y = e^x$ (експонента) дорівнює самій цій функції (експоненті), тобто $(e^x)' = e^x$.

Доведення

Виберемо довільно точку $x_0 \in D(e^x)$. Надамо аргументу *x* приросту Δx.

Тоді приріст функції $y = e^x$ буде дорівнювати: $\Delta y = e^{x0+\Delta x} - e^{x0} = e^{x0}(e^{\Delta x} - 1)$.

Знайдемо $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} e^{x0}(\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}) = e^{x0} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$,

де e^{x0} – для фіксованого числа x_0 – стала величина.

Границя $\lim\limits_{t \to 0} \frac{e^t-1}{t}$ належить до числа ***чудових границь***, які вивчаються в систематичному курсі математичного аналізу. Встановлено, що вона дорівнює 1.

Тому маємо: $(e^x)' = e^x$.

$$(e^x)' = e^x \qquad (2)$$

Встановлені формули (1) і (2) вносимо до таблиці похідних елементарних функцій.

2. *Логарифмічна функція, її властивості і графік*. Функція $y = a^x$ монотонна, а отже, оборотна, тобто має обернену, яка називається ***логарифмічною функцією***.

Означення. *Функція виду $y = \log_a x$, де $a > 0$ і $a \neq 1$, називається* ***логарифмічною функцією.***

Властивості і графік логарифмічної функції рекомендуємо встановлювати, виходячи з властивостей показникової функції.

Оскільки їх графіки симетричні відносно прямої $y = x$, то будуємо графік функції $y = \log_a x$ для $a > 1$ і для $0 < a < 1$ (рис. 2 *а*), 2 *б*)).

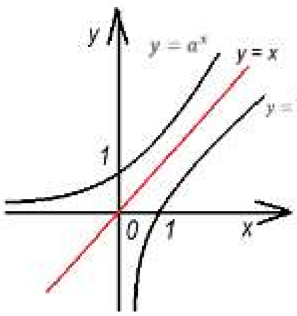


Рис. 2 *а*)

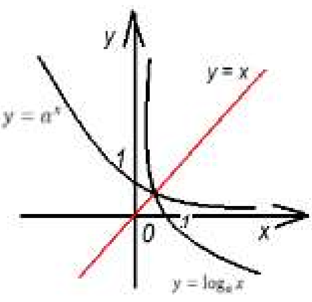


Рис. 2 *б*)

З отриманих графіків «зчитуємо» властивості функції $y = \log_a x$, доводити які немає потреби.

1) $D(\log_a x)$ = $(0;\ +\infty)$;

2) Якщо $x = 1,$ то $y = 0$ (нулі функції);

3) Якщо $a > 1$, то функція $y = \log_a x$ – монотонно зростає; якщо $0 < a < 1$, то функція монотонно спадає;

4) Функція ні парна, ні непарна, неперіодична;

5) Для $a > 0$: якщо $x \epsilon (0; 1),$ то $y < 0$; якщо $x \epsilon (1; +\infty),$ то $y > 0.$

Для $0 < a < 1$: якщо $x \epsilon (0; 1),$ то $y > 0$; якщо $x \epsilon (1; +\infty),$ то $y < 0;$

6) Функція неперервна на всій області визначення.

Диференційована в кожній точці області визначення.

За формулою похідної оберненої функції, маємо:

$$(\log_a x)' = (\frac{lnx}{lna})' = \frac{1}{lna} \cdot (lnx)' = \frac{1}{lna} \cdot \frac{1}{(e^x)'_y} = \frac{1}{lna} \cdot \frac{1}{e^y} = \frac{1}{lna} \cdot \frac{1}{e^{lnx}} = \frac{1}{lna \cdot x}.$$

Отже,

$$(\log_a x) = \frac{1}{x \cdot lna} \qquad (3)$$

Зокрема, якщо $a = e$, то для експоненти маємо:

$$(lnx)' = \frac{1}{x} \qquad (4)$$

Формули (3) і (4) вносимо до таблиці похідних елементарних функцій.

Знайомства з формулою знаходження похідної логарифмічної функції дає змогу вивести формулу похідної степеневої функції з дійсним показником.

Такою нагодою потрібно скористатися і довести з учнями, що для степеневої функцій $y = x^{\propto}$, де $\propto \epsilon R$ має місце формула:

$$(x^{\propto})' = \propto \cdot x^{\propto - 1} \qquad (5)$$

Доведення

Подамо функцію $y = x^{\propto}$, де $\propto \epsilon R$, $x > 0$ як $y = (x^{lnx \cdot \propto})$.

Тоді,$(x^{\propto})' = (e^{lnx \cdot \propto})' = e^{lnx \cdot \propto} \cdot (lnx \cdot \propto)' = x^{\propto} \cdot \frac{\propto}{x} = \propto \cdot x^{\propto - 1}$.

Отже, функція $y = x^{\propto}$, де $x > 0,\ \propto \epsilon R$ – диференційована.

Учням відомі властивості і графік степеневої функції $y = x^{\propto}$, коли показник $\propto$ – раціональне число. Тож для дійсного показника ця функція має наступні властивості :

1) $D(x^{\propto}) = (0;\ +\infty)$;

2) Якщо $x = 1,$ то $y = 1$ (графік проходить через точку (1; 1));

3) Для будь-яких $x > 0$ і $\propto \epsilon R,\ x^{\propto} > 0$;

4) Оскільки $(x^{\propto})' = \propto \cdot x^{\propto - 1}$, то:

а) для $\propto > 0$ похідна $y' = (x^{\propto})'$ – додатна. Що означає, що функція неперевна і монотонно зростає.

б) для $\propto < 0$ похідна $y' = (x^{\propto})'$ – від'ємна. Що означає, що функція неперевна і монотонно спадає.

5) Графік функції $y = x^{\propto}$, де $\propto \epsilon R$, залежно від значення показника $\propto$ схематично подано на рис. 3 *а*), 3 *б*).

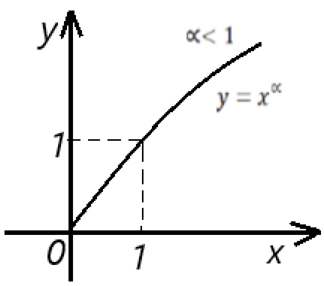


Рис. 3 *а*)

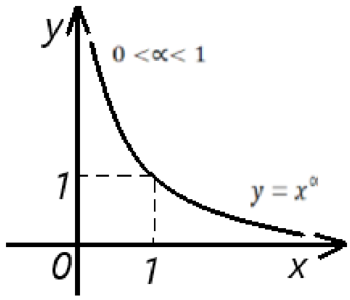


Рис. 3 *б*)

6) *E*$(x^{\propto}) = (0;\ +\infty)$, якщо $\propto > 1$; *E*$(x^{\propto}) = (0;\ +\infty)$, якщо $\propto < 1$.

Отримані знання про властивості і графік елементарних функцій $y = a^x$, $y = e^x$, $y = \log_a x$, $y = \ln x$, $y = x^{\propto}$ (де $\propto \epsilon R)$ рекомендуємо закріпити шляхом розв'язання вправ на побудову графіків і встановлення властивостей складених елементарних функцій за допомогою геометричних перетворень базових елементарних функцій. Ефективною буде в цьому випадку розрахунково-графічна робота на побудову графіків елементарних функцій.

До таких функцій ми відносимо, наприклад, функції:

а) $y = 2^{2x-1} + 1$; б) $y = \log_2(3x - 1)$; в) $y = |\lg(x - 3)|$; г) $= |x|^{\propto}$, $\propto \epsilon R$ та інші.

4. Показникові і логарифмічні рівняння (нерівності) та їх способи розв'язування

Показникові рівняння і нерівності, логарифмічні рівняння і нерівності рекомендуємо вивчати з учнями за вже відомою для них дидактичною схемою:

1) дати визначення таким рівнянням і нерівностям, виходячи з загального означення, яке вводилося на початку вивчення алгебри і початку аналізу;

2) виокремити найпростіші рівняння і нерівності та з'ясувати як знаходяться множини їх розв'язків;

3) вивчити основні способи розв'язування складніших рівнянь і нерівностей методом евристичної редукції.

Учні мають пригадати, що рівняння (нерівність) – задача, умова якої містить дві, аналітично задані функції $f(x)$ та $\varphi(x)$, що розглядаються на спільній області визначення, з вимогою – знайти множину значень аргумента, для яких виконується рівність (нерівність) $f(x) = \varphi(x)$ ($f(x) > \varphi(x)$.

Якщо функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ – показникові, то такі рівняння (нерівності) називаються ***показниковими***, якщо функції логарифмічні, то такі рівняння (нерівності) називаються – ***логарифмічними.***

Нагадати учням, що для обох видів рівнянь (нерівностей) мають місце відповідні теореми про рівносильність, які доведені раніше.

Однак, виходячи з властивостей функцій, можуть бути особливі випадки, які слід з'ясовувати під час розв'язування вправ.

Приступивши до вивчення названих рівнянь і нерівностей важливо, щоб учні повторили основі тотожні рівності та властивості показникової і логарифмічної функцій.

Під час формування в учнів умінь розв'язувати складніші рівняння рекомендуємо скористатися графічними схемами, поданими на рисунках 4 і 5.

Вони можуть служити для учнів орієнтовною схемою їх дій.

Корисним буде розбір на заповнення на схемах внутрішніх трикутників номерами вправ з діючого підручника (вправи підвищеного чи поглибленого рівнів).

1) Показникові рівняння і основні способи їх розв'язування:

а) найпростіші показникові рівняння:

(1) $$a^{f(x)} = a^{\varphi(x)} \quad \Updownarrow \quad f(x) = \varphi(x)$$

(2) $$a^{f(x)} = b \quad \Updownarrow \quad f(x) = \log_a b$$

б) основні способи розв’язування складніших рівнянь:

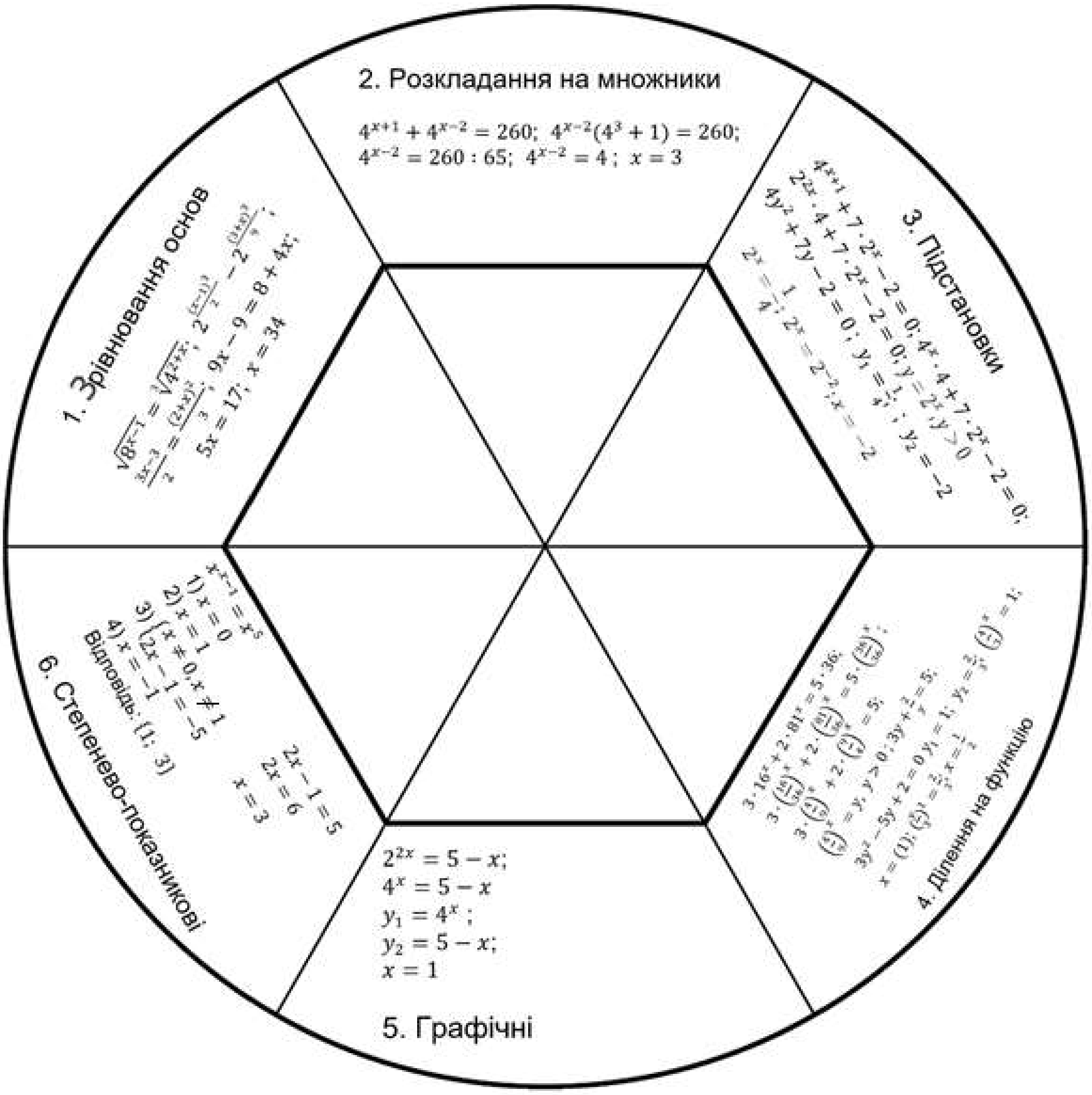


Рис. 4. Гексагон основних способів розв’язування показникових рівнянь

***) Заповніть трикутники (1)-(6) номерами вправ підвищеного і поглибленого рівнів, користуючись одним з діючих альтернативних підручників. Це допоможе учням під час самостійного розв’язання таких вправ. Ознайомте учнів з культурою запису ходу розв’язання.**

2) Логарифмічні рівняння і основні способи їх розв’язування:

а) найпростіші логарифмічні рівняння:

(1) $\log_a f(x)=\log_a\varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0; \\ \varphi(x)>0; \\ f(x)=\varphi(x). \end{cases}$

(2) $\log_a f(x)=b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0; \\ f(x)=a^b \end{cases}$

б) основні способи розв’язування складніших рівнянь:

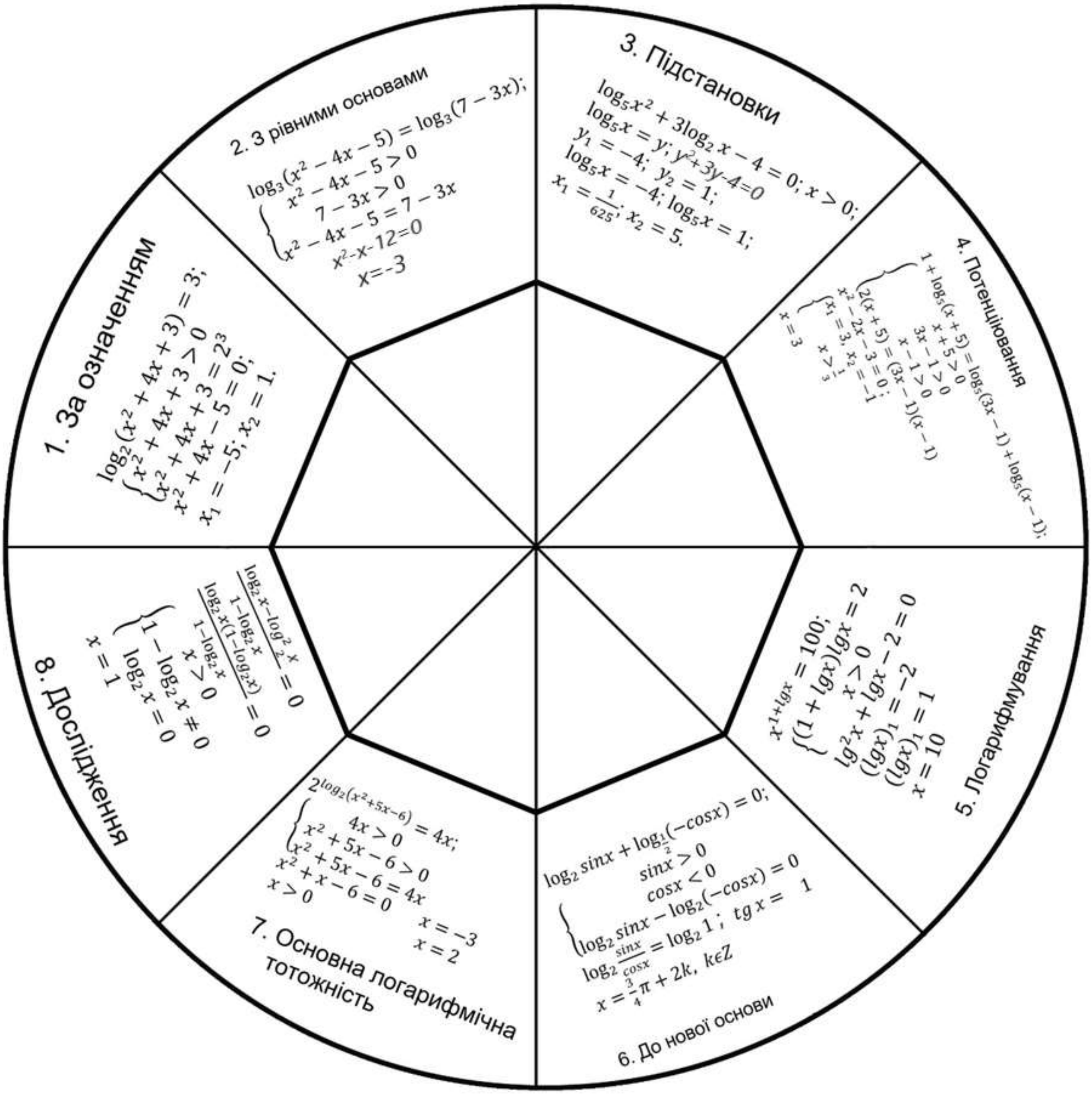


Рис. 5. Октагон основних способів розв’язування логарифмічних рівнянь

***) Заповніть трикутники (1)-(8) номерами вправ (підвищеного і поглибленого рівнів)з діючого підручника. Це зорієнтує учнів під час самостійного розв’язання таких вправ. Ознайомте учнів з культурою запису ходу розв’язання.**

Способи розв’язання показникових і логарифмічних нерівностей гарно проілюстровані в діючих альтернативних підручниках. Тому рекомендуємо орієнтуватись на них.

5. Показникова і логарифмічна функції як моделі під час розв’язування прикладних задач

Вміння застосовувати знання про показникову та логарифмічну функції особливо важливі під час розв’язування прикладних задач. Розглянемо кілька таких.

Задача 1. *При вливанні глюкози її кількість у крові хворого (виражена у відповідних одиницях) після t год. складає $C(t) = 10 - 8e^{-t}$. Побудуйте графік $C(t)$ як функції часу при $t \geq 0$. Знайдіть $\lim_{t\to\infty} C(t)$ – рівноважну кількість глюкози в крові.*

Розв’язання

Областю визначення даної функції є всі невід’ємні числа $(t \geq 0)$, $C(0) = 2$. Для того, щоб з’ясувати, який проміжок є множиною значень даної функції, знайдемо рівноважну кількість глюкози в крові хворого: $\lim_{t\to\infty} C(10 - 8e^{-t}) = 10 - 8\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^t} = 10$ (од.).

Отже, $E(C) = [2; 10)$. Оскільки похідна $C'(t) = 8e^{-t} = \frac{8}{e^{-t}}$ додатна, то функція $C(t)$ зростаюча на всій області визначення. Її графік зображено на рис. 6.

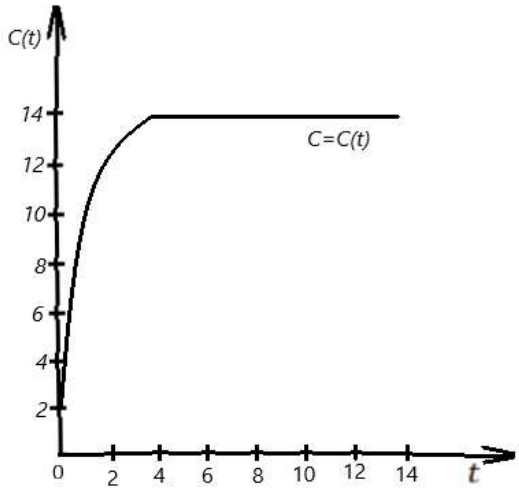


Рис. 6. Графік функції $C = C(t)$

Відповідь: рівноважна кількість глюкози 10 одиниць.

Задача 2. *Ємність легенів людини виражається функцією її віку $g(x) = \frac{110(lnx-2)}{x}$, де $x \in [10; 100]$ – вік людини у роках, $g(x)$ – ємність легенів у літрах. Визначте, у якому віці ємність легенів людини максимальна і чому вона дорівнює. Побудуйте графік функції $g(x)$ в прямокутній декартовій системі координат, вибравши такі одиниці вимірювань: 1 см для 10 років життя на осі абсцис, 1 см на 1 л осі ординат. Встановіть графічно інтервал часу, протягом якого ємність легенів людини продовжує бути більшою або дорівнює тій, яка є в 45 років.*

Розв'язання

Знайшовши похідну функції $g(x)$ і розв'язавши рівняння $110 \cdot \frac{3-lnx}{x^2} = 0$, з'ясовуємо, що дана функція має на відрізку $[10; 100]$ єдину стаціонарну точку $x_0 = e^3 \approx 20{,}1$. Оскільки при переході через цю точку знак похідної змінюється з «+» на «-», то на основі достатньої ознаки існування екстремуму в точці робимо висновок, що точка $x_0 = e^3 \approx 20{,}1$ є точкою максимуму функції g. Виходячи з єдиності такої точки на вказаному відрізку, стверджуємо, що в ній функція $g(x)$ набуває найбільшого значення*:* $g(e^3) = \frac{110(lne^3-2)}{e^3} = \frac{110}{e^3} \approx 5{,}48$.

Отже, у 20-річної людини ємність легенів максимальна.

Вона наближено дорівнює 5,48 л.

Беручи до уваги зростання функції $g(x)$ на відрізку $[10; 20{,}1]$ і спадання на відрізку $[20{,}1; 100]$, склавши таблицю значень функції, побудуємо її графік, рис. 7.

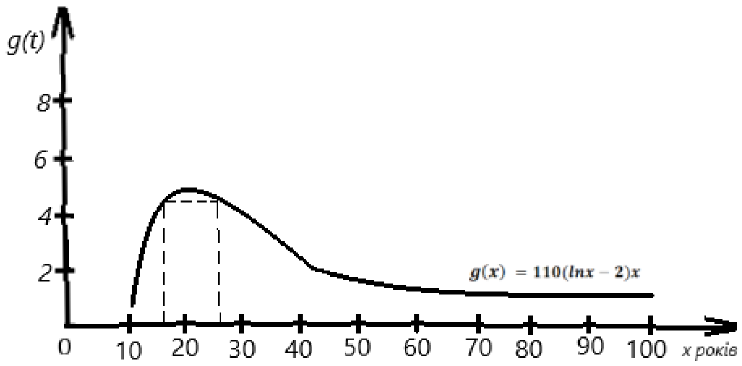


Рис. 7. Графік функції $g(x)\ = 110(lnx - 2)x$

Задача 3. *Дріжджі ростуть у цукровому розчині так, що їх маса збільшується на 3 % за кожну годину. Знайдіть наближене значення маси дріжджів через 10 хв., якщо її початкове значення 1 г.*

Розв'язання

Математичною моделлю даної задачі є функція $m(t) = (1 + 0{,}03)'$=$1{,}03'$.

Для функції *f,* диференційованої в точці x, і достатньо малих Δx має місце наближена рівність: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$.

Скориставшись цією формулою, маємо:

$x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}03$, $f(x_0) = x_0^{\frac{1}{6}} = 1$, $f'(x_0) = \frac{1}{6} \cdot x^{\frac{-5}{6}} = \frac{1}{6}$

і, отже, $(1 + 0{,}03)^{\frac{1}{6}} \approx 1 + \frac{1}{6} 0{,}03 \approx 1{,}005$ *г.*

Відповідь : $1{,}005$ *г.*

ПІДСУМОК

Тема «Показникова та логарифмічна функції їх властивості і графіки» надто об’ємна за змістом, а тому її вивчення краще розбити на дві навчальні підтеми.

У першій підтемі «Показникова функція, її властивості і графік», доцільно вивчити з учнями навчальний матеріал про степінь з дійсним показником та його властивості і на цій основі вивчати властивості показникової функції.

У другій підтемі «Логарифмічна функція, її властивості і графік», рекомендуємо діяти так само: спочатку вивчити теоретичний матеріал про логарифми та їх властивості і на цій основі вивчати властивості логарифмічної функції.

На завершення кожної\ підтеми рекомендуємо вивчати рівняння (нерівності), ґрунтуючись на знаннях про перетворення відповідних виразів та властивостей вивчення функцій. Учням слід показати також застосування показникової та логарифмічної функцій як математичних моделей під час розв’язання цікавих пізнавальних прикладних задач.

МЕТОДИЧНІ ЗАДАЧІ

для самостійного розв’язування

1. Розробити графічні схеми (за зразком для рівнянь ри.4 і 5) способів розв’язання показникових та логарифмічних нерівностей, спираючись на один з діючих альтернативних підручників з алгебри і початків аналізу.
2. Створити добірку прикладних задач, в яких показникова та логарифмічна функції застосовуються як математичні моделі.
3. Створити тексти контрольних робіт (два варіанти), один для підтеми «Показникова функція, її властивості і графік», а інший – для підтеми «Логарифмічна функція, її властивості і графік».
   Виконайте розв’язання таких робіт.
4. Розв’язати вправи:
   а) з допомогою графіка, зобразіть процес зменшення маси (чи концентрації) лікарського препарату в організмі за рахунок виведення його природним шляхом, якщо його кількість у крові хворого після t годин складає: $C(t) = 100 + 100e^{-t}$ (умовних одиниць);
   б) з допомогою графіка зобразіть процес неперервного зростання чисельності популяції з нульового моменту часу, заданий за допомогою функції
   $R(t) = 100e^{\frac{t}{10}}$;
   в) концентрація сахарози (виражена в моль/л) у момент часу t (час виражено в *хв.*) задається формулою $f(t) = e^{-0{,}0035t}$, де $t \geq 0$. Дослідить функцію $f(t)$ і попробуйте її графік в прямокутній декартовій системі координат, вибравши такі одиниці вимірювань: 1 см для 20 хв. на осі абсцис, 1 см для 0,1 моль/л на осі ординат. Визначте час, необхідний для того, щоб концентрація досягла половини свого початкового значення. Підтвердить результат графічно;
   г) розчинення лікарської речовини з пігулки описується, рівнянням $m = m_0e^{-kb}$, де m_0 – початкова маса на момент часу $t = 0$, m – нерозчинна маса на момент часу t; k – стала розчинення при заданих зовнішніх умовах. Визначте, скільки пройде часу, коли пігулка розвинеться наполовину.

Можна без перебільшення сказати разом з Лапласом, що винайдення логарифмів, «полегшевши працю астрономові, подвоїло йому життя»

Ф. Кеджарі

Л Е К Ц І Я 2.12

ТЕМА ***Методика вивчення теми «Інтеграл та його застосування»***

П Л А Н

1.	***Місце теми в програмі, зміст навчального матеріалу, вимоги до підготовки учнів, основна мета вивчення. Орієнтовне планування навчального процесу***
2.	***Первісна і її властивості. Таблиця первісних основних елементарних функцій***
3.	***Визначений інтеграл, правила інтегрування. Формула Ньютона-Лейбніца***
4.	***Застосування Інтегралу до розв’язування математичних і прикладних задач***

К О Н С П Е К Т Л Е К Ц І Ї

1. Місце теми в програмі, зміст навчального матеріалу, вимоги до підготовки учнів, основна мета вивчення. Орієнтовне планування навчального процесу

Тема «Інтеграл та його застосування» вивчається за програмою профільного рівня в 11 класі в обсязі 25 годин

Зміст навчального матеріалу та вимоги до підготовки учнів приведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Зміст навчального матеріалу	*Навчальні досягнення учнів*
Тема 8. Інтеграл та його застосування (25 год) Первісна та її властивості. *Невизначений інтеграл та його властивості.* Визначений інтеграл, його фізичний та геометричний зміст. Формула Ньютона-Лейбніца. Обчислення площ плоских фігур. *Обчислення об’ємів тіл.* Використання інтеграла до розв'язування прикладних задач.	*Формулює* означення первісної і невизначеного інтеграла та їх основні властивості. *Описує* поняття визначеного інтеграла. *Формулює* властивості визначеного інтеграла. *Знаходить* первісні та визначений інтеграл за допомогою правил знаходження первісних та перетворень.

Рекомендуємо, виходячи з дидактичної доцільності, розділити тему на дві самостійні, логічно завершені теми:

Тема 8.1. «Первісна, невизначений інтеграл» (10 год).

Тема 8.2. «Визначений інтеграл і його застосування»(15 год).

Зміст навчального матеріалу, вимоги до підготовки учнів, основна мета вивчення та орієнтовне планування навчального процесу обох тем подано в таблицях 2 і 3.

Таблиця 2

<table>
<tr><td colspan="5">Тема 8.1. «Первісна, невизначений інтеграл» (10 год)
Основна мета вивчення: Учні повинні засвоїти поняття первісної, невизначеного інтеграла, вміти їх відшукувати для основних елементарних функцій, користуючись правилами і таблицею первісних.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Зміст теми
(зміст навчального матеріалу)</td><td colspan="3">Вимоги до підготовки учнів
(компетентності)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Первісна. [Існування первісної для неперервної на проміжку функції.] Основна властивість первісної. [Теорема Лагранжа і її застосування до доведення основної властивості первісної.] Невизначений інтеграл. Основні правила відшукання невизначеного інтеграла. Таблиця первісних (невизначених інтегралів) відшукання невизначеного інтеграла для складених функцій.</td><td colspan="3">- Формулює означення первісної і невизначеного інтеграла та їх властивості.
- Доводить теорему про властивість первісної, правила (3 правила) відшукання первісної.
- Знає таблицю первісних вивчених раніше функцій: $y = x^{\alpha}, y = sinx,$ $y = cosx, y = e^{x}, y = a^{x}, y = lnx,$ $y = \log_{n} x.$
- Вміє знаходити невизначений інтеграл складених функцій.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Орієнтовне планування навчального матеріалу</td></tr>
<tr><td>№</td><td>Тема заняття,
види робіт</td><td>Кіл-ть годин</td><td>Дата</td><td>Примітки</td></tr>
<tr><td>1.</td><td>Дія інтегрування як обернена до дії диференціювання. Первісна</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Основна властивість первісної, невизначений інтеграл, початкові умови. Таблиця первісних основних елементарних функцій. СР-1.</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Правила відшукання первісних і їх застосування.</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Інтегрування складених елементарних функцій за допомогою відповідних правил та таблиці первісних. СР-2.</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5.</td><td>Контрольна робота</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Всього:</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Таблиця 3

Тема 8.2. «Визначений інтеграл і його застосування»(15 год)

Основна мета вивчення: Учні повинні засвоїти поняття визначеного інтеграла, вміти застосовувати визначений інтеграл до розв’язування математичних і прикладних задач.

Зміст теми ***(зміст навчального матеріалу)***	**Вимоги до підготовки учнів** ***(компетентності)***
Визначений інтеграл, його фізичний та геометричний зміст. Формула Ньютона-Лейбніца. Властивості визначеного інтеграла. Застосування визначеного інтеграла для обчислення площ плоских фігур, обчислення об’ємів тіл обертання. Розв’язання прикладних задач із застосування визначеного інтеграла	- *Описує* поняття визначеного інтеграла. - *Формулює* властивості визначеного інтеграла. - *Знаходить* визначений інтеграл за допомогою таблиці первісних, правил інтегрування, формули Ньютона-Лейбніца. - *Застосовує* визначений інтеграл до розв’язування математичних і прикладних задач.

Орієнтовне планування навчального матеріалу

№	Тема заняття, види робіт	Кіл-ть годин	Дата	Примітки
1.	Задачі, що приводять до поняття інтеграла.	1		
2.	Інтеграл. Формула Ньютона-Лейбніца. Властивості інтеграла.	2		
3.	Обчислення інтегралів. СР-1.	2		
4.	Застосування Інтеграла до обчислення площі фігури. СР-2	2		
5.	Застосування інтеграла до обчислення об’ємів геометричних тіл. СР-3	2		
6.	Застосування інтеграла до розв’язування математичних та прикладних задач. СР-4	5		
7.	Контрольна робота	1		
	Всього:	15		

2. Первісна і її властивості.
Таблиця первісних основних елементарних функцій

1) Історична довідка.

Навчальна тема «Первісна та інтеграл» увійшла в зміст шкільної математичної освіти в 1980 році, з появою навчального посібника «Алгебра і початки аналізу» (*За редакцією А. М. Колмогорова*). Вона була представлена як цілісна тема у випускному, 10 класі середньої школи. З того часу її зміст майже не змінився, хіба що тепер вивчається в 11 класі (випускному) як за програмою рівня стандарту так і профільного та поглибленого рівнів. Оскільки інтеграл, як математична модель, має широке застосування не тільки в математиці, а й в суміжних дисциплінах, то цим і обумовлене вивчення названої теми. Слід зазначити, що програмою ***не передбачена систематизація прийомів і методів інтегрування,*** формування вмінь і навичок інтегрування складених функцій. Тому можна вважати, що відбувається пропедевтичне вивчення інтегрального числення в тому обсязі, який необхідний для вивчення суміжних дисциплін. Учні мають дізнатися що це за дія – інтегрування, що називають первісною для заданої функції $y = f(x)$ і яка її роль у вивченні визначеного інтеграла.

2) Дія інтегрування, первісна.

Тему «Первісна, невизначений інтеграл» рекомендуємо розпочати з актуалізації поняття похідна функції, таблиці похідних основних елементарних функцій. Далі у формулюванні поняття «первісна» можна йти двома шляхами:

1) Його називають «Механічний». Нагадати учням що у фізиці за відомою функцією шляху $S = S(t)$, за допомогою дії диференціювання знаходять $V = S'(t)$ – функцію миттєвої швидкості. Але не менш важливою є і зворотна задача: за відомою функцією миттєвої швидкості $V = V(t)$ відшукати функцію шляху $S = S(t)$. Така зворотна дія називається дією інтегрування, а знайдену функцію називають первісною для функції $V = V(t)$.

2) Його називають шляхом «Симетрії понять». У математиці до дії додавання є обернена – дія віднімання, до дії множення – дія ділення, до дії піднесення до степеня з натуральним показником – дія добування кореня. Оскільки вивчається дія диференціювання функції, то можна розглядати обернену їй. Якщо суть першої полягає в тому, щоб для заданої функції $y = f(x)$ знайти її похідну $y = f'(x)$, то суть другої, очевидно, полягає в тому, щоб для заданої функції $y = f(x)$ відшукати таку функцію $y = F(x)$, яка задовольняє рівність $F'(x) = f(x)$. Таку дію в математиці, на противагу дії диференціювання, називають ***дією інтегрування***, а функцію $y = F(x)$ –

первісною для функції $y = f(x)$. Другий шлях, на наш погляд більш узагальнений, тому рекомендуємо йти ним.

Після вмотивування учнів вивчення дії інтегрування слід перейти до формулювання поняття первісної. Рекомендуємо зробити це абстрактно -дедуктивним методом: дати визначення первісної, навести приклади і відповісти на запитання:

1) Яка функція може мати первісну?
2) Якщо для функції $y = f(x)$ існує первісна $y = F(x)$, то скільки таких первісних може бути?

Фрагменти відповіді на поставлені запитання подані нижче. (Ці фрагменти рекомендуємо використати на уроці чи лекції).

Первісна

Означення. Первісною для даної функції $y = f(x)$ на заданому проміжку $[a; b]$ називається така функція $F(x)$, похідна якої для всіх x з інтервалу $[a; b]$ дорівнює $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$для всіх $x \in [a; b]$.

Наприклад, функція $F(x) = x^2$ є первісною для функції $f(x) = 2x$ на проміжку $(-\infty; \infty)$, оскільки на цій множині виконується рівність $(x^2)' = 2x$.

Для функції $f(x) = 2x$ первісними будуть також функції $F(x) = x^2 + 1$; $F(x) = x^2 - 10$ і т.д. Це вказує на те, що дія інтегрування неоднозначна.

Легко перевірити, що для функції $y = sinx$ первісними будуть $y = cosx + C$, де C – довільна стала, для функції $y = \frac{1}{x}, x \in (0; +\infty)$ первісними будуть функції $y = lnx + C$, де C – довільна стала. Прикладів можна навести багато. З'ясуємо відповіді на інші два запитання.

Питання 1) *Яка функція може мати первісну*?

Вивчаючи тему “Похідна і її застосування” ми бачили, що не для кожної неперервної на проміжку $(a; b)$ функції $y = f(x)$ існує похідна в точці чи на проміжку. Що ж стосується дії інтегрування, то має місце теорема, яка стверджує що для будь-якої неперервної на проміжку $[a; b]$ функції існує первісна, тобто існує невизначений інтеграл. Доведення цієї теореми буде здійснене пізніше. Воно тісно пов'язане з ще одним інтегралом – ***визначеним.***

Однак слід зауважити наступне: похідна елементарної функції є також елементарною функцією, тобто дія диференціювання не виходить за межі класу елементарних функцій. Цього не можна сказати про дію інтегрування. Так, наприклад, встановлено що для елементарних функцій $y = sin^2x, y = e^{-x^2}, y = \frac{cosx}{x}$ та інших не існує елементарних функцій, які були б для них первісними. Це вказує на те, що дія інтегрування виходить за межі названого класу. Доведення того факту, що деяка елементарна функція не має первісної, вираженої за допомогою елементарних функцій, досить складне. Ним, за потребою, займаються професійні математики під час розв'язання важливих задач в галузях науки, техніки, економіки. Якщо розглядати основні елементарні функції, то для них первісні існують.

Питання 2) *Скільки первісних може мати функція*?

Щоб їх представити, розглянемо спочатку наступну теорему.

Теорема. (*Основна властивість первісної*): Якщо функція $y = F(x)$ є первісною для функції $y = f(x)$ на проміжку $[a; b]$, то первісною також є функція $y = F(x) + C$, де C – довільна стала і ніяких інших первісних не існує.

Доведення властивості

Воно складається з двох етапів.

1-й. Покажемо, що якщо функція $y = F(x)$ є первісною для функції $y = f(x)$ на проміжку $[a; b]$, то й функція $y = F(x) + C$ – також первісна.

Дійсно: $(F(x) + C)' = F'(x) + (C)' = f(x)$. Отже, $y = F(x) + C$ – первісна для $y = f(x)$.

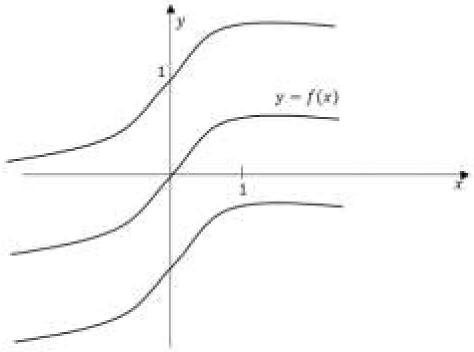
2-й. Нехай існує якась інша первісна $y = V(x)$ для функції $y = f(x)$ на проміжку $[a; b]$.Тоді побудуємо нову функцію $W(x) = F(x) - V(x)$. Маємо $W'(x) = F'(x) - V'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

За ознакою сталості диференційовної функції (наслідок з теореми Лагранжа) слідує, що $W(x) = C$, де C – стала.

Отже, інша первісна $V(x)$ має вигляд $V(x) = F(x) + C$.

Теорему доведено.

Множину всіх первісних для заданої функції $y = f(x)$ називають ***невизначеним інтегралом*** і позначають $\int f(x)dx$. Якщо $F(x)$ – одна з первісних для функції $y = f(x)$ на заданому проміжку, то невизначений інтеграл записують так: $\int f(x)dx = F(x) + C$. Знак $\int$ називають знаком невизначеного інтеграла (він вказує на те, що здійснюється дія інтегрування, $f(x)$ – підінтегральною функцією, $f(x)dx$ – підінтегральним виразом).

З доведеної теореми слідує, що існує ціле сімейство первісних і всі вони відрізняються одна від одної тільки на константу, тобто, що графіки первісних функції $f(x)$ можна отримати із графіка якої-небуть однієї з них $y = F(x)$ паралельним перенесенням цього графіка вздовж осі ординат (рис. 1).	 **Рис. 1**

Використовуючи доведену теорему і таблицю похідних, отримуємо таблицю невизначених інтегралів для основних елементарних функцій.

Таблиця 4

1. $\int 0dx = c, c -$ константа;
2. $\int dx = x + C$;
3. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$;
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$;
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, x > 0, x \neq 1$;
6. $\int e^x dx = e^x + c$;
7. $\int cosxdx = sinx + c$;
8. $\int sinxdx = -cosx + c$;
9. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c, a \neq 0$.
10. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + c$;
11. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + c$;
12. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c, a \neq 0$;
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin \frac{x}{|a|} + c, a \neq 0$;
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + c, a \neq 0$;
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + c, a \neq 0$.

Перевірку формул таблиці рекомендуємо учням здійснити самостійно.

Для знаходження невизначеного інтеграла складених елементарних функцій учнів слід ознайомити з трьома важливими правилами.

Правило 1. Якщо $F(x)$ є первісною для $f(x)$, а $G(x)$ – первісною для $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ є первісною для $f(x) + g(x)$, тобто має місце рівність:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \ .(1)$$

Правило 2. Якщо $F(x)$ є первісною для $f(x)$, а k – стале число, то $k \cdot F(x)$ є первісною для $k \cdot f(x)$, тобто має місце рівність:

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx \, .(2)$$

Правило 3. Якщо $F(x)$ є первісною для $f(x)$, а k і b – сталі числа ($k \neq 0$), то $\frac{1}{k}F(kx + b)$ є первісною для $f(kx + b)$, тобто має місце рівність:

$$\int f(kx + b)dx = \frac{1}{k} \int f(u)\, dx, \text{де } u = kx + b. (3)$$

Доведення приведених всіх трьох тверджень (правил) рекомендуємо учням здійснити самостійно. Далі, на практичних заняттях, рекомендуємо формувати в учнів уміння розв'язування задачі на поняття первісної.

Тематика таких задач не широка:

1) Знаходження невизначеного інтеграла для елементарних функцій за допомогою таблиці первісних та вивчених правил;
2) Знаходження первісної, яка б задовольняла заданим початковим умовам;
3) Прикладні задачі, в яких первісна виступає в якості математичної моделі.

Приклади таких задач подано нижче.

Приклад 1. Для функції $f(x) = \frac{1}{x}, x \in (0; \infty)$ знайти первісну $F(x)$, графік якої проходить через точку (2; 2).

Розв'язання

Оскільки для всіх $x \in (0; \infty)$ правильна рівність $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, то $\ln x$ – одна із первісних функції $f(x) = \frac{1}{x}$.

Тоді сукупність первісних має вигляд $F(x) = \ln x + C$.

Але графік потрібної первісної проходить через точку (2; 2), тому виконується умова

$F(2) = 2$. Тобто $\ln 2 + C = 2$, звідси $C = 2 - \ln 2$.

Отже, шукана первісна має вигляд

$$F(x) = \ln x + 2 - \ln 2 = \ln \frac{x}{2} + 2.$$

Відповідь: $F(x) = \ln \frac{x}{2} + 2$.

Приклад 2. Знайти $\int \frac{2+x^4}{x} dx$.

Розв'язання

Поділивши почлено чисельник на x, зводимо ***(метод редукції)*** даний невизначений інтеграл до табличних:

$$\int \frac{2+x^4}{x} dx = \int \left(\frac{2}{x} + x^3\right) dx = \int \frac{2}{x} dx + \int x^3 dx = 2 \cdot \int \frac{1}{x} dx + \int x^3 dx = 2\ln|x| + \frac{x^4}{4} + C$$

Відповідь: $2\ln|x| + \frac{x^4}{4} + C$.

Приклад 3. Знайти $\int \frac{dx}{25+4x^2}$.

Розв'язання

Шляхом перетворення підінтегральної функції зводимо даний невизначений інтеграл (метод редукції) до табличного:

$$\int \frac{dx}{25+4x^2} = \int \frac{dx}{4(\frac{25}{4}+x^2)} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{((\frac{5}{2})^2+x^2)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{5}{2}} arctg \frac{x}{\frac{5}{2}} + C = \frac{1}{10} arctg \frac{2}{5}x + C.$$

Відповідь: $\frac{1}{10} arctg \frac{2}{5}x + C$.

Приклад 4. Швидкість руху матеріальної точки задано рівнянням $V(t) = cost$ (м/сек). Знайти рівняння руху точки, якщо в момент часу $t = 0$ сек точка здолала відстань 5 м від початкового положення.

Розв'язання

Закон руху $S = S(t)$ точки буде однією з первісних для функції $V(t) = cost$.

Тому $S(t) = \int costdt = sint + C$, де C – стала.

Оскільки в момент часу $t = 0$ сек, точка здолала відстань 5 м,

то маємо рівняння: $5 = S(0) = \sin(0) + C$, тобто $5 = sin0 + C$.

Звідки $C = 5 - sin0 = 5$.

Отже, маємо: $S(t) = sint + 5$.

Відповідь: $(t) = sint + 5$.

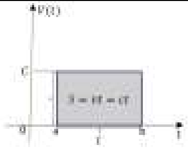
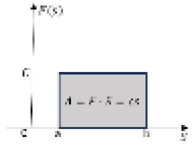
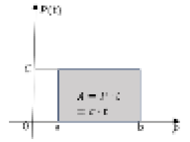
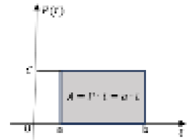
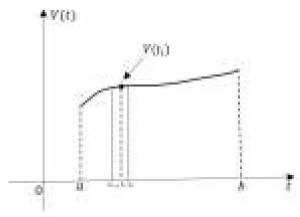
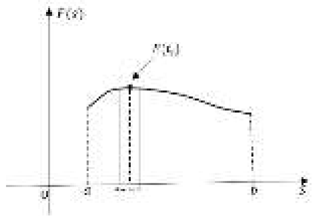
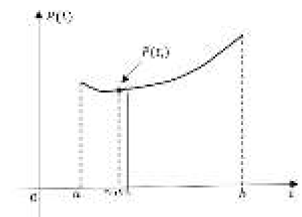
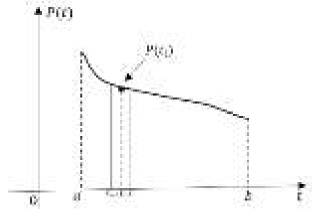
3. Визначений інтеграл, правила інтегрування. Формула Ньютона-Лейбніца

1) Задачі, які приводять до поняття визначеного інтеграла

Формування поняття визначеного інтеграла для заданої на проміжку неперервної функції пропонуємо розпочати з розгляду доцільних задач.

Приклади таких задач і їх розв'язання подано в таблиці 5.

Таблиця 5

№		1	2	3	4
Прикладна (доцільна задача)		Тіло рухалось зі швидкістю $V = V(t)$, протягом часу . Який шлях воно пройшло?$t \in [a;b]$	Тіло переміщується з пункту A в пункт B з силою $F(s)$. Яку роботу потрібно виконати по його переміщенню?$s \in [a;b]$	Двигун потужністю $P(t)$ протягом часу t перетягував вантаж. Яку роботу виконав двигун?$t \in [a;b]$	Продуктивність праці агрегата дорівнює $P(t)$. Яку роботу виконав агрегат протягом часу ? $t \in [a;b]$
Якщо швидкість, сила, потужність, продуктивність – сталі величини	Формула для розв'язання задачі	Якщо швидкість стала, то $S = V(t) \cdot t = ct$, де c – стала.	Якщо діюча сила стала, то $A = F(s) \cdot s = cs$, де c – стала.	Якщо потужність стала, то $A = P(t) \cdot t = ct$, де c – стала.	Якщо продуктивність праці стала, то $A = P(t) \cdot t = at$, де a – стала.
	Геометрична ілюстрація розв'язку				
Якщо швидкість, сила, потужність, продуктивність – змінні величини	Створення формули для обчислення (геометрична ілюстрація розв'язання)				
	Крок – 1. Розбиття відрізка на рівних частин	$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_{n-1} < x_n = b, \Delta x = x_i - x_{i-1}$- довжина кожного відрізка. Вибір точки t_i: $x_i < t_i < x_{i+1}, \Delta x = \frac{b-a}{n}$	$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_{n-1} < x_n = b, \Delta x = x_i - x_{i-1}$- довжина кожного відрізка. Вибір точки t_i: $x_i < t_i < x_{i+1}, \Delta x = \frac{b-a}{n}$	$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_{n-1} < x_n = b, \Delta x = x_i - x_{i-1}$- довжина кожного відрізка. Вибір точки t_i: $x_i < t_i < x_{i+1}, \Delta x = \frac{b-a}{n}$	$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_{n-1} < x_n = b, \Delta x = x_i - x_{i-1}$- довжина кожного відрізка. Вибір точки t_i: $x_i < t_i < x_{i+1}, \Delta x = \frac{b-a}{n}$
	Крок – 2. Записуються добутки – площа кожного з прямокутників	$V(t_i)\Delta x \approx S_i$ наближене значення площі смужки	$F(t_i)\Delta x \approx S_i$ наближене значення площі смужки	$P(t_i)\Delta x \approx S_i$ наближене значення площі смужки	$P(t_i)\Delta x \approx S_i$ наближене значення площі смужки
	Крок – 3. Сума площ прямокутників	$\sum_{i=1}^{n} S_i \approx S$	$\sum_{i=1}^{n} S_i \approx A$	$\sum_{i=1}^{n} S_i \approx A$	$\sum_{i=1}^{n} S_i \approx A$
	Крок – 4. Математична модель розв'язання задачі	$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} V(t_i)\Delta x$	$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F(t_i)\Delta x$	$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(t_i)\Delta x$	$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(t_i)\Delta x$

Учні мають зрозуміти, що розв'язання всіх чотирьох задач звелось до обчислення границі суми. Таких задач багато. Тому побудована границя заслуговує на детальне окреме вивчення. Після цього слід перейти до узагальнення розглянутих прикладів і дати визначення поняттю визначеного інтеграла.

2) Поняття визначеного інтеграла

2.а. Криволінійна трапеція і її площа

Розглянемо невід'ємну неперервну функцію на відрізку $\langle a; b \rangle$ (рис. 2).

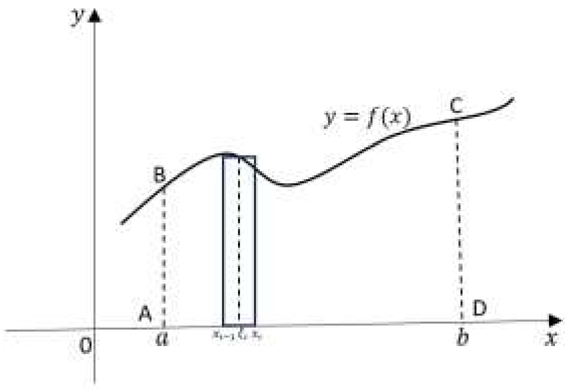


Рис. 2

Чотирикутник $ABCD$ – називають криволінійною трапецією. Як обчислити її площу? Це можна зробити таким чином: зробимо розбиття проміжка $[a; b]$.

T: $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$ де $\Delta x = x_i - x_{i-1}, i = 1,2, \dots, n$

виберемо $x_{i-1} \leq t_i \leq x_i, f(t_i)$

$\Delta S_i = \ f(t_i)\Delta x$ – наближене значення смужки.

Тоді площа криволінійної трапеції $S \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$.

Точне значення $S = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$ (Якщо така границя існує).

Нехай задана неперервна функція $y = f(x), x \in \langle a; b \rangle$ (Рис. 2).

Тоді границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$ – якщо вона існує, називають визначеним інтегралом і позначають $\int_a^b f(x)dx$. Знак $\int$ – знак визначеного інтеграла, a і b – межі інтегрування, $f(x)$ – підінтегральна функція, x – змінна інтегрування. Якщо для функції $y = f(x)$ існує інтеграл на $\langle a; b \rangle$ то така функція називається інтегровною на $\langle a; b \rangle$.

(!) Зміст інтеграла:

- Геометричний: для додатної функції визначений інтеграл – площа криволінійної трапеції.
- Фізичний: шлях, пройдений тілом зі змінною швидкістю руху.
- Економічний: робота, виконана агрегатом зі змінною продуктивністю.

(!) Виникає питання: Як обчислювати (знаходити) інтеграл на $[a; b]$ для неперервної функції. Для цього існує формула Ньютона – Лейбніца.

3) Формула Ньютона - Лейбніца

Розглянемо додатну і неперервну на проміжку $[a; b]$ функцію $y = f(x)$.

Їй відповідатиме криволінійна трапеція $ABCD$ (рис. 3).

Виберемо на проміжку $[a; b]$ довільну точку x_0.

Пряма PK відріже від трапеції $ABCD$ трапецію $APKD$.

Зрозуміло, що площа цієї трапеції залежить від аргумента x_0, тобто $S_{\text{APKD}} = S(x)$ – функція аргумента x, де $x \in [a; b]$. Позначимо її $S = S(x)$.

Легко бачити, що якщо $x = a$, то $S(a) = 0$, якщо $x = b$, то $S(b) = S_{\text{ABCD}} = \int_a^b f(x)dx$.

І. Ньютон (1643-1727 рр.)
англійський науковець, який заклав основи сучасного природознавства, творець класичної фізики та один із засновників числення нескінченно малих

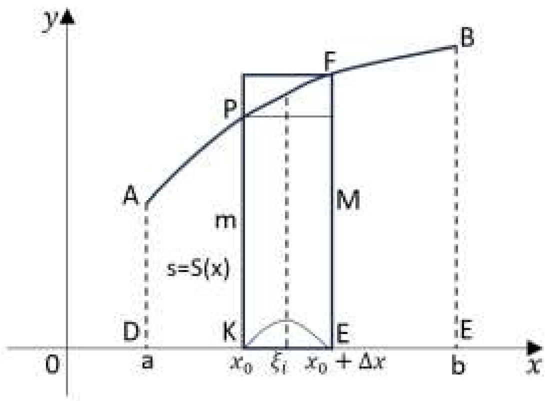


Рис. 3

Відшукаємо функцію $S = S(x)$.

Для довільного $x_0 \in [a; b]$, надамо приріст Δx.

Тоді матимемо $S(x + \Delta x)$, і $S(x)$. Площа смужки $PFEK$ $\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x)$.

На проміжку $[x; x + \Delta x]$ функція неперервна, тому за теоремою Вейєрштраса має найменше і найбільше значення. Нехай вони дорівнюють m і M.

Тоді приріст площі ΔS буде лежати в межах: $m \cdot \Delta x \leq \Delta S \leq M \cdot \Delta x$.

Розділимо цю нерівність на Δx. $m \leq \frac{\Delta S}{\Delta x} \leq M$.

Спрямуємо $\Delta x \to 0$. Тоді $\lim\limits_{\Delta x \to 0} m = \lim\limits_{\Delta x \to 0} M = f(x_0)$.

Звідки слідує, що $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x_0)$.

Г. В. Лейбніц (1646-1716 рр.)
німецький філософ, логік, математик, фізик, мовознавець і дипломат

Отже, функція $S(x)$ – диференційовна і $S'(x) = f(x)$. Тоді $S(x)$ – первісна для $f(x)$

(!) Тому: $S(x) = F(x) + C$ (загальний вигляд первісних). Нехай $x = a$. Тоді $S(a) = F(a) + C = 0$. Звідси $C = -F(a)$. Якщо $x = b$, то $S(b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) + C$.

Враховуючи, що $C = -F(a)$ маємо:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (1)$$

Формула Ньютона - Лейбніца

І. Барроу (1630-1677 рр.)
англійський математик, фізик і богослов, відомий багатьма вченими працями, був учителем Ньютона

Формула (1) пов’язує два поняття: *первісна* та *визначений інтеграл* і вказує на спосіб обчислення визначеного інтеграла.

Тренувальних вправ в діючих підручниках є вдосталь, щоб сформувати в учнів вміння обчислювати визначений інтеграл елементарних функцій.

Функцію $S = S(x)$, яка розглядається в доведенні формули, називають функцією Барроу (або інтеграл зі змінною верхньою межею) і позначають $S(x) = \int_a^x f(x)dx$, де $x \in [a; b]$. Як наслідок із виведення формули Ньютона – Лейбніца отримуємо таку теорему:

Теорема. Всяка, неперервна на проміжку $[a; b]$ функція $y = f(x)$ має первісну.

Для додатнозначної функції $y = f(x)$ теорема доведена. Вона має місце і для довільної неперервної функції $y = f(x)$, де $x \in [a; b]$ (Приймемо без доведення).

Примітки. Викладені вище теоретичні відомості пропонуємо використати або на уроках, або в шкільній лекції.

4. Застосування визначеного інтеграла до розв’язування математичних і прикладних задач

Визначений інтеграл, як математична модель, має широке застосування для розв’язання як математичних, так і прикладних задач. Визначений інтеграл, як і похідна, широко застосовується під час розв’язання математичних та прикладних задач. В діючих альтернативних підручниках наведені приклади його застосування для обчислення площ фігур, об’ємів геометричних тіл, розв’язування фізичних задач, задач з інших суміжних предметів. Важливо, щоб таких задач в арсеналі вчителя було більше, а сюжети – різноманітні. Тому, вивчаючи з учнями тему «Інтеграл та його застосування», йому, вчителю, варто мати добірку таких задач і володіти методикою їх розв’язання. Розглянемо кілька таких задач (відмінних від тих, що є в підручниках) і зупинимось на методиці їх розв’язання.

Задача 1. Довести нерівність $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$, де $n\in N$.

Розв’язання

Розглянемо функцію $y=\frac{1}{\sqrt{x}}, x>0$. Побудуємо її графік. Подамо ліву частину нерівності в іншому вигляді:

$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}=(1\cdot 1)+\left(1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$.

Кожний з добутків $(1\cdot 1),\left(1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ldots,(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$ можна прийняти за площу відповідного прямокутника $S_1, S_2, \ldots, S_n$ (рис.4)

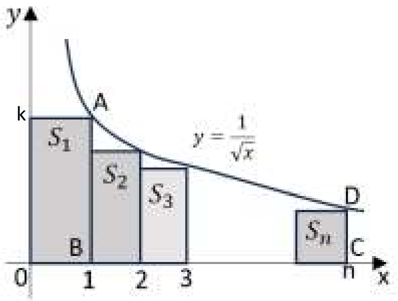


Рис. 4

Але сума $S_2+S_3+\cdots+S_n$ менша за площу криволінійної трапеції $ABCD$. Тому маємо $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}=S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n=S_1+S_{ABCD}=1+S_{ABCD}<\ 1+\int_1^n\frac{1}{\sqrt{x}}dx=1+2\sqrt{x}\Big|_1^n=1+2\sqrt{n}-2=2\sqrt{n}-1<2\sqrt{n}$.

Отже, $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$, що й потрібно було довести.

Методичний коментар

Знання учнів 11-х класів достатні для ознайомлення їх із застосуванням інтеграла для доведення нерівностей вигляду:

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(n)>P(n)\ \ (1)$$

Нехай функція $y=f(x)$ невід’ємна на $[0;n]$. Тоді суму в лівій частині нерівності можна розглядати як площу S_n ступінчастої фігури (рис. 5).

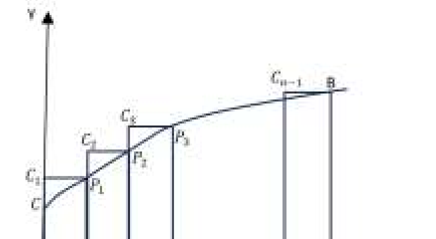


Рис. 5

Якщо, крім цього, функція неперервна й монотонна, то площа S криволінійної трапеції $OABC$ виражається через інтеграл: $S=\int_0^n f(x)dx$.

У випадку зростання функції $y=f(x)$ маємо $S<S_n$. Довівши, що $P_n<S$ прийдемо до початкової нерівності (1).

Задача 2. Довести нерівність $cosx \geq 1-\frac{x^2}{2}$, де $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Розв'язання

Скористаємося правильною нерівністю $\sin x \leq x$. Проінтегруємо її:

$\int_0^x \sin t\,dt \leq \int_0^x t dt$, $-cost|_0^x \leq \frac{t^2}{2}\Big|_0^x$,

$-cosx + cos0 \leq \frac{x^2}{2} - \frac{0^2}{2}$.

З останньої нерівності випливає $-cosx + 1 \leq \frac{x^2}{2}$ або $cosx \geq 1-\frac{x^2}{2}$, що й потрібно було довести.

Методичний коментар

Для доведення нерівностей за допомогою інтеграла можна скористатись таким твердженням.

Якщо для довільного значення x з деякої області I має місце нерівність

$$f(x) \geq g(x),$$

то також має місце нерівність

$$\int_a^x f(t)dt \geq \int_a^x g(t)dt,$$

де $I=[a;b]$ або $I=[a;+\infty)$.

Справді, якщо має місце нерівність $f(x) \geq g(x)$, то також має місце нерівність $F'(x) \geq G'(x)$, де $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$ і $F(a) = G(a) = 0$.

Звідси випливає, що також має місце нерівність $F(a) \geq G(a)$. Тому, приймаючи, що $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $G(x) = \int_a^x g(t)dt$, матимемо нерівність $\int_a^x f(t)dt \geq \int_a^x g(t)dt$.

Задача 3. Продуктивність праці бригади протягом семигодинної зміни виражається функцією $y(t) = 0{,}004t^2 + 0{,}09t + 20{,}094$. Знайти обсяг випуску продукції за рік (240 робочих змін).

Розв'язання

Обсяг випуску продукції протягом робочого дня є визначеним інтегралом у межах від $a=0$ до $b=7$ від функції, що виражає продуктивність праці. (див. Доцільні задачі, які приводять до поняття визначеного інтеграла)

Тому обсяг випуску продукції у обчислюємо як визначений інтеграл.

Отже, $V = \int_0^7 (0{,}004t^2 + 0{,}09t + 20{,}094)dt = (\frac{0{,}004t^3}{3} + \frac{0{,}09t^2}{2} + 20{,}094t)\Big|_0^7 = \frac{0{,}004\cdot 7^3}{3} + \frac{0{,}09t^2}{2} + 20{,}094\cdot 7 \approx 0{,}4573 + 2{,}205 + 140{,}658 \approx 143$ (одиниці).

Тоді обсяг випуску продукції за рік складає $143 \cdot 240 = 34\,320$ (одиниць).

Відповідь: 34 320 од.

Задача 4. Споживання електроенергії, в *кВт год* підприємствами та міським населенням з 8 до 18 годин наближено виражається функцією $y = 10000 - 8t + 15t^2$, де t – кількість годин. Обчислити плату за електроенергію, що споживається містом за цей час, якщо тариф – 24,36 *коп*. за 1 *кВт год*.

Розв'язання

За умовою задачі маємо, що 18 – 8 = 10 (*год*) місто споживало електроенергію. Тому кількість її за проміжок часу [0;10] обчислюється за допомогою інтеграла. (*Методичний коментар*: споживання електроенергії є функцією часу. Задача схожа до задач, що приводять до поняття визначеного інтеграла. Цим і слід скористатись).

Отже, кількість спожитої електроенергії N протягом 10 годин дорівнює:

$$N = \int_0^{10} (10000 - 8t + 15t^2 dt) = (10000t - 8\frac{t^2}{2} + 15\frac{t^3}{3})\Big|_0^{10}$$

$$= 10000 \cdot 10 - 4 \cdot 100 + 5 \cdot 1000 = 104600 \text{ (кВт} * \text{год)}.$$

Так, як тариф на електроенергію 24,36 *коп*. за 1 *кВт год*, то плата за електроенергію $P = 104600 \cdot 24{,}36 = 2548056$ (*коп*.) або 25480,56 (*грн*) – плата за електроенергію.

Відповідь: 25480,56 *грн*.

Задача 5. Водій автомобіля загальмував у той момент, коли швидкість автомобіля дорівнювала *36 км/год*. Знайдіть шлях, який проїде автомобіль за час від $t_1 = 2\ c$ до $t_2 = 6\ c$, якщо при ввімкнених гальмах автомобіль рухається з прискоренням $-\ a = 5$ м/с^2.

Вказівка. Під час розв'язування задачі використайте формулу швидкості $v = v_0 + at$, де a – прискорення.

Розв'язання

Починаючи розв'язувати задачу слід перевести швидкість автомобіля 36 *км/год* в *м/с*: $36\frac{\text{км}}{\text{год}} = \frac{36 \cdot 1000}{3600}\frac{\text{м}}{\text{с}} = 10\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Тоді $v(t) = 10 - 0{,}5t$ $(\frac{\text{м}}{\text{с}})$.

Використовуючи формулу, одержану під час розв'язування доцільної задачі

$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} v(t)dt$, запишемо $S = \int_2^6 (10 - 0{,}5t)dt = 10t - \frac{t^2}{4}\Big|_2^6 = 60 - 9 - 20 + 1 = 32$ (*м*).

Відповідь. 32 *м*.

Задача 6. При розтягуванні пружини на 5 см затрачена робота в 29,43 *Дж*. На скільки розтягнеться пружина, якщо затратити роботу в 9,81 *Дж*?

Розв'язання

Для розв'язування задачі

формулу роботи $A = \int_a^b F(x)dx$ потрібно використати двічі.

1) $A_1 = 29{,}43 = \int_0^{0{,}05} kxdx = \left.\frac{kx^2}{2}\right|_0^{0{,}05} = \frac{k \cdot 0{,}0025}{2}$.

Звідки обчислюють, що $k = 23544$.

Отже, $F(x) = 23544x$.

2) $A_2 = 9{,}81 = \int_0^{x_2} 23544xdx = 23544\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{x_2} = 11772x_2^2$.

Звідси $x_2^2 \approx 8{,}3 \cdot 10^{-4}$, $x_2 > 0$.

Отже, маємо $x_2 \approx 0{,}029(\text{м}) \approx 2{,}9(\text{см})$.

Відповідь. 2,9 см.

П І Д С У М О К

Навчальну тему «Інтеграл та його застосування» краще вивчати як дві, логічно завершені теми: «Первісна, невизначений інтеграл» і «Визначений інтеграл та його застосування». Оскільки перша з них служить основою вивчення другої, то вивчаючи її, необхідно сформувати в учнів міцні вміння і навички знаходження невизначеного інтеграла.

Учні мають засвоїти таблицю первісних для основних елементарних функцій і знати основні правила, за якими відшукання невизначеного інтеграла складених елементарних функцій зводиться до табличних.

Основна мета вивчення наступної теми – ознайомити учнів з поняттям визначеного інтеграла, нової математичної моделі, з допомогою якої розв'язуються задачі в геометрії, алгебрі та суміжних дисциплінах – фізиці, хімії, економіці, тощо.

МЕТОДИЧНІ ЗАДАЧІ
для самостійного розв’язування

1. Проаналізуйте діючі альтернативні підручники з алгебри і початків аналізу на предмет наявності в них прикладних задач на застосування визначеного інтеграла.

2. Створіть добірку прикладних задач до теми «Інтеграл та його застосування», розробіть методичні вказівки до їх розв’язання.

3. Складіть тематичну контрольну роботу до теми (два варіанти):
   а) первісна, невизначений інтеграл;
   б) визначений інтеграл і його застосування.
   Розв’яжіть запропоновані завдання з дотриманням культури математичних записів.

4. Виведіть формулу для обчислення маси М неоднорідного стержня, в якому густина $\rho(x)$ змінюється від точки до точки на ділянці $[0; \mathrm{e}]$.

5. Виведіть формулу для обчислення кількості речовини, яка вступила в хімічну реакцію за проміжок часу $[t_1; t_2]$, швидкість хімічного перетворення якої $V = V(t)$.

6. Доведіть нерівності:
   а) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n} < \ln 3$, де $n \in N$;
   б) $sinx \geq x - \frac{x^3}{3!}$, де $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

7. Обчисліть роботу сили F під час стискання пружини на 0,06 м, якщо для її стиску на 0,01 м потрібна сила 5 Н.

8. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 6t - t^2 (\frac{\text{м}}{\text{с}})$.
   Знайдіть шлях, пройдений тілом від початку руху до його зупинки.

... Відкритті аналізу безконечно малих, тобто рахунку диференціального та інтегрального… в дійсності один з найбільших винаходів, на який коли-небудь спромігся геній людського духу

В. Лєвицький

Л Е К Ц І Я 2.13

ТЕМА ***Методика вивчення комплексних чисел в старшій профільній школі***

П Л А Н

1.	***Історичні відомості про комплексні числа і їх вивчення в школі***
2.	***Місце теми «Комплексні числа» в програмі, зміст навчального матеріалу, вимоги до підготовки учнів, основна мета вивчення, орієнтовне планування навчального процесу***
3.	***Формування поняття комплексного числа***
4.	***Вивчення дій над комплексними числами***
5.	***Різна форми представлення комплексного числа: геометрична та тригонометрична***
6.	***Розв'язання вправ на дії з комплексними числами***

К О Н С П Е К Т   Л Е К Ц І Ї

1. Історичні відомості про комплексні числа і їх вивчення в школі

З «уявними» числами математики зустрілися давно. Першим, хто розглянув задачу, яка приводить до квадратного рівняння з від'ємним дискримінантом був *італійський математик* **Джероламо Кардано** (1501-1576 рр.).

Ось ця задача: «*Визначити розміри земельної ділянки прямокутної форми з площею 40 кв. од. і периметром 20 лін. од.*».

Розв'язання такої задачі зводиться до системи $\begin{cases} xy = 40, \\ x + y = 60. \end{cases}$

(x – ширина, y – довжина ділянки), яка в свою чергу приводить

до рівняння $x^2 - 10x + 40 = 0$.

Користуючись сучасною символікою, одержуємо: $D = 100 - 160 = -60 < 0$.

$x_1 = 5 + \sqrt{15}$, $x_2 = 5 - \sqrt{-15}$.

Звичайно що Дж. Кардано такої символіки ще не знав, але квадратний корінь з -15 назвав «софістичним» числом (від слова софізм – парадокс).

У подальшому, під час розв'язання кубічних рівнянь до софістичних чисел прийшов ще один *італійський математик* **Ніколло Тарталья**. *Французький математик* **Рене Декарт** показав, що алгебраїчні рівняння *к*-ї степені мають стільки ж коренів, скільки одиниць має степінь рівняння, при чому, серед них є і «уявні». Вивчення логарифмів приводить до того, що вираз виду $\log_a b$, де $a > 0,\ b < 0$ немає числового значення, тобто рівняння $a^x = b$ $(a > 0,\ b < 0)$ немає розв'язків.

Аналіз цих та інших задач призвів до необхідності розширення множини дійсних чисел. До XIX ст. така теорія буда розроблена. На початку XIX ст. була введена (з відкриттям векторів) геометрична інтерпретація комплексних чисел і дій над ними на координатній площині. Нова числова множина *C* (комплексні числа) допомогла розв’язати багато задач алгебри. Зокрема, була доведена основна теорема алгебри.

Широке застосування комплексні числа знайшли в математиці на початку XX ст. Історично, комплексні числа ввійшли в математику виходячи із її власних потреб. Практичне їх застосування проявилося пізніше, під час розвитку теорії диференціальних рівнянь і створенні теорії функцій комплексної змінної. Ці розділи відіграють велику роль як в самій математиці, так і в дослідженні вихрових потоків у рідинах і газах, зокрема під час розрахунків підіймальної сили крила літака. Що стосується середньої школи, то в ній «комплексні числа» почали вивчатись у середині XX ст. У 70-х роках їх вивчення припинилося (вивчали лише факультативно).

2. Місце теми «Комплексні числа» в програмі, зміст навчального матеріалу, вимоги до підготовки учнів, основна мета вивчення, орієнтовне планування навчального процесу

Тема «Комплексні числа та многочлени» вивчаються в школі або факультативно (у загальноосвітній школі), або в школах і класах з поглибленим вивченням математики як самостійна тема. Зміст теми в обох випадках однаковий. Зупинимося на школах і класах з поглибленим вивченням математики.

Орієнтовний зміст теми (20 год):

Множина комплексних чисел. Геометрична інтерпретація комплексних чисел. Дії над комплексними числами. Тригонометрична форма комплексного числа. Множення, ділення і піднесення до степеня комплексного числа у тригонометричній формі. Формула Муавра. Добування кореня з комплексних чисел. Комплексні корені алгебраїчних рівнянь. Про основну теорему алгебри.

Основна мета: ознайомити учнів з множиною комплексних чисел, систематизувати і узагальнити поняття про число, завершити змістову лінію курсу Алгебри і початків аналізу «Числа і дії ними»

Вивчивши теми учня повинні:

знати – означення комплексного числа, модуля числа, правила виконання арифметичних дій над комплексними числами; *вміти* – зображати комплексні числа на координатній площині, виконувати арифметичні дії з комплексними числами.

Незважаючи на те, що тема «Комплексні числа» вивчається лише в школах (класах) з поглибленим вивченням математики, загальноосвітнє значення знайомства з комплексними числами змушують замислитися над можливістю їх розгляду в якості додаткового матеріалу і в звичайних класах та класах, де математика вивчається на профільному рівні. Зокрема, можна звернути увагу учнів на розширення множини дійсних чисел на математичних гуртках та факультативних заняттях. Зрозуміло, що навчальний час, який виділяється на вивчення, повинен бути значно меншим, ніж в класах з поглибленим вивченням математики.

Орієнтовний календарний план вивчення теми.

Таблиця 1

№	Дата проведення	Зміст занять, види робіт	К-ть годин	Примітки
1		Про розширення поняття числа. Поле раціональних і поле дійсних чисел	1	
2		Розширення поля дійсних чисел. Уявні і комплексні числа	2	
3		Геометрична інтерпретація комплексних чисел СР-1	2	
4		Дії над комплексними числами. Розв'язування вправ СР-2	3	
5		Тригонометрична форма комплексного числа	1	
6		Множення, ділення і піднесення до степеня чисел у тригонометричній формі. Формула Муавра. Вправи СР-3	3	
7		Добування кореня з комплексного числа	1	
8		Комплексні корені алгебраїчних рівнянь. Розв'язування вправ СР-4	3	
9		Про основну теорему алгебри. Розв'язування вправ СР-5	3	
10		Контрольна робота	1	
		Всього:	20	

3. Формування поняття комплексного числа

Вивчення *комплексних чисел* (надалі КЧ) є завершальним етапом побудови числових систем в шкільному курсі математики. Тому учням слід повідомити, що поряд з практичними потребами, які приводять до необхідності введення нових чисел, існує потреба розширення поняття про число і під час розв'язування рівнянь, оскільки відомо, що рівняння в більшості випадків також отримувались в результаті побудови ідеалізованих математичних моделей реальних процесів та станів.

Які ж практичні потреби в минулому приводили до введення нових чисел?

Учні мають знати, що:

- потреба в лічбі предметів привела до створення множини натуральних чисел N;
- потреба у від'ємних числах виникла під час обрахунків прибутків і боргів, зростання і зменшення величини відносно умовного значення. Так з'явилася множина цілих чисел Z;
- потреба оперувати частинами цілого породила появу множини раціональних чисел Q.

Однак, якщо зосередитись в математиці на розв'язанні рівнянь, то схема розширення числових множин може бути іншою:

1) розв'язуючи рівняння виду $x + a = b$ у випадку, коли $a,\ b \in N,\ b < a$, приходимо до необхідності введення від'ємних чисел. Приєднуючи до N та від'ємних чисел 0, отримуємо множину цілих чисел Z;
2) розв'язуючи рівняння виду $ax = b$, коли $a,\ b \in Z,\ a = 0,\ b$ – не ділиться націло на a, приходимо до дробових як доданих, так і від'ємних чисел. Таким чином, множина цілих чисел виявилася розширеною до множини раціональних чисел Q із зберіганням алгебраїчних операцій, введених на множині цілих чисел;
3) розв'язуючи рівняння виду $ax^2 = b$, коли $a,\ b \in Q,\ a \neq 0,\ \frac{b}{a} \geq 0$, у випадку, коли $\frac{b}{a}$ не є точним квадратом, вводимо ірраціональні числа. Разом з раціональними вони утворюють множину (поле) дійсних чисел *R*. При цьому виявляється із можливим розв'язання в цьому полі квадратних рівнянь виду $ax^2 + bx + c = 0$ в тому випадку, коли дискримінант $D = b^2 - 4ac \geq 0$;
4) під час розв'язання квадратного рівняння можуть трапитись два випадки: а) *якщо дискримінант рівняння невід'ємний, то рівняння має дійсні корені*; б) *якщо дискримінант рівняння від'ємний, то рівняння в множині дійсних чисел розв'язків не має.*

Аналіз цієї та інших задач привів математиків до висновку про необхідність розширення множини дійсних чисел до поля комплексних чисел, частину якого складає ***множина уявних чисел***.

Потрібно звернути увагу учнів на те, що при розширенні множини дійсних чисел *R до множини комплексних чисел C повинні задовольнятись певні вимоги відповідно до прийняття в математиці принципів розширення поняття числа (принцип коректності).*

До таких вимог належать:

1. Множина дійсних чисел є підмножиною комплексних чисел, а тому означення нових чисел мусить спиратися на поняття дійсного числа.

2. Операції визначаються на множині комплексних чисел так само, як і на множині *R,* причому їх зміст для елементів множини *R,* які вже розглядаються як елементи множини *C*, повинен збігатись з тим, який вони мали в множині *R* до її розширення. Крім цього, для нових чисел повинні виконуватися п'ять законів прямих арифметичних дій (комутативні закони додавання та множення, асоціативні закони додавання та множення та дистрибутивний закон додавання відносно множення).

3. У множині *C* повинна виконуватися операція, що не виконується у множині *R* (операція добування кореня парного степеня з від'ємного числа).

Доцільно наголосити також, що аналогічними є вимоги до розширення інших числових множин.

Формування поняття комплексного числа доцільно розпочати з розгляду квадратного рівняння з від'ємним дискримінантом, оскільки з квадратним коренем з від'ємного числа учні вперше зустрілися під час розв'язування квадратних рівнянь в курсі алгебри базової школи.

Для цього можна скористатись квадратним рівнянням $x^2 - 4x + 13 = 0$ і формулою його коренів: $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm \sqrt{-9}$.

До цього часу вважалося, що такі вирази не мають змісту. Дійсно, ні серед раціональних, ні серед ірраціональних чисел немає такого, квадрат якого рівний -9 і тому дане рівняння немає дійсних коренів.

Після цього можна запропонувати учням помітити, що квадратний корінь з довільного від'ємного числа можна представити на основі вже встановлених вимог у вигляді добутку дійсного числа та квадратного кореня з числа -1, наприклад $\sqrt{-9} = \sqrt{9 \cdot (-1)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1}$.

Вираз $\sqrt{-1}$ ***Л. Ейлер*** запропонував позначати літерою ***і*** (першою літерою латинського слова *imaginarius - уявний*) та називати ***уявною одиницею***.

Таким чином, ***уявна одиниця – це число, квадрат якого рівний* -1 *:*** $\mathbf{i^2 = -1}$

Необхідно наголосити учням, що рівність $\mathrm{i}^2 = -1$ *приймається за означенням і* ***не доводиться****.*

Як бачимо, нова множина *C*, крім всіх дійсних чисел, містить ще й число ***і***. Оскільки в цій множині можливе множення, що випливає з другої вимоги до розширення поля R, то вона повинна містити і всі числа виду bi, де $b \epsilon R$. Завжди можлива в цій множині і дія додавання, тому множині C належать і всі числа виду $a + bi$, де $a, b \epsilon R$, а i – уявна одиниця.

Повертаючись до розглянутого прикладу і використовуючи позначення $\sqrt{-1} = i$, можна записати, що $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3i$. Числа $2 \pm 3i$ мають вигляд $a \pm b$i, де $a, b \epsilon R$. Кожен з виразів $2 + 3i$ та $2 - 3i$ складається з двох частин: *дійсної* (число 2) та *уявної* (відповідно $3i$ та -$3i$). Тепер можна перейти до формулювання означення.

Означення. *Вираз виду* $z = a \pm bi$, де $a, b \epsilon R$, а i – уявна одиниця, називають ***комплексним числом***.

