НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені М.П.ДРАГОМАНОВА

На правах рукопису

ФІЛІМОНОВА Марія Олександрівна

УДК 373.5.016:514(043.3)

ФОРМУВАННЯ УМІНЬ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ В УЧНІВ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ В ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ ГЕОМЕТРІЇ

13.00.02 – теорія та методика навчання (математика)

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата педагогічних наук

Науковий керівник
Швець Василь Олександрович,
кандидат педагогічних наук, професор

Київ – 2015

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

ВРнМ – вимірювальні роботи на місцевості

ЕК – експериментальні класи

КК – контрольні класи

КР – контрольна робота

МАН – Мала академія наук

НВП – навчально-виховний процес

СРСР – Союз Радянських Соціалістичних Республік

ШКМ – шкільний курс математики

ВСТУП

Актуальність дослідження. Місце освіти в суспільному житті України було, є і буде об’єктом досить запеклих дискусій, адже навіть пересічний громадянин держави поступово починає усвідомлювати, що освіта є джерелом добробуту для нього, а надто – для його дітей.

Нині стало очевидним, що «технологія майбутнього вимагає не мільйонів поверхово підготовлених людей, готових виконувати одноманітну роботу…а людей, які матимуть критичне мислення, які зможуть знаходити свій шлях у новому оточенні, які досить швидко встановлюватимуть нові стосунки в реальності, що постійно змінюється. Вона вимагає людей, у яких «майбутнє в крові»[170, С.105]. Тому одне із першочергових завдань шкільної математичної освіти полягає у опануванні учнями такою системою математичних знань, умінь і навичок, яка б виявилася корисною у повсякденному житті та достатньою для формування наукового світогляду школярів, їх інтелектуального розвитку та готовності до вибору майбутньої професії. Зробити це можна різними способами, один з яких – активізація пізнавального інтересу до вивчення математики шляхом формування в учнів знань, умінь і навичок математичного моделювання.

Отже, пошук нових можливостей підсилення **прикладної спрямованості шкільного курсу математики, засобів формування навичок математичного моделювання є перспективним напрямком досліджень в області теорії і методики навчання математики.**

Психологічний аспект зазначеної проблеми (закономірності мисленнєвої діяльності, переформулювання задач, моделювання як засіб пізнання та ін.) розглянуто в роботах Д.М. Богоявленського [21, 22], Л.С.Виготського [44, 45], П.Я.Гальперіна[46], Є. М. Кабанової-Меллер [83, 84], Г.С.Костюка [94], В.А. Крутецького [95, 96], О.М.Леонтьєва [98], Є.І.Машбиця [111], С.Л.Рубінштейна [150, 151]та інших науковців.

Механізми дослідження методів математичного моделювання та їх використання в різних галузях науки і техніки знайшли відображення у працях В.М.Глушкова [48], Б.В.Гнеденка [49 – 51], А.М.Колмогорова [87, 88], Г.М.Морозова [126], А.М. Тихонова [168, 169] та інших дослідників. Аспекти дослідження математичних моделей засобами інформаційно-комунікаційних технологій, зокрема методичне забезпечення та методика навчання, розроблені М.І.Жалдаком [74 – 77],Є.І.Машбицем [110, 112], Г.О. Михаліним [120, 121], Н.В.Морзе [123 – 125], С.А.Раковим [147 – 149] та іншими методистами-науковцями. Методична система формування знань і вмінь математичного моделювання в процесі математичної та методичної підготовки вчителів математики в умовах особистісно-орієнтованого навчання висвітлена у дисертаційному дослідженні Л.Л. Панченко [137].

Дієвим заходом реалізації математичного моделювання на практиці є розв'язування прикладних задач. Основні положення прикладної спрямованості шкільного курсу математики розкрито у роботах Г.П. Бевза [8 – 13], Г.М.Возняка [35 – 41], Ю.М. Колягіна [90 – 92], В.В.Фірсова [193 – 195] та інших науковців. Розробкою сучасних технологій розв'язання проблеми прикладної спрямованості шкільного курсу математики займаються С.М. Лук'янова [99 – 101], Л.С. Межейнікова [113, 114], А.В. Прус [142, 143], Л.О.Соколенко [157 – 161], В.О.Швець [143, 161, 201 – 208] та інші математики-методисти. Зокрема, у їхньому доробку не тільки наукові, а й практично значущі результати дослідження проблеми прикладної спрямованості шкільних курсів алгебри і початків аналізу, стереометрії, інтегрованого шкільного курсу «Математика».

