8. Ужченко В.Д., Авксентьєв Л.Г. Українська фразеологія / В.Д. Ужченко, Л.Г. Авксентьєв. – Харків : Основа, 1990. – 167 с.

9. Українська мова : Енциклопедія [редкол. : В.М. Русанівський, О.О. Тараненко]. – К. : "Українська енциклопедія", 2000. – 752 с.

УДК 519.21
Хворостіна Ю.В.

ЛЕБЕГІВСЬКА СТРУКТУРА РОЗПОДІЛІВ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН З НЕЗАЛЕЖНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ЗНАКОЗМІННОГО РЯДУ ЛЮРОТА

Работа посвящена исследованию структуры распределения случайной величины ξ с независимыми элементами знакопеременного ряда Люрота. Доказано, что распределение этой случайной величины есть чистым, то есть чисто дискретным, либо чисто абсолютно непрерывным, либо чисто сингулярно непрерывным. Найдены критерии каждого из распределений и получено выражение функции распределения случайной величины ξ.

Відомо [2], що для довільного $x \in (0;1]$ існує скінченний набір натуральних чисел $(a_1, a_2, ..., a_n)$ або послідовність натуральних чисел (a_n), $a_n = a_n(x)$ таких, що

$$x = \frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)...a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n}, \qquad (1)$$

причому кожне ірраціональне число має єдине представлення, яке є нескінченним і неперіодичним, а кожне раціональне число має або скінченне, або періодичне представленя.

Рівність (1) називатимемо розкладом числа *x* в знакозмінний ряд Люрота або $\widetilde{L}$-зображення числа *x* і символічно зображатимемо $x \equiv \Delta^{\widetilde{L}}_{a_1 a_2 ... a_n ...}$.

Нехай (η_k) – послідовність незалежних випадкових величин, причому η_k набуває значень $1, 2, ..., i, ...$ з ймовірностями $p_{1k}, p_{2k}, ..., p_{ik}, ...$ відповідно, причому $p_{ik} \geq 0, \ \sum_{i=1}^{\infty} p_{ik} = 1, \ \forall k \in N.$

Розглянемо випадкову величину $\xi = \Delta^{\widetilde{L}}_{\eta_1 \eta_2 ... \eta_n ...}$.

Теорема 1. *Випадкова величина ξ з незалежними $\widetilde{L}$-символами має дискретний розподіл тоді і тільки тоді, коли*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_m p_{mk} > 0. \qquad (2)$$

Причому у випадку дискретності множина атомів розподілу випадкової ξ складається з точки x_0, де $p_{a_k(x_0)k} = \max_m \{p_{mk}\} \quad \forall k \in N$, і всіх точок $x' \in (0;1)$, у яких $p_{a_k(x')k} > 0$ та існує таке $m \in N$, що $a_j(x') = a_j(x_0)$ при $j \geq m$.

Доведення. Число *x* є атомом розподілу випадкової величини ξ, якщо

$$\prod_{k=1}^{\infty} p_{a_k(x)k} > 0.$$

Необхідність. Нехай випадкова величина ξ має дискретний розподіл і *x* – один із атомів розподілу. Припустимо, що нескінченний добуток (2) розбігається до 0. Тоді

$$P\{\xi = x\} = \prod_{k=1}^{\infty} p_{a_k(x)k} \leq \prod_{k=1}^{\infty} \max_m p_{mk} = 0,$$

але це суперечить тому, що *x* – атом розподілу. Тому припущення неправильне, що й доводить необхідність.

Достатність. Нехай виконується (2). Тоді, очевидно, що x_0 і всі *x'*, які відрізняються від нього лише скінченною кількістю $\widetilde{L}$-символів, для яких $p_{a_k(x')k} > 0$, є атомами розподілу ξ. Покажемо, що ξ має дискретний розподіл.