Саме слово «комплексний» означає «складений». Дійсно, комплексне число складається з двох частин:

- $a = Rez$ *дійсна частина комплексного числа;*
- *що стосується уявної частини, то існує певна неоднозначність у її визначенні. Наприклад, у одних діючих підручниках уявною частиною називають вираз* bi, *а число* b *називають коефіцієнтом при уявній частині. У той же час, у інших підручниках уявною частиною називають число* b *і позначають* $b = Imz$. *Рекомендуємо дотримуватися першого підходу до визначення уявної частини.*

Після введення означення комплексного числа та його частин, доцільно потренуватись з учнями у знаходженні дійсної та уявної частин конкретних комплексних чисел, а також, у визначенні коефіцієнтів уявної частини.

Поряд з цим, перед учнями можна поставити проблемне питання: *при якій умові комплексне число* $a \pm bi$ *є дійсним числом*? При цьому спочатку слід згадати, що множина *C* повністю містить множину R. Після розв'язання цього питання слід наголосити, що якщо дійсна частина комплексного числа $R \epsilon z = a = 0$, то число $z = bi$ *називаються суто уявним*.

Далі потрібно з'ясувати умови рівності двох комплексних чисел.

Означення. Два комплексних числа $\boldsymbol{a + bi}$ ***та*** $\boldsymbol{c + di}$ ***рівні між собою тоді і тільки тоді, коли*** $\boldsymbol{a = c}$ ***і*** $\boldsymbol{c = d}$***, тобто коли рівні їх дійсні частини і коефіцієнти при уявних частинах:*** $\boldsymbol{a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c}$ та $\boldsymbol{b = d}$.

Слід повідомити учням і про те, що поняття «більше» і «менше» для комплексних чисел немає смислу. Ці числа за величиною не порівнюють, тобто не можна сказати яке з двох чисел більше чи менше.

Важливим є поняття про спряжені комплексні числа. Числа $a + bi$ та $a - bi$, дійсні частини яких рівні, а коефіцієнти при уявних частинах рівні за модулем, але протилежні за знаком, називають спряженими.

Слід розглядати приклади спряжених КЧ і звернути увагу, що спряженими до дійсного числа є саме число, оскільки $a + 0 \cdot i = a - 0 \cdot i = a.$ Ці відомості є підґрунтям для подальшого вивчення комплексних чисел і дій над ними.

4. Вивчення дій над комплексними числами

Стосовно історії виникнення дій над КЧ можна сказати, що спочатку такими числами оперували у практичних випадках, хоча і не надавали їм будь-якого смислу. При цьому відбувалося поширення правил дій з дійсними числами на нові «уявні» числа.

Італійський математик **Рафаеле Бомбеллі** (1530-1572 рр.) вперше виклав правила дій над КЧ майже у сучасному вигляді. Він ґрунтовно розглянув у книзі «Алгебра» (1572 р.) різні випадки, які зустрічаються під час розв'язування кубічних рівнянь. Ідея Бомбеллі була геніально простою: діяти з коренями з від'ємних чисел за тими ж правилами, що і з дійсними числами.

Додавання комплексних чисел

Перш за все потрібно звернути увагу учнів на те, що форма запису КЧ, з якою вони знайомилися на попередніх заняттях, а саме $a + bi$, називається ***алгебраїчною.***

Запис КЧ у вигляді $a + bi$ дає можливість означати операції над ними як відповідні операції над многочленами.

Після такого повідомлення можна запропонувати учням самостійно знайти суму двох КЧ і сформулювати означення суми, позначивши: $z_1 = x_1 + y_1 i$ та $z_2 = x_2 + y_2 i.$

Тоді, $z_1 + z_2 = x_1 + y_1 i + x_2 + y_2 i = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i.$

Означення. *Сумою двох КЧ $x_1 + y_1 i$ та $x_2 + y_2 i$ називається КЧ $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$, дійсна частина якого і коефіцієнт при уявній частина дорівнює відповідно сумі дійсних частин і коефіцієнтів при уявних частинах доданків, тобто $(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i.$*

Після введення такого означення слід розглянути декілька прикладів на додавання КЧ. Оскільки множина C є полем, а тому і групою, то в ній повинен існувати нейтральний елемент для довільного КЧ.

У множині R таким елементом є нуль: $a + 0 = \alpha, \ \forall a \epsilon R$.

У множині C нулем є $0 + 0 \cdot i$.

Справді, яким би не було число $a + b$i, справедлива рівність:

$(a + bi)$+($0 + 0i$)= $(a + 0) + (b + 0) \cdot i = a + bi$.

За аналогією з дійсними числами вводиться поняття про протилежні числа: два числа $a + bi$ та $-a - bi$, сума яких дорівнює 0, *називається протилежними*.

Віднімання комплексних чисел

Віднімання комплексних чисел можна звести до давання протилежного до другого доданка числа:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = a_1 + b_1 i + (-a_2 - b_2 i) = a_1 - a_2 + (b_1 - b_2)i.$$

Взагалі, віднімання КЧ означають як дію обернену до додавання, коли за даною сумою й одним з доданків знаходять другий, невідомий доданок. Можна запропонувати учням самостійно сформулювати означення різниці двох КЧ.

Означення. *Різницею двох КЧ $z_1 = a_1 + b_1 i$ та $z_2 = c + di$ називається таке КЧ $z_3 = x + iy$, яке в сумі з z_2 дає z_1. Отже, $z_1 - \ z_2 = \ z_3$, якщо $z_3 + \ z_2 = z_1$.*

Потрібно наголосити, що коли вводять дію віднімання за сформульованими вище означеннями, то можливості існування дій та її однозначність потребує доведення.

Тому слід довести, що для будь-яких КЧ $z_1 = a_1 + b_1 i$ та $z_2 = c + di$ різниця $z_1 - z_2$ визначена і до того не однозначно.

Доведення можна запропонувати учням.

Нехай задано $z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = c + di.$ Виберемо КЧ $z = x + yi$.

Тоді за означенням дій віднімання $(c + di) + (x + yi) = a + bi$.

Виконавши додавання в лівій частині рівності, дістанемо :

$$(c + x) + (d + y)i = a + bi \qquad (1)$$

З умови рівності двох КЧ маємо : $\begin{cases} c + x = a \\ d + y = b \end{cases}$.

Ця система має розв'язок і до того ж єдиний: $x = a - c$ та $y = b - d$.

Отже, існує, і до того ж єдина, пара дійсних чисел (*x, y*), яка задовольняє рівняння (1), що і треба було довести. З доведеного учні можуть зробити висновок, що віднімання КЧ виконують за таким правилом:

$$(a_1 + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i \qquad (2)$$

Отже є два різні підходи до введення різниці двох КЧ:

1) звести дію віднімання до дій додавання протилежного до від'ємника числа;

2) означити різницю двох КЧ, після чого довести можливість дії віднімання та її однозначність.

Обидва підходи можна зустріти в діючих альтернативних підручниках.

Після отримання формули (2) доцільно запропонувати учням перевести її на природну мову, тобто сформулювати правило віднімання КЧ.

Введення другої дії дозволить виконувати не тільки віднімання КЧ, але і розв'язувати приклади на сумісне додавання і віднімання. При цьому слід звернути увагу учнів, що можна користуватися правилами додавання та віднімання многочленів.

Множення комплексних чисел

Тут учням буде складно без перетворень сформулювати означення добутку КЧ і тому спочатку слід знову повторити, що на КЧ слід дивитися як на двочлен, у зв'язку з чим запропонувати знайти добуток двох двочленів. Якщо ніхто з учнів у класі не здогадається, як зводити подібні доданки і що робити з i^2, то потрібно підказати і записати кінцевий результат на дошці. Далі можна знову запропонувати сформулювати означення добутку.

Означення. *Добутком двох КЧ* $z_1 = a_1 + b_1 i$ *та* $z_2 = c + di$ *називається КЧ*

$$z = (ac - bd) + (ad + bc)i \text{ .}$$

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Запам'ятовувати формулу учням не обов'язково. Їм досить пам'ятати, що КЧ перемножуються як двочлени з врахуванням умови що $i^2 = -1$.

Окремо слід розглянути добуток двох спряжених КЧ:

$$(a + bi)(c - bi) = a^2 + abi - abi - b^2 \cdot i^2 = a^2 + b^2 \quad .$$

Слід звернути увагу учнів що для дії множення КЧ мають місце переставний та сполучений закони, встановлені для дійсних чисел.

Ділення комплексних чисел

У шкільних підручниках можуть розглядатися різні підходи до введення дії ділення. В одних, дію ділення КЧ означають як дію, обернену до дії множення, коли за даним добутком і одним із множників знаходять другий невідомий множник. При чому у множині *C* залишається вимога, щоб дільник був відмінний від 0.

Означення. *Часткою КЧ $z_1 = a_1 + bi$ та $z_2 = c + di$ називається таке КЧ $z_3 = x + yi$ яке при множенні на z_2 дає z_1.*

Як і у випадку віднімання, можливість ділення КЧ і його однозначність потребує доведення. Таке доведення може бути наступним.

Доведемо, що частка КЧ $z_1 = a_1 + bi$ *та* $z_2 = c + di$ *в*изначена і до того ж однозначно, якщо $c + di \neq 0 + 0i.$

Нехай $z_3 = x + yi$, яке при множенні на z_2 дає z_1.

За означенням дії ділення $(c + di) \cdot (x + yi) = a + bi$.

Виконавши в лівій частині цієї рівності дію множення, дістанемо

$(cx - dy) + (cy + dx)i = a + bi$.

З умови рівності двох КЧ випливає: $\begin{cases} cx - dy = a, \\ cy + dx = b. \end{cases}$

Система має єдиний розв'язок: $x = \frac{ac+bd}{c^2+a^2}$; $y = \frac{bc-ad}{c^2+a^2}$.

Отже, частка $z = x + yi$ існує і єдина, має місце рівність:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} - \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \cdot i \qquad (3)$$

По-іншому дію ділення можна ввести як множення на обернених до дільника КЧ. Для цього спочатку потрібно ввести загальне поняття числа, оберненого до даного КЧ.

Нехай задано $z = a + bi \neq 0$. Відомо, що $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$. Тоді, $z \cdot = \frac{\bar{z}}{a^2+b^2} = 1$.

Розпишемо другий множник $\frac{\bar{z}}{a^2+b^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} \cdot i$ **(*)**

Він є КЧ, яке завжди існує для $z \neq 0$.

Це число називають *оберненим до числа* z. Його позначають z^{-1}: $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{a^2+b^2}$.

Часткою чисел z_1 і z_2 називають таке число z, що $z_2 \cdot z = z_1$.

Якщо $z_2 \neq 0$, то існує число, обернене до z_2.

Помноживши обидві частини рівності на z_2^{-1}.

Дістанемо $z_2^{-1} \cdot z_2 \cdot z = z_2^{-1} \cdot z_1$.

Оскільки маємо $z_2^{-1} \cdot z_2 = 1$, то : $z = z_2^{-1} \cdot z_1$.

Враховуючи вираз **(*)** для z_2^{-1}, дістанемо:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i} = \frac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{a_2^2+b_2^2} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2} \cdot i.$$

Якщо $z_2 \neq 0$, частка $\frac{z_1}{z_2}$ визначена для будь-яких $z_1,\ z_2 \in C$.

Другим підходом пропонується скористатися в класах з поглибленим вивченням математики. Цей підхід дозволить учням використати знання, набуті під час вивчення алгебраїчних структур (безпосередньо перед КЧ). Тут вчитель може запитати про поле, про поняття симетричного елемента. Крім того, такий підхід вимагає вміння використання штучних прийомів та логічного мислення.

Піднесення комплексних чисел до степеня

Якщо КЧ подано в алгебраїчній формі, то дію піднесення до степеня не розглядають, оскільки це потребує використання формули бінома Ньютона і доводиться виконувати складні та громіздкі перетворення. Значно простіше виконувати дії піднесення до степеня і добування кореня з КЧ, якщо воно представлено в тригонометричній формі.

Однак для уявної одиниці і потрібно зробити виключення. Конкретно-індуктивним методом учням слід показати, що: $i^1 = 1, i^2 = -1, i^3 = i^2 \cdot i = -1,\ i^4 = 1.$

Потім сформулювати твердження (правило).

Правило. *Щоб піднести число i до степеня з натуральним показником n, треба показник степеня поділити на 4 і піднести до степеня, показник якого дорівнює остачі від ділення.*
У загальному виді це можна подати як:
$i^{4m} = 1, i^{4m+1} = i,\ i^{4m+2} = -1,\ i^{4m+3} = i^3 - i.$

Така загальна схема корисна буде учням під час розв’язування вправ.

5. Різна форми представлення комплексного числа: геометрична та тригонометрична

Геометрична інтерпретація комплексного числа

Сам термін «уявні числа» відображає ставлення до них математиків XVI–XVIII століть. Воно змінилося у XIX ст. після праць Веселя, Догана та Гауса, які знайшли для КЧ та дій над ними геометричне тлумачення.

Підвести учнів до геометричної інтерпретації допомагає розгляд дійсних чисел як точок числової прямої. Нехай M – множина дійсних чисел, M_2 – множина точок на координатній прямій, M_3 – множина векторів на координатній прямій з початком в точці O – початку системи координат. Між цими трьома множинами існує взаємно-однозначна відповідність: $M_1 \sim M_2 \sim M_3$ або $x \leftrightarrow M_x \leftrightarrow \overrightarrow{OM_x}$.

У той же час на площині, на якій обрана прямокутна декартова система координат, для визначення положення деякої точки необхідно задати пару дійсних чисел $(x; y)$. Навпаки, кожній точці координатної площини відповідає одна і лише одна пара дійсних чисел. Таким чином, між множиною всіх пар дійсних чисел та множиною всіх точок координатної площини існує взаємо-однозначна відповідність, тобто множина всіх пар дійсних чисел виконує по відношенню до точок координатної площини ту ж саму роль, що і множина дійсних чисел по відношенню до точок координатної прямої. Оскільки КЧ має вигляд $x + y\sqrt{-1}$, тобто визначається парою дійсних чисел, його можна зобразити точкою площини з координатами $(x; y)$. Таким чином, пари цілих чисел привели до раціональних чисел, нескінченні послідовності раціональних чисел завершити побудову R, а пари довільних дійсних чисел привели до поняття КЧ.

Використаний прийом аналогії дозволяє не тільки пригадати побудову раніше вивчених числових множин, але і простежити внутрішньо предметні зв'язки.

Отже, КЧ можна інтегрувати як точки деякої площини, на якій вибрано систему координат. ***Координатну площину називають при цьому комплексною***. Дійсні числа, оскільки вони також входять до C, зображають точками осі OX, бо вони відповідають КЧ $a + 0i$. ***При цьому вісь OX називається дійсною віссю***. Вісь ординат називається уявною віссю – на ній лежать точки, які відповідають уявними КЧ, що мають вигляд $a + bi$. Числу $x = 0$ відповідає точка $O(0;\ 0)$.

Отже, через z одночасно позначається і КЧ, і точка, що зображає це число.

Зручною є також інтерпретація КЧ як вектора $\overrightarrow{OM}$ (рис. 1).

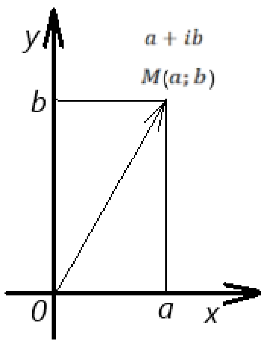


Рис. 1

Векторна інтерпретація КЧ стала можливою після введення *ірландським математиком* **Уільямсом Гамільтоном** у 1831 р. поняття про вектори. Отже, для такої інтерпретації в прямокутній декартовій системі координат береться точка $M(a; b)$ та вектор $\overrightarrow{OM}$. Зрозуміло, то точці *M* відповідає пара чисел $(a; b)$ та вектор $\overrightarrow{OM}$, і така відповідність є взаємно-однозначною. Позначимо тепер M_1 множину КЧ, M_z – множину точок на координатній площині, M_3 – множину векторів на M_2 з початком в точці O – початку системи координат. Між цими трьома множинами існує взаємно-однозначна відповідність: $M_1 \sim M_2 \sim M_3$ або $z = a + bi \leftrightarrow M(a;\ b) \quad \leftrightarrow \overrightarrow{OM}$.

Вектор $\overrightarrow{OM}$ називають радіус – вектором КЧ z, а його довжина називається модулем КЧ і позначається $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Очевидно, що $0 \leq |z| < +\infty$.

Відповідність між множиною КЧ, з одного боку, і множиною точок або векторів, з іншого, дає змогу КЧ називати точками або векторами і говорити, наприклад, про вектор $a + bi$ або про точку $a + bi$. Отже, комплексною координатою вектора $\overrightarrow{OM}(a;\ b)$ є КЧ $z = a + bi$. КЧ $a + bi$ називають також комплексною координатою точки z.

З геометричної інтерпретації КЧ у вигляді векторів випливає можливість геометричного зображення додавання та віднімання КЧ. Оскільки при додаванні та відніманні векторів їх відповідні координати додаються та віднімаються, то те саме справджується і для їх комплексних координат.

Нехай вектори $\overrightarrow{OA}$ та $\overrightarrow{OB}$ мають комплексні координати z_1 і z_2, а вектор $\overrightarrow{OC}$ має комплексну координату z. Тоді, $z = z_1 + z_2$. Геометрично це означає, що вектор z – це діагональ паралелограма, що побудований на векторах z_1 і z_2 (рис. 2).

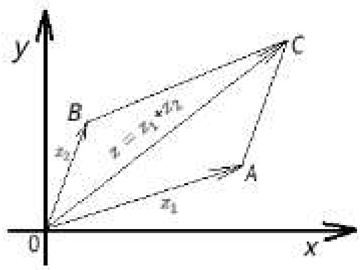


Рис. 2

Звідси випливає, що $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Нехай z – комплексна координата вектора $\overrightarrow{AB}$=$\overrightarrow{OB}$-$\overrightarrow{OA}$. Тоді $z = z_2 - z_1$. Числа z_1 і z_2 є комплексними координатами точок *A* і *B*, тому комплексна координата вектора дорівнює різниці між комплексними координатами його кінця та початку (рис. 3).

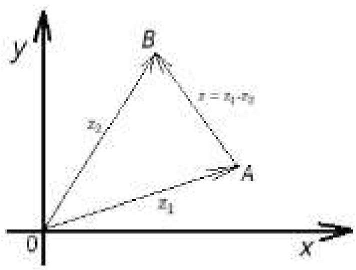


Рис. 3

Віднімання векторів, що мають спільний початок, можна замінити додаванням до вектора-зменшуваного вектора, протилежного від’ємнику.

Після повідомлення цього матеріалу потрібно розглянути з учнями достатню кількість прикладів на додавання та віднімання КЧ, використовуючи їх геометричну інтерпретацію. Такі приклади приведуть до вироблення вміння зображати КЧ у вигляді точок комплексної площини або векторів, а також дадуть можливість пригадати дії з векторами.

Тригонометрична форма запису комплексного числа

Учні вже знають, що запис числа z у вигляді $a+bi$ *називається алгебраїчною формою запису КЧ*. Слід повідомити, що крім алгебраїчної форми використовуються й інша форма запису КЧ – *тригонометрична*.

На введення тригонометричної форми КЧ наштовхує геометрична інтерпретація КЧ. Виявляється, що тригонометрична форма запису КЧ є зручнішою під час розв'язування багатьох задач, зокрема, при піднесенні до степеня та добуванні кореня з КЧ. Учні вже знайомі з поняттям модуля КЧ, але не буде зайвим нагадати його.

Модулем комплексного числа $z=a+bi$ називається значення $\sqrt{a^2+b^2}$. Число $r=\sqrt{a^2+b^2}$ перетворюється на 0 тільки за умови, що $a=0$ і $b=0$. Модуль КЧ позначається по-різному: $r=|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$. Слід звернути увагу учнів та те, що якщо КЧ мають один і той самий модуль, то кінці векторів, які зображують ці числа, лежать на колі з центром у початку координат і радіусом, що дорівнює їх модулю.

Нехай число $z=a+bi$ на комплексній площині задано вектор $\overrightarrow{OA}$ (рис. 4).

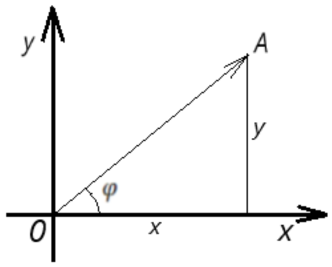


Рис. 4

Через кут φ позначимо кут між додатною піввіссю OX і вектором $\overrightarrow{OA}$. Числове значення кута φ, виміряного в радіанах*, називають аргументом комплексного числа* $x+yi$.

Якщо КЧ дорівнює 0, то вектор $\overrightarrow{OA}$ перетворюється в точку (нуль-вектор), і говорити про його напрям немає сенсу. Тому *вважають, що число 0 немає аргументу*. Аргумент позначають $Argz$. Кожне відмінне від 0 КЧ має нескінченну множину значень аргументу, які відрізняються одне від одного на ціле число повних обертів, тобто на величину $2\pi n$, де $n \epsilon Z$.

Серед усіх значень аргументу є одне значення, яке належить проміжку $\varphi \epsilon [0; 2\pi]$. Його *називають головним значенням і позначають* $argz$.

Величину головного аргументу можна знайти з системи:

$$\begin{cases} sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \text{або} \Leftrightarrow \begin{cases} tg\varphi = \frac{y}{x} \\ 0 \le \varphi < 2\pi \end{cases}, \text{ де } \varphi = argz.$$

Оскільки $x = |z|cos\varphi = rcos\varphi,\ \ y = |z|sin\varphi = rsin\varphi$, де $\varphi = argz$, то будь-яке КЧ $z = x + yi \neq 0$ можна виразити через його модуль і аргумент
$z = |z|(cos\varphi + isin\varphi) = r(cos\varphi + isin\varphi)$.

Такий вираз *називається тригонометричною формою комплексного числа*.

Після повідомлення учням таких знань треба наголосити, що будь-яке КЧ $x + yi,$ задане в алгебраїчній формі, можна подати у тригонометричній формі. Модуль *r* знаходимо за формулою $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, а кут φ визначаємо із залежності $tg\varphi = \frac{y}{x}$, яка випливає з формул $cos\varphi = \frac{x}{r}$, $sin\varphi = \frac{y}{r}$.

Після цього доцільно розглянути достатню кількість вправ, щоб учні навчилися переходити від алгебраїчної до тригонометричної форм і навпаки. Потрібно усвідомити, що для перетворення КЧ з тригонометричної форми в алгебраїчну, досить обчислити значення косинуса і синуса відповідного аргументу і спростити результат. Таких вправ вистачає в шкільних підручниках.

Дії над комплексними числами в тригонометричній формі

Вже було зауважено, що в тригонометричній формі з КЧ набагато зручніше виконувати множення, ділення, піднесення до степеня та добування кореня.

Можна поставити перед учнями задачу: *знайти формулу добутку КЧ у тригонометричній формі.* Її розв’язання можна доручити комусь з учнів біля дошки, а решті – у зошитах. Вивід формули доступний учням.

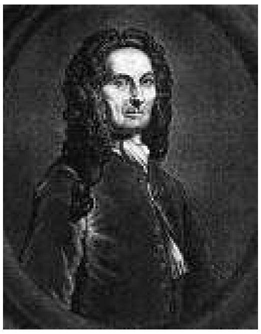
$$z_1z_2 = r_1r_2(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)(cos\varphi_2 + isin\varphi_2) = r_3r_2((cos\varphi_1cos\varphi_2 - sin\varphi_1sin\varphi_2) +$$
$$+i(sin\varphi_1sin\varphi_2 + cos\varphi_3 \cdot sin\varphi_2)) = r_1r_2(cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Отже, $z_1z_2 = r_1r_1(cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)),$ тобто модуль добутку двох КЧ дорівнює добутку модулів цих чисел, а аргумент добутку двох КЧ дорівнює сумі аргументів множників. Ця властивість модуля і аргументу добутку двох КЧ за індукцією легко поширюється на добуток *n* КЧ.

Так, $|z_1z_2 \cdot \ldots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_n|$.

$$arg|z_1z_2 \cdot \ldots \cdot z_n| = argz_1 + argz_2 +\cdot \ldots \cdot +agrz_n.$$

Зокрема, якщо $z_1z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = z \neq 0$, то $|z^n| = |z|^n$, $argz^n = nargz$.



Абрахам де Муавр
англійський математик французького походження. Відомий переважно через формулу Муавра, працями на теми нормального розподілу та теорії ймовірностей

Тому справедлива *формула англійського математика* ***Абрахам де*** *Муавра* :

$$z^n = (r(cos\varphi + isin\varphi))^n = r^n(cosn\varphi + isin\varphi)$$

Далі слід перейти до виведення формули для частки КЧ у тригонометричній формі. За означенням частки *z* КЧ z_1 та z_2 справджується рівність :

$$z_1 = z \cdot z_2 \qquad (1)$$

З рівності (1) випливає, що $|z_1| = |z| \cdot |z_2|$, $argz_1 = argz + argz_2$.

Звідси $|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $argz = arg\,\frac{z_1}{z_2} = argz_1 - argz_2$, тобто модуль частки двох КЧ дорівнює частці їхніх модулів, а аргумент частки двох КЧ дорівнює різниці аргументів діленого та дільника. Отже,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(cos \propto_1 + isin \propto_1)(cos \propto_2 - isin \propto_2)}{r_2(cos \propto_2 + isin \propto_2)(cos \propto_2 - isin \propto_2)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos(\propto_1 - \propto_2) + isin(\propto_1 - \propto_2)}{cos^2 \propto_2 + sin^2 \propto_2} = \frac{r_1}{r_2}\cos(\propto_1 - \propto_2) + isin(\propto_1 - \propto_2))$$

Отримали формулу частки двох комплексних чисел.

Залишилося вивести формулу для добування кореня *n*-го степеня з КЧ.

Коренем n-го степеня з КЧ називають КЧ ω, яке задовольняє рівняння

$$\omega^{т} = z, \text{ де } n \in N \qquad (2)$$

Якщо $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$, $\omega = q(cos\varphi + isin\varphi)$, то з рівняння (2) дістаємо:

$$q^n(cos\varphi + isin\varphi) = r(cos\varphi + isin\varphi).$$

Звідси $q = \sqrt[n]{r}$. Тут під коренем розуміють арифметичний корінь, бо $q \geq 0$.

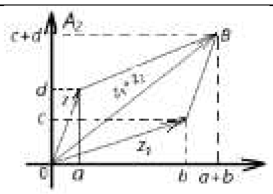
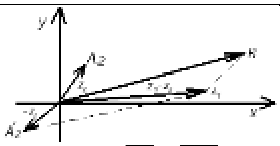
Далі, $n\varphi = \varphi + 2\pi n$, $\qquad \varphi = \frac{\varphi + 2\pi n}{n}$, $k \in N$ $\qquad$ (3)

Якщо $k = 0, 1, \ldots, n-1$, то з формули (3) можна дістати *n* різних значень аргументу φ. Отже, якщо $z \neq 0$, то корінь $\sqrt[n]{z}$ має точно *n* значень, які обчислюються за формулою: $\omega_k = \sqrt[n]{z}(cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + isin\frac{\varphi + 2\pi k}{n})$, $k \in \overline{0, \ldots, n-1}$.

Якщо брати будь-яке інше $k \in Z$, то значення аргументу відрізнятимуться від зазначених на доданок, кратний 2π, і в результаті дістанемо одне з чисел ω_k, $k \in 1, 2, \ldots$, $n-1$. Геометрично числа ω_k зображаються вершинами правильного n-кутника, вписаного в круг радіуса q з центром у початку координат. Вивчені дії з КЧ рекомендуємо подати у вигляді таблиці (див. таблиця 1). Після ознайомлення учнів з теоретичним матеріалом увагу учнів слід звернути на розв'язання вправ, яких в діючих підручниках вдосталь.

Дії над комплексними числами

Таблиця 1

№	Назва дії	Означення результатів дії	Геометричне зображення результату дії	Результат дії у тригонометричній формі
1	**Додавання**	Сума $(a+bi)+(c+di)=$ $=(a+c)+(b+d)i$	 $(a+bi)(c+di)=$ $=\overline{OA_1}+\overline{OA_2}=\overline{OB}=$ $=(a+c)+(c+d)i$	
2	**Віднімання**	Різниця $(a+bi)-(c+di)=$ $=(a-c)+(b-d)i$	 $z_1-z_2=\overline{OB}-\overline{OA_2}=$ $=\overline{OB}-\overline{OA_2}=\overline{OB}-\overline{OA'_2}=$ $=\overline{OA_1}$	
3	**Множення**	Добуток $(a+bi)\cdot(c+di)=$ $=(ac-bd)+(ad+bc)i$		$z_1z_2=r_1r_2(\cos(\propto_1+\propto_2)+isin(\propto_1+\propto_2))$
4	**Ділення**	Частка $\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=$ $=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$		$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\propto_1-\propto_2)+isin(\propto_1-\propto_2)),$ $k\epsilon 0,1,2,\dots,n-1$
5	**Піднесення до степеня**	$(a+bi)^n=\underbrace{(a+bi)\cdot\ldots\cdot(a+bi)}_{n}$		$z^n=r^n(\cos n\propto+isinn\propto)$ Формула Муавра
6	**Добування кореня**	$\sqrt[n]{a+bi}$		$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}(cos\frac{\propto+2\pi k}{n}+$ $isin\frac{\propto+2\pi k}{n}),\ k\epsilon Z$

6. Розв'язання вправ на дії з комплексними числами

Тематика задач і вправ на комплексні числа і різноманітна.

Розглянемо деякі з них.

1) Довести $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$.

Доведення. $\overline{z_1+z_2}=(x_1+x_2)-i(y_1+y_2)=(x_1-iy_2)+(x_2-y_2\cdot i)=\overline{z_1}+\overline{z_2}.$

2) Знайти дійсні корені рівняння $(3x-1)(2+i)+(x-iy)(1+2i)=5+6i.$

Розв'язання. Використовується означення рівності двох КЧ

$6x+3xi-2i+1+x+2xi-iy+2y=6+6i$

$(7x+2y+1)+(3x+2x-2-y)i=5+6i$

$(7x+2y+1)+(5x-y-2)i=5+6i \Leftrightarrow \begin{cases}7x+2y+1=5\\ 5x-y-2=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7x+2y=4\\ 5x-y=8\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}17x=20\\ 5x-y=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{20}{17}\\ y=5\cdot\frac{20}{17}-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{20}{17}\\ y=\frac{100}{17}-8=\frac{100-136}{17}=-\frac{36}{17}\end{cases}$

Відповідь : $z=\frac{20}{17}-\frac{36}{17}i.$

3) Довести, що для довільного КЧ z : $R\epsilon\, z=\frac{z+\bar{z}}{2}$, $Im\, z=\frac{z-\bar{z}}{2}$, де $z=a+ib\ \epsilon\, C$.

Доведення. Нехай $z=a+ib$, тоді КЧ $z=a-bi$.

$\frac{z+\bar{z}}{2}=\frac{(a+ib)+(a-ib)}{2}=\frac{2a}{2}=a=R\epsilon\, z.$

$\frac{z-\bar{z}}{2}=\frac{(a+ib)-(a-ib)}{2}=\frac{2bi}{2}=bi=Im\,\epsilon\, z.$

4) Довести, що для довільних КЧ z_1 і z_2 має місце рівність:

а) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2};$ б) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2};$ в) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Доведення.

а) $\overline{z_1-z_2}=(x_1-x_2)-i(y_1-y_2)=(x_1-iy_1)-(x_2-iy_2)=\overline{z_1}-\overline{z_2};$

б) $\overline{z_1z_2}=(x_1x_2-y_1y_2)-i(x_3y_2+y_1x_2)=(x_1x_2-ix_1y_2)-(y_1y_2+iy_1x_2)=$

$=x_1x_2-y_1y_2-x_3y_2-iy_1x_2=x_1(x_2-iy_2)-y_1(y_2+ix_2)=;$

$=x_1(x_2-iy_2)-iy_1(-y_2+x_2)\quad=(x_2-iy_2)(x_1-iy_3)=\overline{z_2}\cdot\overline{z_1};$

в) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{{x_2}^2+{y_2}^2}-\frac{x_2y_1-x_1y_2}{{x_2}^2+{y_2}^2}i=\frac{x_3x_2+y_1y_2-ix_2y_1+x_1y_2i}{{x_2}^2+{y_2}^2}=\frac{x_2(x_3-iy_3)+y_2(x_1i+y_2)}{{x_2}^2+{y_2}^2}=$

$=\frac{x_2(x_3-iy_3)+iy_2(x_3-iy_1)}{{x_2}^2+{y_2}^2}=\frac{(x_3-iy_1)(x_2+iy_2)}{{x_2}^2+{y_2}^2}=\frac{x_1x_2(x_1-iy_1)(x_2+iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{x_1-iy_1}{x_2-iy_2}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

5) Розв'язати рівняння $|z|-iz=1-2i.$

Розв'язання. Нехай $z=x+iy$, тоді $|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$

Маємо $\sqrt{x^2+y^2}-i(x+iy)=1-2i \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}+y-xi-1+2i=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+y-1=0,\\ -x+2=0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2,\\ \sqrt{x^2+y^2}+y-1=0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2,\\ \sqrt{4+y^2}=y-1.\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=2,\\ 4+y^2=y^2-2y+1.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2,\\ y=-\frac{3}{2}.\end{cases}$

Відповідь : $z=2-\frac{3}{2}i.$

6) Зобразити на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють нерівності $3 < |z + 4 - 3i| \leq 4$, де $z = x + iy$.

Розв'язання. Під знаком модуля стоїть різниця КЧ $z - (-4 + 3i)$.

Задана в умові нерівність показує, що кінець вектора z повинен знаходитись від кінця вектора $(-4 + 3i)$ більше, ніж на три одиниці довжини, але не далі, ніж на чотири одиниці.

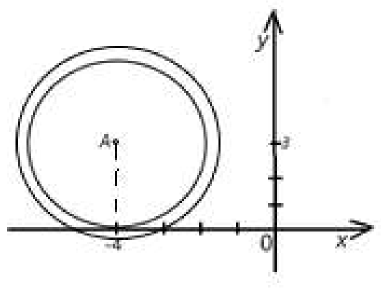


Рис. 5

Іншими словами, кінець вектора z повинен бути одночасно в середині круга радіуса 4 з центром в точці (-4; 3) та зовні круга з тим самим центром та радіусом 3, тобто в кільці (рис. 5).

7) Довести, що рівність $|z - z_0| = R$ задає рівняння кола радіуса R з центром у точці z_0.

Доведення. Як відомо, коло з центом у точці z_0 радіуса R є множиною всіх точок площини, що віддаленні від точки z_0 на відстань R, тобто таких, що $|z - z_0| = R$. Тому рівність $|z - z_0| = R$ задає рівняння кола радіуса R з центром у точці z_0.

8) Довести, що $|z - z_1| = |z - z_2|$ рівняння прямої, перпендикулярної до відрізка, що сполучає точки z_1, z_2 і проходить через його середину ($z_1 \neq z_2$).

Доведення. Всі точки z, що задовольняють рівність $|z - z_1| = |z - z_2|$, рівновіддалений від точок z_1 та z_2 і тому, як відомо з геометрії, лежать на прямій, перпендикулярній до відрізка, який спонукає точки z_1 і z_2, і проходить через його середину. Оберемо, всі точки z цієї прямої. Очевидно, що вони задовольняють рівність $|z - z_1| = |z - z_2|$. Отже, $|z - z_1| = |z - z_2|$ – рівняння вказаної прямої.

9) Визначити, де розміщена множина точок комплексної площини, для яких виконується нерівність $|z| > |z - 4i|$.

Розв'язання. Рівність $|z - 4i| = |z|$ є рівняння прямої x, що паралельно осі OX і проходить через точку $(0; xi)$ – множина точок, які знаходяться на однаковій відстані від точки $(0; xi)$ та $(0; 0)$). Дану нерівність задовольняють точки, розміщені вище від прямої *к*. Точки прямої *к* не входять до цієї множини (рис. 6).

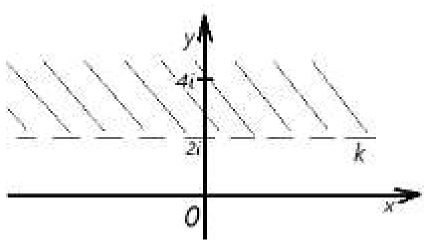


Рис. 6

10) Розв’язати рівняння $y^3 - 3y^2 + 9y - 14 = 0$ (скористатись фомулою Кардано).

Розв’язання. Спочатку приведемо рівняння до вигляду $x^3 + px + q = 0$ за допомогою заміни y на $x + 1$, тобто позбавимося від члена, який містить другу степінь змінної: $y^3 - 3y^2 + 9y - 14 = (x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 9(x+1) \quad - 14 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 3x^2 - 6x - 3 + 9x + 9 - 14 = x^3 + 6x - 7$.

Отримали рівняння $x^3 + 6x - 7 = 0$, до якого можемо застосовувати формулу Кардано:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{3}\right)^3}}.$$

$x = \sqrt[3]{-\frac{7}{2} + \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{7}{2} - \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{-\frac{7}{2} + \sqrt{\frac{49}{4} + 8}} + \sqrt[3]{-\frac{7}{2} - \sqrt{\frac{49}{4} + 8}} = \sqrt[3]{\frac{7}{2} + \frac{9}{2}} + \sqrt[3]{\frac{7}{2} + \frac{9}{2}} = 2 - 1 = 1.$

Оскільки $y = x + 1$, то $y = 1 + 1 = 2$ – корінь початкового рівняння.

Якщо розділити многочлен $y^3 - 3y^2 + 9y - 14 = 0$ на $(y - 2)$, то отримуємо частку $y^3 - y + 7$.

Інші корені початкового рівняння знаходимо з рівняння $y^2 - y + 7 = 0$, $D = 1 - 28 = -27$.

Тоді $y_2 = \frac{1+\sqrt{-27}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{27}}{2} i$; $y_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{27}}{2} i$.

Відповідь : $y_1 = 2,\ y_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{27}}{2} i$; $y_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{27}}{2} i$.

11) Обчислити: $a^{2020} + \frac{1}{a^{2020}}$, якщо $a^2 + a + 1 = 0$.

Дана задача може бути олімпіадною для школярів, які мають уявлення про існування КЧ. Адже в множині дійсних чисел рівняння $a^2 + a + 1 = 0$ немає розв’язків, а тому вести мову про обчислення значення виразу для таких α немає сенсу. Її розв’язання може бути наступним.

Розв'язання. Використаємо формулу різниці кубів: $a^3 - 1 = (a-1)(a^2+a+1)$.

Звідки $a^3 = (a-1)(a^2+a+1)+1 = 1$, бо за умовою $a^2+a+1=0$. Тоді,

$a^{2020} + \frac{1}{a^{2020}} = (a^3)^{673} \cdot a + \frac{1}{(a^3)^{673}} = 1^{673} \cdot a + \frac{1}{1^{673} \cdot a} = \frac{a^2+1}{a} = \frac{(a^2+a+1)-a}{a} = -\frac{a}{a} = -1$,

(де $a \neq 0$).

Відповідь : -1.

Як бачимо, розв'язання цікаве, оригінальне, вишукане.

Однак для тих, хто знайомий з теорією КЧ в межах шкільної програми, така задача стає тривіальною і зводиться до обчислення виразу зі змінною, коли задані значення цієї змінної.

Інше розв'язання задачі бути наступним.

Розв'яжемо рівняння:

$a^2+a+1=0.\ D=-3, \sqrt{D}=\sqrt{-3}=\sqrt{3}i.$

$a_1 = \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ a_2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$

За теоремою Вієта: $a_1 \cdot a_2 = 1 => a_1 = \frac{1}{a_2}$.

Запишемо числа a_1і a_2 в тригонометричній формі:

$a_1 = cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3},\ a_2 = cos\frac{4\pi}{3} + isin\frac{4\pi}{3}.$

Обчислимо a_1^{2020} і a_2^{2020}, користуючись формулою Муавра:

$$a_1^{2020} = (cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3})^{2020} = cos\frac{2\pi \cdot 2020}{3} + isin\frac{2\pi \cdot 2020}{3} = cos\frac{4040\pi}{3} + isin\frac{40402\pi}{3} =$$

$$= \cos\left(1346\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + isin\left(1346\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$a_2^{2020} = (cos\frac{4\pi}{3} + isin\frac{4\pi}{3})^{2020} = cos\frac{4\pi \cdot 2020}{3} + isin\frac{4\pi \cdot 2020}{3} = cos\frac{8080\pi}{3} + isin\frac{8080\pi}{3} =$$

$$= \cos\left(2692\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + isin\left(2692\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = cos\frac{4\pi}{3} + isin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тоді, $a_1^{2020} + \frac{1}{a_1^{2020}} = a_1^{2020} + a_2^{2020} = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1.$

Відповідь: -1.

ПІДСУМОК

Темою «Комплексні числа» завершується вивчення в шкільному курсі математики змістової лінії числа дії над ними.

Головна мета вивчення – показати учням як відбувається в математиці розширення поняття числа і які потреби вимагають здійснювати таке розширення. Учні мають навчитися виконувати в множині комплексних чисел арифметичні дії, мати уявлення про комплексні корені алгебраїчних рівнянь, помічати тісний зв'язок між множиною КЧ і декартовою прямокутною системою координат на площині.

Тема вивчається з ознайомлюваною метою і лише в старшій профільній школі.

МЕТОДИЧНІ ЗАДАЧІ

для самостійного розв'язування

1. Проаналізувати навчальний матеріал теми «Комплексні числа» за одним з альтернативних підручників для старшої профільної школи. З'ясуйте які з можливих підходів до вивчення теми реалізовано в ньому.

2. Скласти контрольну роботу до теми «Комплексні числа» (да варіанти) і запропонуйте розв'язання дібраних завдань.

3. *Розв'язати вправи*:
   а) подайте вирази у вигляді добутку КЧ: $a^2 + 16b^2$, $x^4 + y^4$, $x^2 + 4$.
   б) спростіть вираз: $15 + 19i^2 - i^2, (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^2$.
   в) виконайте множення і ділення КЧ:
   $z_1 = 3\sqrt{2}(cos100^\circ + isin100^\circ)$, $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(cos5^\circ + isin5^\circ)$.
   г) піднесіть КЧ до степеня, користуючись формулою Муавра:
   $(1+i)^{12}$, $z = (sin\frac{6\pi}{5} + i(1 + cos\frac{6\pi}{5}))^5$.
   д) знайдіть значення коренів КЧ: $\sqrt[3]{2-2i}$, $\sqrt[4]{-4}$.

Уявні числа – це прекрасне й чудове сховище… мало не поєднання буття з небуттям

Г. Лейбніц

Запровадження уявних чисел привело до встановлення в алгебрі тверджень, що дозволили підвести математичні факти, які здавалися раніше розрізненими, під одну загальну точку зору; така, наприклад, основна теорема алгебри, яка твердить, що ціла алгебраїчна функція n-го степеня від однієї незалежної змінної має точно n коренів.

О. С. Сморжевський

РОЗДІЛ 3
ТЕОРІЯ ТА МЕТОДИКА НАВЧАННЯ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Л Е К Ц І Я 3.1

Т Е М А ***Стереометрія як навчальний предмет в старшій профільній школі***

П Л А Н

1.	***Стереометрія як навчальний предмет старшої профільної школи: пропедевтичне вивчення; систематичний курс – мета вивчення, зміст курсу, тематичне планування навчального процесу***
2.	***Вимоги до підготовки учнів з стереометрії (компетентності, якими мають оволодіти учні)***
3.	***Засоби навчання стереометрії: альтернативні підручники, навчальні посібники, дидактичні матеріали***

К О Н С П Е К Т Л Е К Ц І Ї

1. Стереометрія як навчальний предмет старшої профільної школи: пропедевтичне вивчення; систематичний курс – мета вивчення, зміст курсу, тематичне планування навчального процесу

Освітня галузь «Математика» в старшій профільній школі представлена двома навчальними дисциплінами: *Алгебра і початки аналізу* та *Геометрія*.

Оскільки в базовій середній школі учні вивчали геометрію на площині, тобто Планіметрію (7-9 класи), то в старшій школі цей курс називають Стереометрія (геометрія в просторі). Попереднє (пропедевтичне) знайомство з просторовими фігурами учні отримують ще в початковій школі, а потім в базовій середній. Вони можуть розпізнати серед геометричних фігур куб, паралелепіпед, піраміду, циліндр, конус, кулю. Вміють обчислювати їх об’єми за готовими формулами.

Систематичне вивчення стереометрії починається з 10 класу як за програмою рівня стандарту, де цей предмет входить до інтегрованого курсу «Математика», так і за програмою профільного рівня (окрема навчальна дисципліна).

Курс Стереометрії включає (згідно Стандарту [1]) дві змістові лінії: ***геометричні фігури*** і ***геометричні величини***.

Основна мета вивчення Стереометрії в старшій школі:

- систематичне вивчення властивостей геометричних фігур в просторі, як ідеальних моделей предметів реального світу;
- формування способів обчислення практично важливих геометричних величин;
- розвиток просторової уяви, формування просторових уявлень в учнів;
- розвиток логічного мислення учнів, їх розумових здібностей.

Зміст курсу і вимоги до підготовки учнів визначені Стандартом [1].

Вони виписані наступним чином. Зокрема:

Геометричні фігури	
- Аксіоми стереометрії. Взаємне розміщення прямих і площин у просторі. - Многогранники і тіла обертання, їх види та властивості. Побудова в просторі. - Геометричні перетворення. Координати і вектори.	- Знати означення геометричних фігур в просторі та їх властивості; взаємне розміщення прямих і площин; види геометричних перетворень; методи, що застосовуються в стереометрії. - Вміти зображати геометричні фігури, розв’язувати простіші задачі, зокрема прикладного змісту.
Геометричні величини	
- Відстані. Міри кутів між прямими і пощинами. - Площі поверхонь і об’єми.	- Мати уявлення про площу поверхні і об’єм тіла. - Знати означення відстані від точки до площини, міри кутів між прямими і площинами; формули площ поверхонь, об’ємів многогранників і тіл обертання. - Вміти знаходити відстані, міри кутів, розв’язувати простіші задачі на вимірювання і обчислення площ поверхонь і об’ємів тіл.

Вивчення курсу Стереометрія в старшій профільній школі регламентується державною навчальною програмою з математики для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (профільний рівень) [5, 6].

Орієнтований тематичний план вивчення Стереометрії (за програмою) [6] подано у таблиці 1.

Таблиця 1

Клас	№ п/п	Теми занять, види письмових робіт	К-ть годин для вивчення теми
10	1	Систематизація та узагальнення фактів і методів планіметрії	28
	2	Вступ до стереометрії	12
	3	Паралельність прямих і площин у просторі	40
	4	Перпендикулярність прямих і площин у просторі	40
		Систематизація та узагальнення навчального матеріалу, резервний час	20
		Разом	140
11	5	Координати та вектори у просторі	32
	6	Многогранники	28
	7	Тіла обертання	20
	8	Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл	36
		Повторення, узагальнення та систематизація навчального матеріалу, розв'язування задач	20
		Резерв	4
		Разом:	140

Однак цей тематичний план рекомендуємо деталізувати (дивись мотивацію створення деталізованого навчального плану вивчення Алгебри і початків аналізу)

Деталізований орієнтований план вивчення Стереометрії подано у таблиці 2.

Таблиця 2

Клас	№ теми	№ підтеми	Теми занять, види письмових робіт	К-ть годин для вивчення теми
10	1. Систематизація та узагальнення фактів і методів планіметрії	1.1	Планіметричні фігури та їх властивості	15
		1.2	Геометричні величини їх вимірювання та обчислення	13
	2. Вступ до стереометрії	2.0	Аксіоми стереометрії і наслідки з них	12
	3. Паралельність прямих і площин в просторі	3.1	Паралельність прямих, прямої і площини в просторі	20
		3.2	Паралельність площин в просторі. Паралельне проєкціювання і його застосування	20
	4. Перпендикулярність прямих і площин в просторі	4.1	Перпендикулярність прямих, прямої і площини в просторі	20
		4.2	Перпендикулярність площин в просторі. Ортогональне проєкціювання і його застосування	20
		Систематизація та узагальнення навчального матеріалу. Резервний час		20
			Разом	140

Таблиця 2 (продовження)

Клас	№ теми	№ підтеми	Теми занять, види письмових робіт	К-ть годин для вивчення теми
11	5. Координати та вектори в просторі	5.1	Декартові координати в просторі. Основні задачі	15
		5.2	Вектори в просторі і дії над ними	17
	6. Многогранники	6.1	Призма	12
		6.2	Піраміда	16
	7. Тіла обертання	7.1	Циліндр	10
		7.2	Конус, куля і її елементи	10
	8. Об’єм та площі поверхонь геометричних тіл	8.1	Об’єм і площа поверхонь многогранників	15
		8.2	Об’єм обертання тіл	12
		8.3	Площа поверхні тіл обертання	9
		Повторення, узагальнення та систематизація навчального матеріалу, розв’язування задач		20
			Резерв	4
			Разом:	140

2. Вимоги до підготовки учнів з стереометрії (компетентності, якими мають оволодіти учні)

У результаті вивчення курсу Стереометрія учні повинні оволодіти наступними компетентностями:

- зображати просторові геометричні тіла, які вказуються в умовах задач і теорем, і виділять відомі тіла на готових кресленнях (малюнках) та моделях (графічна компетентність);
- розв’язувати типові задачі на обчислення, доведення, спираючись на отримані теоретичні знання (процедурна, обчислювальна, аналітична компетентність);
- робити доказові міркування в ході розв’язування типових задач, використовуючи теоретичні відомості, отримані під час вивчення планіметрії і стереометрії (аналітична компетентність);
- обчислювати значення геометричних величин (довжин, кутів, площ, об’ємів), застосовуючи вивченні в планіметрії і стереометрії формули і теореми (обчислювальна компетентність);
- застосовувати математичний апарат з алгебри, алгебри і початків аналізу під час розв’язування геометричних задач (аналітична, процедурна компетентність);
- застосовувати вектори і координати для розв’язування нескладних геометричних задач (процедурна, обчислювальна, аналітична компетентність).

3. Засоби навчання стереометрії : альтернативні підручники, навчальні посібники, дидактичні матеріали

До засобів навчання курсу Стереометрії належать альтернативні підручники, навчальні посібники, дидактичні матеріали тощо.

Основні підручники

(2022-2023 н. р., рекомендовані МОН України)

10 Геометрія (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 кл., профільний рівень)

Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С.

Видавництво Гімназія

Наказ МОН від 31.05.2018, № 551

10 Геометрія (профільний рівень)

Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С.

Видавництво Гімназія

Наказ МОН від 31.05.2018, № 551

10 Геометрія (профільний рівень)

Нелін Є. П.

Видавництво Ранок

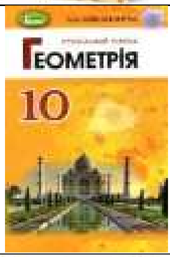
Наказ МОН від 31.05.2018, № 551

10 Геометрія (профільний рівень)

Єршова А.П., Голобородько В.В., Крижановський В.Ф., Єршов С.В.

Видавництво Ранок

Наказ МОН від 31.05.2018, № 551



10 Геометрія (профільний рівень)

Істер О.С., Єргіна О.В.

Видавництво Генеза

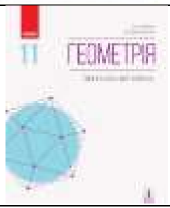
Наказ МОН від 31.05.2018, № 551

10 Геометрія (профільний рівень)

Бевз В.Г., Бевз Г.П., Владімірова Н.Г., Владіміров В.М.

Видавництво ВД «Освіта»

Наказ МОН від 31.05.2018, № 551

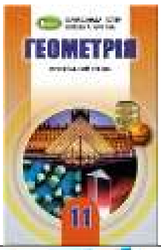


11 Геометрія (профільний рівень)

Нелін Є. П., Долгова О.Є.

Видавництво Гімназія

Наказ МОН від 12.04.2019, № 472



11 Геометрія (профільний рівень)

Істер О.С., Єргіна О.В.

Видавництво Гімназія

Наказ МОН від 12.04.2019, № 472

11 Геометрія (профільний рівень)

Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С.

Видавництво ВД «Освіта»

Наказ МОН від 12.04.2019, № 472

11 Геометрія (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 кл., профільний рівень)

Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С.

Видавництво Гімназія

Наказ МОН від 12.04.2019, № 472

П І Д С У М О К

Стереометрія обов'язкова навчальна дисципліна в старшій профільній школі. Її вивчення унормоване державними нормативними документами і стандартом загальної середньої освіти та програмою з математики для старшої профільної школи.

МЕТОДИЧНІ ЗАДАЧІ
для самостійного розв'язування

1. Опрацювати державну навчальну програму з математики для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів :
   а) рівень стандарту; б) профільний рівень.
2. Здійснити порівняльний аналіз навчального матеріалу, який пропонується для вивчення за цими програмами. З'ясувати в чому проявляється їх єдність та відмінність.
3. Ознайомитися з альтернативними підручниками з Стереометрії (профільний рівень).
4. Скласти бібліографію дидактичних матеріалів зі Стереометрії, які рекомендуються використовувати у профільній школі

… Вся природа… знаходить вираз у символах геометричного мистецтва

Й. Кеплер

Л Е К Ц І Я 3.2

Т Е М А ***Вступ до стереометрії***

П Л А Н

1.	***Місце теми «Вступ до стереометрії» в програмі, основна мета вивчення, зміст теми, вимоги до підготовки учнів. Орієнтовне календарне планування навчального процесу***
2.	***Що вивчає стереометрія, основні поняття і аксіоми стереометрії. Що таке теорема і в чому полягає суть її доведення***
3.	***Задачі на застосування аксіом стереометрії і їх розв'язання***

К О Н С П Е К Т   Л Е К Ц І Ї

1. Місце теми «Вступ до стереометрії» в програмі, основна мета вивчення, зміст теми, вимоги до підготовки учнів. Орієнтовне календарне планування навчального процесу

У класах, де математика вивчається на профільному та поглибленому рівнях, тема «Вступ до стереометрії» – одна із перших тем курсу Стереометрії. Вона вивчається в 10 класі за програмами з математики [5, 6], на її вивчення відводиться 12 годин.

Основна мета вивчення теми передбачає:

- *розширити і систематизувати відомості про властивості основних геометричних фігур (точка, пряма, площина) на площині і в просторі;*
- *ознайомити учнів з логічною будовою геометрії;*
- *виробити в учнів вміння застосовувати аксіоми стереометрії та наслідки з них до розв'язування* задач.

Зміст теми, вимоги до підготовки учнів подано у таблиці 1.

Таблиця 1

Зміст теми	***Компетентності (учень / учениця)***
Тема 2. Вступ до стереометрії (12 год) Основні поняття стереометрії. Аксіоми стереометрії та наслідки з них. Просторові геометричні фігури. Початкові уявлення про многогранники. Найпростіші задачі на побудову перерізів многогранників. Поняття про аксіоматичний метод.	*Розрізняє* означувані і неозначувані поняття, аксіоми і теореми. *Називає* основні поняття стереометрії. *Наводить* приклади просторових геометричних фігур. *Формулює* аксіоми стереометрії та наслідки з них. *Пояснює* застосування аксіом стереометрії до розв'язування геометричних і практичних задач. *Розв'язує* задачі на побудову перерізів многогранників.

Орієнтоване календарне планування навчального процесу (таблиці 2).

Таблиця 2

№ п/п	Тема заняття, вид роботи	Кіл-ть годин
1	Основні поняття стереометрії	1
2	Аксіоми стереометрії та наслідки з них. Теореми і їх доведення	2
3	Просторові геометричні фігури. Початкові уявлення про многогранники *(куб, паралелепіпед, тетраедр, піраміда)*	1
4	Побудова перерізів куба площиною СР - 1	2
5	Побудова перерізів піраміди площиною СР - 2	2
6	Побудова перерізів паралелепіпеда площиною СР - 3	2
7	Графічна робота на побудову перерізів многогранників *(куб, паралелепіпед, тетраедр, піраміда)*	1
8	Прикладні задачі і їх розв'язання засобами стереометрії	1
	Разом :	12

2. Що вивчає стереометрія, основні поняття і аксіоми стереометрії. Що таке теорема і в чому полягає суть її доведення

Перше заняття з стереометрії пропонуємо провести у формі шкільної лекції. В ній розкрити предмет науки геометрії, її будову, основні фігури і правила співвідношень між ними.

ОРІЄНТОВНИЙ ЗМІСТ ЛЕКЦІЇ

Тема. Що вивчає геометрія, основні поняття і аксіоми стереометрії.

Навколишній реальний світ, що оточує людину, дуже різноманітний. Щоб комфортно жити в ньому, вона намагається пізнавати його, скористатись наданими природою можливостями і багатствами. Таке пізнання триває впродовж тисячоліть, стільки, скільки існує людина. Виявлені, за багато років знання про оточуючий світ, про його закономірності і властивості, про реальні об'єкти сформувались у вигляді окремих наук – філософії, фізики, хімії, математики, музики, біології, філології і багато інших.

Кожна з них має свій ***предмет вивчення***. Під *предметом вивчення науки*, зазвичай, розуміють ті властивості чи властивість реального світу, які вибрані людиною для вивчення, використання. Так, наприклад, предметом вивчення *філософії* є загальні закони розвитку природи і суспільства, *хімії* – будова речовин, їх взаємодії між собою, *фізики* – фізичні явища, їх природа виникнення, тривалість протікання, можливі наслідки. Інші науки мають свої предмети вивчення.

Що стосується *математики*, зокрема, ***геометрії***, то ***предметом її вивчення є просторові форми реальних об'єктів та числові співвідношення між їх елементами***. Наприклад, футбольний м'яч має іншу просторову форму ніж сірникова коробка. А дві різні сірникові коробки (чи два м'ячі) хоч і мають однакову форму, проте в них можуть бути різні розміри. Саме такі властивості реальних предметів і вивчає (досліджує) геометрія.

Яким чином це робиться? Щоб відповісти на це запитання звернемося до прикладів. Відомо, що *музичне мистецтво* (музика) – вивчає звуки і їх поєднання в милозвучну, сумну чи ніжну мелодію. Митці придумали для окремих звуків ноти і їх позначення – символи, якими позначаються на папері окремі звуки, правила їх поєднання і запису, позначення темпу звучання, висоти звуків, тощо. Утворилася теорія музики. Обізнаний з такою теорією композитор, створює в думках мелодію, записує її, перевіряє за допомогою музичних інструментів реальне звучання, удосконалює, виправляє і пропонує для широкого вжитку. Музикант, маючи ноти твору, може відтворити його мелодію на музичному інструменті, не будучи причетним до її створення. Отже, ноти, правила їх поєднання, музична теорія – все це віртуальні моделі, тобто витвори людської думки, що існують в її свідомості і які потрібні в реальному житті.

Схоже картина і в *філології*. *Філологія* – також вивчає звуки, їх поєднання в слова, речення, розповіді. Щоб слова, речення, розповіді повідомляти, зберігати, люди придумали алфавіт, який складається з букв – символів. Ними позначають окремі звуки на папері, граматичні правила правопису тощо. Алфавіт, правила правопису, граматична морфологія, синтаксис і т. п. – також віртуальні моделі, витвори людської думки що існують в її свідомості і якими кожна освічена людина послуговується в реальному житті для своїх потреб.

Аналогічний підхід прослідковується і в геометрії. Щоб виокремлювати просторову форму реальних предметів, зображати її, досліджувати, а потім використовувати на практиці, математики, ще задовго до нашої ери, утворили свій «алфавіт», який містить такі об'єкти як точка, пряма, площина.

Точка – це узагальнений образ реальних об'єктів, що існує в голові людини. Він утворюється від огляду дрібних предметів, місця дотику загостреного предмета з поверхнею, дотику до листка паперу, гостро-заточеного олівця до поверхні дошки, сторінки зошита тощо. В результаті, в уяві людини формується віртуальний об'єкт «точка» – модель реального об'єкта, що передає «його просторову форму». Ним людина послуговується щоб «описувати» просторову форму предметів.

Пряма лінія – також узагальнений образ реальних об'єктів, що утворився в голові людини. Він утворюється від огляду натягнутої струни музичного інструменту, натягнутої мотузки, краю стола, натягнутої нитки та інших реальних об'єктів. Таким чином пряма лінія – також віртуальна модель, що існує в голові людини для того, щоб «описувати» просторову форму реальних об'єктів.

Площина – також віртуальна модель, що існує в голові людини. Вона утворюється людською уявою від огляду поверхні стола, листа скла, поверхні озера в тиху погоду, листа картону тощо. Нею людина послуговується щоб «описувати» просторову форму об'єктів.

Реальні об'єкти існують в реальному світі, а їх віртуальні образи – *у віртуальному*, у тому, який створила людська уява. У такому віртуальному світі будь-яку множину точок називають фігурою. З точок складаються пряма лінія, площина, простір та інші фігури.

У геометрії точку, пряму лінію, площину (елементи геометричного алфавіту) – називають найпростішими геометричними фігурами або інакше – *неозначуваними фігурами* (поняттями). Подібно до музичних, граматичних правил для них також існують створені математичні основоположні правила, яких слід дотримуватися під час дослідження, вивчення, опису просторових об'єктів. Їх в науці геометрії називають ***аксіомами***.

Фігури бувають *плоскими* – ті, що розміщені на площині та *просторовими* – ті, що розміщені в просторі. Плоскі фігури і їх властивості вивчаються в планіметрії, а просторові в стереометрії. І планіметрія, і стереометрія – розділи науки Геометрія.

Загальновживані тепер терміни *аксіома, планіметрія, стереометрія* та інші мають давне походження. У тлумачному математичному словнику [33] знаходимо наступне їх пояснення.

Аксіома – *грецьке* (axioma) – буквально гідність, повага, авторитет – у переносному розумінні означає те, що внаслідок свого авторитету не підлягає сумніву, незаперечне. Уперше цей термін застосував старогрецький філософ Аристотель. Довгий час математики під аксіомами розуміли ті істини або положення, які внаслідок їх очевидності можна прийняти без доведення. У сучасній математиці терміну «аксіома» надають ширшого значення, а саме: *аксіома* – це одне з вихідних тверджень, які прийнято без доведення і покладено в основу якоїсь теорії.

Математичні аксіоми не є вільним витвором учених, а здобуті людством у процесі багатовікового досвіду встановлення істини, які відбивають реальну дійсність. Проте, у XIX ст. ряд вчених часто твердили, що аксіоми вводяться в науку незалежно від досвіду, і тим самим намагалися відірвати математику від практики. Цих поглядів деякі математики додержуються й досі.

Розрізняють *аксіоми загальні*, які стосуються всіх скінченних величин (ціле більше від своєї частини, дві величини, кожна з яких дорівнює третій, рівні між собою і т. ін.), а також *аксіоми окремих математичних дисциплін*. Прикладом останніх є *система аксіом* у «Началах» Евкліда або система аксіом геометрії, яку запропонував Гільберт (1899). Її створення було результатом широкої наукової діяльності багатьох математиків XIX ст., пов’язаної з відкриттям М. І. Лобачевським *неевклідової геометрії.* З того часу аксіоматичний метод дуже поширився в математиці.


Евклід


Давід Гільберт


Микола Лобачевський

Планіметрія (*від латинського* (planus) – плоский і *грецького* (metreo) – міряю) – геометрія на площині, розділ шкільного курсу геометрії, в якому вивчаються властивості плоских фігур. Його змістом є в основному матеріал I-VI книг «Начал» Евкліда, значно спрощений і скорочений.

Стереометрія (*від грецьких* (stereos) – просторовий і (metreo) – міряю, вимірюю – буквально вимірювання просторового (об’ємного). Стереометрією називають частину елементарної геометрії, що вивчає просторові фігури (положення, форму, взаємне розташування їх елементів тощо).

Наведені пояснення вказують на те, що *геометрія* – наука древня, що її слід розглядати як елемент людської культури, яка потрібна кожній освіченій людині.

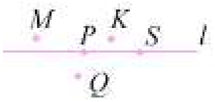
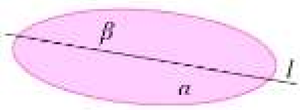
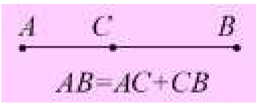
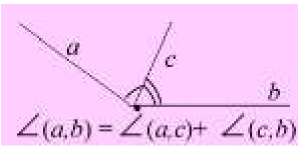
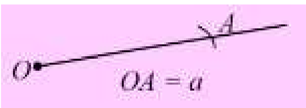
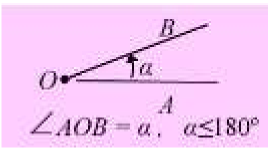
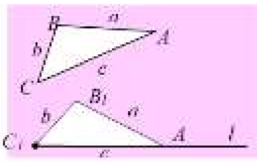
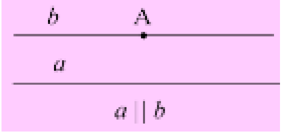
Планіметрія вивчається в 7-9 класах базової середньої школи.

У ній розглядається 10 аксіом.

Їх перелік і зміст подано в таблиці 3.

Таблиця 3

АКСІОМИ ПЛАНІМЕТРІЇ

№	*Назва аксіоми*	*Зміст аксіоми*	*Наслідки з аксіом*
I	**Аксіоми належності** I$_1$.  I$_2$. 	I$_1$..Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй. I$_2$..Через будь-які дві точки можна провести пряму і до того ж тільки одну	Дві різні прямі або не перетинаються, або перетинаються тільки в одній точці
II	**Аксіоми розміщення** II$_1$.  II$_2$. 	II$_1$. З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими. II$_2$. Пряма розбиває площину на дві півплощини	Якщо кінці якого-небудь відрізка належать одній півплощині, то відрізок не перетинає пряму. Якщо кінці відрізка належать різним півплощинам, то відрізок перетинає пряму
III	**Аксіоми вимірювання** III$_1$.  III$_2$ 	III$_1$. Кожний відрізок має певну довжину, більшу від нуля. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою. III$_2$. Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля. Розгорнутий кут дорівнює 180°. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами	Якщо три точки *A, B* і *C* лежать на одній прямій, то точка *B* лежатиме між точками *A* і *C*, якщо *AC = AB+CB.* Якщо від даної півпрямої відкласти в одній півплощині два кути, то сторона меншого кута, відмінна від даної півпрямої, проходить між сторонами більшого кута
IV	**Аксіоми відкладання** IV$_1$.  IV$_2$.  IV$_3$. 	IV$_1$. На будь-якій півпрямій від її початкової точки можна відкласти відрізок даної довжини і тільки один. IV$_2$. Від будь-якої півпрямої у даній півплощині можна відкласти кут з даною градусною мірою, меншою 180°, і тільки один. IV$_3$. Який би не був трикутник, існує трикутник, що дорівнює йому у заданому розміщенні відносно даної пів прямої	Якщо пряма, яка не проходить через жодну з вершин трикутника, перетинає одну з його сторін, то вона перетинає тільки одну з двох інших сторін
V	**Аксіома паралельності** V. 	V. Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести не більш як одну пряму, паралельну даній	Якщо пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинатиме й другу

Щоб встановити правильність твердження про властивості тієї чи іншої геометричної фігури доводиться висловлювати деякі міркування. Серед цих міркувань є такі, які потребують доведення (*теореми, задачі*). Твердження, істинність якого встановлюється шляхом доведення і яке використовується часто для доведення інших тверджень, називається ***теоремою.*** Теорема складається з двох частин: *умови і висновку*. Для доведення теорем у шкільному курсі геометрії використовують в основному такі методи: *аналітичний, синтетичний, від супротивного*, рідше *координатний, векторний*.

Стереометрія вивчається в старших класах середньої школи. У класах, де навчання математики відбувається за програмою профільного чи поглибленого рівня вона вивчається як окремий шкільний предмет. Оскільки у стереометрії розглядається більше однієї площини, адже віртуальний простір складається з безлічі площин, прямих і точок, то всі аксіоми планіметрії мають місце і в стереометрії, однак при цьому деякі з них набувають іншого змісту.

Так аксіома I_1 у планіметрії стверджує, що існують точки поза даною прямою ***на площині,*** в якій лежить пряма. Саме в такому розумінні ця аксіома застосовувалась у процесі побудови геометрії на площині. Тепер ця аксіома вказує на існування точок, які не лежать на даній прямій ***у просторі.*** З неї безпосередньо не випливає, що існують точки поза даною прямою на площині, в якій лежить пряма. Це потребує вже спеціального доведення. Формулювання деяких аксіом планіметрії, як аксіом стереометрії, потребують уточнення. Це стосується, наприклад, аксіом II_2, IV_2, IV_3, V_1. Наведемо ці уточнені формулювання.

II_2. Пряма, ***що належить площині,*** розбиває цю площину на дві півплощини.

IV_2. Від будь-якої півпрямої ***на площині, що містить її*** у дану півплощину можна відкласти кут з даною градусною мірою, меншою 180°, і тільки один.

IV_3. Який би не був трикутник, існує трикутник, що дорівнює йому ***у даній площині*** у заданому розміщенні відносно даної півпрямої ***у цій площині***.

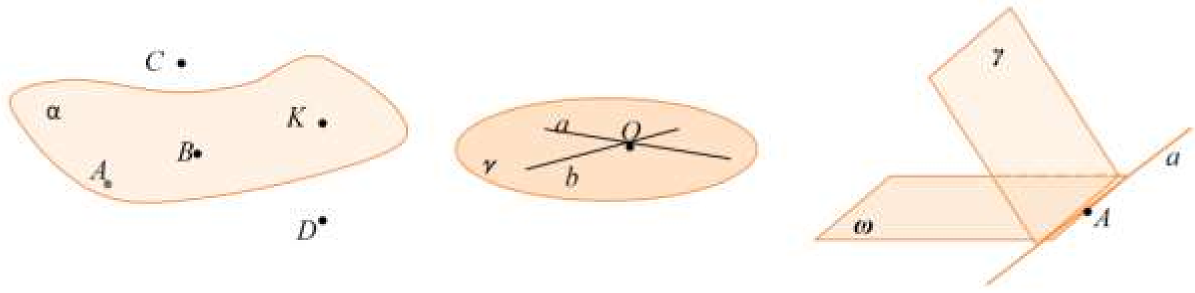
V_1. ***На площині*** через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести не більш як одну пряму, паралельну даній.

Зрозуміло, що оскільки збільшилася кількість основних фігур, то з’явилися нові аксіоми про їхні *властивості:*

1. *Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які не належать їй* (рис. 2 *а*)).

2. *Якщо дві різні прямі мають спільну точку, то через них можна провести площину і до того ж тільки одну* (рис. 2 *б*)).

3. *Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку* (рис. 2 *в*)).



***а*)** ***б*)** ***в*)**

Рис. 2

Аксіома 1 вказує на те, що будь-яка площина ввесь простір не вичерпує. Є точки простору, які їй не належать.

Аксіома 2 стверджує, що дві прямі, які перетинаються у просторі завжди визначають єдину площину.

Із аксіоми 3 слідує, що якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони мають безліч спільних точок, які утворюють пряму, що містить цю точку.

Ці три аксіоми доповнюють п'ять груп аксіом планіметрії і разом з ними утворюють ***аксіоматику стереометрії***.

Аксіому 1 стереометрії віднесемо до групи *аксіом належності* (позначимо I_3), а аксіоми 2 і 3 до групи *аксіом взаємного розміщення* (відповідно позначимо II_3, II_4).

Підсумовуючи сказане вище, можна стверджувати, що логічна побудова геометрії (і планіметрії і стереометрії) включає (рис. 3).

Г Е О М Е Т Р І Я

основні поняття | **аксіоми** | **означувані поняття** | **теореми, задачі**

Рис. 3. Будова геометрії

КІНЕЦЬ ЛЕКЦІЇ

Після лекції на наступних заняттях слід вивчити з учнями наслідки з аксіом. учні мають зрозуміти, що основоположне місце в будові геометрії займають аксіоми. Вони виражають найбільш важливі властивості основних геометричних фігур. Властивості інших геометричних фігур встановлюються міркуваннями і опираються на аксіоми або на доведені твердження, які опиралися на аксіоми. Такі міркування називають ***доведеннями***. Твердження, істинність якого доводять та після чого часто використовують для доведення інших тверджень, називають ***теоремою***. Найпершими з них у стереометрії є твердження для основних фігур точки, прямої, площини, які називають ***наслідками з аксіом стереометрії.*** Розглянемо одну з них і прослідкуємо, як пояснити учням що означає довести теорему.

Теорема 1. Через пряму і точку, що не належить їй, можна провести площину і до того ж тільки одну.

Доведення

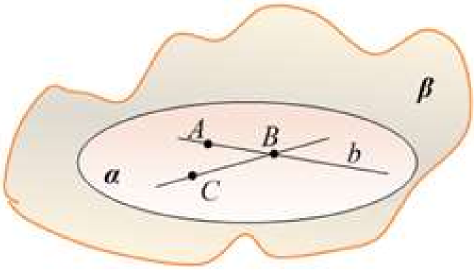


Рис. 4

Нехай *BC* – дана пряма і *A* – точка, що не належить їй (рис. 4).
Точка *B* належить прямій *BC*.
Через точки *A* і *B* проведемо пряму *b* (за аксіомою I_2. це можна робити).
Прямі *BC* та *b* різні і перетинаються в точці *B*.

За аксіомою II_3, через них можна провести площину α. Доведемо, що вона єдина методом від супротивного. Припустимо, що існує інша площина β, яка містить пряму *BC* і точку *A*. Тоді згідно з аксіомою II_4 площини α і β перетинаються по спільній прямій, якій належать точки *A, B, C*, що суперечить умові. Припущення неправильне. Площина α – єдина.

Теорему доведено.

Наведений приклад теореми і її доведення гарно ілюструє викладені міркування, а також те, що означає довести твердження і чому аксіоми є тими «правилами гри», яких слід притримуватися під час встановлення властивостей геометричних фігур.

За такою схемою учні мають навчитись доводити інші теореми, що вивчаються в темі «Вступ до стереометрії».

3. Задачі на застосування аксіом стереометрії і їх розв'язання

Найбільш поширеними геометричними задачами в темі «Вступ до стереометрії» є на доведення і на побудову перерізів куба, піраміди, паралелепіпеда. Розглянемо кілька з них і приклади їх розв'язання. Звертаємо увагу на культуру запису доведень і побудов перерізів.

Задача 1. *Чи можна через точку перетину двох даних прямих провести третю пряму, яка б не лежала з ними в одній площині*?

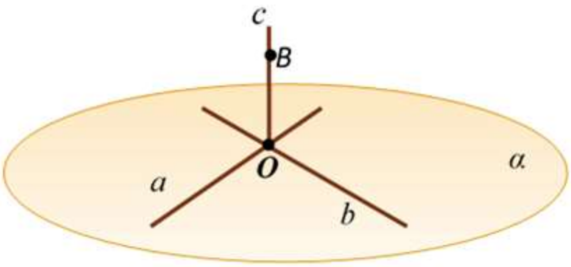


Рис. 5

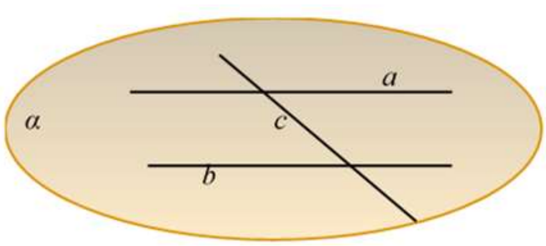


Рис. 6

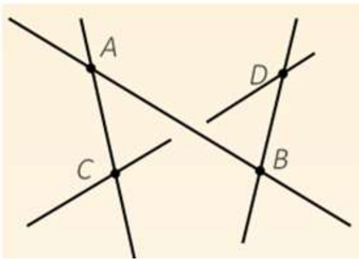


Рис. 7

Розв'язання

Через прямі a і b (рис. 5), які мають спільну точку O, можна провести площину $\propto$.

Візьмемо точку B, яка не належить $\propto$. Через точки O і B проведемо пряму c. Пряма c не лежить на площині $\propto$, бо якби пряма c належала площині $\propto$, то і точка B належала б $\propto$.

Отже, через точку перетину прямих a і b можна провести третю пряму, яка не лежить з ними в одній площині.

Відповідь. Можна.

Методичний коментар

Чому саме так?

Очевидно, що точки площини утворюватимуть прямі, які будуть належати цій самій площині. Якщо ж взяти точку перетину двох прямих на площині і точку поза площиною, то через будь-які дві точки простору можна провести пряму. Ця пряма матиме лише одну спільну точку з площиною, а значить, – її перетинати.

(*цей коментар можна робити для учнів усно і не включати до розв'язання*)

Задача 2. *Доведіть, що всі прямі, які перетинають дві дані паралельні прямі, лежать в одній площині.*

Доведення

Оскільки прямі a і b паралельні, то за означенням ці прямі лежать в одній площині $\propto$ (рис. 6). Довільна пряма c, яка перетинає a і b, має з площиною $\propto$ дві спільні точки – точки перетину. Згідно з теоремою 2 ця пряма лежить у площині $\propto$. Отже, всі прямі, які перетинають дві паралельні прямі, лежать в одній площині, *що вимагалося довести.*

Задача 3. Доведіть, що коли прямі *AB* і *CD* не лежать в одній площині, то прямі *AC* і *BD* теж не лежать в одній площині.

Доведення	***Методичний коментар***
Припустимо, що прямі *AC* і *BD* лежать в одній площині (рис. 7). Тоді точки *A, B, C, D* належать цій площині, а тому прямі *AB* і *CD* належать цій площині, що суперечить умові. Припущення неправильне, тому прямі *AC* і *BD* не належать одній площині, що й вимагалося.	***Чому саме так?*** Доводячи належність чи не належність, у більшості випадків, використовують метод доведення від супротивного. У цьому випадку він зразу виводить на суперечність, а значить – доводить вимогу задачі.
Відповідь. Доведено.	***(додавати коментар до розв'язання не потрібно)***

Під час розв'язання задач на побудову перерізів многогранника площиною варто акцентувати увагу на тому, що:

- через дві точки, що належать площині, проходить тільки одна пряма і ця пряма теж належить цій площині;
- щоб побудувати лінію перетину двох площин, необхідно відшукати дві точки, які належать обом площинам і через них провести лінію перетину;
- при побудові перерізів многогранників січною площиною, слід відшукати відрізки, по яких січна площина перетинається з гранями многогранника.

Розглянемо приклади побудови перерізу многогранника січною площиною.

Задача 1. *Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через середини ребер зі спільною вершиною.*

Побудова

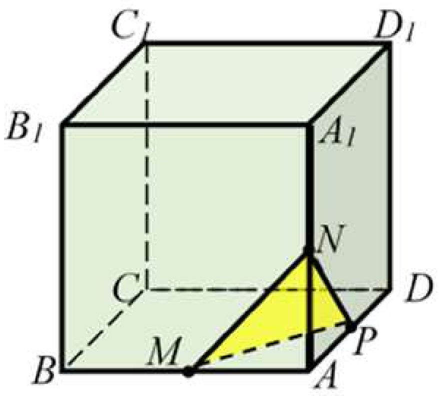


Рис. 8

Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – заданий куб (рис. 8). Виберемо одну з вершин, наприклад, *A,* яка є спільною для трьох ребер *AB,* AA_1 і *AD.* Позначимо на цих ребрах відповідні точки *M, N* і *P,* які є їх серединами. Три точки *M, N* і *P* не лежать на одній прямій, а тому визначають січну площину (*MNP*). Точки *M* і *P* – спільні точки площини перерізу і грані (*ABCD*), тому $PM = (MNP) \cap (ABCD)$, PM – сторона перерізу.

Аналогічно, $PN = (MNP) \cap (ADD_1A_1)$ і $MN = (MNP) \cap (ABB_1A_1)$, тому PN і MN – дві інші сторони перерізу. Отже, ΔMNP – шуканий переріз.

Задача 2. Побудуйте переріз піраміди *MABC* площиною що проходить через ребро *MA* та середину ребра *BC*.

