МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени А.М.ГОРЬКОГО

Д.А. СКРЫПНИК

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОШИБКИ В РАССУЖДЕНИЯХ, ИХ ПРЕДУПРЕЖДЕНИЕ И МЕТОДИКА ИСПРАВЛЕНИЯ.

(Диссертация написана на украинском языке)

(13731 - методика преподавания математики)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой
степени кандидата педагогических
наук по методике математики

Киев - 1971 2

Работа выполнена на кафедре элементарной математики и методики преподавания математики Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького.

Научный руководитель - кандидат педагогических наук, доцент Г.П.Бевз.

Официальные оппоненты:

Доктор физико-математических наук, профессор В.Я.Скоробогатько.

Кандидат педагогических наук, доцент Я.В.Хромой.

Внешний отзыв - Черниговский государственный педагогический институт имени Т.Г.Шевченко, кафедра методики преподавания математики.

Автореферат разослан "28" октября 1971 г.
Защита состоится " " ____________ 197 г.

на заседании Ученого Совета Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького (Киев-30, ул.Пирогова, 9).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Ученый секретарь Совета

На уроках математики учителю приходится иметь дело с самыми разнообразными ошибками. И конечно он должен уметь правильно и вовремя предупреждать, замечать и исправлять их.

Но ошибки учащихся - не только зло. При умелом использовании ошибок в обучении появляется возможность более глубокого усвоения материала, лучшего осмысления структуры математических предложений, методов построения доказательств и т.п. Анализ собственных и поучительных чужих ошибок в рассуждениях развивает у учащихся навыки самоконтроля, критического подхода к суждениям товарищей, их мышление становится более логичным, а действия - обоснованными. Не случайно многие математики и педагоги с большим вниманием относились к изучению математических ошибок. Математические ошибки софистического характера интересовали еще древних греков. Первый сборник математических софизмов составил Эвклид. Софизмами и парадоксами занимались Паскаль, Ферма, Больцано, Кантор, Пеано, Рассел, Гильберт и др.

Немалым успехом пользовался сборник математических софизмов русского математика и педагога В.И.Обреимова. Во внеклассной работе по математике и в настоящее время широко используются книги В.М.Брадиса, В.Л.Минковского, К.А.Харчевой "Ошибки в математических рассуждениях", В.Литцмана "Где ошибка?", Я.С.Дубнова "Ошибки в геометрических доказательствах".

Большое значение методике использования ошибок в обучении придавал математик и логик И.И.Жегалкин. Он исследовал логические ошибки на протяжении нескольких десятилетий и пришел к выводу, что разъяснение сущности ошибки с помощью другой, аналогичной ей, помогает предупреждению у учащихся односторонних ассоциаций и неправильных обобщений.

Польский математик Г.Штейнгауз отмечает большое значение работы над математическими ошибками для активизации мыслительной деятельности учащихся. "Если учащегося заверить, что в предложенном ему доказательстве есть ошибка, - пишет Г.Штейнгауз,- то можно быть уверенным даже без специальной проверки, что материал будет изучен полностью и очень тщательно"[I]. Поэтому составление

[I] H.Steinhaus, Bledy w matematice, Roczniki Polskego Towarzystwa matematycznego, Seria II, Wiadomosci matematyczne, XI (1969).

коллекций математических ошибок Г.Штейнгауз считает одним из наиболее действенных факторов повышения эффективности обучения.

Значительное внимание математическим ошибкам уделяется в психолого-педагогической литературе. Глубокому психологическому анализу они подвергнуты в трудах Н.А.Менчинской, П.А.Шеварева, В.Н.Зыковой, Е.Н.Кабановой-Меллер, Д.П.Гониболина и др. Исследованием ошибок занимались зарубежные ученые Г.Ваймер, В.Литцман, Э.Беер, К.Генры, Э.Торндайк и др., но идеалистическое мировоззрение многих из них сказалось на определении причин возникновения и устойчивости ошибок.

Методические корни многих математических ошибок вскрыты математиками-методистами М.Михаловским, В.Г.Прочухаевым, В.М.Брадисом, Д.М.Маергойзом, Г.П.Бевзом, А.Я.Гутманом, В.В.Никитиным, К.А.Рупасовым, А.И.Фетисовым, Я.В.Хромым, Л.П.Доблаевым, М.А.Мацко и др.

Изучению математических ошибок посвящено несколько диссертационных работ:

I) В.Г.Захарова, Психологические корни логических ошибок учащихся при изучении алгебры в УI-УП классах, Казань, 1964.

2) Дж.Икрамов, Устойчивые ошибки учащихся восьмилетней школы в решении геометрических задач на доказательство и пути их преодоления, Ташкент, 1967.

3) И.А.Марнянский, Пути преодоления устойчивых ошибок в функциональной подготовке учащихся средней школы, М., 1967.

4) А.Ф.Сычиков, Анализ математических ошибок учащихся и работа по их предупреждению и исправлению, Калинин, 1968 и др.

Но почти во всех исследованиях, посвященных математическим ошибкам, основное внимание уделяется анализу неправильных действий. Анализ "обоснований" ошибочных действий не нашел еще должного освещения в научно-методической литературе. При рассмотрении ошибок в рассуждениях учащихся в большинстве случаев авторы ограничиваются только анализом их в том математическом материале, в котором обнаружены эти ошибки. Это зачастую приводит к тому, что одну и ту же логическую ошибку учителя математики предупреждают в одном материале (виде работы и т.п.) и не замечают в другом.

