МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им. А. М. ГОРЬКОГО

А. В. РЫЛОВ

АЛГОРИТМЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

(003 — дифференциальные и интегральные уравнения)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев — 1968

Работа выполнена на кафедре математики Киевского государственного педагогического института им. А. М. Горького.

Научный руководитель — кандидат физико-математических наук, доцент П. С. БОНДАРЕНКО.

Официальные оппоненты:

1. Доктор физико-математических наук В. В. ИВАНОВ.
2. Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник А. Ф. ШЕСТОПАЛ.

Ведущее предприятие (научно-исследовательское учреждение) — Вычислительный Центр Сибирского отделения АН СССР (г. Новосибирск).

Автореферат разослан « . . » . . . . . 1968 г.

Защита диссертации состоится « . . » . . 1968 г. на заседании Ученого Совета физико-математического факультета Киевского государственного педагогического института им. А. М. Горького (**бульвар Шевченко, 22/24**).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Ученый секретарь Совета.

Решение некорректных задач математической физики является предметом исследований многих математиков, поскольку эти задачи получили в последнее время большое практическое приложение [1—7].

Впервые необходимость исследования подобного рода задач была указана А. Н. Тихоновым в [5].

В реферируемой работе рассматривается одна задача весьма важного класса задач, корректных по А. Н. Тихонову, — задача Коши для уравнения Лапласа.

В настоящее время имеется значительное количество работ, которые посвящены исследованию и построению решения задач, поставленных корректно по А. Н. Тихонову. В некоторых из них даны формулы и методы последовательных приближений, дающие точное решение задачи Коши для уравнения Лапласа, когда данные известны абсолютно точно. Однако, формулы и методы последовательных приближений, полученные в этих работах, не всегда дадут решения с какой-либо гарантированной точностью, если данные заданы приближенно [1].

Следует отметить, что имеется ряд подходов к исследованию задачи Коши для уравнения Лапласа (а также и ко всем некорректным задачам). Один из этих подходов заключается в том, что вместо классического понятия корректности задач математической физики вводится новое определение корректности по А. Н. Тихонову, т. е. к постановке задач предъявляются требования, отличные от классических. Этот подход к вопросу о постановке некорректных задач был впервые предложен в работе [5].

М. М. Лаврентьевым в работе [1] для разработки новых эффективных методов решения некорректных в классической постановке задач математической физики (но корректных по А. Н. Тихонову) была предложена идея сведения исходной задачи к нахождению решения задач, корректных в классическом смысле, методы решения которых хорошо разработаны.

В настоящей работе для решения задачи Коши для уравнения Лапласа предлагается метод, основанный на том, что исходная некорректная задача при априорном предположении, что ее решение принадлежит классу ограниченных функций, сводится при помощи одностороннего преобразования Лапласа в действительной области по одной из независимых переменных (y) к граничной задаче по другой независимой переменной (x) для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с параметром p, и эта граничная задача является корректно поставленной в классическом смысле. Затем, используя классическую проблему моментов Хаусдорфа, по известным численным значениям граничной задачи для каждого определенного значения x_k строится решение исходной задачи. Это решение представляется в виде ряда Фурье по известным функциям, которые образуют полную ортогональную систему функций на конечном или полубесконечном интервале, а коэффициенты этого ряда находятся из бесконечной системы линейных алгебраических уравнений с треугольной матрицей, т. е. рекуррентно. Единственность решения, представимого в виде указанного ряда Фурье, доказывается при помощи классической проблемы моментов Хаусдорфа. Существование решения задачи Коши для уравнения Лапласа в классе ограниченных функций гарантируется физической интерпретацией задачи.

Работа состоит из четырех глав.

В первой главе описываются примеры физической постановки задач, которые приводят к задаче Коши для уравнения Лапласа. В частности, подробно описывается очень важная геофизическая задача, к которой приходим при исследовании гравитационного поля, когда возникает задача об определении его потенциала в некоторой области вне массы, создающей поле, по его значениям в части этой области. Здесь же приводятся классическое определение корректности задач математической физики и определение корректности по А. Н. Тихонову, а также на примере задачи геофизики показаны отличия требований, сформулированных в этих определениях. В конце первой главы в качестве одного из современных методов решения задачи Коши для уравнения Лапласа приводится метод, при помощи которого исходная задача сводится к решению операторного уравнения первого рода.

