ШКІЛЬНИЙ СВІТ

БІБЛІОТЕКА «ШКІЛЬНОГО СВІТУ»

НАМ 10 РОКІВ

Світлана Лук'янова

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТЕКСТОВИХ ЗАДАЧ АРИФМЕТИЧНИМИ СПОСОБАМИ

5–6 класи

МАТЕМАТИКА.БІБЛІОТЕКА, ІНФОРМАТИКА.БІБЛІОТЕКА

Бібліотека «Шкільного світу»
Заснована у 2003 р.

Світлана Лук'янова

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТЕКСТОВИХ ЗАДАЧ АРИФМЕТИЧНИМИ СПОСОБАМИ

5–6 класи

Математика. Бібліотека
Інформатика. Бібліотека

Київ
Видавничий дім «Шкільний світ»
Видавець Л.Галіцина
2006

ББК 74.262.21
Л84

Лук'янова, Світлана.
Л84 Розв'язування текстових задач арифметичними способами : 5—6 кл. — К. : Вид. дім «Шкіл. світ» : Вид. Л.Галіцина, 2006. — 128 с. — (Б-ка «Шкіл. світу»). — Бібліогр.: с.127.
ISBN 966-8651-59-6.
ISBN 966-420-099-9.
ISBN 966-356-133-5.

У книжці розглядаються різні арифметичні способи розв'язування текстових задач та пропонуються оригінальні методики навчання цього учнів 5–6-х класів. Автор розглядає близько 200 задач різних рівнів складності. До більшості з них запропоновано розв'язання (до деяких — кількома способами), кожне з яких реалізується тільки за допомогою арифметичних дій.

Для вчителів математики та студентів педагогічних навчальних закладів.

ББК 74.262.21

ISBN 966-8651-59-6 (б-ка «Шкіл. світу»)
ISBN 966-420-099-9 (Вид. дім «Шкіл. світ»)
ISBN 966-356-133-5 (вид. Л.Галіцина)

ЗМІСТ

ВСТУП

Традиційно розв'язування різних задач вважалось і предметом навчання математики, і ефективним засобом формування математичних знань і вмінь, розвитку інтелекту та виховання учнів. Тому текстові задачі вивчаються у курсі шкільної математики від першого до випускного класу. Спочатку за їх допомогою розкривають смисл арифметичних дій над числами та властивості цих дій. А згодом їх використовують для закріплення теоретичних знань під час розв'язування прикладних і практичних задач.

За час навчання в школі учні розв'язують значну кількість текстових задач, проте розв'язування таких задач залишається для них складним. Основна причина недостатньої сформованості в учнів умінь розв'язувати текстові задачі полягає у тому, що під час навчання математики як у початковій, так і в основній школах переважна більшість учнів не одержує достатніх знань про структуру задач, їх типи, методи та способи розв'язування. Розв'язуючи задачі, учні часто діють несвідомо, за зразком, що їм пропонують, не можуть самостійно знайти раціональний спосіб розв'язування. Серед інших причин такого стану – неправомірне зменшення використання арифметичних способів під час розв'язування текстових задач в основній школі та передчасний перехід до використання методу рівнянь.

Нині ситуація змінюється. Розгляд арифметичних способів розв'язування текстових задач передбачено програмою з математики для основної школи та підпорядковано таким цілям: 1) формування загального підходу, загальних умінь і здібностей із розв'язування будь-яких задач (зокрема і методом рівнянь); 2) ознайомлення та свідоме оволодіння математичними і загальнонауковими поняттями; 3) оволодіння поняттями «модель» і «математичне моделювання», ознайомлення із застосуванням математичного апарату до розв'язування задач прикладного та практичного змісту; 4) розвиток розумових здібностей учнів, їх творчого потенціалу.

Зауважимо, що задачі в шкільній математиці існують не ізольовано від решти навчального матеріалу, їх зміст узгоджується з програмовим теоретичним матеріалом, що вивчався, вивчається та буде вивчатися. За програмою з математики для 12-річної школи передбачено:

• **у 5-му класі:** аналіз залежностей між величинами (швидкість, час і відстань; ціна, кількість і вартість тощо) і розв'язування нескладних текстових задач на основі використання цих залежностей; розв'язування задач розрахункового характеру на основі використання властивостей арифметичних дій, задач на знаходження дробу від числа і числа за його дробом, відсотків від числа та числа за його відсотками; розв'язування задач прикладного змісту з використанням правила знаходження середнього арифметичного кількох чисел;

• **у 6-му класі:** розв'язування задач на дії з дробами; розв'язування трьох основних задач на відсотки, задач на пропорційні величини і пропорційний поділ;

• **у 7-му класі:** розв'язування текстових задач за допомогою лінійних рівнянь, при цьому рівняння розглядають як математичну модель задачі; розв'язування текстових задач за допомогою систем двох лінійних рівнянь з двома змінними;

• **у 8-му класі:** розв'язування квадратних рівнянь і рівнянь, що зводяться до них, як математичних моделей текстових задач;

• **у 9-му класі:** передбачено складання та розв'язування систем рівнянь з двома змінними як математичних моделей текстових задач; розв'язування задач, що передбачають виконання відсоткових розрахунків.

Ефективність навчання учнів підвищуватиметься, якщо об'єднати в окремі групи задачі, процес розв'язування яких має спільні специфічні особливості (схожий хід міркувань): задачі-розрахунки, сюжетні і типові задачі тощо. Не зайвим буде дотримання таких порад.

1) Для кращого засвоєння особливостей математичної структури типових задач і особливостей фабули сюжетних задач, кроків та способів розв'язування потрібно *відмовитись від змішаного порядку в їх розміщенні.* Задачі з різними сюжетними варіаціями слід розв'язувати компактно, ускладнюючи їх математичний зміст, не розглядати велику кількість однотипних задач (з метою уникнення механічного заучування способу розв'язування). Слід разом з учнями створювати евристичні схеми правил-орієнтирів використання типових способів розв'язування, уникаючи готових правил-рецептів. Значну увагу варто приділяти не тільки виявленню відмінностей між різними типами задач і способами розв'язування, але й з'ясуванню їх спільних рис, розкриттю їх зв'язків. Із розвитком умінь учнів використовувати різні способи розв'язування текстових задач в стандартних і ускладнених ситуаціях слід показувати учням можливості застосування щойно вивченого способу у ситуаціях, що вивчалося раніше.

2) Слід розглядати задачі різних видів і різної складності, зокрема і нестандартні, інакше в учнів виникне переконаність, що за зразком і без особливих зусиль розв'язуються всі текстові задачі.

3) Варто дотримуватися *поступовості* у розгляді як типів, так і способів розв'язування. Так сформовані вміння розв'язувати один тип задач сприятимуть вивченню задач іншого типу.

4) З метою запобігання ефекту «відчуження знань» і забезпечення зв'язку між початковою та основною школами на початку 5-го класу доцільно *повторити прості задачі*, що розкривають суть кожної з арифметичних дій і різні випадки їх застосування. Слід також звернути увагу на формування в учнів чітких уявлень про загальні способи (аналітичний і синтетичний) розв'язування задач-розрахунків і розвиток умінь застосовувати ці способи на практиці.

5) Доцільно навчати учнів *створенню* різного виду *моделей-замісників* (графічні схеми, таблиці, схематичні ілюстрації тощо) за текстами задач і правил-орієнтирів (евристичні приписи) типових способів розв'язування арифметичних задач.

6) Одним з основних результатів навчання учнів розв'язування текстових задач має бути *поповнення наявних учнівських знань* про задачу, її структурні елементи, про етапи процесу розв'язування (зокрема і вивчення різних способів аналізу тексту, пошуку плану та перевірки отриманого розв'язку).

7) Задача має бути цікавою для учнів своїм змістом, способом отримання відповіді і сприяти формуванню чітких уявлень про величини, що розглядаються. Числові дані повинні мати пізнавальну та практичну цінність. Корисно пропонувати задачі без конкретних числових даних з метою формування в учнів умінь користуватися довідниками та робити математичну обробку своїх спостережень і вимірювань.

8) Для самостійної роботи учнів слід добирати задачі після попереднього з'ясування рівня учнівських знань і вмінь, необхідних для їх розв'язування, та визначати різні варіанти можливої допомоги вчителя.

9) Під час розв'язування типових задач варто поєднувати *алгоритмічні та евристичні прийоми*, *репродуктивні та продуктивні методи* навчання.

10) Основним для розв'язування задач арифметичними способами є курс математики в 5–6-х класах; у 7–9-х класах слід використовувати типові задачі для пропедевтики та введення алгебраїчного методу, для ілюстрації зв'язків між різними навчальними предметами.

Розробкою методичних рекомендацій, пов'язаних із розв'язуванням текстових задач арифметичними способами, займалися багато видатних російських і українських математиків та методистів. Значна частина запропонованих ними вказівок не втратили актуальності й нині. Рекомендації з використання арифметичних способів під час розв'язування текстових задач в основній школі, що запропоновані в посібнику, враховують кращі досягнення минулого та недоліки їх практичного застосування.

розділ **1**

ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ТЕКСТОВІ ЗАДАЧІ ТА СПОСОБИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1.1. ТЕКСТОВА ЗАДАЧА ТА ЇЇ СТРУКТУРНА БУДОВА

Термін «задача» є одним із найуживаніших не лише в математиці, але й інших науках. У шкільній математиці *задачею* в широкому розумінні називають вимогу обчислити, перетворити, побудувати, довести чи дослідити що-небудь, або запитання, рівносильне такій вимозі.

Текстовою задачею будемо називати сформульовану природною мовою вимогу знайти невідоме число чи значення деякої величини на основі даних співвідношень між числами або значеннями величин. Текстові задачі можуть бути *абстрактного змісту*, коли у тексті залежності між числами описано словесно (задача 1) або з *певним сюжетом* (задача 2).

Задача 1. Знайти два числа, якщо одне з них на 18 більше за інше, а їх сума дорівнює 80.

Задача 2. Квиток для входу на стадіон коштував 16 грн. Після того, як плату за вхід знизили, кількість глядачів збільшилася на 50 %, а виручка виросла на 25 %. Скільки коштує квиток після зниження плати за вхід?

Є немало різноманітних сюжетів, які автори підручників і посібників використовують під час складання задач. Проте серед задач, що мають певну фабулу, доцільно окремо розглядати ті, в тексті яких описано кількісну сторону деякого явища або процесу, і цей опис суттєво впливає на пошук плану розв'язування (задачі на рух, роботу, купівлю тощо). Далі такі задачі називатимемо *сюжетними*.

Задача 3 (*задача на рух*). Лисиця побачила зайця, коли він був на відстані 600 м від неї. Зайцю до місця, де він міг би сховатися від лисиці, бігти 2 км 160 м. Чи впіймає лисиця зайця, якщо вона бігтиме зі швидкістю 870 м/хв, а заєць утікатиме від неї зі швидкістю 720 м/хв?

Задача 4 (*задача на спільну роботу*). У баку 360 л води. Через перший кран за одну хвилину витікає 18 л, а через другий – 12 л води. На скільки хвилин треба відкрити обидва крани, щоб спорожнити бак?

Поряд із сюжетними слід відокремити в окремі групи та розв'язувати задачі, які споріднені (мають спільні риси) або за математичною структурою, або за способом розв'язування. Такі задачі традиційно називають *типовими*.

Задача 5 (*на знаходження двох чисел за їх сумою та різницею*). Набір цукерок коштує 17 грн. За всі набори для учнів 5–А і 5–Б класів заплатили 1411грн. Скільки учнів у кожному класі, якщо набори для 5–А коштують на 119 грн менше, ніж набори для 5–Б класу?

Задача 6 (*на припущення з кратною залежністю між невідомими*). Під час екскурсії було куплено 78 дитячих квитків і 16 квитків для дорослих, причому за все було заплачено 31грн 50 к. Яка ціна квитків, якщо дитячий квиток у 3 рази дешевший, ніж квиток для дорослого?

Розв'язати задачу не можна, якщо не мати чіткого уявлення про її сюжет і структурну будову.

Під *структурною будовою* задачі розуміють сукупність усіх величин (відомих і невідомих) та їх числових значень і систему математичних співвідношень між цими величинами, вказаних явно чи неявно в тексті задачі.

З точки зору структурної будови у кожній задачі можна виділити:

1) числові значення величин, які називають *відомими* або *даними*;

2) деяку систему *залежностей*, що розкривають характер зв'язків між відомими та невідомими;

3) *вимогу* або *запитання*, на які потрібно дати відповідь, розв'язуючи задачу.

Числові значення величин і існуючі між ними залежності (кількісні та якісні характеристики об'єктів задачі та відношення між ними) називають *умовою* задачі. Як показує шкільна практика, значна частина учнів не розв'язує текстові задачі саме тому, що не може швидко та правильно виділити в тексті задачі її умову та вимоги. Для формування відповідних умінь учням слід пропонувати спеціальні завдання до задач.

Задача 7. У першому ящику є 16 кг яблук. Скільки кілограм груш у другому ящику, коли відомо, що груші важать на 4 кг менше, ніж яблука.

Завдання. 1) Прочитайте текст задачі. 2) Підкресліть умову однією рискою, а вимогу – двома. 3) Сформулюйте текст задачі так, щоб вимога формулювалася у вигляді запитального речення.

Задача 8. Скільки важить риба, якщо її хвіст важить 4 кг, голова важить стільки, скільки хвіст і половина тулуба, а тулуб – стільки, скільки важить голова і хвіст разом?

Завдання. 1) Прочитайте задачу. 2) Сформулюйте її так, щоб вимога завершувала текст і пропонувалася у вигляді наказового речення.

Розглядаючи різні варіанти зв'язків між умовою та вимогою, слід пояснити учням такі поняття, як «визначена задача», «невизначена задача», «перевизначена задача», «задача з альтернативними умовами», проілюструвавши сказане відповідними прикладами.

Задачу називають ***визначеною***, якщо умов (даних і залежностей) стільки, скільки необхідно та достатньо, щоб отримати відповідь (тобто розв'язати задачу). У ***невизначеної задачі*** умов недостатньо для отримання відповіді (у початковій школі такі задачі називають задачами ***з недостатніми даними***).

Задача 9. На чотирьох полицях були книжки. На першій полиці книжок було в 3 рази менше, ніж на другій, а на третій на 26 книг більше, ніж на четвертій. Скільки книжок було на кожній полиці окремо?

У цій задачі недостатня кількість даних: невідомо, скільки всього книжок було на чотирьох полицях; вказані не всі залежності між кількістю книг на різних полицях.

Якщо в задачі є умови, які не використовуються під час розв'язування задачі обраним способом, то задачу називають ***перевизначеною*** або ***з надлишковими даними***. Якщо зайва умова не суперечить решті умов, то задача має розв'язок.

Задача 10. З пункту A виїхав велосипедист зі швидкістю 12 км/год. Одночасно з ним із пункту B, що знаходиться від A на відстані 54 км, виїхав другий велосипедист. З якою швидкістю рухався другий велосипедист, якщо він проїхав до зустрічі на 6 км більше, ніж перший, а зустрілися велосипедисти через 2 год?

У цій задачі зайвими даними можуть бути: 1) швидкість першого велосипедиста – 12 км/год; 2) порівняння відстаней, які проїхали велосипедисти до зустрічі – на 6 км більше. Доцільно розглянути обидва випадки та сформулювати і розв'язати відповідні задачі вже без зайвих даних.

Трапляються випадки, коли умови суперечать одна одній.

Задача 11. Із міста *A* до табору вийшла група туристів і рухалася зі швидкістю 6 км/год. Через 1,5 год їм навздогін вирушив велосипедист, швидкість якого в 2,5 раза більша за швидкість туристів. Скільки потрібно часу велосипедисту, щоб наздогнати туристів, якщо він за одну годину долає відстань на 6 км більшу, ніж туристи?

Умови, які пов'язують швидкості туристів і велосипедиста, суперечать одна одній. Крім того, залежність «швидкість велосипедиста у 2,5 раза більша за швидкість туристів» задана явно, а «велосипедист за одну годину долає відстань на 6 км більшу, ніж туристи» – не явна.

Якщо залишити кратну залежність між швидкостями і відкинути різницеве порівняння «на 6 км», то через одну годину після свого виїзду з міста велосипедист наздожене туристів. Якщо вважати зайвою умову «у 2,5 раза», то зустріч туристів і велосипедиста відбудеться через 1,5 год.

Іноді зайві умови не впливають на відповідь, оскільки не використовуються під час розв'язування задачі.

Задача 12. За 3 дні туристи подолали маршрут довжиною 76 км. Автобусом вони проїхали на 12 км більше, ніж пройшли пішки, і на 10 км менше, ніж пропливли на катері. Скільки кілометрів туристи їхали на автобусі?

У цій задачі зайвою є інформація про тривалість подорожі – 3 дні.

Під час розв'язування *задач з альтернативними умовами* потрібно розглядати кілька можливих варіантів умов.

Задача 13. Від однієї пристані одночасно вирушають у рейс два катери. Власна швидкість першого катера 18 км/год, а другого – 21 км/год. На якій відстані один від одного будуть катери через 3 год, якщо швидкість течії річки 2 км/год?

У тексті не вказано, у яких напрямках відбувається рух катерів. Якщо катери рухаються в одному напрямку (рух з відставанням), то через 3 год між ними буде відстань 6 км. Напрямок руху (за течією або проти течії річки) не впливає на кінцевий результат. Якщо катери рухаються в протилежних напрямках, то через 3 год відстань між ними буде 117 км.

1.2. ЕТАПИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТЕКСТОВИХ ЗАДАЧ

Важливим є ознайомлення учнів з *етапами розв'язування текстових задач*.

У розширеному вигляді розв'язування текстової задачі можна подати як послідовність таких етапів:

1) аналіз задачі (предметно-змістовий або логіко-семантичний);
2) побудова моделі;
3) пошук способу розв'язування (складання плану розв'язування);
4) запис розв'язання;
5) перевірка розв'язку;
6) дослідження задачі та її розв'язання;
7) формулювання відповіді;
8) навчально-пізнавальний аналіз задачі та її розв'язання.

Найчастіше реалізовують тільки чотири етапи: аналіз задачі, складання плану розв'язування, запис розв'язання, формулювання відповіді, а на всіх етапах зупиняються лише під час розв'язування складних, проблемних задач або задач, що мають певне узагальнюючо-теоретичне значення. Проте сучасна орієнтація шкільної математичної освіти на розкриття змісту математичного моделювання посилює значимість другого етапу – побудови моделі задачі.

Охарактеризуємо деякі етапи розв'язування текстової задачі.

Аналіз задачі може проводитися у двох напрямках:

1) предметно-змістовий аналіз – декодування умови задачі в цілому, тобто створення уявного образу сюжету задачі;

2) логіко-семантичний аналіз – виявлення величин, їх значень і зв'язків, які задано в тексті задачі, розбиття тексту на елементарні умови та вимоги.

Результатом логіко-семантичного аналізу тексту є відповіді на запитання:

• Які величини характеризують кількісну сторону явищ, процесів або подій сюжету задачі?

• Скільки і які значення кожної величини задано явно чи неявно в тексті?

• Який характер кожної величини: відома, допоміжна невідома, шукана невідома?

• Якими співвідношеннями пов'язані між собою значення величин?

• Які значення є головними в кожному із співвідношень, які слова-ознаки вказують на це?

• Як пов'язані між собою виявлені співвідношення?

Залежно від конкретної задачі, аналіз може бути більш або менш розширеним. Довільний аналіз доцільно виконувати у випадку, коли задача нового або складного сюжету (структури).

Аналіз умови задачі буде глибшим, послідовнішим, повнішим та ефективнішим, якщо запропонувати учням дотримуватися таких *кроків-порад*:

1) прочитай текст задачі та визнач, про який об'єкт, явище, подію або процес ідеться в її тексті;

2) установи, які моменти (випадки, епізоди) цього явища (процесу) розглядаються;

3) назви величини, що характеризують (описують) цей процес;

4) знайди числові значення, які характеризують кожну з цих величин;

5) визнач, які величини відомі, а які – шукані;

6) з'ясуй співвідношення між даними величинами;

7) результат проведеного аналізу зобрази у вигляді схеми, таблиці, ілюстрації, графів тощо.

Задача 14. Катер пройшов відстань між двома пристанями *A* та *B* в обидва кінці за 2 год 10 хв, причому на рух за течією він витратив часу на 30 хв менше, ніж коли йшов проти течії. Чи вистачить туристам 4 год, щоб подолати цю відстань на плоту та вчасно дістатися до пункту *B*, якщо відстань між *A* та *B* становить 20 км?

1. *Предметно-змістовий аналіз.*

У задачі розглядається рух об'єктів за течією та проти течії річки. Йдеться про два об'єкти: катер і пліт. Катер долає відстань між двома пристанями в двох напрямках: за течією та проти течії річки. На подолання відстані від *A* до *B* і в зворотному напрямку йому потрібен різний час, оскільки його швидкість руху за течією річки більша за власну (тобто швидкість, з якою він може рухатися в стоячій воді, наприклад по озеру) на швидкість річки, а фактична швидкість руху проти течії – менша від власної швидкості на ту саму швидкість течії. Відомо, що пліт власної швидкості не має і може рухатися тільки за течією річки (тобто його власна швидкість дорівнює швидкості течії).

2. *Логіко-семантичний аналіз.*

Процес руху катера і плота можна охарактеризувати залежністю між трьома величинами: відстань (шлях), час і швидкість руху. Відстань дорівнює добутку швидкості на час, що був витрачений на її подолання. У цій задачі явно дано значення шляху, який долають задані об'єкти. Час, що катер окремо витратив на подолання шляху від *A* до *B* (нехай цей напрямок збігається з напрямком руху течії річки) і на зворотній шлях (проти течії) невідомі, але відомі їх сумарне значення та величина, на яку час руху за течією менший від часу руху проти течії. Невідомим є також час руху плота.

Про швидкості об'єктів, що рухаються, можна сказати таке: 1) власна швидкість катера невідома; 2) швидкість течії річки (відповідно і швидкість руху плота) невідома; 3) швидкість руху катера за течією невідома; 4) швидкість руху катера проти течії невідома.

У задачі шуканим є час руху плота, який потрібно буде порівняти з даною величиною (4 год). Між відомими та невідомими величинами є такі зв'язки (співвідношення):

1) швидкість руху за течією є сумою власної швидкості катера і течії річки;

2) швидкість руху проти течії є різницею власної швидкості катера і течії річки;

3) відома відстань руху за течією (20 км) є добутком часу та швидкості руху катера за течією;

4) відома відстань руху катера проти течії (20 км) є добутком часу і швидкості руху катера проти течії;

5) відома відстань руху плота за течією (20 км) є добутком часу його руху та швидкості течії.

Після детального аналізу можна розв'язати задачу, використавши такий прийом спрощення умови задачі, як виділення з тексту допоміжних підзадач, їх розв'язування та наступне переформулювання тексту вихідної задачі. Такий прийом трансформації тексту задачі нерідко доцільний і під час пошуку плану розв'язування. Для задачі 14 підзадачі та переформульовані вихідні задачі можуть бути такими.

Підзадача 1. Катер пройшов відстань між двома пристанями A та B в обидва кінці за 2 год 10 хв, причому на рух за течією він витратив часу на 30 хв менше, ніж коли плив проти течії. Знайдіть час руху катера за течією та проти течії річки.

Розв'язання

Подамо час в однакових одиницях вимірювання, а саме – у хвилинах:

2 год 10 хв = 130 хв.

1) 130 – 30 = 100 (хв) – стільки часу витратив би катер, долаючи шлях в обох напрямках за однаковий час, що дорівнює часу руху за течією.

2) 100 : 2 = 50 (хв) – час руху катера за течією.

3) 50 + 30 = 80 (хв) – час руху катера проти течії.

Тепер початкове формулювання задачі можна замінити на таке.

Задача 14*. На рух за течією між двома пристанями A та B катер витратив 50 хв, а проти течії цю саму відстань він проплив за 80 хв. Чи вистачить туристам 4 год, щоб подолати на плоту відстань між A та B, що становить 20 км, і вчасно дістатися до місця призначення?

Підзадача 2. Відстань між двома пристанями A та B становить 20 км. Її катер подолав за 50 хв, коли рухався за течією, та за 80 хв, коли йшов проти течії. Знайдіть швидкість руху катера за течією та проти течії.

Розв'язання

Подамо спочатку час руху у годинах: $50 \text{ хв} = \dfrac{50}{60} \text{ год} = \dfrac{5}{6} \text{год}.$

1) $20 : \dfrac{5}{6} = 24$ (км/год) – швидкість руху катера за течією;

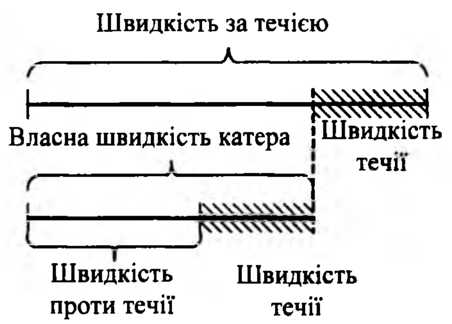
2) $20 : \dfrac{8}{6} = 15$ (км/год) – швидкість руху катера проти течії.

Видозмінена початкова задача матиме тепер таке формулювання.

Задача 14.** Щоб подолати відстань між двома пристанями A та B, яка становить 20 км, катер плив за течією зі швидкістю 24 км/год, а проти течії – 15 км/год. Чи вистачить туристам 4 год, щоб подолати на плоту відстань між A та B та вчасно дістатися до місця призначення?

Підзадача 3. Катер рухається за течією зі швидкістю 24 км/год, а проти течії – 15 км/год. Знайдіть швидкість течії.

Зауваження. Оскільки швидкість катера за течією є сумою власної швидкості та швидкості течії, а швидкість катера проти течії є різницею власної швидкості та швидкості течії, то задача знаходження власної швидкості і швидкості течії річки за відомими швидкостями руху катера за течією та проти течії є типовою задачею на знаходження двох чисел за їх сумою та різницею. Для кращого унаочнення умови можна використати схему та формули.



$v_{\text{за теч.}} = v_{\text{вл.}} + v_{\text{теч.}}$

$v_{\text{пр теч.}} = v_{\text{вл.}} - v_{\text{теч.}}$

2

Розв'язання

1) 4 –15= 9 (км/год) – подвоєна швидкість течії річки.

2) 9 : 2 = 4,5 (км/год) – швидкість течії.

Остання переформульована задача матиме вигляд.

Задача 14*.** Швидкість течії річки – 4,5 км/год. Чи вистачить туристам 4 год, щоб подолати на плоту відстань між двома пристанями A та B, що становить 20 км, і вчасно дістатися до місця призначення?

Розв'язання

$20 : 4{,}5 \approx 4{,}4...$ (год) – час руху плота.

Оскільки 4 год, що дано в умові задачі, менші ніж отриманий час руху $\approx 4{,}4$, то робимо висновок: туристам не вистачить часу, щоб вчасно дістатися до місця призначення.

Ефективним засобом навчання учнів логіко-семантичному аналізу є завдання на трансформацію (перетворення) тексту задачі. Наведемо приклад.

Задача 15. У 5–А класі учнів на 5 $\frac{\text{більше}}{\text{менше}}$, ніж у 5–Б, а разом у двох класах 57 учнів. Скільки учнів навчається в кожному класі? Сформулюйте дві задачі, використовуючи слова «більше» та «менше». Поміркуйте, як впливає заміна слова «більше» на «менше» на хід розв'язування.

Часто проведення аналізу збігається або є початком *побудови моделі задачі* (короткого запису умови).

Побудова моделі сюжетної задачі може проводитися з різною метою: 1) для фіксації результатів аналізу, якщо побудова відбувається під час аналізу; 2) для переформулювання задачі (оскільки модель дає можливість подивитись на задачу з різних точок зору); 3) для пошуку способу розв'язування.

Незалежно від мети побудови, модель є одним із засобів, який полегшує сприймання та осмислення змісту задачі, виявлення найважливіших елементів, залежностей тощо. Крім того, самостійно виконаний учнями короткий запис умови дає можливість вчителю з'ясувати, чи правильно вони розуміють залежності між відомими та невідомими величинами, чи всі зв'язки виявлено тощо.

У методичній літературі розрізняють такі основні види короткого запису умови задачі: *схематичний* (*структурний, табличний*) та *графічний.*

Схематичний запис – це спрощений запис умови задачі (з виділенням окремих логічних її частин) в наочній і зручній для сприймання формі, зокрема у вигляді: 1) числових даних і запитання задачі; 2) числових даних з коротким поясненням їх змісту; 3) умови задачі у вигляді таблиці.

Зауважимо, що короткий запис умови не можна зводити до простого переписування тексту за допомогою скорочення кожного слова.

Графічний запис сприяє кращому розумінню умови задачі та усвідомленню залежностей між даними і шуканими величинами, оскільки активізує зорове сприймання інформації. Проте графічні ілюстрації не потрібні під час розв'язування нескладних задач або у випадках, коли їх досить важко зробити.

У деяких випадках можливе поєднання структурного запису умови задачі з рисунками чи ілюстраціями з метою конкретизації чи додаткового роз'яснення змісту задачі. (Зауважимо, що графічний запис умови задачі не можна ототожнювати з графічним методом розв'язування задач.) Єдиних правил-орієнтирів щодо вибору тієї чи іншої форми короткого запису не можна запропонувати, оскільки на такий вибір впливає і фабула задачі, і складність її структури, і попередній досвід учнів щодо використання певних схем до розв'язування окремих типів задач тощо.

Задача 16. У майстерні з 560 аркушів паперу виготовили 60 зошитів двох видів, витративши на кожен зошит одного виду 8 аркушів, а другого виду – 12 аркушів. Скільки виготовили зошитів кожного виду окремо?

Запишемо коротку умову задачі у вигляді таблиці 1.

Таблиця 1

Вид зошита	Перший	Другий
На 1 зошит	8 аркушів	12 аркушів
Усього аркушів	560	
Кількість зошитів	?	?
Усього	60	

Задача 17. Першого дня турист пройшов $\frac{10}{31}$ усього шляху, другого $\frac{10}{31}$ того, що пройшов першого дня, а третього – решту шляху, причому третього дня він пройшов на 12 км більше, ніж другого. Скільки кілометрів проходив турист кожного з трьох днів?

Короткий запис умови задачі подамо у вигляді таблиці 2.

Задача 18. За 4 год за течією річки катер пройшов 85,6 км, а проти течії за 3 год – 46,2 км. Знайдіть швидкість катера в стоячій воді та швидкість течії?

Короткий запис умови задачі подамо у вигляді таблиці 3.

Таблиця 2

Дні	Шлях (частини)	Шлях (км)	Залежності
I день	$\frac{10}{31}$ від усього шляху	?	–
II день	$\frac{9}{10}$ від пройденого 1-го дня	?	–
III день	Решта частин	?	На 12 км більше, ніж 2-го дня

Таблиця 3

Напрямок руху	Швидкість V (км/год)	Шлях s (км)	Час t (год)
За течією	?	85,6	4
Проти течії	?	46,2	3

Зауваження. Записуючи коротку умову у вигляді таблиці, радимо звертати увагу на одиниці вимірювання кожної з величин. Можна їх записувати поряд із назвами відповідних величин (задачі 17, 18), а можна вказувати біля значень (задача 19). Якщо в тексті значення деякої величини запропоновано у різних одиницях вимірювання (наприклад, одне значення часу дано в годинах, а інше – в хвилинах), то потрібно спочатку записати значення цієї величини в одних одиницях вимірювання, а тоді скласти таблицю.

Задача 19. Сплавили зливок срібла 640-ї проби масою 240 г зі зливком невідомої проби та отримали 640 г срібла 700-ї проби. Знайдіть пробу другого зливка.

Короткий запис умови задачі подамо у вигляді таблиці 4.

Таблиця 4

Вид зливка	Маса	Проба
I злиток	240 г	640
II злиток	?	?
Сплав	640 г	700

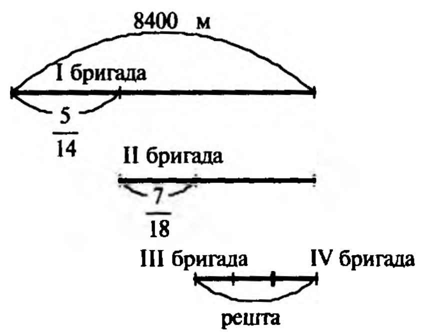
Задача 20. На складі було 6540 ц картоплі. У перший магазин зі складу завезли 1243 ц картоплі, у другий – на 387 ц менше, ніж у перший, а у третій – на 968 ц менше, ніж у перший і другий разом. Скільки центнерів картоплі залишилося на складі?

Короткий запис умови задачі подамо у вигляді структурної схеми.

На складі було — 6540 ц
У I магазин — 1243 ц
У II магазин — ? на 387 ц ?
У III магазин — ? на 968 ц ?
Залишилося — ?

Задача 21. Чотири бригади робітників ремонтували шосе на ділянці довжиною 8400 м. Перша бригада відремонтувала $\frac{5}{14}$ усього шосе, друга – $\frac{7}{18}$ того, що залишилося, а третя і четверта – решту, причому третя відремонтувала вдвічі більше, ніж четверта. Скільки метрів шосе відремонтувала третя бригада?

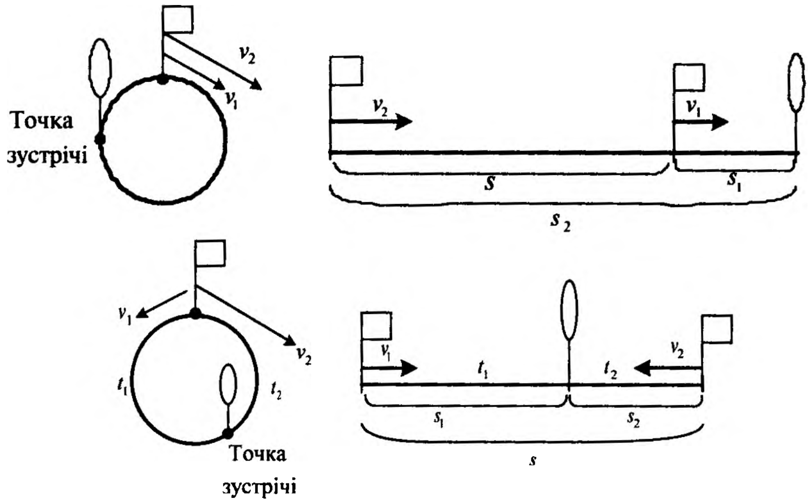
Короткий запис умови задачі подамо у вигляді графічної схеми.