Методика разъяснения сущности логических ошибок, причин их возникновения и приемов исправления разработана мало. Недостаточно изучены возможности использования ошибок в математических рассуждениях для активизации мыслительной деятельности учащихся, для более глубокого осмысления знаний, для предупреждения и исправления других ошибок. Все это говорит об актуальности изучения математических ошибок в рассуждениях учащихся.

Диссертантом была поставлена цель исследовать причины возникновения наиболее типичных математических ошибок в рассуждениях учащихся, возможность использования их для повышения эффективности обучения математике, разработать приемы предупреждения и исправления таких ошибок.

Для решения этого задания потребовалось:

1). Обнаружить наиболее распространенные математические ошибки в рассуждениях учащихся и сгруппировать их.

2). Проанализировать ныне действующие и пробные учебники, пособия для учащихся по математике с точки зрения наличия в них упражнений и других средств предупреждения ошибок в рассуждениях.

3). Установить наиболее вероятные причины возникновения и устойчивости таких ошибок.

4). Разработать методику предупреждения и исправления наиболее распространенных математических ошибок в рассуждениях учащихся.

5). Проверить экспериментально эффективность предлагаемых нами средств предупреждения и исправления ошибок.

Диссертация написана на основании исследований, проведенных автором в 1965-70 гг.

В работе над диссертацией использованы:

а) Материалы трехлетнего наблюдения за обучением математике в Надворнянской средней школе-интернате;

б) опыт работы учителей математики В.В.Прокопишина (Солотвинская средняя школа), Г.Н.Качанюк (Ивано-Франковская восьмилетняя школа № 6), О.И.Сухореброй (Ивано-Франковская школа-интернат № 2), И.В.Билейчука (Ланчинская средняя школа), Е.А.Колодницкой (Надворнянская средняя школа-интернат) и др.;

в) личный опыт работы автора учителем математики в школе (14 лет) и преподавателем методики математики в Ивано-Франковском педагогическом институте (7 лет). Учитывались также материалы, собранные во время работы спецсеминара по методике математики, которым автор руководил в Ивано-Франковском пединституте в 1965-70 гг.

Экспериментальная работа осуществлялась в школах № 3, 6, 12, 16 г.Ивано-Франковска, Надворнянской школе-интернате и Солотвинской средней школе Ивано-Франковской области.

Работа состоит из введения, четырех глав и заключения.

В диссертации широко используется теоретико-множественная символика. Предметные переменные обозначены: $a, b, c, \ldots, x, y, z$. Переменные высказывания - $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$. Предикаты: $P(x), Q(x,y), R(x_1, x_2, \ldots x_n)$. Квантор общности - $\forall$; существования - $\exists$. Логические операции: $\wedge$ - конъюнкция; $\vee$ - дизъюнкция; $-$ - отрицание; $\Rightarrow$ - следование; $\Leftrightarrow$ - эквиваленция. Теоретико-множественные операции: $\cap$ - пересечение; $\cup$ - объединение; C - дополнение; $\subset$ - включение; $=$ - равенство (множеств). Понятие обозначено $x \rightarrow P(x)$ и т.д.

В первой главе дается описание понятий "ошибка", "логическая ошибка", "фактическая ошибка", "паралогизм", "софизм", анализируются различные подходы к изучению математических ошибок, их классификации в отечественной и зарубежной литературе.

Ошибкой называем нарушение (извращение) соответствия между мыслью о предмете и предметом мысли. Если такое нарушение не вызывается извращением связи между мыслями - это фактическая ошибка, а извращение связи между мыслями - логическая ошибка. Наличие в доказательстве умышленного извращения связи между мыслями называют софизмом, неумышленного - паралогизмом.

В отличие от древнегреческих ученых, уделявших исключительное внимание софизмам, математики, психологи и методисты в

XIX веке начинают систематически изучать ошибки из повседневной школьной практики. Они приходят к выводу, что появление ошибок зависит от методики обучения. Это дало возможность найти правильное решение многих проблем преподавания математики и, в свою очередь, повысило интерес к изучению математических ошибок учащихся. Создаются классификации ошибок. Большое распространение в методической литературе получила классификация ошибок по учебным предметам, темам, подтемам и т.д.

Например, в монографии В.Г.Прочухаева[I] ошибки распределены по группам: I. Свойства действий. II. Нахождение неизвестного компонента. III. Целые одночлены. IV. Разложение многочленов на множители и т.д.

Такой подход к изучению фактических ошибок методически полезен тем, что учитель имеет возможность предвидеть типичные ошибки при изучении того или иного вопроса. Попредметное изучение ошибок несомненно создает благоприятные условия для усовершенствования конкретной методики изучения математики.

Но одна и та же логическая ошибка часто возникает при изучении различных вопросов, а иногда и различных предметов. Средства предупреждения и исправления ее должны разрабатываться так, чтобы обеспечивалась одинаковая возможность не допускать такой логической ошибки как в алгебре, так и в геометрии. При попредметном изучении ошибок в рассуждениях этого достичь невозможно. Это подтверждает такой пример. Когда учащиеся необоснованно подменяют теорему обратным ей предложением на уроках геометрии, учителя обычно замечают и исправляют это. Но на уроках алгебры, как показывают наблюдения, подобная ошибка нередко остается незамеченной. Даже в учебнике А.П.Киселева, вместо теоремы $(\forall \underset{>1}{\alpha})(\forall x_1)(\forall x_2)[(x_2 > x_1) \Longrightarrow (\log_a x_2 > \log_a x_1)]$ доказано предложение

$$(\forall \underset{>1}{\alpha})(\forall x_1)(\forall x_2)[(\log_a x_2 > \log_a x_1) \Longrightarrow (x_2 > x_1)].$$

Попредметный подход к изучению таких ошибок методически не оправдан. Он способствует изоляции методов изучения геометрии от методов изучения алгебры, изучения одной темы от другой.

