УДК 519.1

Турбин А. Ф.

КОНТАКТНОЕ ЧИСЛО И. НЬЮТОНА $\tau_8 = 112$

Контактным числом И. Ньютона $\tau_n, n \geq 4,$ в теории сферических упаковок (см. [1]) называют максимальное число гиперсфер $S_{n-1}(R)$, которое можно разместить (без пересечений) на гиперсфере того же радиуса. (В англоязычных статьях, не содержащих чего–либо содержательного о контактных числах И. Ньютона, авторы фамильярно и навязчиво «демократично» называют их не иначе как kissing numbers.*) Например, в [2] автор статьи «удачно» подобрал степень и коэффициенты сферического многочлена Якоби и, как ему и хотелось, получил долгожданный результат: $\tau_4 = 24$.*

В [3] авторы, используя тот же метод, оказались ещё более «удачливыми», понизив верхнюю границу τ_9 на целых 5: с 380 до 375, хотя точное значение $\tau_9 = 2 \cdot 9 \cdot 8 = 144$.

Из [1]: «Вызывает некоторое удивление, что мы знаем ((?) – А.Т.) также контактные числа в размерностях 8 и 24 (см. [Odl 5] гл. 13, [Lev 7]), но не знаем ответа ни в одной другой размерности, большей трёх. На самом деле эти числа (240 и 196560 соответственно) получаются технически проще, чем трёхмерный результат. Это связано с тем, что в данных размерностях расположение единственно: единственный способ окружить 8-мерный шар 240 другими — это расположение решетки E_8, аналогично в размерности 24 единственное расположение берется из одной из двух зеркальных форм решетки Лича (см. [Ban 13]. 14)».

Действительно, «вызывает удивление», что на всего лишь восьмимерной гиперсфере $S_7(R)$ радиуса R можно разместить аж 240 гиперсфер того же радиуса и они не пересекаются…

На восьмимерной гиперсфере $S_7(R)$ действительно можно разместить без пересечений 240 гиперсфер. Но это уже будут гиперсферы $S_7(r), r \leq \frac{1}{\sqrt{2}} R,$ меньшего радиуса, поскольку длины ребер многогранника Ньютона, на вершинах которого размещаются непересекающиеся гиперсферы, не могут быть меньше радиуса самой гиперсферы.

Теорема 1. На восьмимерной гиперсфере можно разместить 112 гиперсфер того же радиуса и они касаются друг друга:

$$\tau_8 = 2 \cdot (8 \cdot 7) = 112 .$$

Доказательство. На восьмимерной гиперсфере

$$S_7\left(\sqrt{2}\right) = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_8) \in E^8 : \sum_{k=1}^{8} x_k^2 = 2 \right\}$$

радиуса $\sqrt{2}$ отметим точки $\vec{x} = (x_1, x_2, .., x_8)$ с целочисленными координатами (целочисленные октонионы с нормой, равной $\sqrt{2}$).

Таких точек 112:

$(1,1,0,...,0) +$ перестановки (число таких точек равно 28),

$(-1,-1,0,...,0) +$ перестановки (число таких точек равно 28),

$(-1,1,0,...,0) +$ перестановки (число таких точек равно 56).

Таким образом, 28+28+56=112.

Выберем какой-либо целочисленный октонион с нормой $\sqrt{2}$, например, $(1,1,0,...,0)$. Ближайшими к нему являются 24 октониона:

$$(1,0,1,0,0,0,0,0),(1,0,0,1,0,0,0,0),(1,0,0,0,1,0,0,0),...,(1,0,0,0,...,1);[6]$$

$$(1,0,-1,0,0,0,0,0),(1,0,0,-1,0,0,0,0),(1,0,0,0,-1,0,0,0),...,(1,0,0,0,...,-1);[6]$$

$$(0,1,1,0,0,0,0,0),(0,1,0,1,0,0,0,0),(0,1,0,0,1,0,0,0),...,(0,1,0,0,...,1);[6]$$

$$(0,1,0,-1,0,0,0,0,0),(0,1,0,0,-1,0,0,0,0),(0,1,0,0,-1,0,0,0),...,(0,1,0,0,...,-1);[6].$$

Расстояние $\sqrt{2}$ совпадает с радиусом гиперсферы $S_7\left(\sqrt{2}\right)$.

112 целочисленных октонионов с нормой $\sqrt{2}$ являются вершинами вписанного в неё 112–вершинника. Степень вершины равна 24, следовательно, число рёбер равно $\frac{1}{2}\cdot 24\cdot 112=1344.$ Длины ребер равны $\sqrt{2}$. Трёхмерные грани 112-вершинника – октаэдры.

На его вершинах размещаются 112 гиперсфер радиуса $\sqrt{2}$ и гиперсферы касаются друг друга (размещение идеально).
112 – вершинник $Superoct_8(112)$ я называю супероктаэдром И. Ньютона –
Н. Кузенного.