Нехай D_m – множина всіх точок *x'*, $\widetilde{L}$-символи яких співпадають з $\widetilde{L}$-символами точки x_0, починаючи з *m*. Тоді

$$P\{\xi \in D_m\} = \sum_{a_1(x')} \ldots \sum_{a_{m-1}(x')} \left(\prod_{k=1}^{m-1} p_{a_k(x')k} \cdot \prod_{k=m}^{\infty} p_{a_k(x')k} \right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{m-1} \sum_{a_k(x')} p_{a_k(x')k} \cdot \prod_{k=m}^{\infty} p_{a_k(x_0)k} = \prod_{k=m}^{\infty} p_{a_k(x_0)k} .$$

Множина $D = \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m$ – не більш ніж зчисленна, оскільки вона є зчисленним об'єднанням не більш ніж зчисленних множин. Оскільки

$$\{x_0\} = D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_m \subset \ldots,$$

то за властивістю неперервності ймовірності

$$P\{\xi \in D\} = \lim_{m\to\infty} P\{\xi \in D_m\} = \lim_{m\to\infty} \prod_{k=m}^{\infty} p_{a_k(x_0)k} = 1,$$

остання границя дорівнює 1 за властивостями збіжних нескінченних добутків.

Отже, зліченна множина *D* є носієм розподілу випадкової величини ξ, тобто розподіл є дискретним. Теорему доведено.

Наслідок 1. *Випадкова величина ξ має неперервний розподіл тоді і тільки тоді, коли нескінченний добуток* (2) *дорівнює* 0.

Теорема 2. *Неперервна випадкова величина ξ з незалежними $\widetilde{L}$-символами має або чисто абсолютно неперервний, або чисто сингулярно неперервний розподіл.*

Доведення. Нехай $\delta = (\delta_1 \ldots \delta_n)$ – деякий впорядкований набір натуральних чисел і T_δ^n – перетворення точки $x = \Delta^{\widetilde{L}}_{a_1 \ldots a_k \ldots}$ таке, що

$$T_\delta^n(x) \equiv \Delta^{\widetilde{L}}_{\delta_1 \ldots \delta_n a_1 \ldots a_k \ldots}$$

Очевидно, що точка $x_0 = \Delta^{\widetilde{L}}_{(\delta_1 \ldots \delta_n)}$, яка має чисто періодичне $\widetilde{L}$-зображення з періодом $(\delta_1 \ldots \delta_n)$ є інваріантною точкою T_δ^n-перетворення.

T_δ^n-перетворенням множини *E* називається множина T_δ^n-образів всіх *x*, тобто

$$T_\delta^n(E) \equiv \{u : \quad u = T_\delta^n(x), \quad \text{де} \quad x \in E\}.$$

Легко бачити, що $T_\delta^n(0;1) = \Delta^{\widetilde{L}}_{\delta_1 \ldots \delta_n}$ і T_δ^n-перетворення є перетворенням подібності з коефіцієнтом $k = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\delta_i(\delta_i + 1)}$. Очевидно також, що міра Лебега

$$\lambda\left[T_\delta^n(E)\right] = k\lambda(E),$$

а тому, $\lambda\left[T_\delta^n(E)\right]$ і $\lambda(E)$ рівні нулю одночасно.

Позначимо

$$T^n(E) = \bigcup_{\delta_1 \ldots \delta_n} T_\delta^n(E), \quad T(E) = \bigcup_n T(E).$$

Розглянемо подію $A = \{\xi \in T(E)\}$. Оскільки η_k незалежні, то подія *A*, породжена послідовністю випадкових величин η_k, не залежать від всіх σ-алгебр B_k, породжених $\eta_1 \ldots \eta_k$, і є залишковою. Тому за законом 0 та 1 Колмогорова [3] $P(A) = 0$ або $P(A) = 1$.

Можливий лише один з двох випадків:

1) існує така множина *E*, що $\lambda(E) = 0$, а $P\{\xi \in E\} > 0$;

2) для довільної множини *E* такої, що $\lambda(E) = 0$ маємо $P\{\xi \in E\} = 0$.

У першому випадку з рівності $\lambda(E) = 0$ випливає, що $\lambda(T(E))$, а це означає, що існує множина *T*(*E*) така, що $\lambda(T(E)) = 0$, а $P\{\xi \in T(E)\} = 1$, тобто за означенням ξ має чисто сингулярно-неперервний розподіл. У другому випадку розподіл є чисто абсолютно неперервний, згідно з означенням. Отже, розподіл випадкової величини ξ є чистим. Що і треба було довести.