Задача 22. По колу довжиною 120 м починають рухатися з однієї точки два велосипедисти з постійними швидкостями. Якщо вони рухатимуться в одному напрямку, то один наздоганятиме іншого через кожні 60 с. Якщо рухатимуться назустріч, то зустріч буде відбуватися через 15 с. Знайдіть швидкості велосипедистів.

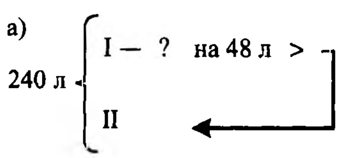
Короткий запис умови задачі подамо у вигляді графічних схем.

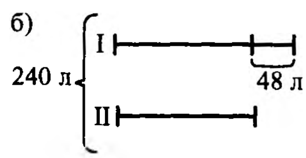
Зауваження. Ця, на перший погляд, складна задача на рух об'єктів по замкненій траєкторії за рахунок використання графічних схем перетворюється в добре відомі учням випадки руху по прямій навздогін і назустріч.



Цікавими і потрібним є завдання на складання задач різних сюжетів за готовими схемами або таблицями. Цінність таких завдань полягає, найперше, в тому, що учні мають можливість наочно переконатися: одна і та сама схема може бути використана під час розв'язування різних задач.

Задача 23. У двох діжках 240 л води. Скільки літрів води в кожній діжці, якщо в першій на 48 л більше, ніж у другій? Проаналізуйте наведені нижче схеми (а) та (б) тексту задачі. Яка з них зрозуміліша для пошуку способу розв'язування задачі?





Задача 24. Установіть відповідність між текстами задач і схемами. Якщо потрібно, то доповніть схеми.

А. У першому ящику 16 кг яблук, а у другому – 4 кг. Скільки кілограмів яблук в обох ящиках?

В. У Марини 16 кульок, а у Наталки на 4 більше. Скільки кульок у дівчаток разом?

1. I — 16 ?
II — 4

2. I — 16 ?
II — у 4 рази ?

C. На столі 16 зошитів і 4 підручники. Чого більше і на скільки?

D. У шкільному саду 16 груш, а яблунь у 4 рази більше. Скільки всього дерев у шкільному саду?

E. У Оксани 16 фломастерів, а у Надійки – на 4 менше. Скільки фломастерів у дівчаток разом?

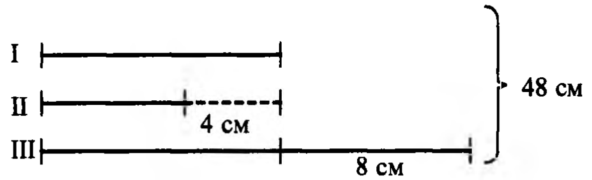
3. I — 16, II — 4 } ?

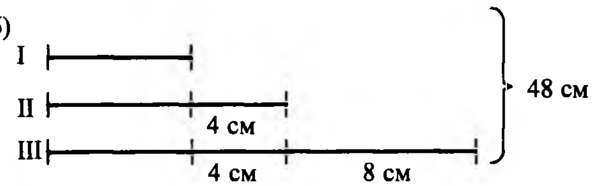
4. I — 16, II — на 4 < } ?

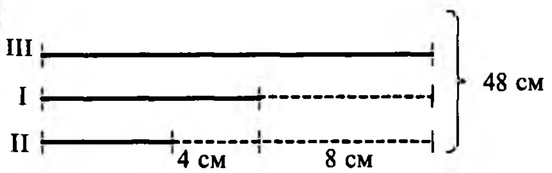
5. I — 16, II — на 4 > } ?

Задача 25. Периметр трикутника 48 см. Друга його сторона на 4 см менша за першу, а третя на 8 см більша за першу. Поставте логічні запитання та розв'яжіть утворену задачу.

Зауваження. Умову цієї задачі, залежно від поставленого запитання, можна зобразити різними схемами. На схемі (а) довжини сторін порівнюються з першою стороною. Тому її доцільно використати у випадку вираження невідомих довжин другої та третьої сторін через першу. На схемі (б) звертається увага на порівняння довжин першої та третьої сторін із довжиною другої сторони, а на схемі (в) – довжини першої та другої сторін. Перевага використання конкретної схеми буде відчутною у випадку, коли в тексті задачі є вимога знайти довжину тільки однієї зі сторін.

а)


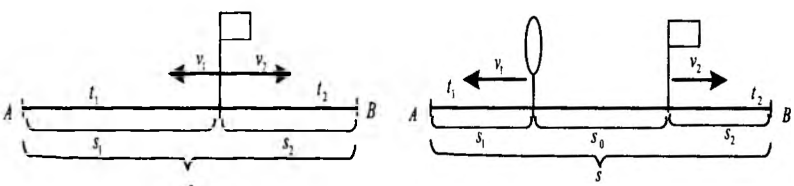
б)


в)


Короткий запис умови – не самоціль, а лише допоміжний засіб під час розв'язування задач.

Задача 26. За даними графічними схемами складіть задачі на рух у різних напрямках, якщо об'єкти починають рухатися: а) з одного пункту; б) з різних пунктів.

Складіть за отриманими текстами табличні схеми.



Складання плану є третім етапом розв'язування текстових задач. Для задач відомого типу основою плану розв'язування є кроки типового способу, а сам план може бути посиланням на тип даної задачі та відповідний йому типовий спосіб розв'язування.

Задача 27. З двох міст, відстань між якими 152 км, одночасно виїхали назустріч один одному два велосипедисти. Один рухався зі швидкістю 18 км/год, а другий – 20 км/год. Яку відстань проїхав кожен із велосипедистів до зустрічі?

Зауваження до пошуку плану розв'язування. Оскільки час руху обох велосипедистів однаковий, то відстані, які вони проїдуть до зустрічі, будуть прямо пропорційні до їх швидкостей. Отримуємо задачу про поділ числа (152 км) у певному відношенні (18 : 20 = 9 : 10). Якщо відразу не можна визначити, які дії чи який арифметичний спосіб потрібно застосувати, щоб знайти розв'язок, то для пошуку способу розв'язування можна використати графічні ілюстрації. Під час виконання перетворень графічних схем на основі певних логічних міркувань учні краще засвоюють кроки типових арифметичних способів. І, як показує досвід, знайдені особисто ними способи розв'язування задач краще запам'ятовуються і частіше використовуються.

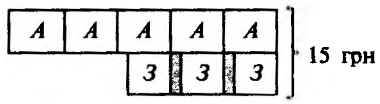
Наведемо приклад пошуку плану розв'язування задачі на заміну одного невідомого іншим. Вважатимемо, що учні задачу цього типу розв'язують уперше.

Задача 28. П'ять альбомів і три зошити коштують 15 грн. Альбом на 1грн 40 к. дорожчий за зошит. Скільки коштують окремо зошит і альбом?

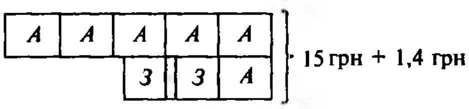
Зауваження. Дану задачу можна розв'язати, застосувавши властивість дії додавання: якщо один із доданків збільшити на деяке число, то і сума збільшиться на те саме число.

Пошук плану

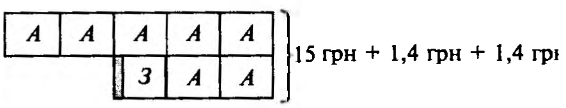
Умову задачі показано на схемі.



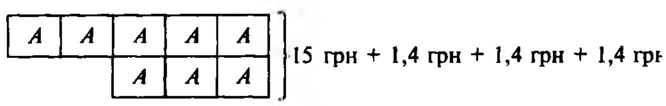
Крок 1. Нехай замість одного із зошитів купили альбом. Тоді всього буде куплено 6 альбомів і 2 зошити. Вартість покупки стане на 1 грн 40 к. більшою.



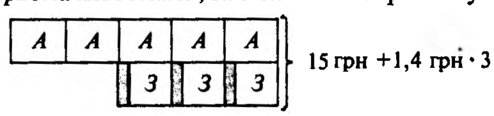
Крок 2. Знову замінимо один зошит на альбом, тобто купуватимемо 7 альбомів і 1 зошит. Вартість покупки знову збільшиться на 1 грн 40 к.



Крок 3. Замінимо ще один зошит на альбом, тобто купуватимемо 8 альбомів. Вартість нової покупки знову збільшиться на 1 грн 40 к.



Далі потрібно використати схему, яка показує одночасну заміну всіх трьох зошитів трьома альбомами, та скласти план розв'язування.



План

1. Знайти, на скільки буде дорожчою покупка, якщо замість 3-х зошитів купити 3 альбоми.

2. Знайти нову вартість усієї покупки, тобто 8 альбомів.

3. Знайти ціну одного альбому, а потім ціну одного зошита.

Такі детальні перетворення потрібні лише під час першого ознайомлення учнів із даним способом. Надалі можна використовувати лише останню схему.

Можна запропонувати розв'язати цю задачу усно іншим способом, замінивши більше невідоме меншим, тобто купувати замість альбомів зошити.

Під час розв'язування складної задачі можна:

1) розбити задачу на стандартні (типові) чи елементарні (на одну дію) задачі;

2) замінити розв'язування задачі послідовним розв'язування простіших задач, що утворюються на основі поданих в тексті залежностей через подальше переформулювання початкового тексту задачі (як показано на прикладі задачі 14);

3) ввести в умову допоміжний елемент, наприклад умовну одиницю, що замінить невідому відстань або виконану робітником роботу тощо.

Указані прийоми спрощення розв'язування задачі можуть бути використані як під час аналітичного, так і синтетичного методів міркувань.

Розв'язуючи задачі *синтетичним методом*, рухаються від умови до шуканого, тобто виводять наслідки з того, що дано, а план або проговорюють усно, або записують у вигляді настанов чи запитань. Цьому методу надається перевага в початковій школі та в 5-6-х класах основної школи.

Для прикладу складемо план розв'язування задачі 27 із використанням синтетичного методу.

Попередній аналіз. Оскільки велосипедисти почали рух назустріч одночасно і їх швидкості відомі, то можемо спочатку знайти швидкість зближення (тобто, скільки кілометрів вони проїжджають за 1 год назустріч один одному), а потім час, який вони їхали до зустрічі. Якщо відомий час руху і швидкість кожного з велосипедистів, то можемо знайти відстань, яку до зустрічі проїхав кожен із них.

План

1. Знайти швидкість зближення велосипедистів.
2. Знайти час руху велосипедистів до зустрічі.
3. Знайти відстань, яку кожен із велосипедистів проїхав до зустрічі.

При синтетичному методі міркувань виділення й розв'язування окремих простих задач здебільшого ведеться паралельно. Тому можлива поява помилок, що стосуються зіставлення та вибору даних, постановки запитань тощо.

Якщо пошук плану розв'язування відбувається з використанням *аналітичного методу*, то міркування ведуться від шуканого до даних. Такий шлях сприяє свідомому пошуку розв'язання задачі, бо унеможливлює випадкове зіставлення даних і шуканих величин задачі.

Здебільшого під час розв'язування текстової задачі аналітичний метод використовують для попереднього аналізу задачі, а сам план складають за

Задача 29. Автомобіль рухався 3 год до зупинки зі швидкістю 62 км/год і 2 год після зупинки зі швидкістю 56 км/год. З якою середньою швидкістю рухався автомобіль?

Аналіз задачі

Для визначення середньої швидкості потрібно знати, яку загальну відстань проїхав автомобіль і за який час. Щоб знайти, скільки всього годин був у дорозі автомобіль, треба знати, скільки годин він був у дорозі до зупинки та після неї. Щоб знайти загальну відстань, яку проїхав автомобіль, треба знати, скільки кілометрів він проїхав до зупинки та після неї.

План

1. Знайти відстань, що проїхав автомобіль зі швидкістю 62 км/год за 3 год.
2. Знайти відстань, що проїхав автомобіль за 2 год зі швидкістю 56 км/год.
3. Знайти всю відстань.
4. Знайти час руху до зупинки та після неї.
5. Знайти середню швидкість руху.

Якщо учням важко складати план розв'язування задачі самостійно, використовуючи синтетичний або аналітичний метод, можна запропонувати їм робити записи у вигляді таблиці, де у 2-й стовпець записувати інформацію про те, що треба знайти, у 3-й – що для цього треба знати, у 4-й – дію, якою знаходити невідоме. Складаючи таку таблицю, 2-й і 3-й стовпці заповнюємо, рухаючись «згори вниз», а 4-й – «знизу вгору».

№ з/п	Щоб визначити:	Треба знати:	Дія
1	Середню швидкість автомобіля	Яку відстань проїхав автомобіль і за який час	...
2	Скільки часу був автомобіль у дорозі	Час, який витратив на дорогу автомобіль до зупинки і після неї	...
3	Яку відстань проїхав автомобіль	Відстань, що проїхав автомобіль до зупинки і після неї	186 + 112 =
4	Яку відстань проїхав автомобіль після зупинки	Швидкість руху і витрачений час	$56 \cdot 2 = 112$ (км)
5	Яку відстань проїхав автомобіль до зупинки	Швидкість руху і витрачений час	$62 \cdot 3 = 186$ (км)

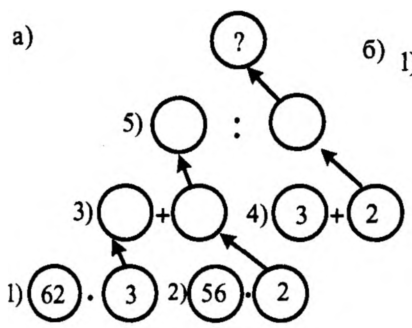
Якщо задачу розв'язуватимемо синтетичним методом, то всі стовпці таблиці заповнюються «згори вниз».

№ з/п	Знаючи:	Можна знати:	Дія
1	Швидкість руху автомобіля і витрачений ним час до зупинки	Яку відстань проїхав автомобіль до зупинки	$62 \cdot 3 = 186$ (км)
2	Швидкість руху автомобіля і витрачений ним час після зупинки	Яку відстань проїхав автомобіль після зупинки	$56 \cdot 2 = 112$ (км)
3	Відстань, що проїхав автомобіль до зупинки і після неї	Яку відстань проїхав автомобіль	$186 + 112 = \ldots$
4	Час, який витратив на дорогу автомобіль до зупинки і після неї	Скільки часу був автомобіль у дорозі	...
5	Яку відстань проїхав автомобіль і за який час	Середню швидкість автомобіля	...

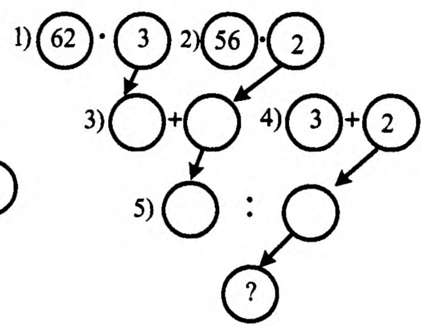
Такі таблиці доцільно використовувати для навчання розв'язування текстових задач тих учнів, які ще не вміють складати план і виконувати за ним відповідні дії.

Для складання плану також можна використати план-схему «дерево міркувань», що допоможе учням краще усвідомити процес розв'язування, застереже від виконання зайвих кроків. До задачі 29 для аналітичного та синтетичного методів міркувань відповідні «дерева міркувань» подано на схемах (а) та (б).

а)



б)



Якщо під час аналізу задачі та пошуку плану її розв'язування на дошці зобразили «дерево міркувань», то, записуючи розв'язання, замінюємо знаки питання відповідними числовими значеннями.

Щоб навчити учнів самостійно складати план розв'язування задачі, доцільно пропонувати їм завдання такого типу:

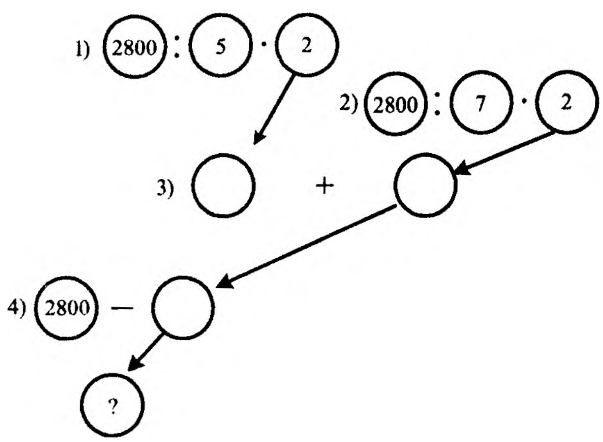
1) розв'язати задачу за готовим словесним планом (послідовністю запитань, речень-порад) або схемою «дерево міркувань» із детальним (усним) обґрунтуванням дій, що виконуються;

2) скласти числовий вираз за схемою «дерева міркувань»;

3) скласти план розв'язування задачі за вже виконаними діями;

4) порівняти плани розв'язування задачі різними способами з метою виявлення найдоцільнішого з них тощо.

Задача 30. Фермер відправив у три магазини 2800 кг яблук. У перший магазин він відправив $\frac{2}{5}$ усіх яблук, у другий – $\frac{2}{7}$ усіх яблук, а в третій – решту яблук. Скільки яблук одержав кожен магазин? Поясніть розв'язання задачі, використовуючи схему.



Задача 31. Два велосипедисти, рухаючись назустріч один одному, проїхали 108 км за 4 год. З якою швидкістю рухався кожний із велосипедистів, якщо перший до зустрічі проїхав на 12 км більше, ніж другий? Розгляньте запропоновані способи розв'язування. Порівняйте їх і поясніть, які міркування було проведено для кожного дії.

Розв'язання 1

1) 108 : 4 = 27 (км/год). 2) 12 : 4 = 3 (км/год).

3) (27 – 3) : 2 = 12 (км/год). 4) 12 + 3 = 15 (км/год).

Розв'язання 2

1) (108 – 12) : 2 = 48 (км). 2) 48 + 12 = 60 (км).

3) 48 : 4 = 12 (км/год). 4) 60 : 4 = 15 (км/год).

Відповідь-пояснення до розв'язання 1

1. Знайти швидкість зближення велосипедистів.

2. Знайти, на скільки швидкість першого велосипедиста була більша за швидкість другого.

3. Врахувавши, що відомі сума швидкостей велосипедистів і їх різницеве порівняння, використати типовий спосіб розв'язування задач на знаходження двох чисел за їх сумою та різницею (наприклад, виключення одного з невідомих) і знайти швидкість другого велосипедиста.

4. Знайти швидкість першого велосипедиста.

Відповідь-пояснення до розв'язання 2

1. Врахувавши, що відомі сума відстаней, які проїхали два велосипедисти, і їх різницеве порівняння, використати типовий спосіб розв'язування задач на знаходження двох чисел за їх сумою та різницею (наприклад, виключення одного з невідомих) і знайти шлях, що подолав другий велосипедист.

2. Знайти шлях, що подолав перший велосипедист.

3. Знайти швидкість другого велосипедиста.

4. Знайти швидкість першого велосипедиста.

Наступним етапом процесу розв'язування задачі є *виконання плану*, тобто *запис розв'язання* задачі.

Якщо задача добре відома учням, то її розв'язання можна записати у вигляді числового виразу без додаткових письмових пояснень. У випадку, коли задача складна за своєю математичною структурою, способом розв'язування або є новою чи недостатньо засвоєною учнями з точки зору сюжетних залежностей між величинами, потрібно давати додаткові письмові пояснення. Вибір форми пояснення визначається рівнем підготовки учнів, складністю задачі та поставленою метою. Наведемо приклади можливих записів розв'язання до задач різних сюжетів і типів.

1. Попереднє складання плану розв'язування задач із наступними обчисленнями.

Задача 32. Рухаючись по озеру, катер пройшов відстань 52 км без зупинок за 3 год 15 хв. Знайдіть швидкість руху катера за течією річки, якщо, рухаючись проти течії річки, він пройшов 42 км за 3 год.

План

1. З якою швидкістю катер рухався по озеру, або яка власна швидкість катера?

2. З якою швидкістю катер рухався проти течії?

3. Яка швидкість течії річки?

4. З якою швидкістю катер рухатиметься за течією річки?

Розв'язання

1) $52:3\frac{1}{4}=52:\frac{13}{4}=16$ (км/год). 2) $42:3=14$ (км/год).

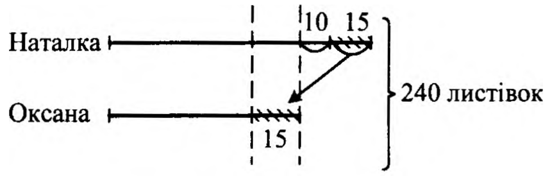
3) $16-14=2$ (км/год). 4) $16+2=18$ (км/год).

Відповідь. Швидкість катера за течією річки 18 км/год.

Задача 33. У Наталки та Оксанки разом 240 листівок. Після того, як Наталка подарувала Оксанці 15 листівок, у неї ще залишилося на 10 листівок більше, ніж у Оксанки. Скільки листівок було спочатку у кожної дівчинки?

Зауваження. Це задача на знаходження двох чисел за їх сумою і різницею. Для її розв'язування можна використати або спосіб виключення одного з невідомих (заміною його іншим на основі різницевої залежності між невідомими, що задано в умові задачі), або спосіб припущення. Зазвичай складання плану до задач цього типу в учнів не викликає труднощів, оскільки з такими задачами вони ознайомлені в початковій школі.

Щоб уникнути можливих помилкових міркувань щодо кількості листівок у Наталки, можна розглянути графічну схему.



План

1. На скільки листівок було більше у Наталки?
2. Скільки листівок було б разом у дівчаток, якщо б у кожної було їх стільки, як у Оксанки?
3. Скільки листівок було спочатку у Оксанки?
4. Скільки листівок було спочатку у Наталки?

Розв'язання

1) $15+15+10=40$ (листівок). 2) $240-40=200$ (листівок).

3) $200:2=100$ (листівок). 4) $100+40=140$ (листівок).

Відповідь. У Наталки було 140 листівок, у Оксанки – 100 листівок.

2. Розв'язання задач за запитаннями з наступним виконанням обчислень.

Задача 34. Два майстри, працюючи разом, можуть виконати замовлення за 10 год. Майстри розпочали роботу одночасно та пропрацювали 4 год. Потім перший майстер почав виконувати інше завдання, а другий майстер завершив роботу через 18 год. За скільки годин, працюючи окремо, кожний із майстрів може виконати замовлення?

Розв'язання

Кількість роботи, яку потрібно виконати, приймаємо за умовну одиницю.

1) Яку частину замовлення виконують обидва майстри за 1 год?

$$1:10=\frac{1}{10}\text{ (замовлення).}$$

2) Яку частину замовлення виконали обидва майстри за 4 год?

$$\frac{1}{10}\cdot 4=\frac{2}{5}\text{ (замовлення).}$$

3) Яку частину замовлення виконав другий майстер за 18 год?

$$1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}\text{ (замовлення).}$$

4) За скільки годин другий майстер один може виконати замовлення?

$$18:\frac{3}{5}=30\text{ (год).}$$

5) Яку частину замовлення виконував другий майстер за 1 год?

$$1:30=\frac{1}{30}\text{ (замовлення).}$$

6) Яку частину замовлення виконує перший майстер за 1 год?

$$\frac{1}{10}-\frac{1}{30}=\frac{1}{15}\text{ (замовлення).}$$

7) За скільки годин перший майстер може виконати все замовлення?

$$1:\frac{1}{15}=15\text{ (год).}$$

Відповідь. Перший майстер може виконати все замовлення за 15 год, а другий – за 30 год.

3. Розв'язання задач за запитаннями з повним формулюванням відповідних простих задач.

Задача 35. Для очищення зерна на елеваторі поставили дві машини. Перша за 1 хв очищує 20 кг зерна, а друга – 30 кг. Спочатку працювала перша машина, а через 30 хв почала працювати і друга, після чого обидві машини очистили все зерно за 1 год 30 хв. Скільки кілограмів зерна було очищено і за який час його можна було б очистити, якби обидві машини з самого початку працювали разом?

Розв'язання

1) Скільки годин усього працювала перша машина, якщо вона спочатку працювала одна протягом 30 хв, а потім разом із другою машиною ще 1 год 30 хв?

$$30 \text{ хв} + 1 \text{ год } 30 \text{ хв} = 2 \text{ год} = 120 \text{ хв}.$$

2) Скільки зерна очистила перша машина за 120 хв, якщо за 1 хв вона очищає 20 кг?

$$20 \cdot 120 = 2400 \text{ (кг)}.$$

3) Скільки зерна очистила друга машина, якщо вона працювала 1 год 30 хв, а за 1 хв очищає 30 кг зерна?

$$1 \text{ год } 30 \text{ хв} = 90 \text{ хв};\ 30 \cdot 90 = 2700 \text{ (кг)}.$$

4) Скільки зерна дві машини очистили разом, якщо перша машина очистила 2400 кг, а друга – 2700 кг?

$$2400 + 2700 = 5100 \text{ (кг)}.$$

5) Скільки зерна очищають машини разом за 1 хв, якщо перша за 1 хв очищає 20 кг, а друга – 30 кг?

$$20 + 30 = 50 \text{ (кг)}.$$

6) За який час очистили б 5100 кг зерна обидві машини, з самого початку працюючи разом, якщо за 1 хв вони очищають разом 50 кг зерна?

$$5100 : 50 = 102 \text{ (хв)}.$$

Відповідь. Усього очистили 5100 кг зерна. Працюючи разом, усе зерно дві машини очистили б за 1 год 42 хв.

4. Пояснення у формі запитань з обґрунтуванням вибору кожної дії.

Задача 36. Фермер зібрав урожай картоплі за три дні. За перший день він зібрав урожай з $\frac{4}{9}$ усієї площі, за другий день – з $\frac{3}{5}$ площі, що залишилась, і за третій день – решту 6 га. Чому дорівнює площа картопляного поля?

Розв'язання

1) З якої частини поля залишилося зібрати врожай картоплі після першого дня роботи?

Площу всього поля приймаємо за умовну одиницю. Щоб знайти, з якої частини площі залишилося зібрати врожай, треба від одиниці відняти ту частину, з якої вже зібрано картоплю: $1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ (площі).

2) З якої частини площі фермер зібрав урожай другого дня?

Другого дня зібрано врожай з $\frac{3}{5}$ від решти площі. Щоб дізнатися, яка це частина всієї площі, треба знайти дріб $\frac{3}{5}$ від числа $\frac{5}{9}$: $\frac{5}{9}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{3}$ (площі).

3) З якої частини площі зібрали врожай за третій день?

Після першого дня роботи фермеру залишилося зібрати врожай з $\frac{5}{9}$ усієї площі, а за другий день було зібрано врожай з $\frac{1}{3}$ цієї площі. Отже, за третій день зібрано врожай з площі, що дорівнює $\frac{5}{9}-\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$ (площі).

4) Чому дорівнює площа всього поля?

Оскільки 6 га становлять $\frac{2}{9}$ усієї площі, то щоб знайти всю площу, треба знайти ціле за його частиною: $6:\frac{2}{9}=27$ (га).

Відповідь. Площа поля, з якої фермер зібрав картоплю, 27 га.

5. Розв'язування задач за запитаннями з попереднім аналізом.

Задача 37. Магазин продавав 900 кг апельсинів протягом 5 днів. За перший день було продано 15 % усіх апельсинів, за другий – 20 % решти апельсинів, а кількість апельсинів, які було продано за останні три дні, пропорційні до чисел $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{16}$ і $\frac{1}{2}$. Скільки кілограмів апельсинів було продано кожного з трьох останніх днів?

Попередній аналіз

Щоб знайти, скільки кілограмів апельсинів було продано магазином кожного з трьох останніх днів, треба дізнатися, яку кількість апельсинів було продано разом за ці дні і розділити її пропорційно до даних чисел. Кількість апельсинів, яку було продано в останні три дні, дорівнює різниці між усією кількістю апельсинів і кількістю апельсинів, проданих за перші два дні. Для знаходження кількості апельсинів, що було продано за перші два дні, в умові достатня кількість даних.

План

1. Скільки кілограмів апельсинів було продано першого дня?

2. Скільки кілограмів апельсинів залишилося для продажу після першого дня?

3. Скільки кілограмів апельсинів було продано другого дня?

4. Скільки кілограмів апельсинів залишилося для продажу після другого дня?

5. Скільки кілограмів апельсинів було продано кожного з трьох останніх днів?

Розв'язання

Позначимо кількість проданих апельсинів кожного з останніх трьох днів через x_1, x_2, x_3 і розв'яжемо задачу на поділ числа пропорційно до чисел $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{1}{2}$. Маємо $\frac{1}{4}:\frac{5}{16}:\frac{1}{2}=4:5:8$.

1) $15\%=0{,}15$; $900\cdot 0{,}15=135$ (кг). 2) $900-135=765$ (кг).

3) $20\%=0{,}2$; $765\cdot 0{,}2=153$ (кг). 4) $765-153=612$ (кг).

5) $x_1:x_2:x_3=\frac{1}{4}:\frac{5}{16}:\frac{1}{2}$, $x_1:x_2:x_3=4:5:8$;

$x_1=\frac{612\cdot 4}{4+5+8}=144$ (кг), $x_2=\frac{612\cdot 5}{4+5+8}=180$ (кг),

$x_3=\frac{612\cdot 8}{4+5+8}=288$ (кг).

Відповідь. Магазин продав третього дня 144 кг, четвертого – 180 кг п'ятого – 288 кг апельсинів.

6. Запис розв'язання задач, складений у стверджувальній формі (пояснення перед дією).

Задача 38. З одного міста в протилежних напрямках вирушили одночасно два автомобілі. Швидкість одного з них дорівнює 72,5 км/год, що на 4,8 км/год більше, ніж швидкість другого. Яка відстань буде між автомобілями через 3,5 год?

Розв'язання

1) Другий автомобіль рухався зі швидкістю

$$72{,}5-4{,}8=67{,}7 \text{ (км/год).}$$

2) За одну годину автомобілі віддалялися один від одного на

$$72{,}5+67{,}7=140{,}2 \text{ (км).}$$

3) Через 3,5 год відстань між автомобілями буде

$$140{,}2\cdot 3{,}5=490{,}7 \text{ (км).}$$

Відповідь. Через 3,5 год відстань між автомобілями буде 490,7 км.

7. Запис розв'язання задач у стверджувальній формі з поясненнями після дії.

Задача 39. З двох сіл одночасно назустріч один одному вийшли два пішоходи. Швидкість одного – 4 км/год, другого – 5 км/год. Другий до зустрічі пройшов 15 км. Яка відстань між селами?

Розв'язання

1) $15 : 5 = 3$ (год) – були пішоходи в дорозі до зустрічі.

2) $4 \cdot 3 = 12$ (км) – пройшов перший пішохід до зустрічі.

3) $12 + 15 = 27$ (км) – відстань між селами.

Відповідь. Відстань між селами 27 км.

Задача 40. На проходження відстані між двома пристанями A та B пароплав витрачає 1,5 год. Вийшовши з A, о 10 год він зустрів другий пароплав, що вирушив із B на 18 хв пізніше і йшов зі швидкістю в 1,25 раза більшою. Знайдіть час зустрічі пароплавів.

Розв'язання

Приймаємо всю відстань між пристанями A та B за умовну одиницю.

1) $1 : \frac{3}{2} = \frac{2}{3}$ (усього шляху) – перший пароплав, що рухається з пристані A, пройшов за 1 год.

2) $\frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{6}$ (усього шляху) – другий пароплав, що рухається з пристані B, пройшов за 1 год.

3) 18 хв $= \frac{18}{60}$ год $= 0{,}3$ год; $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{5}$ (усього шляху) – перший пароплав пройшов до виходу другого.

4) $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ (усього шляху) – обидва пароплави, зближуючись, проходять за 1 год.

5) $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ (усього шляху) – обидва пароплави пройшли разом після виходу другого пароплава.

6) $\frac{4}{5} : \frac{3}{2} = \frac{8}{15}$ (год); $\frac{8}{15}$ год = 32 хв – витратили обидва пароплави на проходження $\frac{4}{5}$ відстані між пристанями.

7) 10 год + 32 хв = 10 год 32 хв – час зустрічі пароплавів.

Відповідь. Пароплави зустрілися о 10 год 32 хв.

8. Виконання дій без формулювання запитань з наступним зв'язним поясненням.

Задача 41. Купуючи солодощі до свята, першого разу за 5 кг цукерок і 3 кг печива заплатили 138 грн, а другого разу за 5 кг таких самих цукерок і 7 кг такого самого печива – 162 грн. Скільки коштує 1 кг цукерок і 1 кг печива?

Розв'язання

1) 162 – 138 = 24 (грн). 2) 7 – 3 = 4 (кг).
3) 24 : 4 = 6 (грн). 4) 6 · 3 = 18 (грн).
5) 138 – 18 = 120 (грн). 6) 120 : 5 = 24 (грн).

Оскільки в обох випадках купували однакову кількість цукерок за однаковою ціною, то можна зробити висновок, що другого разу на 24 грн (162 – 138) більше заплатили за печиво, бо його купили на 4 кг (7 – 3) більше. Отже, один кілограм печива коштував 6 грн (24 : 4), відповідно 3 кг – 18 грн (6 · 3). Тому 5 кг цукерок коштували 120 грн (138 – 18), а їх ціна була – 24 грн за 1 кг (120 : 5).

Відповідь. Ціна 1 кг цукерок – 24 грн, а 1 кг печива – 6 грн.

9. Пояснення розв'язання разом з виконанням дій.