Теорема 2. Супероктаэдр И. Ньютона – Н. Кузенного $Superoct_8(112)$ является правильным многогранником в E^8.

Группа симметрии $Superoct_8(112)$ совпадает с группой симметрии решений диофантова уравнения $\sum_{k=1}^{8} x_k^2 = 2, x_k \in Z,$ и изоморфна группе симметрии восьмимерного гиперкуба $Hypecub_8(2^8)$ порядка $2^8\cdot 8! = 256\cdot 40320 = 10321920$.

Четырёхмерные грани – мегаоктаэдры Л. Шлефли (24, 96, 96, 24) (мегаоктаэдр Л.Шлефли (24, 96, 96, 24) – выпуклая оболочка целочисленных кватернионов с нормой $\sqrt{2}$, $\tau_4 = 2\cdot(4\cdot 3) = 24$) (см., напр, [1], [4], [5]).

Пятимерные грани – супероктаэдры И. Ньютона – Н. Кузенного $Superoct_5(40)$

(40, 240, 400, 240, 40) – выпуклые оболочки 40 решений диофантова уравнения $\sum_{k=1}^{5} x_k^2 = 2, x_k \in Z$.

($\tau_5 = 2\cdot(5\cdot 4) = 40$).

Шестимерные грани – супероктаэдры И. Ньютона – Н. Кузенного $Superoct_6(60)$ – выпуклые оболочки 60 решений диофантова уравнения

$$\sum_{k=1}^{6} x_k^2 = 2, x_k \in Z.$$

($\tau_6 = 2\cdot(6\cdot 5) = 60$).

Семимерные грани – супероктаэдры И. Ньютона – Н. Кузенного $Superoct_7(84)$ – выпуклые оболочки 84 решений диофантова уравнения

$$\sum_{k=1}^{7} x_k^2 = 2, x_k \in Z.$$

($\tau_7 = 2\cdot(7\cdot 6) = 84$).

Группа симметрии $Superoct_8(112)$ действует на флагах просто транзитивно, поэтому, $Superoct_8(112)$ (см. определение правильного многогранника в E^n [5]) – правильный многогранник в E^8.

Теорема 3. Супероктаэдр И. Ньютона – Н. Кузенного $Superoct_8(112)$ заполняет E^8.

$Superoct_8(112)$ является многогранником Вороного подрешетки решетки Госсета в E^8 [1].

PS. Аналогично можно показать, что контактное число И. Ньютона τ_{24} равно не 196560 , как «удивленно отмечают» авторы в [1], а всего лишь $2\cdot(24\cdot 23) = 1104$.

Дж. Грегори в знаменитой дискуссии с И. Ньютоном утверждал, что на сфере радиуса R можно разместить 13 сфер того же радиуса.

На сфере радиуса R действительно можно разместить 13 сфер одинакового, но меньшего радиуса так, чтобы они касались друг друга. Точки касания являются вершинами вписанного в центральную сферу 13 – вершинника, у которого 26 ребер и 13 граней – равнобедренных треугольников.

Для этого сфероэдра (13, 26, 13)

В – Р+Г=13 – 26+13=0

вопреки знаменитой теореме Л. Эйлера о правильных многогранниках в E^3.

ЛИТЕРАТУРА:

1. *Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решётки и группы: В 2-х т. Т. 1. – М.: Мир, 1990. – 415 с., Т.2 – М.: Мир, 1990. – 791 с.*
2. *Мусин О. Р. Проблема двадцати пяти сфер // УМН. — 2003. — Т. 58. — №4(352). — С. 153–154.*
3. *Всемирнов М.А., Ржевский М.Г. Верхняя оценка контактного числа в размерности 9 // УМН. — 2002. — Т. 52. — № 5 — С. 149–150.*
4. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. – М.: Наука, 1981. – 344 с.*
5. *Берже М. Геометрия, т.1. – М.: Мир, 1984. –546 с.*

Усачова Л.В.

ОСОБЛИВОСТІ ПСИХІЧНОГО РОЗВИТКУ СУЧАСНОГО ДОШКІЛЬНИКА

В работе представлены теоретические и экспериментальные исследования особенностей психического развития современного дошкольника. Выделены и проанализированы критерии развития: социальная ситуация, ведущая деятельность, новообразования.

Психічний розвиток дошкільника викликає підвищений інтерес у психологів, адже саме на цьому етапі життя людини формуються основи пізнавальних здібностей та характеру. За Ж.Піаже в дошкільному віці здійснюється перехід від аутизму до логічних операцій [6] . З.Фрейд вважав, що саме в дошкільному віці формується «Над-Я»[7]. Розрядку внутрішнього напруження дитина знаходить в грі. Це одна із форм сублімації.