Побудова

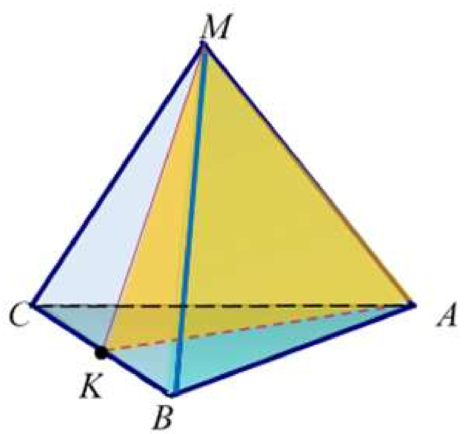


Рис. 9

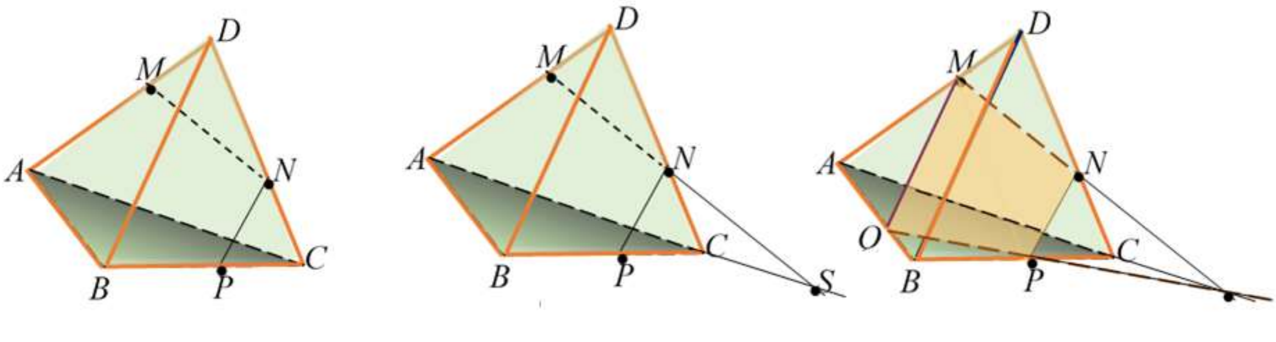
Площина перерізу задається прямою *MA* (рис.9) і серединою ребра *BC* (позначимо її точкою *K*). (*MAK*) – площина перерізу.

Знайдемо прямі перетину цієї площини з площинами (*ABC)* і (*MBC).*

Ними будуть відповідні прямі *AK* і *KM,* а трикутник ΔMAK, утворений перетином прямих *MA*, *AK* і *KM,* – побудований переріз.

Задача 3. Побудуйте переріз піраміди *DABC* площиною, що проходить через три точки, які лежать на різних ребрах *AD, DC, BC*.

Побудова



а) **б)** **в)**

Рис. 10

Розглянемо випадок, коли жодна з прямих, що проходить через ці точки не будуть паралельними до сторін граней.

Нехай $M \in AD$, $N \in DC$, $P \in BC$, $\propto$ – січна площина, що проходить через задані точки *M, N* і *P*.

Побудуємо переріз, виконуючи послідовно кроки:

1. $M \in (ADC)$ і $N \in (ADC)$, тому $MN \subset (ADC)$; $MN = \propto \cap (ADC)$.
2. $N \in (BDC)$ і $P \in (BDC)$, тому $NP \subset (BDC)$, $NP = \propto \cap (BDC)$. Ми знайшли дві сторони фігури перерізу: відрізки MN і NP (рис. 10 *а*)). Точка *P* – спільна точка двох площин (*ABC*) і (*MNP*). Такі площини (за аксіомою) перетинаються по прямій, що проходять через точку *P.* Для побудови такої прямої потрібна друга точка.
3. Площини (*ADC*) і (*ABC*) перетинаються по прямій *AC. MN* за умовою не паралельна AC і $MN \subset (ADC)$, тому $MN \cap AC = S$. Пряма *SP* – лінія перетину площин *MNP* і *ABC* (рис. 10 *б*)).
4. Перетин цієї прямої з ребром *AB* дає точку *Q*, яка є вершиною перерізу.

Отже, чотирикутник *MNPQ* – шуканий переріз (рис. 10 *в*)).

Задача 4. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через середини M і N ребер AD і BB_1 і точку P перетину діагоналей грані $A_1B_1C_1D_1$.

Побудова

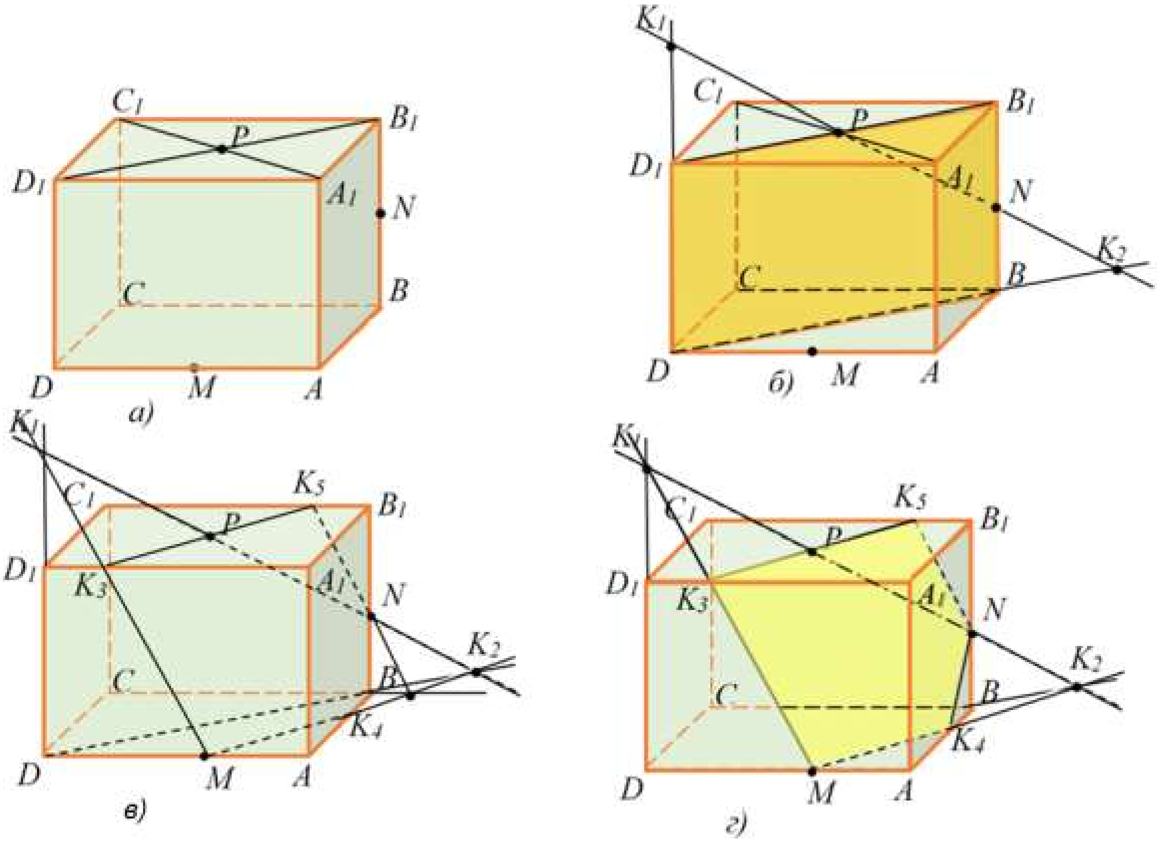


Рис. 11

Позначимо січну площину $\alpha = (MNP)$. Виконаємо послідовно кроки, шукаючи фігуру, утворену площиною перерізу.

1. Знайдемо точку перетину прямої NP з площиною AA_1D_1D. Ця пряма лежить у площині BB_1D_1D, яка перетинається з площиною AA_1D_1D по прямій DD_1. Точка K_1 – точка перетину прямих NP і DD_1. Точка K_1 – шукана (рис. 11 *б*)).

2. Аналогічно знаходимо точку K_2, як точку перетину прямої NP з площиною $ABCD$, точка K_2 – шукана.

3. Площина α перетинає площину AA_1D_1D по прямій K_1M, а площину $ABCD$ – по прямій K_2M. Ці прямі K_1M і K_2M відповідно перетинають ребра прямокутного паралелепіпеда A_1D_1 і AB в точках K_3 і K_4 (рис. 11 *в*)).

4. Пряма K_3P перетинає ребро прямокутного паралелепіпеда B_1C_1 в деякій точці K_5 – остання вершина перерізу (рис. 11 *в*)).

Отже, п'ятикутник $MK_3K_5NK_4$ – шуканий переріз (рис. 11 *г*)).

Задача 5. Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через точки *M, N, P,* які належать відповідно ребрам $AD,\ DD_1,\ CC_1$.

Побудова

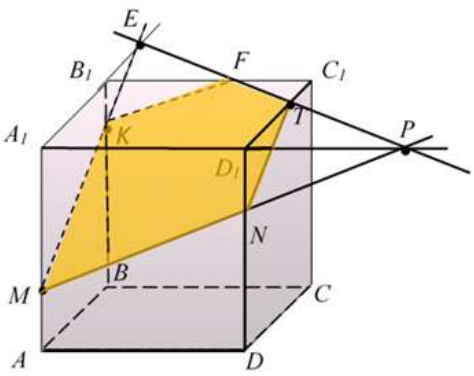


Рис. 12

Січна площина (*MNP*) (рис. 12).

1) Точки *N* і *P* лежать в (*PDC*). Проведемо пряму $PN,\ PN \cap DC = E$.

2) Точки *E, M* лежать в (*ABC*). Проведемо пряму *EM*, $EM \cap AB = K,\ EM \cap BC = F$.

3) Точки *F, P* лежать в (BB_1P), $FP \cap BB_1 = Q$.

4) *PNMKQ* – шуканий переріз.

Задача 6. Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через точки *K, M, N,* які належать відповідно ребрам $BB_1,\ AA_1,\ D_1C_1$.

Побудова

Січна площина (*KMN*) (рис. 13).

1) Точки *M, K* лежать в (B_1C_1C), $MK \cap BB_1 = Q, MK \cap BC = F$.

2) Точки *F* і *N* лежать в (*ABC*), $FN \cap DC = T, FN \cap AB = P$.

3) Точки *Q* і *P* лежать в (ABB_1), $QP \cap AA_1 = S,\ QS \cap A_1B_1 = R$.

4) *MKTNSR* – шуканий переріз.

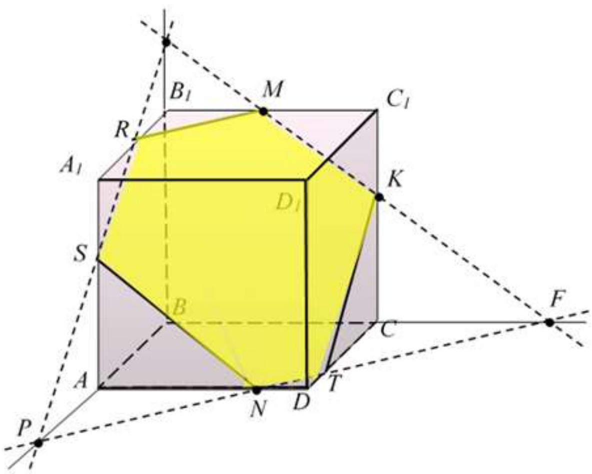


Рис. 13

П І Д С У М О К

Розпочинаючи вивчення курсу стереометрії бажано показати учням що геометрія, зокрема стереометрія, розглядає віртуальні моделі і їх властивості, якими описуються просторові форми та кількості співвідношення реальних об’єктів.

Для опису і побудови таких моделей в геометрії вибрані найпростіші образи реального світу: точка, пряма, площина (алфавіт) і їх фундаментальні властивості (правила гри), які називаються аксіомами. Інші моделі та їх властивості описуються за допомогою вибраних найпростіших, з дотриманням аксіом. Властивості нових моделей встановлюються шляхом логічних міркувань. Їх істинність виражається у формі тверджень, які називаються теоремами.

У шкільному курсі стереометрії вивчаються такі найпростіші вживані моделі: точка, пряма, площина, многогранники (паралелепіпед, піраміда, зрізана піраміда, циліндр, конус, зрізаний конус, куля) і їх важливі для практики властивості.

МЕТОДИЧНІ ЗАДАЧІ

для самостійного розв’язування

1.	Здійсніть порівняльний аналіз шкільних альтернативних підручників стереометрії з теми «Вступ до стереометрії». Зверніть увагу на авторські підходи до викладу змісту навчального матеріалу, вибору аксіом та наслідків з них, добірку задач до теми та їх розв’язання.
2.	Підготуйте презентації до шкільної лекції про предмет геометрії, її будову, історичні довідки про видатних вчених, які внесли істотний внесок в формування науки геометрії (Піфагор, Евклід, Фалес, Архімед, Декарт, Лобачевський, Ріман та ін.)
3.	Створіть добірку прикладних задач до теми «Вступ до стереометрії» і опишіть методику їх розв’язання

На цілому світі все здійснюється по-математичному

Г. Лейбніц

Л Е К Ц І Я 3.3

Т Е М А ***Взаємне розміщення прямих і площин у просторі***

П Л А Н

1.	***Місце теми в програмі з математики. Основна мета вивчення. Вимоги до підготовки учнів. Орієнтовне планування навчального процесу***
2.	***Методика формування основних понять, доведення ознак і теорем***
3.	***Задачі на взаємне розміщення прямих і площин в просторі і методика формування вмінь та навичок їх розв'язування***

К О Н С П Е К Т Л Е К Ц І Ї

1. Місце теми в програмі з математики. Основна мета вивчення. Вимоги до підготовки учнів. Орієнтовне планування навчального процесу

За Державним стандартом базової і повної загальної освіти [1] однією із фундаментальних змістових ліній шкільного курсу стереометрії визначено «Геометричні фігури».

Пропонується вивчати дві групи геометричних фігур:

а) пряма, площина, відрізок, кут і т. п.;

б) геометричні тіла (призма, піраміда, циліндр, конус, кулі і т. п.).

Зупинимося на методиці вивчення фігур першої групи та їх властивостей. Зауважимо, що найпростіші геометричні фігури цієї групи – пряма і площина та їх основоположні властивості, як відомо, вивчаються вже з перших уроків стереометрії в темі «Вступ до стереометрії». Далі вивчається їх взаємне розміщення в просторі. Таке розміщення пов'язують з двома відношеннями: *паралельність* та *перпендикулярність*. Тому в діючій програмі з математики виділено дві навчальні теми:

1) Тема 3. Паралельність прямих і площин у просторі (40 год);

2) Тема 4. Перпендикулярність прямих і площин у просторі (40 год);

Слід зазначити, що обидві теми розглядають також в старшій школі, де математика вивчається за програмою рівня стандарту.

Проте, кількість навчальних годин виділяється менша.

Зміст навчального матеріалу обох тем, навчальні досягнення учнів (за програмою [6]) подані у таблиці 1.

Таблиця 1

Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення учнів
Тема 3. Паралельність прямих і площин у просторі (40 год) Розміщення двох прямих у просторі: прямі, що перетинаються, паралельні, мимобіжні прямі. *Ознака мимобіжних прямих.* Розміщення прямої та площини у просторі: пряма і площина, що перетинаються, паралельні пряма і площина. Ознаки паралельності прямої та площини. Розміщення двох площин у просторі: площини, що перетинаються, паралельні площини. Ознака паралельності площин. Існування площини, паралельної даній площині. Властивості паралельних площин. Паралельне проєкціювання, його властивості. *Поняття про центральне проектування.* Зображення плоских і просторових фігур у стереометрії. *Задачі на побудову перерізів многогранників. Методи слідів і проекцій побудови перерізів.*	Формулює означення паралельних і мимобіжних прямих, паралельних прямої і площини, паралельних площин; ознаки паралельності прямих і площин; властивості паралельних прямих і площин. Класифікує взаємне розміщення прямих, прямих і площин, площин у просторі. Знаходить і зображує паралельні прямі та площини, площини у просторі. Знаходить і зображує паралельні прямі та площини на малюнках і моделях. Будує зображення фігур. Розв'язує задачі на застосування властивостей та ознак паралельності прямих і площин Застосовує метод слідів та проекцій для побудови перерізів та розв'язування задач.
Тема 4. Перпендикулярність прямих і площин у просторі (40 год) Перпендикулярність прямих у просторі. Перпендикулярність прямої та площини. Ознака перпендикулярності прямої та площини. Перпендикуляр і похила. Теорема про три перпендикуляри. Перпендикулярність площин. Ознака перпендикулярності площин. Зв'язок між паралельністю та перпендикулярністю прямих і площин. Кути у просторі: між прямими, між прямою і площиною, між площинами. Відстані у просторі: від точки до прямої, від точки до площини, від прямої до паралельної їй площини, *[від точки до фігури,]* між паралельними площинами, між мимобіжними прямими, *[між двома фігурами].* Ортогональне проєкціювання. *Площа ортогональної проєкції многокутника.* Практичне застосування властивостей паралельності та перпендикулярності прямих і площин.	Формулює означення перпендикулярних прямих у просторі, прямої, перпендикулярної до площини, перпендикулярних площин; властивості та ознаки перпендикулярних прямих і площин. Обґрунтовує взаємозв'язок паралельності й перпендикулярності прямих і площин у просторі Використовує вивчені властивості та ознаки для розв'язування задач. Обчислює відстані та кути у просторі.

Обсяг навчального матеріалу, як бачимо надто широкий. Для успішного вивчення його учнями доцільно, виходячи з дидактичних міркувань, обидві теми розділити на кілька навчальних підтем. Пропонуємо вивчення продовжити в такій послідовності і за такими підтемами. Розподіл навчальних годин – орієнтовний.

Тема 3. Паралельність прямих і площин у просторі.

Підтема 3.1. Паралельність прямих у просторі, паралельність прямої і площини (12 год)

Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення учнів
Розміщення двох прямих у просторі: прямі, що перетинаються, паралельні, мимобіжні прямі. Ознака мимобіжних прямих. Розміщення прямої та площини у просторі: пряма і площина, що перетинаються, паралельні пряма і площина. Ознака паралельності прямої та площини.	***Формулює*** означення паралельних і мимобіжних прямих, паралельних прямої і площини. ***Знає*** ознаки мимобіжних прямих, паралельності прямих, прямої і площини. ***Розпізнає*** мимобіжні, паралельні прямі, пряму і площину на рисунках, моделях. ***Зображає*** паралельні прямі, паралельні пряму і площину на рисунках. ***Розв'язує*** задачі на застосування властивостей та ознак мимобіжності прямих, паралельності прямих, паралельності прямої і площини.

Основна мета вивчення. Сформувати в учнів систематизовані знання про взаємне розміщення прямих, прямої в площини в просторі, навчити застосовувати отримані знання до розв'язування задач.

Підтема 3.2. Паралельність площин у просторі (12 год)

Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення учнів
Розміщення двох площин у просторі: площини, що перетинаються, паралельні, площини. Ознака паралельності площин. Існування площини, паралельної даній площині. Властивості паралельних площин.	***Формулює*** означення паралельних площин. ***Знає*** ознаку паралельних площин, основні властивості паралельних площин. ***Розпізнає*** паралельні площини на рисунках і моделях. ***Зображає*** паралельні площини на рисунках. ***Розв'язує*** задачі на застосування ознаки і властивостей паралельних площин.

Основна мета вивчення. Сформувати в учнів систематизовані знання про паралельність площин у просторі, навчити застосовувати отримані знання до розв'язування задач.

Підтема 3.3. Паралельне проєкціювання і його властивості (16 год)

Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення учнів
Поняття про паралельне проєкціювання як метод побудови ілюстративних зображень просторових фігур на площині. Принципи побудови зображень, вимоги до рисунка. Зображення плоских і просторових фігур за допомогою паралельного проєкціювання. Елементарні побудови. Задачі на побудову перерізів многогранників. Методи побудови перерізів многогранників.	***Має уявлення*** про паралельне проєкціювання. ***Знає*** принципи побудови ілюстративних рисунків, вимоги до рисунків. ***Вміє*** будувати на площині зображення трикутника, прямокутника, ромба, трапеції, правильних п'ятикутника і шестикутника, куба, паралелепіпеда і піраміди. Має уявлення про метод слідів на проекцій для побудови перерізів паралелепіпеда і піраміди. ***Розв'язує*** задачі на побудову перерізів куба, паралелепіпеда, піраміди вказаними методами.

Основна мета вивчення. Ознайомити учнів з паралельним проєкціюванням як методом побудови ілюстративних рисунків в стереометрії. Навчити розв’язувати задачі на побудову зображень фігур та перерізів многогранників.

Тема 4. Перпендикулярність прямих і площин у просторі

Підтема 4.1. Перпендикулярність прямих, прямої і площини у просторі (12 год)

Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення учнів
Перпендикулярність прямих у просторі. Перпендикулярність прямої та площини. Ознака перпендикулярності прямої та площини. Перпендикуляр і похила. Теорема про три перпендикуляри.	***Формулює*** означення перпендикулярних прямих у просторі, прямої, перпендикулярної до площини, ознаку перпендикулярності прямої до площини. ***Розпізнає*** перпендикулярні прямі, пряму, перпендикулярну до площини, похилі і перпендикуляр до площини на рисунках і моделях. ***Знає*** теорему про три перпендикуляри. ***Використовує*** вивчену ознаку, теорему і властивості перпендикулярних прямих до розв’язування практичних і прикладних задач.

Основна мета вивчення. Сформувати в учнів систематизовані знання про перпендикулярні прямі в просторі, пряму, перпендикуляр до площини. Навчити застосовувати отримані знання до розв’язування практичних і прикладних задач.

Підтема 4.2. Перпендикулярність площин у просторі (14 год)

Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення учнів
Перпендикулярність площини. Ознака перпендикулярності площин. Зв'язок між паралельністю та перпендикулярністю прямих і площин. Кути у просторі між прямими, між прямою і площиною, між площинами. Відстані у просторі: від точки до прямої, від точки до площини, від прямої до паралельної їй площини (від точки до фігури), між паралельними площинами, між мимобіжними прямими (між двома фігурами).	***Формулює*** означення перпендикулярних площин, ознаку перпендикулярності двох площин. ***Обґрунтовує*** взаємозв’язок паралельності й перпендикулярності прямих і площин у просторі; ***Розпізнає*** перпендикулярні площини на рисунках і моделях. ***Пояснює*** що є відстанню від точки до фігури, між фігурами. ***Знає*** основні властивості перпендикулярних площин. ***Використовує*** вивчені властивості і ознаку під час розв’язування практичних і прикладних задач. ***Обчислює*** відстані і кути у просторі.

Основна мета вивчення. Сформувати в учнів систематизовані знання про перпендикулярні площини. Навчити застосовувати отримані знання до розв’язування практичних і прикладних задач.

Підтема 4.3. Ортогональне проєкціювання і його властивості (14 год)

Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення учнів
Поняття про ортогональне проєкціювання як метод побудови ілюстративних зображень просторових фігур на площині. Площа ортогональної проекції многокутника. Побудова зображень вписаних в коло і описаних навколо кола трикутника та квадрата, циліндра конуса, зрізаного конуса, кулі. Задачі на застосування ортогонального проєкціювання.	***Має уявлення*** про ортогональне проєкціювання як метод побудови зображень тіл обертання. ***Вміє*** будувати на площині зображення еліпса і його спряжені діаметри, вписані в коло і описані навколо кола правильні трикутники та квадрати, зображення циліндра конуса, зрізаного конуса і кулі. ***Розв'язує*** задачі в яких ілюстративні рисунки виконуються за допомогою ортогонального проєкціювання.

Основна мета вивчення. Ознайомити учнів з ортогональним проєкціюванням як методом побудови ілюстративних рисунків круглих тіл. Навчити застосовувати названий метод під час розв'язування практичних і прикладних задач.

2. Методика формування основних понять, доведення ознак і теорем

Насамперед зазначимо, що методичні рекомендації з вивченням навчального матеріалу, зразки розв'язання задач до підтеми 3.3. та 4.3. запропоновані нами в повному обсязі в лекціях «*Побудова зображень просторових фігур на площині*». Поняттям відстані від точки до фігури, відстані між фігурами присвячена лекція «*Поняття відстані між фігурами в задачах з геометрії*». Тому на них в даній лекції зупинятися не будемо.

Зосередимося на підтемах 3.1., 3.2., 4.1., 4.2. Навчальний матеріал названих підтем містить понад півтора десятки нових понять.

Зокрема:

- мимобіжні прямі, паралельні прямі, перпендикулярні прямі;
- паралельна пряма і площина;
- перпендикулярні пряма і площина;
- паралельні площини, перпендикулярні площини;
- двогранний кут, лінійний кут двогранного кута;
- кут між прямими, кут між прямою і площиною, кут між площинами;
- перпендикуляр і похила до площини і т. п.

Методика їх формування на уроках стереометрії давно відпрацьована і ґрунтовно описана в багатьох підручниках (з методики навчання математики). Тому зупинимося лише на окремих порадах. Почнемо з понять.

Формування нових понять рекомендуємо проводити абстрактно-дедуктивним методом, формулюючи відповідні означення. Ілюстрацію істотних властивостей нових понять пропонуємо проводити, спираючись на засоби унаочнення. Ними можуть бути моделі геометричних фігур, предмети навколишньої дійсності, мультимедійні презентації, флеш-ролики тощо.

Важливо, щоб учні «бачили» істотні властивості нових понять на реальних моделях і рисунках. Так формуватимуться їх уявлення, вміння бачити реальний світ крізь «математичні окуляри». Юнацький вік школярів сприятливий для таких дій.

Наприклад, плінтус на підлозі, що прилягає до стіни класної кімнати, і карниз, який висить над вікном суміжної стіни – моделі мимобіжних прямих, поверхня стола і поверхня підлоги – модель паралельних площин, стіна і підлога в кімнаті – модель перпендикулярних площин.

Опора на засоби унаочнення корисною буде також і під час доведення ознак та теорем. Адже рівень абстрактних міркувань в цих випадках дуже високий і це може створювати додаткові труднощі для засвоєння доведень. Часто в доведеннях вимагається показати існування об’єкта та його єдиність. Для цього використовується метод доведення від супротивного, що також потребує чіткості і ясності в застосуванні.

Приведемо доведення деяких ознак і теорем, які для учнів, як показує багаторічна практика є проблемними у засвоєнні. Їх доведення рекомендуємо вчителю проводити або самому, або разом з учнями, скеруючи їх доказові міркування.

Приведені зразки доведень окремих ознак і теорем містять методичний коментар. Його роль важлива, оскільки в ньому викладається ідея доведення, яка потім в розгорнутому письмовому вигляді розкрита в самому доведенні. Такий коментар рекомендуємо повідомляти учням усно, напередодні пошуку, а потім і запису доведення. Його записувати окремо не слід.

У різних альтернативних підручниках кількість теорем різна. В одних окремі теореми подані як задачі, в інших - навпаки. Це вчителю слід мати на увазі і вчити такі задачі (теореми) використовувати під час обґрунтування розв’язання задач.

Одна з таких задач (теорем) наприклад, така:

Задача (теорема) 1

Через будь-яку точку простору, яка не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній, і до того ж тільки одну.

Доведення

Нехай a довільна точка простору, *A* – точка, що не належить їй (рис. 1).

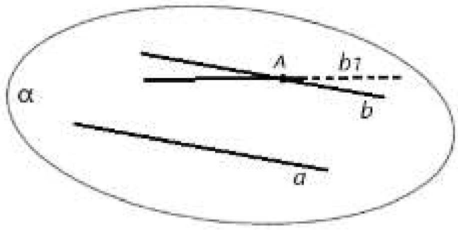


Рис. 1

Через пряму a і точку *A* можна провести площину.

Нехай це буде площина ∝. На площині ∝ лежить пряма і точка поза нею. Через цю точку можна провести пряму, паралельну даній. Нехай пряма $b \parallel a$ і $A \in b$.

Доведемо, що пряма *b* єдина. Припустимо, що існує інша пряма b_1, яка не співпадає з прямою *b*, паралельна до прямої a і проходить через точку *A*. Оскільки $a \parallel b_1$, то, за означенням, вони лежать в одній площині, наприклад, β.

Отже, ∝ і β мають спільну пряму a та точку *A*, а тому співпадають. У площині α через точку *A* проходять дві прямі b_1 і *b*, паралельні прямій a, що суперечить аксіомі паралельності. Одержали протиріччя, яке доводить єдиність прямої *b*, що й вимагалося довести.

Теорему доведено.

Методичний коментар

Такого роду задачі у методиці математики називають задачами на уявлювані побудови. Адже, мова в них йде не про виконання побудови безпосередньо, а про обґрунтування можливостей такої побудови.
У першій частині доведення потрібно вказати алгоритм проведення прямої, та ті твердження, на основі яких побудова можлива.
У другій частині необхідно довести, що така пряма єдина.
Тому тут застосовують метод доведення від супротивного, який учням має бути відомим.

Важким, традиційно, для засвоєння учнями є доведення ознаки паралельності прямих у просторі. Розглянемо його та методичний коментар.

Теорема 2. (ознака паралельності прямих)

Якщо дві прямі паралельні третій прямій, то вони паралельні між собою.

Доведення

Нехай прямі a і *b* паралельні прямій *c* (рис. 2).

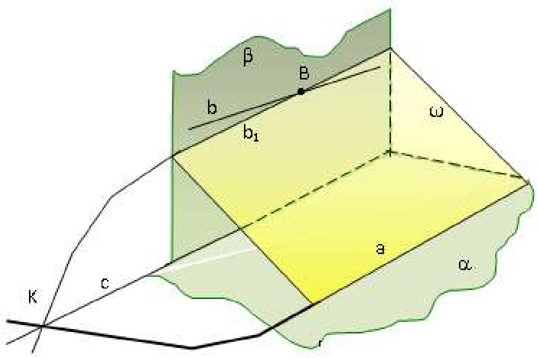


Рис. 2

Доведемо, що прямі a і *b* паралельні. Випадок, коли прямі a, *b*, *c* лежать в одній площині, було розглянуто в планіметрії.

Методичний коментар

Дві прямі паралельні третій. Щоб довести, що вони паралельні між собою потрібно:
- *довести що вони лежать в одній площині;*
- *що вони не перетинаються.*

Ідея доведення ґрунтується на уявлюваній побудові нової прямої b_1, яка лежить з прямими

Цю властивість ще називають ознакою паралельності прямих.

Тому вважатимемо, що ці прямі не лежать на одній площині і доведемо, що така ознака має місце і в просторі.

За умовою прямі $b \parallel c$, а тому лежать в одній площині, нехай це буде площина β. Аналогічно $a \parallel c$, тому ці прямі лежатимуть в деякій іншій площині – площині $\propto$. Виберемо на прямій *b* точку *B*. Через пряму a і точку *B* проведемо площину ω, яка перетне площину β по деякій прямій b_1 (ω і β мають спільну точку *B*). Оскільки через точку *B* у площині β вже проходить пряма $b \parallel c$, то $b_1 \nparallel c$, тобто b_1 перетинатиме с в деякій точці *K*. $K \in c$, а значить $K \in \beta$ і $K \in \propto$. Але $K \in b_1$, тому $K \in \omega$.

Тобто точка *K* належить трьом площинам $\propto$, β і ω.

Але всі точки, спільні для площин $\propto$ і ω, лежать на прямій a.

Тому пряма *a* проходить через точку *K*, що протирічить умові $a \parallel c$.

Отже, b_1 не перетинає прямої *c*, тобто b_1 паралельна *c*.

Але в площині β через точку *B* проходить тільки одна пряма, паралельна прямій *c*.

Тому прямі b_1 та *b* співпадають.

Так як пряма b_1 не перетинає площину $\propto$, то пряма b_1 не перетинатиме прямої а і належить площині ω.

Отже, $b_1 \parallel a$, тобто $b \parallel a$, що й вимагалося довести.

Теорему доведено.

b і *c* в одній площині і яка паралельна прямій a, але не паралельна прямій *c*.
Далі обґрунтовується що таке припущення (метод доведення від супротивного) приводить до висновку, що всі три прямі b_1, *c, a* мають спільну точку.
Що суперечить умові $a \parallel c$. Тому прямі *b* і b_1 мають співпадати.
Отже, $b \parallel a$.

До не простих, для засвоєння учнями, є доведення ознаки паралельності двох площин. Розглянемо його та методичний коментар.

Теорема 3. (ознака паралельності двох площин)

Якщо дві прямі, які перетинаються, однієї площини, відповідно паралельні двом прямим другої площини, то ці площини паралельні.

Доведення

Нехай $\propto$ і β – дані площини (рис. 3.), а a і b – дві прямі, що лежать на площині $\propto$ і перетинаються в точці *A*.

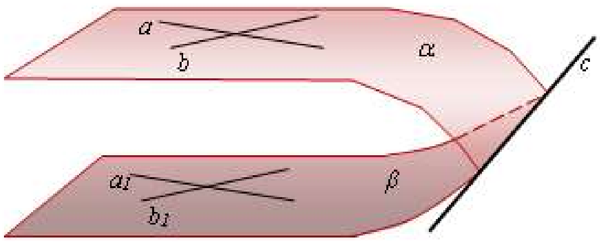


Рис. 3

Прямі a_1 і b_1 лежать на площині β і, відповідно паралельні прямим a і b. Доведемо, що площини $\propto$ і β паралельні ***методом від супротивного***.

Припустимо, що $\propto$ і β перетинаються по деякій прямій *c*.

За теоремою про паралельність прямої і площини, прямі a і b, які паралельні прямим a_1 і b_1, паралельні площині β.

Отже, a і b не перетинають площини β, а значить не перетинають і пряму *c*, яка належить β.

Таким чином, на площині $\propto$ через точку *A* проходять дві прямі a і b, паралельні *c*, що неможливо, за аксіомою паралельності.

Методичний коментар

Запропоноване доведення належить до так званих не прямих доведень.
Припускають, що площин перетинаються.
Їх перетином буде пряма *c*.
Потім обґрунтовується що всі три прямі a, b, *c* належать одній площині і що $c \parallel a$ і $c \parallel b$.
Це приводить до протиріччя з аксіомою паралельних (метод від супротивного).
Тому площини перетинатися не можуть.
Вони будуть паралельними.

Одержали протиріччя. Отже, припущення неправильне, площини $\propto$ і β перетинатися не можуть, тому $\propto$ і β – паралельні, що й вимагалося довести. *Теорему доведено*.

До не простих, для засвоєння учнями, є доведення ознаки перпендикулярності прямої і площини. Розглянемо його та методичний коментар.

Теорема 4. **(ознака перпендикулярності прямої та площини)** **Якщо пряма перпендикулярна до двох прямих, які лежать у площині та перетинаються, то вона перпендикулярна до даної площини.**

Дано: $b \cap c = O,\ b \subset \propto,\ c \subset \propto,\ a \perp b,\ a \perp c.$
Довести: $a \perp \propto$.

Доведення

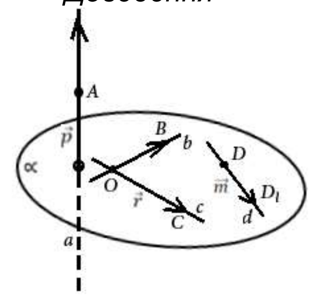


Рис. 4

Розглянемо довільну пряму d, яка лежить у площині $\propto$ (рис. 4). На прямих b і c візьмемо точки B і C, відмінні від точки O, на прямих a і d візьмемо пари незбіжних точок A і A_1, D і D_1.

Розглянемо вектори $\overrightarrow{AA_1} = \vec{p}, \overrightarrow{OB} = \vec{q}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{r}$, $\overrightarrow{DD_1} = \vec{m}$.

Розкладемо вектор $\vec{m}$ за базисом $(\vec{q};\ \vec{r})$:

$$\vec{m} = x\vec{q} + y\vec{r}.$$

Обидві частини цієї рівності помножимо на вектор $\vec{p}$ і застосуємо розподільний закон скалярного множення :

$$\vec{m} \cdot \vec{p} = (x\vec{q} + y\vec{r}) \cdot \vec{p},$$

або

$$\vec{m} \cdot \vec{p} = x\vec{q} \cdot \vec{p} + y\vec{r} \cdot \vec{p} \qquad (1)$$

Але за умовою $\vec{p} \perp \vec{q}$, $\vec{p} \perp \vec{r}$, тому згідно з ознакою перпендикулярності векторів $\vec{q} \cdot \vec{p} = 0$ і $\vec{r} \cdot \vec{p} = 0$.

Тоді з рівності (1) випливає, що $\vec{m} \cdot \vec{p} = 0$.

Отже, $\vec{p} \perp \vec{m}$ і $a \perp d$.

За означенням перпендикулярності прямої і площини маємо: $a \perp \propto$.

Методичний коментар

Традиційне доведення цієї ознаки створювалося тоді, коли вектори в геометрії не вивчались. Тепер вони вивчаються і в геометрії, і у фізиці. Тому пропонуємо скористатися векторним методом. Для цього учні мають повторити відомості про та скалярний добуток векторів, що вивчались в курсі планіметрії. А з традиційним доведенням пропонуємо ознайомитися учням самостійно. Щоб це знайомство було активним надати їм можливість доповісти на семінарському занятті і отримати заохочувальні бали.

Доведення інших теорем та ознак взаємного розміщення прямих і площин в просторі рекомендуємо організувати так, щоб учні якомога більше самостійно вивчали їх за підручниками і доповідали на уроці.

Зрозуміло, що всі старання школярів при цьому мають бути оцінені і заохочені вчителем.

3. Задачі на взаємне розміщення прямих і площин в просторі і методика формування вмінь та навичок їх розв'язування

3.1. ПРАКТИЧНІ ЗАДАЧІ

У діючих альтернативних підручниках з стереометрії добірки практичних задач містять диференційовані завдання як на засвоєння безпосередньо нових знань, так і на застосування таких знань до розв'язування складніших задач.

Серед них є задачі на уявленні побудови (про них ми писали вище), на доведення та на обчислення. Методика розв'язання таких задач гарно розкрита в методичних посібниках.

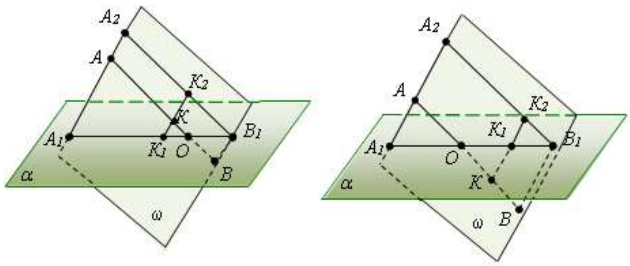
Тому зупинимося лише на окремих прикладах розв'язання та на методичних коментарях до них. Звертаємо увагу на культуру оформлення записів.

Задача 1.

Відрізок *AB* перетинає площину ∝ у точці *O*. Через його кінці *A*, *B* і точку *K*, яка ділить відрізок у відношенні 5 : 2, рахуючи від точки *A*, проведено паралельні прямі, які перетинають площину відповідно в точках A_1, B_1, K_1. Знайдіть довжину відрізка BB_1, якщо відомо, що $AA_1 = 25$ см, $KK_1 = 10$ см.

Доведення

Оскільки прямі AA_1, BB_1, KK_1 паралельні і перетинають пряму *AB*, то вони лежать в одній площині *ω* (рис. 6).



а)   *б*)

Рис. 6

Точки A_1, B_1, K_1 лежать на одній прямій – прямій перетину площини *ω* з площиною ∝.

Проведемо у площині *ω* через точку B_1 пряму $B_1A_2 \parallel BA$.

Нехай A_2 – точка перетину цієї прямої з прямою AA_1, а K_2 – з прямою KK_1. Оскільки чотирикутники BB_1KK_1 і BB_1A_2A – паралелограми, то $KK_1 = AA_2 = BB_1$. Позначимо довжину цих відрізків через *x*.

Тоді $A_1A_2 = AA_2 + AA_1 = x + 25$, $K_1K_2 = KK_2 \pm KK_1 = x \pm 10$ (взаємне розміщення точок *K*, K_1, K_2 може бути різне рис. 6 а), рис. 6 б).

З подібності трикутників $B_1K_1K_2$ та $B_1A_1A_2$ маємо:

$\frac{K_1K_2}{A_1A_2} = \frac{B_1K_2}{B_1A_2} = \frac{BL}{BA} = \frac{2}{5+2} = \frac{2}{7}$.

Отже, $\frac{x \pm 10}{x+35} = \frac{2}{7}$, звідси $x = 7$ *см* або $x = 32$ *см*.

Відповідь: 4 *см* або 32 *см*.

Методичний коментар

Після вивчення теми «Вступ до стереометрії», де розглядалися переважно задачі на доведення, це перші задачі на обчислення.
Тому важливо використовувати під час розв'язування матеріальні чи демонстраційні комп'ютерні моделі, які б розкривали умову задачі.
Тільки після цього можна будувати вдалий рисунок до задачі. Усі операції, які здійснюються під час розв'язання, учням відомі з планіметрії. Тому хід розв'язання записати вони можуть самостійно.

Задача 2.

Точка *К* не лежить у площині трикутника ABC. На відрізках KA, KB і KC вибрано такі точки A_1, B_1, C_1 відповідно, що $KA_1 : AA_1 = KB_1 : BB_1 = KC_1 : CC_1$. Доведіть, що площини *ABC* і $A_1B_1C_1$ – паралельні.

Дано: $\triangle ABC$, $K \notin (ABC)$, $A_1 \in KA$, $B_1 \in KB$, $C_1 \in KC$ (рис.7) $KA_1 : AA_1 = KB_1 : BB_1 = KC_1 : CC_1$. Довести: $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$.

Доведення

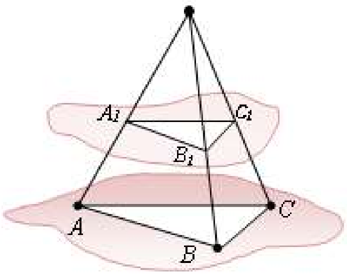


Рис. 7

За умовою задачі: $KA_1 : AA_1 = KB_1 : BB_1 = KC_1 : CC_1$, тому $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$ та $AC \parallel A_1C_1$
(за узагальненою теоремою Фалеса).
$A_1B_1 \cap B_1C_1 = B_1$, $(A_1B_1C_1)$ – єдина площина;
$AB \cap BC = B$, (ABC) - єдина площина.
Отже, за ознакою паралельності площин, маємо, що $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$, щ.в.д.

Відповідь: Доведено.

Методичний коментар

Учні мають знати, що всі властивості геометричних фігур, вивчені в планіметрії мають місце і в стереометрії.
Тому за узагальненою теоремою Фалеса паралельні прямі відтинають на сторонах кута пропорційні відрізки.
Враховуючи умову задачі, отримуємо паралельність трьох пар відповідних прямих:
AB і A_1B_1, BC і B_1C_1 та AC і A_1
Точками A, B, C визначається одна площина, а A_1, B_1, C_1 – інша, які за ознакою паралельності площин, - паралельні, щ.в.д.

Задача 3.

Дві паралельні площини $\propto$ і β перетинають сторону *BA* кута *ABC* в точках *D* і D_1, а сторону *BC* відповідно в точках *E* і E_1. Знайдіть довжину *DE*, якщо $BD = 12$ см, $BD_1 = 18$ см, $D_1E_1 = 54$ см (рис. 8).

Дано: $\angle ABC$, площини $\propto$ і β, $\propto \parallel \beta$, $AB \cap \alpha = D$, $AB \cap \beta = D_1$, $BC \cap \alpha = E$, $C \cap \beta = E_1$, D_1E_1= 54 см, $BD = 12$ см, $BD_1 = 18$ см. Знайти: DE.

Доведення

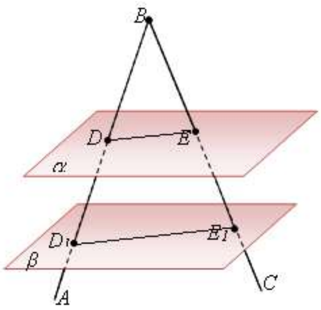


Рис. 8

Нехай $\propto \parallel \beta$, площина α перетинає сторони кута *ABC* в точках *D* і *E*, а площина β – в точках D_1 і E_1.
За умовою $BD = 12$ см, $BD_1 = 18$ см, $D_1E_1 = 54$ см. Враховуючи, що $DE \parallel D_1E_1$ маємо: ΔDBE подібний ΔD_1BE_1, отже, $\frac{BD}{DE} = \frac{BD_1}{D_1E_1}$; $DE = \frac{BD \cdot D_1E_1}{BD_1}$; $DE = \frac{12 \cdot 54}{18} = 36$ *см*.

Відповідь: 36 *см*.

Методичний коментар

Через точки A, B, C проведемо площину ABC, яка перетинає дві паралельні площини $\propto$ і β по паралельних прямих DE $і$ D_1D_1.
Тоді отримані трикутники DBE $і$ D_1BE_1 – подібні, і їх сторони – пропорційні. Знаходимо невідомий член пропорції і отримуємо розв'язок задачі.

Задача 4.

З точки до площини проведено дві похилі. Знайдіть довжини похилих, якщо одна з них на 26 см більша від другої, а проекції похилих дорівнюють 12 см і 40 см (рис. 9).

Дано: *α*, *AB* – перпендикуляр (рис. 9),
AC і *AD* – похилі,
AC < *AD* на 26 см,
$\text{Пр}_{\alpha}AC = BC = 12$ см,
$\text{Пр}_{\alpha}AD = BD = 40$ см.
Знайти: *AC* і *AD.*

Розв'язання

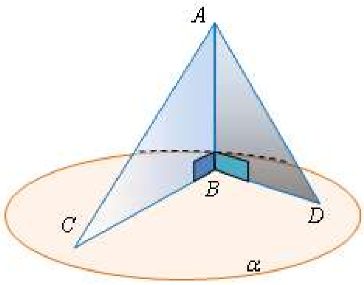


Рис. 9

Нехай $AC = x$см, тоді $AD = x + 26$ см.
У $\triangle ABC$ $(\angle B = 90^{\circ})$: $AC = x$ см – гіпотенуза;
$CB = 12$ см – катет.
За теоремою Піфагора: $AC^2 = BC^2 + AB^2$,
звідки $AB^2 = AC^2 - BC^2$,

$$AB^2 = x^2 - 144 \qquad (1)$$

У $\triangle ABD$ $(\angle B = 90^{\circ})$: $AD = x + 26$ см – гіпотенуза;
$BD = 40$ см – катет.
За теоремою Піфагора:
$AD^2 = BD^2 + AB^2$, звідки $AB^2 = AD^2 - BD^2$,
$AB^2 = (x + 26)^2 - 1600 = x^2 + 52x + 676 - 1600$;

$$AB^2 = x^2 + 52x - 924 \qquad (2)$$

З (1) і (2) маємо: $x^2 + 52x - 924 = x^2 - 144$,
$52x = 780$, $x = 15$.
$AC = 15$ *см*,
$AD = 15 + 26 = 41$ *см*.

Відповідь: 15 *см* і 41 *см*.

Методичний коментар

AB – перпендикуляр до *α*, тому $AB \perp BC$ і $AB \perp BD$. Перпендикуляр, похила і її проекція утворюють прямокутний трикутник. Дві різні похилі, один перпендикуляр і дві проекції утворюють два прямокутні трикутники зі спільним катетом. Скласти співвідношення між сторонами прямокутного трикутника можна за теоремою Піфагора. Алгебраїчний метод розв'язування спрощує процес пошуку розв'язку. Знаходимо спільний катет для $\triangle ABC$ і $\triangle ABD$: $AB^2 = AC^2 - BC^2$ і $AB^2 = AD^2 - BD^2$.
Звідки маємо рівність: $AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$ і відповідне рівняння з однією змінною, що приводить до розв'язку задачі**.**

Задача 5.

З точок *P* і *Q*, які лежать на двох взаємно перпендикулярних площинах (рис. 10), опущено перпендикуляри *PH* і *QC* на пряму перетину площин. Знайдіть довжину відрізка *PQ*, якщо $PH = 6$ см, $QC = 7$ см, $HC = 6$ см.

Дано: $\propto\perp\beta, \propto\cap\beta = c$,

$PH \perp c, H \in c, QC \perp c, C \in c,$

$PH = 6$ см,

$QC = 7$ см,

$HC = 6$ см.

Знайти *PQ*.

Розв'язання

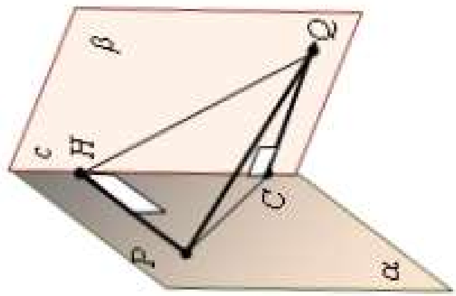


Рис. 10

Оскільки $\propto\perp\beta, PH \subset\propto, PH \perp c$, то $PH \perp \beta$,

звідки $PH \perp HQ$. $\triangle PHQ(\angle H = 90^\circ)$ – прямокутний:

$PH = 6$ см – катет, *HQ* – катет,

PQ – гіпотенуза (шуканий відрізок).

Розглянемо на площині $\beta \triangle HQC$: $QC \perp c$,

а отже, $QC \perp CH$,

тому $\angle QCH = 90^\circ$ і $\triangle QCH$ – прямокутний.

Із $\triangle QCH(\angle C = 90^\circ)$: $QC = 7$ см – катет;

$HC = 6$ см – катет; *HQ* – гіпотенуза, яка є невідомим катетом для $\triangle PHQ$.

Із $\triangle QCH$: $HQ^2 = QC^2 + HC^2 = 49 + 36 = 85.$

Із $\triangle PHQ$: $PQ^2 = PH^2 + HQ^2 = 36 + 85 = 121.$

Звідки, враховуючи що *PQ* > 0,

маємо $PQ = 11$ *см.*

Відповідь. 11 *см.*

Методичний коментар

Для кожної геометричної задачі важливо побудувати ланцюг логічних міркувань.

У цій задачі важливо побачити не лише прямокутні трикутники на площинах $\propto$ і β, а й використати ознаку та властивості перпендикулярних площин.

У такий спосіб можна вийти на новий прямокутний трикутник *PHQ* чи *QCP*, третю сторону якого знаходять за відомим та знайденим катетом.

У цьому, чи в іншому, випадку, *PQ* – залишається похилою, міняються лише перпендикуляри до відповідних площин $\propto$ і β та проекції похилої на площину α чи на площину β.

3.2. ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ

Вивчення взаємного розміщення прямих і площин у просторі багате на застосування під час розв'язування прикладних задач, яких, нажаль, мало в діючих підручниках з стереометрії.

Є потреба в їх створенні. Наочні уявлення про таке розміщення дають фізичні об'єкти, які ми спостерігаємо в природі та техніці. Розглянемо окремі прикладні задачі і особливості їх розв'язання.

Задача 1.

а) На практиці вертикальність встановлення стовпа перевіряють, дивлячись на стовп по черзі в двох напрямах (рис. 11).
Як обґрунтувати правильність такої перевірки?

Рис. 11

б) Ремонтуючи свердлильний верстат, слюсар повинен за допомогою косинця вивірити перпендикулярність осі свердла і площини стола, на якому кріпиться деталь (рис. 12).
Як це зробити?

Рис. 12

Методичний коментар

Учителю необхідно показати як практично робиться така перевірка.
Це і буде усне розв'язування задачі.
Пояснити учням, що в основі такої перевірки лежить одна й та ж теорема – ознака перпендикулярності прямої і площини.

Задача 2.

(практична робота на місцевості

на визначення висоти недоступного предмета)

Користуючись вимірювальними інструментами, знайти висоту *AB* предмета, якщо точки *A* і *B* недоступні (рис. 13).

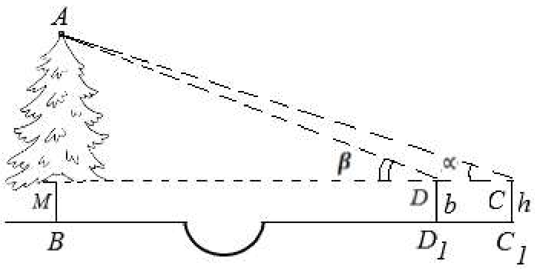


Рис. 13

Розв'язання

Провішуємо на місцевості відрізок C_1D_1 у напрямі до точки *B* і вимірюємо його довжину.
Нехай $C_1D_1 = б$.
Потім вимірюємо екліметром кути *ACM* і ADM .
Нехай ∠*ACM*=∝, $\angle ADM = \beta.$
Висоту C_1C_1 екліметра позначимо через *h*.
До трикутника ACD застосуємо теорему синусів:

$$\frac{AD}{sin\propto} = \frac{CD}{sin\widehat{CAD}}.$$

Але, $CD = b$, $\widehat{CAD} = \beta{-}\propto$, тому $AD = \frac{bsin\propto}{\sin(\beta-\propto)}$.

З прямокутного трикутника ADM маємо :

$$AM = AD \cdot sin\beta.$$

Отже, $$ADB\,\frac{b\cdot sin\propto\cdot sin\beta}{\sin(\beta-\propto)} + h \qquad (1)$$

Виконавши відповідні вимірювання на місцевості, знаходимо числовий результат за формулою (1).

Методичний коментар

Таких практичних робіт рекомендуємо провести під час вивчення вказаних підтем кілька. Виконуючи їх, учні ознайомитися з вимірювальними приладами, з застосуванням теоретичних знань на практиці, з окремими корисними пропозиціями, які будуть потрібні їм в житті.

ПІДСУМОК

Взаємне розміщення прямих і площин у просторі, на вивчення якого відводиться 80 год, доцільно вивчати окремими логічно завершеними темами в яких розглядаються: паралельність прямих; паралельність прямої і площини; паралельність площин; паралельне проєкціювання і його застосування; перпендикулярність прямих; перпендикулярність прямої і площини; перпендикулярність площин; ортогональне проєкціювання і його застосування.

Бажано також на завершення вивчення кожної теми розв’язувати прикладні задачі. Корисними будуть також практичні роботи на місцевості, їх зміст і кількість визначає вчитель, виходячи з обставин.

МЕТОДИЧНІ ЗАДАЧІ

для самостійного розв’язування

1 Скласти календарне планування до кожної з названих в лекції підтем, орієнтуючись на програму з математики та альтернативний підручник з стереометрії.

2 Проаналізувати зміст навчального матеріалу з розміщення прямих і площин у просторі, викладеного в альтернативних діючих підручниках, зробити порівняльні висновки.

3 Розв’яжіть задачі:

1) На базі пошукової групи прийняли радіограму, що вертоліт перебуває над розшукуваним об’єктом на висоті 600 м. Вертоліт видно з бази під кутом $8°30'$ над площиною горизонту. Обчисліть відстань від бази до об’єкта (рис. 14).

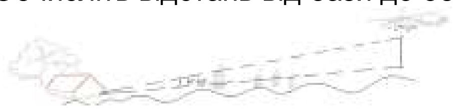


рис. 14

2) Літак летить горизонтально і прямолінійно з швидкістю 400 км/г. Спостерігач, над яким він пролетів, виміряв, що в деякий момент часу літак було видно під кутом $65°$ до площини горизонту, а через 30 с – під кутом $39°$ до цієї площини. На якій висоті летить літак?

3) Перпендикулярність стіни перевірять за допомогою виска (шнур з тягарцем). Якщо він щільно прилягає до її поверхні, вважають, що вертикальність витримано. Чи правильно це? На чому ґрунтується такий спосіб перевірки?

4) круглий стіл накрито квадратною скатертиною з тонкої тканини (центр квадрата збігається з центром круга). На скільки кути скатертини ближче до підлоги, ніж середини її сторін? Прийняти сторону квадрата (скатертини) за a.

5) Під час виконання завдання з визначення вертикальності стовпців для паркана учень перевірив вертикальність першого стовпчика, а далі, вимірюючи висоту кожного стовпця та відстані між стовпцями внизу і вгорі прийняв рішення щодо встановлення їхньої вертикальності. Чи правильно виконав завдання учень?

6) Наочною моделлю перпендикулярної прямої і площини є колесо зі спицями та вісь (рис. 15). Вісь перпендикулярна до кожної спиці.

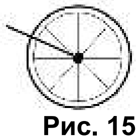


Рис. 15

Під час руху колеса спиці описують площину круга, на якій містяться безліч відрізків, що перетинаються в одній точці. Якщо вісь розміщено горизонтально, то в якій площині буде обертатися колесо? Чому?

Дитина від природи своєї – активний дослідник зовнішнього світу, і тому вивчення геометричних форм має будуватися на принципі самодіяльності та активності. Діти повинні самі досліджувати те або інше явище й робити з нього доступний для них висновок, щоб відчувати радість від самостійного знаходження істини

О. М. Астряб

Л Е К Ц І Я 3.4

Т Е М А ***Побудова зображень просторових фігур на площині. Многогранники***

П Л А Н

1.	***Паралельне проєкціювання як метод побудови ілюстративних рисунків. Вимоги до рисунка***
2.	***Побудова зображень многокутників, елементарні побудови. Побудова зображень многокутників, многогранників***
3.	***Побудова зображень просторових фігур в задачах (на обчислення, доведення, побудову)***

К О Н С П Е К Т Л Е К Ц І Ї

1. Паралельне проєкціювання як метод побудови ілюстративних рисунків. Вимоги до рисунка

Предмети, що нас оточують або які ми створюємо самі, цікавлять людину з різних причин. Художників цікавлять своєю формою, гамою кольорів і т. п.; креслярів, конструкторів, інженерів – формою та розмірами; дизайнерів – формою, розміщенням в просторі, естетичним оформленням тощо. Щоб виготовити предмети людина їх спочатку проектує, зображає на папері у вигляді малюнків, рисунків, креслень та інших зображень. Для цього вона користується різними методами побудови таких зображень. *Художники*, для зображення предметів в перспективі, використовують **центральне проєкціювання** (рис. 1 *а*), рис.1 *б*)); *архітектори, інженери-конструктори* – **паралельне проєкціювання** (метод Монжа, диметричну або аксонометричну проекцію) (рис. 2 *а*), рис.2 *б*)); *картографи* – **сферичне проєкціювання** (рис. 3 *а*), рис.3 *б*)).

Так як стереометрія вивчає геометричні фігури в просторі і їх властивості, то в процесі вивчення теоретичного матеріалу, розв’язування задач доводиться будувати зображення таких геометричних фігур на папері.

Отже, виникає **потреба навчитися** будувати зображення геометричних фігур, які вивчаються в шкільному курсі стереометрії (*прямої, площини, куба, призми, піраміди, циліндра, конуса, кулі і т. д.*). Такі побудови учні повинні вчитися виконувати вже з перших уроків стереометрії. Теоретичні основи виконання названих побудов учні отримують під час вивчення двох тем: «Паралельність прямих і площин у просторі» та «Перпендикулярність прямих і площин у просторі». Тут вони знайомляться, відповідно, з паралельним та ортогональним проєкціюваннями, як методами побудови зображень просторових фігур на площині.

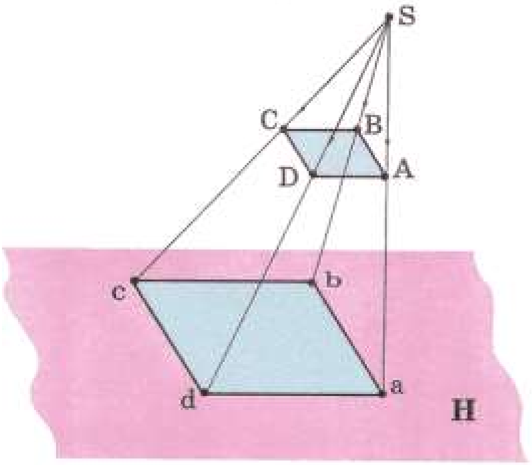


Рис. 1 *а*) Центральне проєкціювання

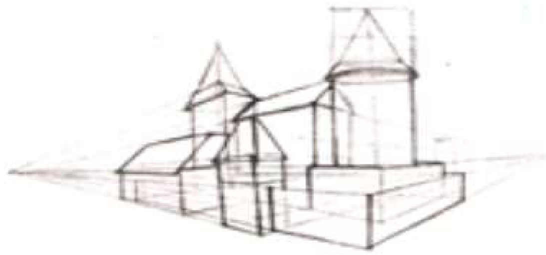


Рис. 1 *б*) Художні перспективи

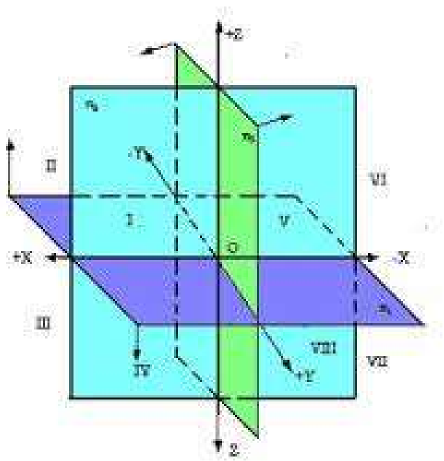


Рис. 2 *а*) Паралельне проєкціювання. Метод Монжа

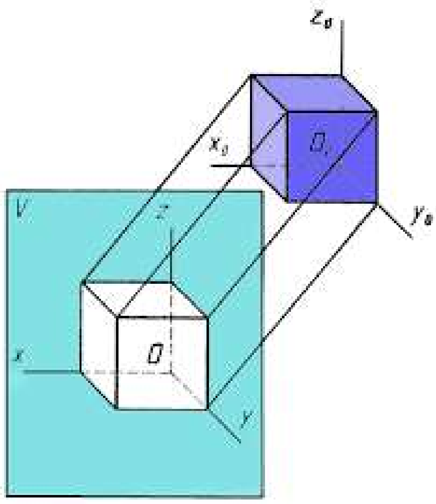


Рис. 2 *б*) Паралельне проєкціювання. Аксонометрична проекція

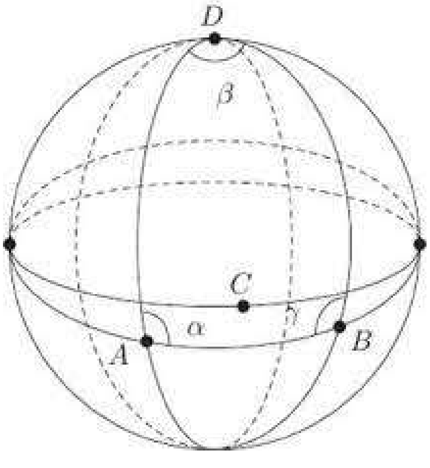


Рис. 3 *а*) Сферичне проєкціювання.

Рис. 3 *б*) Проєкція карти земної кулі.

Пояснити учням що таке паралельне проєкціювання можна по-різному:

- підготувати презентацію і показати за допомогою сучасних ТЗН відеокартинки з відповідними зображеннями та роз’ясненнями (рис. 4);
- провести реальну демонстрацію, вибравши джерело світла, екран і предмет з демонстрацією його проєкції на екрані.

Рис. 4. Приклад в слайдах презентації «Методи проєкціювання. Паралельне проєкціювання»

Учні мають засвоїти суть термінів: площина проєкції та проєкціюючі промені (разом проекційний апарат), предмет (оригінал), його зображення (проекція оригіналу). Спосіб отримання зображення і є паралельним проєкціюванням. Учням буде цікаво дізнатися, що ним користуються під час побудови зображень предметів в кресленні, в нарисній геометрії і в шкільному курсі стереометрії. Однак, є певні відмінності в користуванні, які стосуються принципів побудови. Учні мають засвоїти, що в шкільному курсі стереометрії, будуючи зображення просторових фігур на площині, методом паралельного проєкціювання, дотримуються двох важливих принципів **(вільне паралельне проєкціювання)**. В результаті будують не креслення, а **ілюстративні рисунки**.

Принцип 1. *Під час паралельного проєкціювання (мисленевого) проєкційний апарат і оригінал строго не визначені*. Це означає, що для того, хто будує зображення геометричної фігури, дозволяється самостійно вибирати площину проєкцій (лист паперу, сторінку зошита чи її частину тощо), напрям проєкціюючих променів, розміщення оригінала в просторі, його виміри.

Доречним буде підкріпити сказане конкретним прикладом.

Наприклад, учням пропонується розв’язати задачу: «*У правильній трикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює* $\propto$*, а бічне ребро дорівнює* b*. Визначити об’єм піраміди».*

Із умови задачі відомо лише що піраміда трикутна і правильна. Яка величина кута $\propto$, *яка* довжина бічного ребра b не вказано. Не сказано також в задачі як і де розташована піраміда в просторі, що обрати за площину проєкції, як напрямлені проєкціюючі промені. Тому, будуючи зображення піраміди (ілюстративний рисунок), учень має сам визначитися з проєкційним апаратом і розмірами зображення.

Принцип 2. *Зображенням має бути фігура, подібна до паралельної проєкції оригінала.*

Цей принцип зобов'язує виконавця побудови зображення дотримуватися властивостей паралельного проєкціювання. Учням слід нагадати ці властивості.

Властивість 1. *Паралельною проєкцією прямої є пряма*.

Властивість 2. *Паралельною проєкцією двох паралельних прямих є паралельні прямі*.

Властивість 3. *Відношення довжин відрізків, що лежать на паралельних прямих (на одній і тій же прямі) зберігається і для їх проєкцій*.

Таким чином учні мають знати, що вони вчаться будувати зображення фігури – ілюстративний рисунок, який служить засобом для виконання вимоги задачі. Лише в окремих випадках такий рисунок може бути ***ціллю***, метою їх роботи, але *не кресленням*. Після роз'яснення обох принципів побудови ілюстративних рисунків учням слід повідомити вимоги до рисунка.

Вимога 1. ***Рисунок має бути правильним***.

Зміст цієї вимоги варто розкрити на конкретному прикладі побудованого зображення. Наприклад, учням для розв'язання була запропонована задача: «*Основою прямої призми є рівнобедрена трапеція з гострим кутом* $\propto$ *і бічною стороною рівною* a. *Визначити об'єм призми, якщо її висота дорівнює* h»*.*

Розв'язуючи задачу учні побудували зображення цієї призми (рис. 5).

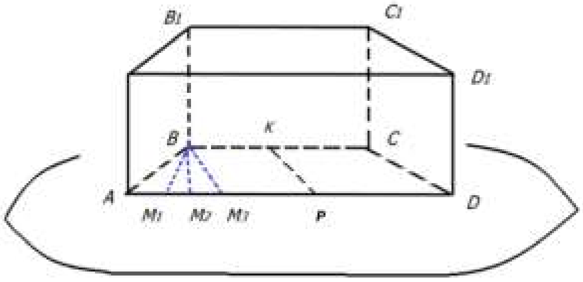


Рис. 5. Призма

Рисунок у всіх учнів було виконано з дотриманням властивостей паралельного проєкціювання (основи трапеції – паралельні, бічні ребра призми – рівні і паралельні). Але коли вони почали зображати на рисунку висоту трапеції, то багато хто допустився помилки.

Так на рис. 5 показано різні зображення висоти. Зображення BM_1, BM_2 – неправильні. Оскільки трапеція рівнобедрена, то вона має вісь симетрії, яка проходить через середини сторін *BC* і *AD*.

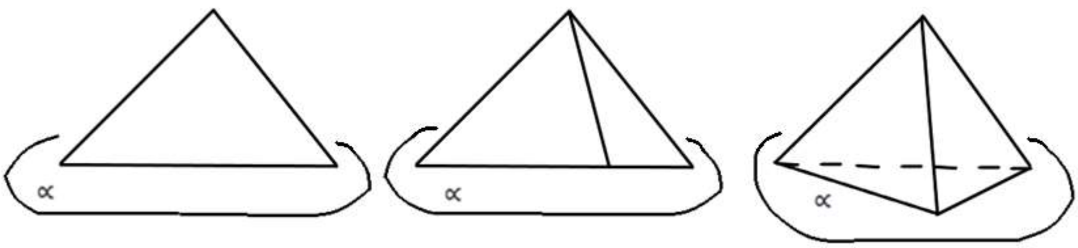
На зображені точки *К* і *Р* – середин основ трапеції, тому пряма *КР* – зображення осі симетрії трапеції *ABCD*.

Висота трапеції, проведена з вершини *В*, буде паралельною до осі симетрії. Отже, зображенням висоти буде відрізок $BM_3 \parallel KP$.

Після таких роз’яснень учні мають зрозуміти, що **«рисунок правильний тоді, коли всі елементи на ньому побудовані з дотриманням одного й того ж проєкціювання»**. Часто учні і вчителі вживають замість терміну «правильний» термін «вірний». Цього робити не слід. Учні мають знати, що в українській мові під терміном вірний – розуміють того, хто не зраджує (вірний товариш, друг, кохана), а правильний – той об’єкт, який виготовлений з дотриманням встановлених правил.

Вимога 2. ***Рисунок має бути наочним*.**

Як і першу вимогу, цю вимогу слід пояснити учням демонстрацією на конкретних прикладах. Наприклад. Включити джерело світла (пучок світла від прожектора) і направити промені на екран. На шляху цих променів помістити каркасну модель трикутної піраміди (такі моделі мають бути в шкільному кабінеті математики). Залежно від положення оригінала на екрані можна одержати кілька різних проєкцій (рис. 6 *а),* рис. 6 *б),* рис. 6 *в*)).



а) ***б)*** ***в)***

Рис. 6. Проєкції трикутної піраміди

Всі три проєкції – зображення даної трикутної піраміди. Однак, рис. 6 *а*) і рис. 6 *б*), якщо не знати, що оригіналом була піраміда, не створюють в уяві повний образ оригінала. Тому вони ***не наочні***, а рис. 6 *в*), після того як виділити видимі ребра суцільними лініями, а невидимі (ті, що закриваються гранями) штриховою, то тоді такий рисунок створює в уяві образ оригінала – трикутну піраміду. Отже, рисунок ***наочний, якщо він створює повне уявлення про оригінал***. Ця вимога зобов'язує виконавця будувати рисунки так, щоб лінії, які в оригіналі не співпадають, на рисунку не співпадали також, щоб видимі лінії рисувалися жирними суцільними, а невидимі – штриховими лініями.

Вимога 3. ***Рисунок має бути прости в побудові***.

Така вимога дозволяє виконавцю не завжди виконувати зображення оригінала. Справді, якщо ілюстративний рисунок фігури надто складний для виконання і потрібний лише як засіб для розв'язання задачі чи доведення теореми, то не обов'язково його виконувати. Можна обійтись і простішими засобами. Наприклад, комп'ютерною моделлю, заготовкою, перерізом фігури, її розгорткою тощо.

2. Побудова зображень многокутників, елементарні побудови.

Побудова зображень многокутників, многогранників

Найчастіше, під час вивчення стереометрії, учні мають справу з такими плоскими фігурами в просторі як *трикутниками* (правильні, рівнобедрені, різносторонні, прямокутні); *квадратами, прямокутниками, ромбами*, *паралелограмами, трапеціями* (рівнобічною, прямокутною, різнобічною); рідше з *правильними п'ятикутниками* та *шестикутникам*.

Учнів слід навчити будувати зображення цих фігур на площині. Для цього необхідно розглянути так звані елементарні побудови.

Побудова 1. Довільно нарисований трикутник на площині є зображенням трикутника.

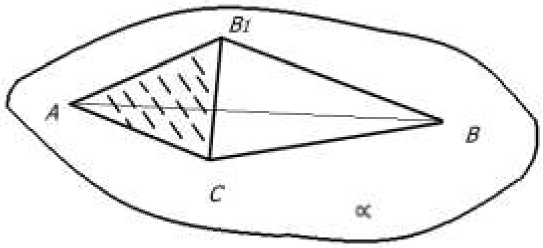


Рис. 7

Обґрунтування.

На рис. 7 зображено ΔABC, який належить площині $\propto$. Таку проєкцію може дати правильний, рівнобедрений, різносторонній, прямокутний трикутник – оригінал.

Учням слід це запам'ятати і надалі керуватися таким твердженням. Переконати їх в такій побудові можна або демонстративним шляхом або наступними міркуваннями.

Якщо на полі листка паперу на стороні AC побудувати рівносторонній ΔAB_1C і уявити, що проекціюючі промені напрямлені паралельно прямій B_1B, то його проєкцією буде довільно нарисований ΔABC. Отже, знайдеться такий проєкційний апарат, який відобразить правильний трикутник – оригінал ΔAB_1C на ΔABC.

Аналогічні міркування будуть і для інших видів трикутника.

Важливо зауважити учням, що медіани трикутника – оригінала на рисунку будуть зображатися як медіани (запропонувати учням дати пояснення цьому факту).

Побудова 2. Довільно нарисований паралелограм є зображенням паралелограма (квадрата, прямокутника, ромба і власне паралелограма) (рис. 8).

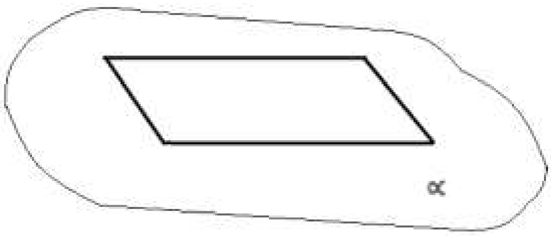


Рис. 8

Обґрунтування будуть схожими до обґрунтування в побудові 1. Їх можна запропонувати учням зробити самостійно.

Важливо, щоб учні пам'ятали, що паралельність сторін при паралельному проєкціюванні є інваріантом (незмінною властивістю) і врахували це в побудовах.

Побудова 3. Довільно нарисована трапеція є зображенням трапеції (рівнобічної, прямокутної, різнобічної) (рис. 9).

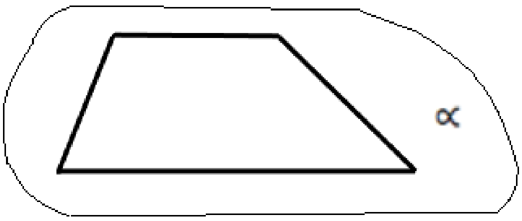


Рис. 9

Учнів слід застерегти, що для окремих видів зображення трапеції, коли відоме відношення основ трапеції - оригінала, таке відношення зберігається і на ілюстративному рисунку.

Побудова 4. Побудова зображення правильного п'ятикутника.

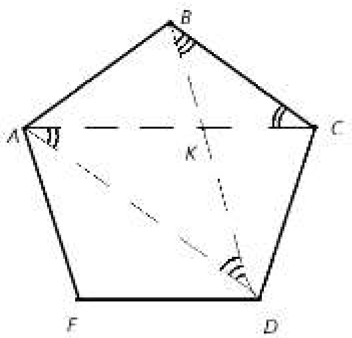


Рис. 10

Насамперед, учням слід обґрунтувати алгоритм побудови. Для цього потрібно розглянути деякі властивості правильного п'ятикутника, які при паралельному проєкціюванні будуть не змінюватися.

Нехай дано правильний п'ятикутник $ABCDF$ (рис. 10).

Проведемо діагоналі AC і BD. $BD \parallel AF,\ AC \parallel FD$.

Нехай $AB = a$, $AC = m$.

$AKDF$ – ромб. $\Delta AKD \sim \Delta CKB$.

Тоді $\frac{AK}{KC} = \frac{AD}{BC}$.

Оскільки, $AK = a$, $KC = m - a$, $AD = m$, $BC = a$,

то маємо $\frac{a}{m-a} = \frac{m}{a}$ (золотий переріз).

Звідки слідує, що $a^2 = m^2 - am$, або $m^2 - am - a^2 = 0$.

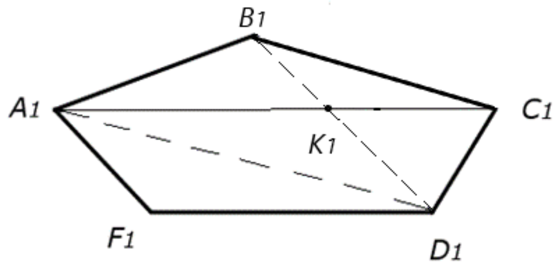
Розділимо рівність на a^2, маємо $(\frac{m}{a})^2 - \frac{m}{a} - 1 = 0$.

Нехай $\frac{m}{a} = x$ $(x > 0)$.

Маємо рівняння $x^2 - x - 1 = 0$.

Звідки $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx \frac{8}{5}$.

Отже, точка *К* ділить діагональ *АС* на відрізки, які відносяться як 8 до 5 (таке відношення для ілюстративного рисунку буде прийнятним). Це інваріант, а тому на зображенні п'ятикутника таке відношення має бути враховане.



З проведених, завчасно, міркувань і випливає алгоритм побудови зображення правильного п'ятикутника (рис. 11).

Рис. 11

Алгоритм побудови зображення правильного п'ятикутника:

1-й крок: Будується довільний паралелограм $A_1K_1D_1F_1$ – зображення ромба $AKDF$.

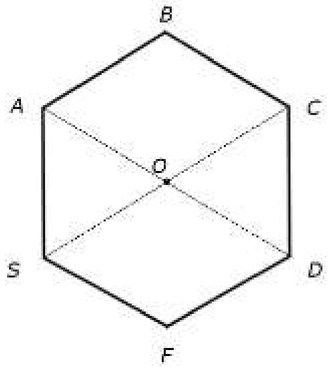
2-й крок: На продовженні відрізка A_1K_1 будується точка C_1, так, щоб A_1C_1 : A_1K_1= 8 : 5 (або A_1K_1 : K_1C_1= 5 : 3).

Якщо листок паперу в клітинку, то це зробити легко.

3-й крок: Будуємо D_1C_1 , $C_1B_1 \parallel A_1D_1$. Отримуємо п'ятикутник $A_1B_1C_1D_1F_1$ – зображення правильного п'ятикутника $ABCDF$.

Після ознайомлення з алгоритмом учня варто запропонувати виконати кілька таких побудов, обираючи різне розташування п'ятикутника.

Побудова 5. Побудова зображення правильного шестикутника.

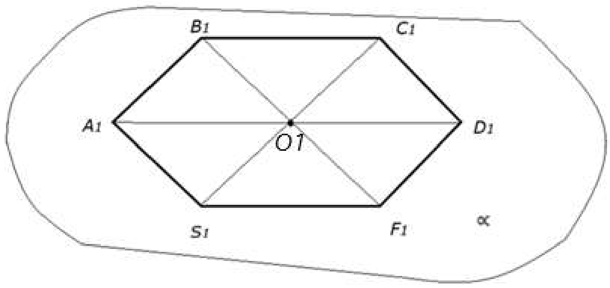


Як і у випадку з побудовою зображення правильного п'ятикутника, варто спочатку обґрунтувати алгоритм побудови зображення правильного шестикутника.

Рис. 12

Нехай дано правильний шестикутник $ABCDFS$ (рис. 12).

Його діагоналі $AD,\ BF,\ CS$ перетинаються в точці O. точка O – центр симетрії правильного шестикутника. Це інваріант, а тому на зображенні правильного шестикутника точка O відобразиться в точку, як на рисунку буде центром симетрії для зображення шестикутника.



З приведених міркувань випливає алгоритм побудови зображення правильного шестикутника (рис. 13).

Рис. 13

Алгоритм побудови зображення правильного шестикутника:

1-й крок: Будується довільний паралелограм $A_1O_1F_1S_1$ – зображення ромба $AOFS$.

2-й крок: На рисунку будують точку D_1 симетричною точці A_1 відносно точки O_1,

точку C_1 симетричну точці S_1 відносно центра точки O_1,

точку B_1 симетричну точці F_1 відносно центра точки O_1.

3-й крок: Шестикутник $A_1B_1C_1D_1F_1S_1$ – зображення правильного шестикутника $ABCDFS$.

Отриманні знання про елементарні побудови слід навчати учнів застосовувати вже з перших уроків стереометрії під час розв'язування різного роду задач, щоразу акцентуючи увагу на побудові рисунків до розв'язань. Проілюструємо сказане кількома прикладами.

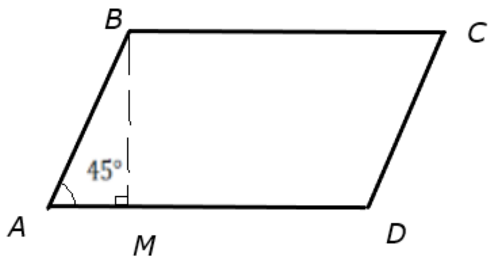
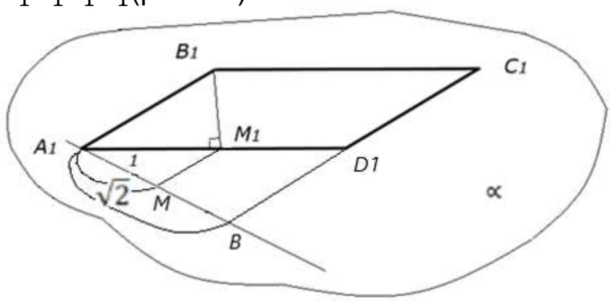
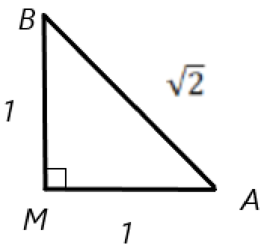
3. Побудова зображень просторових фігур в задач
(на обчислення, доведення, побудову)

Задачі на проекційному рисунку

Задача 1. *Побудуйте на зображенні ромба зображення його висоти, якщо кут ромба дорівнює* $45°$*.*

Розв'язання

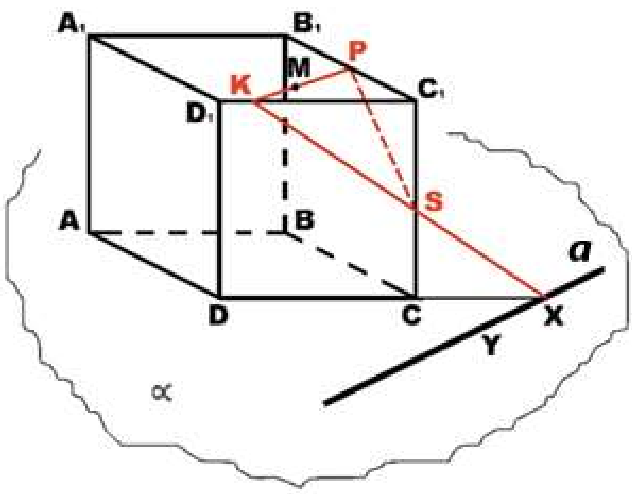
Розв'язання задачі пропонуємо здійснюючи одночасно з аналізом властивостей заданого ромба та побудовою його зображення і зображення висоти.