Задача 42. Через 5 год після виходу товарного потяга з міста *A* в місто *B* у тому самому напрямку вирушив пасажирський потяг, який наздогнав його і прибув до *B* на 3 год раніше. Знайдіть відстань між *A* та *B*, якщо товарний потяг рухався зі швидкістю 42 км/год, а пасажирський – 63 км/год.

Розв'язання

На проходження відстані між містами *A* та *B* товарний потяг витратив часу на 5 год + 3 год = 8 год більше, ніж пасажирський. За ці 8 год пасажирський потяг міг би ще пройти 63 · 8 = 504 (км). Отже, за однаковий час пасажирський потяг пройшов відстань на 504 км більшу, ніж товарний, бо щогодини він проходив на 63 – 42 = 21 (км) більше. Тому можемо знайти час руху товарного потяга між містам *A* та *B*, він дорівнює 504 : 21 = = 24 (год), а потім і саму відстань між *A* та *B*, яка дорівнює 42 · 21 = 882 (км).

Відповідь. Між містами *A* та *B* відстань 882 км.

Задача 43. На фермі у клітці сиділи фазани та кролики. Син фермера нарахував у них разом 30 голів і 96 ніг. Скільки фазанів і скільки кроликів було у клітці?

Розв'язання

Припустимо, що в клітці сидять тільки кролики. Тоді у них має бути $4 \cdot 30 = 120$ (ніг). Це більше за кількість ніг, що нарахував син фермера, на $120 - 96 = 24$ (ноги), тому що в клітці сидять ще й фазани, у кожного з яких на $4 - 2 = 2$ (ноги) менше. Якщо з клітки забрати одного кролика та замість нього посадити фазана, то кількість голів не зміниться, а кількість ніг зменшиться на 2. Таку заміну треба робити доти, поки не отримаємо потрібну кількість ніг, тобто стільки разів, скільки 2 вміщується в 24. Отже, фазанів у клітці було $24 : 2 = 12$, а кроликів було $30 - 12 = 18$.

Відповідь. У клітці було 18 кроликів і 12 фазанів.

10. Запис розв'язання задачі у вигляді числової формули.

Задача 44. З двох міст A та B одночасно назустріч один одному вирушають два велосипедисти. Перший рухається зі швидкістю 16 км/год, а другий – 18 км/год. На якій відстані один від одного будуть велосипедисти через 4 год після початку руху, коли відомо, що від A до B 246 км?

Числова формула: $246 - (16 + 18) \cdot 4 = 110$ (км).

Відповідь. Через 4 год між велосипедистами буде 110 км.

Обираючи один із наведених записів розв'язання, слід брати до уваги, що в деяких випадках легше дати пояснення до вже виконаної дії у стверджувальній формі, ніж сформулювати відповідне запитання (наприклад, під час розв'язування задач із заміною даних, на пропорційний поділ тощо).

Основна мета етапу *перевірки розв'язку* задачі є з'ясування того, чи отриманий розв'язок задовольняє всі умови задачі. Під час розв'язування нескладної сюжетної задачі перевірка, як правило, не виконується, якщо правильність або помилковість отриманого розв'язку є очевидною (наприклад, отримали швидкість пішохода 20 км/год, або 2,4 робітника тощо).

У загальному випадку перевірку виконують для того, щоб виявити можливі помилки в обчисленнях, неточності в логічних міркуваннях. З часом, під час вивчення методу рівнянь, перевірка після розв'язання задачі дає можливість з'ясувати правильність математичної моделі.

Перевірка може бути *прямою* та *непрямою*, *повною* і *неповною*. Під час *повної перевірки* переконуємося, що знайдені значення шуканих величин можуть бути розв'язком, бо задовольняють усі умови. *Неповна перевірка* передбачає перевірку виконання тільки деяких умов. Зрозуміло, що такий вид перевірки є менш надійним, ніж повний, оскільки можна не помітити, наприклад, обчислювальну помилку.

Проілюструємо це на прикладі перевірки до задачі 37.

Перевірка пряма та повна

1) За 5 днів продано $135 + 153 + 144 + 180 + 288 = 900$ (кг) апельсинів.

2) Апельсини, які продали першого дня, від усіх апельсинів становлять за умовою 15 % ($135 : 900 \cdot 100 = 15$ %).

3) Апельсини, які продали другого дня, від решти апельсинів (тобто від $900 - 135 = 765$ (кг)) становлять 20 % ($153 : 765 \cdot 100 = 20$ %).

4) За останні 3 дні було продано відповідно 144 кг, 180 кг і 288 кг. Тоді

$$144 : 180 : 288 = \frac{1}{4} : \frac{5}{16} : \frac{1}{2}.$$

Усі умови задачі перевірено. Знайдені значення невідомих їх задовольняють, а це означає, вони будуть розв'язком задачі.

Найчастіше під час розв'язування таких задач виконують неповну перевірку. Наприклад, перевіряють, чи справді сума проданих за 5 днів апельсинів дорівнює 900 кг. При цьому може бути непомічена арифметична помилка, що була зроблена на останніх кроках розв'язування:

$135 + 153 + 140 + 192 + 280 = 900$ (кг) – відповідає умові;

135 кг – це 15 % від 900 кг – відповідає умові;

153 кг – це 20 % від 765 кг ($900 - 135 = 765$) – відповідає умові;

$140 : 192 : 280 \neq \frac{1}{4} : \frac{5}{16} : \frac{1}{2}$ – не відповідає умові.

Отже, робимо висновок, що отримані значення невідомих задовольняють не всі умови задачі, а тому не можуть бути її розв'язком.

Непряму перевірку можна виконати за допомогою складання та розв'язування оберненої задачі, коли знайдене шукане стає даним, а одне із даних – шуканим. Якщо під час розв'язування оберненої задачі отримуємо значення, яке збігається з вибраним даним, то роблять висновок, що початкова задача розв'язана правильно. Оскільки для текстової задачі, що має кілька умов, можна скласти різні обернені задачі, то для перевірки розв'язку намагаються обрати таку з цих обернених задач, яку найлегше розв'язати.

Наприклад, до задачі 38 можна скласти такі обернені задачі.

Задача 38 (а). З одного міста в протилежних напрямках вирушили одночасно два автомобілі. Швидкість одного з них дорівнює 72,5 км/год, що на 4,8 км/год більше, ніж швидкість другого. Через скільки годин відстань між ними буде 490,7 км?

Задача 38 (б). З одного міста в протилежних напрямках вирушили одночасно два автомобілі. Швидкість першого була на 4,8 км/год більша, ніж швидкість другого. Через 3,5 год вони були на відстані 490,7 км один від одного. З якою швидкістю рухався перший автомобіль?

Задача 38 (в). З одного міста в протилежних напрямках вирушили одночасно два автомобілі. Швидкість першого 72,5 км/год. Через 3,5 год вони були на відстані 490,7 км один від одного. На скільки меншою (більшою) була швидкість другого автомобіля?

Розв'язання задачі різними способами також є непрямою перевіркою.

Задача 45. Першого разу купили 15 кг печива та заплатили 90 грн. Скільки потрібно заплатити другого разу, щоб купити 20 кг такого самого печива?

	Ціна 1 кг	*Кількість*	*Вартість*
I раз	Однакова	15 кг	90 грн
II раз	Однакова	20 кг	x грн

Розв'язання

Кількість товару та його вартість при сталій ціні є прямо пропорційними величинами. Тому задачу можна розв'язати, якщо скласти таку пропорцію: $90:15 = x:20$; $x = \frac{90 \cdot 20}{15} = 120$ (грн).

Перевірка

Спосіб 1 (зведення до одиниці).

1) $90:15 = 6$ (грн) – ціна 1 кг печива.

2) $20 \cdot 6 = 120$ (грн) – вартість 20 кг печива.

Спосіб 2 (спосіб відношень).

1) $20:15 = \frac{4}{3}$ – у стільки разів більше купили печива другого разу.

У стільки само разів його вартість буде більшою: $90 \cdot \frac{4}{3} = 120$ (грн).

Спосіб 3 (спосіб спільної міри).

Числа 20 і 15 мають найбільший спільний дільник 5. Отже, можемо взяти 5 кг за спільну міру для 20 кг (4 рази по 5 кг) і для 15 кг (3 рази по 5кг).

Дізнаємося, скільки коштують 5 кг печива, врахувавши, що 5 кг у 3 рази коштують менше, ніж 15 кг. Тому

$90:3 = 30$ (грн) – вартість 5 кг печива.

Оскільки 20 кг в 4 рази дорожчі за 5 кг, то

$30 \cdot 4 = 120$ (грн) – вартість 20 кг.

Спосіб 4 (додавання кратних частин).

20 кг = 15 кг + 5 кг;

5 кг – це третя частина від 15 кг і коштує вона 90 : 3 = 30 (грн).

Отже, 20 кг печива будуть коштувати 90 + 30 = 120 (грн).

Завдання з розв'язування задач різними способами можна використовувати для перевірки правильності отриманого розв'язку або для дослідження використаного способу розв'язування та оцінювання його раціональності порівняно з іншими способами.

Етап дослідження задачі зустрічається під час розв'язування текстових задач у 5–6-х класах не дуже часто. Дослідження потрібно робити, коли були встановлені положення, які мають теоретичне значення для розв'язування всіх задач із такими самими величинами.

Зазвичай, *розв'язок* до текстової задачі формулюється у вигляді словесної відповіді на вимогу чи запитання задачі. Якщо задача мала альтернативні умови, які були або задані, або встановлені під час розв'язування, то у відповіді потрібно записати розв'язок і відповідну йому умову; якщо отримано кілька розв'язків, то обов'язково всі слід перерахувати.

Задача 46. Від пристані A до пристані B, відстань між якими 145 км, о 12 год відійшов катер, що має власну швидкість 48 км/год. Через 1 год 15 хв після його виходу з B до A вирушив другий катер, власна швидкість якого 34 км/год. Якою буде відстань між катерами о 14 год, якщо швидкість течії річки 2 км/год?

Аналіз задачі

Ця задача про рух об'єктів по річці. Тому для обчислення швидкості кожного з катерів важливо знати напрям їх руху – за течією чи проти течії. Оскільки в умові задачі це не обумовлено, то слід розглянути два випадки:

1) річка тече від A до B і рух першого катера відбувається за течією;

2) річка тече від B до A і за течією рухається другий катер.

Розв'язання

Перший випадок

1) 48 + 2 = 50 (км/год) – швидкість I катера.

2) 34 – 2 = 32 (км/год) - швидкість II катера.

3) 14 год – 12 год = 2 год – час руху I катера.

4) 14 год – (12 год + 1год 15 хв) = 45 хв = $\frac{3}{4}$ год – час руху II катера.

5) 50 · 2 = 100 (км) – відстань, що пройшов I катер.

6) $32 \cdot \frac{3}{4} = 24$ (км) – відстань, що пройшов II катер.

7) $145 - (100 + 24) = 21$ (км) – відстань між катерами о 14 год.

Другий випадок

1) $48 - 2 = 46$ (км/год) – швидкість I катера.

2) $34 + 2 = 36$ (км/год) – швидкість II катера.

3) 14 год – 12 год = 2 год – час руху I катера.

4) 14 год – (12 год + 1год 15 хв) = 45 хв = $\frac{3}{4}$ год – час руху II катера.

5) $46 \cdot 2 = 92$ (км) – відстань, що пройшов I катер.

6) $36 \cdot \frac{3}{4} = 27$ (км) – відстань, що пройшов II катер.

7) $145 - (92+27) = 26$ (км) – відстань між катерами о 14 год.

Відповідь. Якщо річка тече від *A* до *B*, то о 14 год між катерами буде 21 км; якщо річка тече від *B* до *A*, то о 14 год між катерами буде 26 км.

Завершальним етапом розв'язування задачі є *навчально-пізнавальний аналіз задачі* і *її розв'язання.*

Головною метою розв'язування будь-якої задачі є не отримання відповіді, а засвоєння учнями певних знань, формування та розвиток умінь і навичок. Тому важливим є завершальне обговорення та дослідження виконаного розв'язання, під час якого з'ясовують особливості даної задачі чи використаного способу розв'язування, порівнюють їх з уже розв'язаними задачами. Доцільно також з'ясовувати недоліки отриманого розв'язання (якщо вони є) та шукати раціональніше.

1.3. ПРОСТІ АРИФМЕТИЧНІ ЗАДАЧІ

В основі розв'язування текстових задач арифметичними способами лежить розуміння смислу арифметичних дій і вміння перекладати словесні формулювання залежностей між величинами на математичну мову.

Для того, щоб обрати потрібну арифметичну дію під час розв'язування прикладу, учню достатньо виділити з умови лише один елемент – знак дії. Під час розв'язування текстової задачі одна і та сама дія може бути використана в різних математичних ситуаціях, які можуть мати різні словесні описи. Тому в деяких учнів процес встановлення необхідної дії навіть під час розв'язування простої задачі може викликати певні труднощі. Для складеної задачі вибір дії ще більше утруднюється: необхідно вказати не тільки дії, але й в порядок їх виконання.

Уміння учнів розв'язувати складені задачі за допомогою числових виразів залежить від наявності у них знань про прості задачі, що розв'язуються однією дією. Ці знання є необхідною основою і для ефективного засвоєння учнями методу рівнянь.

Оскільки розв'язування простих текстових задач залежить від розуміння суті арифметичних дій, то, класифікуючи прості задачі, виділяють три основні їх види.

До *першого виду* належать задачі, які розкривають конкретний зміст арифметичних дій. Це задачі на знаходження: а) суми двох чисел; б) остачі; в) добутку (знаходження суми кількох однакових доданків); г) частки (ділення на рівні частини і на вміщення).

До *другого виду* належать задачі, які розкривають зв'язки між компонентами та результатами арифметичних дій. Це задачі на знаходження невідомих компонентів: доданка, зменшуваного, від'ємника, множника, діленого, дільника.

До *третього виду* відносять задачі, пов'язані з поняттями різницевого чи кратного відношення двох чисел. Це задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць чи в кілька разів (у прямій і непрямій формі), на різницеве чи кратне порівняння двох чисел.

До окремих видів віднесено задачі на *ділення з остачею*, *знаходження частини числа* (зокрема $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$ тощо) і *числа за його частиною.*

У таблиці 5 (див. с. 42) наведено приклади простих задач різних типів. У їх текстах використовується однаковий сюжет і однакові числа. Якщо задачі об'єднувати у різні групи, то під час пошуку дії, необхідної для знаходження розв'язку, ми, з одного боку, не будемо відволікати увагу учнів на додатковий аналіз сюжету, а з іншого – зосередимо на математичному змісті. Це дасть можливість краще засвоїти різні випадки застосування кожної з арифметичних дій.

Під час вивчення теми «Натуральні числа» доцільно пропонувати учням не лише розв'язувати задачі, а й обґрунтовувати вибір арифметичної дії.

Задача 47. Наталка та Миколка розв'язували задачі. Миколка розв'язав 26 задач, а Наталка – на 16 задач більше. Скільки задач розв'язали Миколка і Наталка разом?

Розв'язання

1) 26 + 16 = 42 (задачі) – розв'язала Наталка.

2) 26 + 42 = 68 (задач) – Миколка і Наталка розв'язали разом.

Аналіз розв'язання

Для знаходження розв'язку задачі виконали дві дії додавання. Проте вони різні за смислом: перша дія – це збільшення числа на кілька одиниць, а друга дія – це знаходження суми двох чисел.

Задача 48. Чіп, Дейл і Рокфор збирали горішки. Чіп знайшов 38 горішків, що на 16 менше, ніж Дейл, а Рокфор – на 23 горішки більше, ніж Чіп. Скільки всього горішків вони зібрали?

Розв'язання

1) Скільки горішків зібрав Дейл?

38 + 16 = 54 (горішки).

2) Скільки горішків зібрав Рокфор?

38 + 23 = 61 (горішок).

3) Скільки горішків разом зібрали Чіп, Дейл і Рокфор?

38 + 54 + 61 = 153 (горішки).

Аналіз розв'язання

Щоб відповісти на перше запитання, потрібно розв'язати задачу на збільшення (у непрямій формі). Відповідь на друге запитання також отримуємо після розв'язування задачі на збільшення (у прямій формі). Для знаходження відповіді на третє запитання, використовуємо додавання, бо знаходимо суму трьох доданків.

Слід пам'ятати, що недостатньо глибоке засвоєння випадків на застосування кожної дії може згодом (під час складання буквених виразів і рівнянь) призвести до помилок, коли при збільшенні числа a у 7 раз частина учнів писатиме: $7 + a$ замість $7a$. Для уникнення таких помилок і кращого засвоєння змісту відношень «більше на...», «менше на...», «більше в...», «менше в...» доцільно пропонувати задачі різного математичного змісту та схожих сюжетів із поступовим введенням буквених даних. Наведемо приклади.

Задача 49. У шкільному саду росте 12 вишень, а яблунь – на 2 дерева більше. Скільки яблунь росте в шкільному саду?

Задача 49 (а). У шкільному саду росте 12 вишень, а яблунь – у 2 рази більше. Скільки яблунь росте в шкільному саду?

Задача 49 (б). У шкільному саду росте a вишень, а яблунь – на 2 дерева більше. Скільки яблунь росте в шкільному саду?

Задача 49 (в). У шкільному саду росте 12 вишень, а яблунь – на x дерев більше. Скільки яблунь росте в шкільному саду?

Таблиця 5

Дія	Тип задачі	Клас	Приклад тексту задачі даного виду
Додавання	Знаходження суми двох або кількох чисел	1	На одній полиці було 18 книжок, а на другій – 6. Скільки книжок було на двох полицях разом?
	Збільшення числа на кілька одиниць: пряма форма (непряма форма)	1, (3)	1) На одній полиці було 18 книжок, а на другій – на 6 книжок більше. Скільки книжок було на другій полиці? 2) На одній полиці було 18 книжок, що на 6 менше, ніж на другій. Скільки книжок було другій полиці?
	Знаходження невідомого зменшуваного	2	Коли з полиці зняли 18 книжок, то на ній ще залишилося 6 книжок. Скільки книжок було на полиці?
Віднімання	Знаходження остачі	1	На полиці у класній кімнаті було 18 книжок. Учитель узяв з неї 6 книжок. Скільки книжок залишилося?
	Зменшення числа на кілька одиниць: пряма форма (непряма форма)	1 (3)	1) На одній полиці було 18 книжок, а на другій – на 6 менше. Скільки книжок було на другій полиці? 2) На одній полиці було 18 книжок, що на 6 книжок більше, ніж на другій. Скільки книжок було другій полиці?
	Знаходження невідомого доданка	1	На двох полицях було разом 18 книжок. Скільки книжок було на першій полиці, якщо на другій їх – 6?
	Знаходження невідомого від'ємника	2	На полиці у класній кімнаті 18 книжок. Учитель узяв з неї кілька книжок, після чого їх залишилося 6. Скільки книжок він узяв?
	З'ясування, на скільки одиниць одне число більше або менше від другого (різницеве порівняння)	1	На одній полиці було 18 книжок, а на другій – 6. На скільки книжок було менше на другій полиці, ніж на першій? (На скільки книжок було більше на першій полиці, ніж на другій?)
Множення	Знаходження суми кількох однакових доданків	2	На кожній із шести полиць стелажу є по 18 книжок. Скільки всього книжок на стелажі?
	Збільшення числа в кілька разів: пряма форма (непряма форма)	3	1) На одній полиці було 18 книжок, а на другій – у 6 раз більше. Скільки книжок було на другій полиці? 2) На одній полиці було 18 книжок, що в 6 раз менше, ніж на другій. Скільки книжок було на другій полиці?

Закінчення табл. 5

Дія	Тип задачі	Клас	Приклад тексту задачі даного виду
Множення	Знаходження невідомого діленого	3	Для відзнаки активних учасників конкурсу серед шести класів книжки було розподілено так, що кожний клас отримав по 6 книжок. Скільки всього книжок було куплено?
	Знаходження числа за його частиною	3	На одній полиці було 18 книжок, що становить $\frac{1}{6}$ всіх книжок, які стояли на стелажі. Скільки всього книжок було на стелажі?
Ділення	Ділення на вміщення	2	Скільки комплектів можна скласти із 18 книжок, якщо в кожному комплекті їх має бути 6?
	Поділ числа на кілька рівних частин	2	18 книжок поклали на 6 полиць порівну. Скільки книжок поклали на кожну полицю?
	Знаходження невідомого множника	3	Після того, як кількість книжок на полиці збільшили в 6 раз, Петрик нарахував на ній 18 книжок. Скільки книжок було на полиці спочатку?
	Знаходження невідомого дільника	3	18 книжок розділили на кілька комплектів так, що в кожному виявилося по 6 книжок. На скільки комплектів поділили книжки?
	Зменшення числа в кілька разів: пряма форма (непряма форма)	3	1) На одній полиці було 18 книжок, а на другій – у 6 раз менше. Скільки книжок було на другій полиці? 2) На одній полиці було 18 книжок, що в 6 раз більше, ніж на другій полиці. Скільки книжок було на другій полиці?
	З'ясування, у скільки разів одне число більше або менше від другого (кратне порівняння)	3	На одній полиці було 18 книжок, а на другій – 6. У скільки разів більше було книжок на першій полиці? (У скільки разів менше було книжок на другій полиці?)
	Знаходження частини числа	3	На полиці було 18 книжок, шосту частину з них становили підручники. Скільки підручників було на полиці?

Важливим засобом покращення свідомого засвоєння математичних залежностей, які розкриваються в простих задачах, є завдання на складання задач самими учнями. Це можуть бути завдання на доповнення тексту задачі вимогою або складання задач за числовими виразами (вказаною дією). Наприклад, такі задачі.

Задача 50. У Сергійка 12 кульок, а у Андрія – 4. Що дізнаємося, виконавши такі дії:

а) 12 + 4; б) 12 – 4; в) 12 : 4; г) 12 · 4?

Для кожного з випадків доповніть текст відповідним запитанням і зобразіть текст у вигляді короткого запису, структурної чи графічної схеми.

Очікувана відповідь. а) Скільки кульок разом у хлопчиків?

б) На скільки кульок більше в Сергійка (або на скільки кульок менше в Андрійка)?

в) У скільки разів більше кульок у Сергійка (або у скільки разів менше кульок в Андрійка)?

г) Для даної задачі дія не має смислу.

Завдання г) містить елемент «провокації». Це для того, що є діти, які маніпулюють числами, не вникаючи в зміст задачі. Зокрема стверджують: «Якщо не можна числа поділити націло, то помножимо чи додамо їх» тощо.

Цікавими та ефективними також є завдання на складання за числовими виразами текстів задач певних сюжетів. Вони не тільки сприяють осмисленішому розумінню випадків застосування кожної з дій, але й допомагають розвитку такої якості мислення учнів, як зворотність.

Узагальнюючи та систематизуючи на початку 5-го класу знання учнів про основні прості задачі, вчитель повинен пам'ятати, що з розширенням поняття числа кількість таких задач збільшується. Так, до систематичного вивчення у 6-у класі дробів, задачі на знаходження дробу від числа та числа за відомою його частиною розв'язуються двома діями, а після з'ясування смислу множення та ділення на дріб вони стають простими. Аналогічно, під час вивчення теми «Відношення» кількість основних задач на ділення доповнюється задачею на знаходження відношення двох чисел. Подальше доповнення переліку основних задач відбувається під час ознайомлення учнів з відсотками.

Слід також звернути увагу учнів на задачі, які сформульовані в непрямій формі. У програмі початкової школи ці задачі не відносять до простих, хоча вони також розв'язуються однією дією. У цих задачах слово-ознака, на яке учні орієнтуються під час вибору дії, відноситься не до шуканої, а до відомої величини.

Задача 51. На першій полиці 26 книжок, що в 2 рази більше, ніж на другій. Скільки книжок на другій полиці?

Ця задача розв'язується дією ділення, хоча в тексті використовують слово «більше». За рахунок механічних асоціацій між словом «більше» та діями додавання, множення або через поверховий аналіз умови можливий неправильний вибір дії. Для запобігання таким помилкам слід навчати учнів семантичному аналізу тексту з виділенням слів-ознак, побудові різними прийомами схематичних або графічних моделей.

Доцільно також пропонувати учням завдання на перефразування тексту, тобто заміну даних в умові залежностей «більше» чи «менше» на протилежні так, щоб не змінилися залежності між величинами, тобто числові вирази, необхідні для пошуку розв'язку, були тими самими. Наприклад, для задачі 51 матимемо таку задачу.

Задача 52. На першій полиці 26 книжок, а на другій – у 2 рази менше. Скільки книжок на другій полиці?

Такі завдання сприятимуть також формуванню навичок встановлення двосторонніх зв'язків між величинами: якщо одна величина на якесь число більша від другої, то друга – менша від першої на це саме число (або якщо одна величина в кілька разів більша від другої, то друга – менша від першої в таку саму кількість разів). Згодом ці навички будуть потрібні під час складання рівнянь та систем рівнянь за текстами задач.

1.4. ЗАДАЧІ-РОЗРАХУНКИ

Продовженням засвоєння різних випадків застосування арифметичних дій є розв'язування складених задач, які можна розв'язати або послідовно виконуючи дії (як правило, їх порядок не важко визначити з тексту), або за допомогою способу зворотніх міркувань. Такі задачі надалі називатимемо *задачами-розрахунками.*

Для розв'язування задач з прямим порядком дій можна використати синтетичний або аналітичний метод пошуку плану розв'язування з побудовою дерева міркувань.

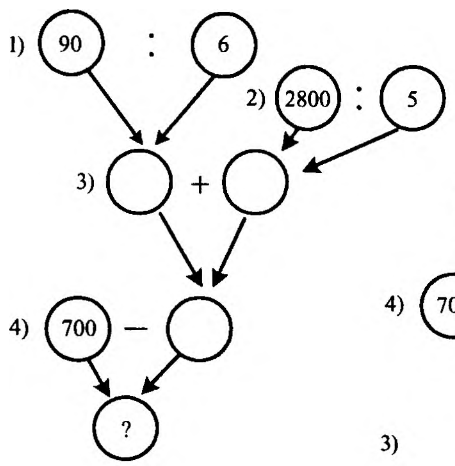
Задача 53. Перша зерноочисна машина за 6 хв очищає 90 кг зерна, а друга за 5 хв – 100 кг. За який час ці машини, працюючи разом, очистять 7 т зерна?

Синтетичний шлях пошуку розв'язку подано у таблиці 6 (с. 46) та на схемі (а). Аналітичний шлях пошуку розв'язку подано у таблиці 7 (с. 47) та на схемі (б).

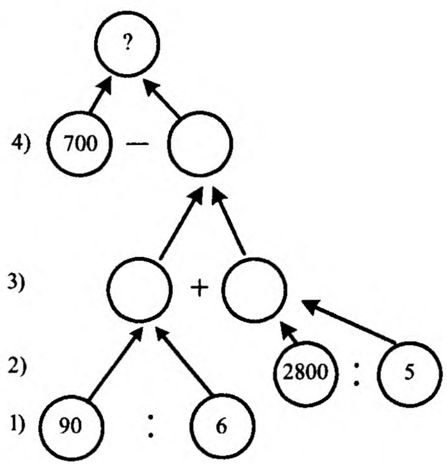
Таблиця 6

№ з/п	Знаючи:	Можна знайти:	Дія
1	Що перша зерноочисна машина за 6 хв очищає 90 кг зерна	Скільки зерна вона очищає за 1 хв	90 : 6 = 15 (кг/хв)
2	Що друга зерноочисна машина очищає 100 кг зерна за 5 хв	Скільки зерна вона очищає за 1 хв	100 : 5 = 20 (кг/хв)
3	Що за 1 хв перша зерноочисна машина очищає 15 кг, а друга – 20 кг	Скільки зерна вони разом очищають за 1хв	15 + 20 = 35 (кг/хв)
4	Скільки зерна разом очищають за 1 хв перша та друга зерноочисні машини	За який час, працюючи разом, ці машини очистять 7 т зерна	7 т = 7000 кг; 7000 : 35 = 200 (хв) (або 3 год 20 хв)

а)



б)



Таблиця 7

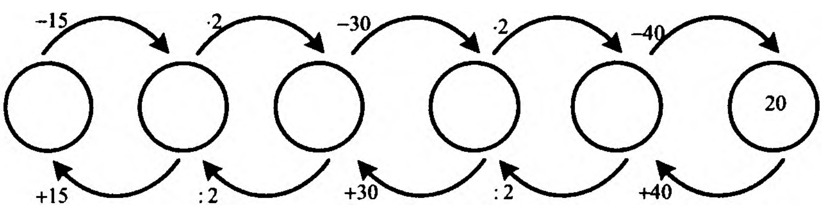
№ з/п	Щоб визначити:	Треба знати:	Дія
1	За який час, працюючи разом, дві машини очистять 7 т зерна	Скільки зерна разом очищають за 1 хв перша і друга машини	7 т = 7000 кг; 7000 : 35 = 200 хв (або 3 год 20 хв)
2	Скільки зерна разом очищають перша та друга зерноочисні машини за 1 хв	Скільки зерна очищає за 1 хв перша та друга машини окремо	15 + 20 = 35 (кг/хв)
3	Скільки зерна очищає за 1 хв друга машина	Скільки зерна очищає друга машина за 5 хв	100 : 5 = 20 (кг/хв)
4	Скільки зерна очищає за 1 хв перша машина	Скільки зерна очищає перша машина за 6 хв	90 : 6 = 15 (кг/хв)

Відповідь. Щоб очистити 7 т зерна, машинам потрібно працювати разом 3 год 20 хв.

У задачах, які розв'язуються за допомогою способу зворотних (обернених) міркувань, використовуються залежності між прямими та оберненими діями.

Задача 54. Спочатку з коробки забрали 15 кульок, після чого кількість кульок, що залишилася в коробці, подвоїли. Потім з коробки забрали 30 кульок, а кількість кульок, що залишилася, знову подвоїли. Після того, як ще забрали 40 кульок, у коробці залишилося 20 кульок. Скільки кульок було в коробці спочатку?

Для розв'язування цієї задачі потрібно використати залежності між прямими та оберненими діями. Тобто, щоб знайти початкову кількість кульок, потрібно з кінцевим результатом виконати обернені операції в зворотному порядку. Спочатку знаходимо, скільки кульок було до того, як забрали 40 кульок, потім дізнаємося, скільки кульок було до другого подвоєння. Після цього знаходимо, скільки кульок було до того, як забрали 30 кульок, потім їх кількість до першого подвоєння. Наприкінці знаходимо початкову кількість кульок.



Задачі для засвоєння різних випадків застосування арифметичних дій

I. Додавання та віднімання.

Повторення зв'язків «більше на...», «менше на...»

1. Дівчинка прочитала 56 сторінок, і їй ще залишилося прочитати на 12 сторінок більше, ніж вона вже прочитала. Скільки сторінок у книжці? (124 сторінки)

2. Туристи планували за три дні пройти 78 км. За перший день вони пройшли 32 км, за другий – на 4 км менше, ніж за перший. Скільки кілометрів їм залишилося пройти третього дня? (18 км)

3. У шкільному саду учні 5-х класів першого дня посадили 45 кущів троянд, другого – на 12 кущів більше, ніж першого, а третього – на 42 кущі менше, ніж першого та другого дня разом. Скільки кущів троянд посадили учні за три дні? (162 кущі троянд)

Знаходження невідомих на основі зв'язків, поданих у непрямій формі

4. У шкільному саду росте 26 яблунь, що на 12 менше, ніж вишень. Скільки вишень росте у шкільному саду? (38 вишень)

5. Тарас на 2 роки старший за Дениса, а Степан на 7 років старший за Тараса. Скільки років Денису, якщо Степану 18 років? (9 років)

Закріплення взаємозв'язків між діями додавання та віднімання

6. Задумали число, зменшили його на 26, а потім збільшили на 38. Отримали 125. Яке число задумали? (113)

7. В автобусі їхало кілька пасажирів. На першій зупинці вийшло 8 і зайшло 5, а на другій вийшло 4 і зайшло 15. Скільки пасажирів було в автобусі до першої зупинки, якщо після другої їх стало 57? (49)

Порівняння двох чисел

8. (Просте порівняння.) У Сергійка 56 листівок, а у Тараса – 43. На скільки листівок більше у Сергійка, ніж у Тараса? (На 13 листівок)

9. (Порівняння двох чисел через зміну одного з них.) На першій полиці було 32 книжки. Якщо з неї зняти 6 книжок, то їх стане стільки, скільки на другій полиці. Скільки книжок стоїть на другій полиці? (26 книжок)

10. Моїй сестрі 18 років. Якщо б вона була на 5 років молодшою, то ми були б ровесниками. Скільки зараз мені років? (13)

11. (Порівняння через зміну двох чисел.) У першій вазі стояло 17 троянд, а в другій – менше. Коли з першої вази забрали 4 троянди, а в другу поставили 2, то троянд у вазах стало порівну. Скільки було спочатку троянд у другій вазі? (11 троянд)

12. (Зміна одного числа через зміну іншого.) На першій полиці стояло 23 книжки, а на другій – 17. Скільки книжок треба переставити з першої полиці на другу, щоб книжок на полицях було порівну? (3 книжки)

13. У Наталки на 12 листівок більше, ніж у Маринки. Скільки листівок їй треба дати Маринці, щоб у них листівок стало порівну? (6 листівок)

14. Коли Сергійко подарував Андрійкові 8 марок, то в обох хлопчиків марок стало порівну. На скільки марок було спочатку більше у Сергійка, ніж у Андрійка? (На 16 марок)

15. У двох коробках було кульок порівну. Після того, як з першої в другу переклали кілька кульок, у другій їх стало на 14 більше, ніж у першій. Скільки кульок переклали з першої коробки в другу? (7 кульок)

Знаходження різниці між числами Б та В
за різницею числа А з числами Б та В

16. Батько старший за сина на 25 років і старший за дочку на 33 роки. Хто з дітей старший і на скільки? (Син, на 8 років)

17. Береза вища за липу на 2 м і нижча за сосну на 3 метри. Що вище – липа чи сосна і на скільки? (Сосна, на 5 м)

Знаходження зміни суми залежно від зміни доданків

18. (Зміна одного з доданків.) Першого дня учні в шкільному саду посадили по 29 саджанців яблунь і груш. Другого дня груш посадили на 5 більше, ніж першого дня, а яблунь – таку саму кількість. Скільки саджанців посадили другого дня? (63 саджанці)

19. (Зміна двох доданків: одночасне збільшення або зменшення.) Першого дня учні посадили 29 саджанців яблунь і груш. Другого дня яблунь посадили на 6 більше, а груш – на 5 більше, ніж першого дня. Скільки саджанців посадили другого дня? (69 саджанців)

20. (Зміна доданків: збільшення одного та зменшення іншого.) У суботу хлопчик упіймав a окунів, $в$ карасів і c щук. Усього ним упіймано 26 рибок. Кількість пійманих хлопчиком рибок у наступні дні зафіксовано у таблиці 8. Скільки рибок хлопчик ловив щодня?

