Министерство просвещения УССР

Киевский государственный педагогический институт им.А.М.Горького

На правах рукописи

Н.А.Сотниченко

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО ВРЕМЕНИ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ.

№ 01.003 /дифференциальные и интегральные уравнения/

/Диссертация написана на русском языке/

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.

Киев - 1972

Работа выполнена в Киевском государственном педагогическом институте им. А.М.Горького.

Научный руководитель - доктор физико-математических наук, профессор С.Ф.ФЕЩЕНКО

Официальные оппоненты:

Доктор физико-математических наук, профессор Ю.А.РЯБОВ

Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник ИМ АН УССР Д.Г.КОРЕНЕВСКИЙ

Ведущее предприятие - Белорусский ордена Трудового Красного Знамени государственный университет имени В.И.ЛЕНИНА.

Автореферат разослан " .... " ....19 ... г.

Защита диссертации состоится " ... " ....19 ... г. на заседании Ученого Совета физико-математического факультета Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького.

Отзывы просим присылать по адресу: г.Киев - 30, ул.Пирогова 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом /ДУ с ЗА/, описывающие процессы с последействием, находят много приложений в теории автоматического регулирования, автоматике и телемеханике, в исследованиях по теоретической кибернетике, ракетной технике, термоядерному синтезу и т.д. Обилие применений таких уравнений способствовало увеличению интереса к ним, в результате чего появилось много работ по различным вопросам теории ДУ с ЗА.

Реферируемая работа посвящена применению асимптотического метода профессора С.Ф.Фещенко для асимптотического представления решений линейных систем гиперболического типа с медленно меняющимися коэффициентами с запаздыванием по времени, а также к некоторому типу интегро-дифференциальных уравнений /и.-д.у./ в частных производных с запаздыванием по времени.

Следует отметить, что уравнения с частными производными и отклоняющимися аргументами изучены гораздо меньше, чем обыкновенные.

Первой и единственной работой в этом направлении на протяжении ряда лет было исследование Ло /1894г./, в котором классическая теорема Коши-Ковалевской распространялась на случай аналитической системы, содержащей производные лишь по одной независимой переменной.

В дальнейшем указанные уравнения рассматривались в работах И.М.Гуль, Л.Э.Эльсгольца, В.Р.Петухова, А.Д.Мышкиса, В.Э.Аболиня, Э.Б.Сеидова, Б.Л.Гуревича, М.С.Аграновича, З.И.Рехлицкого и ряда зарубежных авторов.

В последнее время появились исследования Ю.А.Митропольского, Д.Г.Кореневского, С.Ф.Фещенко, В.И.Фодчука, В.Р.Носова, С.А.Василишина, В.Г.Коломийца, К.К.Гасанова, А.Б.Нерсесяна и др., большая часть которых посвящена теоремам существования и единственности решения, непрерывной зависимости решения от параметра и начальной функции, устойчивости решения и значительно меньше построению самих решений.

При решении ДУ с ОА возникают большие трудности. В замкнутой форме они интегрируются в исключительно редких случаях. Поэтому для интегрирования таких уравнений применяются приближенные математические методы, среди которых самое широкое применение получил асимптотический метод.

Как известно, асимптотическое представление решений систем линейных дифференциальных уравнений с большим или малым параметром тесно связано с поведением корней так называемого характеристического уравнения.

В работах Г.Биркгофа, Я.Д.Тамаркина, В.С.Пугачева разработан метод асимптотического интегрирования линейных дифференциальных систем, содержащих большой параметр, в случае, когда характеристическое уравнение, соответствующее этой системе, имеет простые корни.

В работах С.Ф.Фещенко исследовались системы линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами, в которых разработан метод асимптотического представления интегралов неоднородных систем указанных уравнений в случае "резонанса" и "нерезонанса". Описан асимптотический метод расщепления данной системы на несколько независимых подсистем низших порядков, количество которых зависит от числа изолированных групп корней характеристического уравнения.

Н.И.Шкиль разработал метод, позволяющий строить асимптотические решения в случае кратных корней характеристического уравнения, которым соответствуют элементарные делители тождественной кратности.

В работах Н.И.Шкиля и И.И.Старуна рассматривался случай кратного корня с несколькими непростыми элементарными делителями.