Аналіз умови	***Побудова зображення***
Дано ромб $ABCD$, кут $\angle A = 45°$, $BM \perp AD$, (рис. 14)	Зображенням ромба $ABCD$ буде довільно побудований паралелограм $A_1B_1C_1D_1$(рис. 15)
 **Рис. 14**	 **Рис. 15**
1-й спосіб: ΔABM – прямокутний, $cos45° = \frac{AM}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Отже, $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, оскільки $AB = AD$, то $\frac{AM}{AD} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ Точка *M* ділить сторону *AD* на відрізки у відношенні $1 : \sqrt{2}$ починаючи від вершини *A*. Це відношення збережеться для відрізків на зображенні (рис. 15). Тому побудувавши рівнобедрений прямокутний ΔABM (рис. 16), поділимо сторону A_1D_1 точкою *M* у відношенні $1 : \sqrt{2}$ (скориставшись теоремою Фалеса).	 **Рис. 16**
2-й спосіб: Виконати побудову зображення висоти ромба можна і по-іншому, якщо спочатку побудувати ромб $ABCD$ з кутом $45°$ (таку побудову учні вміють виконувати ще з курсу планіметрії). А далі діяти як і в 1-му способі.	З'єднавши точки B_1 та M_1 (рис. 15) отримаємо зображення висоти B_1M_1. Побудова завершена.

Задачі на побудову перерізів многогранників

Задача 2. *Побудуйте переріз куба площиною, заданою точкою, що належить верхній основі куба, і прямою, що лежить у площині нижньої основи куба і не перетинає його.*

Розв'язання



Нехай площиною нижньої основи куба буде площина ∝ (рис. 17). На ній будуємо зображення квадрата – паралелограм $ABCD$ (основа куба). Проводимо вертикально $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$ – бічні ребра куба. З'єднуємо точки $A_1B_1C_1D_1$ – отримуємо верхню основу куба.

Рис. 17

(рисунок відповідає всім вимогам: правильний, наочний, простий в побудові)

Нехай точка $M \epsilon (A_1B_1C_1)$, а пряма a належить площині ∝.

Через пряму a і точку *M* проходить січна площина β.

Оскільки $M \epsilon \beta$ і $M \epsilon (A_1B_1C_1)$,

то $\beta \cap (A_1B_1C_1)$ = *KP* – пряма перетину.

∝∥ $(A_1B_1C_1)$, то пряма перетину *KP* буде паралельної до прямої a.

Через точку *M* проводимо пряму $KP \parallel a$.

Проводимо пряму *DC* до перетину з прямою a, маємо точку $X = a \cap DC$.

Точка $X \in (DD_1C)$ і $K \in (DD_1C)$.

Тому пряма $KX = \beta \cap (DD_1C)$.

$KS = \beta \cap (DD_1C_1C)$.

Точки *P* і *S* належать грані BB_1C_1C.

Тому $PS = \beta \cap BB_1C_1C$.

Отримуємо ΔKPS – переріз куба з площиною β.

Задачі на обчислення

Задача 3. *Сторона ромба дорівнює 6 см, а один з кутів* $120°$*. Із точки, що ділить одну із сторін ромба у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини тупого кута, проведено перпендикуляр до площини ромба довжиною 4 см. Обчислити відстань від другого кінця перпендикуляра до більшої діагоналі ромба.*

Розв'язання

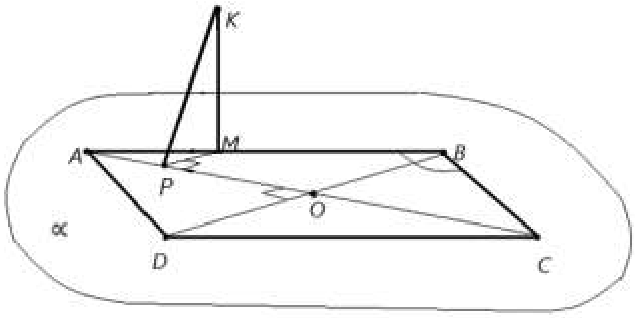


Рис. 18

Будуємо зображення ромба $ABCD$ – довільний паралелограм разом з площиною ∝, в якій він лежить (рис. 18).

На зображені $AC \perp BD$ – як діагоналі ромба $\angle B = 120°$, *AC* більша діагональ ромба.

Точкою *M* ділимо сторону ромба *AB* на відрізки *BM* і *MA*, зберігаючи відношення $BM : MA = 2 : 1$. На вертикальній прямій відкладаємо *MK* – перпендикуляр до площини ∝.

З точки *M* проводимо пряму $MP \parallel BD$. Тоді *MP*$\perp AC$.

З'єднуємо точки *K* і *P*. Похила *KP* до площини ∝ буде перпендикулярна до *AC* (теорема про три перпендикуляри).

Отже, відстанню від точки *K* до діагоналі *AC* буде довжина відрізка *KP*.

Розглянемо ΔKMP . Він прямокутний. За умовою *KM* = 4 *см*.

ΔAPM – також прямокутний, $\angle MAP = 30°$, тому $MP = \frac{1}{2}AM$.

Але за умовою *AB* = 6 *см*, тому $AM = \frac{1}{3}AB = 2$ *см*.

Тоді $MP = 1$ *см*.

З ΔKMP, за теоремою Піфагора, знаходимо довжину *KP*.

$KP = \sqrt{KM^2 + MP^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$ *см.*

Відповідь : $KP = \sqrt{17}$ *см.*

У курсі стереометрії учні вивчають такі геометричні тіла як, призма, піраміда, зрізана піраміда. Під час її вивчення доцільно познайомити учнів із правилами побудови зображень таких тіл. Зробити це можна, розглядаючи конкретні приклади, з наступним узагальненням у вигляді правила-орієнтиру.

Приклад 1. *Зображення правильної чотирикутної призми*.

Оскільки про оригінал відомо лише, що це правильна призма, то в її основі лежить квадрат, а бічні ребра перпендикулярні до основи. Тому побудову її зображення виконують наступним чином.

Будуємо зображення площини ∝ і на ній зображення квадрата $ABCD$ (елементарна побудова 2). Через вершини $A_1B_1C_1D_1$ проводимо вертикальні прямі (паралельні між собою) і на них відкладається $A_1A_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$ – бічні ребра призми. Видимі лінії на зображенні призми проводимо суцільною лінією, невидимі – штриховою. Отримуємо зображення (рис. 19) правильної чотирикутної призми.

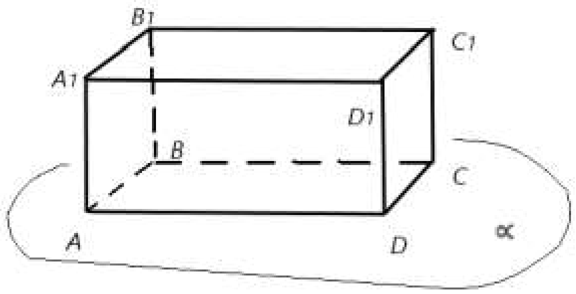


Рис. 19

Правило-орієнтир 1.
Побудова зображення призми.

1. Будується зображення нижньої основи призми з врахуванням даних про неї, які даються в умові задачі.
2. Через вершити основи призми проводяться паралельні прямі і на них відкладаються рівні між собою бічні ребра.
3. Будується верхня основа, видимі відрізки виділяються жирною суцільною лінією, невидимі штриховою.

Приклад 2. *Зображення правильної трикутної піраміди*.

Оскільки оригінал – правильна піраміда, то в її основі лежить правильний трикутник, основою висоти піраміди є точка перетину медіан трикутника.

Будуємо зображення площини ∝ і на ній довільний трикутник *ABC* – зображення правильного трикутника, точка *O* – точка перетину медіани трикутника *ABC*.

На вертикальній прямій, що проходить через точку *O*, відкладаємо вершину *S* піраміди. Будуємо бічні ребра піраміди $SA,\ SB,\ SC$. Видимі лінії на зображені піраміди виділяємо суцільною жирною лінією, а невидимі – штриховою. Отримуємо зображення (рис. 20) правильної трикутної піраміди.

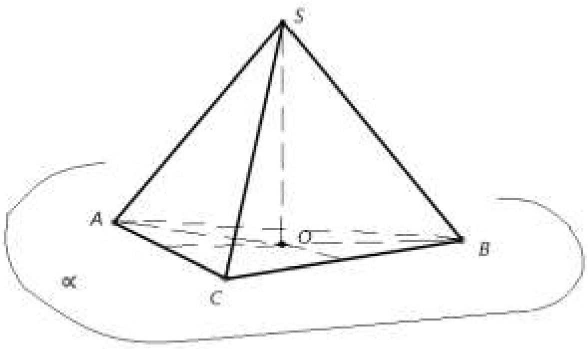


Рис. 20

Правило-орієнтир 2.
Побудова зображення піраміди.

1. Будується зображення основи піраміди і з'ясовуємо положення основи висоти піраміди.
2. Через основу висоти на вертикальній прямій відкладається точка – вершина піраміди.
3. Будуються бічні ребра піраміди. Видимі відрізки виділяються суцільною лінією, невидимі штриховою.

Приклад 3. *Зображення зрізаної чотирикутної піраміди, в основі якої лежить ромб, а бічні грані нахилені до площини основи під однаковим кутом*.

У заданої піраміди основою висоти піраміди буде точка перетину діагоналей ромба. Маючи такі дані будуємо повну піраміду (тонкими допоміжними лініями, олівцем). Далі, на бічному ребрі, вибираємо точку і будуємо переріз даної піраміди площиною, яка проходить через обрану точку на бічному ребрі паралельно до площини основи (рис. 21). Отримуємо зрізану піраміду $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

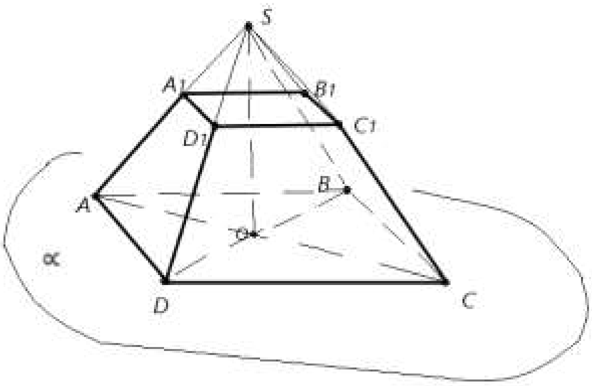


Рис. 21

Правило-орієнтир 3.
Побудова зрізаної піраміди.

1. Будується повна піраміда.
2. Будується переріз піраміди площиною, яка проходить через точку на ребрі піраміди паралельно до площини основи.
3. Видимі лінії утвореного многогранника виділяються суцільною лінією, невидимі штриховою.

3. Побудова зображень просторових фігур в задачах (на обчислення, доведення, побудову)

Сформовані вміння і навички виконувати побудову зображень геометричних фігур на площині потрібно постійно удосконалювати. Це варто робити систематично під час розв'язування задач. Учні мають запам'ятати, що розв'язання задачі починається з створення графічної моделі, яка є засобом для виконання вимоги задачі. Вимагати від них письмового пояснення ходу побудови рисунка не потрібно. Головне, щоб побудоване зображення задовольняло всім вимогам, які висуваються до ілюстративних рисунків. Проаналізуємо, в якості зразка, один з прикладів розв'язання.

Задача 4. *В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція, діагональ якої є бісектрисою гострого кута величини $\propto$. Діагональ призми дорівнює l і утворює з площиною основи кут β. Визначити об'єм призми.*

Дано : $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – пряма призма (рис. 22) ; $B_1B \perp (ABC)$; $B_1D = l$; $\angle BAD = \propto$;($\propto < 90°$) ; $\angle ADB = \angle CDB$; $\angle B_1DB = \beta$. Визначити V – об'єм призми.

Розв'язання

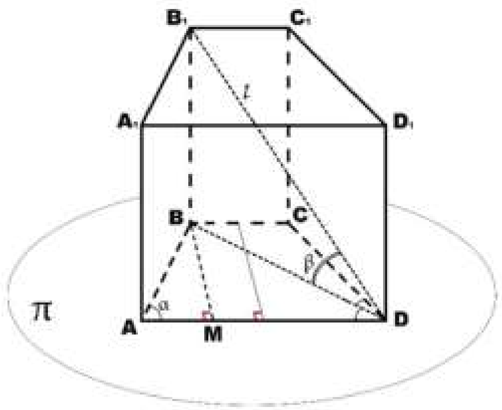


Рис. 22

На рис. 22 зображена дана в умові задачі пряма призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
Оскільки $B_1B \perp (ABC)$,
B_1D похила до площини основи,
то $\angle B_1DB$ – кут нахилу діагоналі B_1D до площини основи.
$\angle B_1DB = \beta$.

Об'єм призми знаходимо за формулою :

$$V = S_{ABCD} \cdot BB_1 \qquad (1)$$

де S_{ABCD} – площа основи, BB_1 – висота призми. З прямокутного ΔBDB_1 знаходимо: $BB_1 = B_1D \cdot sin\beta = l \cdot sin\beta$; $BD = l \cdot cos\beta$.

Отже, $$BB_1 = l \cdot sin\beta \qquad (2)$$

Площу основи S_{ABCD} знаходимо за формулою :

$$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot BM \qquad (3)$$

де BM – висота трапеції (вона побудована правильно, нема потреби це пояснювати). З прямокутного ΔBMD , де $\angle BDA = \frac{\propto}{2}$, а $BD = l \cdot cos\beta$ знаходимо висоту *BM*:

$$BM = l \cdot cos\beta \cdot sin\frac{\propto}{2} \qquad (4)$$

ΔBCD – рівнобедрений, бо $\angle CBD = \angle BDA$. Звідси слідує, що $AB = BC = CD$.

Розглянемо ΔABM. $\frac{BM}{AB} = sin\alpha$. Звідси $AB = \frac{BM}{sin\propto} = \frac{lcos\beta \cdot sin\frac{\propto}{2}}{sin\propto} = \frac{lcos\beta \cdot sin\frac{\propto}{2}}{2sin\frac{\propto}{2} \cdot cos\frac{\propto}{2}}$.

Отже, $BC = \frac{lcos\beta \cdot}{2cos\frac{\propto}{2}}$. З ΔABM маємо: $AM = AB \cdot cos \propto = \frac{lcos\beta \cdot cos\propto}{2cos\frac{\propto}{2}}$.

Тоді основа $AD = BC + 2 \cdot AM = \frac{lcos\beta}{2cos\frac{\propto}{2}} + \frac{lcos\beta \cdot cos\propto}{cos\frac{\propto}{2}}$

$$AD = \frac{lcos\beta}{cos\frac{\propto}{2}}\left(\frac{1}{2} + cos \propto\right) \qquad (6)$$

Об'єм призми знаходимо за формулою:

$$V = \frac{AD+BC}{2} \cdot BM \cdot BB_1 \qquad (7)$$

Підставляємо (2), (4), (5) і (6) в (7), маємо:

$$V = \frac{1}{2}\left(\frac{lcos\beta}{2cos\frac{\propto}{2}} + \frac{lcos\beta}{cos\frac{\propto}{2}}\left(\frac{1}{2} + cos \propto\right)\right) \cdot lcos\beta \cdot sin\frac{\propto}{2} \cdot lsin\beta$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{l^3cos^2\beta \cdot sin\beta \cdot sin\frac{\propto}{2}}{cos\frac{\propto}{2}} (1 + cos \propto)$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{l^3cos^2\beta \cdot sin\beta \cdot sin\frac{\propto}{2}}{cos\frac{\propto}{2}} \cdot 2cos^2\frac{\propto}{2}$$

$$V = l^3 \cdot cos^2\beta \cdot sin\beta \cdot sin\frac{\propto}{2} \cdot cos\frac{\propto}{2} = \frac{1}{4} \cdot l^3sin2\beta \cdot sin \propto \cdot cos\beta \text{ куб. од.}$$

Отже, $V = \frac{1}{4} \cdot l^3sin2\beta \cdot sin \propto \cdot cos\beta$.

Відповідь : $V = \frac{1}{4} \cdot l^3sin2\beta \cdot sin \propto \cdot cos\beta$ *куб. од.*

Задача 5. *У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро нахилене до площини основи під кутом* β*. Точка висоти піраміди, що знаходиться на відстані* b *від бічного ребра, рівновіддалена від кінців цього ребра. Визначити об'єм призми.*

Дано: $SABCD$ – правильна піраміда (рис. 23); $\angle SDO = \beta$; $M \epsilon SO$; $MS = MA$.

Визначити об'єм піраміди.

Розв'язання

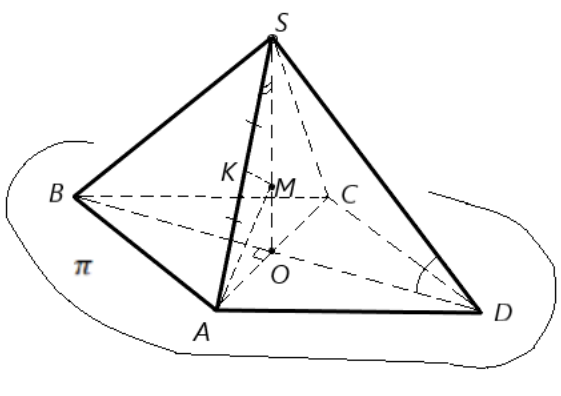


Рис. 23

На рис. 23 зображена дана в умові задачі правильна чотирикутна піраміда $SABCD$.

Оскільки $SM = MA$, то ΔSMA рівнобедрений.

Точка *К* – середина ребра SA.

Тому $MK \perp AS$. Тому відрізок $MK = b$ – відстань від точки *M* до ребра SA.

Об'єм піраміди визначаємо за формулою :

$$V_п = \frac{2}{3}AO^2 \cdot SO \qquad (1)$$

де *SO* – висота піраміди, *AB* – сторона основи. У прямокутному ΔSKM, $\angle KSM = 90° - \beta$, *МК* = *b*. Тоді $SK = KM \cdot ctg(90° - \beta)$, $SK = b \cdot tg\beta$, $SA = 2SK = 2b \cdot tg\beta$. У прямокутному ΔSOA: $\angle SAO = \beta$.

Тоді $SO = AS \cdot sin\beta = 2b \cdot tg\beta \cdot sin\beta$, а $AO = AS \cdot cos\beta = 2b \cdot tg\beta \cdot cos\beta = 2b \cdot sin\beta.$

$$SO = 2b \cdot tg\beta \cdot sin\beta \qquad (2)$$

$$AO = 2b \cdot sin\beta \qquad (3)$$

Підставимо (2) і (3) в (1). Маємо:

$$V_{\text{п}} = \frac{2}{3}(2b \cdot sin\beta)^2 \cdot 2b \cdot tg\beta \cdot sin\beta = \frac{16}{3}b^3 \cdot tg\beta \cdot sin^2\beta \text{ куб. од.}$$

Відповідь: $V_{\text{п}} = \frac{16}{3}b^3 \cdot tg\beta \cdot sin^2\beta$ *куб. од.*

П І Д С У М О К

Під час вивчення теоретичного матеріалу курсу стереометрії, доведень теорем, розв’язування задач, виникає потреба в побудові ілюстративних рисунків стереометричних фігур на площині. Для їх побудови застосовують метод паралельного проєкціювання.

Побудоване методом вільного паралельного проєкціювання зображення фігури повинно бути правильним, наочним та простим в побудові.

Формування в учнів умінь (графічної компетентності) будувати зображення фігур (ілюстративні рисунки) доцільно розпочинати з найпростіших побудов і, по мірі просування у вивченні стереометрії, удосконалювати та розвивати такі уміння під час розв’язань різного роду задач.

МЕТОДИЧНІ ЗАДАЧІ
для самостійного розв’язування

1.	Площі двох рівнобедрених трикутників відповідно дорівнюють 12 см^2 і 40 см^2. Трикутники мають спільну основу, довжина якої 10 см. Кут між площинами цих трикутників дорівнює $60°$. Знайти відстань між прямою, що містять спільну основу та прямою, яка проходить через вершини трикутників.
2.	Побудуйте переріз куба площиною, заданою прямою a і точкою *M*, яка належить одному з бічних ребер, при умові, що пряма **a** лежить у площині нижньої основи, яка її не перетинає, крім цього ця пряма не паралельна жодному з ребер основи. Точка *M* ділить ребро у відношенні 1 : 3 рахуючи від основи.
3.	В основі прямої призми лежить ромб із стороною ***a***. Діагоналі призми утворюють з площиною основи кути $\propto$ і β. Визначте об’єми призми.
4.	Правильна п’ятикутника піраміда $SABCDE$ перетинається площиною, що проходить через вершини *A* і *C* основи і середини ребер SD і SE ребро основи піраміди дорівнює a, а бічне ребро b. Визначити площу перерізу.

Знання законів перспективи є й знанням проективної геометрії, принаймні її елементарних понять. Саме тому чудовими полотнами майстрів епохи Відродження ми захоплюємо й досі

М. І. Кованцов

Л Е К Ц І Я 3.5

Т Е М А ***Побудова зображень тіл обертання на площині***

П Л А Н

1.	***Ортогональне проєкціювання і його властивості. Побудова зображення кола і його елементів. Побудова зображень циліндрів, конуса, зрізаного конуса, кулі***
2.	***Елементарні побудови зображення комбінації кола з правильними многокутниками***
3.	***Застосування ортогонального проєкціювання під час розв'язування стереометричних задач***

К О Н С П Е К Т Л Е К Ц І Ї

1. Ортогональне проєкціювання і його властивості. Побудова зображення кола і його елементів. Побудова зображень циліндрів, конуса, зрізаного конуса, кулі

На відміну від побудов зображень многогранників *(призми, паралелепіпеда, піраміди, зрізаної піраміди)*, які виконуються методом вільного паралельного проєкціювання, побудову зображень круглих тіл *(циліндра, конуса, зрізаного конуса, кулі)* в стереометрії здійснюють за допомогою ортогонального проєкціювання, яке відрізняється від паралельного тим, що проєкціюючі промені напрямлені до площини проєкцій під прямим кутом. Саме тому учнів знайомлять з ним під час вивчення теми «Перпендикулярність прямих і площин у просторі».

Учні мають знати, що ортогональне проєкціювання має ті ж самі властивості, що й паралельне, однак у нього є й свої, тільки йому притаманні. Назвемо найважливіші з них.

Властивість 1. ***Ортогональною проєкцією відрізка, який паралельний площині проєкцій, є рівний і паралельний йому відрізок. Інші відрізки мають проєкції менші за довжину оригінала.***

Доведення цієї властивості випливає з відомостей про похилу до площини і її проєкцією. Можна запропонувати учням обґрунтувати властивість самостійно. Важливою є також наступна властивість.

Властивість 2. ***Довжина ортогональної проєкції відрізка, який нахилений до площини проєкцій під кутом $\propto$, дорівнює добутку довжини оригінала і $\cos \propto$.***

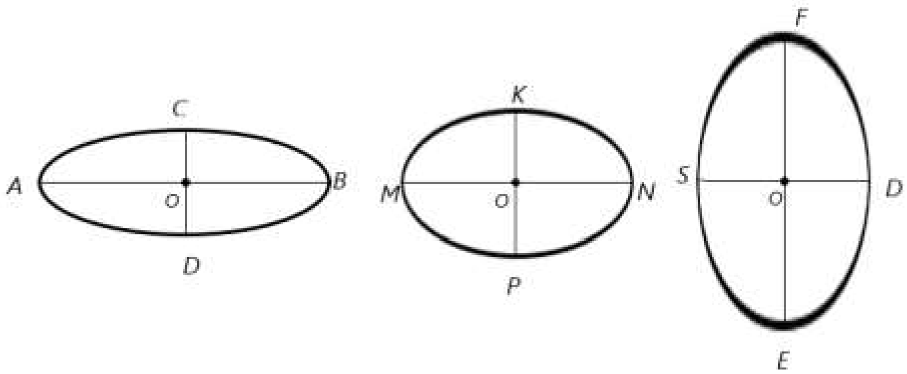
Її обґрунтування учні здатні здійснити також самостійно. Названими властивостями слід скористатися під час ознайомлення учнів з побудовою ортогональної проєкції кола.

Властивість 3. ***Ортогональною проєкцією кола є еліпс.***

Що за фігура еліпс і які її властивості учні не знають. Тому доцільно скористатися або комп'ютерною презентацією або реальною демонстрацією: включити джерело світла, що випромінює пучок паралельних променів, які подають на екран і на їх шляху помістити каркасну модель кола. Змінюючи положення площини, в якій лежить коло, отримують його проєкцію – еліпс.

В учнів сформується уявлення еліпса як геометричної фігури (рис. 1 *а), б), в)*).

Цього достатньо, щоб використовувати її в наступних побудовах.



а) ***б)*** ***в)***

Рис. 1

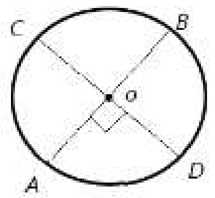
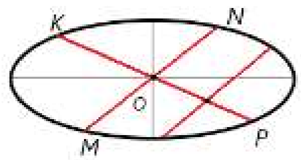
Далі потрібно ознайомити учнів з елементами цієї фігури: великою віссю, малою віссю, центром.

На рис. 1: *AB*, *MN*, *FE* – великі осі еліпсів; *CD*, *KP*, *SD* – малі осі; точка *O* – центр.

Необхідно також повідомити учням що при ортогональному проєкціюванні велика вісь еліпса будується горизонтально і дорівнює діаметру кола-оригінала, а мала – вертикально і дорівнює добутку діаметра на $\cos \propto$, де $\propto$ – кут, який творить площина, в якій лежить коло-оригінал, з площиною проєкцій *(запропонувати учням обґрунтувати це самостійно)*.

Учні вміють будувати коло за допомогою циркуля. Для побудови еліпса вони мають користуватися набором шаблонів *(люмогрофом)*. У багатьох шаблонах мала вісь еліпса вдвічі менша за велику. Це означає, що кут між площиною, в якій лежить коло-оригінал і площиною проєкцій дорівнює $60°$. Можливе й інше співвідношення. Воно вказує на обставину, що ортогональне проєкціювання здійснювалося з врахуванням кута нахилу і ***не є вільним***. А тому при побудовах інших зображень це потрібно обов’язково враховувати. Після ознайомлення учнів з еліпсом і його побудовою доцільно навчити їх будувати зображення круглих тіл, які вивчаються в курсі стереометрії.

Побудова 1. *Побудова спряжених діаметрів еліпса.*

Оригінал	***Зображення кола і зображення спряжених діаметрів***
Коло	**Еліпс**
 **Рис. 2**	 **Рис. 3**
Дано: коло, $AB \perp CD$ (рис. 2), AB і *CD* – спряжені діаметри. Побудувати їх зображення.	Алгоритм побудови (рис. 3): 1) за допомогою шаблона побудувати еліпс. Велика вісь – горизонтально, мала вісь – вертикально; 2) побудувати довільний діаметр *MN* і довільну паралельну йому хорду; 3) через центр еліпса і середину хорди провести спряжений діаметр *KP*.

Побудова 2. *Побудова зображення циліндра та його осьового перерізу.*

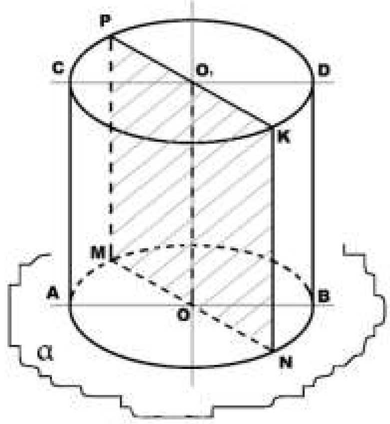


Рис. 4

Алгоритм побудови (рис. 4) :

1) на вертикальній прямій відкласти висоту циліндра OO_1;
2) за допомогою шаблона побудувати два рівних еліпса, які суміщуються паралельним переміщенням на вектор OO_1. Великі вісі еліпса *AB* і *CD* розмістити горизонтально;
3) побудувати контурні твірні *AB* і *CD* (твірні, які відтіняють видиму частину циліндра від невидимої);
4) зобразити площину $\propto$, в якій лежить нижня основа циліндра;
5) видимі лінії провести жирною суцільною; невидимі – штриховою лініями; допоміжні, які проводяться олівцем – можна не прибирати.

Часто в задачах необхідно будувати осьовий переріз циліндра. Для цього проводять два діаметри $MN \parallel KP$ і дві твірні $MP \parallel MN$. Прямокутник *MNKP* – осьовий переріз, прямого кругового циліндра. Ілюстративний рисунок циліндра правильний, наочний і простий в побудові.

Побудова 3*. Побудова зображення конуса та його осьового перерізу.*

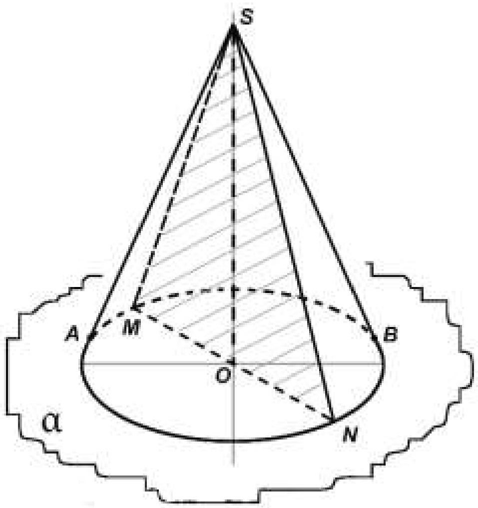


Рис. 5

Алгоритм побудови (рис. 5):

1) побудувати за допомогою шаблона еліпс. Велика вісь – горизонтально, мала вісь – вертикально. Зобразити площину ∝, в якій лежить основа конуса;
2) на продовженні малої осі відкласти точку *S* – вершину конуса. *SO* – висота конуса;
3) за допомогою лінійки через точку *S* провести дві дотичні до еліпса *SA* і *SB* (точки *A* і *B* не будуть кінцями великої осі) *SA* і *SB* – контурні твірні конуса;
4) видимі лінії провести жирною суцільною, невидимі – штриховою лініями.

Ілюстративний рисунок конуса правильний, наочний і простий в побудові. Для побудови осьового перерізу конуса проводять діаметр *MN* і дві твірні *SM* і *SN.* Рівнобедрений ΔSMN – осьовий переріз прямого кругового конуса.

Побудова 4*. Побудова зображення зрізаного конуса і його осьового перерізу.*

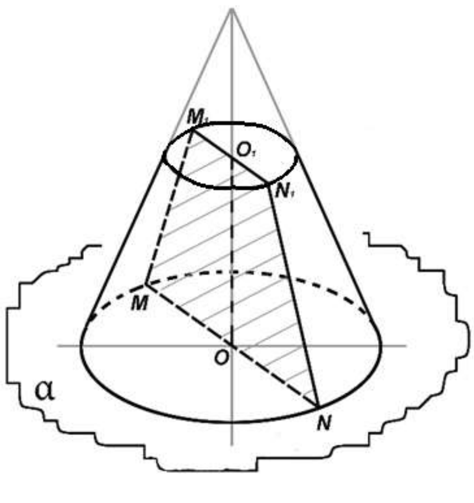


Рис. 6

Алгоритм побудови (рис. 6):

1) побудувати повний конус;
2) за допомогою шаблона побудувати подібний менший еліпс (верхню основу зрізаного конуса) так, щоб він дотикався до контурних твірних;
3) видимі лінії провести жирною суцільною, невидимі – штриховою лініями.

Чотирикутник MM_1N_1N – осьовий переріз зрізаного конуса.

Побудова 5. *Побудова зображення кулі.*

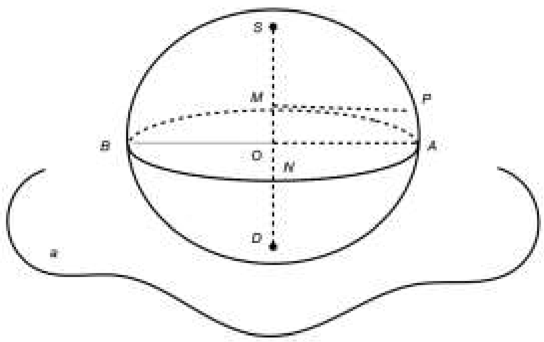


Рис. 7

Алгоритм побудови (рис. 7) :

1) побудувати за допомогою шаблона еліпс. Велика вісь *AB* горизонтально, мала вісь *MN* вертикально;
2) радіусом *OA* з центра *O* провести коло – контур кулі.
3) побудувати відрізок $MP \parallel AB$ (до перетину з контуром кулі);
3) від центра еліпса на продовженні малої осі відкласти $OS = OD = MP$. Точки *S* і *D* відповідно верхній і нижній полюси кулі;
4) видимі лінії провести жирною суцільною, невидимі – штриховою лініями.

На рисунку еліпс – коло великого радіуса, яке утвориться від перетину кулі площиною, що проходить через центр *O* паралельно до площини ∝.

Після ознайомлення учнів з названими побудовами 1-5, корисно запропонувати їм виконати графічну роботу, щоб відбулося засвоєння вивчених алгоритмів.

Здійснити перевірку робіт, оцінити та переконатись, що побудовані рисунки задовольняють вимоги до ілюстративних рисунків.

***) завдання 1.**

Обґрунтуйте, чому на рис. 7 $\boldsymbol{MP = OS = OD}$.

Розв’язати самостійно.

2. Елементарні побудови зображення комбінації кола з правильними многокутниками

Часто, під час розв’язування задач, доводиться будувати зображення кола з вписаним чи описаним правильним трикутником, з вписаним чи описаним квадратом.

Такі побудови ми називаємо елементарними.

Учнів потрібно навчити їх виконувати.

Побудова 6. *Побудова зображення правильного трикутника з вписаним в нього колом.*

Оригінал

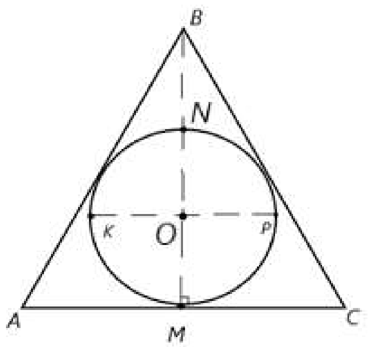


Рис. 8

Дано:

ΔABC – правильний (рис. 8);
точка *O* – центр вписаного кола;
BM – висота;
MN – діаметр кола;
KP – спряжений діаметр.

Інваріанти:

а) $BN = MO$;
б) $KP \parallel AC$.

Їх слід врахувати під час побудови даної комбінації.

Зображення правильного трикутника з вписаними в нього колом

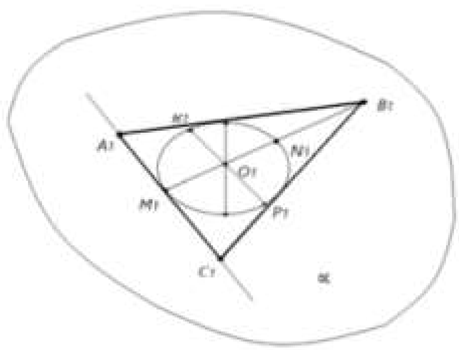


Рис. 9

лгоритм побудови (рис. 9):

1) побудувати еліпс з діаметром M_1N_1 і спряженим йому діаметром K_1P_1;
2) на продовженні діаметра M_1N_1 відкласти $N_1B_1 = O_1N_1$;
3) через точку M_1 провести пряму A_1C_1 паралельну діаметру K_1P_1;
4) через точку B_1 за допомогою лінійки провести дотичні до еліпса B_1A_1 і B_1C_1.
5) виділити жирною суцільною лінією $\Delta A_1B_1C_1$, еліпс.

Побудова 7. *Побудова зображення правильного трикутника, вписаного в коло.*

Оригінал

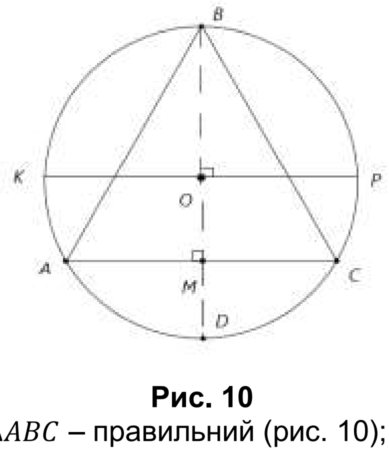


Рис. 10

Дано: ΔABC – правильний (рис. 10);
$BM \perp AC$; точка *O* – центр вписаного кола;
BM – висота; KP – спряжений діаметр.
Інваріанти: а) $KP \parallel AC$;б) $OM = MD$.
Їх слід врахувати під час побудови даної комбінації.

Зображення правильного трикутника, вписаного в коло

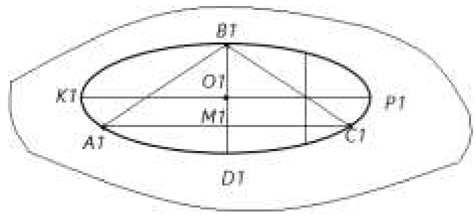


Рис. 11

Алгоритм побудови (рис. 11) :

1) побудувати еліпс з діаметром B_1D_1 і спряженим йому діаметром K_1P_1 (велика вісь еліпса проводиться – горизонтально, а мала – вертикально);
2) через точку M_1 середину відрізка O_1D_1 провести пряму $A_1C_1 = K_1P_1$;
3) з'єднати послідовно точки A_1, B_1, C_1 .
Виділити жирною суцільною лінією $\Delta A_1B_1C_1$ і еліпс.

Побудова 8. *Побудова зображення кола: а) вписаного в квадрат;*
б) описаного навколо квадрата.
(опишіть самостійно, з виділення обох алгоритмів)

Після ознайомлення учнів з вивченими алгоритмами корисно запропонувати їм виконати графічну роботу, з наступною перевіркою та виправленням помилок і недоліків.

3. Застосування ортогонального проєкціювання під час розв'язування стереометричних задач

Отримані знання про ортогональне проєкціювання учні повинні навчитись використовувати під час розв'язання різного роду стереометричних задач. Розглянемо деякі з них, та слушні практичні поради, яких варто дотримуватись.

Задача 1. *У циліндрі, паралельно його осі, проведено площину. Вона перетинає основу по хорді, які видно із центра цієї основи під кутом* $\propto$*. Діагональ утвореного перерізу дорівнює b і нахилена до основи під кутом* β*. Визначити об'єм циліндра.*

***) коментар до побудови рисунка.** Оскільки оригінал строго не визначений, то будуємо зображення довільного циліндра і переріз $ABCD$ площиною, паралельною до осі OO_1. У перерізі буде прямокутник, де $AB \parallel OO_1$. Основа циліндра лежить в площині π. Циліндр прямий круговий, тому $AB \perp \pi$. Такий коментар записувати в розв'язанні не потрібно. Він продумується усно, щоб правильно побудувати ілюстративний рисунок до задачі. Допоміжні побудови, зроблені олівцем тонкими лініями можна залишати.

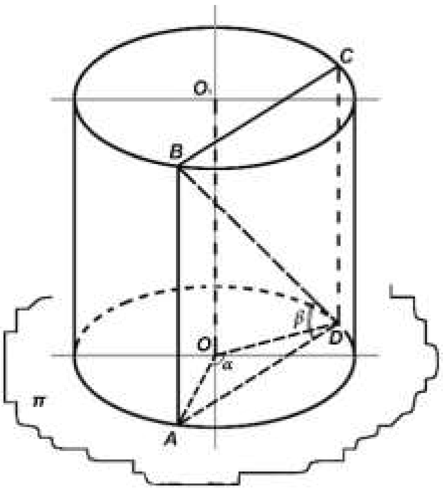


Рис. 12

Розв'язання

На рис. 12 зображено циліндр з перерізом площиною $(ABC) \parallel OO_1$, де OO_1 – вісь циліндра. Основа циліндра лежить в площині π. За умовою $OO_1 \perp \pi$.

AB – твірна циліндра. Тому $AB \perp \pi$. Чотирикутник *ABCD* – прямокутник.

Відрізок *BD* – його діагональ і одночасно похила до площини π.

Відрізок *AD* – проекція похилої *BD* на площину π.

Тому $\angle BDA$ – кут нахилу діагоналі *BD* до площини основи.

За умовою $\angle BDA = \beta$. *BD = b. AD – хорда, а* $\angle AOD$ – кут, під яким її видно із точки *O* – центра основи. $\angle AOD = \propto$. *AO* – радіус основи циліндра, *AB* – його висота. Об'єм циліндра визначаємо за формулою:

$$V_{ц} = \pi \cdot AO^2 \cdot AB \qquad (1)$$

де $V_{ц}$ – об'єм циліндра.

З прямокутного ΔBAD знаходимо *AB* і *AD* : $AB = BD \cdot sin\beta = b \cdot sin\beta$, $AD = BD \cdot cos\beta = b \cdot cos\beta$. Отже,

$$AB = b \cdot sin\beta \qquad (2)$$

З рівнобедреного ΔAOD, за теоремою косинусів, маємо:

$AD^2 = AO^2 + OD^2 - 2 \cdot AO \cdot OD \cdot cos\angle AOD.$ Нехай $AO = r$. Тоді отримуємо:

$AD^2 = 2r^2 - 2r^2 \cdot cos \propto$. Звідки знаходимо, що $r^2 = \frac{AD^2}{2(1-cos\propto)} = \frac{b^2cos^2\beta}{2(1-cos\propto)} = \frac{b^2cos^2\beta}{4sin^2\frac{\propto}{2}}$.

Отже, $$AO^2 = \frac{b^2cos^2\beta}{4sin^2\frac{\propto}{2}} \qquad (3)$$

Підставимо (2) і (3) в (1) та отримуємо: $V_{ц} = \frac{\pi \cdot b^3 \cdot cos^2\beta \cdot \sin\beta}{4sin^2\frac{\propto}{2}}$ *(куб.од.)*

Відповідь : $V_{ц} = \frac{\pi \cdot b^3 \cdot cos^2\beta \cdot \sin\beta}{4sin^2\frac{\propto}{2}}$ *(куб.од.).*

Задача 2. *Кут при вершині осьового перерізу конуса дорівнює* 2β. *Периметр осьового перерізу* $2p$. *Визначити висоту конуса.*

***) коментар до побудови рисунка.** Дотримуючись принципів побудови ілюстративного рисунка, будуємо зображення конуса з осьовим перерізом. Важливо, щоб побудований рисунок був правильним і наочним, основа такого конуса лежить в площині $\propto$.

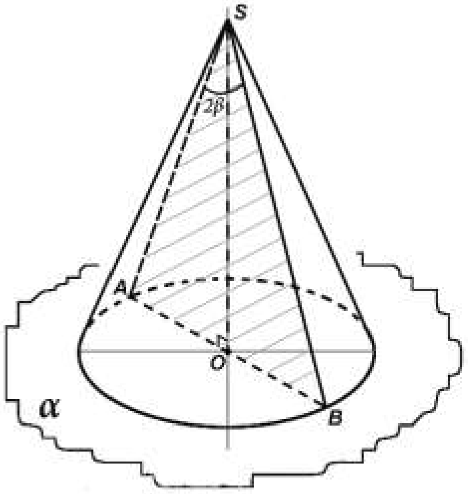


Рис. 13

Розв’язання

На рис. 13 зображено конус, з осьовим перерізом рівнобедреним ΔASB ($AS = SB$). За умовою його периметр дорівнює $2p$, а $\angle ASB = 2\beta$. SO – висота конуса, а заодно і медіана ΔASB. Нехай $AO = r$, $\angle ASO = \beta$.

Тоді з прямокутного ΔAOS маємо : $\frac{AO}{AS} = sin\beta$. Звідки $AS = \frac{r}{sin\beta}$.

Оскільки $AO + AS = P$ (половина периметра ΔASB), то маємо рівність: $r + \frac{r}{sin\beta} = p$.

Звідки $r = \frac{p \cdot sin\beta}{1+sin\beta}$. У ΔAOS $\frac{SO}{AO} = ctg\beta$.

Тоді $SO = AO \cdot ctg\beta$, тобто $SO = r \cdot ctg\beta = \frac{p \cdot sin\beta}{1+sin\beta} \cdot ctg\beta$. Отже, $SO = \frac{pcos\beta}{1+ctg\beta}$.

Відповідь : $SO = \frac{pcos\beta}{1+ctg\beta}$ (лін. од.).

Задача 3. *У зрізаному конусі відношення площ основ якого дорівнює 4, твірна, довжиною 4 см, нахилена до площини основи під кутом* $30°$. *Обчислити об’єм цього конуса.*

***) коментар до побудови рисунка.** За умовою задачі, площі основ конуса відносяться як 4 : 1. Тоді радіуси основ відноситимуться як 2 : 1, тобто $R : r = 2:1$, де *R* – радіус нижньої основи, *r* – радіус верхньої основи. Якщо будувати зображення такого конуса, то ця обставина має бути врахована. Це робить побудову не простою, бо доведеться добирати відповідні шаблони, в яких таке відношення може й не зберігатись. В такому разі, можна відмовитися від побудови рисунка, а скористатись іншим засобом – осьовим перерізом зрізаного кола. Це буде планіметричний рисунок, на якому зображено рівнобічну трапецію з гострим кутом $30°$ і бічною стороною, рівною 4 см. Цим засобом і слід скористатись для розв’язання задачі.

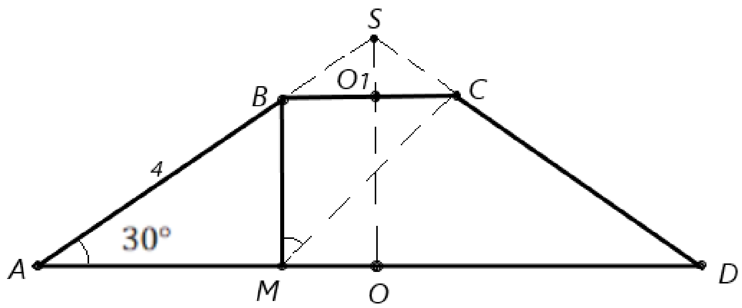


Рис. 14

Розв'язання

На рис. 14 зображено чотирикутник $ABCD$ – осьовий переріз даного в умові задачі зрізаного конуса. $ABCD$ – рівнобічна трапеція. OO_1 – висота конуса. BO_1 – радіус верхньої основи, *AO* – радіус нижньої основи конуса. Тоді площа верхньої основи $S_1 = \pi BO_1^2$, а площа нижньої основи $S_2 = \pi AO^2$,

За умовою: $\frac{S_2}{S_1} = \frac{\pi AO^2}{\pi BO_1^2} = \frac{AO^2}{BO_1^2} = 4.$ Звідси : $\frac{AO}{BO_1} = 2.$

Нехай $BO_1 = r$, тоді $AO \quad = 2r$.

Відрізок *AB* – твірна конуса, а $\angle BAO$ – кут, під яким вона нахилена до площини основи конуса. Тому, за умовою $\angle BAO = 30°$, *AB* = 4 *см*.

Проведемо $BM \perp AO$. ΔAMB – прямокутний. $BM = \frac{1}{2}AB$, *BM* = 2 *см*.

Об'єм зрізаного конуса $V_к$ знаходимо за формулою: $V_к = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + R^2 + R_r)$, де R і r відповідно радіуси нижньої і верхньої основ, h – висота конуса.

Отже, $h = BM = 2$ *см*, $R = 2r$. Тоді маємо: $V_к = \frac{1}{3}\pi \cdot 2(r^2 + 4r^2 + 2r^2)$, тобто

$$V_к = \frac{\pi}{3} \cdot 14 \cdot r^2 \qquad (1)$$

Продовжимо бічні сторони *AB* і *CD* до перетину. Точка *S* – точка перетину.

$\Delta BO_1S \sim \Delta AOS$. Тоді $\frac{AS}{BS} = \frac{AO}{BO} = 2$. Отже, $\frac{AS}{SB} = 2$. Віднімемо від обох частин рівності одиницю. Маємо: $\frac{AS}{SB} - 1 = 1$. Звідки $\frac{AS-SB}{SB} = 1$. $\frac{AB}{SB} = 1$. Отже $SB = AB = 4$ *(см).*

З ΔSO_1B маємо : $BO_1 = BS \cdot cos30° = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ *(см).*

Так як $BO_1 = r$, то отримуємо, що

$$r = 2\sqrt{3} \qquad (2)$$

Підставимо (2) в (1) і маємо:

$$V_к = \frac{\pi}{3} \cdot 14 \cdot (2\sqrt{3})^2 = \frac{\pi}{3} \cdot 14 \cdot 4 \cdot 3 = 56\pi \text{ (см)}^3.$$

Відповідь : $V_к = 56\pi \text{ (см)}^3$.

Задача 4. *У правильній трикутній піраміді апофема дорівнює m, а плоский кут при вершині – β. Визначити об’єм конуса, вписаного в піраміду.*

***) коментар до побудови рисунка.** За умовою задачі дано комбінацію правильної піраміди з вписаним в неї конусом. Отже, в основі такої комбінації лежить правильний трикутник, з вписаним в нього колом. Алгоритм такої побудови відомий. З неї і потрібно почати побудову ілюстративного рисунка. Потім, на продовженні вертикальної осі еліпса відкласти точку S – спільну вершину конуса і піраміди та провести контурні твірні конуса і бічні ребра піраміди. Оскільки розглядаємо дві фігури одночасно, то кожну рисують як самостійною, але різними кольорами (наприклад піраміду олівцем, а конус кульковою ручкою). Можуть бути і фломастери і т. п.

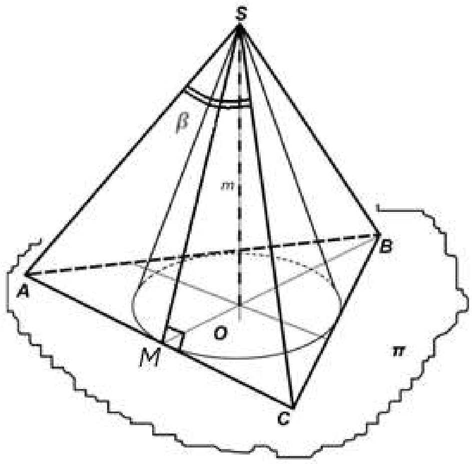


Рис. 15

Розв’язання

На рис. 15 зображено дану в умові задачі піраміду з вписаним в неї конусом. SM – апофема, $SM = m$. $\angle ASC = \beta$. Об’єм конуса знаходимо за формулою :

$$V_к = \frac{1}{3}\pi \cdot OM^2 \cdot SO \qquad (1)$$

де OM – радіус основи, SO – висота конуса. Розглянемо прямокутний ΔSMA. $\frac{AM}{SM} = tg\frac{\beta}{2}$; $AM = m \cdot tg\frac{\beta}{2}$. $AC = 2AM = 2m \cdot tg\frac{\beta}{2}$. Тоді, $OM = \frac{AC\sqrt{3}}{6}$. $OM = \frac{\sqrt{3}mtg\frac{\beta}{2}}{3}$.

З прямокутного ΔSOM маємо:

$$SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = \sqrt{m^2 - \frac{m^2 tg^2\frac{\beta}{2}}{3}} = m\sqrt{1 - \frac{1}{3}tg^2\frac{\beta}{2}} \qquad (2)$$

Отже, $$SO = m\sqrt{1 - \frac{1}{3}tg^2\frac{\beta}{2}} \qquad (3)$$

Підставимо (2) і (3) в (1), отримаємо:

$$V_к = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}mtg\frac{\beta}{2}}{3}\right)^2 \cdot m\sqrt{1 - \frac{1}{3}tg^2\frac{\beta}{2}} = \frac{\sqrt{3}\pi m^3}{27}tg^2\frac{\beta}{2} \cdot \sqrt{3 - tg^2\frac{\beta}{2}}\ .$$

Відповідь : $V_к = \frac{\sqrt{3}\pi}{27}m^3 tg^2\frac{\beta}{2} \cdot \sqrt{1 - tg^2\frac{\beta}{2}}$ *куб. од.*

Задача 5. *Прямокутний трикутній з катетом* a *і прилеглим до нього кутом* $60°$ *обертається навколо осі, що містить гіпотенузу. Знайти площу поверхні тіла обертання.*

***) коментар до побудови рисунка.** Для розв'язання задачі, можна скористатись або рис.16 *а*), або рис.16 *б*). На рис.16 *а*) зображено прямокутний трикутник *ABC*, що демонструє як утвориться тіло обертання. Воно буде об'єднанням двох конусів з спільною основою. На рис.16 *б*) зображення тіла обертання. Зупинимося на розв'язані задачі за рис.16 *а*) і на його оформленні.

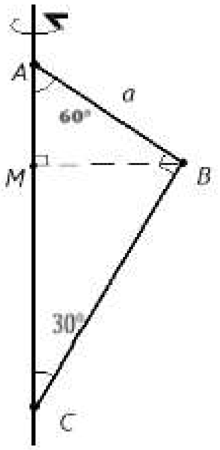


Рис. 16 *а)*

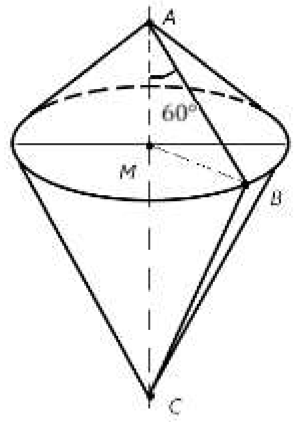


Рис. 16 *б)*

Розв'язання

На рис. 16 *а*) зображено прямокутний Δ*ABC* ($\angle B = 90°$), $AB = a$, $\angle BAC = 60°$. Обертаючись навколо гіпотенузи *AC* він утворить тіло, яке є об'єднанням двох конусів, з спільною основою. Радіусом основи буде відрізок $BM \perp AC$. Об'єм тіла обертання знаходимо як суму об'ємів обох конусів. У одному з них висотою буде відрізок *AM*, а в другому відрізок *MC*. Тому об'єм тіла обертання $V_{\text{т.о.}}$ заходимо за формулою: $V_{\text{т.о.}} = \frac{1}{3}\pi \cdot MB^2 \cdot MA + \frac{1}{3}\pi \cdot MB^2 \cdot MC$ або

$$V_{\text{т.о.}} = \frac{1}{3}\pi \cdot MB^2 \cdot AC \qquad (1)$$

З ΔABC ($\angle C = 30°$) знаходимо $AC = 2AB = 2a$

$$AC = 2a \qquad (2)$$

З ΔAMB знаходимо $MB = AB \cdot sin60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$MB = \frac{a\sqrt{3}}{2} \qquad (3)$$

Підставимо (2) і (3) в (1) , отримаємо: $V_{\text{т.о.}} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot 2a = \frac{1}{2}\pi \cdot a^3$ *куб. од.*

Відповідь: $V_{\text{т.о.}} = \frac{1}{2}\pi \cdot a^3$ *куб. од.*

П І Д С У М О К

Дієвим заходом формування в учнів, під час вивчення стереометрії, просторової уяви та просторових уявлень, їх графічної компетентності, є побудова зображень геометричних фігур на площині – **ілюстративних рисунків**. Вона здійснюється методом вільного паралельного проєкціювання, коли будуються зображення многогранників та ортогонального проєкціювання, коли будуються зображення круглих тіл.

Ілюстративні рисунки, як атрибут розв'язання задач та доведень теорем, мають задовольняти вимогам: бути правильними, наочними та простими в побудові.

Формування графічної компетентності учнів має розпочинатись з перших уроків стереометрії, з наступним вивченням теоретичних основ – властивостей паралельного та ортогонального проєкціювання та систематичних їх застосувань під час вивчення інших тем курсу стереометрії.

МЕТОДИЧНІ ЗАДАЧІ
для самостійного розв'язування

1. Запропонуйте алгоритм побудови кола:
   а) з вписаним в нього правильним: п'ятикутником, шестикутником;
   б) з описаним навколо нього правильним: п'ятикутником, шестикутником.

---

2. З'ясуйте, як зміниться алгоритм побудови кола з вписаним / описаним навколо нього правильним трикутником, якщо трикутник буде:
   рівнобедреним, прямокутним.

---

3. Задачі на побудову ілюстративних рисунків:
   1) зобразити правильну трикутнику піраміду, вписану в кулю;
   2) зобразити правильну трикутнику піраміду, вписану в конус;
   3) зобразити правильну чотирикутну призму, описану навколо циліндра;
   4) зобразити правильну шестикутну призму, вписану в циліндр;
   5) зобразити правильну чотирикутну піраміду, вписану в кулю;
   6) зобразити правильну трикутнику піраміду, описану навколо кулі;
   7) зобразити правильну чотирикутну призму, описану навколо кулі;
   8) зобразити правильну трикутнику призму, вписану в кулю;
   9) зобразити правильну чотирикутну піраміду, вписану в кулю;
   10) зобразити правильну чотирикутну піраміду, вписану в конус;
   11) зобразити правильну шестикутну піраміду, вписану в кулю;
   12) зобразити правильну п'ятикутну призму, описану навколо циліндра;
   13) зобразити правильну шестикутну піраміду, вписану в кулю;
   14) зобразити правильну п'ятикутну призму, описану навколо кулі.

Геометрія – це застосування строгої логіки до самоочевидних і, отже, безперечних властивостей простору і числа

О. Де Морган

Л Е К Ц І Я 3.6

Т Е М А ***Координати і вектори та їх застосування до розв'язування задач***

П Л А Н

1.	***Місце теми в навчальній програмі, зміст навчального матеріалу, основна мета вивчення, вимоги до математичної підготовки учнів, орієнтовне планування навчального процесу***
2.	***Прямокутна декартова система координат. Основні задачі на координати і їх розв'язування***
3.	***Застосування методу координат до розв'язування задач***
4.	***Поняття вектора. Вектори в координатному простору. Основні задачі на вектори і їх розв'язування***
5.	***Застосування векторів до розв'язування задач***

К О Н С П Е К Т Л Е К Ц І Ї

1. Місце теми в навчальній програмі, зміст навчального матеріалу, основна мета вивчення, вимоги до математичної підготовки учнів, орієнтовне планування навчального процесу

За навчальною програмою з математики для шкіл, класів де цей предмет вивчається на профільному чи поглибленому рівнях [5, 6], тема «Координати та вектори» вивчається в 11 класі. Це перша навчальна тема, згідно вказаних програм, на її вивчення відводиться 32 години. Зміст навчального матеріалу, вимоги до підготовки учнів подано в таблиці 1.

Таблиця 1

Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення учнів
Тема 5. Координати та вектори у просторі (32 год). Прямокутна система координат у просторі. Відстань між точками. Координати середини відрізка. Поділ відрізка у даному відношенні. Вектори у просторі. Рівність векторів. Коленіарність векторів. Компланарність векторів. Операції над векторами (та їх властивості: додавання і віднімання векторів, множення вектора на число, скалярний добуток векторів). Розкладання вектора за трьома некомпланарними векторами. Кут між векторами. Рівняння площини, сфери. Застосування методу координат та векторів до розв'язування геометричних задач.	*Користується* аналогією між векторами на площині та у просторі. *Будує* точки і вектори у просторовій прямокутній системі координат за їх координатами. *Записує* формули відстані між точками, координат середини відрізка, скалярного добутку. *Знаходить* суму і різницю векторів, добуток вектора на число, скалярний добуток векторів, кут між векторами у випадках, коли вектори задані геометрично або координатами. *Розпізнає* рівняння площини і сфери. *Застосовує* координати, вектори для розв'язування геометричних задач.

Основна мета вивчення: *узагальнити та систематизувати відомості про координати і вектори в просторі, їх застосування до розв'язування задач*.

За обсягом навчального матеріалу, часу на вивчення дана тема відносно велика, чим зумовлені певні труднощі вивчення учнями. Тому її, з дидактичних міркувань, доцільно розділити на дві самостійні, логічно завершені підтеми:

Підтема 5.1. «*Координати в просторі і їх застосування до розв'язування задач*» (12 год).

Підтема 5.2. «*Вектори в просторі і їх застосування до розв'язування задач*» (20 год).

Розглянемо методику вивчення кожної з названих підтем.

ПІДТЕМА 5.1
«КООРДИНАТИ В ПРОСТОРІ І ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ»

1. Орієнтовне планування її вивчення подано в таблиці 2.

Таблиця 2

№ п/п	Тема заняття, вид роботи	К-ть годин	Примітки
1	Поняття про систему координат. Приклади. Прямокутна декартова система координат в просторі і її зв'язки з прямокутною декартовою системою координат на площині	2	
2	Основні задачі на координати і їх розв'язування. Рівняння сфери. Розв'язування задач на відстань між точками, на координати середини відрізка, на поділ відрізка в заданому відношенні СР-1	3	
3	Координатний метод розв'язування геометричних задач і його суть. Довідник з перекладу звичайної геометричної мови на мову координат і його використання	2	
4	Розв'язування геометричних та прикладних задач координатним методом СР-2	3	
5	Контрольна робота № 1	1	
6	Аналіз контрольної роботи, корекція знань, підсумкова атестація	1	
	Разом:	12	

2. Основна мета вивчення:

- ***сформувати*** *в учнів систематизовані знання про прямокутну декартову систему координат в просторі*;
- ***ознайомити*** *з основними задачами на координати і їх розв'язанням*;
- ***навчити*** *застосовувати координати як метод до розв'язування стереометричних задач*.

3. Навчальні досягнення учнів. Вивчивши підтему учень/учениця:

- користується аналогією між координатами на площині та в просторі;
- будує точки в просторовій системі координат за їх координатами;
- знає формули: відстані між точками; координат середини відрізка; координат точки, що ділить даний відрізок у заданому відношенні; координат точки перетину медіан трикутника;
- знає рівняння сфери;
- застосовує координати до розв'язування геометричних та прикладних задач.

2. Прямокутна декартова система координат. Основні задачі на координати і їх розв'язання

Ознайомлення учнів з прямокутною декартовою системою координат пропонуємо провести у формі шкільної лекції, орієнтований зміст якої подано нижче.

Тема лекції «Координати в просторі»

Ідея описувати положення об'єкта на площині чи в просторі зародилася в людей давно. Так, наприклад, мореплавці, географи положення корабля в морі чи населеного пункту на суші описували за допомогою широти та довготи. Схоже поступали і древні астрономи, коли описували положення світил на небесній сфері. Глядач, який прийшов на перегляд фільму в кінотеатрі, безпомилково знаходить своє місце в залі, знаючи ряд і місце в ряду, що вказані в білеті. Всі названі приклади пов'язані між собою одним поняттям, яке називають системою координат.

У математиці ***системою координат*** називають сукупність умов, за допомогою яких визначається положення точки на прямій лінії, на площині, в просторі чи на певній поверхні». Ідея використання системи координат в математиці з'явилася вперше в працях двох французьких математиків *П'єра Ферма* (1601-1665) і *Рене Декарта* (1596-1650).

П'єр Ферма

Рене Декарт

Першим оприлюднив її Декарт, у книзі «Геометрія», яка вийшла в 1637 році. Свою працю Ферма написав в той же самий час, але вона побачила світ лише в 1679 році. Зрозуміло, що з часом запропонована тоді вченими система координат уточнювалася, удосконалювалася і на сьогодні вона, для різних геометричних фігур, *включає*:

а) ***Система координат на прямій*** – система таких умов:

1) один з двох напрямів на прямій *AB* вибирається за додатний і позначається стрілкою (рис. 1);

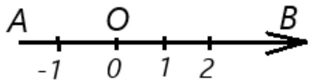


Рис. 1

2) одна з точок цієї прямої обирається за початок відліку (координат);

3) визначається відрізок прямої і вважається одиницею довжини або масштабною одиницею, з допомогою якої вимірюються довжини відрізків на прямій *AB*.

З такою системою координат учні знайомляться на уроках математики ще в 5-6 класах, *а пряму AB називають координатною прямою або координатною віссю*.

б) ***Прямокутна декартова система координат на площині*** – система умов :

1) складається з двох взаємно перпендикулярних осей *OX* (вісь абсцис) і *OУ* (вісь ординат) (рис. 2);

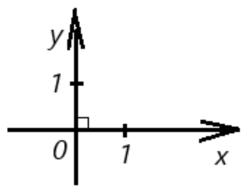


Рис. 2

2) осі *OX* і *OУ* мають однакову масштабну одиницю;

3) точка *O* перетину осей *OX* і *OУ* є початком відліку (координат системи).

Таку систему координат учні вивчають на уроках математики ще в 7-9 класах, *а площину, на якій вона задана називають координатною площиною*.

в) ***Прямокутна декартова система координат у просторі*** – система умов :

1) складається з трьох взаємно перпендикулярних осей (рис. 3); вісь *OX* (вісь абсцис); вісь *OУ* (вісь ординат), вісь *OZ* (вісь аплікат);

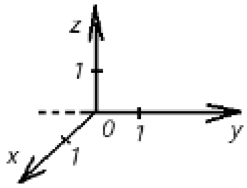


Рис. 3

2) осі *OX* , *OY*, *OZ* мають однакові масштабні одиниці;

3) точка *O* перетину осей осі *OX* , *OY*, *OZ* є початком відліку (координат системи).

З такою системою координат учні знайомляться в курсі стереометрії, а простір, *в якому вона задана називають координатним простором*.

Чи існують інші системи координат? Так, існують: *косокутня* (коли кут між осями не прямий); *з нерівномірними одиничними відрізками на осях; сферична; полярна* та інші. Вони вивчаються в курсі вищої математики, виходячи з потреб математичної теорії та практичного застосування».

КІНЕЦЬ ЛЕКЦІЇ

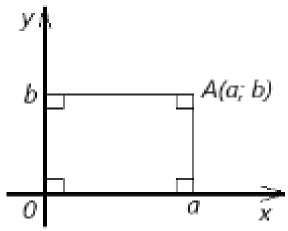
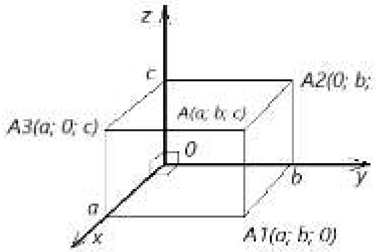
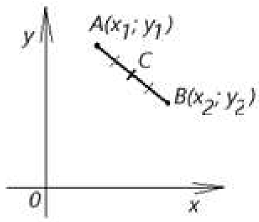
Після викладу вище повідомлення слід перейти до вивченням теоретичного матеріалу теми. Важливо щоб учні оволоділи наступними *вміннями*:

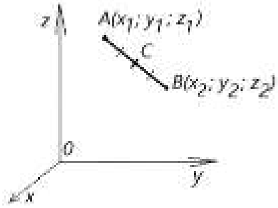
1) зображати прямокутну декартову систему координат у просторі;
2) знаходити координати точок у вибраній системі координат;
3) будувати точку за її координатами;
4) обчислювати відстань між точками, які задані координатами;
5) обчислювати координати середини відрізка;
6) обчислювати координати точки, яка ділить відрізок в заданому відношенні;
7) обчислювати координати точки перетину медіан трикутника;
8) записувати рівняння сфери за даним радіусом і координатами центру;
9) помічати аналогію між формулами для координатної площини і формулами для координатного простору.

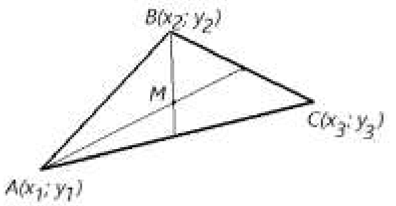
Корисним буде створити з учнями порівняльну довідкову таблицю, яка стане в нагоді під час розв’язування задач (дивись таблицю 3).

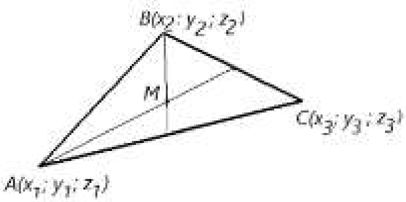
Згодом її можна буде поповнити новими відомостями, коли учні ознайомляться з векторами в просторі.

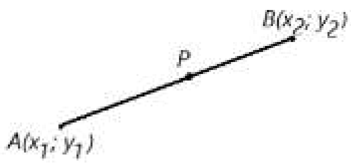
Таблиця 3

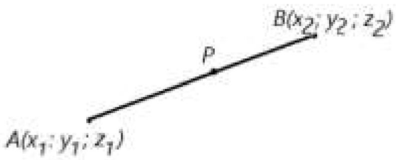
<table>
<tr><td>Базові задачі</td><td colspan="2">ПРЯМОКУТНА СИСТЕМА КООРДИНАТ</td></tr>
<tr><td>1</td><td>На площині</td><td>У просторі</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2">Координати відрізка</td></tr>
<tr><td></td><td>

C – середина AB;
$x_c = \frac{x_1+x_2}{2}$; $y_c = \frac{y_1+y_2}{2}$.</td><td>

C – середина AB;
$x_c = \frac{x_1+x_2}{2}$; $y_c = \frac{y_1+y_2}{2}$; $z_c = \frac{z_1+z_2}{2}$.</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">Відстань між точками</td></tr>
<tr><td></td><td>$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$</td><td>$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="2">Координати точки перетину медіан трикутника</td></tr>
<tr><td></td><td>

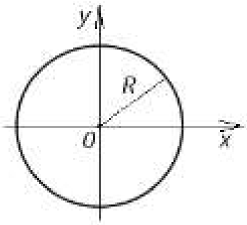
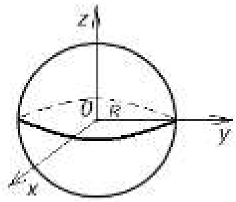
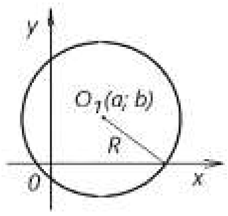
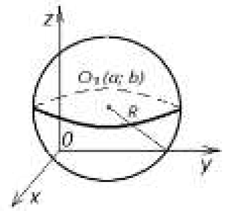
M – точка перетину медіан;
$x_M = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$; $y_M = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$.</td><td>

M – точка перетину медіан;
$x_M = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$; $y_M = \frac{y_1+y_2+z_3}{3}$; $z_M = \frac{z_1+z_2+z_3}{3}$.</td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="2">Координати точки, яка ділить відрізок у заданому відношенні к</td></tr>
<tr><td></td><td>

$k = \frac{AP}{PB}$; $x_p = \frac{x_1+kx_2}{1+k}$; $y_p = \frac{y_1+ky_2}{1+k}$.</td><td>

$k = \frac{AP}{PB}$;
$x_p = \frac{x_1+kx_2}{1+k}$; $y_p = \frac{y_1+ky_2}{1+k}$; $z_p = \frac{z_1+kz_2}{1+k}$</td></tr>
</table>

Таблиця 3 (продовження)

6	Рівняння кола	Рівняння сфери
	 $x^2 + y^2 = R^2$ Центр кола – початок координат	 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ Центр сфери – початок координат
7	 Центр кола – точка $O_1(a;\ b)$ $(x-a)^2 \quad + (y-b)^2 = R^2$	 Центр сфери – точка $O_1(a;\ b;\ c)$ $(x-a)^2 \quad + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

Встановлені під час вивчення теми формули і рівняння 2-7 називають базовими. Після розв'язування вправ на їх пряме застосування, слід навчити учнів застосовувати координати під час розв'язування практичних і прикладних задач. Таке застосування отримало назву ***координатний метод*.**

3. Застосування методу координат до розв'язування задач

Учні з курсу геометрії базової школи знайомі з аналітичним, синтетичним, аналітико-синтетичним та іншими методами розв'язування задач. Вивчення прямокутної декартової системи координат в просторі дає змогу ознайомити їх з новим методом – ***методом координат для розв'язування стереометричних задач***.

Це варто здійснити шляхом розв'язання кількох доцільних задач, де б була використана система координат. Покажемо це на конкретних прикладах.

Задача 1. *Дано куб* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *. Довжина ребра* $AB = a$.

Визначити відстань від A_1 *до перерізу куба площиною* (BC_1D).

Розв'язання

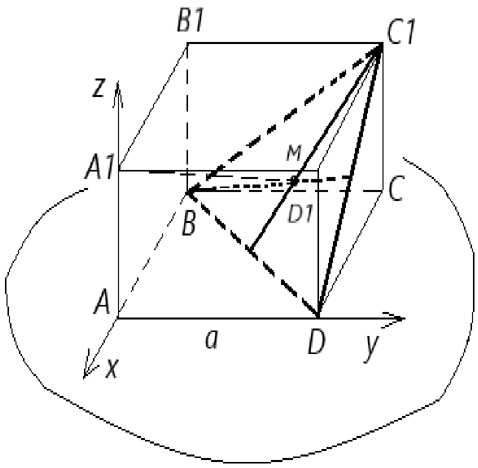


Рис. 4

Насамперед зазначимо, що перерізом даного куба площиною *(BC_1D)* буде рівносторонній ΔBC_1D (рис. 4), оскільки його сторони – діагоналі рівних квадратів. Вершина A_1 рівновіддалена від вершин C_1, B, *D*, бо $A_1B = A_1C_1 = A_1D$ також як діагоналі рівних квадратів.

Тому перпендикуляр, проведений з вершини A_1, до площини *(BC_1D)* матиме своєю основною точку перетину медіани ΔBC_1D – точку *M*.

Отже, відстань $\rho(A_1; \Delta BC_1D)$=$\rho(A_1M) = A_1M$.

Для знаходження довжини відрізка A_1M поступимо наступним чином:

1) Задамо в просторі прямокутну декартову систему координат. За вісь абсцис виберемо пряму AX, за вісь ординат – пряму AY, за вісь аплікат – пряму AA_1 (рис. 4). Точка A – початок координат, ребро $AD = a$ – одиниця довжини.

2) Запишимо координати окремих вершин куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ у вибраній системі. Тоді маємо: $A(0;\ 0;\ 0)$, $A_1(0;\ 0;\ a)$, $B(-a;\ 0;\ 0)$, $D(0;\ a;\ 0)$, $C_1(-a;\ a;\ a)$.

3) Щоб визначити довжину відрізка *AM*, визначимо координати точки *M* – точки перетину медіани ΔBC_1D.

За відомою базовою задачею 4 маємо :

$$x_M = \frac{-a+0-a}{3} = -\frac{2}{3}a\ ;\ y_M = \frac{0+a+a}{3} = \frac{2}{3}a\ ;\ z_M = \frac{0+0+a}{3} = \frac{1}{3}a.$$

Тоді *AM* (базова задача 2) буде дорівнювати:

$$AM = \sqrt{(0+\frac{2}{3}a)^2 + (0-\frac{2}{3}a)^2 + (a-\frac{1}{3}a)^2} = \sqrt{\frac{12a^2}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a.$$

4) Відстань $\rho(A_1; \Delta BC_1D)$=$\frac{2\sqrt{3}}{3}a$ (лін. од.) – задача розв'язана.

Відповідь : $\frac{2\sqrt{3}}{3}a$ *лін. од.*

Задача 2. *У прямокутному трикутнику* ΔABC $\angle C = 90°$, $AC = a, BC = b.$ *З вершини C до площини трикутника проведено перпендикуляр CD, довжина якого с. визначити відстань від точки D до точки M якщо CM – бісектриса трикутника.*

Розв'язання

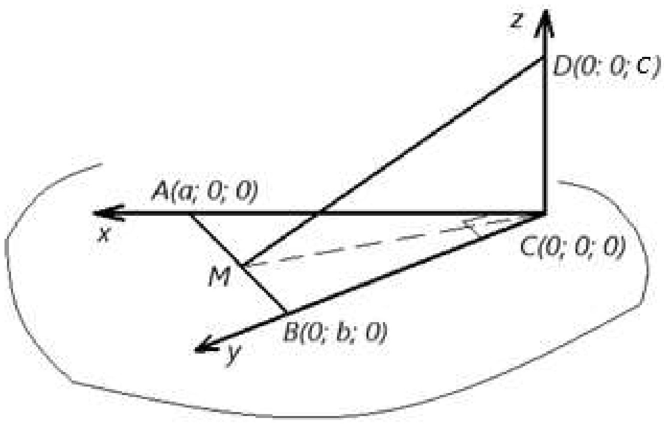


Рис. 5

На рис. 5 зображено даний в умові задачі трикутник *ABC.*
$DC \perp (ABC)$, $CA = a,\ BC = b, \angle C = 90°$, *CM* – бісектриса трикутника.
Тоді, як відомо $\frac{AM}{MB} = \frac{a}{b}$. Позначимо $\frac{a}{b} = k$.

Для знаходження довжини відрізка *DM* введемо прямокутну декартову систему координат. За вісь абсцис виберемо пряму *CA*, за вісь ординат – *CB*, за вісь аплікат – пряму *CD.* Точка *C* – початок координат.

У цій системі координат, виходячи з умови, координати очок будуть:

$$A(a;\ 0;\ 0),\ B(0;\ b;\ 0),\ C(0;\ 0;\ 0),\ D(0;\ 0;\ c).$$

Оскільки точка *M* ділить відрізок *AB* у відношенні $\frac{AM}{MB} = k$, то її координати будуть (базова задача 5) : $x_M = \frac{a+k\cdot 0}{1+k} = \frac{a}{1+k}$; $y_M = \frac{0+k\cdot b}{1+k} = \frac{k\cdot b}{1+k}$; $z_M = \frac{0+k\cdot 0}{1+k} = 0$.

Отже, $M(\frac{a}{1+k};\ \frac{k\cdot b}{1+k}; 0)$. Знаходимо довжину відрізка *DM* за координатами його кінців.

$$MD = \sqrt{(0 - \frac{a}{1+k})^2 + (0 - \frac{k\cdot b}{1+k})^2 + (c-0)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{(1+k)^2} + \frac{k^2b^2}{(1+k)^2} + c^2}\ .$$

Підставимо у формулу значення $k = \frac{b}{a}$, матимемо:

$$MD = \sqrt{\frac{a^2}{(1+\frac{b}{a})^2} + \frac{b^4}{a^2(1+\frac{b}{a})^2} + c^2} = \sqrt{\frac{a^4+b^4}{(a+b)^2} + c^2}.$$

Відповідь : $\sqrt{\frac{a^4+b^4}{(a+b)^2} + c^2}$ *лін. од.*

Задача 3. *У тетраедрі $DABC$ мимобіжні ребра AD і BC взаємно перпендикулярні. Доведіть, що суми квадратів довжин двох інших пар мимобіжних ребер рівні між собою.*

Розв'язання

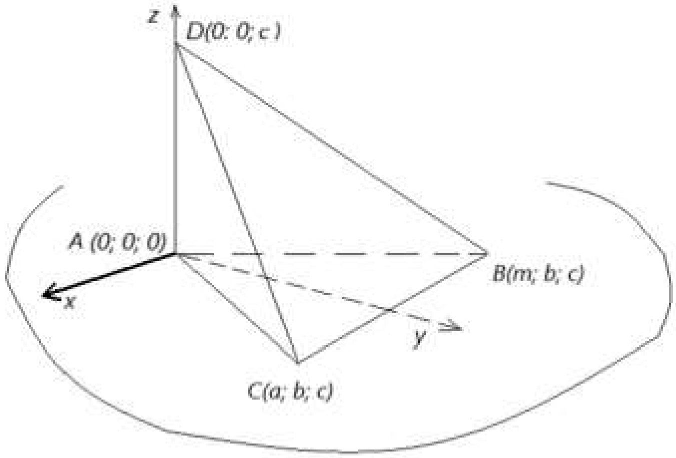


Рис. 6

На рис. 6 зображено тетраедр $DABC$, $AD \perp BC$.

Потрібно довести, $AB^2 + DC^2 = AC^2 + DB^2$.