Таблиця 8

Дні тижня	**Окуні**	**Карасі**	**Щуки**	**Усього**
Субота	a	$в$	c	26
Неділя	$a - 4$	$в$	c	?
Понеділок	$a + 5$	$в + 2$	c	?
Вівторок	a	$в - 2$	$c - 3$	?
Середа	$a - 2$	$в - 4$	$c + 6$	?
Четвер	a	$в + 7$	$c - 5$	?

21. (Загальне формулювання задачі.)

а) Як зміниться сума, якщо один доданок збільшили на 12 (зменшили на 12), а другий – залишили без змін? (Збільшиться (зменшиться) на 12)

б) Як зміниться сума, якщо перший доданок збільшили на 5 (зменшили на 5), а другий – збільшити на 4? (Збільшиться на 9 (зменшиться на 1))

22. Сума збільшилась на 7 (зменшилась на 3). Які зміни могли відбутися з доданками?

23. Заповніть таблицю 9.

Таблиця 9

1-й доданок	2-й доданок	Сума
a	$в$	c
$a+6$	$в$	?
a	$в-2$	?
$a+3$	$в+5$	?
$a-4$	$в-3$	?
$a+5$	$в-4$	?
$a-3$	$в+6$	?
?	$в+1$	$c+5$
$a+4$	?	$c+2$

Знаходження зміни різниці залежно від змін зменшуваного та від'ємника

24. У Петрика на 5 яблук більше, ніж у Миколки. У кого залишилось яблук більше і на скільки після того, як хлопчики з'їли по 3 яблука? (У Петрика, на 5 яблук)

25. Андрію 9 років, а його сестрі – 14. Яка різниця в роках буде між ними через 10 років? Була між ними 3 роки тому назад? (5 років; 5 років)

26. Бабуся принесла з саду кілька яблук. Із деяких яблук вона зварила компот, а чотирма яблуками, що залишилися, пригостила своїх онуків. Наступного разу вона принесла на 6 яблук більше, а на компот взяла стільки само яблук. Решту яблук вона віддала дітям. Скільки яблук отримали діти? (10 яблук)

Логічні задачі на дії додавання та віднімання

27. Із 28 учнів класу в хорі співають 19, а 16 займаються в шаховому гуртку. Скільки учнів класу і співають у хорі, і грають у шахи, якщо в класі не має учнів, які б не брали участь у роботі хору чи гуртка?

Вказівка. Для пошуку плану розв'язування цієї задачі можна використати круги Ейлера та записати розв'язання у формі «запитання – відповідь».

Розв'язання

1) Скільки учнів класу не співають у хорі, а тільки грають у шахи?

28 – 19 = 9 (учнів).

2) Скільки учнів класу грають у шахи і співають у хорі?

16 – 9 = 7 (учнів).

Відповідь. У роботі і хору і гуртка шахів беруть участь 7 учнів.

28. У класі 32 учні. Із них 23 учні колекціонують марки, 18 – листівки, а 10 учнів – і листівки, і марки. Чи є в класі учні, які не колекціонують ні марки, ні листівки? Якщо є, то скільки їх? (Є, один учень)

29. У класі 34 учні. На екскурсію в ботанічний сад ходили 24 учні, у природничий музей і сад – 8 учнів, а 3 учня не ходили ні в ботанічний сад, ні в музей. Скільки учнів класу ходили в природничий музей? (15 учнів)

ІІ. Множення та ділення.

Повторення зв'язків «більше в...», «менше в...»

30. Першого дня туристи пройшли 16 км, а другого дня на велосипедах вони проїхали в 3 рази більше. Яку відстань туристи подолали другого дня? (48 км)

31. Хлопчик прочитав 64 сторінки і йому залишилося прочитати в 4 рази менше. Скільки сторінок залишилося прочитати хлопчику? (21 сторінку)

Знаходження невідомих на основі зв'язків,
поданих у непрямій формі

32. Першого дня фермер відправив на базар 960 кг яблук, що в 2 рази більше, ніж було відправлено яблук другого дня. Скільки кілограмів яблук відправив фермер на базар другого дня? (480 кг)

Закріплення взаємозв'язків між діями множення та ділення

33. Задумане число зменшили у 5 раз, а потім збільшили у 3 рази. Отримали 135. Яке число задумано? (225)

Порівняння двох чисел

34. У театр на свято прийшли діти із трьох шкіл: 15 з однієї, 30 з другої та 60 з третьої. У скільки разів і на скільки було більше або менше дітей з кожної школи порівняно з іншими двома школами?

35. (Порівняння через зміну одного з чисел.) У брата 90 к. Якби він мав у 3 рази менше грошей, то у нього було б порівну з сестрою. Скільки грошей у сестри? (30 к)

36. (Порівняння через зміну обох чисел.) Брат з сестрою збирали горіхи. Сестра знайшла 15 горіхів. Якби у неї було б у чотири рази більше горіхів, а у брата в два рази менше, то у них було б горіхів порівну. Скільки горіхів знайшов брат? (120)

Знаходження відношень між Б та В
на основі відношень А до Б та В

37. У хлопчика голубів було в 6 раз більше, ніж канарок, і у 2 рази більше, ніж чижиків. Порівняйте кількість канарок та чижиків. (Голубів у 6 раз більше, ніж канарок, і у 2 рази більше, ніж чижиків)

Знаходження залежності
зміни добутку від зміни множників

38. Хлопчик купив кілька зошитів і стільки само олівців. За зошити він заплатив 60 к. Скільки він заплатив за олівці, якщо олівець коштував удвічі дешевше, ніж зошит? (30 к)

39. Купили 6 кг печива по 8 грн за один кілограм і втричі менше цукерок. Скільки заплатили за цукерки, якщо вони вдвоє дорожчі за печиво? (48 грн)

40. Куплено *А* метрів тканини по *Б* грн за один метр. Усього на суму 48 грн. Знайдіть, скільки гривень заплатили за тканину, якщо кількість тканини та ціна за один метр указано в таблиці 10.

Таблиця 10

Б (І множник)	*А* (ІІ множник)	**Вартість тканини** (добуток)
Б	*А*	48 грн
Б	*А* · 3	?
Б · 2	*А*	?
Б	*А* : 6	?
Б : 3	*А*	?
Б : 4	*А* · 4	?
Б · 2	*А* : 2	?

41. Як зміниться добуток, якщо:

а) один із множників збільшити у 3 рази (зменшити у 3 рази)? (Збільшиться (зменшиться) у 3 рази)

б) один із множників множник збільшити у 2 рази, а другий – зменшити у таку саму кількість разів? (Не зміниться)

Знаходження залежності зміни добутку від зміни співмножників

42. На ділянці залізниці між пунктами *А* та *В* вирішили замінити старі рейки довжиною 8 м на нові довжиною 12 м. Скільки потрібно нових рейок, щоб замінити 360 старих? (240)

43. Велосипедист кожного дня проїжджав по 36 км і дістався до пункту призначення через 10 днів. Скільки кілометрів йому потрібно долати кожного дня, щоб повернутися назад через 9 днів? (40 км)

44. На заводі за планом мали виготовити 7920 приладів за 24 дні. За скільки днів виконають це завдання, якщо кожного дня виготовлятимуть на 30 приладів більше? (За 22 дні)

Знаходження залежності зміни частки від зміни діленого та дільника

45. Для перевезення вантажу найняли автомобілі. Передбачалося, що кожен з них перевезе 5 ц вантажу. Але товару виявилося вдвоє більше. Скільки центнерів вантажу перевезе кожен автомобіль? (10 ц)

46. *А* пачок печива розклали в *Б* ящиків порівну: у кожний ящик по 36 пачок. Кількість усіх пачок та ящиків змінювалася, як показано в табл. 11. Скільки пачок печива (*В*) буде у кожному ящику при таких розкладках?

Таблиця 11

А (ділене)	***Б*** (дільник)	***В*** (частка)
A	$Б$	36
$A \cdot 2$	$Б$	?
A	$Б \cdot 2$	?
$A : 3$	$Б$	?
A	$Б : 3$	?
$A \cdot 3$	$Б \cdot 3$	?
$A \cdot 4$	$Б : 4$	?

47. Як зміниться частка, якщо: а) ділене збільшити в 3 рази; зменшити в 5 раз; б) дільник збільшити в 2 рази; зменшити в 7 раз? в) ділене та дільник одночасно збільшити в 3 рази; зменшити в 4 рази?

48. При яких змінах діленого або дільника частка збільшиться:

а) у 5 раз; у 6 раз; б) зменшиться у 3 рази; у 8 разів?

Множення і ділення кратних відношень

49. Перед початком походу, що мав тривати 4 дні, було складено кошторис витрат на провізію для 10 туристів. Але кількість туристів збільшилася втроє, а похід тривав 8 днів. У скільки разів довелося збільшити витрати на закупку провізії? (У 8 раз)

1.5. ЗАДАЧІ-РОЗРАХУНКИ З ПРОПОРЦІЙНИМИ ВЕЛИЧИНАМИ

Серед задач-розрахунків важливими є задачі на знаходження четвертого пропорційного або на потрійне правило. У сюжеті цих задач розглядаються три залежних пропорційні величини. Наприклад, швидкість, час руху, пройдена відстань; ціна товару, кількість, вартість; продуктивність праці, час, виконаний обсяг роботи тощо. При цьому для однієї величини в умові дано два значення; для другої величини одне значення дано в умові, а інше потрібно знайти; для третьої величини значення не вказано, а лише зазначається, що вони однакові в обох випадках.

Задача 55. За 12 зошитів заплатили 36 грн. Скільки коштують 4 таких самих зошити?

Аналіз задачі

У задачі є три величини, залежність між якими така:

вартість = ціна × кількість.

В умові задано два значення кількості (12 зошитів і 4 зошити) та одне значення вартості (36 грн), а інше потрібно знайти. Ціна одного зошита не вказується, але зазначено, що вона однакова.

Короткий запис умови подано у вигляді таблиці 12.

Таблиця 12

Ціна 1 зошита (грн)	**Кількість зошитів**	**Вартість покупки** (грн)
Однакова	12	36
	4	?

Розв'язання

1) 36 : 12 = 3 (грн) – ціна одного зошита.

2) 3 · 4 = 12 (грн) – вартість 4 зошитів.

Відповідь. Вартість 4 зошитів становить 12 грн.

Це зразок міркувань з використанням способу *прямого зведення до одиниці*: спочатку до одиниці зводять величину, для якої задано два значення, тобто знаходять ціну одного зошита. А потім обчислюють значення вартості тієї кількості зошитів, яка вказана в умові.

Іноді під час розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного доцільніше до одиниці звести значення тієї величини, для якої задано одне значення. Такий спосіб має назву *оберненого зведення до одиниці*. Різницю між цими двома способами учням можна показати на прикладі розв'язування однієї задачі.

Задача 56. За 4 год автомобіль проїхав 240 км. За скільки годин автомобіль проїде 360 км, якщо буде рухатися з тією самою швидкістю?

Короткий запис умови подано у вигляді таблиці 13.

Таблиця 13

Швидкість (км/год)	**Час руху** (год)	**Пройдена відстань** (км)
Однакова	4	240
	?	360

Розв'язання 1

(спосіб оберненого зведення до одиниці)

1) Знайдемо, скільки кілометрів проїжджає автомобіль за 1 год, тобто його швидкість:

240 : 4 = 60 (км/год).

2) Знайдемо час, який потрібний, щоб автомобіль подолав дану відстань:

$$360 : 60 = 6 \text{ (год)}.$$

Розв'язання 2

(спосіб прямого зведення до одиниці)

1) Знайдемо час, який потрібний автомобілю, щоб проїхати відстань 1 км:

$$4 \text{ год} = 240 \text{ хв}; \; 240 : 240 = 1 \text{ (хв)}.$$

2) Знайдемо час, який потрібний автомобілю щоб подолати відстань 360 км:

$$1 \cdot 360 = 360 \text{ (хв)}; \; 360 \text{ хв} = 6 \text{ (год)}.$$

Відповідь. Відстань 360 км автомобіль подолає за 6 год.

Для розв'язування таких задач використовуються також раціональніший спосіб відношень і пропорції. Проте володіння способом прямого та оберненого зведення до одиниці сприятиме свідомому засвоєнню способів розв'язування задач на знаходження частини (відсотків) від числа та знаходження цілого за відомою його частиною.

Під час розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного учні отримують перші уявлення про функціональні залежності між величинами. Зокрема, у текстових задач між величинами, залежно від сюжету, існують такі залежності:

ціна × кількість = вартість;
швидкість × час = відстань;
продуктивність праці × час = виконана робота.

Для кращого засвоєння учнями різних видів зв'язків доцільно показати, що на залежність трьох величин за даним сюжетом (рух, купівля, виготовлення деталей, виконання певної роботи тощо) можна скласти 12 задач. Ці задачі діляться на три групи взаємно обернених задач.

Задача 57. За 3 кг печива заплатили 42 грн. Скільки коштують 7 кг такого самого печива?

Розв'язання

1) $42 : 3 = 14$ (грн) – ціна одного кілограма печива.

2) $14 \cdot 7 = 98$ (грн) – вартість 7 кг печива.

Відповідь. 7 кг печива коштують 98 грн.

Перевірити правильність отриманого розв'язку можна, розв'язавши одну з трьох обернених задач. Для кращого порівняння умов і розв'язань прямої та обернених задач можна скласти таблицю 14 (див. с. 56).

Таблиця 14

№ задачі	Ціна	Кількість	Вартість	Розв'язання
1	Однакова	3 7	42 ?	(42 : 3) · 7 = 98 (грн)
2	Однакова	3 7	? 98	(98 : 7) · 3 = 42 (грн)
3	Однакова	3 ?	42 98	98 : (42 : 3) = 7 (кг)
4	Однакова	? 7	42 98	42 : (98 : 7) = 3 (кг)

Аналізуючи записи у таблиці, учні дійдуть висновку, що за умови однакової ціни, чим більшу кількість товару купуємо, тим більшою буде його вартість. Якщо в задачі 57 незмінною буде кількість товару, а ціна змінюватиметься, то можна скласти нову групу взаємно обернених задач. Короткі умови цих задач разом із розв'язаннями подано в таблиці 15.

Таблиця 15

№ задачі	Ціна	Кількість	Вартість	Розв'язання
5	21 9	Однакова	63 ?	(63 : 21) · 9 = 27 (грн)
6	21 9	Однакова	? 27	(27: 9) · 21 = 63 (грн)
7	? 9	Однакова	84 63	84 : (63 : 9) = 12 (кг)
8	12 ?	Однакова	84 63	63 : (84 : 12) = 9 (кг)

Аналіз записів у таблиці показує, що при однаковій кількості товару, що купується, вартість буде більшою тоді, коли більша його ціна. Якщо постійною є вартість товару, то отримаємо іншу групу задач, у яких, на відміну від перших двох груп, між величинами існує обернено пропорційна залежність (таблиця 16).

Таблиця 16

№ задачі	Ціна	Кількість	Вартість	Розв'язання
9	21 9	3 ?	Однакова	(21 · 3) : 9 = 7 (кг)
10	21 9	? 7	Однакова	(9 · 7) : 21 = 3 (кг)
11	? 9	3 7	Однакова	(9 · 7) : 3 = 21 (грн)
12	21 ?	3 7	Однакова	(21· 3) : 7 = 9 (грн)

Задачі на знаходження четвертого пропорційного можна також розв'язати способом відношень. Перед початком вивчення цього способу слід нагадати властивості дії множення, що стосуються змін компонентів:

1) якщо один із множників збільшити (зменшити) в деяку кількість разів, а другий множник залишити без змін, то в таку саму кількість разів збільшиться (зменшиться) і добуток;

2) якщо один із множників збільшити в деяку кількість разів, а другий множник зменшити в таку саму кількість разів, то добуток залишиться без змін.

Задача 58. За 3 дні бригада робітників зібрала 16 приладів. Скільки приладів збере ця сама бригада за 15 днів, якщо буде працювати з такою самою продуктивністю праці?

Короткий запис умови подамо у вигляді таблиці 17.

Таблиця 17

Продуктивність праці	Кількість днів	Кількість приладів
Однакова	3	16
	15	?

Аналіз задач

Під час розв'язування цієї задачі способом зведення до одиниці, помічаємо, що оскільки 16 не можна поділити на 3 без остачі, то продуктивність праці не буде виражатися цілим числом. Аналіз короткого запису дає можливість переконатися, що чим більше днів працюватимуть робітники, тим більше зберуть приладів. Якщо вони працюватимуть 6 днів (3 · 2), то виготовлять не 16 приладів, а 16 · 2. Якщо працюватимуть 6 · 3 = = 18 (днів), то виготовлять 16 · 3 = 48 приладів.

Отже, щоб знайти, скільки приладів збирає бригада за 15 днів, потрібно спочатку знайти, скільки разів число 3 вміщується у числі 15, тобто у скільки разів число 15 більше за число 3, у стільки само разів більше приладів збирає бригада.

Розв'язання

1) 15 : 3 = 5 (раз) – у стільки разів збільшилася тривалість роботи бригади.

2) 16 · 5 = 80 (приладів) – стільки приладів збере бригада.

Відповідь. За 15 днів бригада збере 80 приладів.

Задача 59. 8 кг цукерок коштують стільки само, як і 63 кг печива. Скільки кілограмів печива можна купити замість 12 кг цукерок?

Розв'язання

Кількість цукерок збільшилась у $\frac{12}{8}$ раза. Отже, грошей потрібно заплатити також більше в $\frac{12}{8}$ раза. Якщо платитимемо грошей більше в $\frac{12}{8}$ раза, то і печива можемо купити за такою самою ціною у $\frac{12}{8}$ раза більше:

$$63 \cdot \frac{12}{8} = 94,5 \text{ (кг)}.$$

Відповідь. Замість 12 кг цукерок можна купити 94,5 кг печива.

Зауважимо, що під час короткого табличного запису умови задачі на знаходження четвертого пропорційного два числа, що стоять в одному стовпці, є значеннями однієї й тієї самої величини. Тому далі, під час вивчення пропорцій, табличний запис можна буде просто замінити звичним схематичним записом, який використовується під час розв'язування задач з прямо та обернено пропорційними величинами. Проте з таким переходом не слід поспішати, оскільки відмова від запису третього стовпця, де зазначено величину, що має однакові значення, для частини учнів створює додаткові трудноші під час встановлення виду пропорційної залежності. Тому доцільно під час запису розв'язання коротко пояснювати, на підставі якої ознаки дані величини будуть пропорційними. Додатково можна використовувати дві стрілки: однаково напрямлені, щоб показати прямо пропорційну залежність даних величин, або протилежно напрямлені, якщо величини обернено пропорційні.

Задача 60. 4 друкарки можуть надрукувати рукопис за 12 днів. За скільки днів зможуть надрукувати цей рукопис 6 друкарок, які мають таку саму продуктивність праці?

Короткий запис умови:

4 друкарки – 12 днів;

6 друкарок – ? днів.

Аналіз задачі

У задачі фігурують дві величини: кількість друкарок і кількість днів, що вони працюють. Між цими величинами обернено пропорційна залежність: у скільки разів збільшиться кількість друкарок, у стільки само разів зменшиться час виконання роботи.

Розв'язання 1

(спосіб відношень)

1) 6 : 4 = 1,5 (раза) – у стільки разів більше стало друкарок.

2) 12 : 1,5 = 8 (днів) – час, потрібний 6 друкаркам для виконання роботи.

Розв'язання 2

(спосіб пропорцій)

Позначимо за x час, необхідний 6 друкаркам для друкування рукопису. Тоді матимемо: $\frac{x}{12} = \frac{4}{6}$; $x = \frac{12 \cdot 4}{6} = 8$ (днів).

Розв'язання 3

(спосіб зведення до одиниці)

1) За скільки днів одна друкарка зможе надрукувати весь рукопис, тобто виконати всю роботу?

$12 \cdot 4 = 48$ (днів).

2) За скільки днів надрукують рукопис 6 друкарок?

$48 : 6 = 8$ (днів).

Відповідь. 6 друкарок надрукують рукопис за 8 днів.

Задача 61. У 10 кг морської води міститься 0,2 кг солі. Скільки морської води потрібно взяти, щоб одержати 300 кг солі?

Короткий запис умови:

10 кг води – 0,2 кг солі;

? кг води – 300 кг солі.

Аналіз задачі

Між величинами задачі залежність прямо пропорційна: у скільки разів збільшимо вагу морської води, у стільки само разів збільшиться і вага добутої з неї солі.

Розв'язання 1

(спосіб зведення до одиниці)

1) Скільки потрібно води, щоб одержати 1 кг солі?

$10 : 0,2 = 50$ (кг).

2) Скільки потрібно морської води, щоб одержати 300 кг солі?

$50 \cdot 300 = 15\,000$ (кг).

Розв'язання 2

(спосіб відношень)

1) 300 : 0,2 = 1500 (раз) – у стільки разів більше потрібно отримати солі.

2) 10 · 1500 = 15 000 (кг) – стільки потрібно взяти морської води.

Відповідь. Щоб одержати 300 кг солі, потрібно взяти 15 000 кг води.

Серед задач з пропорційними величинами зустрічаються й такі, де задано більше ніж дві величини. Ці задачі іноді називають *задачами на складне правило трьох*. Їх можна розв'язувати: 1) розбивши на кілька задач на просте правило трьох (з певними умовами); 2) способом зведення до одиниці; 3) способом відношень; 4) за допомогою формул.

Задача 62. 26 овець за 5 днів з'їдають 325 кг сіна. Скільки сіна з'їдять 8 овець за 4 дні?

Короткий запис умови:

26 овець – 5 днів – 325 кг;

8 овець – 4 дні – ? кг.

Аналіз задачі

У задачі йдеться про три величини: кількість овець, час, кількість сіна. Кількість сіна прямо пропорційна до кількості овець при сталому часі та прямо пропорційна до часу, якщо кількість овець стала. Розбиваємо задачу на дві.

Розв'язання

(спосіб пропорцій)

1) (*Перша задача.*) Вважаємо кількість днів однаковою і беремо до уваги лише різну кількість овець. Тоді короткий запис буде таким:

26 овець – 325 кг;

8 овець – x_1 кг.

Складаємо пропорцію: $26:8=325:x_1$. Тоді $x_1=8\cdot 325:26=100$ (кг) – стільки сіна потрібно 8 вівцям на 5 днів.

2) (*Друга задача.*) Беремо до уваги різну кількість днів. Тоді короткий запис буде таким:

5 днів – 100 кг;

4 днів – x_2 кг.

Складаємо пропорцію: $5:4=100:x_2$. Тоді $x_2=4\cdot 100:5=80$ (кг) – стільки сіна потрібно 8 вівцям на 4 дні.

Відповідь. 8 вівцям на 4 дні потрібно 80 кг сіна.

Задача 63. 100 синиць за 100 днів з'їдають 100 кг зерна пшениці. Скільки кілограмів зерна з'їдять за 10 днів 10 синиць?

Короткий запис умови задачі:

Зерно	**Синиці**	**Дні**
100	100	100
10	10	?

Розв'язання

Кількість синиць зменшилася в 100 : 10 = 10 (раз). Тому кількість з'їденого ними зерна за умови, що кількість днів не змінилась, також має зменшитися в 10 раз. Отже, для 10 синиць на 100 днів треба 100 : 10 = 10 (кг) зерна. Кількість днів зменшилася у 100 : 10 = 10 (раз). Тому кількість зерна також зменшиться в 10 раз. Отже, для 10 синиць на 10 днів треба 10 : 10 = 1 (кг) зерна.

Відповідь. Для 10 синиць на 10 днів треба 1 кг зерна.

Задача 64. (Із задач В.А. Євтушевського.) Освітлення 6 вулиць, на кожній з яких по 26 ліхтарів, упродовж 20 днів коштує 374 руб. 40 к. Скільки буде коштувати освітлення 8 вулиць, на кожній з яких по 15 ліхтарів, упродовж 1 дня; 2 днів; 12 днів?

Розв'язання

(спосіб зведення до одиниці)

1) Скільки коштує освітлення 26 ліхтарями однієї вулиці упродовж 20 днів?

$$37\,440 : 6 = 6240 \text{ (к.)}.$$

2) Скільки коштує освітлення 1 ліхтарем однієї вулиці упродовж 20 днів?

$$6240 : 26 = 240 \text{ (к.)}.$$

3) Скільки коштує освітлення 1 ліхтарем однієї вулиці упродовж 1 дня?

$$240 : 20 = 12 \text{ (к.)}.$$

4) Скільки коштує освітлення 15 ліхтарями однієї вулиці упродовж 1 дня?

$$12 \cdot 15 = 180 \text{ (к.)}.$$

5) Скільки коштує освітлення 15 ліхтарями 8 вулиць упродовж 1 дня?

$$180 \cdot 8 = 1440 \text{ (к.)}.$$

Зауваження. Запис розв'язання може бути таким:

6 вулиць –	26 ліхтарів –	20 днів –	374 руб. 40 к..
8 вулиць –	15 ліхтарів –	1 день –	?
1 вулиця –	26 ліхтарів –	20 днів –	$\frac{37\,440}{6}$ к.;
1 вулиця –	1 ліхтар –	20 днів –	$\frac{37\,440}{6 \cdot 26}$ к.;
1 вулиця –	1 ліхтар –	1 день –	$\frac{37\,440}{6 \cdot 26 \cdot 20}$ к.;
1 вулиця –	15 ліхтарів –	1 день –	$\frac{37\,440 \cdot 15}{6 \cdot 26 \cdot 20}$ к.;
8 вулиць –	15 ліхтарів –	1 день –	$\frac{37\,440 \cdot 15 \cdot 15}{6 \cdot 26 \cdot 20}$ к.

Остаточно матимемо: $\dfrac{37\,440\cdot 15\cdot 15}{6\cdot 26\cdot 20}=1440$ (к.)

Відповідь. 1440 к. = 14 руб. 40 к.

У наведених задачах на складне правило трьох залежності між величинами були прямо пропорційні. Розглянемо задачу з прямо та обернено пропорційними залежностями.

Задача 65. На пошиття 12 наметів потрібно 240 м брезенту шириною 1,2 м. Скільки метрів брезенту шириною 0,9 м потрібно на пошиття 8 таких наметів?

Розв'язання 1

(спосіб зведення до одиниці)

Запишемо розв'язання у вигляді таблиці 18.

Таблиця 18

№ з/п	Запитання	Кількість наметів	Ширина (м)	Довжина (м)
		12	1,2	240
1	Скільки метрів брезенту шириною 1,2 м буде використано для 1 намету?	1	1,2	$\dfrac{240}{12}$
2	Скільки метрів брезенту шириною 1 м буде використано для пошиття 1 намету?	1	1	$\dfrac{240\cdot 1,2}{12}$
3	Скільки метрів брезенту шириною 0,9 м буде використано для пошиття 1 намету?	1	0,9	$\dfrac{240\cdot 1,2}{12\cdot 0,9}$
4	Скільки метрів брезенту шириною 0,9 м потрібно на пошиття 8 таких наметів?	8	0,9	$\dfrac{240\cdot 1,2\cdot 8}{12\cdot 0,9}$

Отже, брезенту потрібно $\dfrac{240\cdot 1,2\cdot 8}{12\cdot 0,9}=213\dfrac{1}{3}$ (м).

Розв'язання 2

(за допомогою пропорцій)

Короткий запис умови:

Кількість наметів	**Ширина брезенту**	**Довжина брезенту**
12	1,2 м	240 м
8	0,9 м	? м

Аналіз задачі

У задачі йдеться про три величини: кількість наметів, довжина брезенту та ширина брезенту. Між кількістю наметів і довжиною брезенту прямо пропорційна залежність. Між шириною і довжиною брезенту за умови, що площа та сама, обернено пропорційна залежність.

1) Нехай кількість наметів залишиться незмінною. Тоді маємо першу задачу з двома обернено пропорційними величинами. Її короткий запис:

Ширина брезенту	**Довжина брезенту**
1,2 м	240 м
0,9 м	x_1 м

Складаємо пропорцію: $1,2 : 0,9 = x_1 : 240$.

Звідси $x_1 = \dfrac{240 \cdot 1,2}{0,9}$ (м) – довжина брезенту шириною 0,9 м, яка потрібна на пошиття 12 наметів.

2) Беремо до уваги зміну кількості наметів. Маємо короткий запис другої задачі:

Кількість наметів	**Довжина брезенту**
12	$\dfrac{240 \cdot 1,2}{12}$ (м)
8	x_2

Складаємо пропорцію: $12 : 8 = \left(\dfrac{240 \cdot 1,2}{0,9}\right) : x_2$.

Отримуємо $x_2 = \left(\dfrac{240 \cdot 1,2 \cdot 8}{0,9 \cdot 12}\right)$ (м).

Відповідь. Потрібно $213\frac{1}{3}$ м брезенту.

Не слід захоплюватися розв'язуваннями задач на складне правило трьох, бо воно займає багато часу та громіздке. Учитель, добираючи такі задачі, повинен орієнтуватися на рівень знань і вмінь учнів конкретного класу. Можна ознайомити учнів і з використанням формул до розв'язування задач на складне правило трьох.

Нехай у задачі дано величини $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ такі, що відомі два значення кожної з них: значення a_1, b_1 величини P_1, a_2, b_2 величини P_2, ...

a_{n-1}, b_{n-1} величини P_{n-1}, та величина P_n, для якої відомо лише одне значення a_n. У задачі ставиться вимога знайти друге значення b_n для величини P_n. Можливі три випадки.

1. Якщо між величинами P_1, P_2, ... , P_n прямо пропорційна залежність, то умову задачі можна коротко записати, як на схемі (а).

Зауваження. На схемах (а) – (б) скорочення «пр. пр.» означає «прямо пропорційна залежність», «об. пр.» – «обернено пропорційна залежність».

а)	P_1	P_2	...	P_{n-1}	P_n
	пр. пр.	пр. пр.		пр. пр.	пр. пр.
	a_1	a_2		a_{n-1}	a_n
	b_1	b_2		b_{n-1}	x

Щоб знайти x, використовуємо формулу $x = \dfrac{a_n b_{n-1} b_{n-2} \dots b_2 b_1}{a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1}$.

2. Якщо між величинами P_1, P_2, ... , P_n обернено пропорційна залежність, то короткий запис умови задачі може бути, як на схемі (б).

б)	P_1	P_2	...	P_{n-1}	P_n
	об. пр.	об. пр.		об. пр.	об. пр.
	a_1	a_2		a_{n-1}	a_n
	b_1	b_2		b_{n-1}	x

Щоб знайти x, використовуємо формулу $x = \dfrac{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1}{b_{n-1} b_{n-2} \dots b_1}$.

3. Якщо між величинами P_1, P_2, ... , P_n є і прямо пропорційна, і обернено пропорційна залежність, то, наприклад, для $n = 5$ короткий запис умови може бути, як на схемі (в).

в)	P_1	P_2	P_3	P_4	P_4
	пр. пр.	об. пр.	об. пр.	пр. пр.	об. пр.
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5

Щоб знайти x, використовуємо формулу $x = \dfrac{a_1 b_2 b_3 a_4 a_5}{b_1 a_2 a_3 b_4}$.

1.6. ДЕЯКІ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТЕКСТОВИХ ЗАДАЧ

На основі схожості за математичною суттю та взаємозамінності різних прийомів розв'язування (детально про це можна почитати у книзі І.І.Александрова [1]) усі арифметичні способи можна об'єднати у такі групи:

1) спосіб зведення до одиниці, приведення до спільної міри, оберненого зведення до одиниці, спосіб відношень;

2) спосіб зворотності;

3) спосіб виключення невідомих (заміна одного невідомого іншим, зрівняння невідомих, зрівняння даних, зрівняння двох умов відніманням, об'єднання двох умов в одну); спосіб припущення;

4) пропорційний поділ, подібність або знаходження частин;

5) спосіб перетворення однієї задачі в іншу (розкладання складеної задачі на прості, підготовчих; зведення невідомих до таких значень, для яких стає відомим їх відношення; прийом призначення довільного числа для однієї з невідомих величин).

Крім названих способів? доцільно розглядати ще спосіб середнього арифметичного, метод лишків, спосіб перестановки відомого та невідомого (метатези), спосіб «фальшивих» правил.

Оскільки зазвичай неможливо наперед визначити, який із способів є найраціональнішим, передбачити, який із них приведе до найпростішого та найзрозумілішого для учня розв'язання, то варто учнів ознайомлювати з різними способами та давати їм можливість самим обирати, який із них застосувати під час розв'язування конкретної задачі.

Вище розглядалися способи прямого та оберненого зведення до одиниці, спосіб відношень, спосіб зворотності (обернених міркувань) та умовної одиниці, спосіб частин тощо. Розглянемо розв'язування задач іншими способами, з якими також доцільно ознайомлювати учнів в основній школі, зокрема *способом виключення невідомих* та *способом припущення*.

Спосіб виключення невідомих

Цей спосіб використовується, коли в задачі є кілька невідомих. Таку задачу можна розв'язати за допомогою одного з п'яти прийомів: 1) заміни одного невідомого іншим; 2) зрівняння невідомих; 3) зрівняння двох умов відніманням; 4) зрівняння даних; 5) об'єднання кількох умов в одну.