I В.Г.Прочухаев, Анализ ошибок учащихся средней школы по математике, М., Издание МГПИ им.В.И.Ленина, 1948.

Часто в основу классификации математических ошибок кладут причины их возникновения. Работа над ошибками с целью установления причин их возникновения, безусловно, перспективна. Не зная причины появления ошибки, нельзя обеспечить эффективные средства исправления ее и предупреждения в будущем. Но, как известно, причины возникновения одной и той же ошибки у различных учащихся могут быть разные. Более того, даже у одного и того же ученика возникновение той же самой ошибки при различных обстоятельствах может иметь различные причины. Следовательно, при делении ошибок на основе причин их возникновения такая ошибка должна рассматриваться в разных группах. Поэтому такое деление несовершенно.

В диссертации проанализированы и другие классификации математических ошибок: по операциям, по психическим функциям, с точки зрения оценки знаний и т.п. Дать классификацию, охватывающую все математические ошибки, никому еще не удалось. Поэтому более правдоподобно говорить не о классификации ошибок, а об объединении в группы не всех, а только тех математических ошибок, для которых принадлежность их к данной группе можно обосновать.

Ошибки в математических рассуждениях целесообразно группировать по логическим формам: а) ошибки в толковании понятий; б) в логических действиях с предложениями; в) в доказательствах. Это соответствует идеям новой программы школьного курса математики. Рассмотрение таких групп ошибок дает возможность сосредоточить главное внимание учителя на общих приемах предупреждения и исправления ошибок, использовать сами ошибки как средство предупреждения подобных им в будущем, учить сравнивать, противопоставлять, замечать аналогии, оценивать значение логических связок. На примерах таких групп ошибок, как показывают наблюдения, появляется возможность эффективнее учить мыслить, уяснять правила построения доказательств, опровержений и т.п.

Во второй главе исследуются ошибки в толковании математических понятий, в определениях и делении их. Излагаются приемы предупреждения и исправления таких ошибок. Особое внимание уделено контрпримерам. Обычно в процессе формирования понятий учителя приводят только подтверждающие примеры. Наши наблюдения показывают, что практика параллельного использования примеров и контрпримеров более эффективна.

Авторы методических пособий по математике, как правило, ориентируются только на определение понятий через свойства, связанные конъюнктивно. Поэтому говорят, что пропуск в определении того или иного свойства ведет к расширению понятий, а это не всегда верно. Например, если в определении "Неправильной дробью называется дробь, числитель которой больше или равен знаменателю", не учесть "равенства" - это приведет не к расширению, а к сужению понятия неправильной дроби. Объясняется это дизъюнктивной связью отношений "больше" или "равно".

Примеров дизъюнктивной связи свойств в определениях математических понятий много. Поэтому мы рассматриваем не только конъюнктивные, но и дизъюнктивные определения. Обобщаем их в виде дизъюнктивно-конъюнктивных определений.

В диссертации проанализированы ошибки в определениях вследствие нарушений как конъюнктивной, так и дизъюнктивной связи свойств. Рассмотрены ошибки в толковании понятий, связанные с неправильным пониманием индуктивных, рекурсивных, генетических определений и определений, являющихся условными соглашениями.

Сравнивая действительный смысл понятия с извращенным вследствие допущенной ошибки в его толковании, мы различаем следующие группы ошибок: I) расширение объема понятия; 2) сужение объема понятия; 3) подмену понятия логически независимым от него, не являющимся по отношению к нему ни видом, ни родом; 4) подмену понятия логически несовместимым с ним. Показываем, что для уяснения ошибки в первом и втором случае достаточно привести по одному контрпримеру, в третьем - целесообразны два, в четвертом - после приведения двух контрпримеров желательно сделать обобщение.

Так, если понятие $x \longrightarrow P(x)$ учащийся подменил понятием $x \longrightarrow Q(x)$ таким, что $E_Q \supset E_P$, но $E_P \not\supset E_Q$, где E_P и E_Q обозначают теоретико-множественный смысл предикатов $P(x)$ и $Q(x)$, то для уяснения характера ошибки рисуем круги Эйлера (рис.I)[I] и указываем элемент x_0 такой, что $x_0 \in E_Q$, $x_0 \notin E_P$, т.е. приводим контрпример типа $(\exists x)[Q(x) \wedge \bar{P}(x)]$.

Пример. Если учащийся утверждает, что "всякое уравнение вида $ax+b=0$ - есть уравнение первой степени" (очень

[I] Рисунки и таблицу см. на стр.23.

распространенная ошибка!), то следует сказать, что, например, уравнение $0 \cdot x+3=0$ имеет вид $ax+b=0$, но не является уравнением первой степени.

В данном случае P означает "быть уравнением первой степени"; Q - "быть уравнением вида $ax+b=0$"; „$0 \cdot x+3=0$" - контрпример, подтверждающий ложность цитированного выше высказывания и побуждающий вспомнить и учесть условие $a \neq 0$ [I].