Задамо прямокутну декартову систему координат у просторі так, щоб точка *A* була початком координат, вісь *OZ* співпадала з прямою *AD* , вісь *OX* була паралельна прямій *BC*.

Тоді ребро *BC* буде паралельним площині *XOZ* (рис. 6).

Нехай у цій системі координат координати вершини тетраедра будуть :

$$D(0;\ 0;\ c),\ A(0;\ 0;\ 0),\ B(m;\ b;\ c),\ C(a;\ b;\ c).$$

При такому заданні системи координат ордината і апліката в точках *C* і *B* однакові.

Виразимо в координатах квадрати довжин бічних ребер AB, DC, AC і $DB.$

$AB^2 = m^2 + b^2 + c^2$ $\qquad$ $AC^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$DC^2 = a^2 + b^2 + (c - c)^2$ $\qquad$ $DB^2 = m^2 + b^2 + (c - c)^2$

Додамо обидві рівності :

$$AB^2 + DC^2 = m^2 + 2b^2 + a^2 + c^2 + (c - h)^2 = AC^2 + DB^2.$$

Відповідь : суми квадратів двох інших мимобіжних ребер рівні між собою.

Правило-орієнтир координатного методу

Після розв'язання доцільних задач можна формулювати правило-орієнтир координатного методу у просторі, яке виражає його суть. **Вибравши систему координат як метод для розв'язання задач потрібно:**

1. **Виділити в формулюванні задачі (теореми) умову та вимогу.**
2. **Вдало вибрати прямокутну декартову систему координат у просторі. У ній перекласти умову та вимогу на мову координат.**
3. **Скориставшись базовими задачами 2-7 (див. таблиця 5), знайти відповідь на поставлене завдання, тобто виконати вимогу задачі, сформулювавши мовою координат.**
4. **Здобутий результат перекласти на мову оригіналу, якою записана задача.**

Вивчене правило доцільно подати на окремому плакаті або сайті, щоб воно, при потребі, було «перед очима» учнів. Навчитись користуватись ним вони зможуть тоді, коли розв'язуватимуть задачі. Корисним буде повідомити учням і евристичні приписи коли варто застосовувати метод координат.

Серед стереометричних задач, які часто розв'язуються координатним методом, виділяють:

1) задачі на доведення перпендикулярності відрізків, прямих, площин:
2) задачі на доведення паралельності відрізків, прямих, площин:
3) задачі на доведення геометричних рівностей:
4) задачі на знаходження довжин відрізків;
5) задачі на знаходження відношень довжин відрізків;
6) задачі на знаходження кутів між прямими, площинами.

Розглянемо приклади застосування методу координат до розв'язування геометричних та прикладних задач.

Зауважимо, що таких задач в діючих альтернативних підручниках з стереометрії обмаль і є потреба в створенні їх добірки для практичного використання в навчальному процесі.

Задача 4 (теорема). *Довести, що симетрія відносно площини – рух.*

Доведення

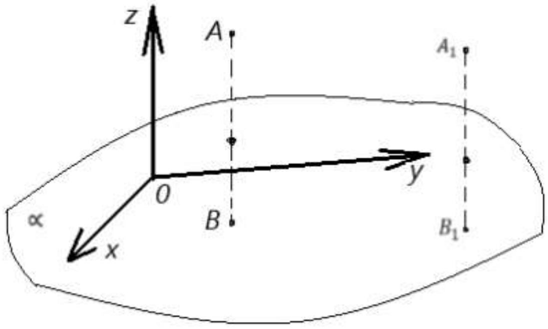


Рис. 7

Нехай задана площина ∝ і здійснюється симетрія простору відносно неї (рис. 7). Задаємо в просторі прямокутну декартову систему координат так, щоб осі OX і OY належали площині ∝.

Виберемо в просторі дві довільні точки A і B та їм симетричні A_1 та B_1.

Їх координати будуть: $A(a,b,c)$, $B(m,n,k)$, $A_1(a,b,-c)$, $B_1(m,n,-k)$.

Тоді виразимо довжини відрізків AB і A_1B_1: $AB=\sqrt{(a-m)^2+(b-n)^2+(c-k)^2}$; $A_1B_1=\sqrt{(a-m)^2+(b-n)^2+(c-k)^2}$=$\sqrt{(a-m)^2+(b-n)^2+(c-k)^2}$. Отримаємо, що $AB=A_1B_1$. Отже, симетрія – перетворення простору, яке зберігає відстань між точками, тобто – рух. Теорема доведена.

Задача 5. *Основу драбини довжиною 6 м відсунуто від стіни на 1 м. На скільки знизиться верхній кінець драбини, якщо основу відсунути ще на 0,5 м?*

Розв'язання

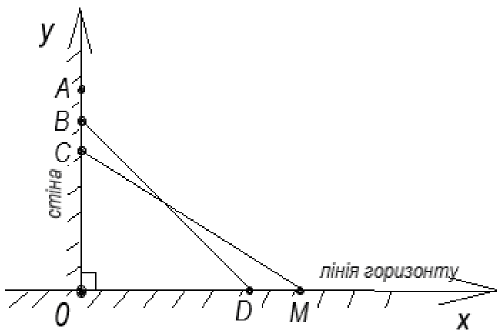


Рис. 8

Стіна до поверхні землі стоїть вертикально. Скористаємося цим для вибору системи координат.

За вісь OX виберемо лінію горизонту, а за вісь OY – вертикальну пряму на стіні (рис.8) . Відрізок OA відповідає довжині драбини, коли вона приставлена до стіни. Отже, $OA=6$ *м*.

Відрізок OD вказує на скільки відсунеться низ драбини за першим разом. Тоді у вибраній прямокутній декартовій системі координат координати точок будуть: $A(0;6)$, $B(0;y_1)$, $C(0;y_2)$, $D(1;0)$, $M(1{,}5;0)$. Необхідно знайти довжину відрізка *BC*. Оскільки довжина драбини відома, то маємо: $BD=\sqrt{(1-0)^2+(0-y_1)^2}=\sqrt{1^2+{y_1}^2}=6$. Звідки маємо: $y_1=\sqrt{35}\approx 5{,}9$ *м*. Аналогічно,

CM = $\sqrt{(0-1{,}5)^2+(y_2-0)^2}=\sqrt{2{,}25^2+{y_2}^2}=6$. Звідки отримуємо, що $y_2=\sqrt{33{,}75}\approx 5{,}8$ *м*. Тоді, $BC=y_1-y_2\approx 0{,}1$ *м*.

Відповідь : Після другого відсунення верхній кінець драбини знизиться на $\approx 0{,}1$ *м.*

Задача 6 *). *Сергій насипав у циліндричну каструлю трошки крупи та запитав маму: «Скільки потрібно налити води, щоб зварити смачну кашу?» – «Це дуже просто, – відповіла мама. – Нахили каструлю, постукай, щоб крупа пересипалася і закрила рівно половину дна. Тепер зафіксуй точку на стінці каструлі біля краю, до якого піднялася крупа. До цього рівня і потрібно налити воду». – «Але крупи можна насипати більше або менше, та й каструлі бувають різні: широкі, вузькі, – сказав Сергій». – «Немає значення. Цей спосіб стане у пригоді в будь-якому випадку, – відповіла мама». Чи справді це так.*

Розв'язання

Учнів таким посудом як каструля не здивуєш. Тому після демонстрацій за допомогою комп'ютера ілюстративного матеріалу (каструлі, каструлі з крупою, з крупою і водою), переходимо до наступних узагальнень:

- моделлю каструлі з крупою може бути циліндр, який заповнено речовиною (рис. 9);
- моделлю каструлі з крупою, водою може бути той же циліндр (рис. 10).

Крупа займає в цьому циліндрі об'єм V_k, а вода – об'єм $V_в$. Щоб перевірити, чи правильним буде твердження, висловлене мамою, потрібно відповісти на запитання: «*Чи змінюється відношення цих об'ємів залежно від форми циліндра*?».

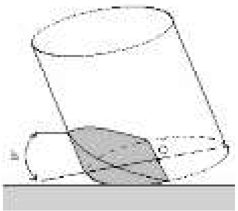


Рис. 9

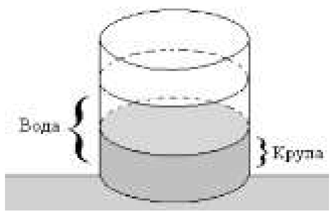


Рис. 10

Отже, приходимо до математичної задачі «Визначити відношення об'ємів V_k і $V_в$». Модель, що досліджується (рис. 9), помістимо в прямокутну систему координат так, щоб основа циліндра належала площині XOY, а центр основи O був початком координат (рис. 10).

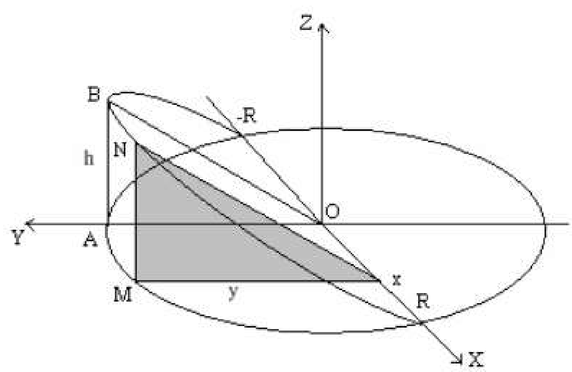


Рис. 11

Через точку P на осі OX, $OP = x,\ x \in [-R;\ R]$, будуємо переріз тіла (тобто гірки із крупи всередині каструлі) площиною, що перпендикулярна до осі OX.

У перерізі отримаємо трикутник *MNP*.

Очевидно, що Δ*MNP* подібний до Δ*ABO*.

Тоді $\frac{MN}{h} = \frac{y}{R}$.

Звідси $MN = \frac{yh}{R}$.

Площа Δ*MNP* дорівнює: $S_{\Delta MN_x} = 0{,}5MN \cdot M_x,\ \ S_{\Delta MN_x} = \frac{hy^2}{2R}$.

Оскільки точка *M* належить колу радіуса *R* і має координати $(x;\ y)$, то отримаємо $x^2 + y^2 = R^2$, $y^2 = R^2 - x^2$.

Тоді $S_{\Delta MN_x} = \frac{h(R^2 - x^2)}{2R}$.

Використовуючи визначений інтеграл (як математичну модель),

отримаємо:

$$V_k = 2\int_0^R \frac{h(R^2 - x^2)}{2R}dx = \frac{h}{R}\int_0^R (R^2 - x^2)dx = \frac{2}{3}hR^2.$$

Отже, $V_{\text{в}} = V_{\text{ц}} - V_{\text{к}} = \pi R^2 h - \frac{2}{3}R^2 h = \frac{R^2 h}{3}(3\pi - 2)$.

Як бачимо, це відношення не залежить від розмірів каструлі.

Відповідь. Готування смачної каші за маминим рецептом

не залежить від розмірів каструлі.

***) така задача може розглядатися з учнями під час вивчення визначеного інтеграла**

П І Д С У М О К

Головна мета вивчення теми «Координати в просторі і їх застосування до розв’язування задач» – систематизувати знання учнів про прямокутну декартову систему координат на площині і в просторі, розв’язати базові задачі, як опорні, і навчити учнів застосовувати координатний метод до розв’язування практичних та прикладних задач.

Учні мають зрозуміти, що суть координатного методу на площині і в просторі однакова, а базові задачі на площині і в просторі – схожі.

МЕТОДИЧНІ ЗАДАЧІ
для самостійного розв'язування

1. Розв'яжіть задачі з повним письмовим поясненням:

   1) доведіть, що всі три відрізки, які сполучають середини протилежних ребер довільного тетраедра, проходять через одну точку і діляться нею навпіл:

   2) У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $BB_1 = 6$, $AB = 2$, $BC = 4$. Площина $\propto$ проходить через середину діагоналі D_1B, перпендикулярно до неї. Знайти відношення MA_1 *і* MB_1 де M – точка перетину площини $\propto$ з ребром A_1B_1 (або з його продовженням).

2. Запропонуйте добірку задач для формування в учнів умінь застосувати координатний метод:
   а) геометричних задач;
   б) прикладних задач.

3. Підготуйте тестові завдання для з'ясування рівня оволодіння учнями теоретичним матеріалом теми «Декартові координати в просторі і їх застосування до розв'язування задач».

4. Проведіть порівняльний аналіз задачного матеріалу в альтернативних підручниках стереометрії з теми «Координати в просторі» і їх застосування до розв'язування задач. Зробіть узагальнюючі висновки.

ПІДТЕМА 5.2
«ВЕКТОРИ В ПРОСТОРІ І ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ»

П Л А Н

1.	***Орієнтовне планування навчального процесу, основна мета вивчення та навчальні досягнення учнів***
2.	***Поняття вектора. Вектори в координатному просторі. Основні задачі на вектори і їх розв'язання***
3.	***Дії над векторами. Базові задачі векторної алгебри***
4.	***Вектори в координатному просторі. Дії над ними. Базові задачі векторної алгебри в координатному просторі***
5.	***Застосування векторів до розв'язування практичних і прикладних задач. Векторний метод і його суть***

1. Орієнтовне планування навчального процесу, основна мета вивчення та навчальні досягнення учнів

Зміст підтеми та орієнтовне планування її вивчення відображено в таблиці 1.

Таблиця 1

№ п/п	Тема заняття, вид роботи	К-ть годин	Примітки
1	Поняття вектора, види векторів	1	
2	Рівність векторів, колінеарність векторів, компланарність векторів	2	
3	Дії над векторами та їх властивості. Розклад вектора за трьома некомплектарними векторами СР-1	3	
4	Вектори в координатному просторі. Координатна форма операцій над векторами СР-2	3	
5	Рівняння площини. Кут між векторами. Ознаки паралельності та перпендикулярності двох площин. Кут між площинами СР-3	3	
6	Застосування векторного методу до розв’язування геометричних та прикладних задач СР-4	6	
7	Контрольна робота	1	
8	Аналіз контрольної роботи. Робота над помилками підсумкова атестація з теми «Координати і вектори в просторі»	1	
	Разом:	20	

2. Основна мета вивчення:

- *сформувати в учнів систематизовані знання про вектори і дії над ними*;
- *ознайомити з основними (базовими) задачами на вектори і їх розв’язанням*;
- *навчити застосовувати вектори (векторний метод) до розв’язування геометричних та прикладних задач*.

3. Навчальні досягнення учнів. Вивчивши тему «Вектори в просторі і їх застосування до розв’язування задач» учень/учениця:

- *користується аналогією* між поняттями вектора на площині та в просторі;
- *будує вектори* у просторовій прямокутній декартовій системі координат за їх координатами;
- *знаходить суму і різницю векторів*, добуток вектора на число, скалярний добуток векторів, кут між векторами;
- *знає розв’язки* базових задач векторної алгебри;
- *застосовує вектори* до розв’язування геометричних та прикладних задач.

2. Поняття вектора. Вектори в координатному просторі. Основні задачі на вектори і їх розв’язання

Ознайомлення учнів з поняттям вектора пропонуємо провести у формі шкільної лекції, орієнтовний зміст якої подано нижче.

Лекція на тему

«Поняття вектора»

«Древні математики, зокрема грецькі, в геометричній алгебрі та теорії відношень використовували тільки одну кількісну характеристику відрізка – його довжину. Іншу характеристику відрізка – його напрямленість у просторі вчені почали враховувати в природознавстві лише в кінці XVI на початку XVII століття. Використання напрямлених відрізків у дослідженні фізичних явищ можна знайти, наприклад, в працях Леонардо до Вінчі, Гелілео Галілея та інших. Це були поодинокі спроби використати напрямлені відрізки для розв'язування окремих задач фізики, математики, механіки.

Знадобилося майже двісті років інтенсивного накопичення фактів в механіці, алгебрі, геометрії, інших науках, щоб визріла реальна потреба в розробці теорії і практики обчислення напрямлених відрізків. Тоді напрямлені відрізки й стали об'єктом і предметом математичної науки.

На рубежі XIX ст., майже одночасно в різних наукових колах, з'явилися незалежні спроби розширення операцій віднімання та множення напрямлених відрізків.

Каспер Вессель

Одним з перших авторів розв'язання цієї проблеми був *Каспер Вессель* (1745-1818) – датський математик, за професією землемір, уродженець з Норвегії.

Свої математичні здобутки з теорії напрямлених відрізків на площині і в просторі він виклав у книзі «Про аналітичне зображення напрямів», яка вийшла друком у 1799 р.

Згодом, незалежно один від одного дослідженнями напрямлених відрізків і дій над ними захопилися : *Сен Венан* – справжнє ім'я *Барре Адамар Жан Клод* (1797-1886) – французький інженер-механік; *Гамільтон Уільям Роуен* (1805-1865) – визначний англійський математик; *Грассман Герман Гюнтер* (1809-1887) – німецький математики, фізик і філолог.

Сен Венан

Гамільтон Уільям

Грассман Герман Гюнтер

Саме *Гамільтон* ввів у 1846 році назву напрямленому відрізку ***«вектор»*** (*від латинського vector – несучий*)». Крім векторної алгебри він започаткував також новий напрям в математиці – векторний аналіз.

Після опублікування наукових робіт Гамільтона вектори швидко ввійшли в математичну науку і стали одним із її провідних понять. Символ $\vec{a}$ ввів у 1853 році французький математики *Огюстен-Луї Коші.* Вектори широко-застосовують у фізиці.

Однак, вони є різні:

прикладені

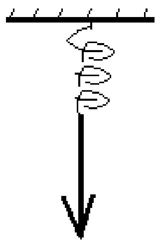


Рис.1 *а*)

Такий вектор задається довжиною, напрямом і точкою прикладання

ковзні

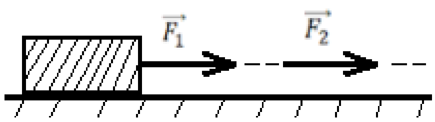


Рис.1 *б*)

Такий вектор задається довжиною, напрямом і прямою, на якій відкладається

вільні

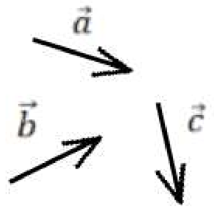


Рис.1 *в*)

Такий вектор задається довжиною і напрямом

У геометрії вивчають вільні вектори і дії над ними: додавання, віднімання, множення на число та інші. Нині в математиці обсяг поняття вектор значно розширився, тобто під терміном вектор розуміють не тільки напрямлений відрізок, а й інші об'єкти, наприклад, паралельне перенесення, трійки чисел і т. п.

То що ж таке, в сучасному розумінні, вектор? Для визначення цього поняття математики користуються аксіоматичним підходом. Суть його така: «*Нехай задана непорожня множина елементів М, на якій визначені дві операції:*

а) додавання елементів цієї множини (позначимо її символом +);

б) множення елементів цієї множини на дійсне число (позначимо її символом ·).

Ці обидві операції задовольняють умови (аксіоми):

1. $\forall\, \vec{a}$ *і* $\forall\, \vec{b} \in M \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ *(комутативний закон додавання);*

2. $\forall\, \vec{a},\, \vec{b}, \vec{c} \in M \Rightarrow \overrightarrow{(a + b)} + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ *(сполучний закон додавання);*

3. існує в множині М такий елемент $\vec{o}$ *(він називається нульовим), що* $\forall\, \vec{a} \in M$, $\vec{a}$+ $\vec{o}$=$\vec{a}$ *(закон поглинання нуля);*

4. для будь-якого елемента $\vec{a} \in M$ *існує такий елемент* $\overline{-\vec{a}}$ *(він називається протилежним), що* $(\overrightarrow{-a)}+\vec{a}= \vec{o}$*;*

5. $\forall\, \vec{a} \in M \Rightarrow 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$*;*

6. для будь-яких дійсних чисел х, у і $\forall\, \vec{a} \in M \Rightarrow x(y \cdot \vec{a}) = (x \cdot y)\vec{a}$ *;*

7. для будь-яких дійсних чисел х, у і $\forall\, \vec{a} \in M \Rightarrow (x + y) \cdot \vec{a} = x\vec{a} + y\vec{a}$ *;*

8. для будь-якого дійсного числа х і $\forall\, \vec{a}, \vec{b} \in M \Rightarrow x \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = x\vec{a} + x\vec{b}$ *.*

Множина М для елементів якої виконуються умови (системи) 1-8, називається векторним простором, а кожний її елемент вектором».

Пізніше ми переконаємося, що множина вільних напрямлених відрізків з заданими на ній операціями додавання і множення на число задовольняють аксіоми 1-8. Тому вона є векторним простором. А, отже, кожен напрямлений відрізок – вектор.

Вперше в шкільний курс геометрії вектори були введені на початку 60-х років минулого століття у зв'язку з модернізацією (осучасненням) змісту шкільної математичної освіти. На сьогодні вектори вивчаються і в планіметрії, і в стереометрії.

КІНЕЦЬ ЛЕКЦІЇ

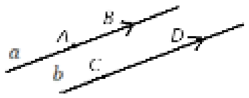
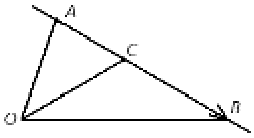
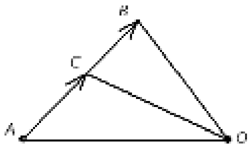
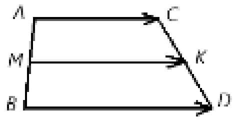
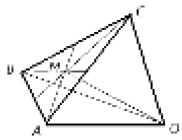
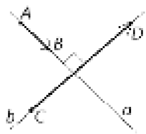
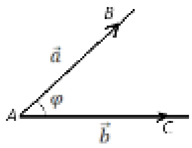
3. Дії над векторами. Базові задачі векторної алгебри

Після ознайомлення учнів з поняттям вектора слід сформувати в них поняття рівних, колінеарних та компланарних векторів, вивчити операції з векторами: додавання, віднімання, множення на число та скалярний добуток двох векторів.

Варто також показати учням, що всі аксіоми в множині M_1, напрямлених відрізків (векторів) виконуються. Тому множина M_1 – векторний простір.

Важливо також щоб учні знали і вміли (при потребі) розв'язувати базові задачі на вектори, перелік яких подано в таблиці 2 – базові задачі векторної алгебри. Їх розв'язання є і в діючих підручниках.

Таблиця 2

№	Векторні співвідношення		
1		прямі паралельні $a \parallel b$ (або збігаються)	вектори колінеарні $\overrightarrow{AB} \parallel \lambda\overrightarrow{CD}$, де λ – дійсне число
2		$C \epsilon AB,\ \frac{AB}{AC} = \lambda$	вектори колінеарні $\overrightarrow{AB} \parallel \lambda\overrightarrow{AC}$, або $\overrightarrow{OC} = \rho\overrightarrow{OA} + (1-\rho)\cdot\overrightarrow{OB})$ де *O* – довільна точка
3		$\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$	а) $\overrightarrow{AC} = \frac{m}{n}\overrightarrow{CB}$; б) $\overrightarrow{OC} = \frac{n}{n+m}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$.
		C – середина *AB*, $\frac{AC}{CB} = 1$	$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$
4		*M* – середина *AB* *K* – середина *CD*	$\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$
5		*M* – точка перетину медіан ΔABC, *O* – довільна точка	$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$
6		$a \perp b$	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ $(\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}.\ \overrightarrow{CD} \neq \vec{0})$
7		$\angle BAC = \varphi$	$cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert}$ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$
8		$D \in (ABC)$, $C \notin AB$, *O – довільна точка*	а) $\overrightarrow{CD} = \propto \overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$; б) $\overrightarrow{OD} = \propto \overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + (1-\propto-\beta)\overrightarrow{OC}$, $\propto, \beta$ – дійсні числа

Після вивчення операцій над векторами і розв’язання базових задач (базова школа) слід перейти до розгляду векторів у координатному просторі.

4. Вектори в координатному просторі. Дії над ними.

Базові задачі векторної алгебри в координатному просторі

Якщо у віртуальному просторі, наповненому векторами множини M_1 ввести прямокутну декартову систему координат, то кожному вектору $\vec{a}$ буде відповідати (однозначно) трійка чисел (a_1, a_2, a_3) (рис. 2).

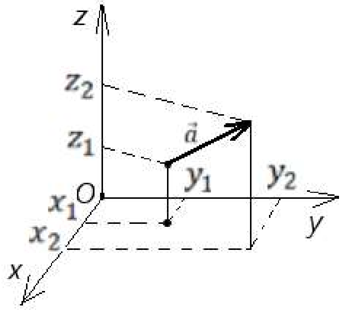


Рис. 2

$a_1 = x_2 - x_1$

$a_1 = y_2 - y_1$

$a_1 = z_2 - z_1$

Варто зауважити учням, що оскільки розглядаються вільні вектори, то вектор $\vec{a}$ можна відкладати і від початку координат.

Тоді трійка чисел (a_1, a_2, a_3) буде координатами кінця вектора (рис. 3).

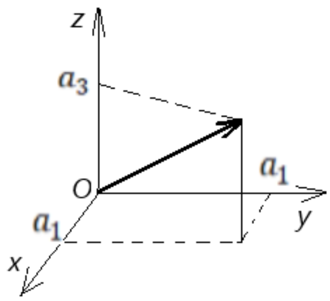


Рис. 3

Отже, для кожного заданого вектора $\vec{a}$ ставиться однозначно у відповідність трійка дійсних чисел (a_1, a_2, a_3), яка називається його координатами. Правильною є і зворотна дія – кожній трійці дійсних чисел (a_1, a_2, a_3) можна поставити у відповідність вектор $\vec{a}$ і не важливо де він буде відкладений у просторі. Ось чому слід надалі записувати цю залежність у вигляді рівності $\vec{a}$ =$(\overrightarrow{a_1, a_2, a_3})$.

У підсумку маємо множину M_1 – множину напрямлених відрізків (векторів), векторний простір. Множину M_2 – множину трійок дійсних чисел. Між ними встановлюється взаємно однозначна відповідність. У допитливих учнів може виникнути цілком закономірне запитання – як виражаються в такому випадку вивчені раніше операції над векторами, якщо вони задані своїми координатами?

Далі слід зайнятися з учнями з'ясуванням відповіді на проблемне запитання. У підсумку має бути розв'язана система базових задач, яка представлена в таблиці 3.

Таблиця 3

№	Операції в множині M_1	Операції в множині M_2
1	вектор $\vec{a}$ (довжина і напрям)	$\vec{a}$ =($\overrightarrow{a_1, a_2, a_3}$)
2	$\lvert\vec{a}\rvert$ довжина вектора	$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
3	дано вектор $\overrightarrow{AB}$, де $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \left(\overrightarrow{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\right)$
4	вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – колінеарні, $\vec{a} = \lambda\vec{b}$	$\vec{a}$ =($\overrightarrow{a_1, a_2, a_3}$), $\vec{b}$ =($\overrightarrow{b_1, b_2, b_3}$), $\frac{a_1}{b_1}$=$\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \lambda$
5	скалярний добуток векторів $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert cos\varphi,$ де φ кут між векторам	$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$ $cos\varphi$=$\frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$
6	$\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$	$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0$
7	$\vec{a}$, $\vec{b}$ – їх сума $\vec{S} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{m}$ – різниця $\vec{m} = \vec{a} - \vec{b}$, добуток вектора $\vec{a}$ на число $\propto$, $\propto \vec{a}$	($\overrightarrow{a_1, a_2, a_3}$)+($\overrightarrow{b_1, b_2, b_3}$)=($\overrightarrow{a_1 + b_1, a_2 + b_2,}$ $a_3 + b_3$) ($\overrightarrow{a_1, a_2, a_3}$)-($\overrightarrow{b_1, b_2, b_3}$)=($\overrightarrow{a_1 - b_1, a_2 - b_2,}$ $a_3 - b_3$) ($\overrightarrow{\propto a_1, \propto a_2, \propto a_3}$)

Розгляд векторів в координатному просторі слід пов'язати з розв'язуванням задач в координатах (продовжити заповнювати таблицю базових задач в координатах). Зокрема, вивести рівняння площини в координатному просторі, з'ясувати як будуть формулюватися ознаки паралельності та перпендикулярності двох площин, як можна обчислювати кут між площинами, заданими свої рівняннями, як знаходити відстань від точки до площини тощо.

Перелік і зміст таких задач подано у таблиці 4 – базові задачі на координати і вектори. Всі три таблиці слід рекомендувати учням і вчити потім застосовувати їх до розв'язування практичних і прикладних задач.

Таблиця 4

№	Умова задачі, записана звичайною мовою	Умова задачі, записана мовою координат
1	Дано площину $\propto$ і вектор $\vec{n} \perp\propto$.	$\propto: ax + by + cz + d = 0$ рівняння площини $\vec{n} = (\overrightarrow{a,\ b,\ c})$, $\vec{n} \perp\propto$
2	Дано площину $\propto$, яка проходить через точку A і вектор $\vec{n} \perp\propto$.	$A(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{n} = (\overrightarrow{a,\ b,\ c})$, $\propto: a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$
3	Площини $\propto$ і β: а) перпендикулярні; б) паралельні.	$\propto: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0;$ $\beta: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0;$ а) $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0;$ б) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$
4	Дано точку A і площину $\propto$. $\rho(A;\ \propto)$ – відстань від точки A до площини $\propto$.	$\rho(A;\ \propto) = \frac{\lvert ax_0 + by_0 + cz_0 \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
5	Дано площини $\propto$ і β, φ кут між ними.	$cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2})}{\lvert\overrightarrow{n_1}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{n_2}\rvert}$, де $\overrightarrow{n_1} = (\overrightarrow{a_1,\ b_1,\ c_1})$, $\overrightarrow{n_2} = (\overrightarrow{a_2,\ b_2,\ c_2})$
6	Вектор $\vec{a}$; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ – трійка одиничних попарно взаємно перпендикулярних векторів	$\vec{a} = x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath} + k \cdot \vec{z}$, де $\overrightarrow{a} = (\overrightarrow{x,\ y,\ z})$, , $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{z}$ – одиничні вектори відповідно на осях *OX, OY, OZ*

5. Застосування векторів до розв’язування практичних і прикладних задач. Векторний метод і його суть

Після вивчення теоретичного матеріалу і розв’язування базових задач на вектори учнів необхідно ознайомити із застосуванням векторів до розв’язування практичних геометричних та прикладних задач, тобто ознайомити їх з векторним методом розв’язання математичних задач в просторі.

Найкраще це здійснити методом доцільних задач, розв’язавши які, шляхом узагальнення, розкрити суть векторного методу.

Наведемо орієнтований варіант реалізації такого підходу.

Задача 1. *У піраміді $SABCD$ точки M_1 та M_2 є відповідно точками перетину медіан граней ASB і BSC. Знайдіть довжину відрізка M_1M_2 , якщо $AC = 3$ см.*

Розв'язання

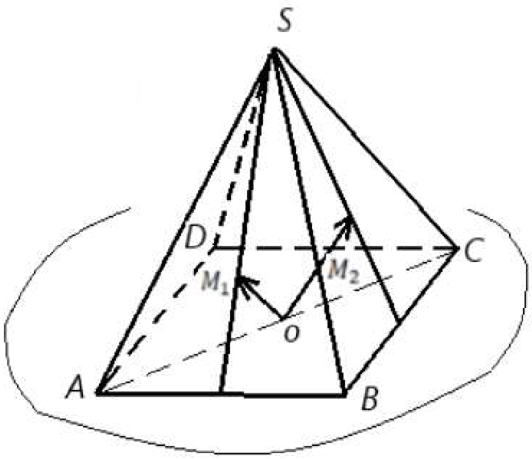


Рис. 4

Нехай задана піраміда $SABCD$ (рис. 4)

M_1 – точка перетину медіан ΔASB ,

M_2 - точка перетину медіан ΔBSC .

Для розв'язання задачі виберемо довільну точку $O \in AC$.

Далі:

1) розглянемо вектори $\overrightarrow{OM_1}$ і $\overrightarrow{OM_2}$.

Тоді $\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OS})$, $\overrightarrow{OM_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OS})$

(задача 5 таблиця 1)

2) виразимо вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$. Тобто,

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OS}) - \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OS}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\overrightarrow{AC}$ – колінеарні. Тому, $|\overrightarrow{M_1M_2}| = \frac{1}{3}|\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$ *см.*

3) Довжина відрізка $M_1M_2 = 1$ *см.*

Відповідь : 1 см.

Задача 2. *Плоскі кути тригранного кута дорівнюють $\propto, \beta, \gamma$. Визначити кут між бісектрисою кута $\propto$ і протилежним ребром.*

Розв'язання

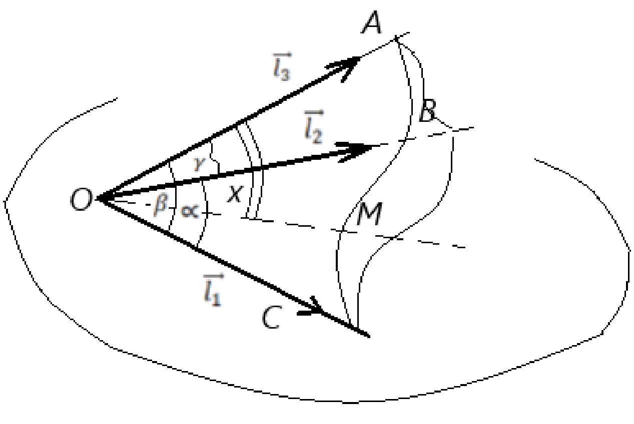


Рис. 5

Нехай задано тригранний кут *OABC*, у якому $\angle COB = \propto$, $\angle COA = \beta$, $\angle BOA = \gamma$, *OM* – бісектриса кута $\angle COB$.

Позначимо $\angle AOM = x$.

1) Відкладемо на ребрах даного тригранного кута одиничні вектори $\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}, \overrightarrow{l_3}$ (рис. 5).

Сума векторів $\overrightarrow{l_1} + \overrightarrow{l_2} = \overrightarrow{m}$ – вектор, який лежатиме на бісектрисі *OM* (це слідує з правила додавання – правила паралелограма).

2) Кут *AOM* визначаємо за відомою формулою (базова задача 7, таблиця 1) $cosx = \frac{(\overrightarrow{l_3} \cdot \overrightarrow{m})}{|\overrightarrow{l_3}| \cdot |\overrightarrow{m}|}$. Скориставшись правилами векторної алгебри маємо:

$$cosx = \frac{(\overrightarrow{l_3} \cdot \overrightarrow{m})}{|\overrightarrow{l_3}| \cdot |\overrightarrow{m}|} = \frac{(\overrightarrow{l_3} \cdot \overrightarrow{l_1}) + (\overrightarrow{l_3} \cdot \overrightarrow{l_2})}{1 \cdot \sqrt{(\overrightarrow{l_1} + \overrightarrow{l_2})^2}} = \frac{1 \cdot 1 \cdot cos\beta + \cdot 1 \cdot cos\gamma}{1 \cdot \sqrt{1+1+2cos\propto}} = \frac{cos\beta + cos\gamma}{\sqrt{2+2cos\propto}}.$$

3) Тобто, $cosx = \frac{cos\beta + cos\gamma}{2cos\frac{\propto}{2}}$.

Отже, $x = \arccos\left(\frac{cos\beta + cos\gamma}{2cos\frac{\propto}{2}}\right)$.

Відповідь : $\arccos\left(\frac{cos\beta + cos\gamma}{2cos\frac{\propto}{2}}\right)$.

Задача 3. *Якщо пряма і площина перпендикулярні до однієї прямої, то вони паралельні між собою. Довести.*

Доведення

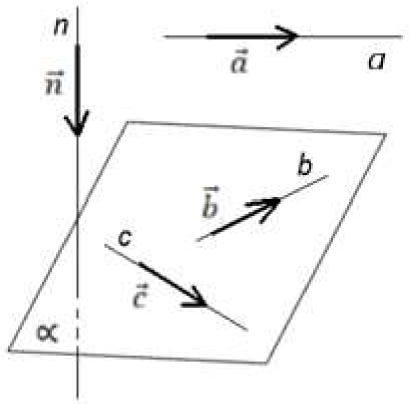


Рис. 6

Нехай дано площину $\propto$ і дві прямі *n* та a (рис. 6).
$n \perp \propto$, $n \perp a$. Довести, що a∥∝.
Відкладемо на прямих *n* та a відповідно вектори $\vec{a}$ і $\vec{n}$.
Проведемо на площині $\propto$ дві довільні непаралельні прямі b і c та відкладемо на них вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$.
Розкладемо вектор $\vec{a}$ за трьома не компланарними векторами $\vec{n}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$: $\vec{a} = x\vec{n} + y\vec{b} + z\vec{c}$ (задача 9, таблиця 1).

Помножимо обидві частини одержаної рівності скалярно на вектор $\vec{n}$, отримаємо: $(\vec{n} \cdot \vec{a}) = x\overrightarrow{a^2} + y(\vec{n}\vec{b}) + (\vec{n}\vec{c})$.

Оскільки $(\vec{n} \cdot \vec{a}) = (\vec{n} \cdot \vec{b}) = (\vec{n} \cdot \vec{c}) = 0$, то *x* = 0. Отже, маємо: $\vec{a} = y\vec{b} + z\vec{c}$.

З одержаної рівності робимо висновок, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні.

Оскільки, $b \subset a, c \subset a$, то a ∥∝.

Твердження доведене.

Після розв’язання задач 1-3 (можливо і більше), можна зробити узагальнення і описати суть векторного методу.

Правило-орієнтир розв’язування стереометричних задач векторним методом

1. Виділити в формулюванні задачі умову та вимогу, виконати рисунок.
2. Позначити вектори на рисунку. Сформулювати вимоги мовою векторів.
3. Враховуючи умови і вимоги, скласти, користуючись таблицями базових задач, допоміжні векторні рівності. Для цього виразити, у разі необхідності, вектори у вигляді суми або різниці двох інших векторів, або у вигляді добутку вектора на число. Перетворити одержані рівності і прийти до потрібної.
4. Перекласти одержану рівність на мову геометрії і записати відповідь.

Засвоєння сформульованого правила-орієнтиру відбуватиметься успішно тоді, коли учні розв’яжуть достатню кількість тренувальних задач. Для цього вчителем має бути заготовлена їх добірка зі зразками розв’язання.

Слід зауважити, що про ступінь оволодіння учнем методом векторів під час розв’язування задач можна судити з того, наскільки вільно він уміє перейти від векторної мови до мови геометрії, і навпаки.

Векторний метод, як і будь-який інший, не є універсальним, хоча і уможливлює розв’язувати широкий круг геометричних задач. Задачі, які розв’язуються за допомогою векторів, поділяються на дві групи: *афінну і метричну*.

Задачі афінної частини геометрії розв’язуються із застосуванням лише лінійних операцій: додавання і віднімання векторів; та множення вектора на число. Тут, переважно, становиться вимога довести паралельність прямих і площин, довести, що дані точки розміщені на одній прямій, дані прямі – належать одній площині тощо.

У задачах метричної частини геометрії, крім лінійних операцій, ще застосовується скалярний добуток векторів, і, найчастіше, ставиться вимога знайти довжину відрізка, величину кута, встановити відношення перпендикулярності прямих і площин та ін. Тому варто повідомити учням наступні евристики.

Стереометричні задачі, які доцільно розв’язувати методом векторів:

1. задачі на доведення паралельності прямих та відрізків;
2. задачі на доведення належності трьох точок одній прямій;
3. задачі на доведення належності чотирьох точок одній площині;
4. задачі на доведення належності даних прямих одній площині;
5. задачі на доведення перпендикулярності прямих, відрізків та площин;
6. задачі на доведення залежностей між довжинами відрізків;
7. задачі на знаходження величини кута між прямими та площинами.

На закінчення вивчення теми пропонуємо показати учням розв'язання геометричних та прикладних задач з одночасним застосуванням векторного та координатного методів. Приклади такого застосування подано нижче.

Задача 4. *Доведіть нерівність Коші-Буняковського:* $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^3}$, *де* $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ *– довільні дійсні числа.*

Доведення

Розглянемо обидві трійки чисел (a_1, a_2, a_3) і (b_1, b_2, b_3) як координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ в координатному просторі. Тоді запишемо скалярний добуток цих векторів: $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Але $\overrightarrow{(a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| cos\varphi$, де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Звідси маємо, що $cos\varphi = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^3}}$.

Оскільки $|cos\varphi| \le 1$, то $\frac{|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^3}} \le 1$.

Отже, $|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3| \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^3}$, нерівність доведена.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, колінеарні, то $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$. Легко перевірити учню, що в такому випадку нерівність перетворюється в рівність.

Задача 5. *Дано прямокутний* ΔMON $(\angle C = 90°)$, $MO = a$, $NO = b$, $OK \perp (MNO)$, $OK = c$. *Визначити відстань від вершини О до площини* (MKN).

Розв'язання

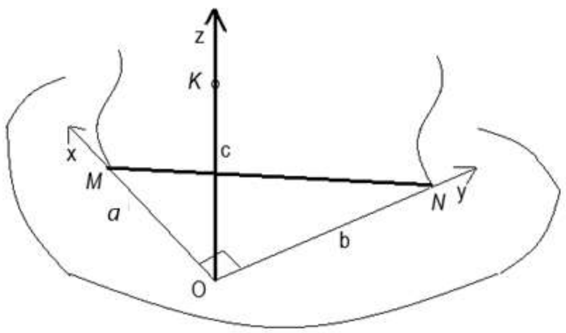


Рис. 7

На рис. 7 зображено даний в умові ΔMON, $OK \perp MNO$. Через три точки, що не лежать на одній прямій *M, K* і *N* проходить площина β. Задамо прямокутну декартову систему координат так, що точка *O* – початок координат, пряма *OM* – вісь абсцис, пряма *ON* – вісь ординат, пряма *OK* – вісь аплікат. Тоді маємо: $O(0;0;0)$, *M*$(a;0;0)$, $N(0;b;0)$, $K(0;0;c)$.

Рівняння площини β буде $Ax + By + Cz + D = 0$ (задача 1, таблиця 3).

Оскільки точки належать площині β, то: для точки $M : A\cdot a + B\cdot 0 + C\cdot 0 + D = 0$, для точки $N : A\cdot 0 + B\cdot b + C\cdot 0 + D = 0$, для точки $K : A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot c + D = 0$. Звідки $A = \frac{-D}{a}$, $B = \frac{-D}{b}$, $C = \frac{-D}{c}$. Отже, рівняння площини β буде : $\frac{-D}{a}\cdot x + \frac{-D}{b}\cdot y + \frac{-D}{c}\cdot z + D = 0$. Розділимо рівняння на $(-D) \neq 0$, матимемо: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ – рівняння площини β. Тоді відстань від точки *O* до площини β знаходимо за формулою:

$$\rho(O;\beta) = \frac{\left|\frac{0}{a}+\frac{0}{b}+\frac{0}{c}-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}} = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}.$$

Відповідь : $\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}$ *лін.од.*

Задача 6. *Вантаж рівномірно переміщують по горизонтальній поверхні в заданому напрямі (або вздовж рейки, або по спеціальних напрямних) за допомогою двох канатів, прикріплених до тракторів. Один з канатів утворює з напрямом руху кут* $15°$*, а другий* $20°$ *(рис. 8). Сила натягу кожного канату 50 кН. Яку роботу буде затрачено для переміщення вантажу на 100 м?*

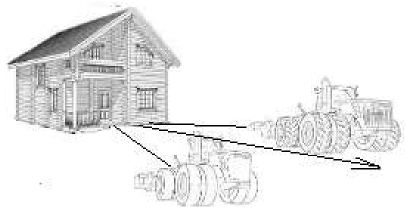


Рис. 8

Розв'язання

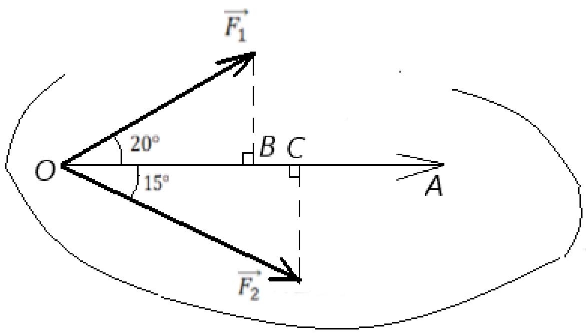


Рис. 9

На рис. 9 зображено напрям дій сил $\vec{F_1}$ і $\vec{F_2}$ та напрям переміщенню *OA*. Точка *O* – точка прикладання сил. Спроекціюємо $\vec{F_1}$ і $\vec{F_2}$ на вісь *OA*. Тоді $\vec{P} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ – сила, яка діє на вантаж. З прямокутних трикутників OBF_1 і OBF_2. Знаходимо, що $OB = F_1\cdot cos20°$, $OC = F_2\cdot cos15°$.

Тоді P=$F_1\cdot cos20° + F_2\cdot cos15° = 50(cos20° + cos15°) \approx 50\cdot(0{,}9397 + 0{,}9659) \approx 95{,}1$ (kH). Роботу, затрачену на переміщення вантажу на 100 *м* знаходимо за формулою: $A = P\cdot S = 95{,}1\cdot 100 = 9510$ (кДж).

Відповідь : ≈ 9510 кДж.

Задача 7. *Куля масою 500 кг і об'ємом 0,7* $м^3$ *утримується в підводному положенні трьома тросами однакової довжини (рис. 10). Обчислити силу натягу кожного троса, якщо кут між двома будь-якими тросами дорівнює* $60°$*.*

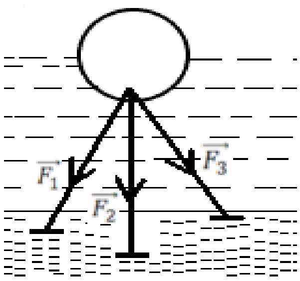


Рис. 10

Розв'язання

Оскільки маса витісненої кулею води на 200 кг більша за масу кулі, то на неї діє підіймальна сила $\vec{F}$, величина якої дорівнює $\approx 2кН$.

Умовою рівноваги кулі є рівність:

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = -\overrightarrow{F} \qquad (1)$$

де $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ – сили натягу троса.

Очевидно, $|\overrightarrow{F_1}|$=$|\overrightarrow{F_2}|$=$|\overrightarrow{F_3}|$.

Позначимо цю величину x.

Піднісши до квадрата рівність (1), дістанемо:

$$\overrightarrow{F_1^2} + \overrightarrow{F_2^2} + \overrightarrow{F_3^2} + 2\overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{F_2} + 2\overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{F_3} + 2\overrightarrow{F_3} \cdot \overrightarrow{F_4} = \overrightarrow{F^2}$$

або $3x^2 + 3 \cdot 2x^2 cos 60° = \overrightarrow{F^2}$,

звідки $x^2 = \frac{1}{6}\overrightarrow{F^2}$ і $x = \frac{\sqrt{6}}{6}|\overrightarrow{F}| \approx 0{,}8$ кН.

Відповідь : $\approx 0{,}8$ кН.

П І Д С У М О К

Вектори мають широке застосування в природничих науках.

Тому, вивчаючи їх на уроках геометрії, важливо навчити учнів застосовувати метод векторів до розв'язування як математичних, так і прикладних задач.

Теоретичну основу методу складають базові задачі – необхідна умова успішного застосування.

МЕТОДИЧНІ ЗАДАЧІ
для самостійного розв'язування

1. Здійсніть порівняльний аналіз змісту теми «Вектори в просторі і їх застосування до розв'язування задач», викладеному в діючих альтернативних підручниках, зробіть узагальнюючі висновки.

2. Створіть добірку задач (практичних і прикладних), які розв'язуються векторним методом, зазначте методичні поради до їх розв'язання.

3. Розв'яжіть задачі:

   1) Точки *P* і *Q* ділять ребра *BC* і A_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ у відношенні 1 : 2, починаючи від точок *B* і A_1. Знайдіть $\angle P\widehat{A}Q$.

   2) Знайдіть кути між діагоналлю куба і діагоналями якої-небудь його грані.

   3) Три промені, що мають спільний початок *O*, попарно перпендикулярні. Площина, яка не проходить через точку *O*, перетинає дані промені в точках *A*, *B, C*. Доведіть, що трикутник *ABC* гострокутний.

   4) Доведіть правильність рівності $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ для будь яких точок *A*, *B, C, D.*

   5) Усі ланки неплоскої ламаної $ABcA$ рівні за довжиною.
   Доведіть, що кут між прямими AB і CD рівний куту між прямими BC і CD.

   6) Три сили, прикладені до однієї точки, утворюють попарно кути, що дорівнюють φ. Знайдіть величину рівнодійної, якщо величина кожної з даних сил дорівнює *F*.

Засади геометричного і аналітичного методів одні й ті самі

О. Конт

Л Е К Ц І Я 3.7

Т Е М А ***Поняття відстані між фігурами в стереометрії***

П Л А Н

1.	***Поняття відстані від точки до фігури в курсі геометрії***
2.	***Приклади розв'язування задач на відстань від точки до фігури***
3.	***Поняття відстані між фігурами в курсі геометрії***
4.	***Приклади розв'язання задач на відстань між фігурами***

К О Н С П Е К Т Л Е К Ц І Ї

1. Поняття відстані від точки до фігури в курсі геометрії

Розглянемо скінчену числову множину $A = \{0{,}1;\ 2;\ 3;\ -1;\ 8;\ 9\}$.

У ній знайдеться таке число, від якого всі інші елементи множини будуть більшими. Це буде число «-1». Таке число називають точно нижньою гранню множини *А* (*infimum* множини *А*) і записують: $-1 = infA$.

Розглянемо нескінченну числову множину $B = \left\{1;\ \frac{1}{2}; \frac{1}{3}\ ; \frac{1}{4};\ \dots;\ \frac{1}{n}; \dots\right\}$.

У ній немає такого числа, від якого всі інші елементи будуть більшими. Проте, існує, наприклад, число «-1» від якого всі елементи множини *В* будуть більшими за нього. В такому випадку кажуть, що множина *В* обмежена знизу. Чи існують інші числа, більші за -1, від яких всі елементи множини *В* будуть більшими за нього? Очевидно, що існують. Але найбільшим буде число 0. У цьому випадку $infA = 0$. З приведених прикладів випливає *означення*.

***Означення*. Точно нижньою гранню числової множини є таке найбільше число $\propto$, від якого всі елементи цієї множини більші за нього або рівні йому.**

Виникає запитання: «*А для якої числової множини завжди існує точно нижня грань*?» Відповідь на це запитання дає теорема. Приведемо її формулювання.

(Доведення цієї теореми є в курсі алгебри і початків аналізу).

***Теорема.* Якщо числова множина обмежена знизу, то вона має точно нижню грань.**

Відстань від точки до фігури

Застосуємо приведені міркування для визначення поняття відстані від точки до фігури. У геометрії під **фігурою** розуміють множину точок площини чи простору. Множина з однією точкою – також фігура.

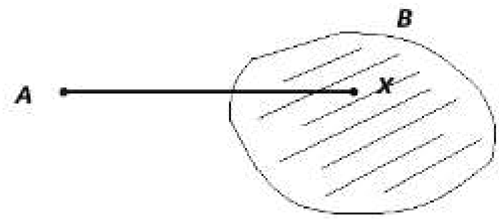


Рис. 1

Нехай задана точка *A* і точка *B*
За відстань від точки *A* до точки *B* приймають довжину відрізка *AB*.
Розглянемо випадок, коди фігура містить більше ніж одну точку.
Нехай дано точку *A* і фігуру *B* (рис. 1).

Виберемо точку $X \epsilon B$ (точка X – замінна точка фігури B). Відстанню від точки A до точки X буде довжина відрізка AX, число $|AX|$.

Якщо точка X змінна, то матимемо множину чисел $|AX|$. Таким чином утворюється числова множина $\{|AX|,\ x \epsilon B\}$.

Оскільки довжина відрізка число додатне, то ця новоутворена числова множина обмежена знизу, наприклад, числом нуль.

Отже, згідно вище доведеної теореми, вона має точно нижню грань. Таке число і приймають за відстань від точки *A* до фігури *B*. Якщо позначити відстань від точки *A* до фігури *B* символом $\rho(A;\ \ B)$, то маємо *означення*.

***Означення*. Відстанню від точка *A* до фігури *B* називають точно нижню грань числової множини $\{|AX|,\ x \epsilon B\}$.**
Інший запис: $\rho(A;\ \ B) = inf\{|AX|,\ X \epsilon B\}$ (1)

З'ясуємо, як це проявляється в шкільному курсі геометрії. Тобто як визначають відстань від точки до деяких фігур і чому саме так.

а) *Відстань від точки до прямої*

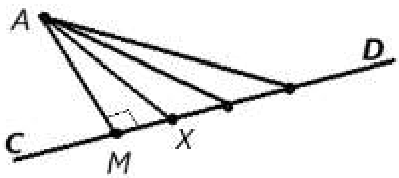


Рис. 2

Нехай дано точку *A* і пряму *CD* (рис. 2).
Виберемо точку X на прямій *CD.*
Маємо довжину відрізка $|AX|$.

Якщо точка X рухається вздовж прямої *CD*, то матимемо нескінченну множину похилих. Найменшу довжину буде мати перпендикуляр *AM*, проведений до прямої

CD з точки *A.* **Тому в шкільному курсі геометрії за відстань від точки до прямої приймають довжину перпендикуляра, проведено з цієї точки до прямої.**

Отже, $\rho(A;\ CD)$ =$|AM| = inf\{|AX|,\ X \epsilon CD\}$.

б) ***Відстань від точки до площини***

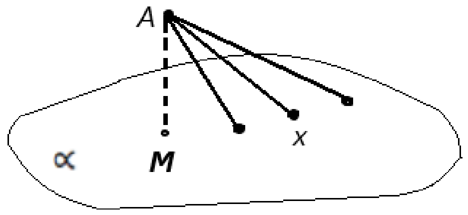


Рис. 3

Нехай дано точку A і площину ∝ (рис. 3). Щоб з'ясувати, що буде відстанню від точки A до площини ∝, виберемо на площині ∝ точку X.

Маємо довжину відрізка $|AX|$*.* Змінюючи розташування точки X на площині ∝, матимемо нескінченну числову множину $\{|AX|,\ X \epsilon\ \propto\}$. Всі відрізки AX, крім одного $AM \perp \propto$, матимуть довжину більшу за $|AM|$. Отже, $\rho(A;\ \propto) = inf\{|AX|,\ x \epsilon\ \propto\} = |AM|$.

Тому за відстанню від точки до площини в стереометрії приймають довжину перпендикуляра, проведеного з даної точки до площини. Часто в задачах говориться про відстань від точки до відрізка чи променя. Виходячи з загального означення відстані від точки до фігури сформулюємо відповідні означення для відрізка та променя.

в) ***Відстань від точки до відрізка***

Нехай на площині дано точку *M*, яка не належить відрізку *AB*. Основа перпендикуляра, проведеного з точки *M* до прямої *AB*, точка *N* може належати відрізку *AB*, а може і не належати (рис. 4 *а),*рис. 4 *б*)).

$\boldsymbol{N \epsilon AB}$

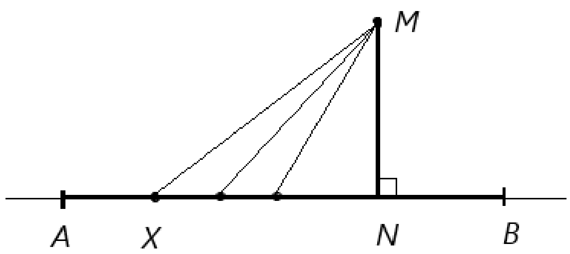


рис. 4 *а*)

Виберемо довільну точку X відрізка *AB*.
Маємо похилу MX, її довжину число $|MX|$.
Тому $inf\{|MX|,\ x \epsilon [AB]\} = |MN|$.

$\boldsymbol{N \notin AB}$

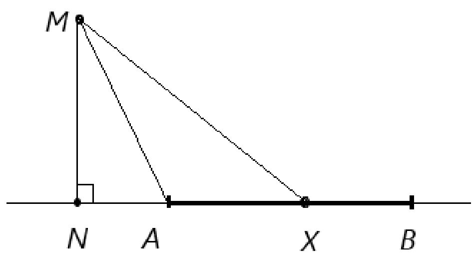


рис. 4 *б*)

Виберемо довільну точку X відрізка.
Маємо похилу MX, її довжина число $|MX|$.
Зрозуміло, що найменшою за довжиною буде похила *MA (бо має найменшу проекцією).*
Тому $inf\{|MX|,\ x \epsilon [AB]\} = |MA|$.

Отже маємо:

***Означення*. За відстань від точка до відрізка приймають довжину перпендикуляра, проведеного з цієї точки до прямої на якій лежить відрізок, якщо основа перпендикуляра належить відрізку. В іншому випадку відстанню від точки до відрізка буде відстань від цієї точки до найближчого з кінців даного відрізка.**

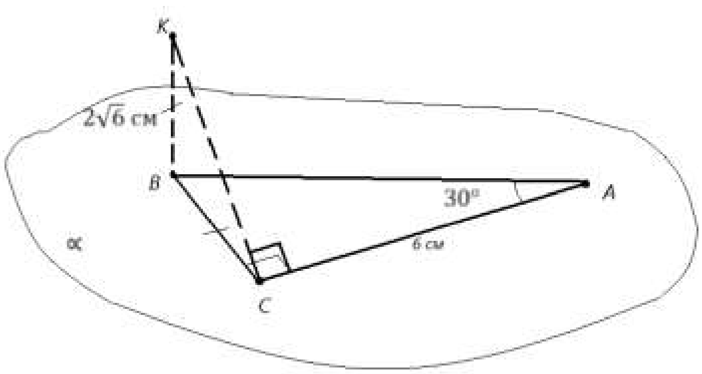
г) *Відстань від точки до променя*

Обґрунтування і формулювання означення відстані від точки до променя виконайте самостійно.

2. Приклади розв'язування задач на відстань від точки до фігури

Задача 1. *У прямокутному трикутнику АСВ кут А дорівнює* $30°$*, а більший катет 6 см. Із вершини гострого кута В проведено перпендикуляр* $BK = 2\sqrt{6}$ *см до площини трикутника. Знайдіть відстань від точки К до катета АС.*

Розв'язання



Дано:
$\Delta ACB, \angle C = 90°, \angle A = 30°,$
$AC = 6$ см$, BK \perp (ACB),$
$BK = 2\sqrt{6}$ см.
Визначити: $\rho(K; AC)$.

Рис. 5

На рис. 5 зображено площину ∝ в якій лежить прямокутний ΔACB $(\angle C = 90°)$.

Оскільки $BC \perp AC, BK \perp (ACB)$, то похила $KC \perp AC$ (теорема про три перпендикуляри).

Точка *С* належить відрізку *АС*, тому $\rho(K; AC) = |KC|$ (таке обґрунтування – невід'ємний атрибут розв'язання).

З ΔACB знаходимо : $BC = AC \cdot tg30°$, $BC = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ *см.*

З ΔKBC знаходимо : $KC = \sqrt{BK^2 + BC^2}$, $KC = \sqrt{24 + 12} = \sqrt{36} = 6$ *см.*

Відповідь : $\rho(K; AC) = 6$ *см.*

Задача 2. *Точка лежить поза площиною прямого кута і знаходиться на відстані 8 см від кожної із сторін цього кута. Знайдіть відстань від точки до вершини кута, якщо вона віддалена від площини на* $2\sqrt{7}$ *см.*

Розв’язання

Випадок 1. (рис. 6)

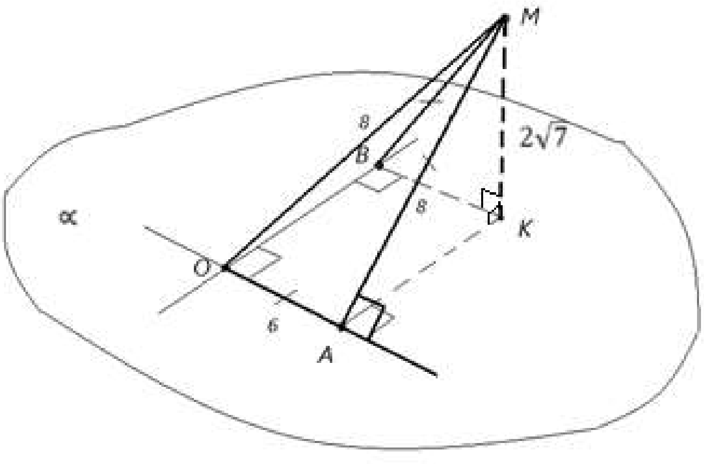


Рис. 6

Позначимо точку, про яку йде мова в задачі, буквою *M*. Якщо провести з неї перпендикуляр до площини ∝, в якій лежить даний в умові задачі $\angle AOB$, то основа цього перпендикуляра може розміщуватись на площині ∝ по-різному.

Нехай точка $K \epsilon \angle BOA$. Тоді проведемо $KA \parallel OB$, $KA \perp OA$.

За теоремою про три перпендикуляри $MA \perp OA$.

Точка *A* належить променю *OA*.

Отже, $\rho(M;OA) = MA = 8$ *см.*

Міркуючи аналогічно отримаємо: $\rho(M;OB) = MB = 8$ *см.*

Визначити *MO*.

Чотирикутник $OBKA$ – квадрат.

З ΔMKB : $BK = \sqrt{BM^2 - MK^2} = \sqrt{64 - 28} = 6$ *см.*

$OA = 6$ *см.*

$OK = 6\sqrt{2}$ *(см)* (як діагональ квадрата).

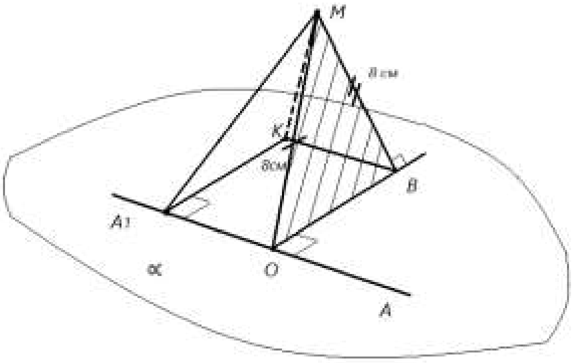
З ΔMKO, $\angle K = 90°$,

$MO = \sqrt{MK^2 + OK^2}$,

MO$= \sqrt{28 + 72} = \sqrt{100} = 10$ *см.*

MO $= 10$ *см.*

Випадок 2. (рис. 7)



Нехай *K* лежить всередині суміжного кута $\angle A_1OB$.

$\angle A_1OB = 90°$.

$K \epsilon \angle BOA_1$.

$MK = 2\sqrt{7}$ *см.*

Рис. 7

Проведемо $KB \perp OB$, $MB \perp OB$.

Точка *B* належить променю *OB*.

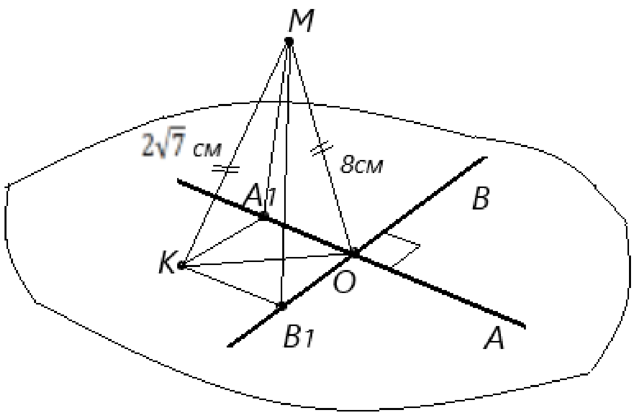
Отже, $\rho(M; OB) = MB = 8$ *см.*

$KA_1 \perp A_1O$, $MA_1 \perp A_1O$. Точка $A_1 \notin OA$. Тому $\rho(M; OA) = MO = 8$ *см.*

Отримуємо, що в прямокутному ΔMBO катет *MB* і гіпотенуза *MO* – рівні.

Отримали протиріччя. Отже, такого розміщення точки *K* бути не може.

Випадок 3. (рис. 8)



Нехай *K* лежить всередині вертикального кута $\angle A_1OB_1$,

$\angle A_1OB_1 = 90°$.

$K \epsilon \angle A_1OB_1$, $MK = 2\sqrt{7}$ *см,*

$KA_1 \parallel OB_1$, $MA_1 \perp OA$.

Точка A_1 не лежить на промені OA.

Рис. 8

Отже, $\rho(M; OA) = MO = 8$ *см.*

Аналогічно $\rho(M; OB) = MO = 8$ *см.*

Чотирикутник A_1KB_1O – квадрат. ΔMKO прямокутний трикутник.

Порівняємо KM і MO: $2\sqrt{7}$ і 8.

Оскільки, $(2\sqrt{7})^2 = 28$; $8^2 = 64$, то $MO > MK$.

Отже, $MO = 8$ *см*.

Відповідь : 10 *см*, 8 *см*.

****) Методичний коментар.*** Викладений вище фрагмент теоретичних пояснень варто повідомити старшокласникам у вигляді шкільної лекції під час вивчення теми «Перпендикулярність прямих і площин в просторі» (лекційно-практична форма навчання). Розкривши і поглибивши зміст даної теми, а головне, ознайомивши учнів з поняттям відстані від точки до фігури, навчити їх правильно застосовувати отримані знання. Надалі щоразу, коли в задачі піде мова про відстані від точки до фігури (відрізка, променя, кола чи іншої фігури), вчити чітко з'ясувати і обґрунтовувати довжина якого відрізка буде цією відстаню.

3. Поняття відстані між фігурами в курсі геометрії. Приклади розв'язування задач на відстань між фігурами

Оволодівши поняттям відстані від точки до фігури, учням не важко буде засвоїти поняття відстані між фігурами. Його зміст, формулювання означення, застосування до розв'язування задач варто повідомити учням у формі шкільної лекції, залучаючи їх до активної співпраці. Конспект такої лекції викладено нижче.

* * *

Нехай задано дві геометричні фігури A і B (рис. 9).

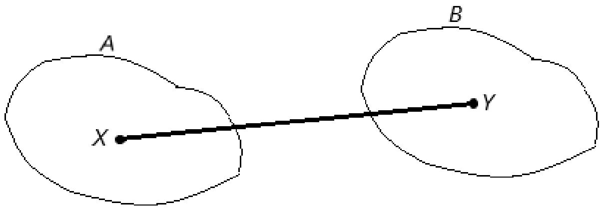


Рис. 9

Виберемо довільну точку $X \epsilon A$, і довільну точку $Y \epsilon B$. Відстаню між точками X і Y буде довжина відрізка $|XY|$. Змінюючи точки X і Y, щоразу будемо отримувати нові числа. Утвориться числова множина обмежена знизу (наприклад числом 0).

Згідно згаданої вище теореми, вона матиме точно нижню грань. Її і приймають за відстань між фігурами A і B. Отже, маємо означення, записане в символьній формі.

Означення. $\boldsymbol{\rho(A;\ B) = inf\{|XY|,\ X\epsilon A,\ Y\epsilon B\}}$**, де** $\boldsymbol{A}$ **і** $\boldsymbol{B}$ **– геометричні фігури.**

Розглянемо дане означення для конкретних фігур A і B, які найчастіше розглядаються в задачах.

а) Відстань між двома паралельними прямими

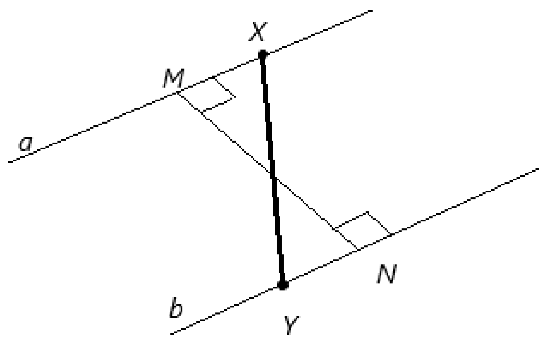


Рис. 10

Нехай дано дві прямі a і b, $a \parallel b$.

Виберемо довільні точки $X \epsilon a$ і $Y \epsilon b$

та проведемо відрізок $MN \perp a$.

MN – спільний перпендикуляр для прямих a і b. Його можна проводити довільно, з будь-якої точки прямої a.

Відрізок XY – похила до прямої b.

Тому $|XY| \geq |MN|$. Отже,

$\rho(a;\ b) = inf\{|XY|, X \epsilon a, Y \epsilon b\} = |MN|$.

Таким чином відстанню між двома паралельними прямими є довжина їх спільного перпендикуляра.

б) Відстань між двома мимобіжними прямими

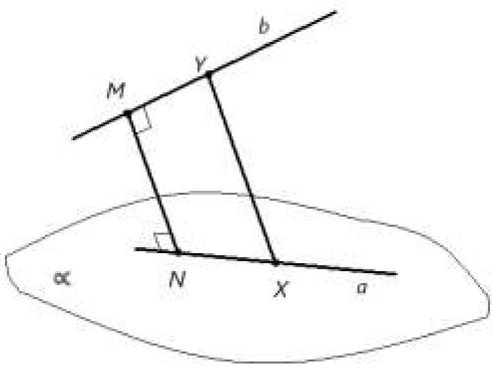


Рис. 11

Нехай задано дві прямі a і b.

Одна з них $a \subset \propto$, $b \not\subset \propto$.

Для них існує спільний перпендикуляр MN (він єдиний).

Виберемо довільні точки $X \epsilon b$ і $Y \epsilon a$.

Відрізок XY буде більшим за спільний перпендикуляр. Отже,

$\rho(a;\ b) = inf\{|XY|, X \epsilon a, Y \epsilon b\} = |MN|$.

Тому за відстань між двома мимобіжними прямими приймають довжину їх спільного перпендикуляра.

в) Відстань між двома паралельними площинами

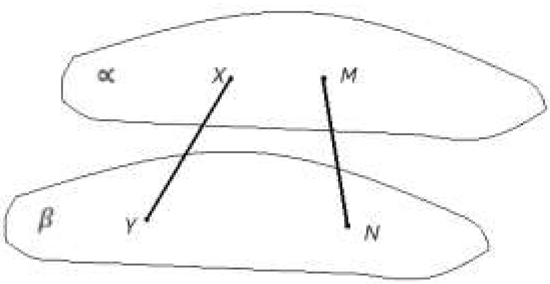


Рис. 12

Нехай дано дві паралельні площини $\propto$ і β.

З довільної точки M площини $\propto$ проведено перпендикуляр MN до площини β. Це є спільний перпендикуляр.

Виберемо довільні змінні точки $X \epsilon \propto$ і $Y \epsilon \beta$. Відрізок XY буде не меншим за довжину відрізка MN. Отже,

$\rho(\propto;\ \beta) = inf\{|XY|, X \epsilon \propto,\ Y \epsilon \beta\} = |MN|$.

Тому за відстань між двома паралельними площинами приймають довжину їх спільного перпендикуляра.

г) Відстань між прямою і паралельною до неї площиною

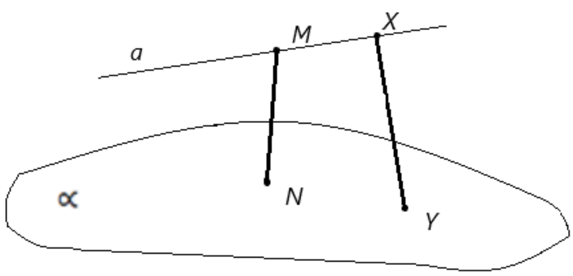


Рис. 13

Нехай дано пряму a і площину $\propto, a \parallel \propto$.
З довільної точки N прямої a проведемо перпендикуляр MN до площини ∝. Це їх спільний перпендикуляр, він не єдиний. Виберемо довільні змінні точки $X \epsilon a$ і $Y \epsilon \propto$. Відрізок XY буде не меншим за довжину відрізка MN. Отже,
$\rho(a; \propto) = inf\{|XY|, X \epsilon a, Y \epsilon \propto\} = |MN|$.

Тому за відстань між прямою і паралельною до неї площиною приймають довжину їх спільного перпендикуляра.

Розгляд інших випадків відстані між фігурами рекомендуємо продовжити під час розв'язування стереометричних задач.

Проілюструємо застосування вказаних означень на прикладах розв'язування стереометричних задач.

Їх варто розпочати з розгляду двох важливих задач-теорем, здійснивши доведення, надалі можна користуватись новими теоретичними знаннями, що доповнюють зміст шкільного курсу геометрії.

Задача-теорема 1. Нехай a і *b* мимобіжні прямі, $\propto$ – площина, яка перпендикулярна до прямої, a. A_0 – їх точка перетину, b' – ортогональна проекція прямої b на $\propto$. Тоді відстань від точки *A* до прямої b' рівна довжині спільного перпендикуляра XY (відстані) до прямих a і *b*. Тобто $\boldsymbol{\rho(a; b) = \rho(A_0; b')}$.

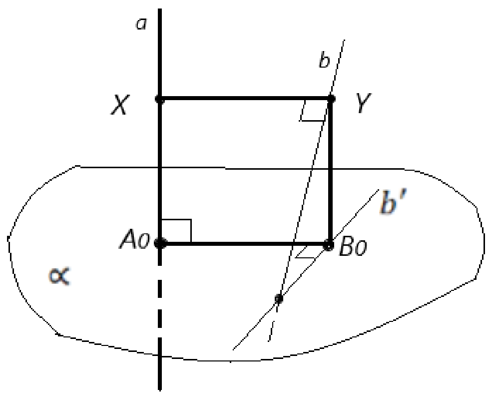


Рис. 14

Доведення

Нехай $XY \perp a$ і $XY \perp b$, $X \epsilon a$, $Y \epsilon b$.
Оскільки $a \perp \propto$, то $XY \parallel \propto$.
Отже, при ортогональній (і при будь-якій паралельній) проекції.
XY – спроекціюється на рівний йому відрізок $(A_0; B_0)$.
Оскільки $XY \perp b$, то за теоремою про три перпендикуляри $A_0B_0 \perp b'$.
Отже $XY = A_0B_0$ – що необхідно було довести.

Задача-теорема 2. Якщо a і *b* – катети прямокутного трикутника, то висота цього трикутника, опущена на гіпотенузу, обчислюється за формулою:

$$\boldsymbol{h = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}\ .$$

Вивід цієї формули дуже простий, якщо скористатись формулами для обчислення площі прямокутного трикутника.

Довести самостійно.

Задача 3.
Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро якого дорівнює a.
На ребрі *DC* взята точка *P* – середина цього ребра. Знайти відстані між такими парами прямих:
а) AA_1 і D_1P ;
б) AD і D_1P ;
в) BD і D_1P.

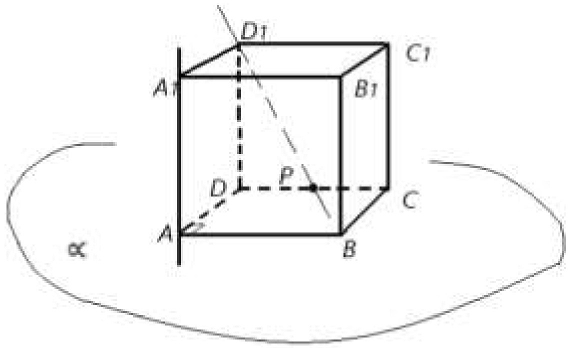


Рис. 15

Розв'язання

а) Знайти $\boldsymbol{\rho(AA_1; D_1P)}$

Прямі AA_1 і D_1P – мимобіжні (рис. 15).

$AA_1 \perp\propto$ – площині, в якій лежить основа куба. Пряма DC – проекція D_1P на площину $\propto$. Тому за задачею-теоремою 1 $\rho(AA_1; D_1P)$ = $\rho(A;\ DC) = |AD| = a$. $\rho(AA_1; D_1P) = a$.

б) Знайти $\boldsymbol{\rho(AD;\ \ D_1P)}$

Прямі AD і D_1P – мимобіжні (рис. 15).

$AD \perp\ (D_1DP)$. Тому за задачею-теоремою 1 $\rho(AD;\ D_1P) = \rho(D;\ D_1P)$.

Ця відстань буде дорівнювати висоті прямокутного ΔD_1DP, проведеної з вершини D на гіпотенузу D_1P. Оскільки $DD_1 = a$, $D_1P = \frac{a}{2}$, то, (за задачею-теоремою 2) $h = \frac{DD_1 \cdot DP}{\sqrt{{DD_1}^2 + DP^2}}$, де h – висота. Отже, $\rho(AD;\ \ D_1P) = h = \frac{a \cdot \frac{a}{2}}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\sqrt{\frac{5a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. $\rho(AD;\ D_1P) = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

в) Знайти $\rho(BD;\ D_1P)$

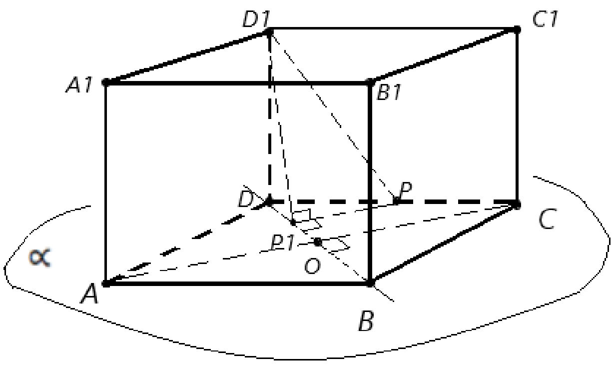


Рис. 16

Розглянемо діагональну площину (A_1AC), $DB \perp (A_1AC)$. Проведемо $PP_1 \perp DB$. Прямі DB і D_1P – мимобіжні (рис. 16). Проекцією прямої D_1P на площину (DD_1B) буде пряма D_1P_1.

Тоді за задачею-теоремою 1 маємо : $\rho(DB;\ D_1P) = \rho(D;\ D_1P_1)$

Ця відстань буде дорівнювати висоті прямокутного ΔD_1DP_1, проведеної до гіпотенузи. Позначимо її через h_1. Тоді $h_1 = \frac{D_1D \cdot DP_1}{\sqrt{D_1D^{\,2} + DP_1^{\,2}}}$ (Задача-теорема 2).

З прямокутника ΔDP_1O знаходимо $P_1P = \frac{1}{1}OC = \frac{1}{4}AC = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

З ΔD_1DP_1 знаходимо $D_1P_1 = \sqrt{D_1D^2 + DP_1^2}$ $(DP_1 = P_1P)$, тобто $D_1P = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{8}} = \frac{3a}{2\sqrt{2}} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$. Маємо: $h = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{3a\sqrt{2}}{4}} = \frac{a}{3}$. $\rho(BD;\ D_1P) = \frac{a}{3}$.

Відповідь : а) *a* ; б) $\frac{a\sqrt{5}}{5}$; в) $\frac{a}{3}$.

Задача 4.

У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$, сторона основи дорівнює 6 см, а висота дорівнює 4 см. Знайти відстань від вершини *A* до грані SCD.

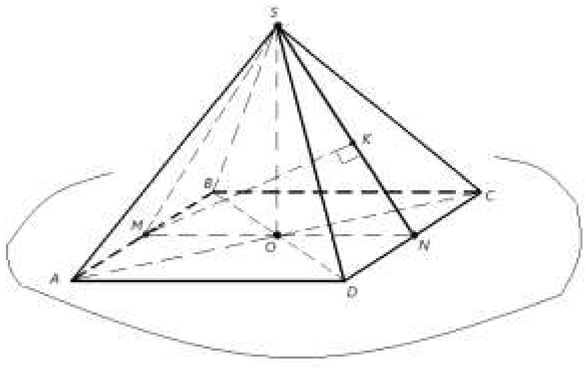


Рис. 17

Розв'язання

Точка *A* лежить на прямій *AB* яка паралельна до площини (SDC). Тому $\rho(A;\ (SDC)) = \rho(AB;\ (SDC))$. Побудуємо переріз піраміди $SABCD$ площиною, яка проходить через висоту SO і точку *M* – середину ребра *AB*. ΔSMN – переріз. Очевидно, що $AB \perp (SMN)$. Тоді $\rho(AB;\ (SDC)) = \rho(M;\ (SDC))$. Виразником відстані від точки *M* до площини (SDC) буде перпендикуляр, проведений з точки *M* на цю площину. Цей перпендикуляр буде висотою ΔSMN, проведеною з вершини *M*. Позначимо її через *MK*. Тоді, $\rho\big(A;\ (SDC)\big) = \rho\big(M;\ (SN)\big) = MK$. У ΔMSN, $MO = \frac{1}{2}AD = 3$ *(см),* $SO = 4$ *(см).* Тому $SM = 5$*(см).* Площу цього трикутника можна обчислити за двома формулами: $S_{\Delta SMN} = MO \cdot SO$ або $S_{\Delta SMN} = \frac{1}{2}SN \cdot MK.$ Прирівнявши праві частини рівностей матимемо: $\frac{1}{2}SN \cdot MK = MO \cdot SO$. Звідси $MK = \frac{2MO\cdot SO}{SN}$. Отже, $MK = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{5} = \frac{24}{5} = 4{,}8$ *см*.