Теорема 3. *Неперервний розподіл випадкової величини ξ є число абсолютно неперервним тоді і тільки тоді, коли виконується умова*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{p_{mk}}{m(m+1)}\right)^2<\infty. \qquad (3)$$

Доведення. Нехай $\{(\Omega_k, B_k, \mu_k)\}$ і $\{(\Omega_k, B_k, \nu_k)\}$ дві послідовності ймовірнісних просторів такі, що $\Omega_k = N$, B_k – σ-алгебра всіх підмножин Ω_k,

$$\mu_k(m) = p_{mk}, \quad \nu_k(m) = \frac{1}{m(m+1)}, \; k \in N,$$

де p_{mk} – елемент матриці $\|p_{ik}\|$, що визначає розподіл випадкової величини ξ.

Очевидно, що $\mu_k << \nu_k$ для всіх $k \in N$. Розглянемо нескінченні добутки ймовірнісних просторів:

$$(\Omega, B, \mu) = \prod_{k=1}^{\infty}(\Omega_k, B_k, \mu_k), \qquad (\Omega, B, \nu) = \prod_{k=1}^{\infty}(\Omega_k, B_k, \nu_k).$$

З теореми Какутані [1] випливає, що $\mu_k << \nu_k$ тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{\infty}\rho(\mu_k, \nu_k) > 0, \quad \text{де } \rho(\mu_k, \nu_k) = \int_{\Omega_k}\sqrt{\frac{d\nu_k}{d\mu_k}}d\mu_k$$ – інтеграл Хелінгера.

У даному випадку

$$\prod_{k=1}^{\infty}\int_{\Omega_k}\sqrt{\frac{d\nu_k}{d\mu_k}}d\mu_k > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \prod_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sqrt{\frac{p_{mk}}{m(m+1)}}\right) > 0.$$

Остання умова еквівалентна умові

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{p_{mk}}{m(m+1)}\right)^2<\infty.$$

Отже, з умови (3) випливає умова абсолютної неперервності міри μ відносно міри ν.

Розглянемо вимірне відображення $\Omega \xrightarrow{f} [0;1]$, яке визначене рівністю:

$$\forall \omega = (\omega_1, ..., \omega_k, ...) \in \Omega: \quad f(\omega) = \Delta^{\widetilde{L}}_{\omega_1 ... \omega_k ...}.$$

Для довільної борелівської множини *E* визначимо образи μ^* і ν^* мір μ і ν під дією відображення *f* наступним чином:

$$\mu^*(E) = \mu\left(f^{-1}(E)\right), \qquad \nu^*(E) = \nu\left(f^{-1}(E)\right).$$

Міра μ^* співпадає з ймовірнісною мірою P_ξ, а міра ν^* – з ймовірнісною мірою P_ψ, еквівалентною мірі Лебега λ. З абсолютної неперервності міри μ відносно міри ν випливає абсолютна неперервність міри μ^* відносно міри ν^*. Оскільки $\nu^* \sim \lambda$, то з умови (3) випливає абсолютна неперервність розподілу випадкової величини ξ. Теорему доведено.

Наслідок 2. Неперервний розподіл випадкової величини ξ є число сингулярно неперервним тоді і тільки тоді, коли ряд (3) – розбіжний.

Лема. *Фукція розподілу* $F_\xi(x)$ *випадкової величини ξ подається у вигляді*

$$F_\xi(x) = \beta_{a_1(x)1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\beta_{a_k(x)k}\prod_{j=1}^{k-1}p_{a_j(x)j}\right),$$

$$\text{де } \beta_{a_k(x)k} = \begin{cases} \sum\limits_{j=a_k(x)+1}^{\infty} p_{jk}, & \text{при } k = 2m-1, \\ \sum\limits_{j=1}^{a_k(x)-1} p_{jk}, & \text{при } k = 2m, m \in N. \end{cases}$$

ЛІТЕРАТУРА:

[1] Kakutani S. Equivalence of infinite product measures // Ann. of Math. – 1948. – Vol. 49. – P. 214-224.

[2] Kalpazidou S., Knopfmacher A., Knopfmacher J. Luroth-type alternating series representations for real numbers // Acta Arith. – 1990. – Vol. 55. – P. 311-322.

[3] Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1986. – 432 с.

[4] Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. – 296 с.

УДК *168.522:008(540)*

Циценко Г.Б.

ФЕНОМЕН ВІДЛЮДНИЦТВА В ІНДІЙСЬКІЙ КУЛЬТУРІ

В статье представлены отдельные интерпретационные моделиотшельничества, которые были распространены в брахманизме, индуизме, буддизме.

Східна філософія не є цілісною, оскільки часто залежала від національних, ідеологічних, політичних та релігійних чинників.