У результаті застосування одного з перелічених прийомів замість кількох невідомих залишається одне, яке можна знайти. Обчисливши його, використовують дані в умові залежності для знаходження інших невідомих.

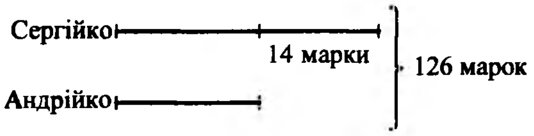
Зупинимося детальніше на розгляді деяких з прийомів.

1. Заміна одного невідомого іншим.

Назва прийому розкриває його ідею: на основі залежностей (кратних або різницевих), які дано в умові задачі, треба виразити всі невідомі через одне з них.

Задача 66. У Сергійка та Андрійка разом 126 марок. У Сергійка на 14 марки більше, ніж у Андрійка. Скільки марок має кожен з хлопчиків?

Короткий запис умови:



Розв'язання 1

(заміна більшого невідомого меншим)

1) Нехай у Сергійка було стільки марок, як і в Андрійка. Тоді загальна кількість марок була б $126 - 14 = 112$ (марок).

2) Оскільки у хлопчиків тепер однакова кількість марок, то знайдемо, скільки марок було у Андрійка спочатку:

$$112 : 2 = 56 \text{ (марок).}$$

3) Врахувавши, що Сергійко мав на 14 марок більше, ніж Андрійко, отримаємо:

$$56 + 14 = 70 \text{ (марок).}$$

Розв'язання 2

(заміна меншого невідомого більшим)

1) Нехай у Андрійка було стільки марок, як і у Сергійка. Тоді загальна кількість марок була б $126 + 14 = 140$ (марок).

2) Оскільки у хлопчиків тепер однакова кількість марок, то знайдемо, скільки марок було у Сергійка спочатку:

$$140 : 2 = 70 \text{ (марок).}$$

3) Врахувавши, що в Андрійка було на 14 марок менше, ніж у Сергійка, отримаємо:

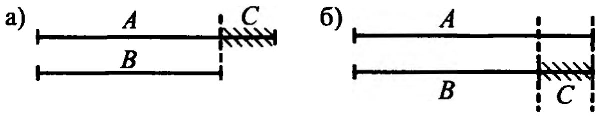
$$70 - 14 = 56 \text{ (марок).}$$

Відповідь. У Сергійка було 70 марок, а в Андрійка – 56 марок.

Для кращого засвоєння учнями способу заміни меншого невідомого більшим перед його розглядом варто з'ясувати з учнями такий факт: якщо число A більше за число B на C одиниць, то щоб зрівняти числа A та B треба:

а) від числа A відняти число C (тоді обидва числа дорівнюватимуть B);

б) до числа B додати число C (тоді обидва числа дорівнюватимуть A).

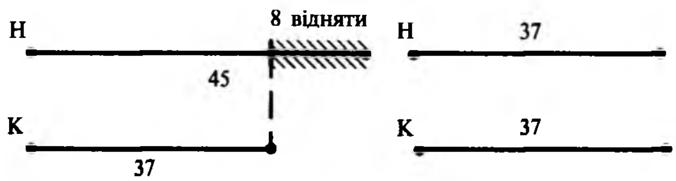


Психологічно сприйняття цього способу для деяких учнів є дещо важчим, ніж заміна більшого невідомого меншим. Так, розв'язуючи задачу, додаємо до загальної кількості 14 марок, яких не було в умові, і для учнів не зрозуміло, де вони беруться. Тому попередньо можна запропонувати учням нескладні завдання на зрівняння чисел та виконувати їх з обов'язковим використанням графічних схем. Уміння учнів замінювати більше невідоме меншим, і навпаки, у подальшому сприятимуть розвитку вмінь обирати невідоме і виражати через нього інші величини під час складання рівнянь.

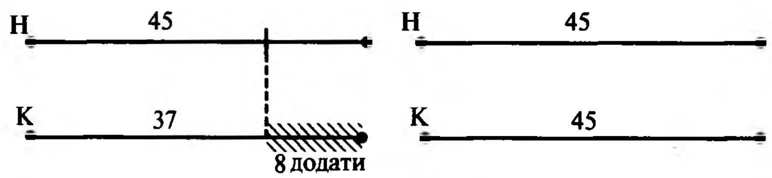
Задача 67. У Наталки 45 листівок, а у Катрусі – 37. У кого листівок більше і на скільки? Знайдіть можливі варіанти зрівняння кількостей листівок у Наталки та Катрусі.

Розв'язання

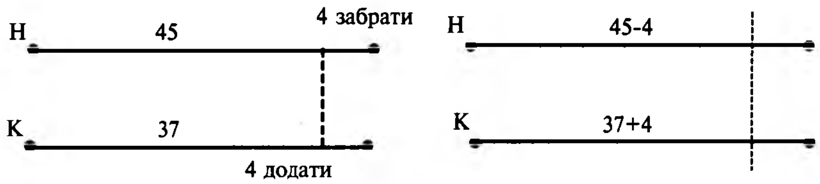
1) Якщо у Наталки забрати 45 – 37 = 8 листівок, то в обох дівчаток буде по 37 листівок, а саме як у Катрусі.



2) Якщо Катрусі дати 8 листівок, то у кожної з дівчаток буде по 45 листівок, а саме – як у Наталки.



3) Якщо у Наталки забрати 4 листівки і віддати їх Катрусі, то у кожної із дівчинок буде по 41 листівці.



Остання схема дає можливість розв'язати задачу 67 способом одночасної заміни і більшого, і меншого невідомого через їх середнє значення.

Задача 68. Під час відвідування музею було куплено 34 дитячих квитки і 3 квитки для дорослих, причому за всі квитки заплатили 92 грн. Яка ціна квитків, якщо дитячий квиток у 4 рази дешевший, ніж квиток для дорослого?

Розв'язання

У задачі треба знайти ціну квитка для дорослого і ціну квитка для дитини. Відомо, що квиток для дорослого коштує в 4 рази дорожче, ніж дитячий. Дано кількість куплених квитків і для дорослих, і для дітей.

Можна виключити куплені квитки для дорослих, замінивши їх квитками для дітей (або навпаки). Оскільки для дорослих куплено 3 квитки і кожний з них у 4 рази дорожчий, ніж квиток для дитини, то замість 3 квитків для дорослих можна купити в 4 рази більше квитків для дітей ($3 \cdot 4 = 12$). У цьому випадку для дітей буде куплено всього $12 + 34 = 46$ (квитків).

Оскільки сума грошей, що заплачено за квитки, при цьому не змінилася, то можна знайти ціну дитячого квитка: $96 : 46 = 2$ (грн).

Знайдемо далі ціну дорослого квитка: $2 \cdot 4 = 8$ (грн).

Відповідь. Квиток для дорослого коштує 8 грн, а дитячий – 2 грн.

Задача 69. Для шкільної бібліотеки купили 20 підручників, 50 задачників і 60 довідників, усього на суму 1031грн. Підручник коштує на 2,2 грн дорожче, ніж задачник, який на 1,1 грн дорожче, ніж довідник. Скільки коштує окремо кожна книжка?

Розв'язання

1) На скільки менше заплатили б за покупку, якби ціна задачника була такою самою, як ціна довідника?

$$1{,}1 \cdot 50 = 55 \text{ (грн)}.$$

2) На скільки підручник дорожчий за довідник?

$$2{,}2 + 1{,}1 = 3{,}3 \text{ (грн)}.$$

3) На скільки менше заплатили б за покупку, якби ціна підручника, дорівнювала ціні довідника?

$$3{,}3 \cdot 20 = 66 \text{ (грн)}.$$

4) Скільки заплатили б за всі книги, якби замість підручників і задачників купили довідники?

$$1031 - 55 - 66 = 910 \text{ (грн)}.$$

5) Скільки довідників можна купити за 910 грн?

$$20 + 50 + 60 = 130 \text{ (довідників)}.$$

6) Скільки коштує один довідник?

$$910 : 130 = 7 \text{ (грн)}.$$

7) Скільки коштує один задачник?

$$7 + 1{,}1 = 8{,}1 \text{ (грн)}.$$

8) Скільки коштує підручник?

$$8{,}1 + 2{,}2 = 10{,}3 \text{ (грн)}.$$

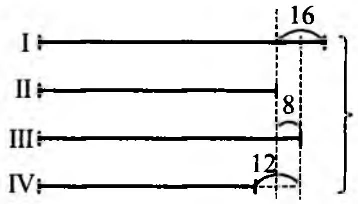
Відповідь. Підручник коштує 10,3 грн, задачник – 8,1 грн, довідник – 7 грн.

2. Зрівняння невідомих.

Задача 70. На чотирьох полицях стояло 188 книжок. На другій полиці книжок було на 16 менше, ніж на першій, на третій – на 8 більше, ніж на другій, а на четвертій – на 12 менше, ніж на третій полиці. Скільки кн'жок на кожній полиці?

Аналіз задачі

Для кращого усвідомлення залежностей між чотирма невідомими величинами (кількістю книжок на кожній з полиць) використаємо схему.



Порівнюючи відрізки, які схематично зображують кількість книжок на кожній із полиць, доходимо таких висновків: книжок на першій полиці на 16 більше, ніж на другій; на третій на 8 більше, ніж на другій; на четвертій – на 12 – 8 = 4 (книжки) менше, ніж другій. Отже, задачу можна розв'язати, зрівнявши кількість книжок на кожній із полиць. Для цього знімемо з першої полиці 16 книжок, з третьої – 8 книжок та поставимо на четверту полицю 4 книжки. Тоді на всіх полицях буде однакова кількість книжок, а саме – як на другій було спочатку.

Розв'язання

1) Скільки книжок стоїть на всіх полицях після описаних в аналізі задачі операцій?

$$188 - 16 - 8 + 4 = 168 \text{ (книжок)}.$$

2) Скільки книжок було на другій полиці?

$$168 : 4 = 42 \text{ (книжки)}.$$

3) Скільки книжок було на першій полиці?

$$42 + 16 = 58 \text{ (книжок)}.$$

4) Скільки книжок було на третій полиці?

$$42 + 8 = 50 \text{ (книжок)}.$$

5) Скільки книжок було на четвертій полиці?

$$50 - 12 = 38 \text{ (книжок)}.$$

Відповідь. На кожній із чотирьох полиць було 58, 42, 50 і 38 книжок.

Зауваження. Можна запропонувати учням розв'язати цю задачу іншими способами, якщо зрівнювати невідомі за кількістю книг, які стояли на першій, або на другій, або на четвертій полицях?

3. Зрівняння двох умов відніманням.

У сюжет задач, що розв'язуються цим прийомом, часто входять дві пропорційні величини (кількість товару і його вартість, кількість робітників і виконана ними робота тощо). В умові дається два значення однієї величини і різниця двох пропорційних до них числових значень іншої величини.

Задача 71. Щоб пошити костюми для учасників шкільного свята, першого разу купили 46 м тканини, а другого разу 32 м такої самої тканини. Знайдіть, скільки коштує 1 м тканини, якщо першого разу заплатили на 224 грн більше.

У задачах із ускладненим математичним змістом спочатку потрібно виконати певні перетворення з початковою умовою за допомогою віднімання. Проілюструємо це на прикладі.

Задача 72. За 4 кг апельсинів і 5 кг бананів заплатили 33 грн, а іншого разу за 4 кг апельсинів і 3 кг бананів, куплених за такими самими цінами, заплатили 27 грн. Скільки коштують 1 кг апельсинів і 1 кг бананів?

Короткий запис умови:

4 кг ап. і 5 кг бан. – 33 грн,

4 кг ап. і 3 кг бан. – 27 грн.

Розв'язання

1) Порівняємо вартість двох покупок. І першого, і другого разу купували однакову кількість апельсинів за тою самою ціною. Першого разу

заплатили більше тому, що купили більше бананів. Знайдемо, на скільки кілограмів бананів було куплено більше першого разу: $5-3=2$ (кг).

2) Знайдемо, на скільки більше заплатили першого разу, ніж другого (тобто дізнаємося, скільки коштують 2 кг бананів): $33-27=6$ (грн).

3) Знайдемо ціну 1 кг бананів: $6:2=3$ (грн).

4) Знаючи вартість першої та другої покупок, можемо знайти ціну 1 кг апельсинів. Для цього спочатку знаходимо вартість куплених бананів, потім вартість апельсинів, а потім ціну 1 кг. Маємо: $(33-5\cdot 3):4=4{,}5$ (грн).

Відповідь. Ціна 1 кг апельсинів – 4,5 грн, а ціна 1 кг бананів – 3 грн.

4. Зрівняння даних.

Використання цього прийому дає можливість зрівняти дані та використати спосіб віднімання. Зрівнювати значення даних можна:

1) за допомогою множення (прирівнюючи їх до найменшого спільного кратного);

2) за допомогою ділення (прирівнюючи їх до найбільшого спільного дільника). Покажемо це на прикладі.

Задача 73. За 4 кг апельсинів і 5 кг бананів заплатили 33 грн, а іншого разу за 6 кг апельсин і 3 кг бананів, куплених за такими самими цінами, заплатили 367 грн. Скільки коштують 1 кг апельсинів і 1 кг бананів?

Короткий запис умови:

4 кг ап. і 5 кг бан. – 33 грн,

6 кг ап. і 3 кг бан. – 36 грн.

Зрівняємо кількість апельсинів і бананів, прирівнюючи їх до найменшого спільного кратного: НСК(4; 6) = 12.

Розв'язання 1

1) Збільшимо кількість куплених фруктів і їх вартість у першому випадку в 3 рази, а в другому – в 2 рази. Отримаємо такий короткий запис умови:

12 кг ап. і 15 кг бан. – 99 грн,

12 кг ап. і 6 кг бан. – 72 грн.

2) Дізнаємося, на скільки більше бананів купують першого разу:

$$15-6=9 \text{ (кг)}.$$

3) Скільки коштує 9 кг бананів? $99-72=27$ (грн).

4) Знайдемо ціну 1 кг бананів: $27:9=3$(грн).

5) Знайдемо вартість 3 кг бананів: $3\cdot 3=9$ (грн).

6) Знайдемо вартість 6 кг апельсинів: $36-9=27$ (грн).

7) Знайдемо ціну 1 кг апельсинів: $27:6=4{,}5$ (грн).

Розв'язання 2

Зрівняємо кількість апельсинів і бананів, прирівнюючи їх до найбільшого спільного дільника: НСД (4; 6) = 2.

1) Щоб зрівняти кількість апельсинів, куплених першого та другого разу, зменшимо кількість купленого товару і його вартість в першому випадку в 2 рази, а другому – в 3 рази. Отримаємо задачу, що має такий короткий запис умови.

2 кг ап. і 2,5 кг бан. – 16,5 грн,

2 кг ап. і 1 кг бан. – 12 грн.

2) На скільки тепер купують бананів більше: 2,5 – 1 = 1,5 (кг).

3) Знайдемо, скільки коштує 1,5 кг бананів: 16,5 – 12 = 4,5 (грн).

4) Знайдемо ціну 1 кг бананів: 4,5 : 1,5 = 3 (грн.).

5) Знайдемо ціну 1 кг апельсинів: (36,5 – 3·3) : 6 = 4,5 (грн).

Відповідь. Ціна 1 кг апельсинів – 4,5 грн, 1 кг бананів – 3 грн.

Під час розв'язування задач з використанням прийому зрівняння даних можна не виконувати такого детального аналізу та записів, а лише виконати запис змін, які виконували для зрівняння, та записати їх у таблиці.

Задача 74. З якою швидкістю туристи повинні рухатися пішки та їхати на велосипедах, щоб першого дня за 3,5 год руху пішки та 1,5 год їзди на велосипедах подолати відстань в 38,5 км, а другого дня за 2 год руху пішки та 4 год їзди на велосипедах – 66 км?

Розв'язання

Таблиця 19

Випадки	Час руху пішки	Час руху на велосипедах	Відстань
Перший	3,5 год	1,5 год	38,5 км
Другий	2 год	4 год	66 км
Штучно змінений перший (× 2)	7 год	3 год	77 км
Штучно змінений другий(× 3,5)	7 год	14 год	231 км

1) Знайдемо швидкість, з якою туристи їхали на велосипедах:

(231 – 77) : (14 – 3) = 14 (км/год).

2) Знайдемо швидкість, з якою туристи йшли пішки:

(66 – 14 · 4) : 2 = 5 (км/год).

Відповідь. Швидкість руху туристів пішки – 5 км/год, на велосипедах – 14 км/год.

5. Об'єднання кількох умов в одну.

Іноді позбутися зайвих невідомих можна, об'єднавши кілька умов в одну.

Задача 75. Туристи вийшли з табору і спочатку 4 год рухалися пішки, а потім ще 4 год їхали на велосипедах з деякою постійною швидкістю та віддалилися від табору на 60 км. Другого разу вони вирушили з табору та спочатку їхали на велосипедах з тією самою швидкістю 7 год, а потім повернули в зворотному напрямку і, рухаючись пішки 4 год, опинилися на відстані 50 км від табору. З якою швидкістю туристи їхали на велосипедах?

Розв'язання

У задачі два невідомих: швидкість, з якою туристи їхали на велосипедах, і швидкість, з якою вони йшли пішки. Для того, щоб виключити одне з них, можна об'єднати дві умови в одну. Тоді відстань, яку пройдуть туристи за 4 год, рухаючись уперед першого разу пішки, дорівнює відстані, яку вони пройшли за 4 год, рухаючись назад другого разу. Тому ці відстані не беремо до уваги. Отже, відстань, яку проїдуть туристи за 4 + 7 = 11 (год) на велосипедах, буде дорівнювати 50 + 60 = 110 (км).

Тоді швидкість руху туристів на велосипедах: 110 : 11 = 10 (км/год).

Відповідь. Швидкість руху на велосипедах становить 10 км/год.

Задача 76. У старшого та середнього братів разом було 100 грн, у середнього та молодшого – 70 грн, а у старшого та молодшого – 90 грн. Скільки грошей було у кожного з братів окремо?

Розв'язання 1

1) Якщо додамо всі дані в умові суми грошей, то отримаємо подвоєну суму грошей усіх трьох братів: 100 + 70 + 90 = 260 (грн).

2) Знайдемо, скільки разом у було грошей у братів: 260 : 2 = 130 (грн).

3) Знаючи загальну кількість грошей (130 грн) і кількість грошей, що мали старший і середній брати разом, знайдемо, скільки грошей було у молодшого брата: 130 – 100 = 30 (грн).

4) Знайдемо, скільки грошей було у середнього брата:

70 – 30 = 40 (грн), (або 130 – 90 = 40 (грн)).

5) Знайдемо, скільки грошей мав старший брат:

100 – 40 = 60 (грн), (або 90 – 30 = 60 (грн), або(130 – 70 = 60 (грн)).

Зауваження. Наведена задача цікава для розв'язування із різних точок зору. По-перше, якщо є вимога знайти загальну кількість грошей, що була у трьох братів, то немає потреби знаходити, скільки грошей було окремо у кожного з братів. По-друге, цю задачу можна розв'язати іншими способами. Наприклад, якщо об'єднати тільки дві умови, то отримаємо таке розв'язання.

Розв'язання 2

1) Якщо додамо суми грошей, що були разом у старшого і середнього та у старшого і молодшого братів, то отримаємо суму грошей, що була у середнього і молодшого братів разом з подвоєною кількістю грошей старшого брата: $100 + 90 = 190$ (грн).

2) Якщо від отриманого результату відняти суму грошей у середнього та молодшого братів (70 грн) та поділити результат на 2, то знайдемо кількість грошей, що була у старшого брата: $(190 - 70) : 2 = 60$ (грн).

Подальше розв'язання можна провести аналогічно наведеним вище крокам 4 і 5.

Розв'язання 3

(спосіб заміни)

Якщо порівняти кількість грошей, що була у старшого і середнього братів та у старшого і молодшого, то можна зробити висновок, що у молодшого брата було грошей на 10 грн менше, ніж у середнього. Використавши умову «у середнього та молодшого братів разом було 70 грн», замість початкової задачі на знаходження трьох чисел за їх попарними сумами (з трьома невідомими) одержуємо задачу на знаходження двох чисел за їх сумою та різницею (тобто з двома невідомими): «У середнього брата і молодшого разом було 70 грн. Скільки грошей було у кожного з братів, якщо молодший мав на 10 грн менше?»

1) $(70 - 10) : 2 = 30$ (грн) – гроші, що мав молодший брат.

2) $30 + 10 = 40$ (грн) – гроші, що мав середній брат.

3) $100 - 40 = 60$ (грн) – гроші, що мав старший брат.

Відповідь. У старшого брата було – 60 грн, у середнього – 40 грн, а у молодшого – 30 грн.

Аналогічно можна визначити, на скільки більше грошей мав старший брат, ніж середній, і отримати задачу на знаходження грошей старшого і середнього брата за їх сумою і різницею.

Спосіб припущення

Використання способу припущення під час розв'язування задач у більшості учнів не викликає труднощів. Проте, щоб не виникло механічного запам'ятовування учнями схеми кроків цього способу та нерозуміння суті виконуваних дій на кожному з них, слід спочатку показати учням спосіб спроб («фальшиве правило» та «правило стародавніх вавилонян»).

Під час використання способу спроб, зокрема «фальшивого правила», одній із невідомих величин надається («приписується») деяке значення. Потім, використовуючи всі умови, знаходять значення іншої величини. Отримане значення звіряють із тим, яке задано в умові. Якщо отримане значення відмінне від даного в умові, то надане перше значення не правильне і його потрібно збільшувати або зменшувати на 1, і знову знаходити значення другої величини. Так слід робити, поки не отримаємо значення другої величини таке, як в умові задачі.

Задача 77. У касира є 50 монет по 25 к. і по 10 к., усього на суму 11 грн. Знайдіть, скільки було в касира окремо монет по 25 к. і скільки по 10 к.

Розв'язання 1

(спосіб спроб)

Скористаємося правилом «стародавніх» вавилонян. Припустимо, що у касира монет кожного номіналу порівну, тобто по 25 штук. Тоді сума грошей буде $25 \cdot 25 + 10 \cdot 25 = 625 + 250 = 870$ к., або 8 грн 75 к. Проте в умові 11 грн, тобто більше, ніж отримали, на 11 грн – 8 грн 75 к. = 2 грн 25 к. Отже, треба збільшувати кількість монет по 25 к. та зменшувати кількість монет по 10 к., поки не отримаємо у сумі 11 грн. Зміну кількості монет та загальну суму записуватимемо у таблиці.

Таблиця 20

Кількість монет		**Сума грошей**		**Загальна сума**	**Менше, або більше, ніж в умові**
по 25 к.	по 10 к.	по 25 к.	по 10 к.		
25	25	6 грн 25 к .	2 грн 50 к.	8 грн 75 к.	Менше на 2 грн 25 к.
26	24	6 грн 50 к.	2 грн 40 к.	8 грн. 90 к.	Менше на 2 грн 10 к.
...	...	....	...	...	...
40	10	10 грн	1 грн	11 грн	Як в умові

Як видно з таблиці, у касира було 40 монет по 25 к. та 10 по 10 к.

Розв'язання 2

Як з'ясовано у розв'язанні 1, якщо б у касира було порівну монет по 25 к. і 10 к., то всього у нього було грошей 8 грн 75 к. Легко помітити, що кожна заміна монети 10 к. на монету 25 к. збільшує загальну суму на 15 к. Отже, слід знайти, скільки потрібно зробити таких замін. Для цього знайдемо спочатку, на скільки грошей треба збільшити загальну суму:

11 грн – 8 грн 75 к. = 2 грн 25 к. = 225 к.

Знайдемо, скільки разів таку заміну слід зробити: 225 к. : 15 к. = 15.

Тоді по 25 к. буде $25 + 15 = 40$ (монет), а монет по 10 к. залишиться

$$25 - 15 = 10.$$

Перевіркою впевнюємося, що загальна сума грошей у цьому випадку дорівнює 11 грн.

Відповідь. У касира було 40 монет по 25 к. і 10 монет по 10 к.

Запропонувавши учням самостійно обирати різні значення кількості монет по 25 к., слід підвести їх до ідеї, що найкращим з точки зору раціональності є *припущення*, що у касира були лише монети одного номіналу (наприклад, усі 50 монет по 25 к. або всі 50 монет по 10 к. кожна). Завдяки цьому одне з невідомих виключається і замінюється другим невідомим.

Задача 78. Для туристичного походу, в якому брали участь 92 учні, були підготовлені шестимісні та чотиримісні човни. Скільки було тих і других човнів, якщо туристи розмістилися в 20 човнах і вільних місць не залишилося?

Розв'язання 1

Припустимо, що всі човни чотиримісні.

1) Скільки учнів розмістилося тоді б у 20 човнах?

$4 \cdot 20 = 80$ (учнів).

2) На скільки більше учнів брало участь у поході, ніж отримали?

$92 - 80 = 12$ (учнів).

3) На скільки більше учнів розміщується в більшому човні, ніж у меншому?

$6 - 4 = 2$ (учні).

4) Скільки було шестимісних човнів?

$12 : 2 = 6$ (човнів).

5) Скільки було чотиримісних човнів?

$20 - 6 = 12$ (човнів).

Розв'язання 2

Припустимо, що всі човни були шестимісні.

1) Скільки учнів розмістилося тоді б у 20 човнах?

$6 \cdot 20 = 120$ (учнів).

2) На скільки менше учнів брало участь у поході, ніж отримали?

$120 - 92 = 28$ (учнів).

3) На скільки більше учнів розміщувалося в більшому човні, ніж у меншому?

$6 - 4 = 2$ (учні).

4) Скільки було чотиримісних човнів?

$28 : 2 = 14$ (човнів).

5) Скільки було шестимісних човнів?

$20 - 14 = 6$ (човнів).

Відповідь. Шестимісних човнів – 6, двомісних – 14.

Спосіб лишків

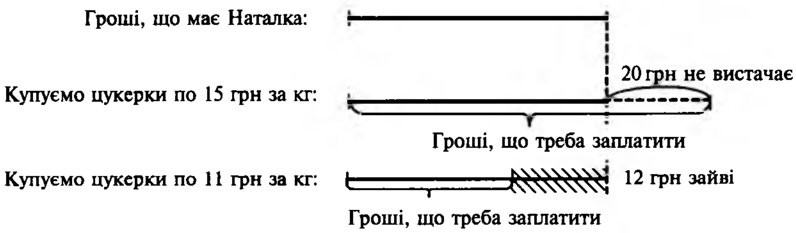
Цей спосіб має деяку схожість із міркуваннями під час розв'язування задач способами спроб і припущення. Спосіб лишків використовуємо, розв'язуючи задачі про рух навздогін, а саме – коли потрібно знайти час, за який перший об'єкт, що рухається позаду з більшою швидкістю, наздожене другий об'єкт, що має меншу швидкість руху. За 1 год перший наближається до другого на відстань, яка дорівнює різниці їх швидкостей, тобто дорівнює «лишку» швидкості, що є у нього порівняно зі швидкістю другого. Щоб знайти час, який потрібний першому об'єкту для подолання відстані, яка була між ним і другим на початку руху, слід визначити, скільки разів «лишок» вміщається у цій відстані.

Якщо абстрагуватися від сюжету і розглянути лише математичну структуру задачі, то у ній йдеться про два множники (швидкості v_1, v_2 руху обох об'єктів) або різницю цих множників і про два добутки (відстані s_1, s_2, які вони проходять) або їх різницю. Невідомі множники (t_1, і t_2) однакові і їх потрібно знайти. З математичної точки зору невідомий множник показує, скільки разів різниця відомих множників міститься у різниці добутків. Тому задачі, які розв'язуємо способом лишків, отримали назву *задач на знаходження чисел за двома різницями*.

Задача 79. Якщо 1 кг цукерок коштуватиме 15 грн, то у Наталки для купівлі потрібної кількості цукерок не вистачить 20 грн. Якщо 1 кг цукерок коштуватиме 11 грн, то залишиться 12 грн. Скільки цукерок Наталка збирається купити і скільки вона має грошей?

Аналіз задачі

Для кращого усвідомлення структури задачі, подамо її сюжет у вигляді двох покупок і враховуємо, що вартість покупки є добутком ціни та кількості товару. Короткий запис умови можна подати у вигляді схеми.



Розв'язання

1) На скільки треба заплатити більше, купуючи тільки цукерки по 15 грн?

$$20 + 12 = 32 \text{ (грн)}.$$

2) На скільки гривень 1 кг цукерок першого виду дорожчий?

$$15 - 11 = 4 \text{ (грн)}.$$

3) Скільки кілограмів цукерок має купити Наталка?

$$32 : 4 = 8 \text{ (кг)}.$$

4) Скільки грошей має Наталка?

$$11 \cdot 8 + 12 = 100 \text{(грн.)}.$$

Перевірка. Якщо б Наталка купувала б цукерки по ціні 15 грн, то їй потрібно було б заплатити $15 \cdot 8 = 120$ (грн), але вона має тільки 100 грн. Отже, їй не вистачає 120 грн – 100 грн = 20 грн. Отриманий результат відповідає умові.

Відповідь. Наталка має 100 грн і хоче купити 8 кг цукерок.

Задача 80. Учні вирішили наклеїти в альбом фотографії зі свят. Якщо вони на кожну сторінку клеїтимуть по 4 фотографії, то в альбомі не вистачить місця для 20 фотографій. Якщо ж на кожну сторінку клеїтимуть по 6 фотографії, то 5 сторінок залишаться вільними. Скільки фотографій збираються учні наклеїти в альбом?

Аналіз задачі

Кількість фотографій залишається однаковою під час першого та другого варіантів наклеювання. За умовою задачі вона невідома, але її можна знайти, якщо буде відомою кількість фотографій, що розміщуватимуть на одній сторінці, та кількість сторінок в альбомі.

Розв'язання

Кількість фотографій, які клеять на одну сторінку, відома (перший множник). Кількість сторінок в альбомі невідома і залишається незмінною (другий множник). Оскільки відомо, що 5 сторінок альбому залишиться другого разу вільними, то можна знайти, скільки ще фотографій можна було б наклеїти в альбом: $6 \cdot 5 = 30$ (фотографій).

Отже, збільшуючи кількість фотографій на одній сторінці на $6 - 4 = 2$, кількість наклеєних фотографій збільшується на $20 + 30 = 50$.

Оскільки другого разу на кожну сторінку наклеювали на дві фотографії більше і всього наклеїли на 50 фотографій більше, то знайдемо кількість сторінок в альбомі: $50 : 2 = 25$ (с.).

Отже, усього фотографій було $4 \cdot 25 + 20 = 120$ (фотографій).

Відповідь. В альбомі було 25 сторінки і клеїли 120 фотографій.

розділ **2**

ОКРЕМІ ВИДИ ТЕКСТОВИХ ЗАДАЧ ТА ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

2.1. СЮЖЕТНІ ЗАДАЧІ

Засвоєні вміння з розв'язування різними арифметичними способами видозмін сюжетних задач на рух, купівлю товару, виконання роботи є необхідною базою для формування вмінь розв'язування складніших задач у курсі алгебри за допомогою рівнянь. Тому під час вивчення математики в початковій та основній школах цим задачам треба приділяти особливу увагу.

Задачі на рух

До цієї групи належать задачі, у яких на основі залежності між шляхом, пройденим об'єктом при рівномірному русі, його швидкістю і часом руху треба знайти один з цих компонентів. Але на відміну від задач-розрахунків, де також використовується формула такої залежності, для цих задач важливими є і сюжетні характеристики. Так, залежно від змісту, розрізняють задачі на *рух в одному напрямку* (з відставанням і навздогін) і у *протилежних напрямках* (назустріч з одного пункту та в різних напрямах з віддаленням). Крім того, розрізняють задачі з *одночасним* і *неодночасним початком руху* об'єктів.

Задачі на зустрічний рух

До задач цього виду відносяться задачі, у яких розглядають об'єкти, що починають рухатися назустріч один одному з пунктів (стартових точок), які знаходяться на певній відстані. Залежності від умови, у таких задачах *потрібно визначити*:

1) час руху об'єктів до зустрічі, якщо відомі їх швидкості і відстань між пунктами;

2) відстань між пунктами, якщо відомі швидкості та час руху до зустрічі кожного з об'єктів;

3) швидкість руху одного з об'єктів, якщо відома відстань, час руху до зустрічі і швидкість руху другого об'єкта;

4) відстань, яка буде між об'єктами через певний час після початку руху, якщо відомі швидкості та відстань між пунктами.

Для кращого засвоєння розв'язування задач на *зустрічний рух* треба, щоб учні брали до уваги такі їх особливості:

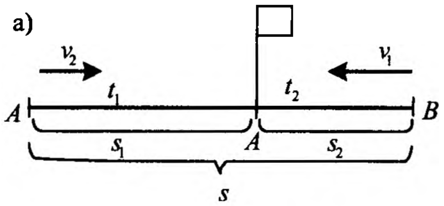
1) при одночасному початку руху об'єктів час руху до моменту зустрічі однаковий для обох;

2) якщо зустріч відбулася, то об'єкти на момент зустрічі разом пройшли всю відстань між пунктами;

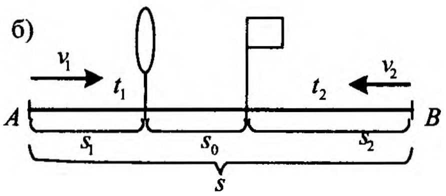
3) за одиницю часу об'єкти зближаються на відстань, що дорівнює сумі їх швидкостей (таку відстань прийнято називати *швидкістю зближення*).

Допомогти учням у пошуку способу розв'язування задач на зустрічний рух можуть *графічні ілюстрації* (схеми). Якщо зустріч об'єктів відбулася, то доцільно використати схему (а), якщо ні – схему (б). При цьому $t_1 = t_2$, якщо об'єкти почали рухатися одночасно.

а)



б)



Задача 1. Із протилежних кінців ковзанки довжиною 100 м біжать назустріч один одному два хлопчики. Через скільки секунд вони зустрінуть-

ся, якщо почнуть бігти одночасно і якщо перший хлопчик пробігає за одну секунду 9 м, а другий – 11 м?