Відповідь: $\rho\big(A;\ (SDC)\big) = 4{,}8$ *см*.

П І Д С У М О К

Навчаючи учнів розв’язуванню задач, в яких використовуються відомі означення відстані між вивченнями фігурами, слід чітко обґрунтовувати яка (відрізок) буде виразником цієї відстані.

Якщо розглянуті фігури відрізняються від раніше вивчених, то користуючись загальним означенням, потрібно спочатку встановити що слід прийняти за відстань між фігурами і тільки тоді приступати до обчислень.

Викладений вище зміст доцільно використати як дві шкільні лекції під час вивчення теми «Перпендикулярність прямих і площин в просторі».

МЕТОДИЧНІ ЗАДАЧІ

для самостійного розв’язування

1. Обґрунтуйте та сформулюйте означення відстані :
   а) від точки до кола (розгляньте два випадки: точка за межами кола: точка всередині кола) ;
   б) від точки до сфери (розгляньте два випадки: точка за межами сфери: точка всередині сфери).

2. Розв’яжіть задачі:
   а) Із точки, яка віддалена від площини на 12 см, проведено до площини дві похилі, довжини яких 6 см і 8 см. Кут між проекціями цих похилих дорівнює $90°$. Знайдіть відстань від цієї точки до прямої, що проходить через основи похилих (відповідь округліть до десятих, зверніть увагу на правильність рисунка).
   б) Менша сторона паралелограма дорівнює 16 см, а один з кутів $30°$. Із точки, яка ділить його більшу діагональ у відношенні 3 : 1, проведено перпендикуляр до площини паралелограма довжиною 8 см. Знайдіть відстань від іншого кінця перпендикуляра до прямих, на яких лежать більші сторони паралелограма.
   в) Площі двох рівнобедрених трикутників дорівнюють 48 см^2 і 90 см^2. Спільна основа цих трикутників має довжину 12 см. Відстань між вершинами цих трикутників 13 см. Знайдіть відстань між прямою, яка містить основу, і прямою, яка проходить через вершини трикутників.
   г) Знайдіть відстань між прямою, що містить ребро куба, і прямою, що містить його діагональ, які не перетинаються, якщо ребро куба 1 см.
   д) Знайдіть відстань між прямими, що містять діагоналі суміжних граней куба, які не перетинаються, якщо ребро куба a.

Алгебра і геометрія – єдині країни, де панують тиша і мир
Марія Аньєзі

Л Е К Ц І Я 3.8

Т Е М А *Геометричні тіла і їх властивості*

П Л А Н

1.	***Місце теми в програмі, зміст навчального матеріалу, основна мета вивчення, вимоги до підготовки учнів***
2.	***Формування поняття циліндра, призми, конуса, піраміди, кулі. Класифікація геометричних тіл***
3.	***Призми і піраміди та їх властивості***
4.	***Тіла обертання та їх властивості***

К О Н С П Е К Т Л Е К Ц І Ї

1. Місце теми в програмі, зміст навчального матеріалу, основна мета вивчення, вимоги до підготовки учнів

Другу групу геометричних фігур, що вивчаються в курсі стереометрії профільної школи складають геометричні тіла: призми, піраміди, правильні многогранники, циліндри, конуси, кулі. Це також віртуальні моделі реальних фізичних об’єктів. У діючій програмі з математики на їх вивчення виділено дві навчальні теми: 1) Тема 6. Многогранники (28 год); 2) Тема 7. Тіла обертання (20 год).

Ці ж теми розглядають також і в старшій школі, де математика вивчається за програмою рівня стандарту (кількість навчальних годин менша). Зміст навчального матеріалу обох тем, навчальні досягнення учнів подано у таблиці 1.

Таблиця 1

Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення учнів
Тема 6. МНОГОГРАННИКИ (28 год) Двогранний кут. Лінійний кут двогранного кута. Многогранні кути. Многогранник та його елементи. Опуклі многогранники. Призма. Пряма і правильна призми. Паралелепіпед. Піраміда. Зрізана піраміда. Правильна піраміда. Площі бічної та повної поверхонь призми, піраміди, *зрізаної піраміди.* *Відношення площ поверхонь подібних многогранників.* Правильні многогранники.	*Розпізнає* основні види многогранників та їх елементи. *Формулює* означення двогранного кута, лінійного кута двогранного кута, многогранного кута, многогранників, вказаних з місті програми. *Обґрунтовує* властивості многогранників, формули для обчислення площ бічної та повної поверхонь призми, піраміди, зрізаної піраміди. *Будує* зображення многогранників та їх елементів, користуючись властивостями паралельного проектування. *Обчислює* основні елементи многогранників. *Будує* перерізи многогранників площиною. *Використовує* вивчені формули і властивості для розв’язування задач.

Тема 7. ТІЛА ОБЕРТАННЯ (20 год) Тіла і поверхні обертання. Циліндр, конус, зрізаний конус, їх елементи. Перерізи циліндра і конуса (осьові та площиною, паралельною до його основи; *переріз циліндра площиною, паралельною до його осі; переріз конуса площиною, яка проходить через його вершину).* Площина, дотична до циліндра *(конуса).* Куля і сфера. Переріз кулі площиною. *Частини кулі (сегмент, сектор, пояс).* Площина *(пряма),* дотична до сфери.	*Розпізнає* види тіл обертання та їх елементи. *Будує* зображення тіл обертання, їх елементів, перерізів. *Обчислює* основні елементи тіл обертання. *Обґрунтовує* властивості тіл обертання, застосовує їх до розв'язування задач.

Основна мета вивчення:

а) Тема 6. Многогранники:

- сформувати в учнів систематизовані знання про такі многогранники як: *призма, піраміда, зрізана піраміда, правильні многогранники*;
- навчити, користуючись методом паралельного проєкціювання, виконувати їх ілюстративні зображення;
- навчити розв'язувати задачі на співвідношення між елементами многогранників.

б) Тема 7. Тіла обертання:

- сформувати в учнів систематизовані знання про такі тіла обертання як: циліндр, конус, зрізаний конус, куля;
- навчити, користуючись методом ортогонального проєкціювання, виконувати їх ілюстративні зображення;
- навчити розв'язувати задачі на співвідношення між елементами тіл обертання.

2. Формування поняття циліндра, призми, конуса, піраміди, кулі. Класифікація геометричних тіл

Уявлення про куб, паралелепіпед, призму, піраміду, циліндр, конус, кулю учні мають ще з початкової та базової школи, де проводилося пропедевтичне знайомство з такими геометричними фігурами. Тепер же настав час сформувати систематизовані теоретичні знання: означення названих геометричних фігур, їх властивості (теореми), застосування в якості віртуальних моделей для розв'язування практичних та прикладних задач. У шкільних альтернативних підручниках можна бачити різні підходи до вивчення навчального матеріалу обох вказаних тем. Ми ж пропонуємо власний підхід, який, як на наш погляд, має право на існування. Наш підхід відрізняється більшою компактністю викладу теоретичного матеріалу, не менший за інформаційною цінністю і дає змогу більше часу відвести розв'язуванню практичних та прикладних задач.

Для вивчення обох тем пропонуємо скористатися лекційно-практичною формою навчання. На перших лекціях, оснащених доцільними презентаціями, ілюстративними малюнками, пропонуємо розглянути з учнями всі стереометричні фігури, вивчення яких передбачено навчальною програмою.

Лекція на тему

«Призми і циліндри»

Циліндри, конуси, призми, піраміди, кулі – віртуальні геометричні тіла (моделі), створені людською уявою. Ними люди послуговуються при побудові, експлуатації, проектуванні реальних об'єктів, шо мають схожі з ними просторові форми. З'ясуємо більш детально, що це за фігури і які їх, важливі, з точки зору використання, властивості.

Зупинимося на вивченні відомостей про призми і циліндри.

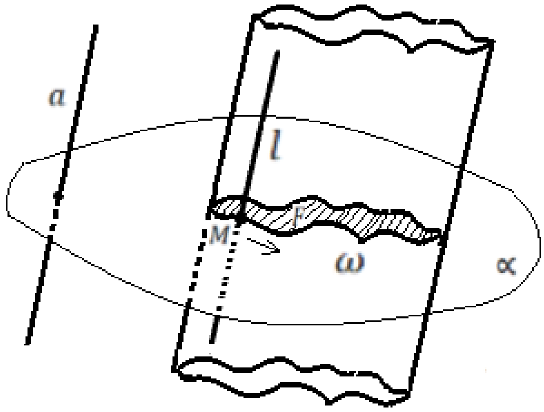


Рис. 1

Розглянемо в просторі площину ∝ і пряму *a*, яка їй не паралельна (рис. 1). Задамо на площині ∝ замкнуту лінію ω, яка не має самоперетинів. Вона обмежить на площині деяку область *F*. Виберемо у просторі пряму $l \parallel a$, яка перетинає лінію ω в точці *M*. Будемо переміщувати пряму l вздовж лінії ω так, щоб вона залишилася паралельною до прямої *a*.

Ця пряма опише в просторі геометричну фігуру, яку називають циліндричною поверхнею. Пряму l називають твірною, а лінію ω – напрямною лінією циліндричної поверхні.

Циліндрична поверхня розділить простір на дві області:

внутрішню (ту що містить фігуру *F*) і *зовнішню*.

Проведемо дві паралельні площини π_1 та π_2, які не паралельні прямій *a*. Вони перетнуть циліндричну поверхню по двох рівних лініях. Частина простору обмежена циліндричною поверхнею і двома паралельними плошинами π_1 та π_2 – нова фігура, яка називається циліндром (рис. 2). Тож маємо наступне означення.

Означення 1. ***Циліндром називається частина простору, обмежена двома паралельними площинами, не паралельними твірній, і циліндричною поверхнею.***

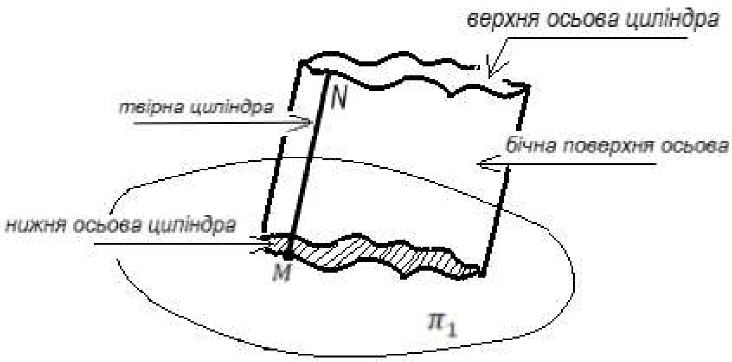


Рис. 2

Частина циліндричної поверхні, обмежена площинами π_1 та π_2 – ***називається бічною поверхнею циліндра***.

Фігури, які утворюються при перетині і належать площинам π_1 та π_2 називаються умовно (залежно від розташування циліндра в просторі), відповідно нижньою та верхньою основами циліндра. Зрозуміло, що вони рівні (оскільки їх можна сумістити паралельним перенесенням на $\overrightarrow{MN}$). Частину твірної l – відрізок MN – ***називають твірною циліндра***.

Циліндрів існує безліч.

Їх розрізняють, наприклад, за такою ознакою

(перша класифікація циліндрів):

- якщо твірна перпендикулярна до основи, то циліндр називається прямим;
- в іншому випадку, циліндр називається похилим.

Поділ циліндрів на класи за цією ознакою подано на рис. 3.

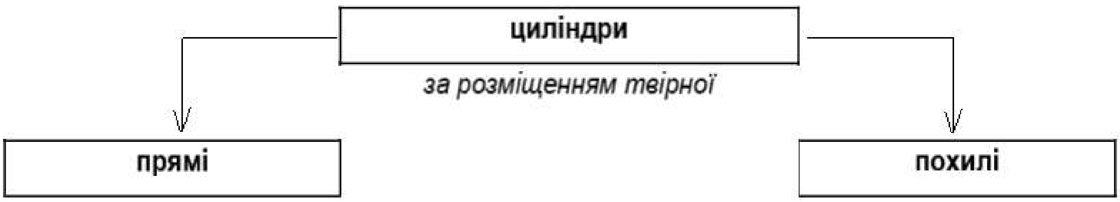


Рис. 3

Можна розрізняти циліндри за іншою ознакою

(друга класифікація циліндрів за видом напрямної лінії ω):

- якщо напрямна лінія ω – замкнута ламана (многокутник), то такий циліндр називають призмою;

- якщо напрямна лінія ω не многокутник, то назва залишається тією ж.

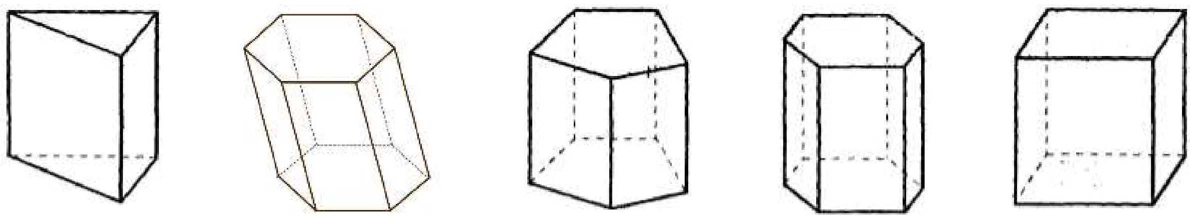
Поділ циліндрів на класи за другою ознакою подано на рис. 4.

Рис. 4

У шкільному курсі стереометрії призми та їх види вивчаються в темі «Многогранники», а «Циліндр» (не призми) в темі «Тіла обертання».

За першою ознакою (за розміщенням твірної) призми бувають *прямі і похилі*, а за другою (за видом многокутника в основі) – *трикутні, чотирикутні* і т. д.

Назвіть призми, подані на рис. 5 *а)-д).*



а) б) в) г) д)

Рис. 5

Якщо призма пряма, а в основі лежить *правильний многокутник*, то така призма ***називається правильною***.

Бічна поверхні будь-якої призми складається з паралелограмів, які ***називаються бічними гранями.***

Дві сторони кожної грані (твірні) називаються ***бічними ребрами***.

Перпендикуляр, проведений з верхньої основи до площини нижньої основи ***називають висотою призми***.

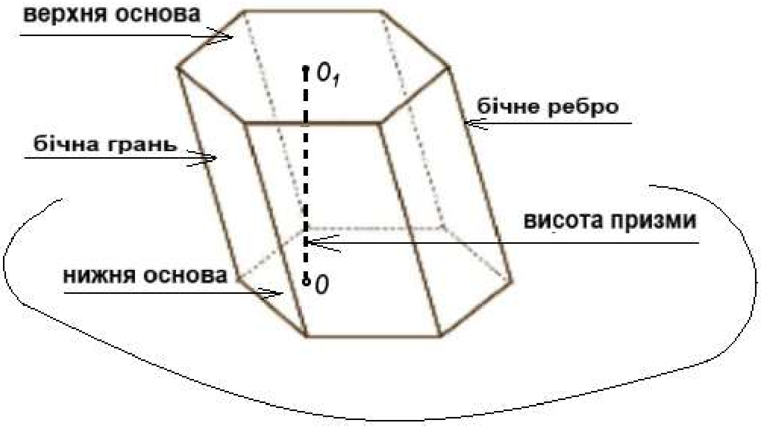


Рис. 6. Призма і її елементи

Призми, основами яких є паралелограми, ***називають паралелепіпеди***.

Якщо основою прямого паралелепіпеда є прямокутник, то такий паралелепіпед ***називають прямокутний***. Куб – прямокутний паралелепіпед, всі грані якого рівні квадрати.

Поділ паралелепіпедів на види подано на рис. 7.

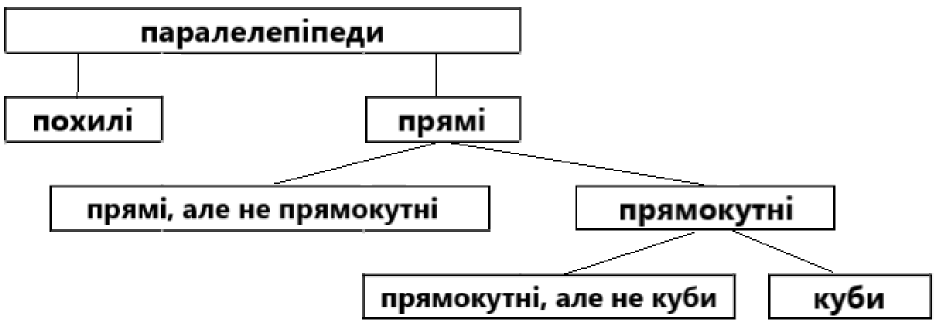


Рис. 7

Зупинимося детально на циліндрах (не призмах).

Циліндри, як вже зазначалося вище, бувають *похилі і прямі*.

Якщо напрямлена лінія ω – коло, то такі циліндри ***називаються круговими***, якщо еліпс – ***то еліптичні*** і т. д.

У шкільному курсі стереометрії вивчаються лише прямі кругові циліндри. У таких циліндрах твірна перпендикулярна до площини основи, вона ж є також ***висотою циліндра***. Прямий круговий циліндр (рис. 8) можна отримати як тіло обертання, утворене обертанням плоского прямокутника навколо однієї із сторін. Звідси і походить назва теми 7 Тіла обертання.

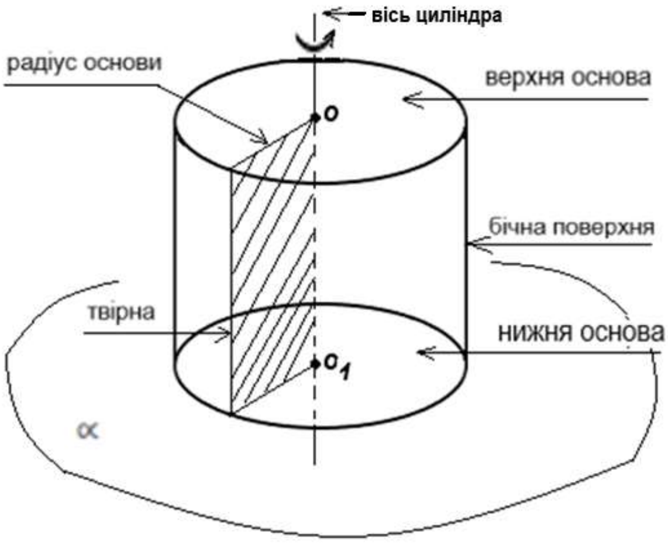


Рис. 8. Циліндр і його елементи

Зі змісту лекції дізнаємося про такі геометричні тіла як циліндр, призма, паралелепіпед. Знайомство з іншими відбудеться пізніше.

КІНЕЦЬ ЛЕКЦІЇ

Після проведення вказаної вище лекції пропонуємо провести наступне практичне (семінарське) заняття на закріплення вивченого матеріалу. На такому занятті, разом із учнями, варто сформулювати відповідні означення вивчених геометричних тіл, розв'язати задачі на їх розпізнавання за готовими рисунками і моделями. Всі означення понять, крім означення циліндра (яке, як бачимо є конструктивними), будуть родо-видові. Учням варто розкрити методику формування таких означень на конкретному прикладі, а потім надати їм можливість робити це самим. Зрозуміло, що вчитель в цій ситуації буде рецензентом запропонованих означень.

Приведемо приклад такого формулювання означення призми. Насамперед, учнів слід запитати: «До якого роду (див. рис. 4) належить призма?». Очікувана відповідь «До роду циліндрів».

Нове запитання: «Чим відрізняється призма від інших циліндрів (яка видова відзнака такого циліндра?)». Очікувана відповідь «В основі такого циліндра є многокутник». Отже, можна сформулювати таке означення циліндра:

Означення 2. Призмою називається циліндр, основою якого є многокутник.

Інші означення: прямої і похилої призми, паралелепіпеда (прямого, похилого) прямокутного, куба, циліндра, прямого кругового циліндра учні сформулюють самостійно. Така форма роботи покращує розуміння учнями теоретичного матеріалу, залучає їх до самостійного опрацювання текстів в підручниках, до самостійних теоретичних узагальнень. Після проведеного семінарського заняття рекомендуємо продовжити вивчення теоретичного матеріалу обох тем, обравши для цього знову форму навчання – шкільну лекцію.

Лекція на тему
«Піраміда, конус і куля»

Продовжимо знайомитися з іншими геометричними тілами: *піраміда, конус і куля.* Розглянемо в просторі площину $\propto$ і точку S, яка їй не належить (рис. 9). Задамо на площині замкнуту лінію ω, яка немає самоперетинів. Вона обмежить на площині $\propto$деяку область F. Виберемо на лінії ω точку M і проведемо промінь SM. Будемо переміщувати промінь SM так, щоб точка S лишилася на місці, а точка M рухалася вздовж лінії ω. Цей промінь описує в просторі геометричну фігуру, яку називають ***конічною поверхнею***.

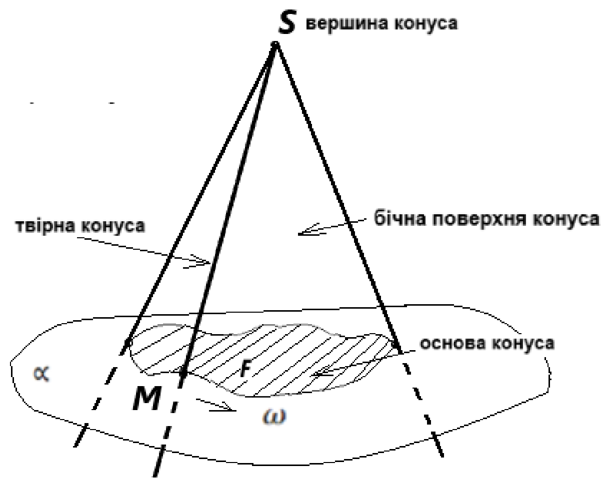


Рис. 9. Конічна поверхня

Промінь SM називають твірною конічної поверхні, точку S – вершиною конічної поверхні, а лінію ω – напрямною лінією. Конічна поверхня розділить простір на дві області: внутрішню, ту що містить фігуру F, і зовнішню. Ту частину простору, яку обмежують конічна поверхня і площина $\propto$ називають конусом. Відрізок SM – називається твірною конуса, фігура F – основа конуса, точка S – вершина конуса, частина конічної верхні – бічної поверхні конуса (рис. 9). Тож маємо наступне означення.

Означення 3. Конусом називається частина простору, обмежена конічною поверхнею і площиною, яка не проходить через вершину конічної поверхні і перетинає її.

Конусів існує безліч. Їх розрізняють також за такою ознакою (перша класифікація конусів):

- якщо напрямною лінією ω є ламана замкнена лінія, тобто многокутник, то такий конус називають пірамідою;

- якщо в основі лежить не многокутник, то назва залишається тією ж.

Поділ конусів на класи за цією ознакою подано на рис. 10.

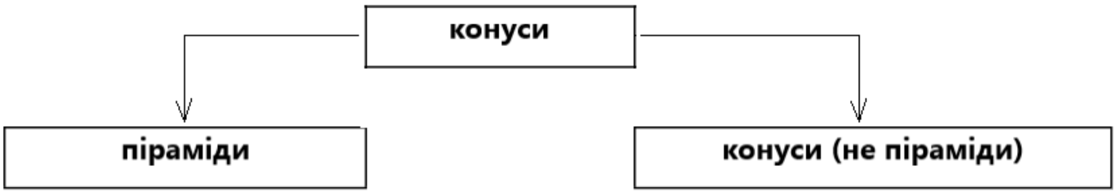


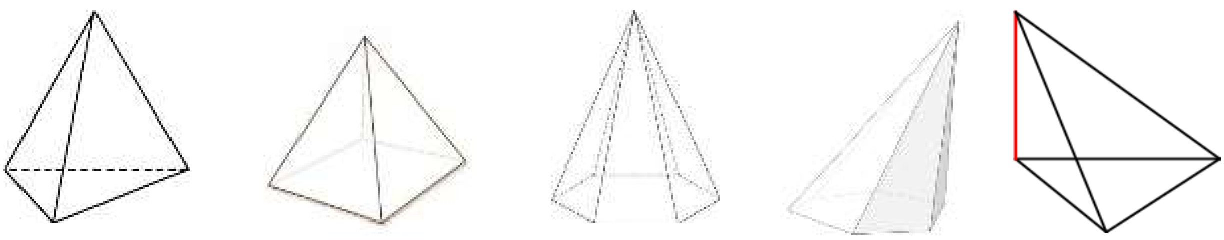
Рис. 10

У шкільному курсі стереометрії піраміди вивчаються в темі «Многогранники», а конуси (не піраміди) в темі «Тіла обертання».

Зупинимося спочатку на піраміді.

Залежно від виду многокутника, що лежить в основі піраміди – бувають трикутні, чотирикутні, п’ятикутні і т. д. (рис. 11).

Назвіть піраміди, подані на рис. 11 *а)-д).*



а) ***б)*** ***в)*** ***г)*** ***д)***

Рис. 11

Рис. 12. Піраміда та її елементи

На рис. 12 зображено піраміду $SABCDE$ та її елементи.

Висотою піраміди – називають перпендикуляр, проведений з вершини до площини основи.

Бічна поверхня піраміди складається з трикутників, які є бічними гранями.

Якщо в основі піраміди лежить правильний многокутник, а основа висоти піраміди – центр вписаного в нього кола, то така піраміда *називається правильною.*

Таким чином піраміди бувають правильні та неправильні.

Поділ пірамід на класи подано на рис. 13.

Рис. 13

Якщо здійснити переріз піраміди площиною, паралельною до площини основи, то вона розділить її на дві фігури – одна з яких буде піраміда, а інша – зрізана піраміда (рис. 14).

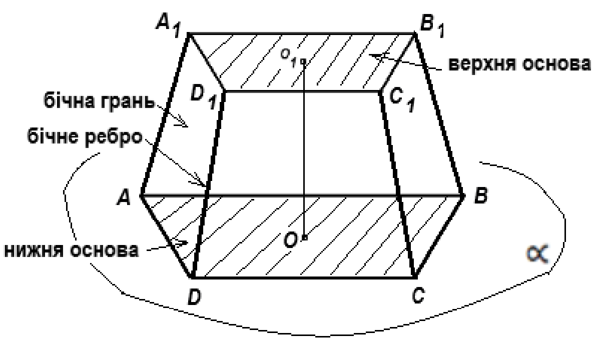


Рис. 14

На рисунку показано елементи зрізаної піраміди. В силу того, що січна площина паралельна площині основи в зрізаній піраміді: верхня основа подібна нижній; всі бічні грані – трапеції. Зрізані піраміди бувають правильні і неправильні. Зрізані піраміди, як і повні піраміди, вивчаються в темі «Многогранники».

Зупинимося детальніше на конусах. Конуси, як і піраміди, бувають також різними. Якщо в основі конуса – круг, то він називається ***круговим***, якщо еліпс – то ***еліптичним*** і т. д. Якщо основа висоти кругового конуса є центром кола основи, то такий конус називається ***прямим круговим***.

Саме такі конуси і вивчаються в шкільному курсі стереометрії в темі «Тіла обертання». Прямий круговий конус можна отримати як тіло обертання, утворене обертанням плоского прямокутного трикутника навколо катета. Звідси і походить назва – тіло обертання. Якщо такий конус перетнути площиною, паралельною до площини його основи, отримаємо одну із фігур, яка називається ***зрізаним конусом***.

На рис. 15 *а*) зображено прямий круговий конус і його елементи, а на рис. 15 *б*) – зрізаний конус і його елементи.

а)

б)

Рис. 15. Конуси та їх елементи

До тіл обертання належить і *куля* – тіло, утворене обертанням круга навколо діаметра. Елементи кулі подано на рис. 16.

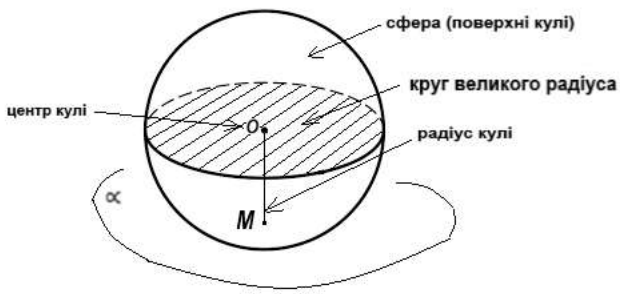


Рис. 16

Цією лекцією завершується знайомство з геометричними тілами, які вивчаються в курсі стереометрії старшої школи.

КІНЕЦЬ ЛЕКЦІЇ

Так само як і після першої лекції пропонуємо провести наступне практичне заняття, на якому, разом з учнями сформулювати відповідні означення вивчених геометричних тіл, розв’язати задачі на їх розпізнавання за готовими рисунками і моделями.

Таке перше «занурення» в тему приведе до формування в учнів нових понять, висловлювань гіпотез про властивості вивчених геометричних тіл. Після цього можна приступати до вивчення відповідних теорем.

Рекомендуємо зосередитись спочатку на темі «Многогранники». Усі теореми, які вивчаються традиційно в названій темі, доводяться легко, тому рекомендуємо вчителю робити це разом з учнями або пропонувати їм робити це самим. Методика доведення таких теорем відома, їх доведення є в діючих підручниках з стереометрії. Рівень теоретичних знань учнів з теми «Многогранники» рекомендуємо визначити за допомогою заліку і, після корекції та виправлення помилок, приступити до розв’язування практичних та прикладних задач.

3. Призми і піраміди та їх властивості

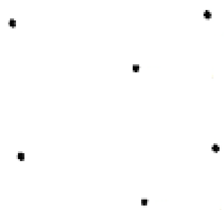
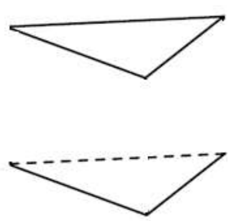
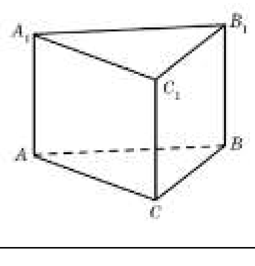
Найперше, що потрібно зробити після вивчення теоретичного матеріалу – навчити учнів виконувати зображення *призми, піраміди, зрізаної піраміди*.

Такі зображення та методичні поради як їх виконувати описані нами в лекції «Побудова зображень просторових фігур на площині. Многогранники».

Корисними будуть для учнів, наприклад, таблиці 2 і 3 та подібні їм, на яких показано етапи побудови рисунка.

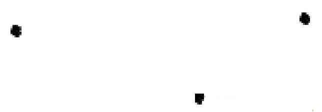
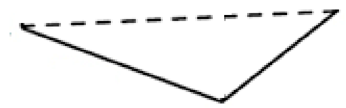
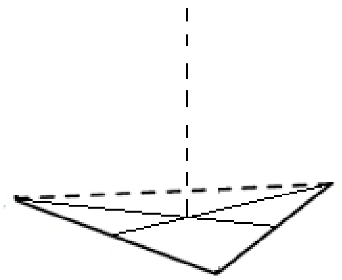
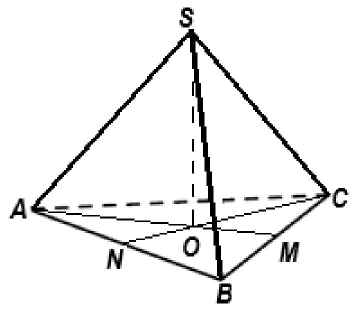
Таблиця 2

Етапи побудови зображення трикутної прямої призми

1.	**2.**	**3.**
		

Таблиця 3

Етапи побудови зображення трикутної піраміди

1. 	**2.** 
3. 	**4.** 

Тільки після того, як учні навчаться виконувати зображення вивчених многогранників, можна приступати до розв’язування задач.

а) Задачі на побудову перерізів многогранників

Після того, як учні вивчать правила-орієнтири побудови зображень призм, пірамід, паралелепіпедів, зрізаних пірамід, їх слід залучити до розв’язування задач на побудову перерізів цих фігур. Задач такого виду в підручниках вистачає. Певний досвід їх розв’язання вони вже отримали, коли вивчали тему «Вступ до стереометрії». Спираючись на нього уміння і навички учнів можна суттєво закріпити і розширити.

Завершити такі розв’язання, пропонуємо виконанням графічної роботи (домашньої роботи). Маючи зразки розв’язань учні зможуть самостійно навчитись будувати перерізи вказаних многогранників. Зміст такої роботи та зразки оформлення подано нижче (2 варіанти). Бажано, щоб було кілька варіантів такої роботи, при потребі вчитель може створити їх самостійно.

Графічна розрахункова робота «Побудова перерізів многогранників»

Робота містить 8 завдань, 2 варіанти (кількість варіантів можна збільшити).
Загальна оцінка роботи – 12 балів. Для виконання роботи учень отримує варіант.
Кожне завдання виконується на окремій сторінці зошита або на сторінці формату А4.
Для розв’язування необхідно відтворити заданий у варіанті рисунок, збільшивши його в 2-3 рази («порожньою» зображується точка, що належить невидимій грані многогранника). Для оформлення розв’язання подано зразки.

Зразок 1

Побудувати переріз призми площиною, що проходить через точки, вказані на ребрах та гранях призми.

Дано: $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ - п’ятикутна призма, $K \in CC_1,\ L \in EE_1,\ M \in (ABB_1)$.
Побудувати переріз призми площиною (KLM).

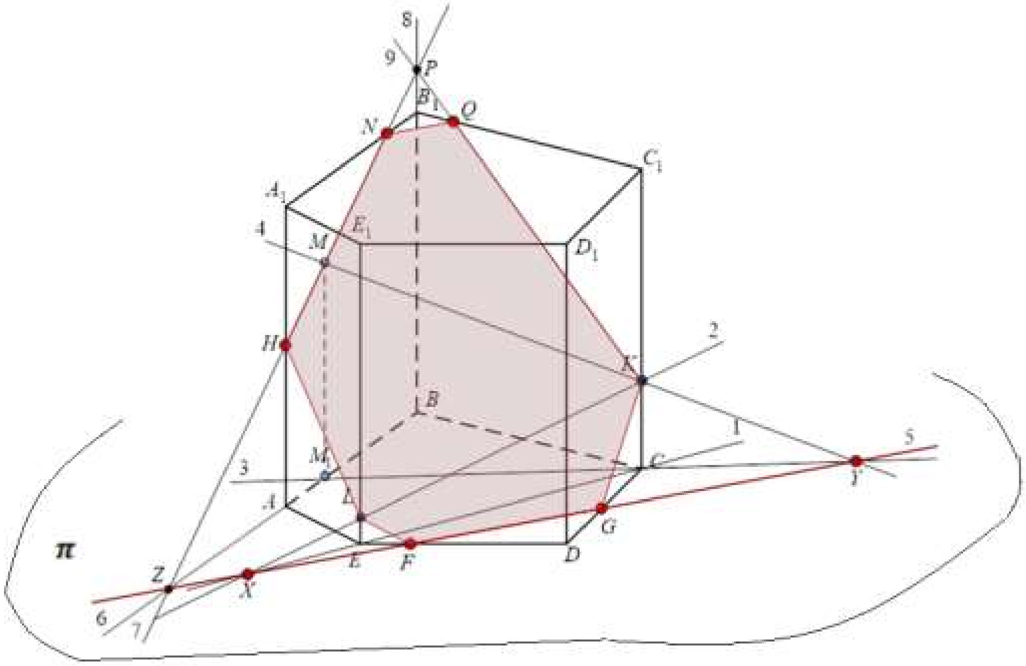


Рис. 16

Розв’язання

Нехай точка M_1 - проекція точки *M* на площину (*ABC*).

Напрям проєкціювання – паралельно до ребра призми.

Кроки побудови:

1) пряма CE;
2) пряма KL, $KL \cap CE = X$;
3) пряма CM_1;
4) пряма KM, $KM \cap CM_1 = Y$;
5) пряма XY - слід січної площини в площині основи призми, $XY \cap DE = F$, $XY \cap DC = G$;
6) пряма AB, $AB \cap XY = Z$;
7) пряма ZM, $ZM \cap AA_1 = H$, $ZM \cap A_1B_1 = N$;
8) пряма BB_1, $BB_1 \cap ZM = P$;
9) пряма PK, $PK \cap B_1C_1 = Q$;

$KGFLHNQ$ - шуканий переріз.

Зразок 2

Побудувати методом внутрішнього проєкціювання переріз піраміди площиною, що проходить через 3 дані точки.

Дано: $SABCDEF$ - шестикутна піраміда, $K \in (ASF),\ L \in (DSE),\ M \in (BSC)$.

Побудувати переріз піраміди площиною (KLM).

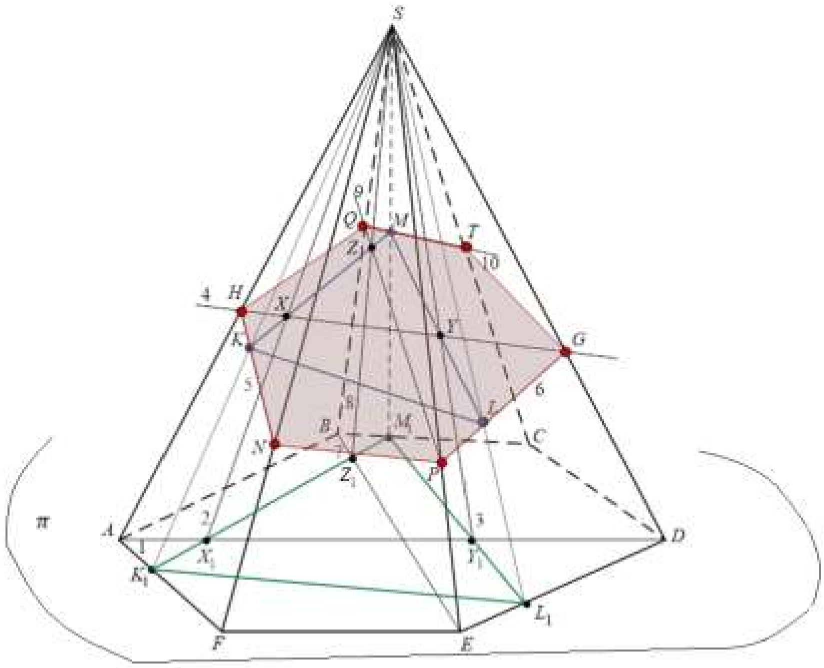


Рис. 17

Розв'язання

Нехай точки K_1, M_1, L_1 – проєкції точок *K, M, L* на площину (*ABC*).

Центр проєкціювання – вершина піраміди S.

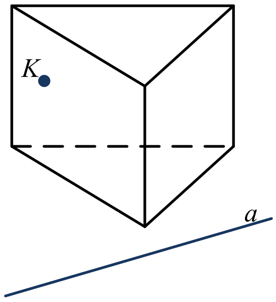
Сполучимо точки *K, M, L* та точки K_1, M_1, L_1. Кроки побудови:

1) пряма AD, $AD \cap K_1M_1 = X_1$, $AD \cap L_1M_1 = Y_1$;
2) пряма SX_1, $SX_1 \cap KM = X$;
3) пряма SY_1, $SY_1 \cap LM = Y$;
4) пряма XY, $XY \cap SA = H$, $XY \cap SD = G$;
5) пряма HK, $HK \cap SF = N$;
6) пряма GL, $GL \cap SE = P$;
7) пряма BE, $BE \cap K_1M_1 = Z_1$;
8) пряма SZ_1, $SZ_1 \cap KM = Z$;
9) пряма ZP, $ZP \cap SB = Q$;
10) пряма QM, $QM \cap SC = T$ /

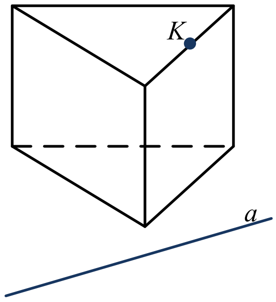
$PNHQTG$ - шуканий переріз.

Завдання 1. Побудувати переріз призми площиною, що проходить через задану точку і пряму в площині основи призми.

В-1

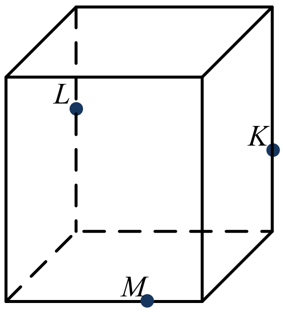


В-2

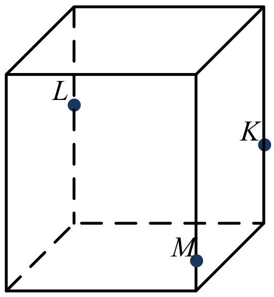


Завдання 2. Побудувати переріз призми площиною, що проходить через точки, вказані на ребрах призми.

В-1

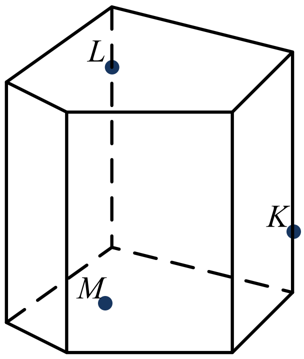


В-2

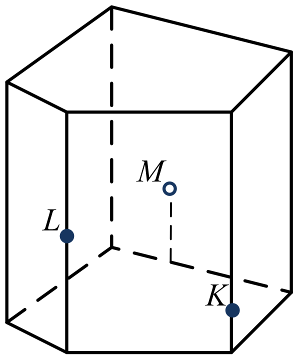


Завдання 3. Побудувати переріз призми площиною, що проходить через точки, вказані на ребрах та гранях призми.

В-1

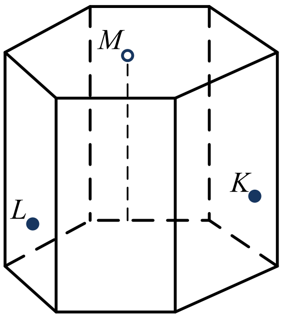


В-2

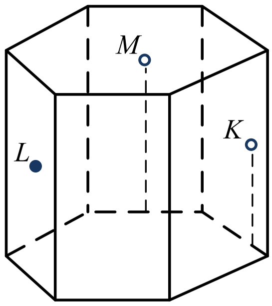


Завдання 4. Побудувати методом внутрішнього проєкціювання переріз призми площиною, що проходить через 3 дані точки.

В-1

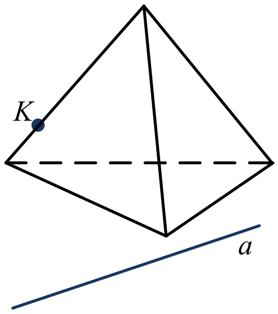


В-2

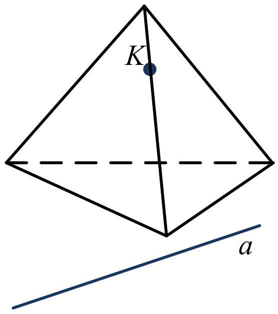


Завдання 5. Побудувати переріз піраміди площиною, що проходить через задану точку і пряму в площині основи призми.

В-1

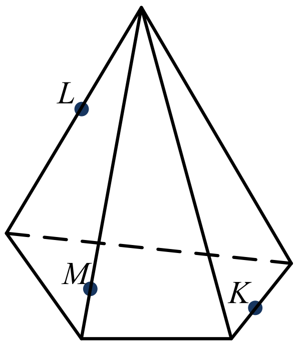


В-2

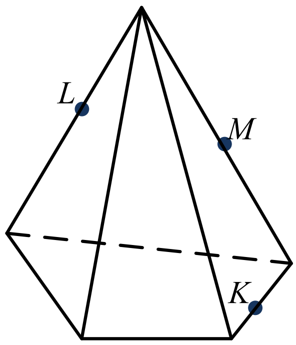


Завдання 6. Побудувати переріз піраміди площиною, що проходить через точки, вказані на ребрах піраміди.

В-1

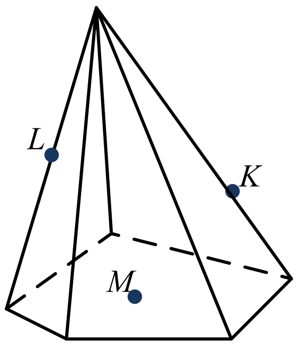


В-2

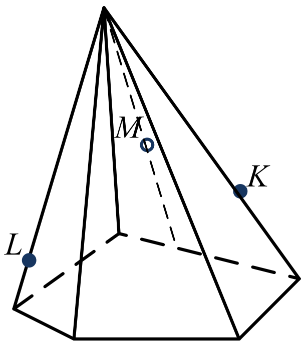


Завдання 7. Побудувати переріз піраміди площиною, що проходить через точки, вказані на ребрах та гранях піраміди.

В-1

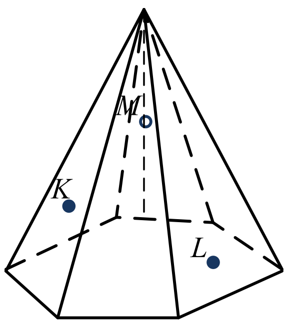


В-2

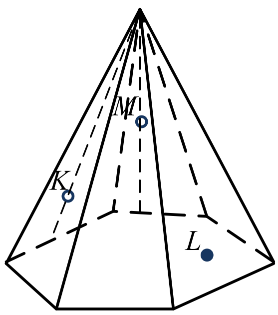


Завдання 8. Побудувати методом внутрішнього проєкціювання переріз піраміди площиною, що проходить через 3 дані точки.

В-1



В-2



б) Практичні задачі на многогранники

У такого виду задач найчастіше вимагається визначити або певні елементи многогранника, або площу бічної чи повної поверхні, або довести правильність твердження, яке стосується форми чи співвідношення між елементами фігури. Приведемо приклади розв'язання таких задач та доречні рекомендації, яких варто дотримуватися під час навчання учнів.

Задача 3. Основа похилої призми – правильний трикутник зі стороною a. Бічне ребро призм дорівнює b і утворює з прилеглими сторонами основи кути $\propto$. Визначити площу бічної поверхні призми, обчислити при $a = 6$ см, $b = 8$ см, $\propto = 45°$.

Розв'язання

Дано : $ABCA_1B_1C_1$ – похила призма (рис.18).

ΔABC – правильний, $AC = a$, $AA_1 = b$, $\angle A_1AC = \angle A_1AB = \propto$

Визначити 1) $S_{біч}$ призми; 2) обчислити при $a = 6$ см, $b = 8$ см, $\propto = 45°$.

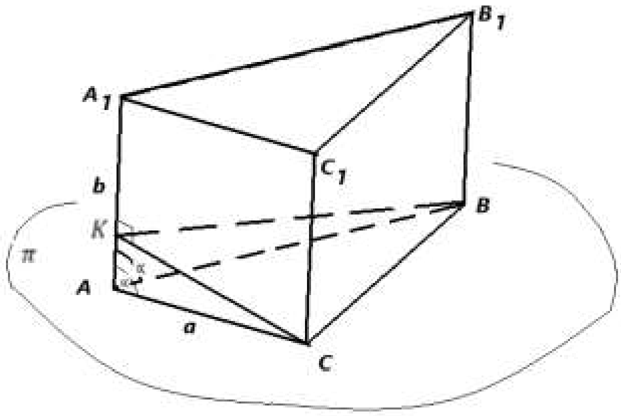


Рис. 18

1) У грані AA_1C_1C проведемо $CK \perp AA_1$. Оскільки паралелограми AA_1B_1C та BAA_1B_1 – рівні, то $BK \perp AA_1$. Тоді AA_1 (за ознакою перпендикулярності прямої до площини) буде перпендикулярним до (*СКВ*), а, отже, $AA_1 \perp BC$. ΔCKB – перпендикулярний переріз призми площиною (*СКВ*). Площу бічної поверхні призми знаходимо за формулою: $S_{біч} = AA_1(CK + BK + CB)$ (1)

З прямокутного ΔCKA маємо: $\frac{CK}{CA} = sin \propto$. Звідки $CK = CA \cdot sin \propto$.

Отже, $CK = KB = a \cdot sin \propto$. Підставляємо отримані дані у формулу (1) та маємо :

$$S_{біч} = b \cdot (2a \cdot sin \propto + a) = ab(1 + 2sin \propto)$$

$$S_{біч} = ab(1 + 2sin \propto) \text{ кв. од.}$$

2) При $a = 6$ см, $b = 8$ см, $\propto = 45°$, $S_{біч} = 6 \cdot 8(1 + 2 \cdot sin45°) = 48(1 + \sqrt{2})$ (см^2).

Відповідь : 1) $S_{біч} = ab(1 + 2sin \propto)$ кв. од.

2) $S_{біч} = 48(1 + \sqrt{2})$ см^2.

Методичний коментар

1. Під час розв’язування задачі, найперше на що потрібно звернути увагу учнів – це на виконання ілюстративного рисунка (він, як відомо, має бути правильним, наочним і, по можливості, простим у побудові). Після з’ясування особливостей рисунка, учні мають його побудувати, з дотриманням правил вільного паралельного проекціювання. Такий етап (обґрунтування) можна проводити в усній формі і він дуже важливий. Учні мають це пам’ятати.

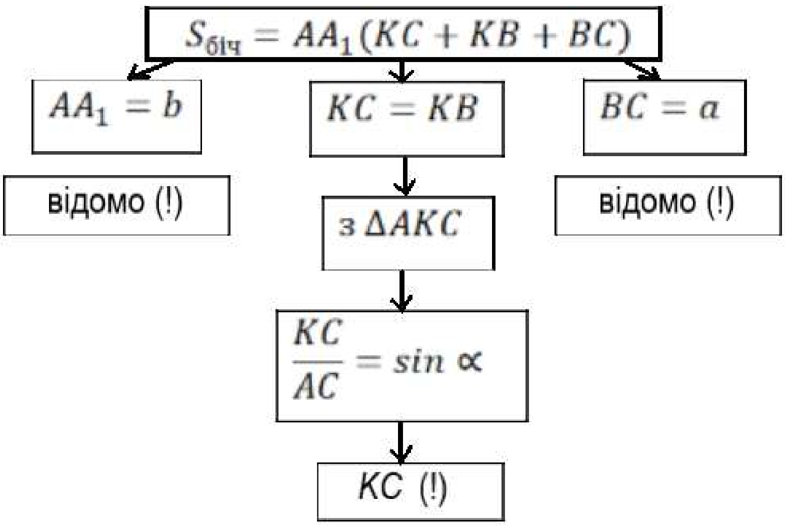
2. Другим етапом у розв’язанні задачі йде пошук плану розв’язання. Він, як показує практика навчання, для учнів є найважчим, але найцікавішим. Тому вчитель має вчити учнів такій пошуковій роботі. У даній задачі зразок таких аналітико-синтетичних міркувань може бути наступним.

«Почнемо з вимоги – визначити $S_{біч} = AA_1 \cdot P_{перерізу}$, де $P_{перерізу}$ – периметр перпендикулярного перерізу призми. Якщо провести з вершини *С* у грані AA_1C_1C перпендикулярно $CK \perp AA_1$, а, відповідно, у грані AA_1B_1B $BK \perp AA_1$ (їх основи точка *К* має бути спільна), тоді $AA_1 \perp (CKB)$. Отже, ΔCKB – буде перпендикулярним перерізом призми».

Маємо таку схему міркувань (Схема 1).

Схема 1

Схема пошуку плану розв’язання



Діючи за схемою в зворотному напрямку знаходимо план розв’язання.

Подібні міркування 1) і 2) рекомендуємо проводити до кожної задачі чи усно, чи напівписьмово, поки школярі не навчаться робити це самостійно.

Задача 4. Основа піраміди – ромб з гострим кутом β. Бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом φ. Визначити площу бічної поверхні піраміди, якщо її висота дорівнює *h*.

Розв'язання

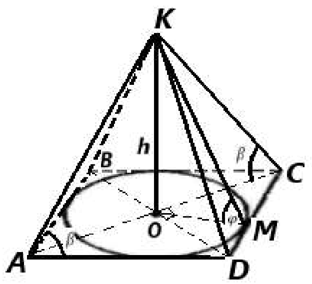


Рис. 19

Дано:
$KABCD$ – піраміда,
$ABCD$ – ромб (рис. 19).
$CO \perp (ABC)$, $SO = h$
$\angle BAD = \beta$, $\angle KDCA = \varphi.$
Визначити $S_{\text{біч}}$ піраміди

Оскільки всі бічні грані даної піраміди – рівні трикутники, то $S_{\text{біч}}$ піраміди знаходимо за формулою:

$$S_{\text{біч}} = 4DC \cdot KM \qquad (1)$$

де *KM* – висота бічної грані ΔKDC.

Всі грані піраміди нахилені до площини основи під кутом φ.

Тому основа висоти піраміди є центром кола, вписаного в ромб, тобто точкою перетину його діагоналей. *OM* – радіус вписаного в ромб кола. $OM \perp DC$.

Тоді $KM \perp DC$ (за теоремою про три перпендикуляри) з прямокутного ΔKOM маємо: $\frac{OK}{KM} = sin\varphi$, звідки $KM = \frac{OK}{sin\varphi} = \frac{h}{sin\varphi}$

$$KM = \frac{h}{sin\varphi} \qquad (2)$$

Заодно маємо $\frac{OM}{OK} = ctg\varphi$. Звідки $OM = h \cdot ctg\varphi$

$$OM = h \cdot ctg\varphi \qquad (3)$$

З прямокутного ΔOMC маємо: $\frac{OM}{OC} = sin\frac{\beta}{2}$, бо $\angle OCD = \frac{1}{2}\angle BCD = \frac{\beta}{2}$.

Тому $OC = \frac{OM}{sin\frac{\beta}{2}}$. З прямокутного ΔCOD отримуємо :

$$DC = \frac{OC}{cos\dfrac{\beta}{2}} = \frac{OM}{cos\dfrac{\beta}{2} \cdot sin\dfrac{\beta}{2}} = \frac{h}{cos\dfrac{\beta}{2} \cdot sin\dfrac{\beta}{2}} = \frac{2h}{sin\beta}$$

$$DC = \frac{2h}{sin\beta} \qquad (4)$$

Підставляємо значення з формул (2), (4) в (1), маємо :

$$S_{\text{біч}} = 2 \cdot \frac{2h}{sin\beta} \cdot \frac{h}{sin\varphi} = \frac{4h^2}{sin\beta \cdot sin\varphi} \text{ кв.од.}$$

Відповідь : $\frac{4h^2}{sin\beta \cdot sin\varphi}$ *кв.од.*

Методичний коментар

1. Оскільки всі грані піраміди нахилені до площини основи під одним і тим же кутом β, то точка перетину діагоналей ромба є центром кола, вона ж буде основою висоти піраміди.

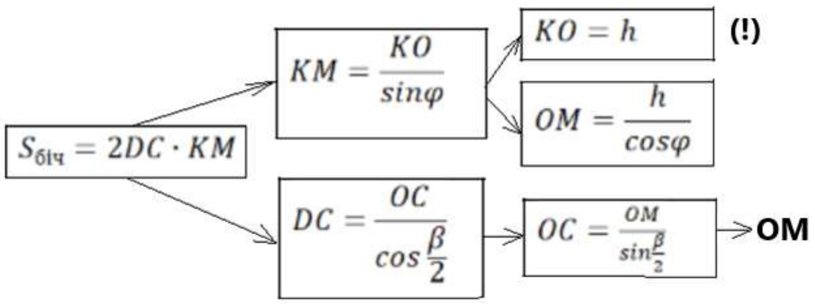
Будуємо ілюстративний рисунок до задачі (рис. 19) $\angle KOM = \varphi,\ \angle BAD = \beta.$

2. Усі бічні грані піраміди рівні між собою трикутники. *OM* – радіус кола вписаного в ромб. $OM \perp DC$ (теорема про три перпендикуляри). Бічну поверхню піраміди знаходимо за формулою: $S_{\text{біч}} = P_{\text{основи}} \cdot KM$.

Маємо таку схему міркувань (Схема 2).

Схема 2

Схема пошуку плану розв’язання



Діємо за схемою 2 в зворотному порядку і знаходимо бічну поверхню піраміди.

в) Прикладні задачі на многогранники

Вивчені в курсі стереометрії многогранники – віртуальні геометричні моделі, якими ілюструють просторові форми реальних об’єктів, співвідношення між їх елементами. Тому вони затребувані часто під час розв’язування прикладних задач. З прикладами таких задач та їх розв’язанням учнів потрібно знайомити також. Це гарно мотивує школярів до вивчення шкільної математики.

Приведемо приклад такої задачі і її розв’язання.

Задача 5. Будуючи з батьком дах нової хати, Василь запитав у нього, як будівельники розраховують кут укосу кожної половини даху до площини стелі. Адже якщо кут великий, то доводиться витрачати більше матеріалів для покриття, а коли малий, то взимку може провалитися під вагою снігу та й стік води тоді гірший. Чому в селах майже всі хати (незалежно від розмірів) мають однаковий кут укосу. «Це робиться просто – сказав батько, - ще коли готуються крокви до даху. Довжина однієї сторони крокви має дорівнювати три чверті поперечної балки даху (сволока)». Розрахуйте, яким буде кут укосу даху до стелі при таких умовах. Відповідь округліть до одиниці градуса.

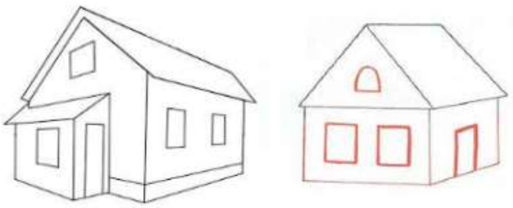


Рис. 20

Розв’язання

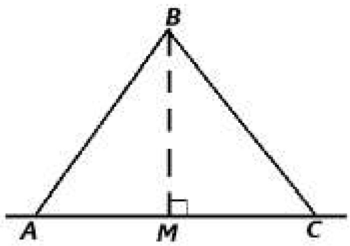


Рис. 21

На рис. 21 зображено рівнобедрений ΔABC, у якому $AB = BC = \frac{3}{4}AC$.
Визначити величину $\angle BCA$.
Нехай *AC*=*a*, тоді $BC = \frac{3}{4}AC$.
Проведемо $BM \perp AC$, тоді
$MC = \frac{1}{2}AC$, $MC = \frac{a}{2}$

З прямокутного ΔBMC маємо: $cos\angle BCM = \frac{MC}{BC} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{3}{4}a} = \frac{2}{3} \approx 0{,}6666 \approx 0{,}7$.

Тоді $\angle BCM = arccos0{,}7 \approx 45°$.

Відповідь : $\approx 45°$.

Методичний коментар

Насамперед умову задачі, сформульовану звичною для будівельників мовою, необхідно перекласти на мову геометрії. Зрозуміло, що моделлю хати може бути многогранник, а даху – трикутна призма, яка лежить на площині однієї з своїх граней.

Кроква – елемент даху, її геометричною моделлю, як правило, є рівнобедрений трикутник. Бічні сторони трикутника – імітують сторони крокви, а основа – поперечну балку (рис. 21). Такий ΔABC - перпендикулярний переріз призми, а $\angle BCA$ – кут нахилу даху до стелі. Отже, за умови що $BC = \frac{3}{4}AC$ необхідно визначити кут $\angle BCA$. Отримали математичну задачу. Її розв’язання дає відповідь на запитання : під яким кутом укосу будують скат даху до стелі в хатах в середній та північній полосах України.

4. Тіла обертання та їх властивості в задачах

Ознайомившись з тілами обертання та їх властивостями, слід (так як у випадку з многогранниками) навчити учнів виконувати ілюстративні рисунки таких тіл, користуючись правилами – орієнтирами, вивченими під час засвоєння ортогонального проєкціювання. На це доведеться витрати не одне заняття, але така підготовка необхідна для розв’язування практичних та прикладних задач. У темі «Тіла обертання» побудови перерізів циліндра, конуса, кулі із за технічних труднощів виконання не практикують. Обмежуються лише найпростішими побудовами, де перерізами є прямокутники, трикутники чи круги. Тому графічну роботу проводити не доцільно. Зупинимося на задачах до даної теми і їх розв'язаннями.

а) Практичні задачі на тіла обертання

Задача 6. У циліндрі паралельно його осі, проведено площину, що перетинає нижню основу по хорді, яка стягує дугу $\propto$. Цю хорду видно із центра верхньої основи під кутом φ. Визначити площу перерізу, якщо радіус основи циліндра дорівнює R.

Розв'язання

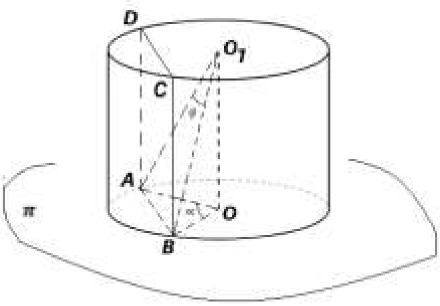


Рис. 22

Дано (рис. 22)
циліндр,
$OB = R, \angle AO_1B = \varphi$.
$ABCD$ – переріз циліндра, *(ABC)*∥ OO_1,
OO_1- вісь циліндра
Визначити
площу перерізу $ABCD$.

Площу прямокутника $ABCD$ знаходимо за формулою:

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD \qquad (1)$$

З рівнобедреного ΔAOB знаходимо, що

$$AB^2 = 2 \cdot AO^2 - 2AO^2 \cdot cos \propto = 2 \cdot AO^2(1 - cos \propto)$$

$$AB^2 = 4 \cdot R^2 \cdot sin^2 \frac{\propto}{2}$$

$$AB = 2 \cdot R \cdot sin \frac{\propto}{2} \qquad (2)$$

З рівнобедреного ΔAO_1B, міркуючи аналогічно, знаходимо, що $AB^2 = 4 \cdot {AO_1}^2 \cdot sin\frac{\varphi}{2}$. Звідки ${AO_1}^2 = \frac{AB^2}{4sin\frac{\varphi}{2}}$. Оскільки $OO_1 = AD$, то з прямокутного ΔAO_1O за теоремою Піфагора, знаходимо $OO_1 = AD = \sqrt{{AO_1}^2 - AO^2} = \sqrt{\frac{AB^2}{4sin\frac{\varphi}{2}} - R^2} = \sqrt{\frac{4R^2 sin^2\frac{\propto}{2}}{4sin^2\frac{\varphi}{2}} - R^2}$.

тобто, $AD = R\sqrt{\frac{sin^2\frac{\propto}{2}}{sin^2\frac{\varphi}{2}} - 1} = R \cdot \frac{\sqrt{sin^2\frac{\propto}{2} - sin^2\frac{\varphi}{2}}}{sin\frac{\varphi}{2}}$.

Спростимо вираз $\sqrt{sin^2\frac{\propto}{2} - sin^2\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos\propto) \quad - \frac{1}{2}(1 - \cos\propto)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{cos\varphi - cos \propto}$.

Отже, $$AD = \frac{R\sqrt{cos \quad \propto - cos \quad \propto}}{\sqrt{2} \cdot sin\frac{\varphi}{2}} \qquad (3)$$

Підставимо (2) і (3) в (1), маємо : $S_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}R^2\sqrt{cos \quad \varphi - cos \quad \propto} \cdot sin\frac{\propto}{2}}{sin\frac{\varphi}{2}}$ *(кв. од.)*

У циліндрі кут $\propto$ буде більшим за кут φ, тому $(cos\varphi - cos \propto)$ – додатнє число.

Відповідь : $S_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}R^2\sqrt{cos \quad \varphi - cos \quad \propto} \cdot sin\frac{\propto}{2}}{sin\frac{\varphi}{2}}$ *кв. од.*

Методичний коментар

1. Вивчивши умову задачу учні мають виконати якісний, ілюстративний рисунок, користуючись вивченими правилами-орієнтирами (рис. 22).

2. Наступним кроком слід скласти план розв'язування. Його можна записати (чи проговорити усно) у вигляді схеми (схема 3).

Схема 3

Схема пошуку плану розв'язання

$S_{ABCD} = AB \cdot AD$

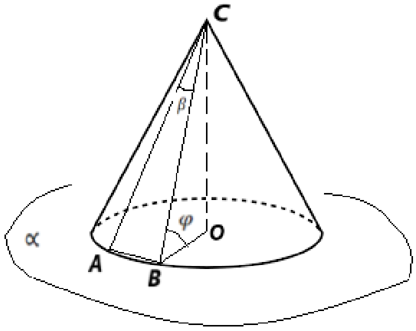
з ΔAOB за теоремою косинусів
AB (!)

з ΔAO_1B за теоремою косинусів
AO_1

з ΔOO_1A за теоремою Піфагора
$OO_1 = AD$ (!)

Задача 7. Площа основи конуса дорівнює *Q*, кут нахилу твірної до площини основи дорівнює φ. Визначити площу перерізу, проведеного через дві твірні, кут між якими дорівнює β.

Розв'язання



Дано (рис. 23) конус,
$\angle COB = \varphi, \angle ACB = \beta,$
$S_{\text{осн.}} = Q.$
Визначити S_{ABCD}.

Рис. 23

Площу перерізу – рівнобедреного трикутника *ABC* знаходимо за формулою :

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC^2 sin\beta \qquad (1)$$

Оскільки $S_{\text{осн.}} = \pi \cdot BO^2 = Q$, то $\qquad BO = \sqrt{\frac{Q}{\pi}} \qquad (2)$

З прямокутного ΔCOB маємо : $\frac{BO}{BC} = cos\varphi$. Отже, $BC = \frac{BO}{cos\varphi}$.

Тому $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC^2 sin\beta = \frac{1}{2}\frac{BO^2}{cos^2\varphi} \cdot sin\beta$. Підставимо в одержану формулу значення з формули (2) і маємо: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}\frac{Q}{\pi} \cdot \frac{sin\beta}{cos\varphi} = \frac{Q \cdot sin\beta}{2\pi cos\ \ \varphi} \cdot$ *кв. од.*

Відповідь : $\frac{Q \cdot sin\beta}{2\pi cos\ \ \varphi} \cdot$ *кв. од.*

Методичний коментар

1. Вивчивши умову задачі учні мають виконати якісний ілюстративний рисунок, з дотримання правил ортогонального проєкціювання.

2. План розв'язання випливає з аналітико-синтетичних міркувань за схемою 4.

Схема 4

Схема пошуку плану розв'язання

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC^2 \sin\beta$

↓

з ΔCOB

$BC = \frac{BO}{\cos\varphi}$

↓

з площі круга (основи)

$Q = \pi \cdot BO^2$

↓

$BO = \sqrt{\frac{Q}{\pi}}$

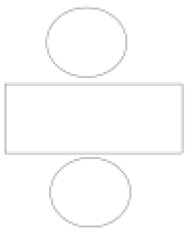
(!)

б) Прикладні задачі на тіла обертання

Задача 8. Скільки витратили квадратних метрів жерсті, щоб зробити 1 млн. консервних банок діаметром 10 см і висотою 5.0 см? (*на шви та відходи додайте 15 % матеріалу*).

Розв'язання

а)



б)

рис. 24

Методичний коментар

За геометричну модель консервної банки можна обрати прямий круговий циліндр, діаметр кола основи якого дорівнює 10 см, а твірна – 5.0 см (рис. 24 *а*)).

Банка виготовляється з двох кругів – основ та прямокутника – розгортка бічної поверхні (рис. 24 *б*)).

Отже, потрібно обчислити площу прямокутника та площі двох рівних кругів. До цієї площі додати ще 15 % від матеріалу на шви.

Таким чином отримаємо витрати матеріалу на одну банку. Щоб дізнатися витрати матеріалу на 1 млн. консервних банок, потрібно витрати на одну банку помножити на мільйон.

Важливо звернути увагу на те, що числові дані в задачі подано з двома значущими цифрами.

Це слід врахувати під час проведення обчислень.

Довжина прямокутника $c = 2\pi r$, де за умовою $r = 5$ см, а ширина $l = 5.0$ см.

Тоді його площа буде дорівнювати $S_1 = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 5.0 = 50\pi$ см^2.

Отже, на одну банку витрачається (без швів) $S_3 = 100\pi = 50\pi + 25\pi + 25\pi$ см^2.

Від цієї суми потрібно підрахувати кількість матеріалу на шви.

Це буде $S_3 = 115\pi$ см^2. А на 1 млн. банок витрати будуть становити:

$S \;\; = 115 \cdot \pi \cdot 10^6$ см$^2 = 115 \cdot \pi \cdot 10^2$ м$^2 \approx 36\,000$ м^2.

Відповідь : $\approx 36\,000$ м^2.

П І Д С У М О К

Вивчення другої групи геометричних фігур, представлене в навчальній програмі з математики двома темами «Многогранники» та «Тіла обертання», варто розпочати спочатку одночасно, ознайомивши учнів за заняттях у формі лекції з призмами, паралелепіпедами, пірамідами, зрізаними пірамідами, циліндрами, конусами, зрізаними конусами і кулею.

Далі зосередитися на кожній даній темі окремо. Важливо вивчити властивості геометричних тіл, навчитись будувати їх зображення з дотриманням відповідно правил паралельного та ортогонального проєкціювання. У кожній темі слід вчити учнів розв’язувати практичні та прикладні задачі, бо задачі в обох темам виступають і метою, і засобом навчання.

МЕТОДИЧНІ ЗАДАЧІ
для самостійного розв’язування

1.	Складіть календарний план вивчення теми: а) «Многогранники»; б) «Тіла обертання».
2.	Користуючись одним з альтернативних підручників з стереометрії випишіть основні властивості геометричних тіл: а) многогранників; б) тіл обертання. Ознайомтесь з їх доведенням, визначити які з них має доводити учням вчитель, а які учні можуть вивчати самостійно.
3.	Складіть добірку прикладних задач до теми: а) «Многогранники»; б) «Тіла обертання».
4.	Розробіть уточнення для вивчення обох тем.

Серед рівних розумом – за однакових інших умов – переважає той, хто знає геометрію

Б. Паскаль

Л Е К Ц І Я 3.9

Т Е М А ***Формування в учнів поняття геометричного тіла під час вивчення стереометрії***

П Л А Н

1.	***Фізичні тіла і їх властивості, які вивчає наука геометрія***
2.	***Поняття геометричного тіла в шкільному курсі стереометрії***

К О Н С П Е К Т Л Е К Ц І Ї

1. Фізичні тіла і їх властивості, які вивчає наука геометрія

У побуті, на виробництві, будівництві, в інших галузях життєдіяльності людина має справу з різними об’єктами, зокрема із такими, які умовно називають ***фізичними тілами***. На рис. 1 *а)–ж)* зображено приклади таких фізичних тіл. Їх перелік може бути й довшим. Обмежимося обраними зразками. Фізичні тіла люди виготовляють, будують, ремонтують, застосовують, зберігають, модернізують і т. п.

а) *б)* *в)*

г) *д)* *ж)*

Рис. 1

Кожне фізичне тіло має певні властивості: просторову форму і розміри; міцність матеріалу з якого виготовлене; термін зберігання чи використання, особливості виготовлення: масу, колір; можливості використання; вартість виготовлення тощо. Вивченням властивостей фізичних тіл займаються різні науки, наприклад: *хімія, фізика, матеріалознавство, технологія* і, звичайно, *математика*. Які ж властивості фізичних тіл вивчає наука геометрія? Багатовікова практика вивчення геометрії викристалізувала думку, що предметом її вивчення є дві важливі властивості фізичних тіл : їх просторова форма і, притаманні для них, числові співвідношення.

Математика, зокрема геометрія, зазвичай досліджує безпосередньо не самі фізичні тіла, а їх *моделі*. Поняття *«модель»* виникло у процесі дослідницького вивчення навколишнього середовища. Цей термін походить *від латинських «modus», «modulus»* – що означає міра, образ, спосіб. Що ж таке модель і якими моделями послуговується геометрія? Дамо відповідь на це запитання.

Нехай розглядається об'єкт *M* з притаманною для нього системою властивостей (характеристики) *S* і об'єкт *A* з такою ж системою властивостей *S*. Якщо об'єкт *M* будується (або обирається) для імітації *A*, то кажуть, що він є моделлю об'єкта *A* за системою властивостей *S*.

Таким чином, під ***моделлю розуміється реально існуючий чи існуючий в людській уяві об'єкт, який заміщає та відображає у пізнавальних процесах інший об'єкт – оригінал і знаходиться з ним у відношенні подібності, завдяки чому вивчення моделі дає змогу отримати знання про оригінал.***

Моделями фізичних тіл в стереометрії виступають куби, паралелепіпеди (прямокутний, прямий, похилий), призми, піраміди (повна, зрізана), циліндр, конуси (повний, зрізаний), кулі та ін. Це ідеальні тіла – моделі. Вони створені людською уявою, існують віртуально у вигляді уявлень та понять (своїх істотних властивостей).

Обізнана з ними людина здатна уявити їх, зобразити на рисунку, застосувати вивчені властивості в практичній, навчальній чи науковій діяльності. Які ж геометричні фігури слід вважати геометричними тілами? Дамо відповідь на це запитання.

2. Поняття геометричного тіла в шкільному курсі стереометрії

Вже на перших сторінках шкільних підручників з геометрії для 10 класу можна знайти тлумачення поняття «просторове геометричне тіло». Замість означення цього поняття в шкільному курсі математики найчастіше наводяться різні пояснення описового характеру. Наприклад, в дворівневому підручнику з геометрії для 10 класу, автор Нелін Є. П., говориться *«Деякі фігури в просторі ще називають тілами. Наочно геометричне тіло можна уявити собі як частину простору, що займає фізичне тіло, обмежене деякою поверхнею»*.

Є спроби дати строге означення геометричного тіла в курсі геометрії 11 класу. Наприклад, в підручнику з Геометрії для учнів 11 класу, автори Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г., Владіміров В. М., зміст поняття «*геометричне тіло*» розкривається на основі понять «куля», «просторова область» та ін. Вводиться наступне означення: *«Обмежена просторова область разом з усіма її граничними точками називається геометричним тілом; множина всіх її граничних точок – поверхнею цього геометричного тіла»*.

При цьому не розкривається або хибно тлумачиться сутність таких математичних понять як обмежена фігура, область, гранична точка фігури тощо. Щоб покласти край таким тлумаченням пропонуємо один із сучасних підходів до трактування математичного поняття «геометричне тіло», який може бути використаний у шкільному курсі геометрії як основної, так і старшої школи. Для цього нами задіяно такі **необхідні математичні поняття**: *метричний простір і точка простору; геометрична фігура; відстань між точками простору, сфера, куля та окіл точки; відрізок; ламана; обмежена фігура; внутрішня точка і внутрішність; межова точка і межа геометричної фігури.*

2.2. Поняття метричного простору та його точок, геометричної фігури, сфери, кулі та околу точки

Зі шкільного курсу математики учень може дізнатися про одновимірний евклідів простір (множина всіх точок даної прямої), двовимірний евклідів простір (множина всіх точок даної площини) та тривимірний евклідів простір (множина всіх точок простору). Ці поняття є частинними випадками загального математичного поняття **метричного простору** – *довільної непорожньої множини, для будь-яких двох елементів (точок) якої задано* ***відстань***. Точками метричного простору можуть бути найрізноманітніші об’єкти, як абстрактні, так і реальні, а відстань між ними можна задавати різними способами аби тільки ця відстань задовольняла так звані **основні властивості**, з якими учні знайомляться ще в школі:

1) *відстань – невід’ємне число;*
2) *відстань дорівнює нулеві тоді й тільки тоді, коли точки співпадають;*
3) *відстань від першої до другої точки дорівнює відстані від другої до першої;*
4) *для трьох заданих точок відстань між будь-якими двома з них не перевищує суми відстаней кожної з цих точок до третьої.*

Зі шкільного курсу геометрії учням відомо, що відстань між двома точками прямої, площини чи простору – це довжина відрізка, який сполучає ці точки (нажаль, шкільні підручники не містять відомостей щодо вироджених «одноточкових» відрізків нульової довжини, а множини нульової міри, зокрема, нульової довжини відіграють у сучасній математиці важливу роль).

Усі факти, що наведені нижче, можна пов'язувати з довільним метричним простором, а можна лише з *одно-, дво-* чи тривимірним евклідовим простором, що вивчається в школі.

Геометричною фігурою, або просторовою фігурою, або просто фігурою з даного метричного простору називають будь-яку множину (сукупність) Ф точок цього простору.

Якщо точки даного метричного простору позначати великими латинськими літерами, а відстань між двома даними точками A і B цього простору позначати $|AB|$, то ***відрізком AB*** *можна назвати множину всіх точок X даного простору, для яких* $|AX| + |XB| = |AB|$. *(*Зауважимо, що для деяких метричних просторів, відрізки, введенні вказаним чином, не відповідають звичним уявленням про евклідові відрізки, що вивчаються у школі).

Ламаною у даному просторі з вершинами у заданих точках $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ ***називають об'єднання відрізків*** $A_{k-1}A_k$ ***, k = 1, 2, …, n, а кожен з відрізків називають ланкою ламаної*****.**

Геометричними фігурами метричного простору є, зокрема, весь простір (найширша фігура) та порожня множина (порожня фігура – найвужча фігура). У певному розумінні кількість геометричних фігур даного простору є значно більшою ніж кількість точок цього простору, проте властивості усіх фігур досліджуються за допомогою невеликої кількості найважливіших фігур.

До найважливіших фігур метричного простору належать:

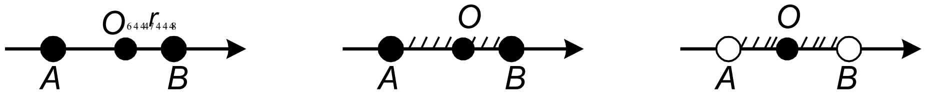
1) ***сфера****; 2)* ***куля****; 3)* ***відкрита куля*** *з центром у даній точці O і заданим радіусом r > 0. Так називають множини точок простору, для кожної з яких відстань від точки O відповідно: 1) дорівнює r; 2) не перевищує r; 3) є меншою за r.*

При цьому будемо позначати:

- *S*(*O; r*) – сфера з центром у точці *O* і радіусом *r*;
- *K*(*O; r*) – куля з центром у точці *O* і радіусом *r*, яку також називають **замкненою кулею**;
- *U*(*O; r*) – **відкрита куля** з центром у точці *O* і радіусом *r*, яку також називають **околом** (або *r* – околом) точки *O*.

Приклади.

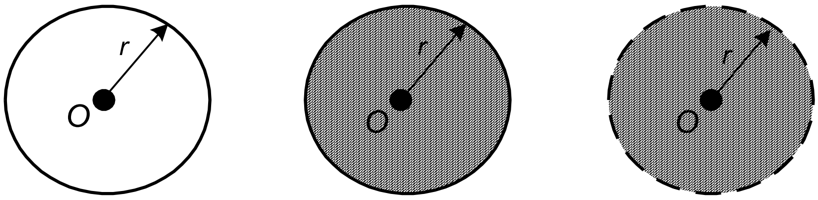
1. Для одновимірного простору (даної прямої) одновимірною сферою є сукупність довільних двох різних точок *A* і *B* цієї прямої. При цьому центром сфери є точка *O* – середина відрізка *AB*, а радіус сфери $r = \frac{1}{2}|AB|$. Сам відрізок *AB* є кулею (одновимірною кулею) з вказаними вище центром *O* і радіусом *r*, а якщо з цього відрізка вилучити точки *A* і *B*, то дістанемо одновимірну відкриту кулю з вказаними центром *O* і радіусом *r*. Отже, $S(O, r) = \{A, B\}$, $K(O, r) = [A,B]$ і $U(O, r) = (A, B)$ (рис. 2).



$S(O, r) = \{A, B\}$ $K(O, r) = [A,B]$ $U(O, r) = (A, B)$

Рис. 2

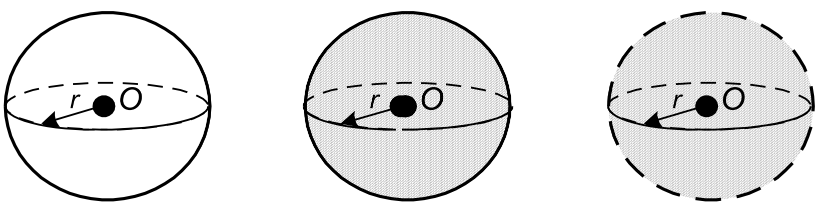
2. Для двовимірного простору(даної площини) сферою (двовимірною сферою) є звичайне коло з центром у заданій точці *O* і радіусом $r > 0$. Це коло визначає на площині круг (двовимірну кулю) та відкритий круг (двовимірну відкриту кулю) (рис. 3).



$S(O; r)$ $K(O; r)$ $\mathrm{U}(O; r)$

Рис. 3

3. Для тривимірного простору сферою, кулею та відкритою кулею є звичайні сфера, куля та відкрита куля (рис. 4).