Проте, як засвідчиваналіз робіт за напрямком дослідження, ще не всі аспекти проблеми формування й розвитку навичок математичного моделювання в учнів виявилися висвітленими. Питання прикладної спрямованості шкільного курсу геометрії основної школи до сьогодні залишається відкритим. Незважаючи на постійне реформування освіти, впровадження інноваційних технологій, вдосконалення підручників, методичних посібників, аналіз масової практики навчання дає змогу виділитив навчально-виховному процесі такі суперечності:

- між соціальним запитом щодо формування у школяріву процесі навчання математики загальнопредметних компетентностей, до яких належить і уміння використовувати методи математичного моделювання, та недостатнім рівнем сформованості таких умінь в учнів основної школи;
- між вимогами суспільства щодо особистісного спрямування навчально-виховного процесу, між потребами та інтересами учня і традиційними методами, формами й засобаминавчання математики та геометрії;
- між наявним станом теоретичної розробки проблеми формування вмінь математичного моделювання та практикою навчання учнів основної школи;
- між необхідністю оволодіння учнями основної школи загальним умінням застосовувати отримані на уроках математики та геометрії знання у повсякденному житті та відсутністю у методичній науці відповідноїсистеми, яка б передбачала формування цих умінь.

Таким чином, підвищена актуальність, теоретична і практична значущістьвизначеної проблеми та необхідність розв'язання виявлених суперечностей зумовили вибір теми дисертаційного дослідження **«Формування умінь математичного моделювання в учнів основної школи в процесі навчання геометрії».**

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційне дослідження виконане відповідно до теми науково-дослідної роботи кафедри математики і теорії та методики навчання математики Національного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова «Розробка науково-методичної системи математичної підготовки учнів середніх закладів в умовах впровадження освітніх стандартів» (номер державної реєстрації 0198 № 001666). Тему дисертації затверджено Вченою Радою Національного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова (протокол №9 від 28 квітня 2009 року) та узгоджено у Міжвідомчій раді з координації наукових досліджень у галузі педагогіки і психології при Національній академії педагогічних наук України (протокол №5 від 16 червня 2009 року).

Мета дослідження. Визначити цілі і завдання, зміст і структуру процесу навчання учнів математичного моделювання, розробити науково обґрунтовані та експериментально перевірені методичнірекомендації з формування умінь математичного моделювання в учнів основної школи під час навчання геометрії.

Для досягнення мети визначені такі **завдання дослідження:**

1. З’ясувати стан розв’язання проблеми дослідження в науково-методичній, психолого-педагогічній, математичній літературі та рівень її практичної реалізації в навчанні математики в школі.

2. Визначити психолого-педагогічні основи та сформулювати методичні вимоги до формування в учнів основної школи умінь математичного моделювання.

3. Теоретично обґрунтувати і розробити цілі та зміст, засоби та методичні рекомендаціїз формування в учнів основної школи знань, умінь і навичок математичного моделювання.

4. Експериментально перевірити ефективність розробленої методики формування в учнів основної школи умінь математичного моделювання під час вивчення геометрії.

Поетапна реалізація цих завдань дозволила забезпечити цілісний опис, пояснення та прогнозування процесуформування в учнів основної школи знань, умінь і навичок математичного моделювання.

Об’єкт дослідження. Процес навчання математики учнів 5 – 6 класів і геометрії учнів 7 – 9 класів основної школи.

Предмет дослідження. Методика формування в учнів основної школи навичок і вмінь математичного моделювання у процесі навчання геометрії.