Аналогично поступаем и в том случае, когда понятие $x \longrightarrow P(x)$ подменено понятием $x \longrightarrow Q(x)$ таким, что $E_P \supset E_Q$, но $E_Q \not\supset E_P$ (рис.2) с той лишь разницей, что здесь уже круг E_P охватывает круг E_Q, и приводим контрпример типа $(\exists x)[P(x) \wedge \bar{Q}(x)]$.

Пример. Учащийся утверждает, что для любого рационального числа a справедливо равенство $|-a|=a$. Этим самым он подменяет понятие "рациональное число a" понятием "рациональное неотрицательное число a". Для осознания ошибки полезно спросить: "Пусть $a=-3$. Разве $|-(-3)|=-3$?"

В третьем случае круги Эйлера рисуем пересекающимися и приводим на одну и ту же ошибку два контрпримера: один типа $(\exists x)[P(x) \wedge \bar{Q}(x)]$ и другой типа $(\exists x)[Q(x) \wedge \bar{P}(x)]$.

Например, если ученик утверждает, что "квадратное неравенство - это неравенство вида $ax^2+bx+c>0$", то полезно спросить: "Неравенство $3x^2 \leqslant 5x$ является квадратным или нет?" „А неравенство $0 \cdot x^2-3x+16>0$ квадратное или нет?" Если учащийся понял, что первое неравенство - квадратное, хотя и не имеет вида $ax^2+bx+c>0$, а второе - не квадратное, хотя и имеет вид $ax^2+bx+c>0$, то сущность ошибки уяснена.

В четвертом случае круги Эйлера рисуем не имеющими общих точек. Например, учащийся отождествляет понятие числа и цифры, знака записи числа. Исправление ошибки здесь также желательно

[I] В отдельных пособиях для учащихся по математике авторы не учитывают этого условия, т.е. считают, что и уравнение вида $0 \cdot x+b=0$ есть уравнение первой степени (см., например, Р.А.Калнин, Алгебра и элементарные функции, М., "Наука", 1968, стр.2.-27). Но эту точку зрения нельзя признать научно оправданной, хотя бы из-за основной теоремы алгебры.

начать с приведения контрпримеров. Показать, что одно и то же число "пять" можно изобразить при помощи различных символов: $5, V, \frac{10}{2}, 101_2$ и др. С другой стороны, символ "5" - это не число, а только знак, цифра, употребляемая для изображения числа "пять". На таких примерах целесообразно подводить учащихся к обобщению: "Никакая цифра (никакая дробь) не является числом". Никакое число не является цифрой (дробью)".

Аналогично следует исправлять очень распространенную ошибку смешивания понятий "число" и "выражение", убеждая учащихся в том, что число может быть только значением выражения, а цифры и цифровые записи чисел - числовыми выражениями.

В отдельную группу отнесены в диссертации ошибки круга в определениях. В этом случае толкование определяемого понятия учащимися, как правило, не извращено. В таких определениях проявляется непонимание логической структуры самого определения. Эффективным средством исправления таких ошибок является логический анализ определений.

В третьей главе проанализированы ошибки в математических предложениях вследствие неверного толкования или использования логических связок, неправильного отрицания или обращения предложений, построения противоположных им, противоположных обратным и определения их истинности.

В процессе обучения учащихся и в методической литературе нередко еще, к сожалению, логические связки употребляются в значении, отличающимся от принятого в логике и математике. "Некоторые" толкуют как "некоторые, но не все", "или" неразделительное понимают как разделительное, "если..., то..." - в смысле тогда и только тогда, когда...", опускают связки, которые опускать нельзя и т.п. Все это приводит к существенным ошибкам в высказываниях.

Например, "Сумма одинаковых степеней двух чисел не делится на разность этих чисел". Здесь допущена неточность, ибо опускать и подразумевать можно только связку "все", "всякая", "каждая", "для всех", т.е. те слова, которые в формализованной записи передаются квантором общности. И это высказывание следует понимать так: "Всякая сумма одинаковых степеней двух чисел не делится на разность этих чисел". Оно ложно. Ибо его отрицание "Существует сумма одинаковых степеней двух чисел, делящаяся на разность этих чисел" - истинно. Так, например, $(33^n + 11^n) : (33 - 11)$.

Особенно часто учащиеся допускают ошибки при отрицании сложных высказываний. Например, упражнение № 79(е)[I] "Найти допустимые значения букв, входящих в неравенство $\frac{1}{a^2+b^2} > \frac{1}{a^2+b^2+1}$" девятиклассники чаще всего решают так: "Допустимыми значениями букв есть $a \neq 0$ и $b \neq 0$, т.к. допустимыми значениями букв здесь есть все те значения, при которых знаменатели отличны от нуля. Знаменатель правой части всегда положителен. Знаменатель левой части равен нулю только в случае $a = 0$ и $b = 0$. Следовательно, обе части существуют при $a \neq 0$ и $b \neq 0$". К ошибке привело неправильное выполнение отрицания конъюнкции. Как известно, $\overline{A \wedge B} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}$, но $\overline{A \wedge B} \not\equiv \bar{A} \wedge \bar{B}$.

Аналогичную ошибку допускают учащиеся, когда приходится отрицать дизъюнкцию. Считают, что $\overline{A \vee B} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}$, вместо правильного $\overline{A \vee B} \equiv \bar{A} \wedge \bar{B}$.