$S(O; r)$ $K(O; r)$ $\mathrm{U}(O; r)$

Рис. 4

На рис. 5 зображено фігуру Ф, яка складається з усіх точок кулі $K(O;r)$, крім точки D, яка є точкою дотику кулі і площини π, всіх точок площини π (крім точки D) та точки C, яка не належить ні кулі $K(O;r)$, ні площині π.

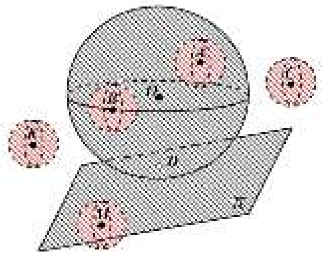


Рис. 5

Просторову фігуру *Ф* називають **обмеженою**, якщо вона є частиною деякої кулі. При цьому відстань між будь-якими двома точками фігури *Ф* не перевищує діаметра кулі, тобто двох радіусів.

Приклади: 1. Фігури, подані на рисунках 2–4, є обмеженими.

2. Фігура Ф, задана на рисунку 5, не є обмеженою.

2.3. Класифікація точок метричного простору стосовно даної фігури

Нехай задано метричний простір і фігуру *Ф* з цього простору. Тоді довільну фіксовану точку простору називають:

1) ***внутрішньою*** *точкою фігури Ф, коли існує окіл цієї точки, усі точки якого належать фігурі Ф;*
2) ***зовнішньою*** *точкою фігури Ф, коли існує окіл цієї точки, у якому немає жодної точки фігури Ф;*
3) ***межовою*** *точкою фігури Ф, коли будь-який окіл цієї точки містить у собі як точки фігури Ф, так і точки, що не належать фігурі Ф;*
4) ***граничною*** *точкою фігури Ф, коли будь-який окіл цієї точки містить у собі безліч точок фігури Ф;*
5) ***ізольованою*** *точкою фігури Ф, коли існує окіл цієї точки, у якому лише ця точка належить фігурі Ф.*

ПРИКЛАДИ

1. Якщо *Ф* – фігура, що зображена на рис. 5, то:

1) кожна точка відкритої кулі $U(O,r)$ і ніяка інша є внутрішньою точкою фігури *Ф*;
2) кожна точка, що не належить ні кулі $K(O,r)$, ні площині π та відмінна від точки *C*, є зовнішньою точкою фігури *Ф*;
3) кожна точка, що належить сфері *S*(*O; r*) або площині π, а також точка *C* є межовою точкою фігури *Ф*;
4) кожна точка, що належить до кулі *K*(*O; r*) або до площини π, зокрема і точка *D*, є граничною точкою фігури *Ф*;
5) єдиною ізольованою точкою фігури *Ф* є точка *C*.

З наведених вище означень випливає, що:

1) внутрішня точка та ізольована точка фігури *Ф* завжди належать цій фігурі;

2) зовнішня точка фігури *Ф* не належить їй;

3) межова точка та гранична точка фігури *Ф* можуть належати, а можуть і не належати фігурі *Ф*.

Легко переконатися, що *для довільної точки метричного простору і для заданої в ньому фігури Ф можливий один і лише один з трьох випадків:*

1) ця точка є внутрішньою точкою фігури Ф;
2) ця точка є зовнішньою точкою Ф;
3) ця точка є межовою точкою Ф.

Окрім цього *для точки, яка не є зовнішньою стосовно даної фігури Ф, можливий один і лише один з двох випадків*:

4) дана точка є граничною точкою Ф;
5) дана точка є ізольованою точкою Ф.

Стосовно довільної точки даної фігури Ф можливий один і лише один з двох випадків:

6) дана точка є внутрішньою точкою фігури Ф;
7) дана точка є межовою точкою фігури Ф.

Множину G(Ф) усіх внутрішніх точок фігури Ф – називають ***внутрішністю*** *фігури Ф, а множину S(Ф) усіх межових точок фігури Ф називають* ***межею*** *фігури Ф.*

Об'єднання фігури Ф з її межею називають ***замиканням*** *даної фігури і позначають* $\overline{\Phi}$.

ПРИКЛАДИ

1. Якщо $\Phi = K(O;r)$ або $\Phi = U(O;r)$, то внутрішність кожної з цих фігур $G(\Phi) = U(O;r)$, межа $S(\Phi) = S(O;r)$, а замикання кожної з цих фігур $\overline{\Phi} = K(O;r)$.

2. Якщо $\Phi = S(O;r)$, то $S(\Phi) = \Phi = \overline{\Phi}$, а $G(\Phi) =$ Ø.

2.4. Відкриті і замкнені фігури, області і замкнені області

Стосовно межі S(Ф) даної фігури Ф можливий один і лише один з трьох випадків:

1) S(Ф)$\subset$ Ф, тобто кожна точка межі *S(Ф)* є також точкою фігури *Ф* і тоді фігуру *Ф* називають **замкненою**;
2) S(Ф) $\cap$ Ф = Ø, тобто кожна точка межі *S(Ф)* не є точкою фігури *Ф*, і тоді фігуру *Ф* називають **відкритою**;
3) S(Ф) $\cap$ Ф$\neq$ Ø і S(Ф)$\not\subset$ Ф, тобто деякі точки межі *S(Ф)* є точками фігури *Ф*, а деякі ні, і тоді фігура Ф не є замкненою, а також не є відкритою.

ПРИКЛАДИ

1. Замкненими фігурами є: кожен простір та порожня фігура; кожна фігура, яка складається з скінченної множини точок; об'єднання скінченної кількості замкнених фігур, зокрема об'єднання скінченної кількості прямих або площин (у тривимірному просторі); кожна куля і сфера та кожен многогранник (у тривимірному просторі); замикання кожної фігури.

2. Відкритими фігурами є: кожен простір і порожня фігура; відкрита куля; об'єднання скінченної та зчисленної кількості відкритих фігур (зокрема відкритих куль); внутрішність будь-якої фігури, зокрема внутрішність будь-якого многогранника (у тривимірному просторі).

3. Ані замкненими, ані відкритими фігурами є: звичайна куля, з якої вилучено одну межову точку (чи будь-яку скінченну або зчисленну кількість межових точок); звичайна відкрита куля, до якої долучено одну межову точку (чи будь-яку скінченну або зчисленну кількість межових точок); многогранник, з якого вилучено одну вершину (у тривимірному просторі); сукупність точок координатного простору з раціональними координатами.

Відкриту фігуру *Ф* називають **областю**, коли будь-які дві точки цієї фігури можна сполучити ламаною, що цілком міститься у цій фігурі. При цьому, відкриту фігуру *Ф* називають також **лінійно зв'язною**.

ПРИКЛАДИ

1. Будь-яка відкрита куля є областю, а об'єднання двох відкритих куль без спільних точок є відкритою фігурою, проте не є областю, оскільки не є лінійно зв'язною.
2. Внутрішність будь-якого многогранника є областю (у тривимірному просторі).
3. Куля не є областю, оскільки не є відкритою фігурою.

2.5. Геометричне тіло та його поверхня

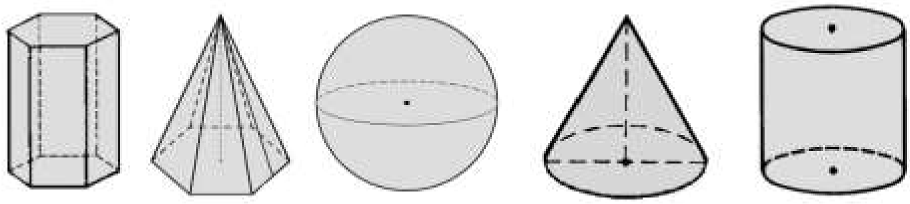
Геометричну фігуру Ф метричного простору називають ***геометричним тілом*** *або просто* ***тілом****, якщо вона є замиканням деякої області G, тобто* $\Phi = \overline{G} = G \cup S(G)$. *При цьому обов'язково внутрішність Ф співпадає з G, межа S(Ф) = S(G) і цю межу називають* ***поверхнею тіла*** *Ф.*

ПРИКЛАДИ

1. Куля є тілом, а сфера та відкрита куля не є тілом.

2. Кожен многогранник є тілом, а об'єднання двох многогранників може бути тілом, а може і не бути.

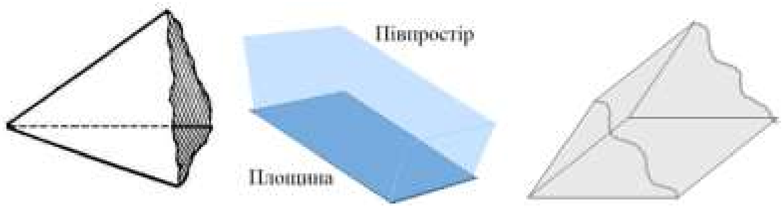
Геометричні тіла можуть бути ***обмеженими*** і ***необмеженими*** (хоча часто обмеженість вимагається в означенні тіла). Прикладами обмежених геометричних тіл у тривимірному просторі є призма, піраміда, куля, конус, циліндр тощо (рис. 6 *а*)–*д*)),



а) ***б)*** ***в)*** ***г)*** ***д)***

Рис. 6

а необмеженими – тілесний багатогранний кут, півпростір, частина простору, обмежена двогранним кутом (включаючи цей кут) тощо (рис. 7 *а)*–*в*)).

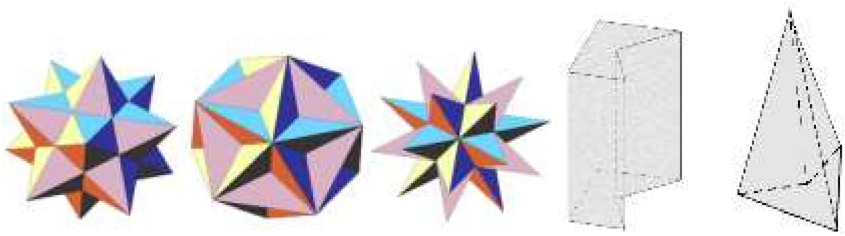


а) ***б)*** ***в)***

Рис. 7.

Просторова фігура (зокрема тіло) називається опуклою, якщо будь-які дві її точки можна з'єднати відрізком, який цілком міститься у цій фігурі.

Опуклими геометричними тілами у тривимірному просторі будуть призма, піраміда, циліндр, конус, куля, зображені на рис. 6 *а)*–*д)*. Приклади неопуклих тіл (зірчастих) зображено на рис. 8 *а)*–*в*). Призма і піраміда, основами яких є неопуклі многокутники, також є неопуклими тілами (рис. 8 *г), д*)).



а) ***б)*** ***в)*** ***г)*** ***д)***

Рис. 8

2.6. Критерій геометричного тіла та пов'язаний з ним алгоритм дослідження геометричної фігури

З означення геометричного тіла випливає, що *геометрична фігура Ф є тілом тоді й тільки тоді, коли виконуються умови*:

- *межа фігури Ф співпадає з межею її внутрішності та міститься у Ф;*
- *будь-які дві внутрішні точки фігури Ф можна сполучити ламаною, усі точки якої є внутрішніми точками Ф.*

Це твердження також можна вважати означенням геометричного тіла і воно є еквівалентним означенню, наведеному вище.

На основі даного твердження можна скласти **алгоритм перевірки, чи є дана геометрична фігура *Ф* тілом, чи ні**:

1. Знайти межу *S(Ф)* та внутрішність *G(Ф)* даної геометричної фігури *Ф*.
2. Якщо межа *S(Ф)* не міститься у фігурі *Ф*, перейти на пункт 7.
3. Якщо *G(Ф)*=∅, тобто фігура *Ф* не має внутрішніх точок, перейти на пункт 7.
4. Якщо внутрішність *G(Ф)* фігури *Ф* не є лінійно зв'язною, перейти на пункт 7.
5. Якщо межа внутрішності *G(Ф)* не співпадає з межею фігури *Ф*, перейти на пункт 7.
6. Зафіксувати, що фігура *Ф* є геометричним тілом з поверхнею *S(Ф)* і перейти на п. 8.
7. Зафіксувати, що фігура *Ф* не є геометричним тілом.
8. Якщо існує куля, що містить фігуру *Ф*, то зафіксувати, що фігура *Ф* обмежена і перейти на пункт 10.
9. Зафіксувати, що фігура *Ф* необмежена.
10. Якщо відрізок *AB* міститься у фігурі *Ф* для будь-яких точок *A* і *B* цієї фігури, то зафіксувати, що фігура *Ф* опукла і перейти на пункт 12.
11. Зафіксувати, що фігура *Ф* не є опуклою.
12. Завершити роботу.

Блок схему наведеного алгоритму зображено на рис. 9.

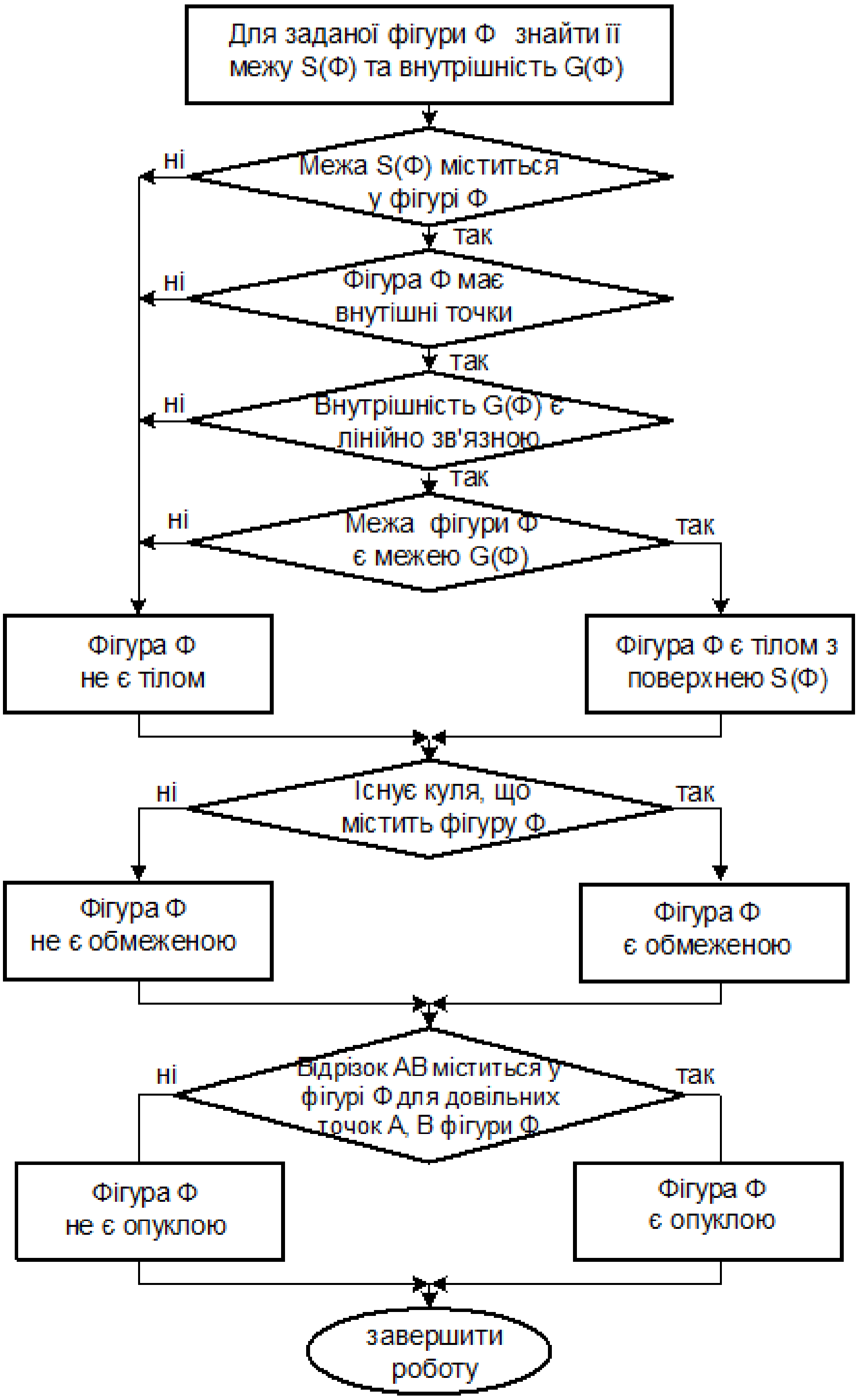


Рис. 9

ПІДСУМОК

Запропонований спосіб введення чіткого означення поняття геометричного тіла та пов'язаний з ним алгоритм дослідження геометричної фігури, на нашу думку, цілком доступний і може бути корисним більшості учнів школи, оскільки розкриває сутність простих і водночас важливих і в теорії, і в житті таких математичних понять, як:

- внутрішня точка та внутрішність фігури;
- межова точка та межа фігури;
- лінійна зв’язність фігури.

Запропонований спосіб можна реалізувати частково в курсі планіметрії основної школи на початку вивчення теми «Многокутники», та в старшій школі на початку вивчення теми «Об’єм і площа поверхні геометричного тіла».

Для математично обдарованих учнів цей спосіб можна поглибити і розширити на заняттях гуртка, факультативу чи окремо вибраного елективного курсу.

МЕТОДИЧНІ ЗАДАЧІ
для самостійного розв’язування

1.	Проаналізуйте діючі альтернативні шкільні підручники з геометрії для старшої школи на предмет формування в учнів поняття геометричного тіла.
2.	Користуючись запропонованим в лекції алгоритмом обґрунтуйте, що геометричними тілами в курсі стереометрії є призми, піраміди, циліндри, конуси.
3.	Наведіть приклади геометричних фігур, які не можна вважати геометричними тілами.
4.	Розробіть фрагмент уроку з вивчення нового матеріалу, за темою «Поняття геометричного тіла в шкільному курсі стереометрії».

Математика – наука молодих. Інакше і не може бути.
Заняття математикою – це така гімнастика розуму,
для якої потрібні вся гнучкість і вся витривалість молодості

Н. Вінер

Л Е К Ц І Я 3.10

Т Е М А *Геометрія тригранного кута*

П Л А Н

1.	***Тригранний кут і його елементи. Многогранний кут***
2.	***Властивості тригранного кута. Перша теорема косинусів для тригранного кута і наслідки з неї***
3.	***Друга теорема косинусів і теорема синусів для тригранного кута і наслідки з них***
4.	***Тригранний і многогранний кути в стереометричних задачах***

К О Н С П Е К Т Л Е К Ц І Ї

1. Тригранний кут і його елементи. Многогранний кут

Під час вивчення в базовій школі планіметрії учні систематично застосовують властивості таких фігур як: *трикутники* (правильні, різносторонні, рівнобедрені, прямокутні), *паралелограми* (прямокутники, ромби, довільні паралелограми), *трапеції* (прямокутні, рівнобічні, нерівнобічні), *коло*, *круг*.

У курсі стереометрії старшої школи учні вивчають паралельні і перпендикулярні прямі та площини, геометричні тіла: *призми* (правильні, прямі, похилі), *піраміди* (повні і зрізані), *циліндри*, *конуси* (повні і зрізані), *кулі*.

Таке вивчення включає формулювання певних означень понять, доведення відповідних теорем та розв’язання достатньої кількості задач. Серед переліку геометричних фігур, що вивчаються чомусь мало уваги (можна стверджувати, що така увага майже відсутня) приділяється важливій з пізнавальної та практичної точок зору фігурі – тригранному куту.

На наш погляд, така фігура має вивчатись за програмою з математики як профільного так і поглибленого рівнів більш ґрунтовно.

Зупинимося детальніше на знайомстві з тригранним кутом та його елементами, з многогранним кутом.

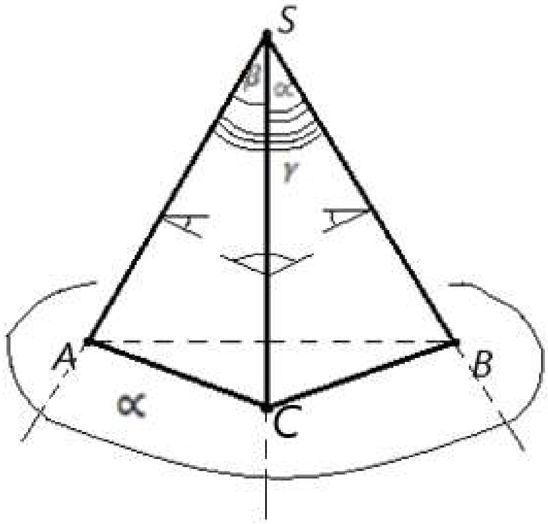


Рис. 1

Розглянемо площину ∝, якій належать ΔABC і точку *S*, що лежить поза площиною ∝. Побудуємо три плоскі кути: *ASC, ASB, CSB*. Фігуру, яка утвориться з побудованих трьох плоских кутів (рис. 1) без площини ∝ називають ***тригранним кутом*** і позначають $SABC$ (виділяють, тим самим, спочатку вершину S, а потім промені $SA,\ SB,\ SC$).

Часто вживаним є наступне означення тригранного кута.

Означення. Тригранним кутом *(abc)* називається фігура, яка складається з трьох плоских кутів *(ab), (bc), (ac)* сторони яких *a, b, c* виходять з однієї точки і не лежать в одній площині.

Кути ASC , ASB і CSB називають ***плоскими кутами*** тригранного кута, а кути, утворені гранями $SABC$, $BSAC$ і $CSBA$ – ***двогранними кутами*** даної фігури. Надалі плоскі кути будемо позначати відповідно β, γ, ∝, а двогранні *B*, *C* і *A*.

Тригранний кут ділить простір на дві області – внутрішню і зовнішню. Внутрішньою областю тригранного кута $SABC$ є частина простору, що містить ΔABC (рис. 1). Об’єднання тригранного кута з його внутрішньою областю утворює фігуру, яку називають ***тригранним тілесним кутом***.

Таким чином елементами тригранного кута є три плоскі кути та три двогранні. Спільна вершина *S* називається ***вершиною тригранного кута***, а промені – ***ребрами тригранного кута***.

Якщо на площині ∝ замість трикутника вибрати інший многокутник і здійснити, як у випадку з тригранним кутом, побудову плоских кутів зі спільною вершиною, то утворену фігуру називають ***многогранним кутом*** (рис. 2).

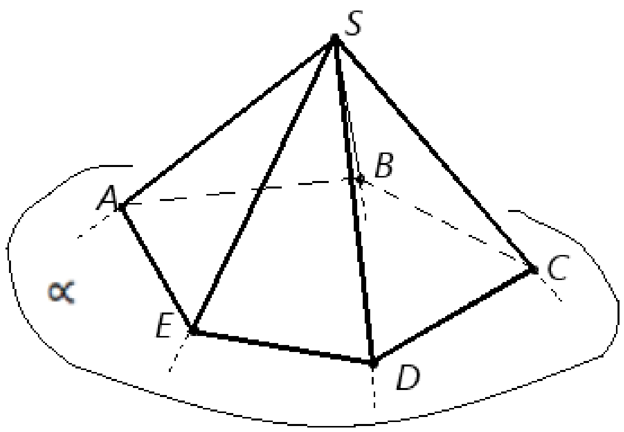


Рис. 2

Його елементами є плоскі кути та двогранні кути. Їх кількість залежить від вершин многокутника. За аналогією з’являються внутрішня і зовнішня області многогранного кута, многогранний тілесний кут. Якщо многокутник опуклий, то й многогранний кут називають *опуклим*.

Якщо в тригранному куті всі три плоскі кути рівні, то його називають *правильним* (за аналогією з трикутником), якщо два плоскі кути рівні – то *рівнобедреним*. У випадку, коли один з двогранних кутів прямий, то такий тригранний кут називають *прямокутним.*

2. Властивості тригранного кута.
Перша теорема косинусів для тригранного кута і наслідки з неї

Властивість 1. ***У рівнобедреному тригранному куті спільне ребро двох рівних плоских кутів ортогональним проєкціюванням на площину третього плоского кута проєкціюється на пряму, яка містить його бісектрису.***

Доведення

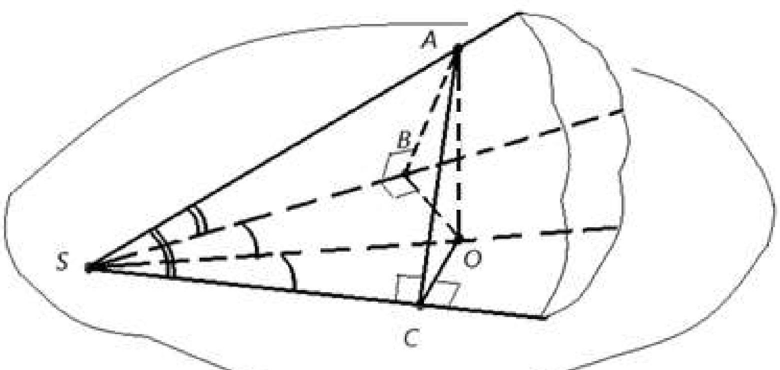


Рис. 3

Розглянемо рівнобедрений тригранний кут $SABC$ (рис. 3) $\angle ASC = \angle ASB$. Спроєкціюємо ортогонально промінь SA на площину (CSB). Нехай точка *A* проєкціюється в точку *O*, яка лежить всередині кута BSC. Тоді промінь SO – проєкція променя SA.

З точки *O* до сторін кута SC і SB проведемо перпендикуляри відповідно *OC* і *OB*. За теоремою про три перпендикуляри $AB \perp SB$. $\Delta ACS = \Delta ABS$, як два прямокутні трикутники з спільною гіпотенузою SA і рівними кутами $\angle ASC = \angle ASB$. Отже, $SB = SC$. Розглянемо прямокутні ΔSCO і ΔSBO. Вони рівні, бо SO – спільна гіпотенуза, а катети SB і SC – рівні. Звідси слідує, що $\angle CSO = \angle BSO$. Отже, промінь SO – бісектриса кута CSB.

Випадок, коли точка *A* проєкціюється в точку *O*, яка не лежить всередині кута CSB, розгляньте самостійно.

Розглянемо тригранний кут з плоскими кутами рівними $\propto$, β, γ і двогранним кутом *B* (рис. 4). Для них має місце теорема.

Теорема 1. *(Перша теорема косинусів для тригранного кута) Для плоских кутів $\propto$, β, γ і двогранним кутом B тригранного кута OABC має місце рівність:*

$$\cos\beta = \cos\propto\cos\gamma + \sin\propto\sin\gamma\cos\beta \qquad (1)$$

Розглянемо той випадок, коли $\propto$, β, γ – гострі.

Доведення

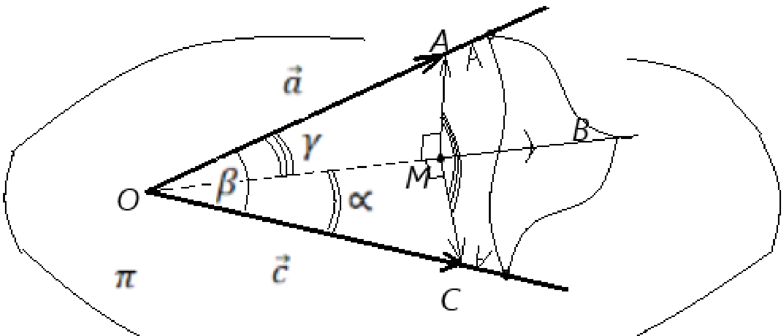


Рис. 4

На ребрі *OB* виберемо точку *M*. У грані *AOB* проведемо $MA \perp OB$. У грані *BOC* проведено $MC \perp OB$. $\angle AMC$ - лінійний кут двогранного кута *OB*. Тому $\angle AMC = B$. Позначимо $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Тоді

$\cos\beta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{a\cdot c} = \frac{(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA})\cdot(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MC})}{a\cdot c} =$

$= \frac{OM^2+\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}}{a\cdot c} =$

$= \frac{OM^2+MA\cdot MC\cdot\cos\beta}{a\cdot c}$.

Оскільки $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{OM} = 0$. Звідси маємо, що $\cos\beta = \frac{OM}{a}\cdot\frac{OM}{c} + \frac{MA}{a}\cdot\frac{MC}{c}\cdot\cos\beta$.

Але $\frac{OM}{a} = \cos\gamma$, $\frac{OM}{c} = \cos\propto$, $\frac{MA}{a} = \sin\gamma$, $\frac{MC}{c} = \sin\propto$.

Отже, $\cos\beta = \cos\propto\cdot\cos\gamma + \sin\propto\sin\gamma\cos\beta$.

Рівність виконується і у випадку, якщо не всі плоскі кути гострі. Переконайтесь самостійно.

З цієї теореми випливає кілька важливих наслідків, які мають виняткове значення для розв'язування задач.

Наслідок 1. У прямокутному тригранному куті ($B = 90°$).

$$\cos\beta = \cos\propto\cdot\cos\gamma \qquad (2)$$

Відома властивість трьох косинусів для прямокутного тригранного кута.

Наслідок 2. У тригранному куті сума двох плоских кутів більша за третій плоский кут.

Справді, значення $\cos\beta$ може змінюватися в межах (-1; 1).

Замінимо $\cos\beta$ на число -1.

Тоді з рівності (1) отримаємо нерівність: $\cos\beta > \cos\propto\cdot\cos\gamma - \sin\propto\cdot\sin\gamma$.

Звідки $\cos\beta > \cos(\propto+\gamma)$.

Так як функція косинус на проміжку $(0°; 180°)$ спадна, то $\beta < \propto+\gamma$.

У випадку, коли $\propto+\gamma > 180°$ очевидно, то $\beta < \propto+\gamma$.

Наслідок 3. У рівнобедреному тригранному куті ($\propto = \boldsymbol{\beta}$).

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sin\frac{C}{2}\cdot\sin\propto \qquad (3)$$

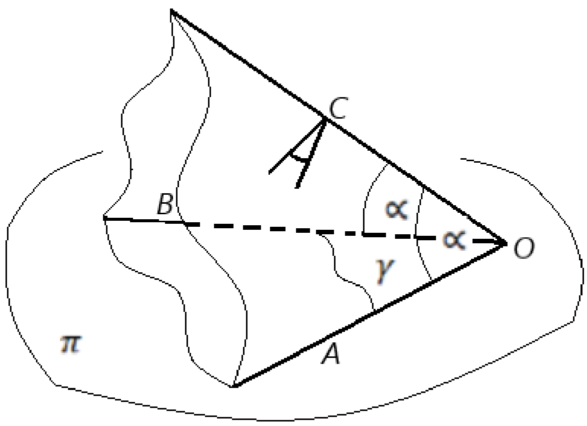


Рис. 5

Справді, розглянемо тригранний кут *OABC* (рис. 5) Тоді за теоремою косинусів маємо:

$\cos\gamma = cos^2\propto + sin^2\propto\cdot\cos C$ або

$1 - \cos\gamma = 1 - cos^2\propto - sin^2\propto\cdot\cos C$,

$$2\sin^2\frac{\gamma}{2} = \sin^2\propto - \sin^2\propto cos\,C,$$

$$2\sin^2\frac{\gamma}{2} = \sin^2\propto\cdot 2\sin\frac{2C}{2} .$$

Звідки, $\sin\frac{\gamma}{2} = \sin\frac{C}{2}\cdot\sin\propto$

Відома властивість трьох синусів для рівнобедреного тригранного кута.

Наслідок 4. У рівнобедреному тригранному куті плоский кут, що не дорівнює жодному з двох інших плоских кутів, менший за величиною від протилежного двогранного кута.

Справді, так як $\sin\frac{C}{2}\cdot\sin\propto < \sin\frac{C}{2}$, то $\sin\frac{\gamma}{2} < \sin\frac{C}{2}$. І, врахувавши те, що функція $\sin x$ на проміжку $(0°; 90°)$ зростаюча, маємо: $\frac{\gamma}{2} < \frac{C}{2}$, тобто $\gamma < C$.

Теорема 2. *(для опуклого многогранного кута)*

У опуклому многогранному куті сума плоских кутів менша за $360°$.

Доведення

Нехай дано опуклий многогранний кут $SABC \dots E$ (рис. 2).

Розглянемо тригранні кути з вершинами $A,\ B,\ C, \dots E$.

Для кожного з них відповідно матимемо (за наслідком 2 з теоремою 1) :

$$\angle SAE + \angle SAB > \angle EAB\ ;$$
$$\angle SBA + \angle SBC > \angle ACB\ ;$$
$$\angle SCB + \angle SCD > \angle BCD\ ;$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\angle SEB + \angle SEA > \angle DEA$$

Додамо одержані нерівності.

Сума правих частин дорівнює сумі кутів опуклого многокутника $ABC \dots E$, тобто дорівнює $180°(n-2)$, де n – кількість сторін многокутника.

Сума лівих частин нерівностей можна розглядати як суму пар

$$\angle SAB + \angle SBA;\ \ \angle SBC + \angle SCB\ ;\ \angle SCD + \angle SDC;\ \dots\ \ \angle DEA + \angle SAE.$$

Враховуючи, що кожна з пар, це суми двох кутів відповідно

$$\Delta ASB,\ \Delta BSC\ ,\ \Delta CSD,\ \ \dots\ \Delta ESA.$$

Замінимо їх на різниці:

$$180° - \angle ASB,\ 180° - \angle BSC\ ,\ 180° - \angle CSD,\ \ \dots\ 180° - \angle ESA.$$

Тоді сума лівих частин буде дорівнювати:

$$n \cdot 180° - (\angle ASB + \angle BSC + \angle CSD + \dots + \angle ESA).$$

Отже отримуємо: $n \cdot 180° - (\angle ASB + \angle BSC + \angle CSD + \dots + \angle ESA) > 180°(n-2)$.

Перетворивши отриману нерівність маємо:

$$\angle ASB + \angle BSC + \angle CSD + \dots + \angle ESA < 360°.$$

Що й потрібно було довести.

Наслідок. У тригранному куті сума плоских кутів менша за $360°$.

3. Друга теорема косинусів і теорема синусів для тригранного кута і наслідки з них

Для встановлення інших властивостей тригранного кута введемо ще одне нове поняття – ***доповняльний кут двогранного кута***.

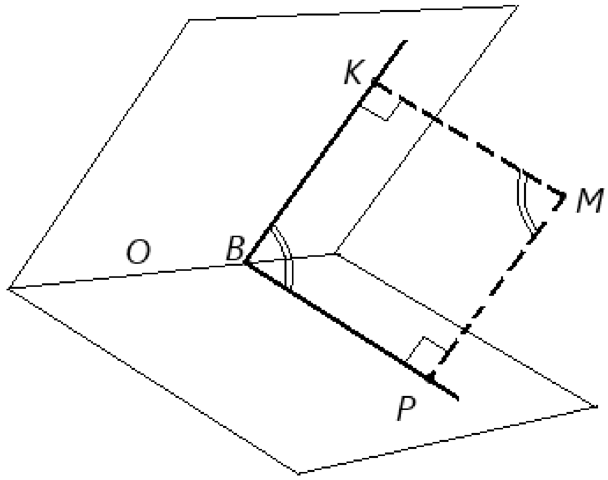


Рис. 6

Розглянемо двогранний кут *OB* (рис. 6) З точки *M*, яка не належить жодній із граней опустимо на грані перпендикуляри *MK* і *MP*.

Через дві прямі *KM* і *MP* проводимо площину π , яка перетинає грані по променях *BK* і *BP*.

$\angle KBP$, очевидно, є лінійним кутом даного двогранного кута *OB*.

$\angle KMP$ називають *доповняльним кутом* двогранним кута *OB*. Очевидно, що $\angle KMP = 180° - B$. Використаємо цю властивість для тригранного кута.

Теорема 3. *(Друга теорема косинусів для тригранного кута)*
Для двогранних кутів OA, OB, OC і плоского кута γ
має місце рівність $\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos \gamma$ (2)

Доведення

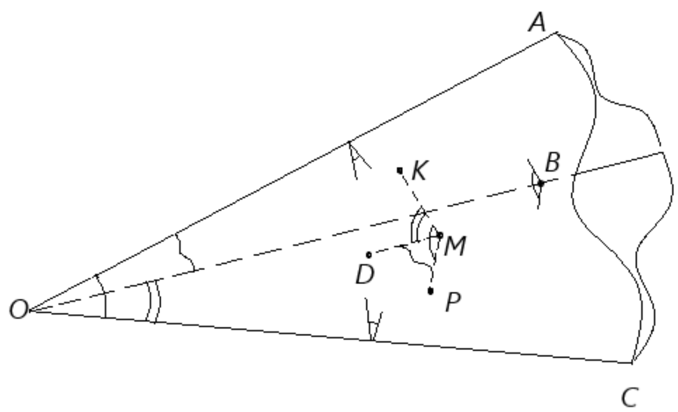


Рис. 7

Розглянемо тригранний кут *OABC* (рис. 7)

З точки *M*, що знаходиться у внутрішній області цього кута, опустимо на його грані *AOB, BOC, COA* відповідно перпендикуляри *MK, MP, MD*.

Тоді маємо ще один тригранний кут *MKPD*, який називають доповняльним до даного тригранного кута *OABC*.

Очевидно, що $\angle KMP = 180° - B, \angle PMD = 180° - C$, $\angle KMD = 180° - A$.

Використовуючи для нього теорему косинусів (1) матимемо:

$$\cos \angle PMD = \cos \angle KMD \cdot \cos \angle KMP + \sin \angle KMD \cdot \sin \angle KMP \cdot \cos \varphi,$$

де φ – величина двогранного кута *KM*, а вона, як відомо дорівнює $180° - \gamma$.

Зробивши заміни маємо: $\cos(180° - C) = \cos(180° - A) \cdot \cos(180° - B) + \sin(180° - A) \cdot \sin(180° - B) \cos(180° - \gamma)$ або $-\cos C = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B \cos \gamma$.

Після множення обох частин рівності на -1 одержуємо рівність 2, яку потрібно було довести: $\cos C = -\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B \cos \gamma$.

З другої теореми косинусів отримуємо цікаві наслідки.

Наслідок 1. Якщо в одержаній рівності в добутку $\sin A \cdot \sin B \cdot \cos \gamma$, $\cos \gamma$ замінити на 1, то цей добуток лише збільшиться.

Тому $\sin A \cdot \sin B \cdot \cos \gamma < \sin A \cdot \sin B$.

Інакше $\cos C < -\cos(A + B)$ або $\cos(A + B) < \cos(180° - C)$.

Враховуючи, що функція $\cos x$ на проміжку $(0;\ 180°)$ – спадна,

маємо: $A + B > 180° - C$ або $A + B + C > 180°$.

Отже, в **тригранному куті сума двогранних кутів більша за $180°$.**

Наслідок 2. Якщо кут *С* – прямий, то в такому прямокутному тригранному куті має місце рівність : $\cos \gamma = ctgA \cdot ctgB$.

Теорема 3. *Теорема синусів для тригранного кута. Для плоских кутів $\propto$, β, γ і відповідних двогранних кутів А, В, С має місце співвідношення:* $\frac{\sin \gamma}{\sin C} = \frac{\sin \propto}{\sin A} = \frac{\sin \beta}{\sin B}$.

(Доведіть самостійно)

З теоремою синусів легко отримати важливий (в пізнавальному сенсі) наслідок.

Наслідок. Два плоскі кути тригранного кута рівні між собою тоді і тільки тоді, коли рівні між собою їх відповідні двогранні кути.

(Доведіть самостійно)

4. Тригранний і многогранний кути в стереометричних задачах

Знання теоретичних відомостей про тригранний і многогранний кути стають дієвим засобом для розв'язування стереометричних задач підвищеної складності. Часто такі розв'язання вирізняються оригінальністю, вишуканістю, раціональністю і свідчать про високу підготовку учня чи студента. Проілюструємо кілька таких розв'язань разом із доречними методичними порадами.

Задача 1. *Основою похилою призми є правильний трикутник з стороною, яка рівна a. Довжина бічного ребра b, а одне з бічних ребер утворює з прилеглими сторонами кути $45°$. Визначити об'єм призми.*

Розв'язання

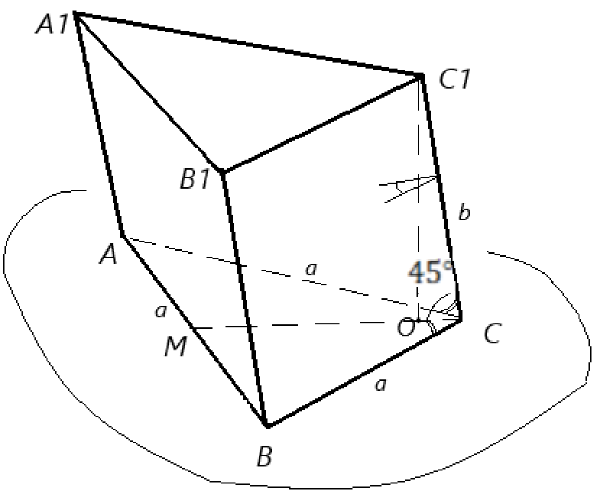


Рис. 8

Нехай $ABCA_1B_1C_1$ похила призма (рис. 8).

$AB = BC = AC = a$.

Двогранний кут $CC_1 = b$,

$\angle C_1CA = \angle C_1CB = 45°$,

C_1O – висота призми.

Оскільки $\angle C_1CA = \angle C_1CB$, то точка $O \epsilon CM$, де *CM* – пряма, яка містить медіану ΔABC.

Об'єм призми визначаємо за формулою: $V = S_{\Delta ABC} \cdot C_1O$.

Але $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Тому $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot C_1O$.

Розглянемо прямокутний ΔC_1OC. Позначимо $\angle C_1CO = x$. Тоді $C_1O = bsinx$. Тоді

$$V = \frac{\sqrt{3}a^2 b\ sinx}{4} \qquad (1)$$

Розглянемо прямокутний тригранний кут CC_1OA, $\angle OCA = 30°$.

За властивістю трьох косинусів (наслідок першої теореми косинусів) маємо:

$$\cos 45° = \cos x \cos 30°, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos x = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \sin x = \sqrt{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad (2)$$

Підставимо (2) в (1).

Маємо $V = \frac{\sqrt{3}a^2 b}{4 \cdot \sqrt{3}} = \frac{a^2 b}{4}$.

Відповідь : $V = \frac{a^2 b}{4}$ *куб. од.*

Задача 2. *У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині $\propto$. Визначити об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює H.*

Розв'язання

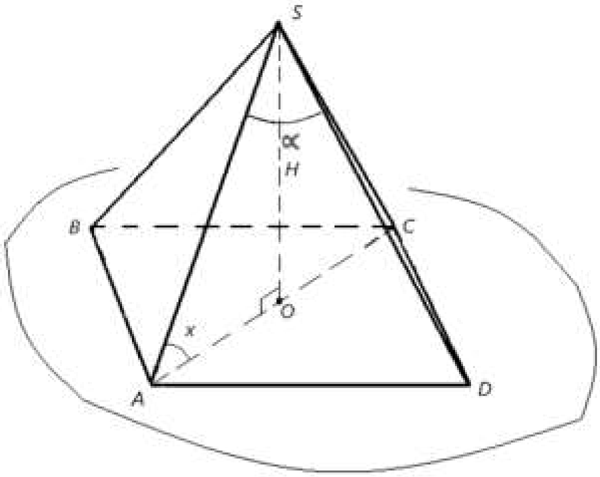


Рис. 9

Нехай $SABCD$ правильна чотирикутна піраміда (рис. 9). $\angle ASD = \propto$, SO – висота, $SO = H$. Об'єм піраміди визначаємо за формулою :

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO$$

але $SO = H$, $V = \frac{1}{2} AC^2$, $AC = 2 \cdot AO.$

Тоді $S_{ABCD} = 2 \cdot AO^2$.

Отже, $V = \frac{2}{3} \cdot AO^2 \cdot H$ (1)

Розглянемо прямокутний ΔSOA. Позначимо $\angle SAO = x$.

Тоді $AO = H \cdot ctgx$.

Отже,

$$V = \frac{2}{3} H^3 ctg^2 x \qquad (2)$$

У прямокутному тригранному куті *ASOD* :

$\angle OAD = 45°$, $\angle SAD = 90° - \frac{\propto}{2}$, $\angle SAO = x.$

За властивістю трьох косинусів маємо:

$\cos\left(90° - \frac{\propto}{2}\right) = \cos x \cdot \cos 45°$, $\cos x = \sqrt{2} \cdot \sin\frac{\propto}{2}$.

Тоді $ctg^2\, x = \frac{cos^2 x}{1 - cos^2 x} = \frac{2sin^2\frac{\propto}{2}}{1 - 2sin^2\frac{\propto}{2}}$.

Отже,

$$ctg^2\, x = \frac{2sin^2\frac{\propto}{2}}{cos\propto} \qquad (3)$$

Підставимо (3) в (2), одержуємо: $V = \frac{4}{3} H^2 \frac{sin^2\frac{\propto}{2}}{\cos\propto}$.

Для опуклого многогранного кута $SABCD$ маємо: $4 \propto < 360°$, звідки $\propto < 90°$.

Тоді $\cos \propto > 0$.

Відповідь : $V = H^3 \frac{sin^2\frac{\propto}{2}}{\cos\propto}$ *куб. од.*

Задача 3. *Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a. Кут між суміжними бічними гранями $\propto$. Визначити бічну поверхню піраміди.*

Розв'язання

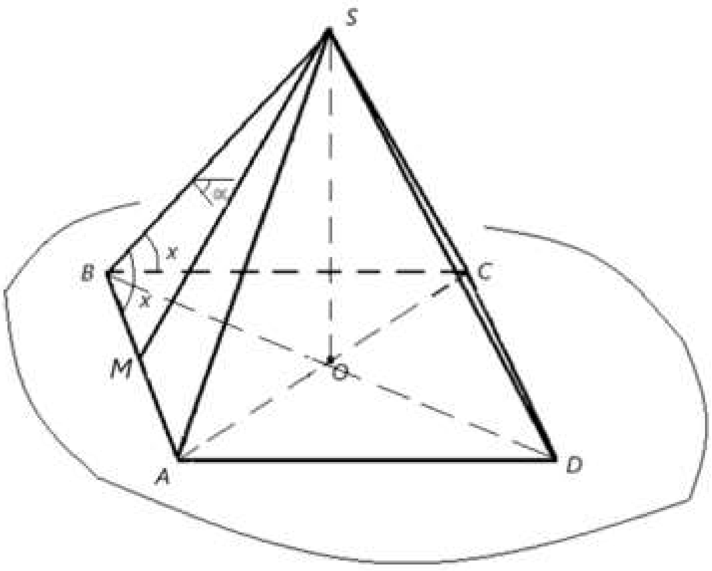


Рис. 10

Нехай $SABCD$ правильна чотирикутна піраміда (рис. 10). $AB = a.$ Двогранний кут BS дорівнює $\propto$. SM – апофема. Бічну поверхню піраміди визначаємо за формулою :

$$S_{\text{бічне}} = 2a \cdot SM.$$

Позначимо $\angle SBA = x$.

З прямокутного ΔSMB маємо:

$$SM = BM \cdot tgx = \frac{a}{2} \cdot tgx$$

Отже, $S_{\text{бічне}} = a^2 \cdot tgx$ (1)

Розглянемо рівнобедрений тригранний кут $BSCA$.

За властивістю трьох синусів (наслідок з першої теореми косинусів для рівнобедреного тригранного кута) маємо : $\sin\frac{90°}{2} = \sin\frac{\propto}{2} \cdot \sin x$.

Звідки $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{\propto}{2}}$.

Тоді $tgx = \frac{sinx}{cosx} = \frac{sinx}{\sqrt{1-sin^2x}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{\propto}{2}} : \sqrt{1 - \frac{1}{2sin^2\frac{\propto}{2}}}$.

Після спрощення отримуємо:

$$tgx = \frac{1}{\sqrt{-cos\propto}} \qquad (2)$$

За наслідком 4 з першої теореми косинусів двогранний кут $\propto$ буде більший за кут квадрата, тобто $\propto > 90°$. Тому $cos \propto < 0$.

Тому формула (2) має зміст.

Підставимо (2) в (1) і одержуємо, що :

$$S_{\text{бічне}} = \frac{a^2}{\sqrt{-cos\propto}} \text{ (кв. од.), де } \propto > 90°.$$

Відповідь : $S_{\text{бічне}} = \frac{a^2}{\sqrt{-cos\propto}}$ *кв. од.*

Задача 4. *У правильній трикутній піраміді двогранний кут при бічному ребрі β. Визначити об'єм піраміди, якщо її висота h.*

Розв'язання

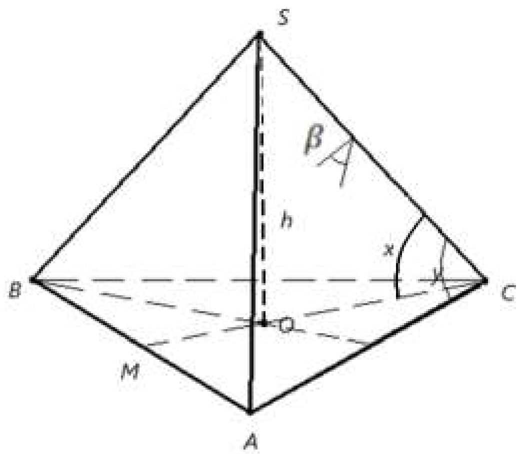


Рис. 11

Нехай $SABC$ правильна трикутна піраміда (рис. 11). Об'єм визначаємо за формулою: $V=\frac{1}{3}\cdot SO\cdot S_{\Delta ABC}$.
SO – висота піраміди, $SO=h$.
Але $S_{\Delta ABC}=\frac{AC^2\sqrt{3}}{4}$.
Оскільки $AC=\sqrt{3}\cdot OC$,
де OC – радіус описаного кола,
то $S_{\Delta ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot OC^2$.
Розглянемо прямокутний ΔSOC.

Позначимо $\angle SCO=x$. Тоді $OC=h\cdot ctgx$. Отже, $S_{\Delta ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot h^2\cdot ctg^2\,x$. Тоді:

$$V=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot h^3\cdot ctg^2\,x \qquad (1)$$

Розглянемо прямокутний тригранний кут $CSOA$: $\angle SCO=x$, позначимо $\angle SCA=y$, $\angle OCA=30°$. За властивістю трьох косинусів маємо: $\cos y=\cos x\cos 30°$. Звідки $\cos y=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$. Розглянемо рівнобедрений тригранний кут $CABS$, за властивістю про три синуси маємо: $\sin 30°=\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin y$. Звідки $\frac{1}{2}=\sin\frac{\beta}{2}sin\,y$, $sin\,y=\frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}}$.

Розглянемо систему рівностей: $\begin{cases} cosy=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x \\ sin\,y=\frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}} \end{cases}$

Піднісши до квадрату кожну з них, отримуємо $(cos^2y+sin^2y=1)$.

$$\frac{3}{4}cos^2x+\frac{1}{4sin^2\frac{\beta}{2}}=1$$

Скориставшись нею знаходимо: $ctg^2x=\frac{4sin^2\frac{\beta}{2}-1}{cos^2\frac{\beta}{2}}$ (2)

Підставимо (2) в (1) і маємо: $V=\frac{\sqrt{3}}{4}h^3\cdot\frac{4sin^2\frac{\beta}{2}-1}{cos^2\frac{\beta}{2}}$ *(куб .од.).*

За наслідком 4 двогранний кут β буде більшим за кут трикутника, який лежить в основі і рівний $60°$. Отже, $\beta>60°$. Тоді $\frac{\beta}{2}>30°$, $\sin\frac{\beta}{2}>\frac{1}{2}$, $4sin^2\frac{\beta}{2}>1$.

Різниця $4sin^2\frac{\beta}{2}-1>0$. Формула об'єму має зміст.

Відповідь : $V=\frac{\sqrt{3}}{4}h^3\cdot\frac{4sin^2\frac{\beta}{2}-1}{cos^2\frac{\beta}{2}}$ *куб. од.*

П І Д С У М О К

З теоретичними відомостями про тригранний і многогранний кути, що викладені вище, слід ознайомити учнів, які вивчають математику за програмою профільного чи поглибленого рівнів. У цьому й полягає поглиблене та розширене вивчення математики.

Таке ознайомлення слід здійснити під час вивчення теми «Многогранники» в курсі стереометрії 11 класу.

Вивчені властивості збагатять запас знань учнів, розширять їх можливості в побудові оператора до задачі, яким досягається виконання вимоги при заданих в задачі умовах. Крім того, розширюються можливості учнів щодо розв’язування задач більш високого рівня складності.

Рекомендуємо, вузлові питання теорії вивчати з учнями за лекційно-практичною формою навчання, інші питання, наприклад, другу теорему косинусів, наслідки з обох теорем, теорему синусів – запропонувати учням довести самостійно, залучаючи їх до посильної дослідницької роботи. Зрозуміло, що їх доведення слід обговорити на семінарі, щоб результати пошуків стали надбанням для всіх учасників навчального процесу.

Теоретичні знання цінуються тоді, коли вони часто застосовуються на практиці. Отримані учнями знання про тригранний кут мають активно застосовуватися ними під час вивчення наступних тем стереометрії «Об’єми многогранників», «Об’єми круглих тіл», «Площа поверхні тіла».

МЕТОДИЧНІ ЗАДАЧІ
для самостійного розв’язування

1. Запропонуйте доведення теореми синусів для тригранного кута. Дослідіть, які наслідки можна отримати з неї для тригранного кута.

2. Підготуйте добірку задач на тригранний і многогранний кути, які б можна було використати під час їх вивчення.

3. Розв’яжіть задачі:
   а) основою похилого паралелепіпеда є ромб $ABCD$ із стороною, довжина якої a і гострим кутом $60°$. Ребро $A_1A = a$ і утворює з ребрами AB і AD кути $45°$. Визначити об’єм паралелепіпеда ($\frac{a^3}{2}$ *куб.од.*);
   б) із деякої точки ребра двогранного кута $\propto$ ($0° < \propto < 90°$) виходить два промені, які розміщені в різних гранях. Один із променів перпендикулярний до ребра двогранного кута, а другий утворює з ребром кут β. Визначити кут між цими променями ($arccos(cos \propto sin\beta)$);
   в) площина прямокутного трикутника, довжини катетів якого дорівнюють 3 см і 4 см, утворює з площиною π кут, величина якого дорівнює $\propto$. Гіпотенуза даного трикутника лежить в площині π. Визначити величину кута, який утворює менший катет з площиною π ($arcsin(\frac{4}{5} sin \propto)$).

Те чого не може геометрія, не можемо й ми

Б. Паскаль

Л Е К Ц І Я 3.11

Т Е М А *Об'єм геометричного тіла. Многогранники*

П Л А Н

1.	***Місце теми в програмі з математики. Основна мета вивчення. Орієнтовне планування навчального процесу***
2.	***Формування поняття об'єму геометричного тіла. Функція об'єму і її задання***
3.	***Об'єм прямокутного паралелепіпеда. Об'єм призми***
4.	***Об'єм трикутної піраміди. Об'єм піраміди (повної і зрізаної)***
5.	***Задачі на визначення об'єму многогранника***

К О Н С П Е К Т Л Е К Ц І Ї

1. Місце теми в програмі з математики. Основна мета вивчення. Орієнтовне планування навчального процесу

На вивчення об'ємів і площ поверхонь геометричних тіл програмою з математики для класів і шкіл, де геометрія вивчається на профільному і поглибленому рівнях відводиться 36 годин. Цією темою завершується вивчення курсу стереометрії в середній школі. Зміст теми, вимоги до підготовки учнів (компетентності) подані в таблиці 1.

***Основна мета вивчення*:**

- сформувати в учнів поняття об'єму геометричного тіла;
- вивести формули обчислення об'ємів геометричних тіл, що вивчаються;
- навчити застосовувати отримані знання для розв'язування практичних та прикладних задач.

Таблиця 1

Зміст теми і вимоги до підготовки учнів (фрагмент програми)

Тема 8. Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл (36 год)	*учень / учениця :*
Поняття про об'єм тіла. Основні властивості об'ємів. Об'єм призми, паралелепіпеда, піраміди, *зрізаної піраміди*. Об'єми тіл обертання: циліндра, конуса, *зрізаного конуса, кулі та її частин*. Відношення об'ємів подібних тіл. *Поняття про площу поверхні*. Площі бічної та повної поверхонь циліндра, конуса, *зрізаного конуса*. Площа сфери.	*Формулює* основні властивості об'ємів. *Записує* формули для обчислення об'ємів паралелепіпеда, призми, піраміди, зрізаної піраміди, циліндра, конуса, зрізаного конуса, площ бічної та повної поверхонь циліндра, конуса, зрізаного конуса, площі сфери. *Розв'язує* задачі на обчислення об'ємів і площ поверхонь геометричних тіл, використовуючи: основні формули, розбиття тіл на простіші тіла.

Зміст теми широкий і поглиблений. Тому для кращого засвоєння його учням пропонуємо розділити названу тему ***на три самостійні підтеми***:

Підтема 8.1. **12 год**	Поняття об'єму геометричного тіла. Об'єми многогранників (призми, піраміди, зрізаної піраміди)
Підтема 8.2. **12 год**	Об'єми тіл обертання (циліндра, конуса, зрізаного конуса, кулі, тіл обертання)
Підтема 8.3. **12 год**	Площа поверхні геометричного тіла. Площа поверхні циліндра, конуса, кулі

Розглянемо організацію вивчення Підтеми 8.1. Поняття об'єму геометричного тіла. Об'єми многогранників.

1) *Основна мета вивчення* :

- сформувати поняття об'єму геометричного тіла як функції, заданої на множині геометричних тіл;
- вивести формули об'єму призми, піраміди, зрізаної піраміди;
- сформувати в учнів уміння застосовувати отримані знання під час розв'язування практичних та прикладних задач.

2) *Орієнтовне планування навчального процесу, вимоги до підготовки учнів*.

Підтема 8.1. Поняття об'єму геометричного тіла.
Об'єми многогранників (призми, піраміди, зрізаної піраміди)

№ 1 Поелементне вивчення		
№ / дати	Тема заняття, вид роботи	К-ть уроків
1	Об'єм фізичного тіла як його властивість. Об'єм геометричного тіла	1
2	Об'єм прямокутного паралелепіпеда. Розв'язування задач	2
3	Об'єм прямого і похилого паралелепіпеда С.Р.-1	2
4	Об'єм трикутної призми, довільної призми С.Р.-2	2
5	Об'єм трикутної піраміди, об'єм довільної піраміди. Розв'язування задач	2
6	Об'єм зрізаної піраміди, многогранника С.Р.-3	2
7	Контрольна робота № 1. Атестація з теми	1
	Разом:	12

№ 1 Поетапне вивчення		
№ / дати	Тема заняття, вид роботи	К-ть годин
1	Об'єм фізичного тіла як його властивість. Об'єм геометричного тіла як функція множини. Аналітичне задання функції об'єму	1
2	Виведення формул об'єму паралелепіпеда, призми	1
3	Виведення формул об'єму піраміди	1
4	Семінарське заняття для систематизації і поглибленням знань про об'єми многогранників. Залік з теоретичного матеріалу	2
5	Застосування отриманих знань під час розв'язування практичних і прикладних задач на визначення об'ємів призм С.Р.-2	3
6	Застосування отриманих знань під час розв'язування практичних і прикладних задач на визначення об'ємів пірамід С.Р.-2	3
7	Контрольна робота № 1. Атестація з теми	1
	Разом:	12

3) *Вимоги до підготовки учнів (компетентності)*.

Вивчивши **Підтему 8.1.** учень / учениця:

- формулює означення об'єму геометричного тіла як функцію, задану на множині;
- називає основні властивості функції об'єму;
- знає формули об'єму паралелепіпеда, призми, піраміди, зрізаної піраміди;
- застосовує вивченні формули під час розв'язування практичних та прикладних задач на визначення об'ємів призм, пірамід, зрізаних пірамід.

2. Формування поняття об'єму геометричного тіла. Функція об'єму і її задання

Знайомство учнів з поняттям об'єму геометричного тіла рекомендуємо розпочати з бесіди про об'єми посудин, фізичних тіл, з яким люди зустрічаються в повсякденному житті. Формою заняття можна обрати шкільну лекцію. Зміст такої лекції *подано нижче*.

Лекція на тему «Бесіда про об'єм тіла»

Різноманітні предмети, фізичні тіла, споруди мають порожнини, які можна наповнювати або вже заповнені сипучими матеріалами, рідиною, виробами, овочами, фруктами тощо. У такому випадку кажуть, що ці предмети, тіла, споруди *мають ємність* (*місткість*), тобто порожнину, яка або заповнена або її можна чимось заповнювати. В одних ця ємність більша (вміщується більше речей), в інших менша. Люди давно навчилися характеризувати, цю властивість за допомогою чисел, обравши при цьому за одиницю ємності певного *тіла – еталон*. Отримане з допомогою еталона (мірки) число (іменоване число) назвали об'ємом тіла, посудини, предмета, споруди тощо. Наприклад, говорять, що відро вміщує 10 *л* води (рис. 1).

Рис. 1

Це означає, що об'єм відра 10 *л*. Тут ***літр*** – ємність посудини, яку прийняли за одиницю вимірювання. Ще приклад: на будівництво садового будиночка знадобилося 15 кубометрів деревини. Тут 15 кубометрів (або 15 м^3) – об'єм деревини, яка необхідна для будівництва. Мірка кубометр (кубічний метр) – купа деревини (рис. 1), складена у вигляді куба, з довжиною ребра 1 *м*. Як бачимо, в обох прикладах об’єми виражаються певними числами, але в різних одиницях – в літрах та кубометрах.

Як же практично визначити об’єм фізичного тіла, споруди, посудини. У випадку відра, чи невеликої посудини це зробити просто – заповнити його водою за допомогою літрової банки (мірки) і підрахувати скільки мірок води вмістилося. Отримане число і буде об’ємом обраного тіла (рис. 2).

Рис. 2

Об'єм невеликого тіла можна виміряти за допомогою вимірювального циліндра (мензурки) (рис. 3 *а*)). Для цього спочатку визначають ціну поділки мензурки. Потім наливають у мензурку таку кількість води, щоб тіло повністю занурилось у рідину. Визначають об'єм води. Тіло, об'єм якого потрібно виміряти, опускають у воду та визначають загальний об'єм води та тіла. Знаходять об'єм досліджуваного тіла як різницю цих двох об'ємів.

а) ***б)***

Рис. 3

Якщо тіло більшої форми і не входить у мензурку, то його об'єм визначають за допомогою відливної склянки (рис. 3 *б*)). Перед вимірюванням склянку наповнюють водою до рівня отвору відливної трубки. При зануренні тіла частина води, що за об'ємом дорівнює об'єму тіла, виливається. Визначивши мензуркою її об'єм, знаходять об'єм зануреного у воду тіла. Якщо проводити дослід над однаковими тілами, то можна помітити, що об'єми витісненої води будуть однаковими. Коли тіло розбити на частини і провести дослід для кожної, то в сумі об'єми будуть давати об'єм початкового тіла.

Описані способи визначення об'ємів не завжди зручні або їх не завжди можна використати. Наприклад, якщо потрібно знайти об'єм цистерни (рис. 4 *а*)), зерносховища (рис. 4 *б*)), вагона (рис. 4 *в*)), то зовсім недоречно заповнювати їх водою і рахувати кількість літрів. Для великих споруд, таких як багатоповерхівки або піраміда царя Хеопса (рис. 4 *г*)), спосіб обчислення об'ємів шляхом занурення їх у воду є неприйнятним. Крім того, на практиці, зазвичай, ще до будівництва тієї чи іншої споруди необхідно знати, які розміри вона повинна мати, щоб знати певний об'єм. Таким чином, важливо вміти обчислювати об'єми тіл, знаючи їх розміри.




а) ***б)*** ***в)*** ***г)***

Рис. 4

Ось чому люди з давніх давен шукали способи визначення об’ємів тіл не шляхом вимірювань, а за допомогою обрахунків.

З історії математики відомо, що теорію об’ємів розробляли ще в V-IV ст. до н.е. грецькі вчені, зокрема, Демокріт та Евдокс. Евклід в XI книзі своїх «Начал» виклав теореми про порівняння об'ємів, оскільки вважав безпосереднє вимірювання об'ємів справою більше практичною, ніж теоретичною. Герон Олександрійський описав правила для обчислення об'єму куба, призми, паралелепіпеда та інших просторових фігур. Єгиптяни, вавилоняни, китайці та індійці обчислювали об'єми зернових комор та інших споруд, які мали форму куба, призми або циліндра, дією множення площі їхньої основи на висоту.

Українські селяни дуже вдало визначали на око об'єм будинку, хати, клуні, засіка. Для обчислення об'єму засіка в коморі, яка мала вигляд куба, вимірювали одну сторону і тричі перемножували, а для визначення об'єму засіка іншої форми виміряли різні три сторони і результати перемножували між собою.

Потреба навчатися обчислювати об’єми фізичних тіл спонукала математиків до розробки відповідних теоретичних знань. Об’єктами їх досліджень стали не самі фізичні тіла, я їх моделі – ***геометричні тіла***. Зокрема, призми, піраміди, циліндри, конуси, кулі та ніші, які існують в уяві людини.

Багатовікова практика та теоретичні розвідки привели науковців
до таких важливих висновків:

- *об’єм геометричного тіла – його властивість яку можна охарактеризувати (за допомогою числа) чисельно. Таку властивість, яку можна охарактеризувати числом в науці називають* ***величиною****, у випадку з об’ємом –* ***геометричною величиною****;*

- *якщо геометричні тіла рівні, то й об'єми їх рівні (їх числові характеристики рівні);*
- *якщо геометричне тіло розділити на частини, об'єми яких відомі, то об'єм всього тіла дорівнює сумі об'ємів частин;*
- *для визначення об'єму геометричного тіла (іменованого числа) потрібно вибрати певне геометричне тіло за еталон і його об'єм прийняти за одиницю. Саме в таких одиницях і слід обраховувати об'єми інших геометричних тіл.*

Методичні зауваження

У шкільному курсі стереометрії поняття об'єму геометричного тіла трактується по-різному: або подається як неозначуване, або часто формується лише уявлення про об'єм тіла з окремими його властивостями.

Наприклад, у підручнику [29] у параграфі 24 «Поняття про об'єм тіла, об'єм прямокутного паралелепіпеда» знаходимо наступне пояснення:

«*Кожне* геометричне *тіло займає частину простору. Якщо величину цієї частини простору виразити деяким числом, то дістанемо об'єм тіла. Об'єм як геометрична величина має такі основні властивості:*

1. Рівні тіла мають рівні об'єми.

2. Об'єми будь якого тіла, що складається з частин, дорівнює сумі об'ємів цих частин.

3. Об'єм куба, ребро якого дорівнює одиниці довжини, дорівнює одиниці».

Схожі пояснення приводяться і в інших альтернативних шкільних підручниках з геометрії. Важко погодитися з тим, що після такого пояснення учень зрозуміє що таке об'єм геометричного тіла. Адже геометричні тіла – це віртуальні моделі, які існують лише в уяві людини, і вони не займають місця в реальному просторі. Чому об'єм тіла є геометричною величиною і що таке величина – учням невідомо. Не зрозумілим для них залишається і зміст терміну «об'єм» – це число? чи це величина? чи це щось інше?

Щоб на такі запитання учні знали чітку відповідь, ***пропонуємо розпочату бесіду продовжити наступним чином:***

Вивчаючи в курсі стереометрії геометричні тіла, важливо навчитись ставити кожному з них у відповідність його об'єм (число, числову характеристику), який, очевидно, залежить від лінійних вимірів даного тіла. Отже, мова йде про задання функції, яка б кожному геометричному тілу ставила у відповідальність його об'єм – додатне число. Така постановка завдання є підставою для введення означення об'єму просторового геометричного тіла.

Означення. ***Об'ємом просторового геометричного тіла*** **називається додатнозначна функція,** *яка має наступні властивості***:**

1) задана на множині просторових геометричних тіл;

2) рівним просторовим тілам ставить у відповідність рівні значення;

3) адитивна (якщо просторове тіло складається з кількох частин, об'єми яких відомі, то його об'єм дорівнює сумі об'ємів цих частин);

4) для куба, довжина ребра якого дорівнює одиниці довжини, значення функції дорівнює одиниці. Її називають одиницю об'єму (кубічною одиницею).

Якщо скористатись математичними символами, то запропоноване означення можна записати інакше: ***об'єм просторового геометричного тіла*** – функція *V*: $M \longrightarrow R$, де *M* – множина просторових геометричних тіл; $R+$ – множина додатних чисел.

З курсу алгебри і початків аналізу відомо, що основними способами задання функції є аналітичний, графічний, табличний і описовий. Як може бути задана функція об'єму? *Відповідь на дане запитання математиками знайдено давно.*

Якщо *класифікувати просторові геометричні тіла*, що вивчаються в школі, на ***прості*** і ***непрості***, а потім виділити інші їх класи – *призми, циліндри* тощо, то таку функцію можна задати аналітично. Зокрема:

- ***для призми*** $V = S_{\text{осн}} \cdot H$, де $S_{\text{осн}}$ – площа основи, H – висота призми;
- ***для піраміди*** $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$, де $S_{\text{осн}}$ – площа основи, H – висота піраміди;
- ***для зрізаної піраміди*** $V = \frac{1}{3} h(S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2$, де S_1 і S_2 – площі верхньої та нижньої основи, h – висота піраміди;
- ***для многогранників*** $V = \sum_{i=0}^{n} V_1$, де V_{i} – об'єм піраміди, на які розбивається многогранник;
- ***для циліндрів*** $V = \pi R^2 H$, де R – радіус основи, H – висота циліндра;
- ***для конусів*** $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$, де R – радіус основи, H – висота конуса;
- ***для зрізаних конусів*** $V = \frac{\pi}{3} h(r^2 + r \cdot R + R^2)$, де r і R – радіуси верхньої та нижньої основи, h – висота конуса;
- ***для куль*** $V = \frac{4}{3} \pi R^3$, де R – радіус кулі;
- ***для тіл обертання, яке отримане обертанням криволінійної трапеції навколо осі OX*** $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$, де $y = f(x)$ – функція, задана на проміжку $[a; b]$.

Як бачимо, загальної формули немає. Для конкретного класу просторових тіл вона своя. Розгляд інших геометричних тіл, ймовірно, дасть інші формули. Перейдемо до виведення цих формул і їх застосування до розв'язування практичних та прикладних задач.

КІНЕЦЬ ЛЕКЦІЇ

Методичні зауваження

Формуючи поняття об'єму геометричного тіла, слід звернути увагу учнів на зміст поняття «об'єм». Він багатозначний: це і числова характеристика властивості геометричного тіла, тобто число (іменоване); це і геометрична величина, тобто властивість, яку можна охарактеризувати за допомогою числа; це і функція множини, яка ставить у відповідність геометричному тілу числове значення. Учням слід повідомити також, що геометричні тіла, які належать області визначення функції об'єму називаються *кубовними*, а інші – *не кубовні*. Наприклад, тілесний кут – геометричне тіло, об'єм якого визначити не можна.

3. Об'єм прямокутного паралелепіпеда. Об'єм призми

Під час вивчення Підтеми 8.1. «Поняття об'єму геометричного тіла. Об'єми многогранників» вузловими елементами знань є теореми про об'єм прямокутного паралелепіпеда і про об'єм трикутної піраміди. Решта тверджень легко одержуються з них і можуть вивчатись учнями самостійно, як завдання для власних досліджень. Тому зупинимося на методиці доведень названих теорем.

У різних альтернативних підручниках – різні підходи до розв'язання цього завдання. Зупинимося на одному з них, який вважаємо найбільш придатним для усвідомлення учнями.

Адже завдання полягає в тому, щоб встановити функцію об'єму $V = S_{\text{осн}} \cdot H$ для призм, де $S_{\text{осн}}$ – площа основи призми, H – її висота.

Насамперед потрібно довести теорему про відношення об'ємів двох прямокутних паралелепіпедів зі спільною основою.

Теорема 1. Об'єми двох прямокутних паралелепіпедів зі спільною основою відносяться як їх висоти.

Доведення

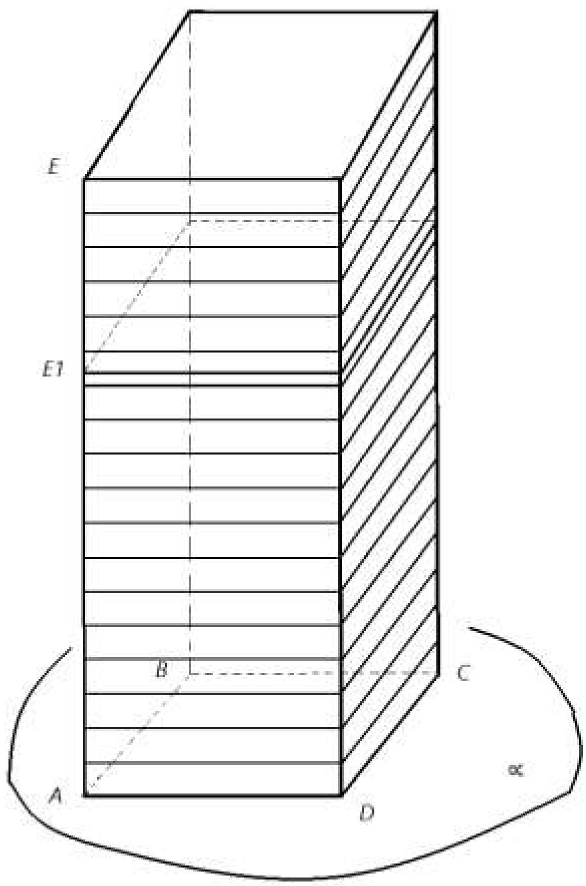


Рис. 5

Нехай дано два прямокутні паралелепіпеди $ABCDE$ і $ABCDE_1$, з спільною основою прямокутником $ABCD$ (рис. 5).

Розділимо ребро *AE* на *n* рівних відрізків. Нехай довжина кожного з них дорівнює а.

Разом з ребром *AH* розділиться і ребро AE_1.

Очевидно, що знайдеться таке число *m* , що довжина AE_1 буде не менша за $m \cdot a$ і не більша за $(m+1) \cdot a$.

Тобто $m \cdot a \leq \ AE_1 \leq (m+1) \cdot a$.

Розділимо останню нерівність на *AE=na.*

Матимемо нерівність :

$$\frac{m}{n} = \frac{AE_1}{\mathrm{AE}} \leq \frac{m+1}{n} \qquad (1)$$

Будемо вважати, що функція об’єму для прямокутних паралелепіпедів існує (!). Здійснивши поділ паралелепіпеда $ABCDE$ площинами, паралельними до площини основи, які проходять через точки поділу ребра $AE,$ отримуємо n пластинок (n рівних малих прямокутних паралелепіпедів).

Нехай об’єм кожного з них дорівнює V_0. Тоді об’єм паралелепіпеда $ABCDE$ буде дорівнювати $V_{\text{в}} = n \cdot V_0$. Разом з поділом великого паралелепіпеда відбудеться і поділ меншого, об’єм якого $V_{\text{м}}$ буде не менше за $m \cdot V_0$ і не більшим за $(m+1)V_0$ (це слідує з властивостей функції об’єму).

Тобто $m \cdot V_0 \leq \ V_{\text{м}} \leq (m+1) \cdot V_0$. Розділимо одержану нерівність на $V_{\text{в}} = n \cdot V_0$.

Матимемо нерівність :

$$\frac{m}{n} = \frac{V_{\text{м}}}{V_{\text{в}}} \leq \frac{m+1}{n} \qquad (2)$$

З нерівностей (1) і (2) слідує, що обидва відношення $\frac{AE_1}{\mathrm{AE}}$ і $\frac{V_{\text{м}}}{V_{\text{в}}}$ належать числовому проміжку $\left[\frac{m}{n}; \frac{m+1}{n}\right]$, довжина якого дорівнює $\frac{m+1}{n} - \frac{m}{n} = \frac{1}{n}$. Отже, різниця цих відношень не більша за $\frac{1}{n}$. Якщо число *n* збільшувати до нескінченності, то приходимо до висновку, що обидва відношення рівні. Отже, $\frac{AE_1}{\mathrm{AE}} = \frac{V_{\text{м}}}{V_{\text{в}}}$. Теорему доведено.

***) *Зауважимо*, що функція об'єму для паралелепіпеда ще не встановлена. Ми тільки зробили припущення, шо вона відома і цим скористались.**

Тепер перейдемо до доведення основної, фундаментальної теореми 2.

Теорема 2. Об'єм прямокутного паралелепіпеда з вимірами *a, b, c* дорівнює добутку трьох його вимірів. Тобто $V = abc$ *куб. од.*

Доведення

Розглянемо чотири прямокутних паралелепіпеди Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 (рис. 6).

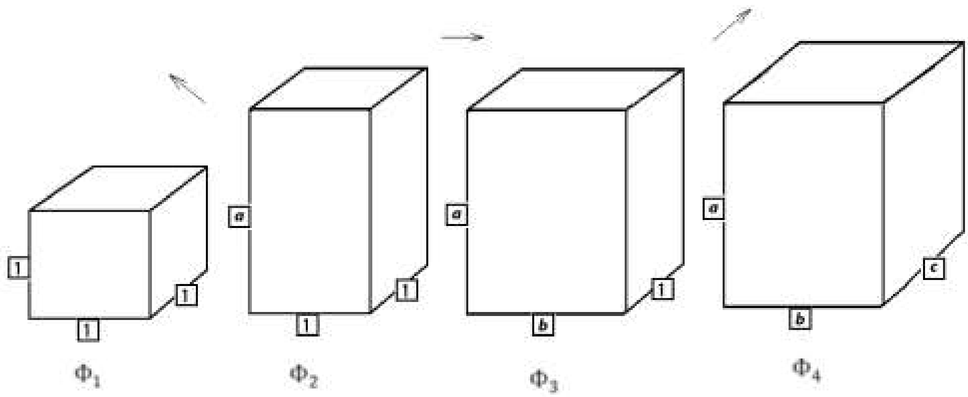


Рис. 6

Φ_1 – куб, з ребром, довжина якого дорівнює 1.

Φ_2 – паралелепіпед, в основі якого лежить квадрат зі стороною, довжина якої дорівнює 1, а бічне ребро має довжину a.

Φ_3 – паралелепіпед, бічна грань якого має виміри a і 1, третє ребро має довжину b.

Φ_4 – паралелепіпед, бічна грань якого має виміри a і b, третє ребро має довжину c.

За теоремою 1 об'єми Φ_1 і Φ_2 будуть відноситися як $\frac{a}{1}$, тобто :

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{a}{1} \qquad (1)$$

У паралелепіпеді Φ_2 і Φ_3 є рівні бічні грані з вимірами a і 1.

Якщо ці грані взяти за основу, то за теоремою 1 матимемо:

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{b}{a} \qquad (2)$$

У паралелепіпеді Φ_3 і Φ_4 є рівні бічні грані з вимірами a і b.

Якщо ці грані взяти за основу, то за теоремою 1 матимемо:

$$\frac{V_4}{V_3} = \frac{c}{b} \qquad (3)$$

Перемножимо рівності (1), (2) і (3), отримаємо в підсумку : $\frac{V_4}{V_1} = abc$.

Тобто, $V_4 = abc \cdot V_1$, де V_1 – об’єм куба, довжина ребра якого дорівнює одиниці довжини (кубічна одиниця). Отже, $V_4 = abc$ *куб. од.* Теорему доведено.

Після розгляду теореми 2, отримуємо аналітичне задання гіпотетичної функції об’єму для прямокутного паралелепіпеда. Далі потрібно перевірити чи виконуються для неї всі три властивості, що вказані в означені. Очевидно, що вона додатнозначна, що рівним прямокутним паралелепіпедом (у яких виміри однакові) ставить у відповідність одне й те ж число (об’єм).

Третю властивість – адитивність, можна прийняти на віру або довести як твердження, скориставшись методом математичної індукції (*пропонуємо довести самостійно*).

Тільки після таких викладених вище міркувань, можна стверджувати, що функція об’єму для паралелепіпеда задана (що об’єм прямокутного паралелепіпеда обчислюється за формулою $V = abc$ *куб. од.*

З теоремами про об’єм паралелепіпеда, трикутної призми і, нарешті довільної призми та їх доведенням, пропонуємо щоб учні ознайомилися самостійно за допомогою підручника.

4. Об’єм трикутної піраміди.
Об’єм піраміди (повної і зрізаної)

Існують, як у випадку з прямокутним паралелепіпедом, різні підходи до виведення формули об’єму трикутної піраміди.

Їх можна зустріти в шкільних альтернативних підручниках з геометрії. У межах нашого підходу, пропонуємо вивести формулу об’єму трикутної піраміди за допомогою інтеграла.

Це гарно узгоджується з означенням поняття об’єму геометричного тіла.