Гіпотеза дослідження. Створення і впровадження у навчальний процес науково обґрунтованої методики формування в учнів основної школи знань, умінь і навичок математичного моделювання, яка враховує освітні вимоги сучасного покоління, особливості його навчальної діяльності та віковий фактор, забезпечить:

- свідоме оволодіння учнями математичним моделюванням як універсальним методом навчального пізнання навколишнього середовища;
- підвищення рівня розвитку творчих здібностей школярів;
- активізацію пізнавального інтересу до вивчення предмету та ефективність навчання.

Для реалізації поставлених завдань застосовувалися такі **методи** науково-педагогічнихдосліджень:

- *теоретичні:*системний та порівняльний аналіз психолого-педагогічної та науково-методичної літератури з проблеми дослідження (1.1.1, 1.1.2, 1.2.1 – 1.2.3, 1.3 (тут і далі підрозділи дисертації); аналіз освітніх стандартів, програм, підручників і навчальних посібників з математики для учнів 5 – 9 класів загальноосвітніх шкіл (1.1.3, 2.1 – 2.3); аналіз та інтерпретація результатів педагогічного експерименту (2.5);
- *емпіричні:*діагностичні (бесіди з учнями та вчителями, анкетування, проведення контрольних робіт) (2.5); обсерваційні (спостереження за навчально-виховним процесом у школі, систематизація та узагальнення передового педагогічного досвіду і власної педагогічної діяльності у школі) (1.1.3, 2.1 – 2.4); експериментальні (організація та проведення констатуючого, пошукового і формуючого експерименту (2.5);
- *математично-статистичні*: обробка експериментальних даних (2.5).

Методологічною основою дослідження є положення: концепції діяльнісного та особистісно-орієнтованого підходу до навчання (Д.М. Богоявленський [21, 22], Л.С. Виготський [44, 45], О.М. Леонтьєв [98], С.Л.Рубінштейн [150, 151], І.С. Якиманська [214 – 216] та інші вчені), теорії розвивального навчання(В.В. Давидов [58 – 60], Л.В.Занков [81], В.А.Крутецький [95, 96], Д.Б.Ельконін [209 – 211], І.С.Якиманська [212, 213] та інші науковці), теорії проблемного навчання та прикладної спрямованості математичних дисциплін (Г.М. Возняк [35 – 41], В.О.Далінгер [61, 62], Ю.М.Колягін [90 – 92], О.М.Матюшкін [106], М.І.Махмутов [107 – 109], М.О.Терешин [167], В.В.Фірсов [193 – 195], І.М.Шапіро [198] та інші вчені),теорії математичного моделювання (В.М.Глушков [48], Б.В. Гнеденко [49 – 51], А.М. Колмогоров [87, 89], А.Д. Мишкіс [118, 119], О.А. Самарський [152], А.М.Тихонов[168, 169]та інші науковці), робіт з методики навчання математики (Г.П.Бевз [8 – 13], О.С. Дубинчук [71, 72], З.І.Слєпкань [154, 155]та інші науковці-методисти); Державна національна програма «Освіта» («Україна XXI століття») [63],Держаний стандарт базової і повної середньої освіти (освітня галузь «Математика») [65], Закон України «Про освіту» [80], Національна доктрина розвитку освіти України у XXI столітті [129] та інші нормативно-правові документи Міністерства освіти і науки України.

Обґрунтованість і достовірність наукових положень, висновків і рекомендацій забезпечені: аналізом нормативних документів, науково-методичної, психолого-педагогічної, математичної літератури та особливостей навчально-виховного процесу в школі; систематизацією і узагальненням педагогічного досвіду вчителів математики; використанням методів дослідження, адекватних поставленій меті та завданням; кількісним і якісним аналізом обсягу теоретичного і емпіричного матеріалу; послідовним проведенням етапів педагогічного експерименту, який засвідчив ефективність і значимість запропонованої методики формування в учнів основної школи знань, умінь і навичок математичного моделювання.

