Interdisciplinary Studies of Complex Systems
No. 23 (2023) 70–76

https://doi.org/10.31392/iscs.2023.23.070 UDC 511.7

Faithfulness of system of Q^*-cylinders for calculation of Hausdorff–Besicovitch dimension

Vladyslav Vasylenko[1,2], *Oleksandr Voronenko*[1,3], *Mykola Pykhtar*[1,4], *Grygoriy Torbin*[1,5,6]

Про довірчість системи Q^*-циліндрів для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича

Владислав Василенко, Олександр Вороненко, Микола Пихтар, Григорій Торбін

Abstract. The paper is devoted to the development of methods of proving the faithfulness for the determination of the Hausdorff-Besicovitch dimension of Vitaly coverings of the unit interval. General sufficient conditions for the faithfulness of the family $\Phi(Q^*)$ of cylinders generated by Q^*-expansions for the Hausdorff-Besicovitch dimension calculation of real numbers are proven. We also conjectured that our sufficient conditions are also necessary conditions for the family $\Phi(Q^*)$ of cylinders to be faithful.

Keywords: Hausdorff-Besicovitch dimension, Q^*-expansions of real numbers, faithful Vitaly coverings

2020 Mathematics Subject Classification: Mathematics Subject Classification (2020): 11K55, 26A30, 28A80, 60E10

Анотація. Робота присвячена розвитку методів доведення довірчості для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича локально тончих систем покриттів одиничного відрізка. В роботі доведено загальні достатні умови довірчості для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича системи $\Phi(Q^*)$ циліндричних відрізків, породжених Q^*-розкладами дійсних чисел. Також висунуто гіпотезу про те, що знайдені достатні умови довірчості є одночасно необхідними умовами.

Ключові слова: Розмірність Хаусдорфа-Безиковича, Q^*-розклади дійсних чисел, довірчі локально тонкі системи покриттів

[1] Dragomanov Ukrainian State University, Kyiv, Ukraine
[2] vasvlad1997@gmail.com
[3] ysk.docs@gmail.com
[4] nppihtar@gmail.com
[5] g.m.torbin@udu.edu.ua
[6] Institute of Mathematics of NASU, Kyiv, Ukraine. torbin@imath.kiev.ua

1 Вступ

Розмірність Хаусдорфа–Безиковича є основним інструментом дослідження фрактальних множин. При цьому проблема визначення чи хоча б оцінки розмірності Хаусдорфа–Безиковича множини або міри є однією з основних задач фрактального аналізу, розв'язанню якої присвячено велику кількість дослідницьких статей у провідних математичних журналах світу (див., наприклад, [2–4] та огляди в цих роботах). Тому вдосконалення існуючих та пошук нових методів обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича є актуальним завданням фрактального аналізу. Суть одного з таких методів полягає у зменшенні сімейства допустимих покриттів при обчисленні розмірності до деякого специфічного (бажано — зчисленного) класу покриттів, який є достатнім (довірчим) для правильного обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича. Нагадаємо, що сімейство Φ підмножин з $[0,1]$ називається локально тонкою системою покриттів одиничного відрізка, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке покриття відрізка $[0,1]$ підмножинами $E_j \in \Phi$, що $|E_j| < \varepsilon$ і $[0,1] = \bigcup\limits_j E_j$.

Нехай α — додатне число. Тоді α-мірною мірою Хаусдорфа множини E відносно сімейства Φ називається

$$H^{\alpha}(E,\Phi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\inf_{|E_j|\le\varepsilon}\left\{\sum_j |E_j|^{\alpha}\right\}\right],$$

де інфімум береться за всіма не більш як зліченними ε-покриттями $\{E_j\}$ множини E множинами $E_j \in \Phi$.

Розмірністю Хаусдорфа–Безиковича множини E відносно сімейства підмножин Φ називається таке невід'ємне число, що

$$\dim_H(E,\Phi) = \inf\{\alpha : \quad H^{\alpha}(E,\Phi) = 0\}.$$

Локально тонка система покриттів Φ називається довірчою системою покриттів на $[0,1]$, якщо

$$\dim_H(E,\Phi) = \dim_H(E), \forall E \subset [0,1].$$

Як відомо (див., наприклад, [4, 6, 7] та огляд літератури в цих роботах) прикладами довірчих систем покриттів є системи циліндрів, що породжуються s-адичним представленням дійсних чисел [5]; системи покриттів, які породжуються Q-представленнями [14]; системи покриттів, що породжуються Q^*-представленнями, для яких виконується умова ([4]):