Першопочатково, усамітнення не було властиве давньоіндійському суспільству. Світоглядні установки Індії орієнтовані на культ родини. Але така орієнтація, у той самий час, передбачає поділ на своїх (родина) та чужих (інші). Цей принцип спричинив і соціальний розподіл. Соціальний устрій Індії ґрунтувався на релігійних принципах, і розвивався у межах релігії. Саме тому згадки про анахоретство присутні у релігії брахманізму, а пізніше й індуїзму.

Брахманізм передбачав істинність буття в єдиній всезагальній сутності, в світовій душі, нескінченній і незмінній, в Брахмі. У ньому центр і джерело буття, поза ним, – ілюзія, обман, помилка. Все, що існує окремо, позбавлене самостійного значення [1, с. 17].

Тому, згідно з філософією брахманізму, душа людини була частинкою світової душі, тотожна їй. Моральним і духовним ідеалом було єднання з Брахмою. Це досягалося шляхом умертвіння духовного через фізичне. І таке бачення породило у середовищі брахманізму явище анахоретства, що розумілося як звільнення через страждання.

Поступово усамітнення від світу, відлюдництво, стало популярне і в інших кастах. Це було зумовлене рядом причин: будь-які порушення релігійних норм і правил породжували ризик переродження душі у нижчу касту. Тому, незважаючи на тяжкі умови життя, ритуали і правила суворо дотримувалися, приймалася з гідністю. В контексті цього зароджуються й філософські погляди на світ, як на безодню, сповнену страждань і зла, а отже, й прагнення покинути цей світ.

У світовій історії відлюдництво як аскетична практика отримало найбільше поширення і популярність саме в Індії, у якій самоумертвіння було визнано вищим ідеалом.

Зародження відлюдництва у Індії розпочинається у середовищі муні (з інд. відлюдник, мовчальник), котрі хоча притримувались ритуалів і авторитету ведичної традиції, покидали світ заради пошуку Бога, Істини. Їх мета – пізнати Істину. Основний шлях до Бога – тапас, що передбачає цілковите розчинення особистості. Відлюдництво – це шлях звільнення від релігії, обрядів, звичаїв, бажань і т.д. Анахорет вільний від пристрастей світу: любові, ненависті, добра і зла. Олександр Мень називає анахорета Надлюдиною, котрий помер для світу, але отримав спасіння [2].

Відлюдництво було поширене і у середовищі кшатріїв. У втечі від світу вони знаходили мету яснішу і конкретнішу, аніж злиття з Божеством, про який вчили брахмани. Статус відлюдника поставав священним в очах звичайних людей.

Так як, відлюдницький рух індусів став своєрідною реакцією на брахманізм, то анахорети поділялись на два типи:

- тих, хто катує своє тіло, знищуючи тлінне в ім'я духовного;
- тих, хто шукає спокій у споглянданні і бездіяльності духу і тіла.

У цей період активно розвиваються школи йоги, що ґрунтуються на досягненні різних форм містичного єднання з Абсолютом за допомогою відмови від тілесної оболонки. Вважалося, що різноманітні витончені тортури власного тіла повинні забезпечити блаженство після смерті і гідне втілення в майбутньому. Найвищий рівень умертвіння плоті передбачав покинення статичного способу життя (відлюдник мав залишити своє укриття) і обрання мандрівного способу життя. Тобто, відлюдник ставав мандрівником, що бродить до того моменту, поки, знесилившись, не повалиться на землю і не випустить дух. Відповідно до Законів Ману, аскет повинен завжди ставити себе вище за життя:

«41. Вийшовши з будинку, відлюдник, забезпечений засобами очищення, нехай бродить, байдужий до накопичення предметів бажання.

42. Заради досягнення успіху слід бродити одному, без супутників: зрозумівши, що успіх залежить від нього одного, він досягає (успіху), що не покидає його. 43. Йому не слід мати вогонь і житло; він може ходити в село за їжею, зберігаючи мовчання, байдужий до всього, твердий в прагненнях, зосереджений в думках.

44. Глиняна чаша, коріння дерева, лахміття, самотність і байдуже ставлення до всього – така ознака звільненого» (VI, ст. 42-44) [3, с. 217- 218].

Образ життя анахоретів був різним:

- ті, що повністю ізолювали себе від будь-яких контактів зі світом;