Во второй главе приводится вывод основных формул для решения плоской задачи Коши для уравнения Лапласа, указывается их общий принцип построения, основанного на применении известных функций, образующих полную ортогональную систему, таких как четные полиномы Лежандра, тригонометрические функции, полиномы Лагерра.

Пусть требуется найти решение $U(x, y)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

в области

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant y < \infty,$$

которое удовлетворяет условиям

$$U(a, y) = f_1(y), \qquad U(b, y) = f_2(y), \tag{2}$$

$$U(x, 0) = \varphi(x), \qquad \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=0} = \psi(x). \tag{3}$$

Предположим, что в области $\{a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y < \infty\}$ существует решение этой задачи, удовлетворяющее условию

$$|U(x, y)| < M, \qquad (0 \leqslant y < \infty), \tag{4}$$

где M — постоянная, т. е. будем искать решение задачи (1)—(3) в классе ограниченных функций.

Это априорное предположение, как уже было сказано, является естественным требованием, которое следует из физической постановки задачи.

Применим к функции $U(x, y)$ одностороннее преобразование Лапласа в действительной области по независимой переменной y, оставляя независимую переменную x неизменной

$$v(x, p) = \int_0^\infty \exp\{-py\}\, U(x, y)\, dy. \tag{5}$$

Тогда задача (1)—(3) переходит в задачу для такого уравнения

$$\frac{d^2 v(x, p)}{dx^2} + p^2 v(x, p) = p\varphi(x) + \psi(x) \tag{6}$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} v(a, p) &= \int_0^\infty \exp\{-py\} f_1(y)\, dy, \\ v(b, p) &= \int_0^\infty \exp\{-py\} f_2(y)\, dy, \end{aligned} \tag{7}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные функции от x, p — параметр, от которого зависит решение $v(x, p)$. Из неравенства (4) следует, что решение задачи (6), (7) существует при всех $\mathrm{Re}\, p>0$.

Примем $p = (2n+1)\delta$, где δ — произвольное число больше нуля, а $n = 0, 1, 2, \ldots$ В интервале (a, b) пользуемся равномерной сеткой $x_k = a+kh$, $h = (b-a)/m$, $k = 0, 1, \ldots, m$.

Решая последовательно для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ задачу (6)—(7) каким-нибудь устойчивым численным методом, найдем решение $v(x_k, (2n+1)\delta)$, которое является численным изображением искомого решения $U(x_k, y)$ в некоторых точках $(x_k, (2n+1)\delta)$.

Найдем теперь функцию $U(x_k, y)$ по известным численным значениям $v(x_k, (2n+1)\delta)$ на бесконечной последовательности равноотстоящих точек $p_n = (2n+1)\delta$. Для этого равенство (5) перепишем в следующем виде

$$v(x_k, p) = \int_0^\infty \exp\{-py\}\, U(x_k, y)\, dy \tag{8}$$

и преобразуем интеграл (8) при помощи подстановки

$$\exp\{-\delta y\} = \cos\Theta,\ \ U(x_k, y) = U\left(x_k, -\frac{1}{\delta} \ln\cos\Theta\right),\ \ 0 \leqslant \Theta \leqslant \frac{\pi}{2}$$

в интеграл

$$\delta v(x_k, (2n+1)\delta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\Theta \cdot \sin\Theta \cdot U\left(x_k, -\frac{1}{\delta} \ln\cos\Theta\right) d\Theta. \tag{9}$$

Преобразуем ядро интеграла (9), полагая

$$\cos^{2n}\Theta \cdot \sin\Theta = 2^{-2n} \sum_{s=0}^{n} \left[\binom{2n}{s} - \binom{2n}{s-1}\right] \sin[2(n-s)+1]\Theta, \tag{10}$$

где $\displaystyle\binom{n}{s} = \frac{n!}{(n-s)!\, s!}$, $\displaystyle\binom{2n}{-1} = 0$.