$$\inf_k\{q_{0k}, q_{(n-1)k}\} > 0.$$

Q^*-зображення дійсних чисел, яке було вперше введено в розгляд як інструмент зображення дійсних чисел та зручний інструмент побудови сингулярно неперервних та абсолютно неперервних розподілів ймовірностей з ніде не щільним спектром додатної міри Лебега в роботі [13] та детально досліджено в роботі [11], стало у певному розумінні полігоном перевірки гіпотез та побудови контрприкладів для багатьох проблем, пов'язаних з теорією сингулярно неперервних ймовірнісних мір ([10, 14]) (застосування теореми Джессена-Вінтнера та побудова її узагальнень, тополого-метрична класифікація сингулярно неперервних розподілів тощо), метричною та розмірнісною теорією чисел (фрактальні та метричні властивості множин анормальних та суттєво анормальних чисел [1, 12]), з дослідженням проблем довірчості для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича систем циліндричних відрізків, породжених різними системами числення тощо. Тому Q^*-зображення дійсних чисел доцільно використовувати як методологічно цінний педагогічний інструмент при викладанні основ фрактального аналізу та теорії сингулярних мір для студентів математичних спеціальностей університетів. У роботі [9] побудовано приклад такого Q^*-зображення дійсних чисел, для якого відповідна система циліндричних відрізків не є довірчою, що дало перший приклад недовірчої системи циліндрів, породженої розкладами дійсних чисел із фіксованим скінченним алфавітом.

З метою пошуку достатніх умов довірчості для системи Q^*-циліндрів, у серії робіт М. Ібрагіма та Г.Торбіна ([6, 7] було запропоновано новий підхід до знаходження довірчості систем циліндрів, породжених Q^*-представленнями дійсних чисел. У цій роботі ми удосконалюємо цей підхід та отримуємо загальні достатні умови довірчості систем Q^*-циліндрів, які у певному сенсі є близькими до необхідних умов.

2 Про нові достатні умови довірчості для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича системи циліндрів Q^*-розкладів

Теорема 1. *Нехай* $Q_n := q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n$, *де* $q_k := \max_i \{q_{ik}\}$. *Якщо ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n^\alpha$ *збігається* $\forall \alpha > 0$, *то сім'я* $\Phi(Q^*)$ *циліндрів* Q^**-зображення є довірчою для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича на* $[0; 1]$.

Доведення. Нехай E — довільна підмножина з $[0; 1]$, α і ε — довільні додатні числа, δ — довільне число з проміжка $(0; \alpha)$. Нехай $\{E_j\}$ — довільне ε-покриття множини E відрізками, $\{E_j\} = [a_j; b_j]$. Для E_j існує циліндричний відрізок

$$\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n_j}}$$

мінімального рангу n_j, який цілком міститься в $[a_j; b_j]$. Оскільки довільний циліндр є об'єднанням s циліндрів наступного рангу, то існує не більше як $(2s - 2)$ циліндри рангу n_j, що належать $[a_j; b_j]$.

Позначимо через M_j об'єднання таких циліндрів. α-об'єм всіх циліндрів, що входять до M_j, не перевищує

$$(2s - 2) \cdot |E_j|^\alpha < 2s \cdot |E_j|^\alpha \tag{1}$$

Нехай

$$c_j := min\{x : x \in M_j\};$$

$$d_j := max\{x : x \in M_j\}.$$

Як покрити $[a_j; c_j]$ циліндрами? Нехай $\Delta_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{n_j}\ldots\gamma_{n_j+s_j^{(1)}}}$ - циліндр мінімального рангу, що належить $[a_j; c_j]$. Таких циліндрів є не більш як $(s-1)$. Позначимо через $L_j^{(1)}$ об'єднання таких циліндрів. Їх α-об'єм не перевищує

$$(s-1)\cdot\max|\Delta_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{n_j}\ldots\gamma_{n_j+s_j^{(1)}-1}}i| =$$

(де максимум береться за всіма такими циліндрами, що належать до $L_j^{(1)}$)

$$= (s-1)\cdot max|\Delta_{\gamma_1\ldots\gamma_{n_j+s_j^{(1)}-1}}i|^{\delta}\cdot|\Delta_{\gamma_1\ldots\gamma_{n_j+s_j^{(1)}-1}}i|^{\alpha-\delta}$$
$$\leq (s-1)\cdot Q^{\delta}_{n_j+s_j^{(1)}}\cdot|E_j|^{\alpha-\delta} \qquad (2)$$

Нехай $c_j^{(1)} := min\{x : x\in L_j^{(1)}\}$.