При обращении высказываний наиболее распространены следующие ошибки. Многие считают, что каждая теорема имеет обратное предложение, что это обратное предложение всегда единственное и тоже является теоремой[2]. Кроме того, неправильно определив условие и заключение в теореме, учащиеся переносят эту ошибку и на обратное предложение.

В диссертации рассматриваются ошибки всех перечисленных выше видов.

Приведены примеры теорем, не имеющих обратных предложений. Подчеркнуто также, что обратное предложение к теореме может и не

[I] Е.С.Кочетков, Е.С.Кочеткова, Алгебра и элементарные функции, ч.I, М., Просвещение, I97I.

[2] Теоремой в диссертации называем только истинное предложение, т.е. предложение, для которого существует доказательство. Обратным предложением к высказыванию $A \Rightarrow B$ есть высказывание "$B \Rightarrow A$". Если условие или заключение теоремы - сложные высказывания, то обратным ей предложением считаем не только предложение, полученное путем полной перестановки условия и заключения, но и частичной. Скажем, к теореме, имеющей вид $AB \Rightarrow C$, обратными являются: $C \Rightarrow AB$; $CA \Rightarrow B$; $CB \Rightarrow A$ и т.п.

быть теоремой и что обратные предложения к теореме, условие или заключение которой - сложные высказывания, вообще говоря, не равносильные. Рассмотрены также ошибки отождествления теоремы с противоположными ей предложениями и ошибки, возникающие при образовании противоположных предложений к теоремам. Такие ошибки встречаются иногда и в пособиях для учащихся. Например, к теореме "Если уравнение имеет вид $x^2+px+q=0$, то $x_1+x_2=-p$; $x_1x_2=q$" часто противоположное предложение формулируют так: "Если уравнение не имеет вида $x^2+px+q=0$, то $x_1+x_2\neq-p$ и $x_1x_2\neq q$"[I] (вместо... $x_1+x_2\neq-p$ или $x_1x_2\neq q$).

Как известно, всякое противоположное предложение к теореме равносильно соответствующему обратному предложению (по закону контрапозиции: $A\Longrightarrow B\equiv\bar{B}\Longrightarrow\bar{A}$). Но в ныне действующих школьных учебниках, хотя и используется закон контрапозиции, учеников с ним не знакомят. В одном из пробных учебников[2] по геометрии для IX класса ознакомление учащихся с законом контрапозиции предусматривается. В нем говорится и о том, что теорема может иметь более одного обратного высказывания. Но ни одним упражнением эта мысль не подкрепляется.

В диссертации рассмотрены примеры построения обратных и противоположных предложений к теоремам, условия или заключения которых сложные высказывания. Разработана методика ознакомления учащихся с равносильными высказываниями и обучения строить предложение, равносильное данному, на основании закона контрапозиции.

Проведенное исследование показывает, что эффективными средствами предупреждения и исправления ошибок в толковании логических связок, выполнении логических действий с предложениями, как и в случае ошибок в толковании понятий, могут быть контрпримеры и геометрическое изображение истинности предложений. Но, если в случае ошибочных толкований математических понятий для геометрических

I Б.И.Крельштейн, Необходимые и достаточные условия в математике, М., Учпедгиз, 1961, стр.24.

2 В.М.Клопский, З.А.Скопец, М.И.Ягодовский, Геометрия, 9 класс М., "Просвещение", 1969, стр.102.

изображений удобно пользоваться кругами Эйлера, то для уяснения ошибок в математических предложениях более подходящие диаграммы Венна. (См.таблицу). Для изображения истинности высказывания $(\forall x)[P(x) \Rightarrow Q(x)]$ на кругах Эйлера даже при рассмотрении только непустых классов E_P и E_Q необходимы две картинки, а для изображения истинности высказывания $(\exists x)[P(x) \wedge Q(x)]$ - четыре. При помощи диаграммы Венна для иллюстрации истинности каждого из них достаточно одной картинки.

В диссертации описывается этот метод изображения истинности общих и частных утверждений. Для изображения истинности последних используем звездочки.

Наличие звездочки в области $P\bar{Q}$ одновременно свидетельствует об истинности предложения $(\exists x)[P(x) \wedge \bar{Q}(x)]$ и о ложности предложения $(\forall x)[P(x) \Rightarrow Q(x)]$, т.е. она является геометрическим изображением контрпримера к последнему предложению. В диссертации описана методика использования контрпримеров как эффективного средства предупреждения и исправления ошибок в высказываниях. В зависимости от уровня математического развития учащихся контрпримеры для уяснения характера ошибок в предложениях можно использовать по-разному. Так, если пятиклассник скажет, что "на 12 делятся те числа, которые делятся на 6 и на 2", то учитель должен не только привести контрпример, но и помочь ученику разобраться в причине ошибки. В старших же и в средних классах, где причину ошибки уяснить легко, достаточно только привести контрпример и дать возможность учащемуся самому разобраться, в чем сущность ошибки.

Четвертая глава посвящена ошибкам в доказательствах. Рассматриваются ошибки подмены тезиса, нарушения правил вывода, неправильного подбора аргументов и извращения методов рассуждений.

Ошибки подмены тезиса часто допускают учащиеся в результате поверхностного понимания теоремы. Например, когда требуется доказать равносильность двух уравнений, учащиеся нередко доказывают только то, что всякое решение первого уравнения является решением и второго, и на этом доказательство заканчивают.

Нередко ошибки подмены тезиса появляются вследствие неполного перевода на математический язык заключения теоремы, вызванного/ в свою очередь/ тем, что отдельные слова в предложении не воспринимаются учащимися. В теореме говорится о двух различных прямых, а учащиеся отображают в сокращенной записи только то, что речь идет о двух прямых и т.д.