Виготський Л.С. вивчав ігрову діяльність дошкільників. Він вважав дошкільний вік початком формування вищих психічних функцій, зокрема - волі [1] . На думку Леонтьєва А.Н., це вік початкового фактичного формування особистості [3]. Це вік, за яким іде шкільне навчання. Отже, дошкільний вік - дуже відповідальний період психічного життя людини.

Психічний розвиток дошкільника вивчали такі психологи: Божович Л.І., Виготський Л.С., Піаже Ж., Мухіна В.С., Венгер Л.А., Венгер А.Л., Кравцова О.Е., Леонтьєв А.Н., Гуткіна Н.Й., Эльконін Д.Б., Шванцара Й. та інші.

Проблема психічного розвитку сучасного дошкільника достатньо розроблена в психології, але вона завжди буде актуальною. Адже змінюються соціально-психологічні чинники, які спричинюють психічний розвиток дошкільника, відбувається процес акселерації.

В наш час в зв'язку з інтенсивним розвитком науково-технічного прогресу та масовою комп'ютерізацією, навчанням в школі з 6-ти років пред'являються підвищені вимоги до дітей дошкільного віку як з боку школи, дитячого садка, так і батьків.

Критеріями психічного розвитку сучасного дошкільника можна вважати сформованість вікових новоутворень: внутрішні етичні інстанції (зачатки почуття совісті); супідрядність мотивів (продумані дії починають переважати над імпульсивними, мотив «хочу» поступається мотиву «треба», більшого значення набуває соціальна мотивація); довільна поведінка (здатність діяти цілеспрямовано, долати труднощі на шляху до мети, елементарно контролювати та регулювати свою діяльність); творча уява (прагнення відійти від шаблона та зразка, схильність до фантазування, вигадування, творчої ініціативи); виникнення критичної самооцінки; втрата емоційної безпосередності (узагальненя переживань).

В дошкільному віці змінюється соціальна ситуація розвитку. Відбувається відокремлення дитини від дорослого. Змінюються взаємини з дорослим, набуваючи нових форм: спільні дії поступово змінюються самостійним виконанням дитиною вказівок дорослого. Дитина прагне до самостійності, її основною потребою є участь у житті й діяльності дорослих. Вона стає дорослою в думках, уяві, орієнтуючись на дорослих як на зразок, наслідує дорослих, діє як дорослий, але у формі сюжетно-рольової гри.

Сюжетно-рольова діяльність стає провідною діяльністю. Гра є провідною діяльністю дошкільників не тому, що займає найбільше вільного часу від сну в його житті, а тому , що зумовлює найважливіші зміни у психічних процесах і психічних особливостях його особистості. В ній виникають і диференціюються нові види діяльності, зокрема учіння (цілеспрямований процес засвоєння знань, оволодіння уміннями й навичками). Леонтьєв А.Н. відзначив, що причина перетворення гри на провідну діяльність дошкільняти полягає у розширенні усвідомлюваного нею предметного світу. До нього належать не лише предмети, які становлять найближче оточення дитини, з якими вона може сама діяти, а й предмети, дії дорослих, які для неї фізично не доступні [3]. У сюжетно-рольовій грі можна робити все, що недоступне в реальному житті: самостійно керувати автомобілем, літаком, робити покупки тощо. Для дошкільників 3-5 років у грі характерним є відтворення логіки реальних дій людей; змістом гри є предметні дії. Для дошкільників 5-7 років – реальних взаємин між людьми і змістом гри стають соціальні взаємини, суспільна суть діяльності дорослої людини. Д.Б.Ельконін писав: « Гра задовго до трудової діяльності орієнтує дитину в системі взаємовідносин » [8] . Рівень розвитку ігрової діяльності є також показником психічного розвитку дитини. Д.Б.Ельконін зауважив: «Чим краще дитина грається, тим краще вона підготовлена до школи » [8].

Гра створює можливості для розвитку та засвоєння етичних правил. Формуються внутрішні етичні норми. В емоційній сфері формуються моральні почуття. Важливе значення у формуванні моральних почуттів мають дитячі уявлення про позитивні еталони, що дозволяють передбачити емоційні наслідки власної поведінки. Таке емоційне передбачення грає вирішальну роль у формуванні моральної поведінки дошкільника (Запорожець О.В.). Розширюється самостійність дошкільника, розвивається самосвідомість, формується критична самооцінка. З'являється здатність до довільних форм поведінки.

У дошкільному віці в діяльності дитини з'являються елементи праці. Дошкільнят уже привчають до виконання окремих трудових завдань, причому розпочинають цю роботу в ігровій формі. Відсутність диференціації гри та праці - характерна особливість трудової діяльності молодших дошкільнят, яка до певної міри зберігається і в серднььому та старшому дошкільному віці.