Розв'язання

1) Яку відстань пробігають обидва хлопчики разом за 1 с, тобто яка швидкість їх зближення?

$$9 + 11 = 20\,(\text{м}).$$

2) Через скільки секунд хлопчики зустрінуться?

$$100 : 20 = 5\,(\text{с}).$$

Відповідь. Хлопчики зустрінуться через 5 с.

Задача 2. Із двох міст виїхали одночасно назустріч один одному два велосипедисти і зустрілися через 5 год. Яка відстань між містами, якщо один велосипедист їхав із швидкістю 18 км/год, а другий – 15 км/год?

Розв'язання 1

1) Яку відстань проїхав до зустрічі перший велосипедист?

$$18 \cdot 5 = 90\,(\text{км}).$$

2) Яку відстань проїхав до зустрічі другий велосипедист?

$$15 \cdot 5 = 75\,(\text{км}).$$

3) Яка відстань між містами?

$$90 + 75 = 165\,(\text{км}).$$

Розв'язання 2

1) Яку відстань проїжджають разом велосипедисти за 1 год, тобто яка швидкість їх зближення?

$$18 + 15 = 33\,(\text{км}).$$

2) Яка відстань між містами?

$$33 \cdot 5 = 165\,(\text{км}).$$

Відповідь. Відстань між містами 165 км.

Задача 3. Із двох міст вийшли одночасно назустріч один одному два потяги і зустрілися через 18 год. Знайти їх швидкості, знаючи, що відстань між містами 1620 км і один рухається на 10 км/год швидше за іншого.

Розв'язання 1

1) Скільки кілометрів проходили обидва потяги разом за 1 год?

$$1620 : 18 = 90\,(\text{км}).$$

2) Якою була б швидкість зближення, якби їх швидкості були однакові, а саме, як менша?

$$90 - 10 = 80\,(\text{км}).$$

3) Чому дорівнює швидкість одного з потягів, що рухається з меншою швидкістю?

$$80 : 2 = 40\,(\text{км/год}).$$

4) Чому дорівнює швидкість другого потяга?

$$40 + 10 = 50 \text{ (км/год)}.$$

Розв'язання 2

1) Знайдемо, на скільки більшу відстань пройде до зустрічі потяг, що рухається з більшою швидкістю: $10 \cdot 18 = 180$ (км).

2) Знайдемо, яку відстань разом подолали б два потяги за 18 год, рухаючись з однаковою швидкістю, а саме з більшою: $1620 + 180 = 1800$ (км).

3) Знайдемо, на скільки зближуються потяги за 1 год:

$$1800 : 18 = 100 \text{ (км)}.$$

4) Оскільки за припущенням швидкості руху потягів однакові, то знайдемо швидкість руху потяга, що рухається з більшою швидкістю:

$$100 : 2 = 50 \text{ (км/год)}.$$

5) Знайдемо швидкість руху другого потяга: $50 - 10 = 40$ (км/год).

Відповідь. Потяги рухаються зі швидкостями 40 км/год і 50 км/год.

Наведені приклади задач на зустрічний рух і способи їх розв'язування відомі учням із початкової школи. Їх доцільно розглядати і в 5-му класі. А під час вивчення у 6-му класі теми «Дробові числа» слід ознайомити учнів із застосуванням до розв'язування таких задач (наприклад, задачі 4) *способу умовної одиниці*. Цей спосіб буде використовуватися і під час розв'язування задач на спільну роботу, і під час розв'язування текстових задач за допомогою рівнянь.

Задача 4. Пасажирський потяг проходить відстань між двома містами за 10 год, а товарний – за 15 год. Через скільки годин зустрінуться ці потяги, якщо вирушать з цих міст одночасно назустріч один одному?

Аналіз задачі

Це задача на рух, тому слід розглянути три величини: шлях (відстань), швидкість і час. Відомі час руху пасажирського і товарного потягів на подолання всієї відстані між містами. Ні швидкості потягів, ні відстань між містами невідомі. Щоб розв'язати задачу, використаємо *спосіб спроб*.

Розв'язання

1. Припустимо, що відстань між містами 600 км.

1) Скільки кілометрів за 1 год проходить пасажирський потяг?

$$600 : 10 = 60 \text{ (км)}.$$

2) Скільки кілометрів за 1 год проходить товарний потяг?

$$600 : 15 = 40 \text{ (км)}.$$

3) Скільки кілометрів разом, зближуючись, проходять потяги за 1 год?

$$60 + 40 = 100 \text{ (км)}.$$

4) Через скільки годин потяги зустрінуться?

$$600 : 100 = 6 \text{ (год)}.$$

Отже, через 6 год після одночасного виходу назустріч один одному потяги зустрінуться.

2. Припустимо, що відстань між містами 300 км. Для знаходження часу їх зустрічі використаємо вираз: $t = 300 : (300 : 10 + 300 : 15) = 6$ (год).

3. Отримані результати свідчить, що час руху потягів до зустрічі не змінюється, якщо відстань між містами буде різною, а всі інші числові дані залишатимуться без зміни. Тобто час, витрачений до зустрічі, не залежать від відстані між містами. Тому відстань між містами приймемо за одиницю, не виражаючи її певною кількістю кілометрів. Тоді пасажирський потяг за 1 год проходить $\frac{1}{10}$ всієї відстані, товарний – $\frac{1}{15}$, а обидва потяги разом, вийшовши одночасно назустріч один одному, пройдуть за годину $\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{1}{6}$ усієї відстані між містами.

Щоб знайти час руху до зустрічі, тобто дати відповідь на запитання задачі, треба дізнатися, скільки разів $\frac{1}{6}$ вкладається в 1: $1:\frac{1}{6}=6$ (год).

Відповідь. Потяги зустрінуться через 6 год.

Для кращого засвоєння розв'язування задач на рух способом умовної одиниці можна порівняти розв'язання двох задач різними способами та показати учням, як здійснити перехід від звичних для них міркувань до нових через заміну запитання про відстань, яку потяги долають за 1 год, на запитання «Яку частину всієї відстані проходять потяги за 1 год?».

Таке порівняння неважко зробити, якщо розв'язання двох задач записати у таблиці (наприклад, табл. 21 на с. 84).

Задача 5. Із двох міст A та B, відстань між якими 105 км, одночасно назустріч один одному вирушили два вершники. Перший може подолати весь шлях від A до B за 8 год, а другий – за 7 год. Через скільки годин після початку руху вони зустрінуться?

Задача 6. Із двох міст A та B одночасно назустріч один одному вирушили два вершники. Перший може подолати весь шлях від A до B за 8 год, а другий – за 7 год. Через скільки годин після початку руху вони зустрінуться?

Таблиця 21

№ з/п	Розв'язання задачі 5	№ з/п	Розв'язання задачі 6
1	Скільки кілометрів за 1 год долає перший вершник? $105:8=13\frac{1}{8}$ (км)	1	Приймемо відстань між містами A та B за 1. Яку частину всієї відстані за 1 год долає перший вершник? $1:8=\frac{1}{8}$ (відстані)
2	Скільки кілометрів за 1 год долає другий вершник? $105:7=15$ (км)	2	Яку частину всієї відстані за 1 год долає другий вершник? $1:7=\frac{1}{7}$ (відстані)
3	На скільки кілометрів зближуються вершники за 1 год? $13\frac{1}{8}+15=28\frac{1}{8}$ (км)	3	На яку частину всієї відстані зближуються вершники за 1 год? $\frac{1}{8}+\frac{1}{7}=\frac{15}{56}$ (відстані)
4	Через скільки годин зустрінуться вершники? $105:28\frac{1}{8}=3\frac{11}{15}$ (год); $3\frac{11}{15}$ год = 3 год 44 хв	4	Через скільки годин зустрінуться вершники? $1:\frac{15}{56}=\frac{56}{15}=3\frac{11}{15}$ (год); $3\frac{11}{15}$ год = 3 год 44 хв
	Відповідь. Вершники зустрінуться через 3 год 44 хв		

Розглянемо приклади розв'язування задач, де об'єкти починають рух *не одночасно*.

Задача 7. З міста A до міста B, відстань між якими 920 км, виїхав мотоцикл зі швидкістю 50 км/год. Через 6 год назустріч йому вирушив із B до A автомобіль, який рухався зі швидкістю 70 км/год. На якій відстані від міста B вони зустрінуться?

Розв'язання

1) Скільки кілометрів проїхав мотоцикл до початку руху автомобіля?

$$50\cdot 6=300\,(\text{км}).$$

2) Яку відстань проїхали мотоцикл і автомобіль разом після виходу автомобіля?

$$900-300=600\,(\text{км}).$$

3) На скільки кілометрів зближаються мотоцикл і автомобіль за 1 год, тобто чому дорівнює швидкість їх зближення?

$$50 + 70 = 120 \text{ (км/год)}.$$

4) Через скільки годин після виходу автомобіля відбудеться їх зустріч, тобто скільки часу потрібно мотоциклу та автомобілю, щоб подолати 600 км?

$$600 : 120 = 5 \text{ (год)}.$$

5) На якій відстані від міста B зустрінуться мотоцикл і автомобіль?

$$70 \cdot 5 = 350 \text{ (км)}.$$

Відповідь. Зустріч відбудеться на відстані 350 км від міста B.

Задача 8. Два потяги вийшли в різний час назустріч один одному з двох станцій, відстань між якими дорівнює 794 км. Перший потяг рухався зі швидкістю 52 км/год, а другий – 42 км/год. Пройшовши 416 км, перший потяг зустрівся з другим. На скільки годин перший потяг вийшов раніше, ніж другий?

Розв'язання

1) Скільки кілометрів пройшов другий потяг до зустрічі?

$$794 - 416 = 378 \text{ (км)}.$$

2) Скільки годин був у дорозі другий потяг до зустрічі?

$$378 : 42 = 9 \text{ (год)}.$$

3) Скільки годин був у дорозі перший потяг до зустрічі?

$$416 : 52 = 8 \text{ (год)}.$$

4) На скільки годин другий потяг вийшов раніше, ніж перший?

$$9 - 8 = 1 \text{ (год)}.$$

Відповідь. На 1 год другий потяг вийшов раніше, ніж перший.

Задачі на рух у різних напрямках із віддаленням

Розв'язування задач цього виду не викликатиме особливих труднощів, якщо провести аналогію між ними та задачами на зустрічний рух і встановити, що після зустрічі два об'єкти рухаються з тими самими швидкостями до своїх стартових точок (тобто пунктів, з яких починався їх рух). При цьому за кожну одиницю часу вони, рухаючись у протилежних напрямках, віддаляються на відстань, що дорівнює сумі їх швидкостей.

Задача 9. Від пристані вирушив катер зі швидкістю 40 км/год. Через 3 год від тієї самої пристані у протилежному напрямку відплив теплохід, що рухався зі швидкістю 35 км/год. Якою буде відстань між ними через 2 год після початку руху теплохода?

Задача 9*. Від пристані вирушив катер зі швидкістю 40 км/год. Через 3 год від іншої пристані йому назустріч вийшов теплохід, що рухався зі швидкістю 35 км/год. Яка відстань між пристанями, якщо теплохід і катер зустрілися через 2 год після початку руху теплохода?

Таблиця 22

№ з/п	Розв'язання задачі 9	№ з/п	Розв'язання задачі 9*
1	Яку відстань пройде катер до початку руху теплохода? $40 \cdot 3 = 120$ (км)	1	Яку відстань пройде катер до початку руху теплохода? $40 \cdot 3 = 120$ (км)
2	На яку відстань віддаляються катер і теплохід за 1 год? $40 + 35 = 75$ (км)	2	На яку відстань віддаляються катер і теплохід за 1 год? $40 + 35 = 75$ (км)
3	Скільки кілометрів разом катер і теплохід пройдуть за 2 год? $75 \cdot 2 = 150$ (км)	3	Скільки кілометрів разом катер і теплохід пройдуть за 2 год? $75 \cdot 2 = 150$ (км)
4	Якою буде відстань між катером і теплоходом через 2 год після початку руху теплохода? $120 + 150 = 270$ (км)	4	Якою була відстань між катером і теплоходом до початку їх руху, тобто яка відстань між пристанями? $120 + 150 = 270$ (км)
Відповідь. Відстань між теплоходом і катером буде 270 км		**Відповідь.** Відстань між пристанями 270 км	

Задачі на рух в одному напрямку

До задач цього виду належать задачі, у яких об'єкти рухаються в одному напрямку і починають свій рух з одного або різних пунктів (стартових точок) одночасно або неодночасно. Залежно від умови задачі потрібно знайти: 1) за який час один об'єкт наздожене другий; 2) на якій відстані від даного пункту один об'єкт наздожене інший; 3) якою буде відстань між двома об'єктами через певний час тощо.

Для уникнення труднощів під час розв'язування задач на рух в одному напрямку слід домогтися міцного усвідомлення та засвоєння учнями таких залежностей.

1. При одночасному виході з одного й того самого пункту відстань між об'єктами, що рухаються в одному напрямку, з часом збільшується, якщо швидкості об'єктів різні. Збільшення відстані між рухомими об'єктами за одиницю часу дорівнює різниці їх швидкостей.

2. Якщо два об'єкти одночасно починають рух в одному напрямку з двох різних пунктів (причому об'єкт, що має більшу швидкість, рухається навздогін іншому), то відстань між об'єктами зменшується, тобто вони

зближаються. Їх зближення за одиницю часу дорівнює різниці швидкостей, з якими вони рухаються.

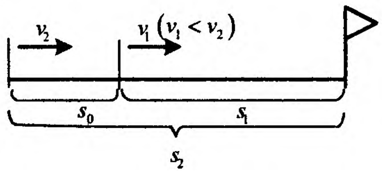
3. Об'єкт, що має більшу швидкість, наздоганяє об'єкт з меншою швидкістю за стільки одиниць часу, скільки разів різниця між швидкостями цих об'єктів вміщується у відстані, що їх відокремлює в момент початку спільного руху. Аналогічно, об'єкт з більшою швидкістю випереджає об'єкт з меншою швидкістю на певну відстань на стільки одиниць часу, скільки разів різниця між швидкостями об'єктів вміщується у цій відстані.

4. Якщо два об'єкти починають рух в одному напрямку з двох різних пунктів і один об'єкт наздоганяє перший, то різниця між відстанями, пройденими об'єктами, дорівнює відстані між цими пунктами.

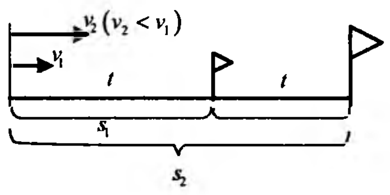
5. Якщо при неодночасному виході з одного пункту один об'єкт наздоганяє інший, то обидва об'єкти проходять до цього моменту однакові відстані.

Для кращого усвідомлення учнями названих залежностей доцільно використовувати відповідні графічні ілюстрації, зокрема схему руху навздогін (а) та схему руху з відставанням (б).

а)



б)



Крім того, різні випадки руху в одному напрямку слід розглядати в певній послідовності. Як показує досвід, найкраще почати з випадку одночасного виходу двох об'єктів із різних пунктів за умови, що другий має більшу швидкість, а, отже, через певний час наздоганяє перший об'єкт руху. Цей випадок простіше засвоюється учнями, оскільки в умові є відстань, що розділяє об'єкти до початку руху. Далі краще розглядати задачі з одночасним виходом об'єктів із одного пункту, але з різними швидкостями. Завершити вивчення задач на рух в одному напрямку слід розглядом задач, у яких об'єкти починають рух не одночасно.

Задачі на рух в одному напрямку з одночасним початком руху об'єктів

Задача 10. Собака погнався за лисицею, що знаходилась від нього на відстані 120 м. Через який час собака наздожене лисицю, якщо лисиця пробігає за хвилину 320 м, а собака – 350 м?

Розв'язання

1) На скільки метрів стає меншою відстань між собакою та лисицею за 1 хв, тобто на скільки метрів вони зближаються?

$$350-320=30\,(\text{м}).$$

2) Через який час собака наздожене лисицю?

$$120:30=4\,(\text{хв}).$$

Відповідь. Собака наздожене лисицю через 4 хв.

Задача 11. Два хлопчики-велосипедисти одночасно вирушають з одного селища та рухаються в одному напрямку зі швидкостями 15 км/год і 19 км/год. Через який час один велосипедист випередить іншого на 10 км?

Розв'язання

Нехай перший велосипедист рухається з більшою швидкістю.

1) На скільки кілометрів перший велосипедист віддаляється від другого за 1 год?

$$19-15=4\,(\text{км}).$$

2) Через скільки годин перший велосипедист випередить другого на 10 км?

$$10:4=2{,}5\,(\text{год}).$$

Відповідь. Відстань між двома велосипедистами буде 10 км через 2,5 год.

Задача 12. Із села до міста одночасно вийшли два пішоходи. Перший прийшов до міста на $\frac{2}{3}$ год пізніше, ніж другий. Швидкість першого становить $3\frac{1}{2}$ км/год, а другого – $3\frac{3}{4}$ км/год. Знайдіть відстань між містом і селом.

Аналіз задачі

Оскільки пішоходи починають рух одночасно і мають різні швидкості, то вони витрачають на подолання однакової відстані різний час. У той момент, коли другий пішохід уже прийшов до міста, перший ще був від міста на такій відстані, яку він подолав би за $\frac{2}{3}$ год, рухаючись з тією самою швидкістю. Відстань, яку долає перший пішоход після того, як перший уже був у місті, утворилась за рахунок того, що кожної години між пішоходами відстань збільшувалася на стільки кілометрів, на скільки швидкість другого пішохода більша за швидкість першого. Отже, це задача на рух із відставанням.

Розв'язання

1) Чому дорівнює різниця швидкостей пішоходів, тобто відстань, на яку вони віддаляються кожної години?

$$3\frac{3}{4}-3\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\ (\text{км}).$$

2) Яку відстань пройшов перший пішохід за $\frac{2}{3}$ год?

$$3\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=2\frac{1}{3}\ (\text{км}).$$

3) Який час руху другого пішохода?

$$2\frac{1}{3}:\frac{1}{4}=9\frac{1}{3}\ (\text{год}).$$

4) Яка відстань між містом і селом?

$$3\frac{3}{4}\cdot 9\frac{1}{3}=35\ (\text{км}).$$

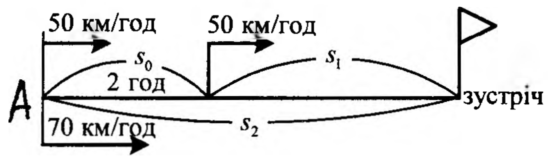
Відповідь. Між містом і селом відстань 35 км.

Задачі з неодночасним виходом об'єктів

Задача 13. Через 2 год після виходу з міста *A* товарного потяга, що рухався з середньою швидкістю 50 км/год, у тому самому напрямку вирушив швидкий потяг. На якій відстані від *A* буде швидкий потяг в той момент, коли наздожене товарний, якщо його швидкість 70 км/год?

Аналіз задачі 1

Якщо спочатку знайти відстань, що буде між потягами на початок руху швидкого потяга, то отримаємо задачу на одночасний рух об'єктів в одному напрямку навздогін. Розв'язування зведеться до обчислення часу, протягом якого швидкий потяг зможе подолати відстань, пройдену товарним потягом до його виходу.



Розв'язання 1

1) Яку відстань пройде товарний потяг до початку руху швидкого?

$$50 \cdot 2 = 100 \text{ (км)}.$$

2) На скільки кілометрів за 1 год зменшується відстань між товарним і швидким потягами, або на скільки наближатиметься за 1 год швидкий потяг до товарного?

$$70 - 50 = 20 \text{ (км/год)}.$$

3) За який час зможе швидкий потяг наздогнати товарний?

$$100 : 20 = 5 \text{ (год)}.$$

4) Який шлях пройде швидкий потяг?

$$70 \cdot 5 = 350 \text{ (км)}.$$

Зауваження. Таке розв'язання можна здійснити у 5-му класі, вивчаючи тему «Натуральні числа». Під час вивчення дробових чисел розв'язання може бути іншим, як запропоновано далі.

Аналіз задачі 2

Використаємо відношення часу руху до пройденого за цей час шляху. Це відношення показує, скільки годин витрачає рухомий об'єкт на проходження одного кілометра. Рухаючись із більшою швидкістю, швидкий потяг проходить однакову з товарним потягом відстань, заощаджуючи 2 год. Отже, треба обчислити, скільки часу заощаджує швидкий потяг на 1 км шляху порівняно з товарним. Для цього потрібно обчислити, який час витрачає кожний з потягів на 1 км шляху і знайти різницю.

Розв'язання 2

1) Скільки годин витрачає товарний потяг на проходження 1 км шляху?

$$1 : 50 = \frac{1}{50} \text{ (год)}.$$

2) Скільки годин витрачає швидкий потяг на проходження 1 км шляху?

$$1 : 70 = \frac{1}{70} \text{ (год)}.$$

3) На скільки 1 км шляху швидше проходить швидкий потяг, ніж товарний, тобто яку частину години заощаджує швидкий потяг, проходячи 1 км шляху, порівняно з товарним?

$$\frac{1}{50} - \frac{1}{70} = \frac{2}{350} \text{ (год)}.$$

На кожному кілометрі шляху швидкий потяг заощаджує $\frac{2}{350}$ год, а на всьому шляху – 2 год. Отже, він проходить стільки кілометрів, у скільки разів число 2 більше за $\frac{2}{350}$.

4) Який шлях пройде швидкий потяг до моменту, коли він наздожене товарний?

$$2:\frac{2}{350}=350 \text{ (км)}.$$

Зауваження. Можна запропонувати учням і третій спосіб розв'язування цієї задачі, вивчаючи пряму та обернену пропорційні залежності.

Розв'язання 3

Між швидкістю і часом руху для одного й того самого сталого значення шляху існує обернена пропорційна залежність. Оскільки відношення швидкостей товарного та швидкого потягів становить 5 : 7, то відношення часу їх руху відповідно дорівнює 7 : 5. Отже, на різницю часу припадає дві частини. Знайдемо цю різницю часу в годинах: 9 – 7 = 2 (год).

Оскільки двом годинам відповідає дві частини, то одна година становить одну частину. Отже, товарний потяг на подолання шляху витратив 7 год, а швидкий той самий шлях пройшов за 5 год. Знайдемо, чому дорівнює шлях, пройдений потягами до моменту, коли швидкий потяг наздожене товарний: $70 \cdot 5 = 350$ (км).

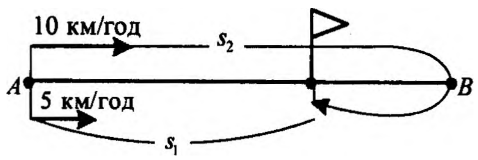
Відповідь. Швидкий потяг наздожене товарний на відстані 350 км від A.

Серед задач на рух зустрічаються випадки, коли початкову задачу для пошуку простішого способу розв'язування доводиться дещо видозмінювати. Найчастіше при цьому відбувається заміна одного виду руху на інший. Наприклад, рух по колу з однієї точки у різних напрямках можна подати як рух назустріч по прямій із двох пунктів, відстань між якими дорівнює довжині кола, або як рух з одного пункту в різні тощо.

Задача 14. Із пункту A до пункту B, відстань між якими 30 км, вирушили одночасно пішохід зі швидкістю 5 км/год і велосипедист зі швидкістю 10 км/год. Велосипедист доїхав до B і поїхав назад з тією самою швидкістю назустріч пішоходу. Через який час після початку руху вони зустрілись?

Аналіз задачі 1

Аналіз задачі дає можливість встановити, що пішохід і велосипедист спочатку рухалися в одному напрямку (рух із відставанням), а потім – назустріч.



Розв'язання 1

1) Скільки часу витратив велосипедист, щоб доїхати до пункту B?

$$30 : 15 = 3 \text{ (год)}.$$

2) Яку відстань пройшов пішохід за той час, за який велосипедист доїхав до B?

$$5 \cdot 3 = 15 \text{ (км)}.$$

3) Яка відстань була між велосипедистом і пішоходом, коли вони почали рухатися назустріч?

$$30 - 15 = 15 \text{ (км)}.$$

4) Яка швидкість зближення пішохода та велосипедиста?

$$5 + 10 = 15 \text{ (км/год)}.$$

5) Через скільки годин, рухаючись назустріч, зустрінуться пішохід і велосипедист?

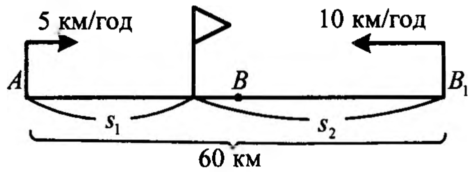
$$15 : 15 = 1 \text{ (год)}.$$

6) Скільки пройшло часу від початку руху до зустрічі?

$$3 + 1 = 4 \text{ (год)}.$$

Аналіз задачі 2

Замість двох видів руху розглянемо одночасний рух назустріч пішохода та велосипедиста з двох пунктів, відстань між якими дорівнює подвоєній відстані між пунктами A та B.



Розв'язання 2

1) Чому дорівнює відстань, яку проїхали до зустрічі велосипедист і пішохід?

$$30 \cdot 2 = 60 \text{ (км)}.$$

2) З якою швидкістю зближуються пішохід і велосипедист?

$$5 + 10 = 15 \text{ (км/год)}.$$

3) Через скільки годин зустрінуться велосипедист і пішохід?

$$60 : 15 = 4 \text{ (год)}.$$

Відповідь. Велосипедист і пішохід зустрінуться через 4 год.

Задача 15. Велосипедист, вирушаючи в дорогу з селища до станції, розраховував, що коли він рухатиметься зі швидкістю 20 км/год, то приїде на станцію на 15 хв раніше, ніж коли їхатиме зі швидкістю 18 км/год. Знайдіть відстань між селищем і станцією.

Розв'язання 1

Для подолання 1 км зі швидкістю 20 км/год велосипедист витрачає 3 хв, зі швидкістю 18 км/год – 3 хв 20 с. Отже, рухаючись зі швидкістю 20 км/год, велосипедист економить 20 с. Усього він зекономив 15 хв, тому можемо знайти відстань, яку він проїхав:

$$15 \text{ хв} = 900 \text{ с}; 900 : 20 = = 45 \text{ (км)}.$$

Розв'язання 2

Припустимо, що із селища до станції одночасно виїхали два велосипедисти зі швидкостями 20 км/год і 18 км/год. Тоді в момент, коли один із велосипедистів уже приїхав на станцію, другий був від неї на відстані: $18 \cdot \frac{1}{4} = 4{,}5$ км (15 хв $= \frac{1}{4}$ год).

За 1 год перший велосипедист випереджає другого на $20 - 18 = 2$ (км).

Отже, він був у дорозі $4{,}5 : 2 = 2{,}25$ (год) і за цей час проїхав відстань $20 \cdot 2{,}25 = 45$ (км).

Відповідь. Відстань між селищем і станцією 45 км.

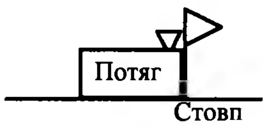
Іноді допомогти знайти спосіб розв'язування задач на рух можуть графічні ілюстрації, які виконуються під час аналізу задачі і відображають різні моменти процесу руху певного об'єкта.

Задача 16. Потяг за 15 с проходить повз телеграфний стовп і за 45 с долає міст довжиною 600 м. Знайдіть довжину потяга та його швидкість.

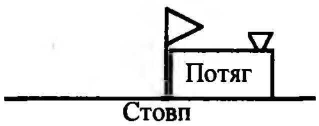
Аналіз задачі

Розіб'ємо умову на окремі смислові етапи руху потяга та зобразимо відповідні схеми.

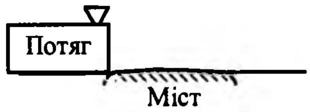
1-й етап. Потяг підійшов до телеграфного стовпа.



2-й етап. Потяг минув телеграфний стовп, тобто пройшов відстань, що дорівнює його довжині.

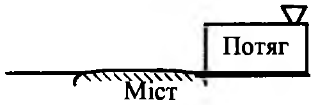


3-й етап. Потяг підійшов до моста.



4-й етап. Потяг подолав відстань, що дорівнює довжині моста, але ще знаходиться на ньому.

5-й етап. Потяг минув міст, тобто подолав відстань, яка дорівнює сумі довжин моста і його власної.



Розв'язання

1) Знайдемо, за скільки секунд потяг проходить 600 м:

$$45-15=30\ (\text{с}).$$

2) Знайдемо, з якою швидкістю рухався потяг:

$$600:30=20\ (\text{м/с});\ 20\ \text{м/с}=72\ \text{км/год}.$$

3) Знайдемо довжину потяга: $20\cdot 15=300$ (м).

Відповідь. Швидкість потяга – 72 км/год, а його довжина – 300 м.

Задача 17. Машиніст пасажирського потяга, швидкість якого 50 км/год, помітив, що зустрічний товарний потяг, який рухався зі швидкістю 40 км/год, пройшов повз нього за 10 с. Знайдіть довжину товарного потяга.

Аналіз задачі

Відповідь на запитання задачі було б дати просто, якби пасажирський потяг стояв на місці. Тоді його машиніст, знаючи швидкість товарного потяга та час, який товарний потяг рухався повз нього, міг би обчислити шлях, пройдений товарним потягом, тобто довжину цього товарного потяга. Отже, зробимо припущення, що пасажирський потяг стоїть на місці.

Розв'язання 1

1) З якою швидкістю повинен рухатися товарний потяг, щоб витратити той самий час на проходження повз пасажирський потяг?

$$50+40=90\ (\text{км/год});\ 90\,000:3\,600=25\ (\text{м/с}).$$

2) Яка довжина товарного потяга?

$$25 \cdot 10 = 250 \text{ (м)}.$$

Зауваження. Наведене розв'язання можна розглянути під час вивчення теми «Натуральні числа». У темі «Дробові числа» цю саму задачу можна розв'язати інакше, залишивши те саме припущення, що пасажирський потяг стоїть на місці.

Розв'язання 2

1) Яка швидкість руху товарного потяга?

$$50 + 40 = 90 \text{ (км/год)}; \; 90\,000 : 3\,600 = 25 \text{ (м/с)}.$$

2) Яку частину секунди витрачає потяг на проходження 1 м шляху?

$$1 : 25 = \frac{1}{25} \text{ (с)}.$$

3) В умові задачі дано, що на проходження шляху, який дорівнює довжині потяга, витрачається 10 с. Отже, довжина потяга: $10 : \frac{1}{25} = 250$ (м).

Відповідь. Довжина товарного потяга 250 м.

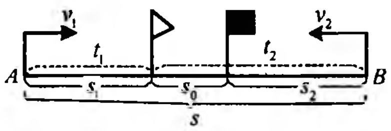
Оскільки під час розв'язування задач на рух часто використовуються графічні схеми, то можна пропонувати учням завдання на їх складання за умовами задач та завдання на складання текстів задач за схемами.

Задача 18. Складіть задачі на зустрічний рух двох об'єктів за схемою так, щоб потрібно було знайти:

а) відстань s між містами A та B;

б) час руху одного з об'єктів час;

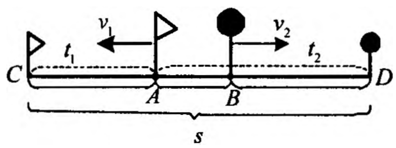
в) швидкість руху одного з об'єктів.



Задача 19. Складіть задачі на рух двох об'єктів в протилежних напрямках за схемою, використавши такі значення величин:

а) 16 км/год, 4 год, 5 год, $s_0 = 12$ км;

б) 60 км/год, 45 км/год, 2год, 3 год, $s_0 = 25$ км.



Задачі на рух річкою

В умові таких задач об'єкт рухається за течією або проти течії річки. Для усвідомлення змісту задач слід домогтися засвоєння ними таких положень.

1) Швидкість руху об'єкта по озеру є його власною (іноді використовують термін «технічною») швидкістю.

2) Під час руху об'єкта за течією його швидкість збільшується та дорівнює сумі власної швидкості і швидкості течії.

3) Під час руху об'єкта проти течії, його швидкість зменшується і дорівнює різниці між власною швидкістю і швидкістю течії.

4) Пліт не має власної швидкості, тому рухатися може тільки за течією річки. При цьому його швидкість руху дорівнюватиме швидкості течії.

Задача 20. Рухаючись проти течії річки, моторний човен подолав 54 км за 3 год, а пліт за цей самий час проплив 7,5 км. Скільки годин потрібно човну, щоб пропливти по озеру 82 км?

Розв'язання

1) 54 : 3 = 18 (км/год) – швидкість моторного човна проти течії.

2) 7,5 : 3 = 2,5 (км/год) – швидкість течії річки.

3) 18 + 2,5 = 20,5 (км/год) – власна швидкість моторного човна

4) 82 : 20,5 = 4 (год) – потрібно човну, щоб пропливти по озеру 82 км.

Відповідь. На шлях по озеру моторному човну потрібно 4 год.

Задача 21. Пароплав за течією проходить відстань між двома містами *A* та *B* за 3 доби, а повертається назад за 4 доби. Скільки діб буде пливти пліт від одного міста до другого?

Розв'язання

Приймемо відстань між містами за одиницю. Тоді за добу, тобто за одиницю часу, пароплав проходить за течією $\frac{1}{3}$, а проти течії – $\frac{1}{4}$ відстані між містами *A* та *B*. $\frac{1}{3}$ – це сума власної швидкості пароплава і швидкості течії, а $\frac{1}{4}$ – різниця цих швидкостей. За даними сумою та різницею знаходимо швидкість течії: $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$; $\frac{1}{12}:2=\frac{1}{24}$.

Оскільки пліт власної швидкості руху не має, тобто рухається зі швидкістю течії, то він пройде відстань між містами за $1:\frac{1}{24}=24$ (доби).

Відповідь. Пліт буде пливти від одного міста до другого 24 доби.

Задача 22. Знайдіть, яка швидкість буде отримана після виконання таких дій.