Эффективным средством предупреждения и исправления таких ошибок является о б у ч е н и е н а о ш и б к а х. Обычно учащиеся предлагают несколько сокращенных записей условия и заключения изучаемой теоремы. Сравнительный анализ правильных записей и записей, содержащих наиболее типичные ошибки, часто обеспечивает глубокое уяснение характера ошибки. Этот анализ наиболее целесообразен при изучении первых теорем. Но время от времени, особенно в тех случаях, когда вероятность появления ошибки велика, такой анализ следует практиковать и в старших классах.

Особенно полезно проводить профилактическую работу по предупреждению ошибок извращения правил вывода. Исследование показывает, что такие ошибки допускают учащиеся не только шестых-седьмых, но и восьмых-десятых классов.

Важнейшие правила вывода схематически можно записать так:

$$\frac{A \Rightarrow B;\ B \Rightarrow C}{A \Rightarrow C};\quad \frac{A \Rightarrow B;\ A}{B};\quad \frac{A \Rightarrow B;\ \bar{B}}{\bar{A}};\quad \frac{A \vee \vee B;\ A}{\bar{B}};\quad \frac{A \vee B;\ \bar{A}}{B}$$

и др. Но учащиеся, как показывают наблюдения, часто делают выводы соответственно по следующим "правилам":

$$\frac{A \Rightarrow B;\ C \Rightarrow B}{A \Rightarrow C},\quad \frac{A \Rightarrow B;\ B}{A},\quad \frac{A \Rightarrow B;\ \bar{A}}{\bar{B}},\quad \frac{A \vee B;\ A}{\bar{B}},\quad \frac{A \vee B \vee \ldots;\ \bar{A}}{B}.$$

Еще более распространены ошибки в специфических, свойственных только математике, рассуждениях по аналогии. Как известно, при решении неравенств пользуются такими правилами:

$$\left(\frac{a}{b} > 0\right) \Rightarrow (ab > 0);\quad \left(\frac{a}{b} \geq 0\right) \Leftrightarrow (ab \geq 0 \wedge b \neq 0);$$

$$\left(\frac{a}{b} \geq 0 \wedge b > 0\right) \Rightarrow (a \geq 0);\quad \left(\frac{a}{b} \geq 0 \wedge b < 0\right) \Rightarrow (a \leq 0),$$

" По аналогии" с ними учащиеся часто считают, что

$$\left(\frac{a}{b} \geq 0\right) \Leftrightarrow (ab \geq 0);\quad \left(\frac{a}{b} \geq 0 \wedge a > 0\right) \Leftrightarrow (b \geq 0);\ \left(\frac{a}{b} \geq 0 \wedge a < 0\right) \Leftrightarrow (b \leq 0)$$

и т.п.

Например, решая неравенство $\frac{-1}{x^2-5x+6} \leqslant 0$ нередко ученики утверждают, что оно равносильно неравенству $x^2-5x+6 \geqslant 0$, а неравенство $\frac{x^2+10x+9}{x^2-6x+5} \geqslant 0$ считают равносильным совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x^2+10x+9 \geqslant 0 \\ x^2-6x+5 \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2+10x+9 \leqslant 0 \\ x^2-6x+5 \leqslant 0. \end{cases}$$

Для предупреждения таких ошибок целесообразно использование контрпримеров и параллельного изображения на диаграммах Венна правил вывода и схем, внешне схожих с ними, но не имеющих доказательной силы.

Ошибки в основаниях доказательства чаще всего бывают двух видов:

а) в качестве основания используют ложное высказывание;

б) основанием считают высказывание, не являющееся им (для полученного "следствия").

Необоснованные выводы довольно часто встречаются на уроках математики. И если такой вывод оказывается фактически ложным, его причисляют к грубым ошибкам. Если же полученное "следствие" фактически верно, логическая ошибка иногда остается вовсе незамеченной.

К ошибкам в аргументах относим и ошибку "круга" в доказательстве, когда высказывание А обосновывают высказыванием В, а высказывание В - высказыванием А.

Для исправления этих ошибок также эффективно использование самих ошибок как средства предупреждения подобных им. Но при проведении такой профилактической работы следует особо учитывать то, что учащиеся легко отказываются от ошибочных обоснований, если полученное следствие фактически ложно. Но в случае истинности "следствия" часто не замечают неправильного обоснования даже наиболее подготовленные учащиеся. Поэтому в таких случаях не следует ограничиваться анализом ошибки, приведшей к истинному результату. Необходимо привести и такой пример, в котором (логически) такое же обоснование рождает и фактическую ошибку. Эти вспомогательные примеры желательно подбирать из наиболее доступного, уже хорошо усвоенного учащимися материала.

Ошибки извращения методов доказательства, по существу, представляют собой комбинацию ошибок в правилах вывода. Дидактически ценным является воспроизведение их в системе, наблюдаемой в педагогической практике. Для этого целесообразно практиковать разложение схемы доказательства на составные части, выявление того правила вывода, которое учащийся извращает, подменяя схемой, не имеющей доказательной силы.

В средней школе наиболее распространены ошибки в доказательствах "от противного", в причислении к методам доказательства несовершенного анализа, подмены полной индукции неполной, в извращении метода математической индукции и др.