Як покрити $[a_j; c_j^{(1)}]$ циліндрами? Нехай

$$\Delta_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{n_j}\ldots\gamma_{n_j+s_j^{(1)}}\ldots\gamma_{n_j+s_j^{(1)}+s_j^{(2)}}} -$$

циліндр мінімального рангу, що міститься в $[a_j; c_j^{(1)}]$. Таких циліндрів є не більш як $(s-1)$. Позначимо через $L_j^{(2)}$ об'єднання таких циліндрів. Їх α-об'єм не перевищує

$$(s-1)\cdot\max|\Delta_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{n_j+s_j^{(1)}+s_j^{(2)}-1}}i| =$$

(де максимум береться за всіма такими циліндрами, що належать до $L_j^{(2)}$)

$$= (s-1)\cdot max|\Delta_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{n_j+s_j^{(1)}+s_j^{(2)}-1}}i|^{\delta}\cdot|\Delta_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{n_j+s_j^{(1)}+s_j^{(2)}-1}}i|^{\alpha-\delta}$$
$$\leq (s-1)\cdot Q^{\delta}_{n_j+s_j^{(1)}+s_j^{(2)}}\cdot|E_j|^{\alpha-\delta}. \qquad (3)$$

Продовжуючи цей процес по індукції, ми або на певному кроці отримаємо ситуацію, коли а) $a_j \equiv c_j^{(k)}$, або ж б) $a_j < c_j^{(k)}, \forall k\in N$.

У випадку б) отримаємо зчисленну кількість циліндрів, які покривають $(a_j; c_j]$. Їх загальний α-об'єм не перевищує

$$(s-1)\cdot|E_j|^{\alpha-\delta}\cdot(Q^{\delta}_{n_j+s_j^{(1)}} + Q^{\delta}_{n_j+s_j^{(1)}+s_j^{(2)}} + \ldots + Q^{\delta}_{n_j+s_j^{(1)}+s_j^{(2)}+\ldots+s_j^{(k)}} + \ldots) \leq$$

$$\leq s\cdot|E_j|^{\alpha-\delta}\cdot(\sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{\delta}).$$

У випадку а) отримаємо скінченну кількість циліндрів, які покривають $[a_j; c_j]$. Їх загальний α-об'єм не перевищує

$$s\cdot|E_j|^{\alpha-\delta}\cdot(\sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{\delta}).$$

В обох випадках існує скінченна або зчисленна кількість циліндрів, яка покриває $(a_j; c_j]$ і їх α-об'єм не перевищує

$$s \cdot |E_j|^{\alpha-\delta} \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{\delta}).$$

Аналогічна ситуація з $[d_j; b_j)$: існує скінченна або зчисленна кількість циліндрів, які покривають $[d_j; b_j)$ і чий α-об'єм не перевищує

$$s \cdot |E_j|^{\alpha-\delta} \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{\delta}).$$

Отже, інтервал $(a_j; b_j)$ можна покрити за допомогою скінченної або зчисленної кількості Q^*-циліндрів, і α-об'єм цього покриття не перевищує

$$2s \cdot |E_j|^{\alpha} + 2 \cdot s|E_j|^{\alpha-\delta} \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{\delta}) \leq 2s \cdot |E_j|^{\alpha-\delta} \cdot (1 + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{\delta}).$$

Точки a_j і b_j, взагалі кажучи, можуть бути непокритими цими циліндрами.

Для заданих $\alpha > 0, \delta > 0, [a_j; b_j]$ можна вибрати циліндри рангу k_j такі, що містять відповідно a_j і b_j, і α-об'єми цих циліндрів менші за $\frac{1}{2} s|E_j|^{\alpha-\delta} \cdot (1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} Q_n^{\delta})$.

Добавивши ці два циліндри до покриття, ми отримаємо ε-покриття відрізка $[a_j; b_j]$ Q^*-циліндрами і α-об'єм цього покриття не перевищує

$$3s \cdot |E_j|^{\alpha-\delta} \cdot (1 + S(\delta)),$$

де $S(\delta) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} Q_n^{\delta}$.

Отже, для довільного $\varepsilon > 0$, довільного $\alpha > 0$, довільного $\delta \in (0; \alpha)$ та для довільного ε-покриття $\{E_j\}$ відрізками, існує таке ε-покриття множини E Q^*-циліндрами, α-об'єм якого не перевищує

$$3s \cdot \sum_j |E_j|^{\alpha-\delta} \cdot (1 + S(\delta)).$$

Тому

$$H_{\varepsilon}^{\alpha}(E, \Phi(Q^*)) \leq 3s \cdot (1 + S(\delta)) \cdot \sum_j |E_j|^{\alpha-\delta}.$$