1) $v_{\text{вл}} + v_{\text{теч}}$; 2) $v_{\text{вл}} - v_{\text{теч}}$; 3) $v_{\text{пр. теч}} + v_{\text{теч}}$; 4) $v_{\text{за теч}} - v_{\text{теч}}$;

5) $v_{\text{за теч}} + v_{\text{пр. теч}}$; 6) $v_{\text{за теч}} - v_{\text{пр. теч}}$; 7) $v_{\text{пр. теч}} + 2v_{\text{теч}}$; 8) $v_{\text{пр. теч}} - 2v_{\text{теч}}$;

9) $\left(v_{\text{за теч}} + v_{\text{пр. теч}}\right) : 2$; 10) $\left(v_{\text{за теч}} - v_{\text{пр. теч}}\right) : 2$.

Задача 23. Двоє хлопчиків пливли в човні проти течії річки. Один із них випадково скинув у річку свого капелюха. Хлопчики помітили це лише через 15 хв і відразу повернули човна та попливли навздогін за капелюхом із тією самою власною швидкістю. Через скільки хвилин вони наздоженуть капелюх?

Розв'язання

Швидкість віддалення човна і капелюха – це сума швидкості човна проти течії та швидкості течії, а швидкість зближення човна і капелюха – це різниця між швидкістю човна за течією і швидкістю течії. Віддалення і зближення відбуваються на однакову відстань і з однаковою швидкістю. Отже, час руху від капелюха і до нього однаковий.

Відповідь. Хлопчики наздоженуть капелюх через 15 хв.

Задачі на виконання роботи

До задач цього виду відносяться задачі, у яких один або кілька робітників (механізмів) виконують певну роботу за певний час. Залежно від даних потрібно визначити: через який час вони завершать роботу (виконають завдання); продуктивність праці; обсяг виконаної роботи.

Для успішного засвоєння учнями способів розв'язування різних видів задач на виконання роботи слід провести аналогію між двома процесами (руху та виконанням роботи) і величинами, що їх характеризують. Для цього на прикладах розв'язування різних сюжетних задач можна пояснити, що продуктивність праці визначає кількість роботи, яку виконано за одиницю часу, тобто *фактично є швидкістю виконання роботи.*

Швидкість руху	*час руху*	*пройдена відстань*
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
Продуктивність праці	*час роботи*	*виконана робота*

Задача 24. Перший потяг, що вийшов з міста A до міста B, за 4 год 24 хв проходить 214,5 км. Через 1 год 20 хв після початку його руху навздогін

йому з того самого міста A вийшов другий потяг, який за кожні 20 хв проходить 23,75 км. Яка відстань між містами A та B, якщо потяги прибули в B одночасно?

Задача 25. Два рукописи мають однакову кількість сторінок. Один рукопис почала друкувати перша друкарка, яка за 3,5 год передруковує 21 сторінку. Друга друкарка над іншим рукописом почала працювати на 1 год 20 хв пізніше. Вона за 40 хв друкує 5 сторінок. Скільки сторінок у кожному з рукописів, якщо роботу друкарки завершили одночасно?

Таблиця 23

№ з/п	Розв'язання задачі 24	№ з/п	Розв'язання задачі 25
1	З якою швидкістю рухається перший потяг? 214,5 : 4,4 = 48, 75 (км/год)	1	Скільки сторінок за 1 год друкує перша друкарка? 21 : 3,5 = 6 (с.)
2	Яку відстань пройшов перший потяг до початку руху другого? $48,75\cdot 1\frac{1}{3}=65$ (км)	2	Скільки сторінок надрукувала перша друкарка до початку роботи другої? $6\cdot 1\frac{1}{3}=8$ (с.)
3	З якою швидкістю рухався другий потяг? $23,75:\frac{1}{3}=71,25$ (км)	3	Скільки сторінок за 1 год друкує друга друкарка? $5:\frac{2}{3}=7,5$ (с.)
4	На скільки швидше рухався другий потяг? 71,25 – 48,75 = 22,5 (км/год)	4	На скільки більше сторінок друкує друга друкарка за 1 год? 7,5 – 6 = 1,5 (с.)
5	Скільки часу другий потяг наздоганяв перший? $65 : 22,5 = 2\frac{8}{9}$ (год)	5	Скільки годин працювала друга друкарка? $8 : 1,5 = 5\frac{1}{3}$ (год)
6	Яка відстань між містами A та B? $71,25\cdot 2\frac{8}{9}=411\frac{2}{3}$ (км)	6	Скільки сторінок у рукописах? $7,5\cdot 5\frac{1}{3}=40$ (с.)
Відповідь. Між містами A та B відстань $411\frac{2}{3}$ км		**Відповідь.** У рукописах 40 сторінок	

Порівняння розв'язань задач дають можливість дійти таких висновків.

1. Швидкість руху потяга вимірюється відстанню (кількістю кілометрів), пройденою ним за одиницю часу; продуктивність праці друкарки вимірюється кількістю надрукованих сторінок за одиницю часу.

2. Різниця в швидкостях руху потягів дає можливість другому потягу наздогнати перший (бо його швидкість більша); різниця в швидкості друкування рукопису дає можливість другій друкарці, яка працює швидше, зрівняти кількість надрукованих сторінок із надрукованими першою друкаркою.

3. Увесь пройдений шлях у кілометрах другим потягом є відстанню від міста *A* до *B*; уся виконана другою друкаркою робота є надрукованим рукописом.

Після такого порівняння учні будуть сприймати задачі не тільки за їх сюжетом, але й за схожим математичним змістом, що дасть можливість переносити способи розв'язування (тобто послідовність логічних кроків і арифметичних дій) у нові умови.

Задача 26. Бібліотеці потрібно було оправити 1800 книжок. Три майстерні бралися виконати замовлення (кожна самостійно): перша за 20 днів, друга за 30 днів і третя за 60 днів. Щоб швидше оправити книжки, вирішили передати замовлення відразу всім трьом майстерням. За скільки днів закінчать роботу майстерні, працюючи одночасно?

Розв'язання

1) 1800 : 20 = 90 (книжок) – оправить перша майстерня за один день.

2) 1800 : 30 = 60 (книжок) – оправить друга майстерня за один день.

3) 1800 : 60 = 30 (книжок) – оправить третя майстерня за один день.

4) 90 + 60 + 30 = 180 (книжок) – оправляють усі майстерні разом за один день.

5) 1800 : 180 = 10 (днів) – за такий час майстерні, працюючи разом, виконають замовлення.

Відповідь. Три майстерні виконають замовлення за 10 днів.

Після розв'язування цієї задачі можна запропонувати учням нову задачу, де змінюється кількість книжок, що треба оправити, а решта даних залишаються без змін. Оскільки в результаті розв'язування нової задачі у відповіді отримаємо ту саму кількість днів – 10, то робимо висновок, що термін виконання замовлення не змінюється, якщо обсяг замовлення змінити, а всі інші числові дані залишити без зміни. Тому, за аналогією із задачами на рух, можна позначити всю роботу одиницею і, замінивши запитання про обсяг роботи, що її виконують за один день, запитанням «Яку частину всієї роботи виконують за день?», отримати відповідь.

Для свідомого засвоєння учнями нового способу розв'язування задач на виконання роботи можна запропонувати усно розв'язати такі допоміжні задачі.

Задача 27. а) Турист пройшов деяку відстань за 10 днів. Яку частину цієї відстані він пройшов за 1 день? 2 дні? 5 днів? 7 днів? ($\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{5}{10}, \frac{7}{10}$)

б) Майстер виготовив замовлення за 13 днів. Яку частину замовлення він виконав за 1 день? 2 дні? 5 днів? 7 днів? ($\frac{1}{13}, \frac{2}{13}, \frac{5}{13}, \frac{7}{13}$)

в) Басейн наповнюється водою за 7 год. Яка частина басейну наповниться за 1 год? 2 год? 5 год? 7 год? ($\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{5}{7}, \frac{7}{7} = 1$)

Задача 28. а) За 1 год робітник виконує $\frac{1}{10}$ деякого завдання. За скільки годин він виконає все завдання? (За 10 год)

б) Робітник виконує за день $\frac{8}{15}$ деякої роботи. За скільки днів він виконає всю роботу? (За $1\frac{7}{8}$ днів)

в) За 1 год кран наповнює $\frac{1}{15}$ бака. За скільки годин він наповнить $\frac{7}{10}$ бака? (За 10,5 год)

Задача 29. а) У басейні дві труби. Перша труба, працюючи окремо, може наповнити басейн за 8 год, а друга – за 12 год. Яка частина басейну наповниться за 1 год, якщо відкрити обидві труби одночасно? ($\frac{5}{24}$ басейну)

б) Три бригади можуть виконати деяку роботу за 4 год. Перша з них сама може виконати всю роботу за 10 год, друга – за 12 год. Яку частину роботи може виконати третя бригада за 1 год? ($\frac{1}{4} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} = \frac{1}{15}$)

Задача 30. Одна друкарка за 3 год друкує $\frac{1}{5}$ рукопису, а друга за 5 год – $\frac{1}{4}$ рукопису. Яка з друкарок працює швидше? (Перша)

Задача 31. Перша бригада може виконати деяку роботу за 36 днів, а друга – за 45 днів. За скільки днів обидві бригади, працюючи разом, виконають роботу?

Розв'язання

Приймемо за одиницю всю роботу. Тоді за 1 день обидві бригади разом виконають $\frac{1}{36}+\frac{1}{45}=\frac{1}{20}$ (завдання), а на виконання всього завдання буде витрачено $1:\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{45}\right)=1:\frac{1}{20}=20$ (днів).

Відповідь. Бригади виконають роботу за 20 днів.

Задача 32. Над виконанням замовлення працюють дві майстрині. Перша з них може виконати його самостійно за 40 хв, а другій для цього треба 75 % цього часу. Обидві майстрині почали виконувати замовлення одночасно, але через 15 хв друга припинила роботу. За який час після цього перша майстриня закінчила роботу над замовленням?

Розв'язання

1) $40 \cdot 0{,}75 = 30$ (хв) – час, який потрібний другій майстрині, щоб виконати замовлення самостійно.

2) За 1 хв перша і друга майстрині можуть виконати відповідно $\frac{1}{40}$ і $\frac{1}{30}$ частини замовлення.

3) $\left(\frac{1}{40}+\frac{1}{30}\right)\cdot 15=\frac{7}{8}$ (замовлення) – разом за 15 хв виконають обидві майстрині.

4) $1-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}$ (замовлення) – залишиться виконати першій майстрині.

5) $\frac{1}{8}:\frac{1}{40}=5$ (хв) – через такий час перша майстриня закінчила роботу.

Відповідь. Перша майстриня закінчила роботу через 5 хв.

Задача 33. Два насоси, працюючи разом, можуть наповнити басейн за 10 год. Після чотирьох годин спільної роботи перший насос зупинили, а другий наповнив решту басейну за 18 год. За скільки годин кожний з насосів, працюючи окремо, міг би наповнити басейн?

Розв'язання

1) Яку частину басейну наповнюють обидва насоси за 1 год?

$$1:10=\frac{1}{10} \text{ (басейну).}$$

2) Яку частину басейну наповнюють обидва насоси за 4 год?

$$\frac{1}{10}\cdot 4=\frac{2}{5} \text{ (басейну).}$$

3) Яку частину басейну наповнює другий насос за 18 год?

$$1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5} \text{ (басейну).}$$

4) За скільки годин другий насос, працюючи окремо, може наповнити басейн?

$$18:\frac{3}{5}=30 \text{ (год).}$$

5) Яку частину басейну наповнює другий насос за 1 год?

$$1:30=\frac{1}{30} \text{ (басейну).}$$

6) Яку частину басейну наповнює перший насос за 1 год?

$$\frac{1}{10}-\frac{1}{30}=\frac{1}{15} \text{ (басейну).}$$

7) За скільки годин може наповнити басейн перший насос, працюючи окремо?

$$1:\frac{1}{15}=15 \text{ (год).}$$

Відповідь. Працюючи окремо, перший насос наповнить басейн за 15 год, а другий – за 30 год.

Задача 34. Перша бригада робітників може виконати деяку роботу за 8 днів, а друга – за 12 днів. До виконання роботи обидві бригади приступили одночасно і працювали разом деяку кількість днів. Після цього другу бригаду перевели на виконання іншого завдання. Частину роботи, що залишилася, перша бригада закінчила за 3 дні. Скільки днів працювала перша бригада?

Аналіз задачі

Щоб відповісти на запитання задачі, треба врахувати, що спочатку перша бригада працювала кілька днів разом із другою, а потім ще 3 дні – одна.

Отже, треба знайти, скільки днів працювали обидві бригади разом. З умови відомо, що перша, працюючи самостійно, виконає всю роботу за 8 днів, а друга цю саму роботу виконає за 12 днів. Це дає нам можливість знайти, яку частину роботи виконувала кожна бригада за один день.

Розв'язання

Приймемо всю роботу, яку потрібно виконати, за одиницю. Тоді перша бригада виконувала за день $\frac{1}{8}$ роботи, а друга – $\frac{1}{12}$ всієї роботи.

1) Знайдемо, яку частину роботи бригади виконували разом за один день: $\frac{1}{8}+\frac{1}{12}=\frac{5}{24}$ (роботи).

2) Знайдемо, яку частину роботи виконала перша бригада за 3 дні, працюючи одна: $\frac{1}{8}\cdot 3=\frac{3}{8}$ (роботи).

3) Знайдемо, яку частину роботи виконали бригади, працюючи разом:

$$1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8} \text{ (роботи).}$$

4) Знайдемо, скільки днів працювали обидві бригади разом:

$$\frac{5}{8}:\frac{5}{24}=3 \text{ (дні).}$$

5) Знайдемо, скільки всього днів працювала перша бригада:

$$3+3=6 \text{ (днів).}$$

Відповідь. Перша бригада працювала 6 днів.

Розв'язування задач на виконання роботи чи на рух з використанням способу умовної одиниці іноді зручно ілюструвати за допомогою графічних схем. Крім того, під час вивчення пропорційних залежностей задачі на виконання роботи можна розв'язувати з використанням способу пропорційного поділу. Наприклад, для задачі 26 розв'язання буде таким.

Розв'язання

Строк виконання одного й того самого замовлення і продуктивність праці обернено пропорційні. Оскільки строки виконання замовлення першою, другою та третьою майстернями пропорційні до чисел 20, 30, 60, тобто 2, 3, 6, то продуктивності праці майстерень пропорційні до чисел $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$. Якщо звести дроби до спільного знаменника $\left(\frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}\right)$, можна стверджувати, що продуктивності праці майстерень відповідно пропорційні до цілих чисел 3, 2 і 1.

Отже, при одночасному виконанні замовлення майстерні оправили:

1-ша: $\frac{1800}{3+2+1}\cdot 3 = 900$ (книжок);   2-га: $\frac{1800}{3+2+1}\cdot 2 = 600$ (книжок);

3-тя: $\frac{1800}{3+2+1}\cdot 1 = 300$ (книжок).

Оскільки перша майстерня може самостійно виконати все замовлення за 20 днів, то за день вона оправляла $1800 : 20 = 90$ (книжок).

Враховуючи, що всього при спільному виконанні замовлення з двома іншими майстернями перша оправила 900 книжок, можна обчислити, скільки днів вона працювала: $900 : 90 = 10$ (днів).

Отже, працюючи разом, три майстерні виконають замовлення за 10 днів.

2.2. ЗАДАЧІ НА ЧАСТИНИ

Прийнято до задач на частини відносити два види задач: простіші, в умові яких явно йдеться про частини, та задачі з кратними залежностями між невідомими (неявні частини). Основними способами розв'язування цих задач є *спосіб частин* (іноді його називають способом спільної міри, способом нової одиниці лічби або рівних паїв), *спосіб зворотних міркувань* і *спосіб подібності*.

Спосіб частин

Основна ідея способу частин полягає у з'ясуванні питання про те, скільки частин відповідає відомому числу, та знаходженні одної частини (наприклад, визначенні того, скільки кілограмів, метрів тощо припадає на одну частину). Під час розв'язування таких задач доцільно використовувати графічні схеми.

Задача 35. Для виготовлення кавового напою «Наша марка» треба взяти на 7 частин кавових зерен, 6 частин цикорію, 5 частин жолудів і 2 частини каштанів. Скільки пачок напою розфасувала за зміну робітниця, якщо кожна пачка важить 200 г, а жолудів і каштанів разом було використано 630 кг?

Короткий запис умови:

Розв'язання

1) Скільки частин припадає на каштани та жолуді?

$$5 + 2 = 7 \text{ (частин)}.$$

2) Скільки кілограмів припадає на 1 частину?

$$630 : 7 = 90 \text{ (кг)}.$$

3) Чому дорівнює сума частин у суміші?

$$7 + 6 + 5 + 2 = 20 \text{ (частин)}.$$

4) Яка загальна вага суміші?

$$90 \cdot 20 = 1800 \text{ (кг)}.$$

5) Скільки пачок розфасувала робітниця за зміну?

$$1800 \text{ кг} = 1\,800\,000 \text{ г}; \; 1\,800\,000 : 200 = 9000 \text{ (пачок)}.$$

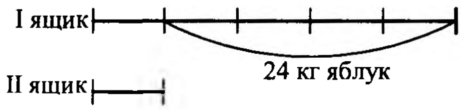
Відповідь. За зміну робітниця розфасувала 9000 пачок кавового напою.

Використовувати спосіб частин можна і в задачах, де є кратне порівняння невідомих. Якщо воно задається відразу, то за одну частину приймають або одне з невідомих, або їх спільну міру (по суті, їх спільний дільник). Якщо кратне порівняння з'являється після деяких перетворень умови, то задачу розв'язують з одночасним використанням способів зворотних міркувань і частин.

Задача 36. В одному ящику яблук в 5 раз більше, ніж в другому. Скільки яблук у кожному ящику, якщо в першому ящику на 24 кг яблук більше?

Аналіз задачі

Хоча в умові явно і не йдеться про частини, проте сказано, що у першому ящику в 5 раз більше яблук, ніж у другому. Отже, прийнявши кількість яблук в другому ящику за одну частину, матимемо, що у першому ящику міститься 5 таких самих частин. Після короткого запису умови у вигляді графічної схеми неважко намітити план її розв'язування.



Розв'язання

1) На скільки частин більше яблук у першому ящику, ніж у другому?

$$5 - 1 = 4 \text{ (частини)}.$$

2) Скільки кілограм яблук припадає на одну частину, або скільки яблук у другому ящику?

$$24 : 4 = 6 \text{ (кг)}.$$

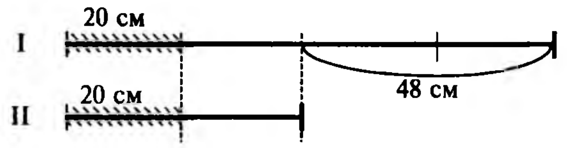
3) Скільки яблук було у першому ящику?

$$6 \cdot 5 = 30 \text{ (кг)}.$$

Відповідь. У першому ящику 30 кг, а у другому – 6 кг яблук.

Задача 37. Перша стрічка на 48 см довша за другу. Після того, як від кожної стрічки відрізали по 20 см, перша стрічка стала в 3 рази довша за другу. Яку довжину стрічки мали спочатку?

Зауваження. Аналізуючи задачу, слід нагадати, що при зменшенні (збільшенні) зменшуваного та від'ємника на одне і те саме число, різниця не змінюється. Тому між двома стрічками залишиться та сама різниця в довжинах. Наочно це можна показати на графічній схемі.



Розв'язання

Якщо прийняти за 1 частину кількість сантиметрів, що залишилася від другої стрічки після відрізання 20 см, то у першій стрічці залишиться 3 таких частини.

1) З них на 48 см (тобто на різницю довжин стрічок) припадає 2 частини.

2) Скільки сантиметрів припадає на 1 частину, тобто якою є довжина другої стрічки після змін?

$$48 : 2 = 14 \text{ (см)}.$$

3) Якою є довжина першої стрічки після змін?

$$24 \cdot 3 = 72 \text{ (см)}.$$

4) Якою була довжина першої стрічки спочатку?

$$72 + 20 = 92 \text{ (см)}.$$

5) Якою була довжина другої стрічки спочатку?

$$24 + 20 = 44 \text{ (см)}.$$

Відповідь. Перша стрічка – 92 см, друга – 44 см.

Спосіб подібності

Спосіб подібності (іноді його називають способом припущення, що перевіряється) найчастіше використовують під час розв'язування задач, у яких між невідомими є кратна залежність. Спочатку одному з невідомих надається деяке числове значення. Потім для цього значення з врахуванням залежностей, які дано в умові, знаходять всі інші невідомі та їх суми чи різниці. Значення обчислених сум (різниць) порівнюється із значенням, яке дано в умові. Потім знаходиться відношення між даним і отриманим результатом і у цьому відношенні змінюють всі числові значення шуканих невідомих.

Часто цей спосіб вважають не науково обґрунтованим, що полягає у «вгадуванні» відповіді з подальшою «підгонкою під результат». Така думка хибна, оскільки розв'язування задач способом подібності ґрунтується на властивостях кратної зміни компонентів арифметичних дій. Використання цього способу під час розв'язування задач із обов'язковими супровідними міркуваннями допоможе учням краще засвоїти їх.

Наведемо приклад використання способу подібності до розв'язування задачі 35.

Нехай жолудів взяли 100 кг, тоді каштанів потрібно взяти $100 : 5 \cdot 2 = 40$ (кг). Разом жолудів і каштанів буде $100 + 40 = 140$ (кг). Це число менше, ніж задана в умові маса жолудів і каштанів, у $630 : 140 = 4{,}5$ (раза). Тому, щоб знайти справжню кількість жолудів, слід збільшити 100 кг у 4,5 раза (хоча цього можна не робити, оскільки в задачі не ставиться питання про кількість використаних жолудів для створення суміші).

Щоб знайти, скільки всього зроблено було напою, треба знайти значення виразу: $100 \cdot 4{,}5 : 5 \cdot (7 + 6 + 5 + 2) = 1800$ (кг); 1800 кг = 1 800 000 г.

Отже, було розфасовано 1 800 000 : 200 = 9000 (пачок) кавового напою.

Задача 38. Нині сестрі у три рази більше років, ніж було тоді, коли її брат був у її віці. Коли сестрі буде стільки років, скільки років зараз брату, то разом вони матимуть 96 років. Скільки років сестрі і її брату?

Розв'язання

Припустимо, що сестрі був 1 рік, коли брат був у нинішньому її віці, тобто йому було 3 роки. Нині сестрі 3 роки, а братові – 5 років (бо минуло 2 роки). Очевидно, що брат старший за сестру на 2 роки ($3 - 1 = 2$).

Коли сестрі буде стільки років, скільки зараз має її брат, тобто 5, то братові буде відповідно 7 років ($5 + 2 = 7$).

Разом їм буде 12 років ($5 + 7 = 12$). Це менше, ніж задано в умові, у 8 раз ($96 : 12 = 8$). Отже, сестрі зараз не 3 роки, а у 8 раз більше, тобто 24 роки ($3 \cdot 8 = 24$), а братові 40 років ($5 \cdot 8 = 40$).

Перевірка. Коли брату було 24 роки (це було 16 років тому), то сестрі було $24 - 16 = 8$ (років) і вік брата був у 3 рази більшим за вік сестри ($24 : 8 = 3$). Коли сестрі буде 40 років (через 16 років), то її брат теж стане старшим на 16 років і матиме 56 років ($40 + 16 = 56$). Разом брат і сестра матимуть 96 років ($40 + 56 = 96$), що відповідає умові.

Повна пряма перевірка підтвердила правильність розв'язання.

Відповідь. Сестрі 24 роки, а її брату – 40 років.

2.3. ЗАДАЧІ НА ПРОПОРЦІЙНИЙ ПОДІЛ

Коли відомі кратні відношення між невідомими та їх сума чи різниця, то задачу можна розв'язувати за допомогою *способу пропорційного поділу*, основою якого фактично є спосіб частин. Розрізняють кілька видів задач на пропорційний поділ: 1) число треба поділити в даному відношенні на кілька частин прямо пропорційно до кількох даних цілих або дробових чисел; 2) число треба поділити на частини у відношенні, оберненому до даних чисел; 3) число треба поділити на частини (три і більше), коли задано окремі відношення для кожної пари шуканих чисел; 4) число треба поділити на частини пропорційно до двох (трьох) наборів чисел.

Спосіб пропорційного ділення використовується у тих випадках, коли дано відношення невідомих і їх сума або різниця. Основою способу є твердження, що коли два числа прямо пропорційні до чисел a та b (або відношення чисел дорівнює $\frac{a}{b}$, то це означає, що в першому числі є a деяких частин, а в другому числі – b таких самих частин. Якщо дано суму невідомих, то відповідно в ній міститься $(a + b)$ частин. Якщо в умові задано різницю невідомих, то вона становить відповідно $(a - b)$ частин, $a > b$.

Якщо в умові сказано, що два числа обернено пропорційні до чисел a та b, то це означає, що відношення цих чисел дорівнює оберненому відношенню $\frac{b}{a}$. Отже, у першому числі є b деяких частин, а в другому – a таких самих частин. Загальна сума частин у цьому випадку також дорівнюватиме $(a + b)$, а різниця – $(a - b)$, $a > b$.

Розглянемо приклади розв'язування задач на пропорційний поділ.

Поділ прямо пропорційно до набору цілих або дробових чисел

Задача 39. Число 95 поділити на частини, пропорційно до чисел 3, 5 і 11.

Розв'язання

1) Знайдемо суму частин: $3 + 5 + 11 = 19$ (частин).

2) Знайдемо, скільки припадає на одну частину: $95 : 19 = 5$ (частин).

3) Знаючи, скільки частин міститься в кожному з невідомих чисел, знайдемо ці числа: перше число: $5 \cdot 3 = 15$; друге число: $5 \cdot 5 = 25$; третє число: $5 \cdot 11 = 55$.

Відповідь. 15; 25; 55.

Після розв'язувань достатньої кількості задач на поділ прямо пропорційно до даних чисел, можна сформулювати правило-припис, за яким розв'язуються такі задачі:

«Щоб розділити число прямо пропорційно до даних чисел, потрібно розділити його на суму даних чисел і отриману частку помножити на кожне з них».

Якщо в умові задано відношення дробових чисел, то його спочатку потрібно замінити на відношення цілих чисел.

Задача 40. Розділити число 540 на три частини пропорційно до чисел $\frac{2}{3}, 3, 5\frac{1}{3}$.

Розв'язання.

1) Замінимо відношення дробових чисел відношенням цілих:

$$\frac{2}{3}:3:5\frac{1}{3}=\frac{2}{3}:\frac{3}{1}:\frac{16}{3}=2:9:16.$$

1) $2+9+16=27$ (частин) – на стільки частин треба розділити 540.
2) $540:27=20$ – стільки припадає на 1 частину.
3) $20\cdot 2=40$ – перше число.
4) $20\cdot 9=180$ – друге число.
5) $20\cdot 16=320$ – третє число.

Розв'язання 2

1) $\frac{2}{3}+3+5\frac{1}{3}=9$ – сума всіх частин. 2) $540:9=60$ – 1 частина.

3) $60\cdot\frac{2}{3}=40$ – перше число. 4) $60\cdot 3=180$ – друге число.

5) $60\cdot 5\frac{1}{3}=320$ – третє число.

Відповідь. 40; 180; 320.

Зауваження. Після розгляду двох розв'язань обов'язково порівняти значення, що припадають на одну частину, і звернути увагу учнів на те, що під час заміни відношення дробових чисел на цілі одна частина стає меншою. Доцільно розглянути випадок, коли одна частина збільшується. Це буває, коли у даному в умові відношенні скорочуємо числа: $24:36:54=$ $=4:6:9$.

Поділ на частини у відношенні, оберненому до даних чисел

Задача 41. У трьох бригадах працюють з однаковою продуктивністю праці 237 робітників. Перша бригада робітників може виконати замовлення за 5 днів, друга – за 8 днів, а третя – за 3 дні. Скільки робітників у кожній бригаді?

Аналіз задачі

Оскільки продуктивність праці всіх робітників однакова, то час роботи бригад, що йде на виконання замовлення, буде обернено пропорційний до кількості робітників у бригадах (чим більше робітників, тим менше часу необхідно на виконання даної роботи, і навпаки).

Розв'язання

Перша бригада виконує за 1 день $\frac{1}{5}$ всієї роботи, друга – $\frac{1}{8}$ роботи, третя – $\frac{1}{3}$ роботи.

1) Кількість робітників у бригадах прямо пропорційна до кількості роботи, виконаної за один день. Отже, потрібно число 237 поділити прямо пропорційно до чисел $\frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{3}$ (які є оберненими до чисел 5, 8 і 3). Маємо:

$\frac{1}{5} : \frac{1}{8} : \frac{1}{3} = 24 : 15 : 40.$

2) $24 + 15 + 40 = 79$ – сумарна кількість частин.

3) $237 : 79 = 3$ (робітники) припадає на 1 частину (або стільки робітників становлять 1частину).

4) $3 \cdot 24 = 72$ (робітники) у першій бригаді.

5) $3 \cdot 15 = 45$ (робітників) у другій бригаді.

6) $3 \cdot 40 = 120$ (робітників) у третій бригаді.

Відповідь. У першій бригаді – 72, у другій – 45, у третій – 120 робітників.

Задача 42. Катер за течією річки пливе зі швидкістю 50 км/год, а проти течії – 40 км/год. Яку відстань пройшов катер від пункту A до пункту B і назад, якщо на весь рух було витрачено 1 год 30 хв?

Аналіз задачі

Оскільки відстань, яку проходив катер за течією річки і проти течії, однакова, то час руху обернено пропорційний до швидкості руху. Тому потрібно поділити 1 год 30 хв обернено пропорційно до чисел 50 і 40, тобто у відношенні 4 : 5.

Розв'язання

1) $4+5=9$ (частин) – на стільки частин треба поділити час руху.

2) 1 год 30 хв = 90 хв; $90:9=10$ (хв) – становлять 1 частину.

3) $10 \cdot 4 = 40$ (хв) – час руху катера за течією.

4) $10 \cdot 5 = 50$ (хв) – час руху катера проти течії.

5) 40 хв $= \frac{2}{3}$ год; $50 \cdot \frac{2}{3} = 33\frac{1}{3}$ (км) – відстань, яку пройшов катер за течією.

6) 50 хв $= \frac{5}{6}$ год; $40 \cdot \frac{5}{6} = 33\frac{1}{3}$ (км) – відстань, яку пройшов катер проти течії (знаходячи цю відстань, ми одночасно перевіряємо правильність міркувань, оскільки за умовою вона має дорівнювати відстані, пройденій катером за течією).

7) $33\frac{1}{3} \cdot 2 = 66\frac{2}{3}$ (км) – відстань, яку пройшов катер.

Відповідь. Катер пройшов $66\frac{2}{3}$ км.

Поділ на частини (три і більше), коли задано окремі відношення для кожної пари шуканих чисел

Розв'язування задач цього виду не буде викликати значних труднощів у учнів, якщо під час вивчення кроків розв'язування задач на поділ прямо пропорційно до чисел звернути увагу на те, що запис $a : b : c = k : l : m$ можна трактувати як скорочений запис таких трьох відношень: $a : b = k : l$, $b : c = l : m$, $a : c = k : m$.

Починати навчання учнів розв'язування задач на поділ числа на частини, коли задано окремі відношення для кожної пари чисел, слід із задач, де одному із шуканих чисел відповідає однакова кількість частин. Таке число обирають сполучною ланкою і на його основі всі відношення об'єднують в одне. Наприклад, якщо задано $a : b = 5 : 7$ і $b : c = 7 : 9$, то $a : b : c = 5 : 7 : 9$; якщо $a : b = 5 : 7$ і $c : a = 13 : 5$, то $c : a : b = 13 : 5 : 7$.

Далі слід розглянути різні випадки ускладнень таких задач. Наприклад, якщо $a : b = 5 : 7$ і $b : c = 3 : 11$, то спочатку зрівнюємо частини, що відповідають другому числу: $a : b = 15 : 21$ і $b : c = 21 : 77$, а потім об'єднуємо відношення: $a : b : c = 15 : 21 : 77$.

Задача 43. Поділіть 210 марок між трьома хлопчиками так, щоб кількість марок, які отримають перший і другий хлопчики, була у відношенні 3 : 4, а кількість марок, отриманих другим і третім хлопчиками – 8 : 7.

Аналіз задачі

Нехай у першого хлопчика a марок, у другого – b марок, а у третього – c. У відношеннях $a : b = 3 : 4$ і $b : c = 8 : 7$ не має рівних чисел, які б означали кількість марок у одного з хлопчиків. Тому зрівняємо частини, що відповідають кількості марок другого хлопчика: $a : b = 3 : 4 = 6 : 8$; $b : c = 8 : 7$.

Об'єднуємо дані відношення: $a : b : c = 6 : 8 : 7$.

Розв'язання 1

1) $6 + 8 + 7 = 21$(частина) – стільки частин становлять всі марки.

2) $210 : 21 = 10$ (марок) припадає на 1 частину.

3) $10 \cdot 6 = 60$ (марок) треба дати першому хлопчику.

4) $10 \cdot 8 = 80$ (марок) треба дати другому хлопчику.

5) $10 \cdot 7 = 70$ (марок) треба дати третьому хлопчику.

Розв'язання 2

Об'єднаємо відношення так: $a : b = 3 : 4 = \frac{3}{4} : 1$, $b : c = 8 : 7 = 1 : \frac{7}{8}$. Тоді $a : b : c = \frac{3}{4} : 1 : \frac{7}{8} = 6 : 8 : 7$. Наступні кроки розв'язання такі самі, як і в розв'язанні 1.

Відповідь. Хлопчикам треба дати відповідно 60, 80, 70 марок.

Поділ числа на частини пропорційно до двох (трьох) наборів чисел

Задача 44. Три бригади робітників одержали за спільну роботу 4920 грн. До першої бригади входило 6 робітників і вони працювали 5 днів. У другій бригаді було 8 робітників, і працювали вони 6 днів. А в третій бригаді було 5 робітників, а працювали вони 9 днів. Скільки грошей заробила кожна бригада, якщо оплата проводилася за однаковими розцінками?