Доказательствами "от противного" называем такие, которые проводятся по схеме: $A \Rightarrow B \equiv (A\bar{B} \Rightarrow \bar{A}) \vee (A\bar{B} \Rightarrow B) \vee (A\bar{B} \Rightarrow C\bar{C}) \vee$ $\vee (A\bar{B} \Rightarrow 0)$, где "$A \Rightarrow B$" - доказываемое предложение, „C"- произвольное высказывание, „0" - ложное высказывание.

В доказательствах методом "от противного" очень часто допускают ошибку неполной дизъюнкции. Предполагая истинность $\bar{B}$, стараются перейти от отрицательной формы высказывания к утвердительной. Скажем, если предполагают, что "число a не положительное", то это заменяют на "a отрицательное или a равно нулю". Все это правильно. Но именно в это время часто и допускают ошибку: заменяя $\bar{B}$, не исчерпывают всех случаев ($a \ngtr b$ заменяют на $a < b$ и т.п.).

Причиной возникновения таких ошибок является неправильное толкование математических понятий и в связи с этим ошибочное (чаще всего неполное) деление их. Предупреждать эти ошибки следует упражнениями на деление понятий с использованием контрпримеров и аналогий.

В доказательствах "от противного" наблюдаются и другие ошибки. Вместо отрицания следствия, учащиеся иногда отрицают условие теоремы, или, отрицая сложное следствие, допускают ошибку при выполнении этой операции, либо, правильно образовав отрицание следствия, но не получив противоречия (а получив какое-нибудь истинное высказывание), считают, что они опровергли теорему.

В диссертации на примерах таких ошибок разработана методика работы по их предупреждению, состоящая из рассмотрения упражнений на выделение условия и следствия в теореме и осмысление законов исключенного третьего и непротиворечивости в первом случае, упражнений на отрицание высказываний - во втором, на противопоставление схеме $\frac{A \Rightarrow B;\ B}{A}$ правила $\frac{A \Rightarrow B\ ;\ A}{B}$ - в третьем.

Толкование учащимися схемы $\frac{A \Rightarrow B;\ B}{A}$ правилом вывода лежит в основе очень распространенной ошибки в доказательствах - причисления к доказательствам несовершенного анализа (Эвклида). Схему этого анализа можно записать так:

$B \Rightarrow A_n \Rightarrow A_{n-1} \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_0;\ A_0 \in S$. Здесь B - тезис; $A_n, A_{n-1}, \ldots, A_1, A_0$ - его следствия, причем A_0 принадлежит системе предложений S, истинность которых установлена.

Устойчивость ошибки усиливается большим (внешним) сходством таких рассуждений с совершенным анализом (Паппа):

$B \Leftarrow A_n \Leftarrow A_{n-1} \Leftarrow \cdots \Leftarrow A_1 \Leftarrow A_0,\ A_0 \in S$.

Учащиеся не видят различий между этими двумя видами анализа. А поэтому иногда даже после указаний учителя не понимают, когда и зачем нужно после проведенного анализа "рассуждать еще и в обратном порядке". В работе показано, что для предупреждения и исправления таких ошибок надо, во-первых, на удачно подобранных примерах помочь учащимся осмыслить тот факт, что в случае истинности следствия нельзя заключать ни об истинности, ни о ложности посылки; во-вторых, практиковать сравнительное рассмотрение (на одном и том же примере) анализа Эвклида, Паппа и синтеза, делая каждый раз логическое ударение на их различиях.

Сравнение и противопоставление логических схем полезно и для предотвращения ошибок в индуктивных доказательствах. Ошибки замены полной индукции неполной очень распространены. Для осознания необходимости рассматривания в процессе доказывания всех случаев полезен анализ высказываний, которые ложны вообще, но истинны при некоторых дополнительных условиях.

На все такие вопросы относительно полноты и общности доказательства следует смотреть как на моменты, которые не только предупреждают ошибку в том или ином доказательстве теоремы, но и очень способствуют развитию логической культуры учащихся вообще.

Особенное место в этом отношении занимает математическая индукция. Наблюдения показывают, что далеко не все учащиеся (и даже студенты пединститута) правильно понимают сущность этого метода.

В диссертации рассмотрены различные виды ошибок вследствие неправильного понимания аксиомы математической индукции разработана методика предупреждения и исправления их.

Проведенное исследование дало возможность сделать следующие выводы:

1). Изучение математических ошибок в рассуждениях учащихся имеет важное значение. Оно дает возможность выявить качество знаний учеников, определить их умения и навыки решать, доказывать, опровергать, исследовать и, вообще, рассуждать.

2). Ошибки в рассуждениях следует не только исправлять, но и использовать в обучении. Они являются эффективным средством предупреждения и исправления подобных им ошибкам, быть может, другого фактического, но такого же логического содержания.

3) Ошибки в рассуждениях целесообразно группировать по логическим формам. Это дает возможность учителю искать общие приемы борьбы с извращениями смысла математических понятий, структуры предложений, методов построения доказательств.

4). В толковании математических понятий важнейшими группами ошибок являются сужение объема понятий, расширение его, подмена понятия другим, логически независимым от него (совместимым с ним), подмена понятия несовместимым с ним.

Эффективными средствами осознания сущности таких ошибок, их предупреждения и исправления являются совместное геометрическое изображение истинного и кажущегося объема понятия, использование контрпримеров.

5). В педагогическом процессе распространены также ошибки, касающиеся непонимания структуры определений. Это ошибки круга в определении, неправильного толкования индуктивных, рекурсивных, генетических, остенсивных определений, определений - условных соглашений и др.