Оскільки остання нерівність правильна для довільного ε-покриття $\{E_j\}$ множини E відрізками, то

$$H_{\varepsilon}^{\alpha}(E, \Phi(Q^*)) \leq 3s \cdot (1 + S(\delta)) \cdot H_{\varepsilon}^{\alpha-\delta}(E),$$

$$\forall E, \forall \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \forall \delta \in (0; \alpha).$$

Переходячи до границі при $\varepsilon \to 0$, отримуємо

$$H^{\alpha}(E, \Phi(Q^*)) \leq 3s \cdot (1 + S(\delta)) \cdot H^{\alpha-\delta}(E),$$

$$\forall E, \forall \alpha > 0, \forall \delta \in (0; \alpha).$$

Отже,

$$dim_H(E, \Phi(Q^*)) \le dim_H E + \delta, \forall \delta > 0.$$

Оскільки остання нерівність має місце для довільного як завгодно малого δ, то

$$dim_H(E, \Phi(Q^*)) \le dim_H E, \forall E.$$

Беручи до уваги, що завжди має місце нерівність

$$dim_H E \le dim_H(E, \Phi), \forall E, \forall \Phi,$$

то отримуємо бажану рівність

$$dim_H(E, \Phi(Q^*)) = dim_H(E), \forall E \subset [0; 1]. \quad \square$$

Наслідок 1. *Якщо* $\sup\limits_{i,k} q_{ik} =: q^* < 1$, *то* $\Phi(Q^*)$*-довірча.*

Гіпотеза. *Умова* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Q_n^{\delta} < +\infty, \forall \delta > 0$ *є необхідною для довірчості* $\Phi(Q^*)$.

Подяка

Ця робота була частково підтримана Simons Foundation та науково-дослідними проєктами «Багаторівневий аналіз сингулярних ймовірнісних мір та його застосування» та «Динаміки складних систем у різних часових шкалах» (МОН України).

Література

[1] S. Albeverio, I.Garko, M.Ibragim, G. Torbin. 2016. Non-normal numbers: Full Hausdorff dimensionality vs zero dimensionality. *Bulletin des Sciences Mathematiques*, 141, no. 1. P. 1–19.

[2] S. Albeverio, Yu. Kondratiev, R. Nikiforov, G. Torbin. 2017. On new fractal phenomena connected with infinite linear IFS. *Mathematische Nachrichten*, 290. P. 1163–1176.

[3] S. Albeverio, G.Ivanenko, M.Lebid, G. Torbin. 2020. On the Hausdorff dimension faithfulness and the Cantor series expansion. *Methods of Functional Analysis and Topology*. 26, no. 4. P. 298–310.

[4] S. Albeverio, G. Torbin. 2005. Fractal properties of singularly continuous probability distributions with independent Q^*-digits. *Bull. Sci. Math.*, 129, no. 4. P. 356–367.

[5] P. Billingsley. 1965. *Ergodic theory and information.* New York-London-Sydney: John Wiley & Sons, Inc.

[6] М. Х. Ібрагім, Г. М. Торбін. 2015. Про ймовірнісний підхід до DP-перетворень та довірчості систем покриттів для обчислення розмірності. *Теорія ймовірностей і математична статистика*, 92. P. 29–40. (English translation in: *Theory of Probability and Mathematical Statistics*. 2016, 92, p. 23–36.)

[7] M. Ibragim, G. Torbin. 2016. On fractal faithfulness and fine fractal properties of random variables with independent Q^*-digits. *Modern Stochastics: Theory and Applications*, 3, no. 2. P. 119–131.

[8] R. Nikiforov, G. Torbin. 2013. Fractal properties of random variables with independent Q_∞-symbols. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 86. P. 169–182.

[9] Yu. Peres, G. Torbin. Continued fractions and dimensional gaps, *in preparation*.

[10] Г. М. Торбін. 2005. Мультифрактальний аналіз сингулярно неперевних ймовірнісних мір. *Український математичний журнал*, 57, no. 5. P. 837–857.

[11] Г. М. Торбін. 1999. Випадкові величини типу Джессена-Вінтнера та їх фрактальні властивості. *Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 — теорія ймовірностей та математична статистика.* — Інститут математики НАН України, Київ.

[12] Г. М. Торбін. 1998. Частотні характеристики нормальних чисел в різних системах числення. *Фрактальний аналіз та суміжні питання.* — Київ: ІМ НАН України — НПУ ім. М. П. Драгоманова. № 1. С. 53–55.

[13] Г. М. Торбин, Н. В. Працевитый. 1992. Случайные величины с независимыми Q^*-знаками. *Случайные эволюции: теоретические и прикладные задачи.* — Киев: Ин-т математики АН Украины. С. 95–104.

[14] А. Ф. Турбин, Н. В. Працевитый. 1992. *Фрактальные множества, функции, распределения.* К.: Наукова думка.