Дифференциальные уравнения в частных производных с медленно меняющимися коэффициентами в основном исследовались С.Ф.Фещенко, Г.Н.Савиным, И.И.Маркушем. Эти результаты были распространены С.Ф.Фещенко, Н.И.Шкилем и И.И.Маркушем на системы названных уравнений в случае простых корней характеристического уравнения. Случай, когда каждому из нескольких кратных корней характеристического уравнения соответствует один элементарный делитель той же кратности, рассмотрен Н.И.Шкилем.

Построение асимптотических решений для обыкновенных линейных ДУ с РА с медленно меняющимися коэффициентами дано в работах Я.П.Менько, С.Ф.Фещенко, Н.И.Шкиля, А.А.Сыроватко, а для линейного ДУ с РА в частных производных с медленно меняющимися коэффициентами - в работах Я.П.Менько и С.Ф.Фещенко, В.А.Домбровського и В.И.Годчука, Е.Ш.Балла и И.И.Маркуша.

Системы такого типа исследовались С.Ф.Фещенко, Н.И.Шкилем и автором [1, 2].

Асимптотическое представление решений и.-д.у., имеющих параметр, докладно изложено в работе В.И.Тржицинского. И.-д.у. в частных производных без запаздывания исследовали Ф.Лось, Н.Ш.Нигамаева, а с запаздыванием - А.Б.Нерсесян, М.И.Иманалиев Г.Б.Яковлева и другие.

По теории и.-д.у. в частных производных с медленно меняющимися коэффициентами без запаздывания проводили исследования И.И.Маркуш, А.А.Стоницкий, с запаздыванием - В.А.Домбровский, С.Ф.Фещенко и автор [3] .

Диссертация состоит из введения, трех глав и приложения.

Во введении дается краткий обзор основных результатов теории обыкновенных ДУ с ЗА, ДУ и и.-д.у с ЗА в частных производных, а также обзор исторического развития асимптотических методов, близких к рассматриваемым в предлагаемой диссертации.

Глава I посвящается построению асимптотических решений для систем линейных ДУ с ЗА гиперболического типа следующего вида:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = A_1(\tau,x,\varepsilon)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \varepsilon A_2(\tau,x,\varepsilon)u(t,x) + \varepsilon A_3(\tau,x,\varepsilon)u(\sigma,x) + \varepsilon A_4(\tau,x,\varepsilon)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \varepsilon A_5(\tau,x,\varepsilon)\frac{\partial u(\sigma,x)}{\partial t} + \varepsilon A_6(\tau,x,\varepsilon)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + \varepsilon g(\tau,x,\varepsilon)\exp i\theta(t,\varepsilon) \qquad /1/$$

с начальными и граничными условиями

$$\left.\begin{aligned} u(t,x) &= \varphi(t,x) \\ u'_t(t,x) &= \psi(t,x) \end{aligned}\right\} \quad \text{для} \quad -t_0 \le t \le 0 \qquad /2/$$

$$u(t,x)\big|_{x=0} = u(t,x)\big|_{x=l} = 0, \qquad /3/$$

где $0 \le \tau = \varepsilon t \le L < +\infty$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ - малый действительный параметр, $0 \le x \le l$, $\sigma = t - \Delta(\tau)$, $0 \le \Delta(\tau) \le t_0$ при $0 \le \tau \le L$, $d\theta(t,\varepsilon)/dt = V(\tau) > 0$ -медленно меняющаяся функция, $u(t,x)$, $g(\tau,x,\varepsilon)$, $\varphi(t,x)$, $\psi(t,x)$ - n -мерные векторы, из которых $u(t,x)$ -искомый, $A_k(\tau,x,\varepsilon)$ /к=1,...,6/ матрицы порядка $n \times n$, $i = \sqrt{-1}$.

Коэффициенты системы /1/ представляются формальными рядами по степеням малого параметра ε .

Система /1/ обобщенным методом Фурье сводится к следующей бесконечной системе ДУ с ЗА:

$$\frac{dq_m(t,\varepsilon)}{dt} = H_m(\tau)q_m(t,\varepsilon) + \varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\{H_{mk}(\tau,\varepsilon)q_k(t,\varepsilon) + G_{mk}(\tau,\varepsilon)q_k(\tau,\varepsilon)\} + \varepsilon P_m(\tau,\varepsilon)\exp i\theta(t,\varepsilon), \qquad /4/$$

где q_m , P_m -$2n$-мерные векторы, H_m , H_{mk} , G_{mk} - квадратные матрицы порядка $2n$.