Учитывая (10), представим функцию $U\left(x_k, -\frac{1}{\delta} \ln\cos\Theta\right)$ в ряд Фурье по функциям $\sin(2\gamma+1)\Theta$, которые образуют в интервале $(0, \pi/2)$ полную ортогональную систему

$$U(x_k, y) = U\left(x_k, -\frac{1}{\delta} \ln\cos\Theta\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu^{(k)} \cdot \sin(2\nu+1)\Theta. \tag{11}$$

Подставляя (10) и (11) в (9) и учитывая ортогональность нечетных синусов в интервале $(0, \pi/2)$, получаем

$$\delta v(x_k, (2n+1)\delta) = 2^{-2n} \frac{\pi}{4} \sum_{s=0}^{n} \left[\binom{2n}{s} - \binom{2n}{s-1} \right] C_{n-s}^{(k)} . \qquad (12)$$

Последовательно подставляя в равенство (12) $n = 0, 1, 2, \ldots$, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $C_\nu^{(k)}$.

$$C_0^{(k)} = \frac{4}{\pi} \cdot \delta \cdot v(x_k, \delta),$$

$$C_0^{(k)} + C_1^{(k)} + \frac{4^2}{\pi} \cdot \delta \cdot v(x_k, 3\delta), \qquad (13)$$

$$2C_0^{(k)} + 3C_1^{(k)} + C_2^{(k)} = \frac{4^3}{\pi} \cdot \delta \cdot v(x_k, 5\delta),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Формула (11) дает приближенное решение задачи (1)—(3) на k-той прямой, где коэффициенты $C_\nu^{(k)}$ находятся очень просто из системы уравнений (13), в которой величины $v[x_k, (2n+1)\delta]$ являются численными значениями решения задачи (6), (7) и

$$U(x_k, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu^{(k)} \cdot \sin[(2\nu+1) \arccos(\exp\{-\delta y\})].$$

Во второй главе также рассмотрены случаи разложения решения задачи Коши для уравнения Лапласа в ряд Фурье по ортогональным системам функций, такие как четные полиномы Лежандра, полиномы Лагерра.

Так, решение задачи (1)—(3) может быть получено в таком виде

$$U(x_k, y) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{(k)} \cdot P_{2m}(e^{-\delta y}),$$

где $P_{2m}(e^{-\delta y})$ — четные полиномы Лежандра, а коэффициенты $C_m^{(k)}$ находятся из следующей системы

$$\delta \cdot v(x_k, \delta) = C_0^{(k)},$$

$$\delta \cdot v(x_k, 3\delta) = \frac{C_0^{(k)}}{3} + \frac{2C_1^{(k)}}{3 \cdot 5},$$

. . . .

$$\delta \cdot v(x_k, (2m+1)\delta) = \frac{C_0^{(k)}}{(2m+1)} + \frac{2m\,C_1^{(k)}}{(2m+1)\,(2m+3)} + \ldots +$$

$$+ \frac{2m\,(2m-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot C_m^{(k)}}{(2m+1)\,(2m+3) \ldots (4m+1)}.$$

Очевидно, так как равенство (8) является преобразованием Лапласа в действительной области, и его можно рассматривать как интегральное уравнение первого рода, то при условии $p > p_0 \geqslant 0$ это уравнение имеет единственное решение [6].

Поскольку приближенное решение представляется в виде ряда Фурье по ортогональным многочленам, коэффициенты которого определяются приближенно, то, очевидно, некорректность исходной задачи будет проявляться в некорректности задачи суммирования этого ряда [7]. Поэтому отдельно рассматривается вопрос об устойчивом методе суммирования полученного ряда Фурье по приближенным значениям его коэффициентов, то есть рассматривается вопрос о непрерывной зависимости полученного решения от решения граничной задачи.

Далее рассматриваются алгоритмы численного решения задачи. Согласно введенным понятиям абстрактного и реального вычислительных алгоритмов в работах [8, 9] строятся и исследуются абстрактный и реальный вычислительные алгоритмы метода последовательных приближений, основанного на суммировании ряда Фурье. С помощью определения реального вычислительного алгоритма исследуются сходимость и устойчивость приближенного решения, полученного при замене суммы тригонометрического ряда Фурье его частичной суммой, к точному решению исходной задачи. Здесь же доказывается теорема, которая, по существу, является критерием устойчивости реального вычислительного алгоритма последовательных приближений, основанного на суммировании ряда Фурье. Эта теорема дает возможность решить прямую и обратную проблемы приближенных вычислений: по заданной точности данных задачи определить точность приближенного решения, и, наоборот, по наперед заданной точности искомого приближенного решения определить точность данных так, чтобы гарантировать необходимую точность этого решения. Здесь же рассмотрен вопрос о непрерывной зависимости решения от входных данных задачи при помощи вспомогательной функции $\omega(\tau)$, которая находится в явном виде. При этом существование функции $\omega(\tau)$ гарантируется теоремой Тихонова [5].