Теорема 3. Об’єм трикутної піраміди дорівнює третині добутку площі основи на її висоту, тобто $V_{\text{пір.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H$, де $S_{\text{осн.}}$ – площа основи, H – висота піраміди.

Доведення

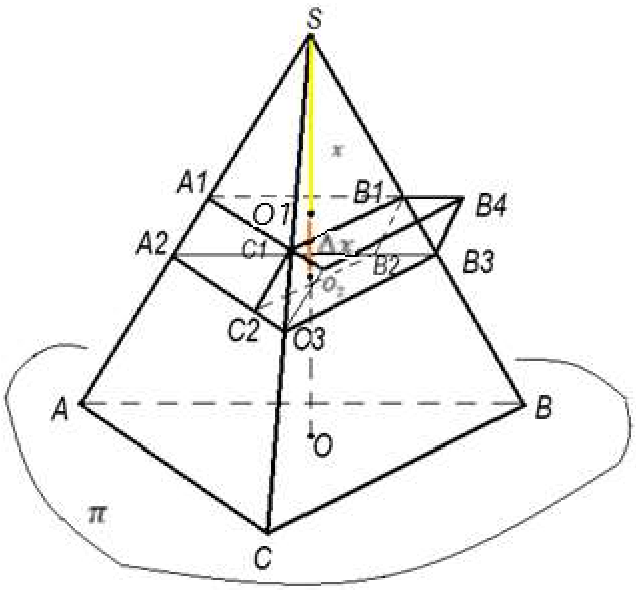


Рис. 7

Нехай задано трикутну піраміду $SABC$ з висотою $SO = H$ (рис. 7). Відкладемо відрізок $SO_1 = x$ та проведемо площину$(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$. Відріжеться мала піраміда $SA_1B_1C_1$ об'єм якої позначимо $V(x)$. Зрозуміло, що об'єм цієї піраміди залежить від довжини висоти $SO_1 = x$, тобто він є функцією змінної x. Надамо приріст змінної $\Delta x = O_1O_2$. об'єм малої піраміди зросте на $\Delta V(x) = V(x + \Delta x) - V(x)$.

Такий об'єм матиме зрізана піраміда $A_1B_1C_1A_2B_3C_3$ (пластинка).

Побудуємо дві призми:

$A_1B_1C_1A_2B_2C_2$, з основою $\Delta A_1B_1C_1$ і висотою $O_1O_2 = \Delta x$;

$A_1B_4C_4A_2B_3C_3$, з основою $\Delta A_2B_3C_3$ і висотою $O_1O_2 = \Delta x$.

Об'єм зрізаної піраміди (пластинки) буде не менший за об'єм призми $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ і не більший за об'єм $A_1B_4C_4A_2B_3C_3$.

$$V_{A_1B_1C_1A_2B_2C_2} < V_{A_1B_1C_1A_2B_3C_3} \quad < V_{A_1B_4C_4A_2B_3C_3}$$

Звідси, знаючи як визначається об'єм призми, отримуємо:

$$S_{\Delta A_1B_1C_1} \cdot \Delta x < \Delta V(x) < S_{\Delta A_2B_3C_3} \cdot \Delta x.$$

Розділимо дану нерівність на Δx. Маємо: $S_{\Delta A_1B_1C_1} < \frac{\Delta V(x)}{\Delta x} < S_{\Delta A_2B_3C_3}$,

Нехай $\cdot\, \Delta x \longrightarrow 0$, тоді маємо $\lim\limits_{\Delta x \to \infty} \frac{\Delta V(x)}{\Delta x} \quad = S_{\Delta A_1B_1C_1}$, бо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} S_{\Delta A_2B_3C_3} \quad = S_{\Delta A_1B_1C_1}$.

Але $\frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\text{осн.}}} = \left(\frac{x}{H}\right)^2$ (за теоремою про відношення площ подібних трикутників).

Звідси $S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{x^2}{H^2} S_{\text{осн.}}$ Отже, $V'(x) = \frac{x^2}{H^2} S_{\text{осн.}}$ Її первісна $V \quad (x) = \frac{x^3}{3H^2} S_{\text{осн.}} + C$.

Якщо *x = 0*, то $V(0) = 0$, звідси *C = 0.* Якщо *x = H*, то отримуємо об'єм піраміди.

Отже, $V_{\text{пір.}} = V(H) = \frac{x^3}{3H^2} S_{\text{осн.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H$. Теорему доведено.

З теореми про об'єм довільної піраміди, зрізаної та їх доведенням пропонуємо учням ознайомитися самостійно, залучаючи їх цим самим до самостійних досліджень, формуючи в них вміння і навички дослідницької діяльності.

5. Задачі на визначення об'єму многогранника

Багатозначність змісту поняття об'єм має враховуватись під час формулювання вимоги в задачах на знаходження об'єму геометричного тіла.

Часто така вимога звучить «обчислити», «визначити», «знайти» тощо.

Коли в задачі приведені числові дані – аргументи функції об'єму, то слід вживати термін «обчислити». Адже потрібно обчислити число, яким виражається об'єм.

Якщо аргументи – абстрактні числа, то правильно буде вживати термін «визначити», оскільки в такому випадку мова йде про задання формули функції об'єму залежно від заданих аргументів.

Термін «знайдіть» краще не вживати, він, на наш погляд, є недоречним!

Задача 1. *Основою похилого паралелепіпеда є ромб $ABCD$ із стороною a і гострим кутом $60°$. Ребро $AA_1 = a$ утворює з ребрами AB і CD кути $45°$. Визначити об'єм паралелепіпеда.*

Розв'язання

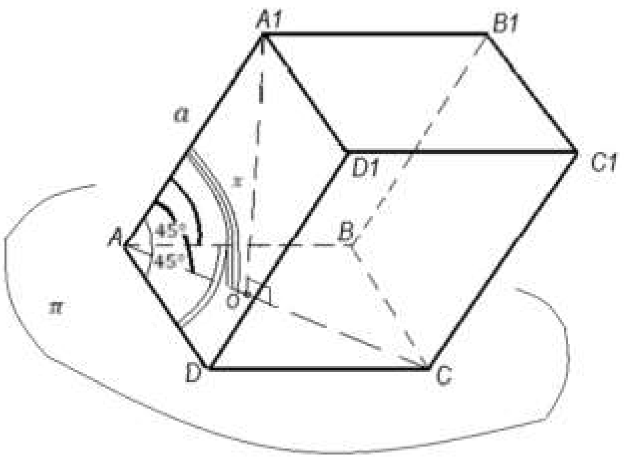


Рис. 8

Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ похилий паралелепіпед (рис. 8). $ABCD$ – ромб, $DC = a$, $AA_1 = a$. $\angle A_1AD = \angle A_1AB = 45°$.

Так, як у тригранному куті AA_1BD сума двох плоских кутів дорівнює $90°$, то $\angle DAB$ – гострий. Саме він і буде рівний $60°$.

A_1O – *висота* паралелепіпеда.

З рівності кутів A_1AD і A_1AB слідує, що точка *O* належить бісектрисі $\angle DAB$, тобто діагоналі ромба *AC*.

Знаходимо площу ромба $S_{ABCD} = a^2 sin60° = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

Розглянемо прямокутний ΔA_1AO . Позначимо $\angle A_1AO = x$. Тоді $A_1O = a \ \ sinx$.

Знаходимо об'єм паралелепіпеда:

$$V = S_{ABCD} \cdot A_1O = \frac{\sqrt{3}}{2} a^3 sinx \qquad (1)$$

За властивістю трьох косинусів для прямокутного тригранного кута AA_1CD маємо: $\cos 45° = \cos x \cdot \cos 30°$. Звідки $\cos x = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Тоді

$$sinx = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad (2)$$

Підставимо (2) в (1) і маємо : $V = \frac{a^3}{2}$ *куб. од.*

Відповідь : $\frac{a^3}{2}$ *куб. од.*

Задача 2. *У правильній трикутній піраміді бічне ребро дорівнює m, а двогранний кут при основі дорівнює β. Визначити об'єм піраміди.*

Розв'язання

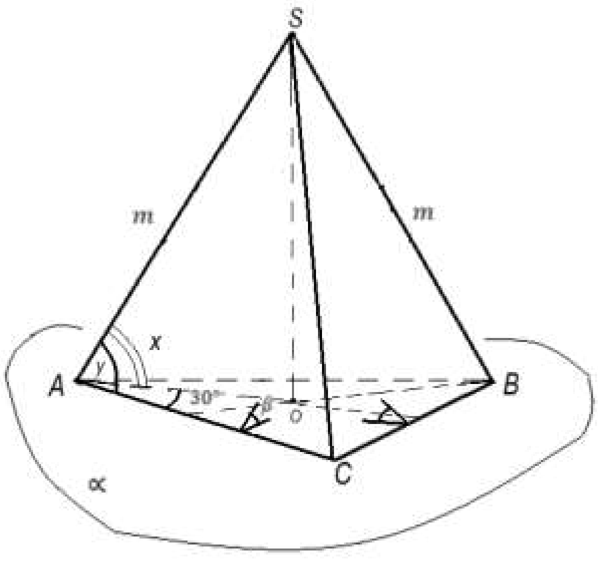


Рис. 9

Нехай $SABC -$ правильна трикутна піраміда (рис. 9). Ребро $AS = m$, двогранний кут AC дорівнює β , SO – висота піраміди. об'єм піраміди знаходимо за формулою :

$$V_{\text{пір.}} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SO \qquad (1)$$

ΔABC – правильний.

Тому $S_{\Delta ABC} = \frac{AC^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

Відрізок AO – радіус описаного навколо ΔABC кола. Відомо, що $AO = \frac{AC}{\sqrt{3}}$. Звідки $AC = AO\sqrt{3}$.

Тому $S_{\Delta ABC} = \frac{AC^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{AO^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} AO^2$. Тоді формула (1) набере вигляду :

$$V_{\text{пір.}} = \frac{\sqrt{3}}{4} AO^2 \cdot SO \qquad (2)$$

Розглянемо прямокутний ΔSOA. Нехай $\angle SAO = x$. Відомо, що $SA = m$. Тоді $AO = mcosx$, $SO = msinx$. Підставимо ці значення в (2) і матимемо:

$$V_{\text{пір.}} = \frac{\sqrt{3}}{4} m^3 cos^2 x \sin x$$

Інакше $$V_{\text{пір.}} = \frac{\sqrt{3}}{4} m^3 (1 - \sin^2 x) \sin x \qquad (3)$$

З тригранного прямокутного кута $ASOC$, за властивістю трьох косинусів матимемо: $\cos \angle SAC = \cos x \cdot \cos 30°$. Нехай $\angle SAC = y$.

Тоді $$\cos y = \cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (4)$$

Для цього ж тригранного кута, за теоремою синусів для тригранних кутів матимемо : $\frac{\sin x}{\sin \beta} = \frac{\sin y}{\sin 90°}$.

Звідси, $$\sin y = \frac{\sin x}{\sin \beta} \qquad (5)$$

Піднесемо рівності (4) і (5) до квадрату і додамо.

Отримуємо :$\cos^2 y + sin^2 y = \frac{3}{4}\cos^2 x + \frac{sin^2 x}{sin^2 \beta}$. Інакше $1 = \frac{3}{4}\cos^2 x + \frac{sin^2 x}{sin^2 \beta}$

Визначимо з отриманої рівності $\sin x$: $1 = \frac{3}{4}(1 - sin^2 x) + \frac{sin^2 x}{sin^2 \beta}$.

$\frac{1}{4} = \frac{sin^2 x}{sin^2 \beta} - \frac{3 sin^2 x}{4}$. $\quad \frac{1}{4} = sin^2 x(\frac{1}{sin^2 \beta} - \frac{3}{4})$. Звідки отримуємо:

$$sin^2 x = \frac{sin^2 \beta}{4 - 3 sin^2 \beta} \qquad (6)$$

$$sin \quad x = \frac{sin^2 \beta}{\sqrt{4 - 3 sin^2 \beta}} \qquad (7)$$

Підставимо (6) і (7) в (3) матимемо : $V_{\text{пір.}} = \frac{\sqrt{3}}{4} m^3 \frac{4\cos^2 \beta}{4 - 3\sin^2 \beta} \cdot \frac{\sin \beta}{\sqrt{4 - 3\sin^2 \beta}}$.

Після спрощення: $V_{\text{пір.}} = \frac{\sqrt{3} m^3 \cos^2 \beta \sin \beta}{(4 - 3\sin^2 \beta)^{\frac{3}{2}}}$ *куб. од.*

Відповідь : $V_{\text{пір.}} = \frac{\sqrt{3} m^3 \cos^2 \beta \sin \beta}{(4 - 3\sin^2 \beta)^{\frac{3}{2}}}$ *куб. од.*

Задача 3. *Перпендикулярний переріз насипу шосе має форму рівнобічної трапеції з верхньою основною 8 м і бічними сторонами 2,6 м і висотою 2,4 м. Скільки кубічних метрів ґрунту потрібно привезти для будівництва 10 м такого шосе?*

Розв'язання

Рис. 10

Числові дані в задачі – наближені числа. Це має бути враховане під час обчислень.
На рис. 10 показано насип шосе.

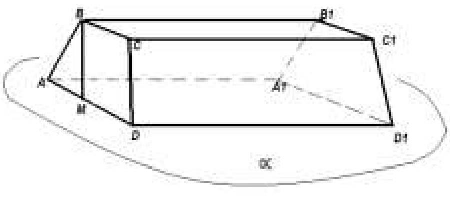


Рис. 11

Віртуальною моделлю такого десятиметрового насипу може бути геометричне тіло (рис. 11) –чотирикутна пряма призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, яка лежить гранню AA_1D_1D на площині ∝.

Об'єм призми обчислюємо за формулою:

$$V_{\text{пір.}} = S_{ABCD} \cdot BB_1 \,. \qquad (1)$$

Відомо, що $BB_1 = 10$ м, $BC = 8$ м, $AB = 2{,}6$ м, $BM = 2{,}4$ м , $BM \perp AD$.

Площу трапеції $ABCD$ обчислюємо за формулою:

$$S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2} BM \,. \qquad (2)$$

З прямокутного ΔBMA визначаємо, що

$$AM = \sqrt{AB^2 = BM^2} = \sqrt{2{,}6^2 - 2{,}4^2} = \sqrt{5 \cdot 0.2} = \sqrt{1} = 1 \text{ (м)}.$$

Тоді $AD = BC + 2AM = 8 + 2 = 10$ м. Отже, $S_{ABCD} = \frac{8+10}{2} \cdot 2{,}4 = 21{,}6 \ (\text{м}^2)$.

Підставимо отримане значення в (1) і матимемо: $V_{\text{пір.}} = 21{,}6 \cdot 10 = 216 \ (\text{м}^3)$.

Відповідь : $\approx 216 \text{ м}^3$.

П І Д С У М О К

Поняття об'єму геометричного тіла в класах, де математика вивчається на профільному чи поглибленому рівнях, слід формувати як означуване поняття. Один з варіантів методики формування подано в наведеній вище лекції.

Учні мають засвоїти що об'єм - функція, яка визначена на множині геометричних тіл з відповідними властивостями. Для різних класів геометричних тіл її аналітичне вираження різне. Тіла, що мають об'єми, називають кубовними, інші – не кубовні.

Для многогранників, які вивчаються в середній школі, аналітичне вираження функції об'єму відоме. Воно встановлюється засобами математичної теорії.

Вивчення теорії об'ємів геометричних тіл варто розпочати з обґрунтування потреби в такій теорії, а закінчувати розв'язанням не тільки практичних, а й прикладних задач. Такий підхід гарно мотивує учнів вивчати математику, зокрема геометрію.

МЕТОДИЧНІ ЗАДАЧІ
для самостійного розв'язування

1. Проаналізуйте кілька альтернативних підручників з геометрії для старшої школи і з'ясуйте для себе: - як формується в них поняття об'єму геометричного тіла; - як виводиться формула об'єму прямокутного паралелепіпеда, формула об'єму призми; - як виводиться формула об'єму трикутної піраміди, довільної піраміди, зрізаної піраміди.
2. Створіть добірку прикладних задач на обчислення об'ємів, де моделями об'єктів були б призми, піраміди, зрізані піраміди.
   Запропонуйте зразки розв'язання таких задач, методичні рекомендації до виконання рисунків, до культури математичних записів.
3. Проаналізуйте фабули задач ЗНО, в яких вимагається обчислити чи визначити об'єм геометричного тіла. З'ясуйте якого рівня трудності такі завдання, який відсоток тих учнів, які дають правильні відповіді до задач.

Уся моя фізика – це лише геометрія
Р. Декарт

Л Е К Ц І Я 3.12

Т Е М А ***Об’єм тіла обертання***

П Л А Н

1.	***Прості і непрості геометричні тіла. Поняття об’єму непростого геометричного тіла***
2.	***Виведення формули об’єму циліндра***
3.	***Виведення формули об’єму тіла обертання***
4.	***Виведення формули об’єму конуса, кулі, еліпсоїда обертання***
5.	***Використання отриманих формул об’єму під час розв’язування практичних та прикладних задач***

К О Н С П Е К Т Л Е К Ц І Ї

1. Прості і непрості геометричні тіла.
Поняття об’єму непростого геометричного тіла

Знайомство учнів з простими і непростими геометричними тілами пропонуємо провести у формі шкільної лекції, фрагмент якої подано нижче.

ФРАГМЕНТ ШКІЛЬНОЇ ЛЕКЦІЇ

Геометричні тіла, як віртуальні об’єкти, що створені людською уявою для пізнання реального світу, бувають різні. Їх можна класифікувати за різними критеріями. За одним з таких в геометрії є поділ тіл на *прості* і *непрості*. ***Простим*** геометричним тілом вважають таке, яке можна розділити на скінченну кількість пірамід. Тіла, які такою властивістю не володіють називають ***непростими***.

До класу простих геометричних тіл, що вивчаються в шкільному курсі стереометрії, належать: *призми, піраміди, зрізані піраміди, правильні многогранники* (*тетраедр, гексаедр, октаедр, ікосаедр, додекаедр*). До класу непростих геометричних тіл, що вивчаються в шкільному курсі стереометрії, належать: *прямий круговий циліндр; прямий круговий конус і його частина – зрізаний конус; куля; окремі тіла обертання, утворені обертанням криволінійної трапеції навколо осі* OX.

Для названих вище простих тіл були виведені формули обчислення їх об’ємів. Зупинимося на виведені формул обчислення об’ємів для непростих геометричних тіл. Насамперед, потрібно чітко визначити, що приймається (яка числова характеристика) за об’єм непростого геометричного тіла? З цього приводу в геометрії дається наступне означення.

Означення. ***Непросте тіло має об’єм V, якщо існують такі прості тіла P, які містять його та прості тіла P', які містяться в ньому з об’ємами, що як завгодно мало відрізняються від V.***

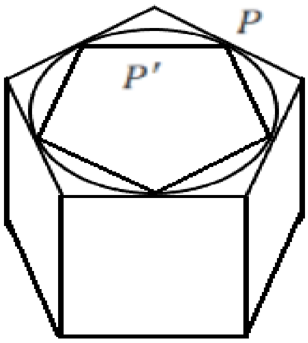


Рис. 1

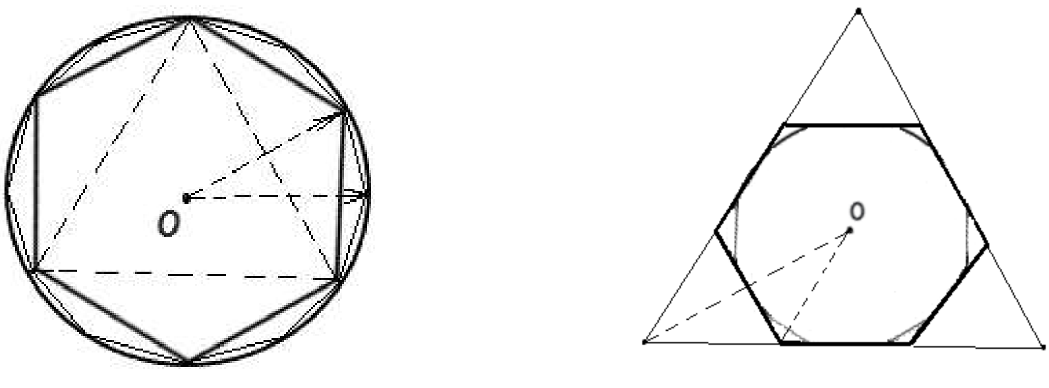
Наприклад, на рис. 1. таким непростим геометричним тілом зображено прямий круговий циліндр, а простими тілами : P і P' – призми, відповідно описані навколо циліндра призма P та вписана в циліндр призма P'.

Після ознайомлення учнів з поняттям непростого тіла і що приймається за його об’єм, слід перейти до виведення формул об’ємів для непростих тіл, як вивчаються в курсі стереометрії.

2. Виведення формули об’єму циліндра

Нехай є круг та:

- ❖ в нього вписані правильні многокутники, сторони яких подвоюються (рис. 2 *а*));
- ❖ навколо нього описуються многокутники, сторони яких подвоюються (рис. 2 *б*)).



***а*)** ***б*)**

Рис. 2

Виберемо круг і такі многокутники за основи та на них побудуємо призми та циліндр з висотою *H*. Матимемо циліндр з:

- ❖ вписаними в нього призмами $P_3, P_6, P_{12}, \ldots$;
- ❖ описаними навколо нього призмами $P_3^*, P_6^*, P_{12}^*, \ldots$.

Якщо обраховувати об'єми цих призм, то утвориться дві числові послідовності:

(1) $V_3 < V_6 < V_{12} < \cdots$ - зростаюча, обмежена зверху;

(2) $V_3^* > V_6^* > V_{12}^* > \cdots$ - спадна, обмежена знизу.

Обидві послідовності мають границю.

Якщо подвоєння сторін основи призм продовжити до нескінченності, то:

$$\lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} S_{n\text{ осн.}} \cdot H = H \cdot \lim_{n\to\infty} S_{n\text{ осн.}} = H \cdot S_{\text{круга}} ;$$

$$\lim_{n\to\infty} V_n^* = \lim_{n\to\infty} S_{n\text{ осн.}}^* \cdot H = H \cdot \lim_{n\to\infty} S_{n\text{ осн}}^* = H \cdot S_{\text{круга}} .$$

Число $V = HS_{\text{круга}}$.

Об'єми призм мало відрізняються від нього.

Тому, згідно означення, об'єм циліндра дорівнює $V = \pi r^2 H$, де *r* – радіус основи, циліндра, H – його висота.

Отримали твердження.

Теорема 1. Об'єм циліндра (прямого кругового) дорівнює добутку площі основи на його висоту, тобто $V = \pi r^2 \cdot H$.

3. *Виведення формули об'єму тіла обертання*

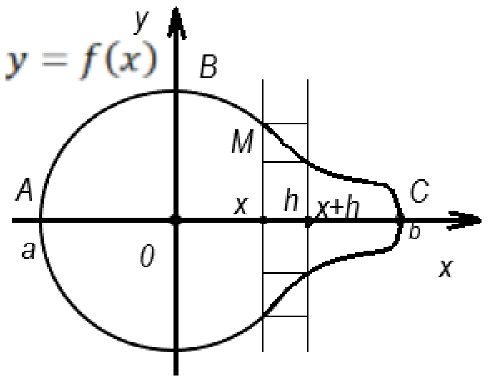


Рис. 3

Знаючи формулу об'єму циліндра можна вивести загальну формулу об'єму тіла обертання. Розглянемо це виведення. Розглянемо тіло обертання, яке утворене обертанням криволінійної трапеції ABC (рис. 3) навколо осі OX.

Функція $y = f(x)$ неперервна на проміжку $[a; b]$. Нехай дано криволінійну трапецію, утворену лініями $y = 0$, $y = f(x)$ (рис. 3).

Якщо її обертати навколо осі OX, то утвориться тіло обертання. Його об'єм дорівнює V. Виберемо на проміжку $[a; b]$ точку X і проведемо пряму XM через точку X паралельну осі OY.

Від трапеції відріжеться (ліва частина) менша трапеція. Якщо її обертати, то утвориться тіло обертання, об'єм якого позначимо через $V(x)$.

Об'єм цього тіла залежить від аргументу x, тобто, є функцією від змінної x.

Очевидно, що коли $x = a$, то $V(a) = 0$, а коли $x = b$, то $V(b) = V$ (об’єму тіла обертання). Знайдемо аналітичний вираз функції $V(x)$.

Надамо змінний *x* приросту *h*, тоді утвориться нове тіло з об’ємом $V(x + h)$.

Приріст становитиме: $\Delta V = V(x + h) - V(x)$.

Функція $y = f(x)$ на проміжку $[x; x + h]$ досягає найбільшого та найменшого значення. Побудуємо два прямокутники з основною h і висотою y_{max} та y_{min}.

Якщо вони будуть обертатись навколо осі OX, то приріст об’єму ΔV буде задовольняти нерівності:

$V_{\text{цил}} < \Delta V < V^*_{\text{цил}}$, де $V_{\text{цил}}$ – об’єм циліндра, утвореного обертанням меншого прямокутника;

$V^*_{\text{цил}}$ – об’єм циліндра, утвореного обертанням більшого прямокутника.

Тобто маємо: $\pi y^2_{min}(x) \cdot h < \Delta V < \pi y^2_{max}(x) \cdot h$.

Розділимо дану нерівність на $h > 0$, отримуємо: $\pi y^2_{min}(x) < \frac{\Delta V}{h} < \pi y^2_{max}(x)$.

Нехай $h \to 0$, тоді маємо: $\lim\limits_{h\to 0} \pi\, y^2_{min}(x) \cdot h < \lim\limits_{h\to 0} \frac{\Delta V}{h} < \lim\limits_{h\to 0} \pi y^2_{max}(x) \cdot h$,

але $\lim\limits_{h\to 0} \pi\, y^2_{min}(x) = \lim\limits_{h\to 0} \pi y^2_{max}(x) = \pi y^2(x)$.

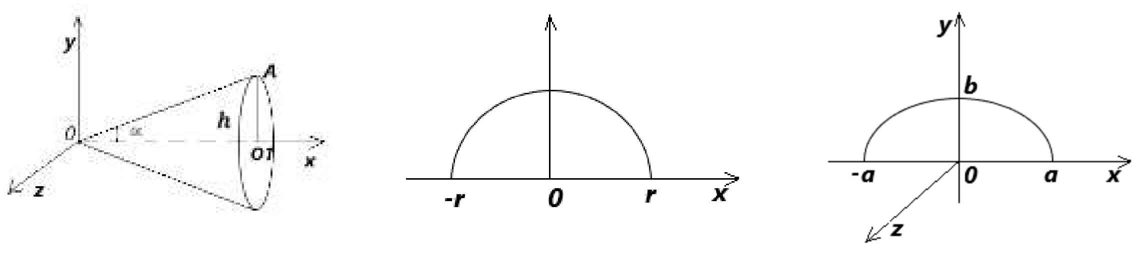
Отже, $V' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\Delta V}{h} = \pi y^2(x)$.

Тому первісна $V(x) = \pi \int y^2(x)dx + c$.

Скориставшись геометричним змістом інтеграла (які відомі з курсу алгебри і початків аналізу), одержуємо: $V_{\text{цил}} = V(b) - V(a) = \pi \int_a^b y^2(x)dx$.

Теорема 2. Об’єм тіла обертання, утвореного обертанням криволінійної трапеції навколо осі OX обчислюється за формулою $V_{\text{т.о.}} = \pi \int_a^b f^2(x)dx$, де $y = f(x)$ – неперервна функція, задана на проміжку $[a; b]$.

4. Виведення формули об’єму конуса, кулі, еліпсоїда обертання



а) *б)* *в)*

Рис. 4

Об'єм конуса

Якщо обертати прямокутний ΔOO_1A (рис. 4 *а*)), то отримуємо конус, висота якого $OO_1 = h$, радіус основи $AO_1 = r$. У прямокутній системі координат пряма OA має рівняння $y = kx$, де $k = tg \propto = \frac{r}{h}$. Тоді за формулою об'єму тіла обертання маємо :

$$V_{\text{кон.}} = \pi \int_0^h (kx)^2 dx = \pi k^2 \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \pi k^2 \cdot \frac{h^3}{3} = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Отже, $V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$, формула доведена.

Теорема 3. Об'єм конуса обчислюється за формулою $V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$, де r – радіус основи, h – висота конуса.

Об'єм кулі

Якщо обертати півкруг (рис. 4 *б*)) навколо осі *OX*, то утвориться куля, радіуса r. Рівняння кола $x^2 + y^2 = r^2$.

Звідси, $y^2 = r^2 - x^2$.

Отже, $V_{\text{кулі}} = \pi \int_{-r}^{r} y^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) \ dx = \pi(r^2 x - \frac{x^3}{3}) \Big|_0^n = \frac{4}{3} \pi r^3$.

Отже, $V_{\text{кулі}} = \frac{4}{3} \pi r^3$, формула доведена.

Теорема 4. Об'єм кулі обчислюється за формулою $V_{\text{кулі}} = \frac{4}{3} \pi r^3$, де r – радіус кулі.

Об'єм еліпсоїда обертання

Якщо обертати півеліпса (рис. 4 *в*)) навколо осі OX з великою піввіссю a, малою піввіссю b, то утвориться *еліпсоїд обертання*.

Рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Звідси, $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2$.

Отже, $V_{\text{еліп.обер.}} = \pi \int_{-a}^{a} y^2 dx = \pi \int_{-a}^{a} (b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2) \ dx = \pi(b^2 x - \frac{b^2}{3a^2} \cdot x^3) \Big|_{-a}^{a} = \frac{4\pi}{3} b^2 a$.

Отже, $V_{\text{еліп.обер.}} = \frac{4\pi}{3} b^2 a$. Формула доведена.

Теорема 5. Об'єм еліпсоїда обертання обчислюється за формулою $V_{\text{еліп.обер.}} = \frac{4\pi}{3} b^2 a$, де b – мала піввісь еліпса, a – велика піввісь еліпса.

5. Використання отриманих формул об'єму під час розв'язування практичних та прикладних задач

Задача 1. *Паралельно до осі циліндра проведено площину, що перетинає основу по хорді, яка стягує дугу β. З центра іншої основи цю хорду видно під кутом $\propto$. Площа утвореного перерізу дорівнює Q. Визначте об'єм циліндра.*

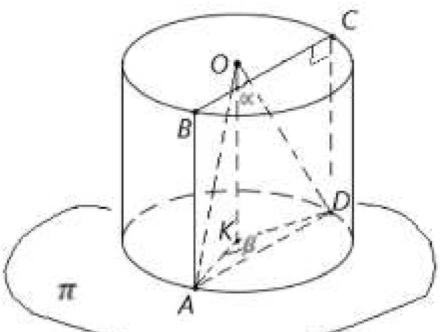


Рис. 5

Дано циліндр (рис. 5)

ОК – вісь,

$(ABC) \parallel OK$,

$S_{ABCD} = Q$,

$\angle AKD = \beta$,

$\angle AOD = \propto$.

Визначити $V_{\text{цил.}}$

Розв'язання

Об'єм циліндра визначаємо за формулою:

$$V_{\text{цил.}} = \pi \cdot AK^2 \cdot KO \qquad (1)$$

Розглянемо рівнобедрений ΔAKD.

Нехай $AK = x$. З ΔAKD за теоремою косинусів маємо:

$$AD^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 cos\beta = 2x^2(1 - cos\beta) = 4x^2 sin^2\frac{\beta}{2}.$$

У рівнобедреному ΔAOD, $AO = OD$. За теоремою косинусів маємо:

$$AD^2 = 2 \cdot AO^2 - 2 \cdot AO^2 cos\beta = 2 \cdot AO^2(1 - cos \propto) = 4 \cdot AO^2 sin^2\frac{\propto}{2}.$$

Маємо $4x^2 sin^2\frac{\beta}{2} = 4 \cdot AO^2 sin^2\frac{\propto}{2}$. Звідки, $AO^2 = x^2 sin^2\frac{\beta}{2} : \ sin^2\frac{\propto}{2}$.

З прямокутного ΔAKO за теоремою Піфагора знаходимо:

$$OK = \sqrt{AO^2 - AK^2} = \sqrt{\frac{x^2 sin^2\frac{\beta}{2}}{sin^2\frac{\propto}{2}} - x^2} = x\sqrt{\frac{sin^2\frac{\beta}{2} - sin^2\frac{\propto}{2}}{sin^2\frac{\propto}{2}}}.$$

Тоді об'єм циліндра буде виражатись формулою:

$$V_{\text{цил.}} = \pi \cdot x^3 \sqrt{\frac{sin^2\frac{\beta}{2} - sin^2\frac{\propto}{2}}{sin^2\frac{\propto}{2}}} \qquad (2)$$

За умовою площа прямокутника $ABCD$: $S_{ABCD} = Q$.

Інакше $S_{ABCD} = AB \cdot AD = x\sqrt{\frac{sin^2\frac{\beta}{2} - sin^2\frac{\propto}{2}}{sin^2\frac{\propto}{2}}} \cdot 2x \cdot sin\frac{\beta}{2}$.

Отже, $2x^2 \cdot \frac{sin\frac{\beta}{2}^2}{sin\frac{\propto}{2}} \cdot \sqrt{sin^2\frac{\beta}{2} - sin^2\frac{\propto}{2}} = Q.$

Звідси,

$$x^2 = \frac{Q \cdot sin\frac{\propto}{2}}{2 \cdot sin\frac{\beta}{2}\sqrt{sin^2\frac{\beta}{2} - sin^2\frac{\propto}{2}}} \qquad (3)$$

Підставимо (3) в (2), маємо:

$$V_{\text{цил.}} = \pi\left(\sqrt{\frac{Q \cdot sin\frac{\propto}{2}}{2 \cdot sin\frac{\beta}{2}\sqrt{sin^2\frac{\beta}{2} - sin^2\frac{\propto}{2}}}}\right)^3 \cdot \sqrt{\frac{sin^2\frac{\beta}{2} - sin^2\frac{\propto}{2}}{sin^2\frac{\propto}{2}}}.$$

Спростуємо отриману формулу:

$$sin^2\frac{\beta}{2} - sin^2\frac{\propto}{2} = \frac{1}{2}\big((1 - cos\beta) - (1 - cos\propto)\big) = \frac{1}{2}(cos\propto - cos\beta).$$

Тоді $V_{\text{цил.}} = \pi Q \frac{\sqrt{sin\frac{\propto}{2}}}{\sqrt{2 \cdot sin\frac{\beta}{2} \cdot (cos\propto - cos\beta)}}$ *(куб .од.).*

У тригранному рівнобедреному куті $OAKD$: $\angle AKD = \beta$, $\angle AOD = \propto$.

За наслідком з теорем косинусів для рівнобедреного тригранного кута $\beta > \propto$.

Тому $\cos\propto > \cos\beta$, а різниця ($\cos\propto > \cos\beta$) – додатна.

Формула об’єму має зміст.

Відповідь: $V_{\text{цил.}} = \frac{\pi Q^{3/2}\sqrt{sin\frac{\propto}{2}}}{\sqrt{2 \cdot sin^2\frac{\beta}{2} \cdot (cos\propto - cos\beta)}}$ *куб .од.*

Задача 2. *Прямокутний трикутник з гострим кутом* $\propto$ *і протилежним катетом* a *обертається навколо прямої, яка лежить в площині трикутника і проходить через вершину даного кута перпендикулярно до гіпотенузи. Визначте об’єм тіла обертання.*

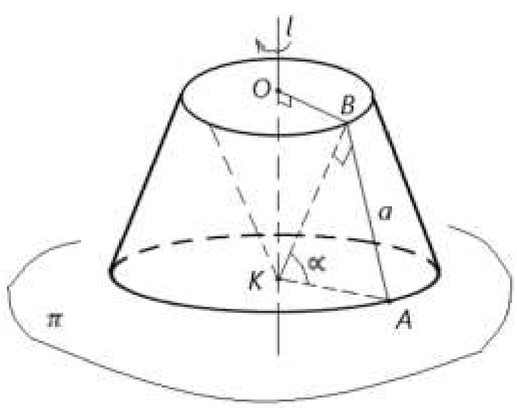


Рис. 6

Дано

тіло обертання (рис. 6)

ΔABC – прямокутний,

$\angle\beta$ *=90°,*

$\angle BKA = \propto$,

BA= a,

Визначити

об’єм тіла обертання.

Розв'язання

На рис. 6. зображено тіло обертання його можна розглядати як зрізаний конус, з якого вийняти повний конус. Тому $V_{\text{т.о.}} = V_{\text{зр.к.}} - V_{\text{кон.}}$.

Виразимо об'єми обох конусів через радіуси основ і висоту, яка для обох спільна. Отже,

$$V_{\text{т.о.}} = \frac{1}{3}\pi \cdot KO(KA^2 + OB^2 + KA \cdot OB) - \frac{1}{3}\pi \cdot KO \cdot OB^2 = \frac{1}{3}\pi \cdot KO(KA^2 + KA \cdot OB) = \frac{1}{3}\pi \cdot KO \cdot KA(KA + OB)$$

Об'єм тіла обертання визначимо за формулою:

$$V_{\text{т.о.}} = \frac{1}{3}\pi \cdot KO \cdot KA \cdot (KA + OB) \qquad (1)$$

Але $KO \cdot KA = 2S_{\Delta ABK} = KB \cdot BA$.

З прямокутного ΔKBA маємо, що $KB = actg \propto$, $AK = \frac{a}{sin\propto}$.

Тоді $KB \cdot BA = a \cdot ctg \propto = a^2 ctg \propto$.

$$KO \cdot AK = a^2 \cdot ctg \propto \qquad (2)$$

З прямокутного ΔKOB знаходимо $OB = KB \cdot cos \propto = a \cdot ctg \propto \cdot cos \propto = a\frac{cos^2\propto}{sin\propto}$.

Тоді
$$KA + OB = \frac{a}{sin\propto} + \frac{a \cdot cos^2\propto}{sin\propto} = \frac{a(1+cos^2\propto)}{sin\propto} \qquad (3)$$

Підставимо (3) і (2) в (1) отримуємо :

$$V_{\text{т.о.}} = \frac{1}{3}\pi \cdot a^2 \cdot ctg \propto \cdot \frac{a(1+cos^2\propto)}{sin\propto} = \frac{1}{3}\pi \cdot a^3 \cdot \frac{(1+cos^2\propto)cos\propto}{sin^2\propto} .$$

Відповідь: $V_{\text{т.о.}} = \frac{1}{3}\pi \cdot a^3 \cdot \frac{(1+cos^2\propto)cos\propto}{sin^2\propto}$ *куб .од.*

Задача 3. *Скирда сіна має форму циліндра з верхівкою у вигляді конуса. Довжина кола основи скирди дорівнює 15,7 м, висота скирди 4 м, а висота циліндричної її частини 2,2 м. Знайдіть масу скирди, якщо густина сіна дорівнює 0,03* г/см^3*.*

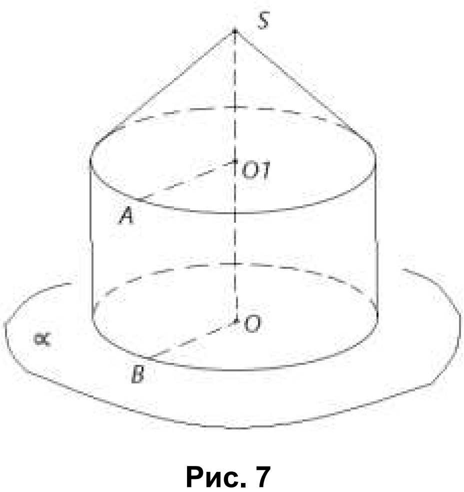


Рис. 7

Ідеальною моделлю скирди може бути геометричне тіло, яке є об'єднанням двох тіл: циліндра і конуса (рис. 7). Основа *конуса* і *основа циліндра* – рівні круги.

SO – висота скирди,

OO_1 – висота циліндричної частини.

$SO_1 = 1{,}8$ м висота конуса,

$OO_1 = 2{,}2$ м.

Розв’язання

Об’єм скирди знаходимо як суму об’ємів конуса і циліндра:

$$V_{\text{ск.}} = V_{\text{к.}} + V_{\text{ц.}} = \frac{1}{3}\,\pi \cdot O_1A^2 \cdot SO_1 + \pi \cdot AO_1^2 \cdot OO_1$$

$$V_{\text{ск.}} = \ \pi \cdot AO_1^2 \cdot \left(\frac{1}{3}SO_1 + OO_1\right)$$

Але $\frac{1}{3}\,SO_1 + OO_1 = \frac{1}{3}\cdot 1{,}8 + 2{,}2 = 0{,}6 + 2{,}2 = 2{,}8$ *м.*

Оскільки довжина кола основи циліндра дорівнює 15,7 м, то знаходимо радіус основи косинуса: $2\pi \cdot AO_1 = 15{,}7$, $AO_1 = \frac{15{,}7}{2\pi}$ *м.*

Отже, $V_{\text{ск.}} = C \cdot \frac{15{,}7}{2\pi}\cdot 2{,}8 = \frac{15{,}7^2\cdot 2{,}8}{\pi\cdot 4} = \frac{15{,}7^2\cdot 1{,}4}{2\pi}$, $V_{\text{ск.}} \approx \frac{345{,}086}{2\cdot 3{,}14} \approx 54{,}95\ \text{м}^3$.

Виразимо густину сіна в тонах на метр кубічний $\rho = 0{,}03\frac{\text{г}}{\text{см}^3} = 0{,}03\frac{\text{т}}{\text{м}^3}$.

Тоді маса скирди буде: $M = V_{\text{ск.}} = 54{,}95 \cdot 0{,}03 \approx 1{,}6485\ \text{т.}$

Округлимо результат до десятих, маємо: $M\ \approx 1{,}6\ \text{т.}$

Відповідь: $M \approx 1{,}6\ \text{т.}$

ПІДСУМОК

Геометричні тіла циліндр, конус, зрізаний конус, куля та інші належать до класу непростих тіл. Їх об’єм визначається через об’єм простих геометричних тіл. Якщо вивести формулу об’єму прямого кругового циліндру, то на її основі виводиться загальна формула об’єму тіла обертання, утвореного обертанням навколо осі OX криволінійної трапеції, утвореної неперервною функцією $y = f(x)$, визначеною на проміжку $[a; b]$.

За допомогою виведеної загальної формули об’єму тіла обертання легко встановлюються як наслідки формули об’єму конуса, зрізаного конуса, кулі, еліпсоїда обертання, тора та інших тіл. Такий підхід більш раціональний і економний з точки зору витрат часу на доведення формул об’єму для кожного з тіл обертання, що вивчається в курсі стереометрії. Появляється можливість більше уваги виділити розв’язанню як практичних, так і прикладних задач на обчислення об’ємів круглих тіл.

МЕТОДИЧНІ ЗАДАЧІ
для самостійного розв'язування

1. Складіть орієнтований календарний план вивчення підтеми 8.2 «Об'єми круглих тіл» (окремо для поелементного і поетапного вивчення), визначить основну мету вивчення підтеми, вкажіть компетентності, якими мають оволодіти учні.

2. Виведіть формули об'єму для :
   а) зрізаного конуса;
   б) тора, утвореного обертанням круга $x^2 + (y - b)^2 = r^2$ навколо осі OX, де $b > 0$;
   в) кульового сегмента;
   г) параболоїда обертання, утвореного обертанням криволінійної трапеції, утвореної параболою $y = a\sqrt{x}$, заданого на проміжку [0; h].

3. Складіть добірку прикладних задач на обчислення об'ємів круглих тіл.

4. Розв'яжіть задачі:

   а) У циліндрі паралельно його осі проведено площину, що перетинає нижню основу по хорді b, яку видно із центра верхньої основи під кутом φ. Діагоналі перерізу утворюють між собою кут $\propto$. Визначити об'єм циліндра.
   б) У зрізаному конусі відношення площ основ якого дорівнює 4, твірна нахилена до площини основи від кутом 30°. Визначити об'єм конуса.
   в) Визначити об'єм кульового сектора, якщо дуга в осьовому перерізу сектора дорівнює 60°, а радіус кулі дорівнює R.
   г) З наповненої рідиною конусоподібної посудини, висота якої 0,18 м, а діаметр основи 0,24 м, переливають рідину у циліндричну посудину діаметр основи якої 0,1 м. На якій висоті буде рівень рідини у другій посудині?

5. Здійсніть методичний аналіз діючих альтернативних підручників геометрії. З'ясуйте які ще пропонуються в них підходи до вивчення об'ємів круглих тіл.

Математична точка – це найдрібніша й найдивовижніша річ, яку тільки змогло знання створити

Дж. Донн

Л Е К Ц І Я 3.13

Т Е М А ***Площа поверхні геометричного тіла***

П Л А Н

1.	***Площі поверхні многогранника. Поняття площі поверхні непростого геометричного тіла***
2.	***Виведення формули площі поверхні циліндра, конуса, зрізаного конуса, кулі***
3.	***Задачі на визначення площі поверхні геометричного тіла***

К О Н С П Е К Т Л Е К Ц І Ї

1. Площі поверхні многогранника. Поняття площі поверхні непростого геометричного тіла

Усі геометричні тіла, як відомо, розділяють на два класи: *прості* (які можна розбити на скінчену кількість пірамід) і *непрості.*

До простих геометричних тіл належать многогранники, поверхня яких складається з скінченної кількості плоских многокутників. Тому в стереометрії за площу поверхні многогранника приймають суму площ многокутників, що утворюють його поверхню. Для деяких видів многогранників, таких як, призми, правильні піраміди, правильні зрізані піраміди існують формули для обчислення площ їх бічних і повних поверхонь. Їх учні засвоюють під час вивчення названих геометричних тіл. Нагадуємо найбільш вживані з них. Зокрема:

(1) для призми:

а) *прямої призми:* $S_{\text{бічн.}} = P \cdot h$, де P – периметр основи, h – бічне ребро; $S_{\text{пов.}} = S_{\text{бічн.}} + 2S_{\text{осн.}}$;
б) *правильної:* $S_{\text{бічн.}} = n \cdot a \cdot h$, де n – к-ть сторін основи, a – сторона основи, h – бічне ребро;
в) *похилої:* $S_{\text{бічн.}} = P_{\text{перер.}} \cdot h$, де $P_{\text{перер.}}$ – периметр перпендикулярного перерізу, h – бічне ребро;

(2) для правильної піраміди:

$S_{\text{бічн.}} = n \cdot a \cdot m$, де n – к-ть сторін основи, a – сторона основи, m - апофема; $S_{\text{пов.}} = S_{\text{бічн.}} + 2S_{\text{осн.}}$;

(3) для правильної зрізаної піраміди:

$S_{\text{бічн.}} = \frac{n}{2}(a + b) \cdot m$, де n – к-ть сторін основи, a – сторона нижньої основи, b – сторона верхньої основи, m – апофема; $S_{\text{пов.}} = S_{\text{бічн.}} + S_{\text{внут.осн.}}$.

Що стосується непростих геометричних тіл, то довгий час в шкільних підручниках, поняття площі їх поверхні лишалося неозначуваним. В учнів формувалось лише уявлення про площу їх поверхні, а для таких непростих геометричних тіл як циліндр, конус, зрізаний конус, куля подавались в різний спосіб формули для обчислення їх площі поверхні.

Однак ситуація змінилася, коли у 80-х роках минулого століття, на зміну підручника з геометрії за редакцією А. М. Колмогорова було запроваджено підручник О. В. Погорєлова. В ньому, вперше в шкільній геометрії, було дане наукове трактування поняття площі поверхні (було використано так званий підхід Борхарда-Мінковського).

Зокрема, після практичної задачі, як певне її узагальнення, говорилося наступне:

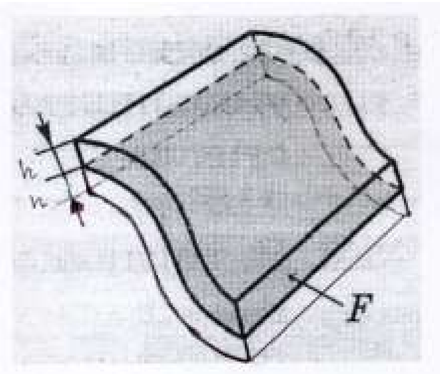


Рис. 1

Нехай F – дана поверхня (рис. 1).

Побудуємо тіло F_h, яке складається з тих точок простору, для кожної з яких знайдеться точка поверхні F на відстані, що не перевищує h. Наочно тіло F_h можна уявити собі як тіло, заповнене фарбою при фарбуванні поверхні з обох боків шаром фарби завтовшки h.

Нехай V_h – об'єм тіла F_h.

Тоді *площею даної поверхні* будемо називати границю відношення $\frac{V_h}{2h}$, коли $h \to 0$, тобто $S = \lim_{h\to 0} \frac{V_h}{2h}$.

Зрозуміло, що таке визначення поняття площі поверхні є коректним, не суперечить прийнятому визначенню площі поверхні многогранника і, в певній мірі, спрощує процес виведення формул для обчислення площ поверхонь окремих непростих геометричних тіл. Скористаємося ним.

2. Виведення формули площі поверхні циліндра, конуса, зрізаного конуса, кулі

*Пропонуємо власне виведення формул бічної поверхні зрізаного конуса, конуса і циліндра***,** яке, як показала практика, є зрозумілим і доступним учням, які вивчають стереометрію на профільному та поглибленому рівнях. Для цього варто скористатись спочатку наступною задачею (*такі задачі О. В. Погорєлов називав задачами-теоремами*).

Задача-теорема. *Дано* ΔABC *(рис. 2) у якому* $\angle C = 90°$, $\angle A = \varphi$, $AC = p$. *Довести, що об'єм тіла обертання, утвореного обертанням* ΔABC *навколо гіпотенузи* AB *обчисляється за формулою* $V = \frac{1}{3}\pi p^3 sin\varphi \cdot tg\varphi$.

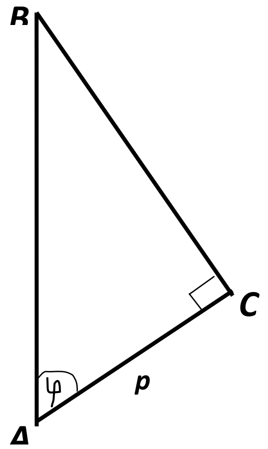


Рис. 2

Розв'язати самостійно.

Після її розв'язання приступити до виведення відповідних формул.

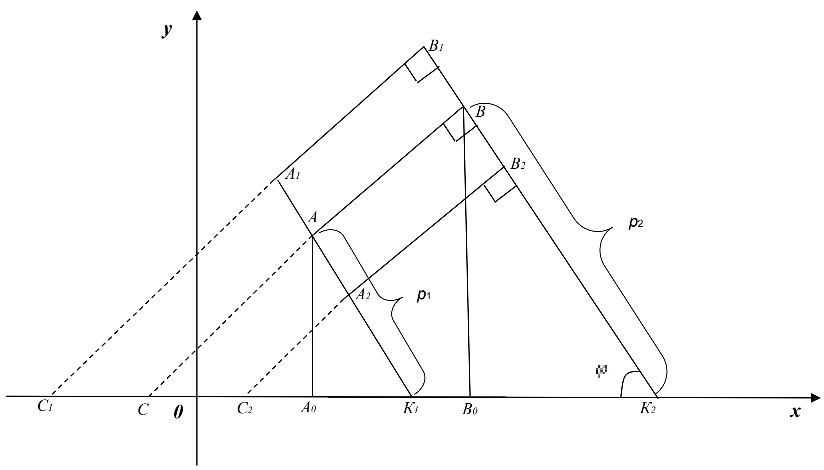


Рис. 3

Виведення формули бічної поверхні зрізаного конуса, який можна розглядати як тіло, утворене обертанням прямокутної трапеції A_0ABB_0 навколо осі OX (рис. 3).

Для бічної поверхні зрізаного конуса шар товщиною $2h$, можна розглядати як тіло, утворене обертанням прямокутника $A_2A_1B_1B_2$ навколо осі OX.

Позначимо $AB = l$, $AA_0 = r$, $BB_0 = R$. $AA_1 = AA_2 = B_1B = BB_2 = h$.

Трикутники $C_1B_1K_2$, CBK_2, $C_2B_2K_2$, $C_1A_1K_1$, CAK_1, $C_2A_2K_1$ – прямокутні, подібні між собою. Нехай $\angle K_2 = \varphi$. Позначимо $BK_2 = \rho_2$, $AK_1 = \rho_1$.

Тоді $B_1K_2 = \rho_2 + h$, $B_2K_2 = \rho_2 - h$, $A_1K_1 = \rho_1 + h$, $A_2K_1 = \rho_1 - h$.

Об'єм шара V_h товщиною $2h$ можна знайти за формулою:

$$V_h = V_{\Delta C_1B_1K_2} - V_{\Delta C_2B_2K_2} - V_{\Delta C_1A_1K_1} + V_{\Delta C_2A_2K_1}$$

де $V_{\Delta C_1B_1K_2}$ – об’єм тіла, утвореного обертанням $\Delta C_1B_1K_2$ навколо осі OX,

$V_{\Delta C_2B_2K_2}$ – об’єм тіла, утвореного обертанням $\Delta\, C_2B_2K_2$ навколо осі OX,

$V_{\Delta C_1A_1K_1}$ – об’єм тіла, утвореного обертанням $\Delta\, C_1A_1K_1$ навколо осі OX,

$V_{\Delta C_2A_2K_1}$ – об’єм тіла, утвореного обертанням $\Delta\, C_2A_2K_1$ навколо осі OX.

Скориставшись задачею-теоремою (приведеною вище) матимемо:

$$V_{\Delta C_1B_1K_1} = \frac{1}{3}\pi(\rho_2 + h)^3 \cdot \sin\varphi \cdot tg\varphi;\ \ V_{\Delta C_2B_2K_2} = \frac{1}{3}\pi(\rho_2 - h)^3 \cdot \sin\varphi \cdot tg\varphi;$$

$$V_{\Delta C_1B_1K_1} = \frac{1}{3}\pi(\rho_1 + h)^3 \cdot \sin\varphi \cdot tg\varphi;\ \ V_{\Delta C_2A_2K_1} = \frac{1}{3}\pi(\rho_1 - h)^3 \cdot \sin\varphi \cdot tg\varphi.$$

Тоді легко бачити, що: $V_h = \dfrac{1}{3}\pi((\rho_2 + h)^3 - (\rho_2 - h)^3 - (\rho_1 + h)^3 + (\rho_1 - h)^3)\sin\varphi \cdot tg\varphi$.

Після перетворення виразу в дужках отримаємо:

$$V_h = 2\pi h(\rho_2 - \rho_1)(\rho_2 + \rho_1)\sin\varphi \cdot tg\varphi.$$

З прямокутної трапеції K_1ABK_2 легко встановити, що $(\rho_2 - \rho_1)tg\varphi = AB = l$, а з прямокутних трикутників B_0BK_2 та A_0AK, що $\rho_2 \cdot \sin\varphi = BB_0 = R,\ \rho_1 \sin\varphi = AA_0 = r$.

Отже, матимемо: $V_h = 2\pi h(R + r)l$. Тоді за означенням, бічна поверхня зрізаного конуса буде: $S_{б.} = \lim\limits_{n\to 0}\dfrac{V_h}{2h} = \pi(R + r)\cdot l$.

Отже, доведена важлива теорема і два не менш важливі наслідки з неї.

Теорема 1. Площа бічної поверхні зрізаного конуса обчислюється за формулою $S_{б.} = \pi(R + r)\cdot l$, де R і r – радіуси основ, а l – твірна конуса.

З теореми отримуємо два важливих наслідки:

Наслідок 1. Площа бічної поверхні конуса обчислюється за формулою $S_{б.} = \pi rl$, де r – радіус основи, а l – твірна конуса.

(Доведення цього твердження слідує з умови, що в трапеції A_0ABB_0 сторона $A_0A = 0$)

Наслідок 2. Площа бічної поверхні циліндра обчислюється за формулою $S_{б.} = 2\pi rl$, де r – радіус основи, а l – твірна циліндра.

(Доведення цього твердження слідує з умови, що в трапеції A_0ABB_0 сторона $A_0A = B_0B$)

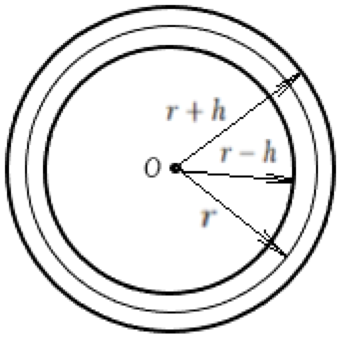


Рис. 4

Скориставшись приведеним вище означенням площі поверхні, виведемо формулу площі поверхні кулі.

Нехай дано кулю радіуса *r* (рис. 4). Шар F_h товщиною $2h$ для неї – тіло, що міститься між двома концентричними кулями радіусів $r-h$ та $r+h$.

Його об'єм:

$$V_n = \frac{4}{3}\pi(r+h)^3 - \frac{4}{3}\pi(r-h)^3 = \frac{4}{3}\pi(r+h-r+h)((r+h)^2+(r+h)(r-h)+(r-h)^2)$$

$$V_n = \frac{8}{3}\pi h(3r^2+3h^2) \quad .$$

Отже площа поверхні кулі буде дорівнювати:

$$S = \lim_{h\to 0}\frac{V_h}{2h} = \lim_{h\to 0}\frac{4}{3}\pi(3r^2+3h^2) = 4\pi r^2.$$

Маємо:

Теорема 2. Площа поверхні кулі дорівнює $4\pi r^2$, де *r* – радіус кулі.

Висновок. Використання підходу *Борхарда-Мінковського до визначення площі поверхні тіла* в шкільному курсі геометрії дає змогу за одним алгоритмічним приписом вивести найбільш вживані формули:

бічної поверхні циліндра, *поверхні кулі,*
бічної поверхні конуса, *тора,*
сферичного сегмента та інші.

Враховуючи те, що за програмою з математики, часу виділяється небагато, то такий варіант вивчення теми *«Площа поверхні геометричного тіла»* є, на наш погляд, кращий, ніж це зроблено в діючих підручниках

3. Задачі на визначення площі поверхні геометричного тіла

Виведені формули поверхонь площ циліндра, конуса, зрізаного конуса, кулі, інших тіл обертання слід навчити учнів застосовувати під час розв'язування практичних та прикладних задач. Розглянемо приклади таких задач.

Задача 1. *Площа бічної поверхні конуса відноситься до площі його основи як m : n, висота конуса дорівнює h. Визначимо площу осьового перерізу конуса.*

Розв'язання

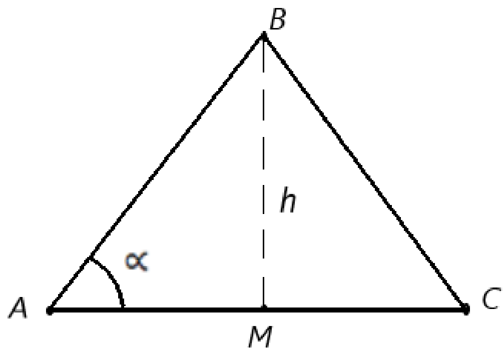


Рис. 5

Оскільки перерізом конуса буде рівнобедрений ΔABC (рис. 5).

Висота конуса $SM = h$.

Площа бічної поверхні конуса $S_{\text{бічн.}} = \pi \cdot AM \cdot AB,$ де AM – радіус основи конуса, *AB* – його твірна.

Площа основи конуса $S_{\text{осн.}} = \pi \cdot AM^2$

Знайдемо їх відношення. За умови $\frac{S_{\text{бічн.}}}{S_{\text{осн.}}} = \frac{m}{n}$.

Отже, $\frac{\pi \cdot AM \cdot AB}{\pi \cdot AM^2} = \frac{m}{n}$.

Звідки $\frac{AB}{AM} = \frac{m}{n}$ або $\frac{AM}{AB} = \frac{n}{m}$.

У ΔABM відношення $\frac{AM}{AB} = cos \propto$, де $\propto$ - величина кута *BAM.*

Отримали, що $cos \propto = \frac{n}{m}$.

Відношення $\frac{AM}{AB} = ctg \propto$, тому $AM = BM \cdot ctg \propto = h \cdot ctg \propto$.

Площа ΔABC – осьового перерізу дорівнює : $S_{\Delta ABC} = AM \cdot BM$.

Тобто

$$S_{\Delta ABC} = h^2 ctg \propto \qquad (1)$$

але

$$ctg \propto = \frac{cos\propto}{sin\propto} = \frac{cos\propto}{\sqrt{1-cos^2\propto}} = \frac{\frac{n}{m}}{\sqrt{1-\frac{n^2}{m^2}}} = \frac{n}{\sqrt{m^2-n^2}}.$$

$$ctg \propto = \frac{n}{\sqrt{m^2-n^2}} \qquad (2)$$

Підставимо (2) в (1), маємо :

$S_{\Delta ABC} = \frac{n \cdot h}{\sqrt{m^2-n^2}}$ *кв. од.*

Відповідь : $S_{\Delta ABC} = \frac{n \cdot h}{\sqrt{m^2-n^2}}$ *кв. од.*

Задача 2. *Сировари вважають, що при рівному об'ємі сири кульової форми краще зберігають свої смакові якості, ніж сири форм циліндра або куба. Чому?*

Зазначимо, що текст задачі можна представити на рис. 6.

Рис. 6

Аналіз цієї задачі доцільно провести вчителю, наприклад, так. Спочатку смакові якості сиру не залежать від його форми. Існує гіпотеза, що смакові якості змінюються у результаті випаровування та окислення. А інтенсивність цих процесів залежить від площі поверхні тіла: чим вона менша, тим повільніше випаровування та окислення. Отже, щоб відповісти на запитання задачі, слід порівняти площі поверхонь куба, циліндра і кулі, які мають рівні об'єми.

Розв'язання задачі всередині побудованої моделі (розв'язання може бути колективним). Задача залишається недостатньо визначеною, тому що невідома висота циліндра. Будемо вважати її рівною $2R,$ де R – радіус основи циліндра.

Тоді його об'єм буде: $V = V_{\text{цил.}} = 2\pi R^3,$ звідки

$$R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, \quad S_{\text{пов.цил.}} = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot 2R = 6\pi R^2 = 6\pi \sqrt[3]{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}.$$

Але $V = V_{\text{куба}} = a^3$ (*а* – сторона куба), звідки $a = \sqrt[3]{V}$, $S_{\text{куба}} = 6a^2 = 6\sqrt[3]{V^2}$.

Оскільки $V_{\text{кулі}} = \frac{4}{4}\pi r^3$ (де *r* – радіус кулі), то $r = \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}$,

тобто $S_{\text{кулі}} = 4\pi r^2 = 4\pi^3 \sqrt[3]{\left(\frac{V}{4\pi}\right)}$.

Потрібно порівняти площі поверхонь. Усі їх значення додатні, тому можна перейти до порівняння x кубів:

$$S^3_{\text{циліндра}} = 6^3\pi^3 \frac{V^2}{4\pi^2} = 54V^2\pi,$$

$$S^3_{\text{куба}} = 54 \cdot 4V^2,$$

$$S^3_{\text{кулі}} = 36\pi V^2.$$

$$36\pi < 54\pi < 54 \cdot 4$$

тобто маємо наступне: $S^3_{\text{кулі}} < S^3_{\text{циліндра}} < S^3_{\text{куба}}$, звідки $S_{\text{кулі}} < S_{\text{циліндра}} < S_{\text{куба}}$.

Відповідь. Найменша площа поверхні у кулі.

(*Інтерпретація* отриманого результату: сири кульової форми краще зберігають свої смакові якості)

ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

БОРХАРД Карл Вільгельм німецький математик, народився у Берліні у 1817 році, помер у 1880 році в м. Рюдерсдорф.

Освіту отримав у Берлінському і Кенінсбергському університетах. В останньому він був учнем відомого математика *Якобі*, з яким відправився в Італію і Францію, де разом вивчали як чисту так і прикладну математику.

У 1848 р. Борхард був призначений приват-доцентом Берлінського університету, а в 1856 р. був обраний членом Пруської академії наук. Через хворобу залишив університет і деякий час редагував журнал *Journal fur die reine und angewandte Mathematik*. Після смерті, Академія наук видала його твори, присвячені переважно визначникам.

Герман МІНКОВСЬКИЙ німецький математик, який розробив геометричну теорію чисел і використав методи геометрії для розв'язання складних задач з теорії чисел, математичної фізики і теорії відносності. Народився в Алексотах (*передмісті Каунасу в Литві, що у той час входили до складу Мінської губернії Російської імперії*), в єврейській сім'ї німецького та польського походження.

Навчався в Німеччині в університетах Берліна і Кенігсберга, де в 1885 р. під керівництвом Фердинанда фон Ліндеманна отримав докторський ступінь.

Ще студентом у 1883 р. був нагороджений Математичною премією Французької академії наук за свій рукопис з теорії квадратичних форм. Мінковський викладав в університетах Бонна, Геттінгена, Кенігсберга і Цюріха. У Цюріху був одним з вчителів А. Ейнштейна. Досліджував арифметику квадратичних форм для n змінних, і ці дослідження привели його до відкриття деяких геометричних властивостей в n-мірному просторі. У 1896 році представив свою ***геометрію чисел*** – геометричний метод розв’язання задач з теорії чисел.

У 1902 році став викладати на математичному факультеті Геттінгена і був одним з близьких колег Давида Гільберта, якого вперше зустрів в Кенігсберзі. Одним з його студентів був Костянтин Каратеодорі.

У 1907 році Мінковський припустив, що спеціальна теорія відносності, сформульована Ейнштейном і заснована на ранніх роботах Лоренца і Пуанкаре, краще всього може бути описана в чотиривимірному просторі (відомому тепер як простір Мінковського). Це припущення допомогло Ейнштейнові у формулюванні загальної теорії відносності.

У 1909 р. Мінковський раптово помер від апендициту в Геттінгені. На його честь названий астероїд ***12493 Мінковський***.

ПІДСУМОК

У класах, де стереометрія вивчається за програмою профільного чи поглибленого рівнів, тому «Площа поверхні тіла» краще вивчати, базуючись на ідеї Борхарда-Мінковського. Це дає змогу чітко і компактно вивести відповідні формули з достатнім і зрозумілим для учнів теоретичним обґрунтуванням.

Слід виділити більше часу на розв'язання практичних та прикладних задач.

МЕТОДИЧНІ ЗАДАЧІ
для самостійного розв'язування

1. Проаналізуйте кілька альтернативних підручників з геометрії для старшої школи і з'ясуйте для себе:
   - які формується в них поняття площі поверхні геометричного тіла;
   - як виводяться формули для обчислення площі поверхні циліндра, конуса, зрізаного конуса, кулі.
2. Запропонуйте календарне планування вивчення теми «Площа поверхні геометричного тіла»:
   а) для поетапного вивчення;
   б) для поелементного вивчення.

   Визначить основну мету вивчення теми, опишіть якими компетентностями оволодіють учні, вивчивши дану тему.
3. Створіть добірку прикладних задач на обчислення площ поверхонь об'єктів, де їх моделями були б вивченні в курсі стереометрії геометричні тіла. Запропонуйте зразки розв'язання таких задач, рекомендації до дотримання культури математичних записів.
4. Проаналізуйте фабули задач ЗНО, в яких вимагаються обчислити чи визначити площу поверхні геометричного тіла. З'ясуйте якого рівня трудності такі завдання, який відсоток тих учнів, що дають правильні розв'язання.

Геометрія – це мистецтво добре вимірювати

П. Раме

Алгебра – моя основна страва, геометрія – десерт

Ф. Вієт

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Нормативні документи

1. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти. Затв. постановою Кабінету Міністрів України, від 23.11.2011 р. № 1392. Діє в старшій школі. https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1392-2011-%D0%BF#Text
2. Державний стандарт базової середньої освіти. Затв. постановою Кабінету Міністрів України, від 30.09.2020 р. № 989. Діє в основній школі 5-9 класи. https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/nova-ukrayinska-shkola/derzhavnij-standart-bazovoyi-serednoyi-osviti
3. Державний стандарт початкової освіти Затв. постановою Кабінету Міністрів України, від 18.02.2018 р. № 87. Діє в початковій школі 1-4 класи. https://osvita.ua/legislation/Ser_osv/59891/
4. Закон України про повну загальну середню освіту. 16.01.2020. № 463-IX. https://sqe.gov.ua/law/zakon-ukraini-N-463-ix-pro-povnu-zagalnu/
5. Навчальна програма для 10-11 кл. загальноосвітніх навчальних класів. Математика. Рівень поглибленого вивчення. https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv
6. Навчальна програма для 10-11 кл. загальноосвітніх навчальних класів. Математика. Профільний рівень. https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv
7. Навчальна програма для 10-11 кл. загальноосвітніх навчальних класів. Математика. Рівень стандарту. https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv
8. Навчальна програма з математики для 1-4 кл. загальноосвітніх навчальних класів. https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-pochatkovoyi-shkoli
9. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика. 5-12 класи. Міністерство освіти і науки України. К.: Ірпінь, 2005. 64 с.

2. Шкільні підручники

10. Бар’яхтар В. Г. Фізика 10 клас. Академічний рівень: Підручник для загальноосвіт. навч. закладів / В. Г. Бар’яхтар, Ф. Я. Божинова. Х.: Ранок, 2010. 256 с.
11. Бевз В.Г., Бевз Г.П., Владімірова Н.Г. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень). 10 клас. К.: Освіта. 2018.
12. Бевз В.Г., Бевз Г.П., Владімірова Н.Г., Владіміров В.М. Геометрія (профільний рівень)10 клас. К.: Освіта. 2018.
13. Єршова А.П., Голобородько В.В., Крижановський В.Ф., Єршов С.В. Геометрія (профільний рівень)10 клас. Х.: Ранок. 2018.
14. Істер О.С., Єргіна О.В. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень). 10 клас. К.: Генеза. 2018.
15. Істер О.С., Єргіна О.В. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень). 11 клас. К.: Генеза. 2018.
16. Істер О.С., Єргіна О.В. Геометрія (профільний рівень)10 клас. К.: Генеза. 2018.
17. Істер О.С., Єргіна О.В. Геометрія. 11 клас. Х.: Гімназія. 2018.
18. Коршак Є. В. та ін. Фізика 9 клас. Пробний підручник для серед. загальноосвітніх шкіл / Коршак Є. В., Ляшенко О. І., Савченко В. Ф. Київ, Ірпінь: ВТФ Перун, 2000. 232 с.

19. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень). 10 клас. Х.: Гімназія. 2018.
20. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень). К.: Генеза. 2018.
21. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень). 11 клас. К.: Генеза. 2018.
22. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 кл., профільний рівень)10 клас. Х.: Гімназія. 2018.
23. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія (профільний рівень)10 клас. Х.: Гімназія. 2018.
24. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія. 11 клас. К.: Освіта. 2018.
25. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 кл., профільний рівень)11 клас. Х.: Гімназія. 2018.
26. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Істер О.С., Єргіна О.В. Алгебра і початки аналізу (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 кл., профільний рівень). 10 клас. К.: Генеза. 2018.
27. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень). 10 клас. Х.: Ранок. 2018. 272 с.
28. Нелін Є. П. Геометрія (профільний рівень)10 клас. Х.: Ранок. 2018.
29. Нелін Є. П., Долгова О.Є. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень). 11 клас. К.: Генеза. 2018.
30. Нелін Є. П., Долгова О.Є. Геометрія. 11 клас. Х.: Гімназія. 2018.

3. Підручники, навчальні посібники

31. Бевз Г. П. Методика викладання математики: навчальний посібник. К.: Вища школа, 1989. 367 с.
32. Білянін Г.І., Швець В.О. Теорія і практика навчання математики в фінансово-економічних коледжах. Навчально-методичний посібник. Вижниця.: Черемош. 2011. 212 с.
33. Бугай А. С. Короткий тлумачний математичний словник. За ред. С. М. Кіро, Ю. М. Шмандіна. К.: Рад. шк., 1964. 428 с.
34. Вища математика: підручник для студ. вищих пед. навч. закл. Кн. 1. / Шкіль М.І., Колесник Т.В., Котлова В. М. К.: Либідь, 2010. 592 с.
35. Вища математика: підручник для студ. вищих пед. навч. закл. Кн. 2. / Шкіль М.І., Колесник Т.В. К.: Либідь, 2010. 496 с.
36. Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках математики: Посібник для вчителів. К.: Техніка. 1997. 304 с.
37. Жалдак М. І., Михалін Г. О., Деканов С. Я. Математичний аналіз. Функції багатьох змінних: навчальний посібник. К.: НПУ імені М.П.Драгоманова. 2007. 430 с.
38. Кліндухова В.М., Швець В.О. Наближені обчислення на уроках математики: 5-9 кл. К : Шкільний світ, 2010. 128 с.
39. Колягин Ю. М. и др. Методика преподавания математике в средней школе: частные методики. М. Просвещение, 1977.
40. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. М.: Наука, 1973. 400 с.
41. Литвиненко Г.М., Федченко Л.Я, Швець В.О. Збірник завдань для атестації з математики учнів 10-11 класів. Х.: ББН, 2000. 164 с.

42. Математичний аналіз у задачах і прикладах: у 2 ч. Навч. посіб. / Дюженкова Л. І., Колесник Т.В., Лященко М. Я. та ін. К.: Вища школа, 2002. Ч. 1. 462 с.
43. Прус А.В., Швець В.О. Збірник задач з методики навчання математики. Житомир: Рута, 2011. 388 с.
44. Слепкань З. И. Психолого-педагогические основы обучения математике: методическое пособие. К. Рад. шк., 1983. 192 с.
45. Слєпкань З. І. Методика викладання алгебри і початків аналізу. К.: Рад. шк., 1978. 224 с.
46. Слєпкань З. І. Методика навчання математики. К.: Зодіак-Еко, 2006. 310 с.
47. Современные основы школьного курса математики / Виленкин Н. Я., Дуничев К. Н., Калужнин Л. А., Столяр А. Л. М.:Просвещение, 1980. 289 с.
48. Соколенко Л. О. Прикладна спрямованість шкільного курсу алгебри і початків аналізу: Навчальний посібник. Чернігів: Сіверянська думка, 2002. 128 с.
49. Соколенко Л.О., Філон Л.Г., Швець В.О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: Практикум. Навчальний посібник. К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2010. 128 с.
50. Терешин Н. А. Сборник задач по математике для средних сельських профтехучилищ: учебное пособие. М.: Высш. шк., 1984. 111 с.
51. Унт И. Э. Индивидуализация и дифференциация обучения. М.: Педагогика, 1990.
52. Швець В. О., Прус А. В. Теорія і практика прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії. Навчальний посібник. Житомир: Вид-во ЖДУ імені І. Франка, 2007. 156 с.
53. Швець В.О., Білянін Г.І. Математика. Навчальний посібник. Чернівці: Зелена Буковина. 2003. 382 с.
54. Шунда Н. М. Застосування похідної до розв’язування задач: навчальний посібник. К.: Техніка, 1999. 240 с.
55. Шунда Н. М. Функції та їх графіки: посібник для вчителів. К.: Рад. шк., 1983. 190 с.

4. Дисертації

56. Буковська О. І. Диференційований підхід до організації самостійної навчальної діяльності старшокласників у процесі поглибленого вивчення геометрії: дис. канд. пед. наук, 13.00.02 / НПУ імені М. П. Драгоманова. К., 2010.
57. Григулич С. М. Самостійна робота старшокласників з математики в умовах диференційованого навчання : дис. канд. пед. наук, 13.00.02 / НПУ імені М. П. Драгоманова. К., 2004. 230 с.
58. Матяш О. І. Вивчення рухів фігур в курсі геометрії школи II ступеня: дис. канд. пед. наук, 13.00.02 / НПУ імені М. П. Драгоманова. К., 1995. 237 с.
59. Прус А. В. Прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії: дис. канд. пед. наук, 13.00.02 / НПУ імені М. П. Драгоманова. К., 2007. 283 с.
60. Сверчевська І. А. Методична система вивчення геометричних тіл у загальноосвітній школі: дис. канд. пед. наук, 13.00.02 / НПУ імені М. П. Драгоманова. К., 2007.
61. Соколенко Л. О. Методика реалізації прикладної спрямованості шкільної алгебри і початків аналізу: дис. канд. пед. наук, 13.00.02 / УДПУ імені М. П. Драгоманова. К., 1997. 245 с.
62. Філімонова М. О. Формування умінь математичного моделювання в учнів основної школи в процесі навчання геометрії: дис. канд. пед. наук, 13.00.02 / НПУ імені М. П. Драгоманова. К., 2015. 267 с.

63. Філон Л Г. Вивчення елементів стереометрії в курсі математико основної школи: дис. канд. пед. наук, 13.00.02 / НПУ імені М. П. Драгоманова. К., 1998. 206 с.
64. Швець Л. В. Розвиток вмінь старшокласників зображати стереометричні фігури та їх комбінації.: дис. канд. пед. наук, 13.00.02 / НПУ імені М. П. Драгоманова. К., 2015. 256 с.

5. Статті

65. Антошків М. С. Врахування психологічних особливостей студентів цифрового покоління шляхом організації змішаного навчання. *Фізико-математична освіта.* 2018. № 1(15). С. 128-131.
66. Василий А. Швец, Татьяна А. Снигур. Формирование понятия объема тела в школьном курсе стереометрии. *Годишник Шуменського університету імені Єпископа Костянтина Преславського.* Том XVII С. 2016. С. 112-127.
67. Колягин Ю. М., Пикан В. В. О прикладной и практической направленности обучения математике в школе. *Математика в школі.* 1985. № 6. С. 27-32.
68. Колягин Ю.М., Ткачева М.В. Федорова Н.Е. Профильная дифференциация обучения математика. *Математика в школе.* 1990. № 4.
69. Матяш О. І. та ін. Формування знань старшокласників про різні методи розв'язування задач стереометрії. *Математика в школі*. 2010. № 10. С. 8-17.
70. Михалін Геннадій, Швець Василь, Снігур Тетяна. Щодо визначення поняття геометричного тіла у шкільному курсі геометрії. *Математика в рідній школі*. 2015. № 6. С. 17-22.
71. Шаран О. Комплексні числа та їх застосування (10-11 кл.). *Математика в школі.* 2004. № 6. С. 46-49.
72. Швец В. А. Писк решения задач на вычисление в курсе стереометрии. *Математика в школе.* 1987. № 1. С. 21-23.
73. Швец В. А., Швец Л.В. Анимационные компьютерные 3-D модели в изучении школьного курса стереометрии. Материалы международной научной конференции. Минск: БГУ, 2012. – С. 429-434.
74. Швець В. О., Жук І. В. Наближені обчислення в курсі алгебри і початків аналізу 10 класу. *Математика в рідній школі*. 2014. № 11. С. 25-31.
75. Швець В. О., Жук І. В. Наближені обчислення під час вивчення степеневої функції. *Математика в рідній школі*. 2015. № 3. С. 18-23.
76. Швець В. О., Прус А. В. Прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії. *Математика в школі.* 2009. № 4. С. 17-23.
77. Швець В. О., Радченко М. В. Похідна функції у розв'язаннях задач з економіки. *Математика в рідній школі.* 2019. № 9. С. 22-29.
78. Швець В. О., Соколенко Л. О. Екзамен з математики на ступінь бакалавра у Франції. *Математика в школі.* 1999. № 3. С. 37-40.
79. Швець В. О., Соколенко Л. О. Різні типи прикладних задач, що призначені для вивчення похідної та її застосування у курсі алгебри і початків аналізу. *Математика в рідній школі.* 2014. № 9. С. 2-10.
80. Швець В.О., Снігур Т.О. Поняття просторового геометричного тіла в шкільному курсі стереометрії. *Pedagogy and Psychology. Science and Education a New Dimension*, III(25), Issue: 49, 2015. www.seanevdim.con. С. 67-71.
81. Vasyl Shvets, Natalia Pershyna. Formation of mathematical modeling skills during solving applied problems of economic conten. *Physical and Mathematical Education*, 33(1), P. 57-62. (2022). https://fmo-journal.org/.
82. From Plan to Market / World Development Report 1996. Published for the Worlk by Oxford University Press, p. 124-125.

Навчальне видання

В. О. Швець

ТЕОРІЯ ТА МЕТОДИКА НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В СТАРШІЙ ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ: КУРС ЛЕКЦІЙ

Підписано до друку 29.10.2024 р. Формат 60x84/16.
Папір офсетний. Гарнітура Arial.
Умов.друк.арк. 29,41. Облік.видав.арк. 27,61
Зам. № 117
Віддруковано з оригіналів.

Видавництво Українського державного університету
імені Михайла Драгоманова.
01601, м. Київ-30, вул. Пирогова, 9
Свідоцтво про реєстрацію ДК 7896 від 25.07.2023.
(044) 239-30-26.