Аналіз задачі

Сума грошей, зароблених кожною бригадою, прямо пропорційна до кількості людей у бригаді та кількості днів, протягом яких бригада працювала, тобто пропорційна до двох наборів чисел.

Розв'язання

Перша бригада складається з 6 робітників і працювала 5 днів. Таку саму роботу могли б виконати за 1 день $6 \cdot 5$ робітників. Друга бригада, що складається з 8 робітників і працювала 6 днів, виконала роботу, яку б також виконали б за 1 день $8 \cdot 6$ робітників. Для третьої бригади відповідно матимемо $5 \cdot 9$ робітників. Розділимо 4920 грн пропорційно до чисел $6 \cdot 5$; $8 \cdot 6$; $5 \cdot 9$, тобто у відношенні $(6 \cdot 5) : (8 \cdot 6) : (5 \cdot 9) = 30 : 48 : 45 = 10 : 16 : 15$.

Отже, перша бригада отримає: $\frac{4920}{10+16+15} \cdot 10 = 1200$ (грн).

Друга бригада отримає: $\frac{4920}{10+16+15} \cdot 16 = 1920$ (грн).

Третя бригада отримає: $\frac{4920}{10+16+15} \cdot 15 = 1800$ (грн).

Відповідь. 1200 грн, 1920 грн, 1800 грн.

Для того, щоб учні краще сприймали нові способи розв'язування текстових задач, які з'являються по мірі появи нових теоретичних відомостей, але при цьому не забували і старі, раніше вивчені способи, слід час від часу пропонувати учням розв'язати задачі якомога більшою кількістю способів.

Задача 45. У касира 70 монет по 25 к. і по 10 к. на однакові суми. Скільки у касира монет кожного номіналу окремо?

Розв'язання 1

(спосіб спроб)

Нехай монет кожного номіналу по 35 штук. Тоді сума грошей по 25 к. дорівнює $25 \cdot 35 = 875$ (к.), а по 10 к. – і $10 \cdot 35 = 350$ (к.). Різниця між сумами дорівнює $875 - 350 = 525$ (к.).

Якщо замінити одну 25-копійчану монету 10-копійчаною, матимемо 34 монети по 25 к. на суму 850 к. і 36 монет по 10 к. на суму 360 к. Нова різниця між сумами становитиме $850 - 360 = 490$ (к.).

Як бачимо, під час заміни однієї 25-копійчаної монети 10-копійчаною різниця зменшується на $525 - 490 = 35$ (к.). Оскільки початкова різниця становила 525 к., то таку заміну слід виконати $525 : 35 = 15$ (раз). Тому монет по 25 к. буде $35 - 15 = 20$ (штук), а по 10 к. стане $35 + 15 = 50$ (штук).

Розв'язання 2

(спосіб припущення)

Нехай усі 70 монет – це монети по 10 к. Тоді загальна сума грошей становитиме $10 \cdot 70 = 700$ (к.). Якщо замінювати 10-копійчану монету 25-копійчаною, то загальна сума грошей зміниться на $25 + 10 = 35$ (к.), тому що одна сума зменшилась на 10 к., а друга – збільшилася на 25 к. Оскільки суми монет кожного номіналу мають бути однаковими, то заміну 10-копійчаних монет 25-копійчаними слід виконати $700 : 35 = 20$ (раз).

Отже, монет по 25 к. було 20 штук, а монет по 10 к. – 50 штук.

Розв'язання 3

(спосіб припущення)

Нехай усі 70 монет – це монети по 25 к. Подальші міркування аналогічні до наведених у попередньому розв'язанні.

Розв'язання 4

Нехай усі 70 монет – це монети 25 к. Тоді всього $25 \cdot 70 = 1750$ (к.). Якби всі 70 монет були 10-копійчаними, то всього було б $10 \cdot 70 = 700$ (к.). Різниця становитиме $1750 - 700 = 1050$ (к.). Якщо замінюємо 25-копійчану монету 10-копійчаною, то сума грошей змінюється на $25 + 10 = 35$ (к.). Тому монет по 10 к. має бути більше, ніж монет по 25 к., на $1050 : 35 = 30$ (штук).

Отримали нову задачу на знаходження двох чисел за їх сумою і різницею. Текст її може бути таким: «Є 70 монет по 10 к. і 25 к., причому монет по 25 к. на 30 менше. Скільки монет кожного номіналу окремо?»

1) $(70 - 30) : 2 = 20$ (монет) по 25 к. 2) $20 + 30 = 50$ (монет) по 10 к.

Розв'язання 5

Спосіб ґрунтується на застосуванні прийому зрівняння даних через найменше спільне кратне двох чисел: НСК (25; 10) = 50. Щоб отримати 50 к. слід узяти $50 : 25 = 2$ (монети) по 25 к. і $50 : 10 = 5$ (монет) по 10 к. Усього буде $2 + 5 = 7$ (монет). Оскільки всього 70 монет, то таку дію треба повторити $70 : 7 = 10$ (раз). Тоді буде взято $2 \cdot 10 = 20$ (монет) по 25 к. і $5 \cdot 10 = 50$ (монет) по 10 к.

Розв'язання 6

(пропорційний поділ)

Оскільки монети кожного номіналу повинні давати однакові суми, то їх кількість обернено пропорційна до їх вартості. Якщо кількість монет по 25 к. дорівнює a, а кількість монет по 10 к. – b, то $a : b = 10 : 25 = 2 : 5$. Отже, загальну кількість монет (70 штук) треба поділити на дві частини, пропорційно до чисел 2 і 5. Маємо: $\frac{70}{2+5} \cdot 2 = 20$ (монет) по 25 к.; $\frac{70}{2+5} \cdot 5 = 50$ (монет) по 10 к.

Відповідь. 20 монет по 25 к., 50 монет по 10 к.

2.4. ЗАДАЧІ НА ЗНАХОДЖЕННЯ ДРОБУ (ЧАСТИНИ) ВІД ЧИСЛА, ЧИСЛА ЗА ЙОГО ЧАСТИНОЮ. ЗАДАЧІ НА ВІДСОТКИ

Незважаючи на те, що задачі на знаходження дробу від числа та числа за його дробом відомі учням з 4-го класу і в курсі математики 5–6-х класів їм приділяється достатньо уваги, для значної кількості учнів вони залишаються складними.

Запобігти появі помилок та сприяти свідомому формування навичок з розв'язування задач на дроби та відсотки допомагає використання графічних схем. Також варто пропонувати учням розв'язувати задачі різними способами. Зокрема, навіть після вивчення теми «Множення на дріб», коли задача на знаходження дробу від числа із двокрокової (ділення та множення) перетворюється на задачу на одну дію (множення на дріб), не слід відкидати спосіб зведення до однієї частини. Також слід періодично пропонувати учням розв'язувати задачі на відсотки з детальним поясненням, зокрема того, що приймаємо за 100 % і чому, як знаходимо один відсоток тощо. Практика показує, що відмова від таких пояснень може призвести до ситуацій, коли учні починають сприймати 1 % не як запис дробу 0,01, а як одиницю вимірювання (як, наприклад, 1 кг чи 1 см).

Основними способами розв'язування ускладнених задач на дроби є *спосіб зведення до одиниці* та *спосіб частин*. Якщо в задачі основна залежність, з якої треба починати розв'язування, пропонується в кінці умови, то використовується спосіб зворотних міркувань у поєднанні зі способом частин.

Задача 46. Коли хлопчик прочитав $\frac{3}{8}$ усієї книжки, то до її середини йому залишилося ще прочитати 15 сторінок. Скільки сторінок у книжці?

Розв'язання

1) Яку частину книжки складають 15 сторінок?

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{8}=\frac{1}{8} \text{ (частину).}$$

2) Скільки всього сторінок у книжці?

$$15:\frac{1}{8}=120 \text{ (сторінок).}$$

Відповідь. У книжці 120 сторінок.

Задача 47. Двоє друзів вирішили купити футбольний м'яч. У одного хлопчика було $\frac{5}{8}$, а у другого – $\frac{3}{5}$ його вартості, причому в першого було на 1 грн 50 к. більше, ніж у другого. Скільки грошей залишилось у кожного з друзів, якщо кожен з них заплатив половину вартості м'яча?

Розв'язання

1) Яку частину вартості м'яча складають 1 грн 50 к.?

$$\frac{5}{8}-\frac{3}{5}=\frac{1}{40} \text{ (частину).}$$

2) Скільки коштував м'яч?

$$1,5:\frac{1}{40}=60 \text{ (грн).}$$

3) Яку суму вніс кожний із друзів на покупку м'яча?

$$60:2=30 \text{ (грн).}$$

4) Скільки було грошей у кожного з друзів?

$$60\cdot\frac{5}{8}=37,5 \text{ (грн) було у першого хлопчика;}$$

$$60\cdot\frac{3}{5}=36 \text{ (грн) було у другого хлопчика.}$$

5) Скільки грошей залишилось у кожного хлопчика?

$37,5-30=7,5$ (грн) залишилося у першого хлопчика;

$36-30=6$ (грн) залишилося у другого хлопчика.

Відповідь. У першого хлопчика залишилося 7,5 грн, у другого – 6 грн.

Серед задач на дроби є значна кількість таких, які не тільки розвивають уміння учнів виконувати різні міркуванні під час розв'язування текстових задач, але й за допомогою яких можна показати переваги арифметичного розв'язування над алгебраїчним, що є корисним з точки зору розвитку критичності та раціональності мислення.

Задача 48. Четверо друзів купили катер. Перший вніс $\frac{1}{2}$ суми, внесеної іншими; другий – $\frac{1}{3}$ суми, внесеної іншими; третій – $\frac{1}{4}$ суми, внесеної іншими, а четвертий вніс 1300 грн. Скільки коштує катер?

Розв'язання 1

(арифметичне)

З умови задачі випливає, що перший вніс $\frac{1}{3}$ вартості катера, другий – $\frac{1}{4}$, третій – $\frac{1}{5}$. Тоді всі троє друзів внесли $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{47}{60}$ вартості катера.

Четвертий вніс 1300 грн, що становить $1-\frac{47}{60}=\frac{13}{60}$ вартості катера. Отже, катер коштує $1300:\frac{13}{60}=6000$ (грн).

Відповідь. Катер коштує 6000 грн.

Розв'язання 2

(алгебраїчне)

Якщо позначити кількість грошей, яку вніс кожен із друзів, відповідно через x, y, z, то отримаємо:

$$x=\frac{y+z+1300}{2},\ y=\frac{x+z+1300}{3},\ z=\frac{x+y+1300}{4}.$$

Отже, треба розв'язати систему трьох рівнянь з трьома невідомими. Перевага арифметичного способу розв'язування очевидна.

Для кращого розуміння залежностей (прямих і обернених) між цілим і його частиною (дробом), можна пропонувати учням такі усні задачі.

Задача 49. а) Перше число становить $\frac{1}{5}$ другого. У скільки разів друге число більше від першого? (У 5 разів)

б) $\frac{1}{2}$ першого числа дорівнює $\frac{1}{3}$ другого. Яку частину другого числа становить перше число? Яку частину першого числа становить друге?

Розв'язання

Нехай a – перше число, b – друге. Тоді $\frac{1}{2}\cdot a=\frac{1}{3}\cdot b$. Зробимо, наприклад, перший дріб цілим. Для цього збільшимо обидві частини записаної рівності у 2 рази, дістанемо: $\frac{2}{2}\cdot a=\frac{2}{3}\cdot b$, тобто перше число становить $\frac{2}{3}$ другого. Якщо збільшити обидві частини рівності у 3 рази, то дістанемо: $\frac{3}{2}\cdot a=\frac{3}{3}\cdot b$, або друге число становить $\frac{3}{2}$ першого.

Відповідь. Перше число становить $\frac{2}{3}$ другого, а друге – $\frac{3}{2}$ першого.

в) $\frac{2}{3}$ першого числа дорівнюють $\frac{3}{4}$ другого. Яку частину другого числа становить перше? Яку частину першого числа становить друге число? (Перше число становить $\frac{9}{8}$ другого, друге – $\frac{8}{9}$ першого)

Задача 50. Сплав, що складається з міді та срібла, важить 660 г. Маса міді в цьому сплаві становить $\frac{5}{28}$ маси срібла. Скільки в сплаві срібла і скільки міді?

Розв'язання 1

З умови випливає, що відношення міді до срібла дорівнює відношенню 5 : 28. Тому сплав складається з 33 частин, срібла у ньому – 28 частин, а міді – 5 частин. На одну частину сплаву припадає 660 : 33 = 20 (г). Отже, у сплаві міді $20 \cdot 5 = 100$ (г), а срібла $20 \cdot 28 = 560$ (г).

Розв'язання 2

Нехай срібло становить 1 частину, тоді мідь становитиме $\frac{5}{28}$. Усього сплав (660 г) становитиме: $1+\frac{5}{28}=1\frac{5}{28}$ (частини).

На одну частину припадає $660:1\frac{5}{28}=560$ (г). Тоді маса міді дорівнює $660-560=100$ (г).

Відповідь. Маса срібла 560 г, а міді – 100 г.

На відміну від задач на дроби, задачі на відсоткові обчислення є новими для учнів 5-го класу. Тому треба домогтися від них усвідомлення таких понять, як «відсоток», «відсоткове відношення».

Значну увагу слід звернути на засвоєння найпростіших задач на відсотки: 1) знаходження відсотків від числа; 2) знаходження числа за даною кількістю його відсотків; 3) знаходження відсоткового відношення двох чисел. Ці задачі є основою для відсоткових обчислень у складніших за математичною структурою задачах. Потрібно також домогтися свідомого засвоєння учнями різних способів розв'язування задач на відсотки: 1) зведення до одиниці; 2) зведення до дробів; 3) спосіб пропорцій; 4) з використанням формул.

Використання різних способів під час розв'язування найпростіших задач на відсотки детально описано в [4], [7], [9], [10]. Тому звернемо увагу лише на ті моменти, яким приділяється недостатньо уваги під час навчання математики.

Слід домогтися, щоб учні чітко усвідомили, що «збільшення величини на певну кількість відсотків» слід розуміти не як різницеву зміну даної величини, а як її кратну зміну, тобто *збільшення в певну кількість разів*. Потрібно показати на прикладах, що коли дане число збільшили, наприклад, на 10 %, 30 %, 50 %, 80 %, 12,5 % тощо, то його збільшили відповідно в 1,1; 1,3; 1,5; 1,8; 1,125 раза (бо 110 % = 1,1; 112,5 % = 1,125 тощо). Навпаки, якщо число збільшили в 1,6 раза, в 2,5 раза, то його збільшили відповідно на 60 %, 150 %. Якщо величину зменшили на 10 %, 25 %, 40 %, то вона становитиме 90 %, 75 %, 60 %, або $\frac{9}{10}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$ свого попереднього значення. Це означає, що величину зменшили в $\frac{10}{9}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$ раза. Знання та розуміння цих залежностей є основою для розв'язування задач на збільшення (зменшення) величини на певну кількість відсотків.

Задача 51. а) Сторону квадрата збільшили на 40 %. На скільки відсотків збільшився периметр квадрата? (На 40 %)

б) Радіус кола зменшили на 10 %. На скільки відсотків зменшилася довжина кола? (На 10 %)

в) Довжину прямокутника збільшили на 20 %, а ширину – на 25 %. На скільки відсотків збільшилася площа прямокутника? (На 50 %)

г) На скільки відсотків зменшиться площа прямокутника, якщо його довжину та ширину зменшити на 10 %? (На 19 %)

ґ) На скільки відсотків зменшиться чи збільшиться площа прямокутника, якщо його довжину збільшити на 10 %, а ширину зменшити на 10 %? (На 1 %)

д) Сторону квадрата збільшили на 50 %. На скільки відсотків збільшилася його площа? (Площа збільшилась в 2,25 раза, або на 125 %)

Завершити розв'язування таких задач потрібно загальним *висновком*: якщо один (кожний) із множників збільшується на деяку кількість відсотків, тобто в певну кількість разів, то добуток змінюється за законом зміни добутку при кратному збільшенні одного (кожного) із множників. Аналогічно формулюють правило для випадку зменшення множників.

Така залежність існує між швидкістю і часом при проходженні певної відстані об'єктом, що рухається рівномірно, або між продуктивністю праці та часом, необхідним для виконання певного обсягу роботи. Зокрема, у скільки разів збільшується швидкість, у стільки само разів зменшується час, потрібний для проходження даної незмінної відстані, і навпаки.

Задача 52. а) Продуктивність праці робітника зросла на 25 %. На скільки відсотків зменшився час на виготовлення одиниці продукції?

Розв'язання

Оскільки продуктивність праці збільшилася в 1,25 або в $\frac{5}{4}$ раза, то час, який витрачають на виготовлення одиниці продукції, зменшився відповідно в $\frac{5}{4}$ раза, тобто становить тепер $\frac{4}{5}$ свого попереднього значення: $\frac{4}{5} = 0,8 = 80\,\%$. Отже, час зменшився на 20 %.

Відповідь. Час зменшився на 20 %.

б) Відстань між двома пунктами автомобіль пройшов зі швидкістю на 20 % меншою від тієї, що передбачалася. На скільки відсотків збільшився час руху?

Розв'язання

Швидкість автомобіля становила 80 %, або 0,8, тієї, що передбачалася. Отже, швидкість зменшилася у $\frac{10}{8}$ раза. У стільки само разів збільшився час руху: $\frac{10}{8} = 1,25 = 25\,\%$.

Відповідь. Час руху збільшився на 25 %.

Задача 53. а) Число збільшили на 25 %. На скільки відсотків треба зменшити нове число, щоб отримати початкове? (На 20 %)

б) Число зменшили на 25 %. На скільки відсотків треба збільшити нове число, щоб отримати початкове число? (На $33\frac{1}{3}\,\%$)

Задача 54. Обсяг замовлення на ремонтні роботи збільшився на 50 %. На скільки відсотків треба збільшити кількість робітників, якщо продуктивність праці буде збільшена на 25 %?

Розв'язання

1) Обсяг робіт збільшився в 1,5 раза. Отже, кількість робітників також слід збільшити в 1,5 раза. Тобто вона становитиме 1,5 від початкової кількості.

2) Продуктивність праці зросла на 25 %, тобто в 1,25 раза. Тому для виконання тієї самої роботи кількість робітників треба зменшити в 1,25 раза. Отже, потрібна кількість робітників становитиме 1,5 : 1,25 = 1,2 від початкової кількості. Це означає, що кількість робітників треба збільшити на 20 %.

Відповідь. Кількість робітників треба збільшити на 20 %.

У багатьох задачах із шкільного курсу математики йдеться про зміну концентрації (відсоткового вмісту чистої речовини) розчину, про поєднання зливків та про суміші. Оскільки ці задачі зустрічаються в підручниках 6-го класу, то слід додаткового роз'яснити зміст таких понять, як концентрація розчину в градусах і відсотках, проба дорогоцінного металу:

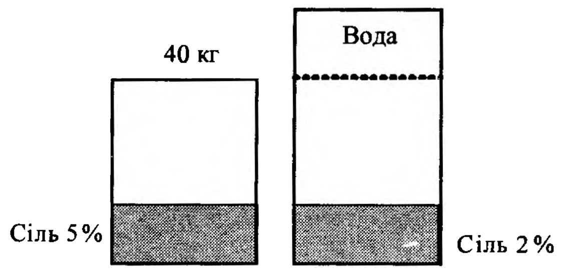
1) міцність кислоти або спирту зазвичай дають у сотих долях, або відсотках, які в цьому випадку називають градусами;

2) пробою дорогоцінних металів називають ваговий вміст металу (золота, срібла або платини) в одиниці сплаву, з якого виготовлено виріб.

У більшості країн загальноприйнятою є метрична система проб, за якою пробу позначають кількістю грамів металу (золота, срібла або платини) в 1000 г сплаву, причому чистому металу відповідає 1000-на проба.

Задача 55. Морська вода містить 5 % солі. Скільки кілограмів прісної води потрібно добавити до 40 кг морської води, щоб вміст солі в новому розчині становив 2 %?

Зауваження. Для кращого унаочнення задачі та пошуку способу її розв'язування можна запропонувати схему. Вона допоможе зрозуміти, що незмінна за масою сіль становить різний відсотковий вміст.



Розв'язання

1) Знайдемо, скільки чистої речовини (тобто солі) міститься в 40 кг морської води:

$$40 \cdot 0{,}05 = 2\ (\text{кг}).$$

2) У новому розчині чистої речовини також буде 2 кг, але це становитиме вже 2 % від усього розчину. Знайдемо масу всього розчину:

$$2 : 0{,}02 = 100\ (\text{кг}).$$

Відповідь. Маса всього розчину 100 кг.

2.5. СЕРЕДНЄ АРИФМЕТИЧНЕ В ЗАДАЧАХ. ЗАДАЧІ НА СУМІШІ ПЕРШОГО ТА ДРУГОГО РОДУ

Із нескладними за математичним змістом задачами на знаходження середнього арифметичного (середніх ціни, врожайності, температури, швидкості, часу тощо) учні ознайомлюються ще в початковій школі і вони є простими для більшості з них.

Під знаходженням середнього арифметичного розуміють не тільки обчислення середнього значення кількох доданків, узятих по одному, а також обчислення середнього значення суми певної кількості доданків, узятих групами (кілька разів). Такі задачі називають задачами на змішування першого роду, а середнє арифметичне в них називають «зваженим».

Під час розв'язування задач на змішування першого роду за даною «ціною» одиниць змішуваних речовин a_1 та a_2 (або концентрацією розчинів, температурою тощо) та їх кількістю m_1 і m_2 знаходять «ціну» одиниці суміші. Для цього використовують формулу:

$$\text{«Ціна суміші»} = \frac{a_1m_1 + a_2m_2}{m_1 + m_2}.$$

Починають розгляд задач на середнє арифметичне з уже відомого учням найпростішого випадку: знаходження середнього значення кількох доданків, узятих по одному. Потім розглядають обернену задачу: знаходження самих чисел за відомим їх середнім арифметичним, якщо дано певні залежності між ними (наприклад, різниця, кратне відношення) або деякі з них.

Задача 56. Фермер зібрав на першій ділянці з кожного з 10 га в середньому по 288 ц цукрового буряка, а на другій ділянці з кожного із 16 га – по 340 ц. Знайдіть середню врожайність цукрового буряка.

Розв'язання

1) Скільки буряків зібрав фермер з першої ділянки?

$$288 \cdot 10 = 2880 \text{ (ц)}.$$

2) Скільки буряків зібрав фермер з другої ділянки?

$$340 \cdot 16 = 5440 \text{ (ц)}.$$

3) Скільки буряків зібрав фермер з двох ділянок?

$$2880 + 5440 = 8320 \text{ (ц)}.$$

4) Яка площа двох ділянок?

$$10 + 16 = 26 \text{ (га)}.$$

5) Яка середня врожайність цукрового буряка, тобто скільки центнерів буряка зібрано з 1 га?

$$8320 : 26 = 320 \text{ (ц)}.$$

Відповідь. Середня врожайність цукрового буряка – 320 ц.

Задача 57. Сплавили 240 г срібла 640-ї проби зі зливком срібла невідомої проби й одержали 640 г срібла 700-ї проби. Знайдіть пробу другого зливка.

Розв'язання

1) Знайдемо, скільки чистого срібла у зливку масою 240 г, що має 640-ту пробу:

$$240 \cdot 0{,}64 = 153{,}6 \text{ (г)}.$$

2) Знайдемо, скільки чистого срібла в зливку масою 640 г, що має 700-ту пробу:

$$640 \cdot 0{,}7 = 448 \text{ (г)}.$$

3) Знайдемо, скільки чистого срібла у зливку невідомої проби:

$$448 - 153{,}6 = 294{,}4 \text{ (г)}.$$

4) Знайдемо, яка маса всього зливку невідомої проби:

$$640 - 240 = 400 \text{ (г)}.$$

5) Знайдемо, якої проби був другий зливок:

$$294{,}4 : 400 = 0{,}736.$$

Відповідь. Проба другого зливка дорівнює 736.

У задачах на змішування другого роду найчастіше відомі «ціни» окремих видів і «ціна» та кількість суміші, а ставиться вимога знайти кількість кожного виду, що входять у суміш.

Задача 58. У якому відношенні треба змішати два види цукерок за ціною 20 грн та 14 грн за 1 кг, щоб одержати суміш, що має ціну 15 грн за 1 кг?

Розв'язання

Якщо візьмемо 1 кг цукерок за ціною 20 грн, то порівняно з середньою ціною отримуємо надлишок, який дорівнює 5 грн. Якщо у суміш візьмемо 1 кг цукерок за ціною 14 грн, то до середньої ціни не вистачатиме 1 грн.

I вид 20 грн ↘ ↗ на 5 грн зменшити

15 грн

II вид 14 грн ↗ ↘ на 1 грн збільшити

Для того, щоб урівноважити відхилення від середньої ціни, необхідно на 1 одиницю маси цукерок першого виду взяти 5 вагових одиниць цукерок другого виду, тобто цукерки взяти у відношенні 1 : 5.

Відповідь. На 1 кг цукерок першого виду слід взяти 5 кг цукерок другого виду.

Можна запропонувати учням розв'язати кілька схожих задач і зробити висновок: для одержання суміші з певною середньою «ціною» кількості взятих окремих видів з даними «цінами» повинні бути обернено пропорційні до відхилення цих «цін» від середньої «ціни».

Задача 59. Скільки золота 600-ї проби і 900-ї проби треба сплавити, щоб одержати 700 г золота 720-ї проби?

Розв'язання

Відхилення проб кожного виду від середньої (720-ї) проби золота показано на схемі.

I зливок 600 ↘ ↗ на 120 збільшити

720

II зливок 900 ↗ ↘ на 180 зменшити

Тому різних видів золота треба взяти у відношенні 180 : 120 = 3 : 2.

Розділивши 700 г у відношенні 3 : 2, дістанемо 420 г золота 600-ї проби і 280 г золота 900-ї проби.

Відповідь. Треба взяти 420 г золота 600-ї проби і 280 г золота 900-ї проби.

Крім способу пропорційного поділу, задачі на суміші можна розв'язувати способом припущення та способом частин.

Задача 60. Для подарункових наборів в магазині взяли цукерки по 13,2 грн за 1 кг і цукерки по 16,8 грн за 1 кг. У результаті отримали 12 кг суміші за ціною 14,1 грн. Скільки кілограмів цукерок кожного виду взяли?

Розв'язання 1

1) Припустимо, що у суміші всі 12 кг дешевшого виду цукерок за ціною 13,2 грн за 1 кг. Тоді його вартість була б:

$$13{,}2 \cdot 12 = 158{,}4 \text{ (грн).}$$

2) Знайдемо справжню вартість суміші:

$$14{,}1 \cdot 12 = 169{,}2 \text{ (грн).}$$

3) Знайдемо різницю між справжньою вартістю суміші та вартістю суміші після припущення:

$$169{,}2 - 158{,}4 = 10{,}8 \text{ (грн).}$$

4) Якщо замінювати 1 кг цукерок за ціною 13,2 грн на 1 кг цукерок за ціною 16,8 грн, то вага суміші не зміниться, а її вартість збільшиться на:

$$16{,}8 - 13{,}2 = 3{,}6 \text{ (грн).}$$

5) Щоб збільшити вартість суміші на 10,8 грн, потрібно замість цукерок дешевшого виду взяти дорожчі цукерки стільки разів, скільки разів 3,6 міститься в 10,8, тобто $10{,}8 : 3{,}6 = 3$ (рази). Отже, потрібно взяти 3 кг цукерок за ціною 16,8 грн і $12 - 3 = 9$ (кг) цукерок за ціною 16,8 грн.

Зауваження. Аналогічні міркування можна провести, якщо припустити, що в суміші всі 12 кг цукерок взяли за ціною 16,8 грн за 1 кг.

Розв'язання 2

Якщо припустити, що є лише дешевші цукерки, то на 1 кг цукерок за ціною 16,8 грн був би надлишок грошей, що дорівнює $14{,}1 - 13{,}2 = 0{,}9$ (грн), а на 12 кг він становив би $0{,}9 \cdot 12 = 10{,}8$ (грн). Оскільки з умови зрозуміло, що ні надлишку, ні нестачі грошей під час продажу не було, то потрібно у суміші частину дешевших цукерок замінити на дорожчі. Під час такої заміни вартість 1 кг цукерок збільшується на $16{,}8 - 13{,}2 = 3{,}6$ (грн). Заміну слід зробити $10{,}8 : 3{,}6 = 3$ (рази). Отже, потрібно взяти 3 кг цукерок по 16,8 грн і $12 - 3 = 9$ (кг) цукерок по ціні 16,8 грн.

Зауваження. Аналогічні міркування можна провести, якщо припустити, що в суміші всі цукерки дорожчого виду.

Розв'язання 3

1) Беручи 1 кг дешевших цукерок, порівняно з ціною суміші матимемо нестачу грошей, що дорівнює

$$14{,}1 - 13{,}2 = 0{,}9 \text{ (грн)}.$$

2) Беручи 1 кг дорожчих цукерок, ми маємо прибуток порівняно з ціною суміші. Отримуємо надлишок грошей, що дорівнює

$$16{,}8 - 14{,}1 = 2{,}7 \text{ (грн)}.$$

3) Для того, щоб під час продажу суміші не було ні надлишку, ні нестачі грошей, потрібно, щоб надлишок на одному виді цукерок дорівнював нестачі на другому. Тому кількість кожного із видів цукерок має бути обернено пропорційною до різниці ціни відповідного виду і ціни суміші. Це означає, що кількість цукерок за ціною 13,2 грн має так відноситися до кількості цукерок за ціною 16,8 грн як $2{,}7 : 0{,}9 = 27 : 9 = 3 : 1$.

Отже, цукерок за ціною 13,2 грн треба взяти $12 : (3 + 1) \cdot 3 = 9$ (кг), а цукерок за ціною 16,8 грн – $12 : (3 + 1) \cdot 1 = 3$ (кг).

Розв'язання 4

1) $14{,}1 - 13{,}2 = 0{,}9$ (грн) $= 90$ (к.) – різниця між ціною 1 кг суміші і 1 кг дешевших цукерок.

2) $16{,}8 - 14{,}1 = 27$ (грн) $= 270$ (к.) – різниця між ціною 1 кг дорожчих цукерок і 1 кг суміші.

3) 1 к. нестачі отримуємо з $\frac{1}{90}$ кг дешевших цукерок; 1 к. надлишку отримуємо з $\frac{1}{270}$ кг дорожчих цукерок. Щоб після продажу суміші не було ні нестачі, ні надлишку грошей, треба на кожну $\frac{1}{90}$ кг дешевших цукерок взяти $\frac{1}{270}$ кг дорожчих. Тому кількість дешевших цукерок відноситься до кількості дорожчих як $\frac{1}{90} : \frac{1}{270} = 3 : 1$.

Відповідь. Треба взяти 9 кг цукерок за ціною 13,2 грн за 1 кг і 3 кг за ціною 16,8 грн.

ВИКОРИСТАНА ТА РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Александров И.И.*, *Александров А.И.* Методы решения арифметических задач / Под ред. проф. И.К. Андронова. – М.: Учпедгиз, 1953. – 75 с.

2. *Астряб О.М.* Принципи систематизації арифметичних задач. – К.: Рад. шк., 1939. – 55 с.

3. *Бевз Г.П.* Методика розв'язування алгебраїчних задач у 6–8 класах: Посіб. для вчителів. – К.: Рад. шк., – 1975. – 239 с.

4. *Березанская Е.С.* Методика арифметики для учителей средней школы. – М.: Учпедгиз. – 1955. – 395 с.

5. *Богданович М.В.* Методика розв'язування задач у початковій школі: Навч. посіб. – 3-тє вид., перероб. і допов. – К.: Вища шк., 1990. – 183 с.

6. *Дубинчук О.С.* Про культуру математичних записів у восьмирічній школі.– К.: Рад. шк., – 1961. – 113 с.

7. *Маєргойз Д.М.*, *Дубинчук О.С.* Методика викладання арифметики. – К.: Рад. шк., 1976. – 395 с.

8. *Пономарёв С.А.*, *Сырнев Н.И.* Сборник задач и упражнений по арифметике для 5 и 6 классов. –16-е изд. – М.: Просвещение, 1969. – 240с.

9. *Слєпкань З.І.* Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. – К.: Зодіак – ЕКО, 2000. – 512 с.

10. *Стратилатов П.В.* Решение задач в курсе арифметики 5–6 классов средней школы. – М.: Учпедгиз, 1963. – 132 с.

11. *Филичев С.В.*, *Чекмарев Я.Ф.* Руководство к решению арифметических задач. Пособие для учителей. – М.: Учпедгиз, 1948. – 198 с.

12. *Фридман Л.М.* Сюжетные задачи по математике. История, теория, методика. Учеб. пос. для учит. и студ. педвузов и колледжей. – М.: Шк. пресса, 2002. – 208 с.

Навчальне видання

Бібліотека «Шкільного світу»

***Лук'янова** Світлана*

Розв'язування текстових задач арифметичними способами
5—6 класи

Художній редактор *Т.Мосієнко*
Коректор *Л.Волинська*
Комп'ютерна верстка *К.Яскевич*

Підписано до друку 05.12.06. Формат 60x84/16
Папір офсетний № 1. Гарнітура Таймс. Друк офсетний.
Умовн. друк. арк. 7,44 . Обл.-вид. арк. 7,2. Наклад 2500 пр.

Зам. 154.
Видавничий дім «Шкільний світ»
01014, м.Київ, вул. Тимірязєвська, 2
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
серія ДК № 623 від 04.10.2001 р.

ФО-П Галіцина Л.В.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
серія ДК № 1181 від 27.12.2002 р.

Видруковано з готових діапозитивів в ОП «Житомирська облдрукарня»
10014, Житомир, вул. Мала Бердичівська, 17
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
серія ЖТ № 1 від 06.04.2001 р.