В главе третьей полученные во второй главе результаты распространяются на случай пространственной задачи Коши для уравнения Лапласа.

Четвертая глава посвящена численной реализации полученного метода. Здесь приведены пять числовых примеров решения задачи Коши для уравнения Лапласа, а также результаты, полученные при реализации данного метода решения некорректной задачи на ЭЦВМ «М-20». В конце главы приведена программа в языке «Алгол» численной реализации задач 4 и 5.

Результаты исследований опубликованы в 7 статьях автора [10—16].

Основные результаты работы доложены на семинарах кафедры дифференциальных уравнений Киевского государственного университета им. Т. Г. Шевченко, на семинарах по вычислительной математике, проводимые в вычислительном центре университета, на семинаре отдела дифференциальных и интегральных уравнений Института математики АН УССР, на отчетно-научной конференции кафедр КГПИ им. А. М. Горького (март 1967 г.), на республиканской конференции по дифференциальным уравнениям (апрель, 1967 г. КГПИ им. А. М. Горького), на четвертой научной конференции молодых математиков Украины (апрель 1968 г.).

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Лаврентьев, О некоторых некорректных задачах математической физики, Новосибирск, 1962.

2. М. М. Лаврентьев, О задаче Коши для уравнения Лапласа, ДАН СССР, 102, 2, 1955.

3. М. М. Лаврентьев, О постановке некоторых некорректных задач математической физики, сб. «Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики», «Наука», Новосибирск, 1966.

4. А. Н. Тихонов, О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации, ДАН СССР, 151, 3, 1963.

5. А. Н. Тихонов, Об устойчивости обратных задач, ДАН СССР, 39, 5, 1944.

6. А. Н. Тихонов, О некорректно поставленных задачах, сб. «Вычислительные методы и программирование», вып. 8, изд-во МГУ, 1967.

7. А. Н. Тихонов, Об устойчивом методе суммирования ряда Фурье, ДАН СССР, 156, 2, 1964.

8. П. С. Бондаренко, Реальные вычислительные алгоритмы последовательных приближений, сб. «Вопросы теории и истории дифференциальных уравнений», «Наукова думка», Киев, 1968.

9. П. С. Бондаренко, Вычислительные алгоритмы приближенного решения операторных уравнений, ДАН СССР, 154, 4, 1964.

10. П. С. Бондаренко, А. В. Рылов, Об одном методе решения задачи Коши для уравнения Лапласа (на укр. яз.), ДАН УССР, серия А, 2, 1968.

11. П. С. Бондаренко, А. В. Рылов, Полиномы Лежандра и численное решение задачи Коши для уравнения Лапласа (на укр. яз.), ДАН УССР, серия А, 11, 1967.

12. П. С. Бондаренко, А. В. Рылов, Об одном численном решении задачи Коши для уравнения Лапласа (на укр. яз.), Тезисы докладов отчетно-научной конференции кафедр КГПИ им. А. М. Горького, 1967.

13. А. В. Рылов, Решение задачи Коши для уравнения Лапласа при помощи полиномов Лежандра (на укр. яз.), Тезисы докладов отчетно-научной конференции кафедр КГПИ им. А. М. Горького, 1967.

14. П. С. Бондаренко, А. В. Рылов, Об одном методе численного решения задачи Коши для уравнения Лапласа, сб. «Вычислительная и прикладная математика», изд-во КГУ, вып. 6, 1968.

15. П. С. Бондаренко, А. В. Рылов, Алгоритмы численного решения задачи Коши для уравнения Лапласа, сб. «Вычислительная и прикладная математика», изд-во КГУ, вып. 9, 1968 (в печати).

16. А. В. Рылов, О приближенном методе решения пространственной задачи Коши для уравнения Лапласа (на укр. яз.). Материалы четвертой научной конференции молодых математиков Украины (апрель, 1968 г.).