Наблюдения показывают, что для уяснения сущности таких ошибок действенную помощь оказывает логический анализ определений, рассматривание их в сравнении друг с другом, сопровождаемое выделением характерных черт каждого в отдельности.

6). Основные группы наиболее распространенных ошибок в логических действиях с математическими предложениями следующие: ошибки вследствие неправильного толкования значения логических связок в предложении, ошибки в отрицании, обращении предложений, построении противоположных им. Для предупреждения и исправления таких ошибок рекомендуем использование в обучении диаграмм Венна, контрпримеров, постепенное приучивание учащихся (на интуитивной основе) к употреблению союзов - логических связок в одном и том же, принятом в логике и математике, значении.

7). Ошибки, возникающие при построении доказательств, целесообразно группировать так: ошибки подмены тезиса, извращение правил вывода, ошибки в основаниях, извращение методов построения доказательств.

8). Эффективным средством предотвращения ошибок подмены тезиса может быть сравнительный анализ правильной и ошибочных сокращенных записей теорем.

9). Для искоренения ошибок в правилах вывода целесообразно делать сравнительное геометрическое изображение правила вывода и схем, которыми учащиеся это правило подменяют, сопровождая эту работу рассмотрением примеров и контрпримеров.

10). Для предупреждения ошибок в основаниях большое значение имеет постепенное приучивание учащихся к тому, что логическое ударение нужно делать не на самом заключении, а на обосновании его, что ошибка в основаниях может быть допущена не только тогда, когда заключение ложно, но и в случае его истинности.

11). Для предупреждения ошибок "круга" в доказательстве целесообразно ссылаться на аналогию с "кругом" в определении, а также указывать место изучаемой теоремы в школьном курсе математики, практиковать вопросы учащимся на определение известных им теорем, от которых изучаемая теорема зависима (независима), время от времени делать логический анализ доказательств.

I2). Предупреждать ошибки в "доказательствах" методом "от противного" следует путем рассмотрения упражнений на деление понятий, отрицание сложных высказываний, на уяснение учащимися сущности законов исключенного третьего и непротиворечивости.

I3). Ошибочное причисление несовершенного анализа к методам построения доказательства полезно предотвращать сопоставлением его с совершенным анализом и синтезом, противопоставляя при этом входящую в несовершенный анализ схему, не имеющую доказательной силы, правилам вывода.

I4). Сравнение и противопоставление логических схем целесообразно использовать и в случае ошибок в индуктивных доказательствах. Это дает возможность учащимся отличить характерные черты неполной, полной и математической индукции.

Материалы диссертации обсуждались:

а) на кафедре элементарной математики и методики преподавания математики Киевского педагогического института имени А.М.Горького (I969-I97I гг.);

б) на кафедре математики Ивано-Франковского педагогического института имени В.С.Стефаника (I966-I970 гг.);

в) на республиканском научно-методическом семинаре преподавателей методики математики (I97I г.);

г) на отчетно-научной конференции преподавателей Киевского педагогического института имени А.М.Горького (I97I г.).

По материалам диссертации прочитан спецкурс для студентов-выпускников Ивано-Франковского педагогического института в I969-70 учебном году.

Основные результаты исследования опубликованы в следующих статьях:

I). Контрпримеры в школьном курсе математики, в сб. "Методика викладання математики", вып.7, К., "Радянська школа", 1971 (на украинском языке).

2). Ошибки в математических понятиях в сб. "Методика викладання математики", вып.7, К., "Радянська школа", 1971 (на украинском языке).

3) Из опыта работы по подготовке студентов-заочников к проведению факультативных занятий по математике, "Тези доповідей міжвузівської наради - семінару з питань підготовки вчителів математики на заочних відділах педагогічних інститутів УРСР", Чернигов, 1969 (на украинском языке).

4). Первые пособия для факультативных занятий по математике, "Математика в школе", 1970, № 2 (в соавторстве).

5). Расширение понятия числа при изучении математики в школе, "Тези доповідей звітно-наукової конференції кафедр інституту", Ивано-Франковск, 1966. (на украинском языке).

6). Пособия для факультативных занятий по математике, ж. "Радянська школа", 1970, № 3 (в соавторстве, на украинском языке).

7). Ошибки в доказательствах, в сб. "Методика викладання математики", вып.8, К., "Радянська школа", 1972 (на украинском языке, принята к печати).

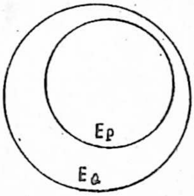


Рис. I

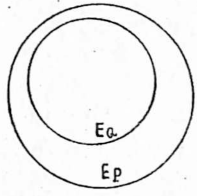
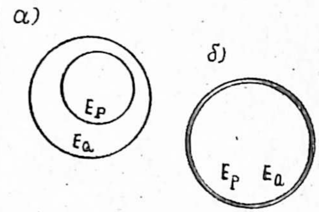
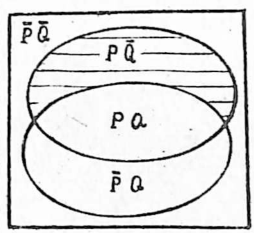


Рис. 2

Таблица сравнительного изображения истинности высказываний кругами Эйлера и диаграммами Венна

Высказывание	Изображение истинности его	
	кругами Эйлера	диаграммами Венна
$(\forall x)[P(x) \Rightarrow Q(x)]$		
$(\exists x)[P(x) \wedge Q(x)]$