Для системы /4/ строятся асимптотические частные решения в том случае, когда корни характеристического уравнения

$$\det\| H_m(\tau) - \lambda_m E \| = 0 \qquad /5/$$

/ E -единичная матрица/ и соответствующие им элементарные делители могут быть кратными, сохраняя при этом постоянную кратность.

Рассматриваются два случая:

1/ "резонансный", когда функция $i\nu(\tau)$ при некоторых значениях $\tau\in[0,L]$ равна одному из кратных корней уравнения /5/;

2/ "нерезонансный", когда $i\nu(\tau)$ при произвольном τ не совпадает ни с одним из корней уравнения/5/.

Доказывается неограниченная дифференцируемость полученных решений и их асимптотический характер.

В § 4 данной главы для однородной системы /4/ / $P_m(\tau,\varepsilon)\equiv 0$ / рассматривается случай, когда уравнение /5/ имеет один кратный корень, которому соответствует несколько кратных и простых элементарных делителей.

Во второй главе рассматривается система вида

$$A_1(\tau,x,\varepsilon)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = A_2(\tau,x,\varepsilon)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \varepsilon A_3(\tau,x,\varepsilon)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} +$$

$$+ \varepsilon A_4(\tau,x,\varepsilon)u(t,x) + \varepsilon A_5(\tau,x,\varepsilon)u(\sigma,x) +$$
$$+ \varepsilon A_6(\tau,x,\varepsilon)\frac{\partial u(\sigma,x)}{\partial t} + F(\tau,x,\varepsilon)exp\, i\theta(t,\varepsilon) \qquad /6/$$

при начальных условиях /2/ и граничных условиях второго рода

$$u'_x(t,0) = u'_x(t,1) = 0. \qquad /7/$$

Системе /6/ соответствует бесконечная система ДУ с ДА второго порядка, для которой строятся асимптотические частные решения в случае I/, 2/ для простых корней характеристического уравнения /5/.

В § 4 главы 2 рассматривается вопрос построения формальных решений для уравнений данного типа в N -мерном пространстве, когда Ω -ограниченная область.

В третьей главе строятся асимптотические частные решения в случае I/, 2/ для следующего и.-д.у. с ЗА в частных производных с медленно меняющимися коэффициентами

$$A_1(\tau,x,\varepsilon)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + \varepsilon A_2(\tau,x,\varepsilon)\frac{\partial u(\sigma,x)}{\partial t} + \varepsilon A_3(\tau,x,\varepsilon)u(\sigma,x) +$$
$$+ \int_0^1 K(\tau,x,\xi,\varepsilon)u(t,\xi)d\xi = \varepsilon\sum_{j=1}^{n} F_j(\tau,x,\varepsilon)exp\, i\theta_j(t,\varepsilon), \qquad /8/$$

в котором функции A_ℓ / ℓ = I,2,3/, K, F_j имеют формальные разложения в ряды по степеням параметра ε.

В приложении производится математическое обоснование результатов, полученных в теореме 2.I главы 2 и приведены примеры иллюстративного характера.

Результаты диссертации докладывались на отчетно-научной конференции кафедр Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького [4], на семинаре по дифференциальным уравнениям при Киевском государственном университете имени Т.Г.Шевченко и изложены в работах [I - 3]:

I. Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Сотниченко Н.А., Об асимптотическом представлении решений для системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных с запаздыванием по времени, Укр.матем.ж.т.23, № 2, 1971.

2. Сотниченко Н.А., Об интегрировании системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных с запаздывающим аргументом, "Дифференц.уравнения", т.8, №3, 1972.

3. Фещенко С.Ф., Сотниченко Н.А., Об асимптотическом представлении решений интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с запаздывающим аргументом, Изв.ВУЗов, Матем., №9, 1971, аннотация статьи.

4. Сотниченко М.А., Про асимптотичні представлення розв"язків деяких класів інтегро-диференціальних рівнянь у частинних похідних із запізненням часу, Програма звітно-наукової конференції кафедр Київського педінституту ім.О.М.Горького за 1970 рік, Київ, 1971.

БФ 32505. 24.У.72 г. Объем 0,5 п.л. Формат 60 х 84 I/I6.
Тир.200 экз. Зак.3165.
Книжная типография № 5, Киев, Репина, 4.