Наукова новизна одержаних результатів дослідження полягає у тому, що:

- *Вперше обґрунтовано* необхідність і можливість формування в учнів основної школи навичок і вмінь математичного моделювання у процесі навчання геометрії в основній школі.
- *Окреслено* етапи формування в учнів навичок і вмінь математичного моделювання з урахуванням пізнавальних можливостей підлітків.
- *Визначено* місце і зміст методів математичного моделювання в курсі математики 5 – 6 класів та геометрії 7 – 9 класів.
- *Розроблено*методику (цілі, завдання, зміст, організаційні форми, методи і засоби) формування в учнів умінь математичного моделювання в ос-

новній школі під час навчання геометрії, яка уможливлює свідоме та активне засвоєння школярами навчального матеріалу.

➢ Дістали *подальший розвиток* теоретичні і методичні основи розробки засобів, організаційних форм і методів навчання учнів геометрії в основній школі.

Практичне значення отриманих результатівдослідження полягає у тому, що в роботі:

➢ *Розроблено*конкретні методичні рекомендації з формування навичок і вмінь математичного моделювання до вивчення таких змістових ліній шкільного курсу математики, як «Вирази», «Геометричні фігури», «Геометричні величини».

➢ *Запропоновано і обґрунтовано*використання у процесіформування навичок і вмінь математичного моделювання в учнів основної школи методу проектів та інформаційно-комунікаційних технологій, зокрема мультимедійних презентацій та flash-роликів.

➢ *Створено* цикл вимірювальних робіт на місцевості з методичними рекомендаціями щодо їх проведення у процесі навчання математики в 5 – 6 класах та геометрії в 7 – 9 класах.

➢ *Підготовлено*добірки прикладних задач по основним змістовим лініям курсу математики 5 – 6 класів та геометрії 7 – 9 класів.

Розроблені в дослідженні матеріали можуть бути використані вчителями основної школи, методистами інститутів післядипломної освіти, авторами методичних посібників для вчителів.

Особистий внесок здобувачав одержанні наукових результатів дослідження полягає у обґрунтуванні необхідності організації навчання учнів основної школи методамматематичного моделювання; у розробці структурних компонентів методики формування умінь математичного моделювання в учнів основної школи під час навчання геометрії; у плануванні, організації та проведенні педагогічного експерименту; в аналізі результатів експериментального дослідження.

Основний матеріал, усі положення й завдання дисертаційного дослідження автор розв'язав самостійно. У спільних публікаціях основні положення розроблено автором дисертації, а правка, вичитка і деякі доповнення співавтором.

Апробація і впровадження результатів дослідженняздійснювалася під керівництвом автора вчителями математики у наступних загальноосвітніх навчальних закладах освіти:Київський університет імені Бориса Грінченка (інститут післядипломної педагогічної освіти) (довідка № 397 від 18.12.2013 р.), Пирятинський ліцей (довідка № 213 від 09.10.2013 р.), Пирятинська загальноосвітня школа I – III ступенів №6 (довідка № 2108/01-32 від 14.10.2013 р.), Рівненська загальноосвітня школа I – III ступенів №5 (довідка № 231 від 03.07.2014 р.), Сновʼянська загальноосвітня школа I – II ступенів (довідка № 91 від 22.08.2014 р.).

Основні результати дисертаційного дослідження доповідалися, обговорювалися та були позитивно оцінені нанауково-практичних і науково-методичних конференціяхта семінарах:

– міжнародних:

ІІІ Міжнародній науково-методичній конференції «Эвристическое обучение математике» (м.Донецьк, 2009 р.); Міжнародній науково-методичній конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2010) (м. Черкаси, 2010 р.); Міжнародній науково-практичній конференції «Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики» (м. Київ, 2011 р.); Міжнародній науково-практичній конференції «Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики» (м.Вінниця, 2012 р.); Міжнародній науковій конференції «Современная наука: тенденции развития» (м. Будапешт, 2013); Міжнародній науковій конференції «Математическое образование: современное состояние и перспективы» (м. Могилів, Білорусь, 2014 р.);

– всеукраїнських:

Всеукраїнській науково-методичній конференції «Стан та перспективи підготовки вчителя математики в Україні» (м. Вінниця, 2009 р.); Всеукраїнській дистанційній науково-методичній конференції з міжнародною участю

«Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ITM*плюс – 2011» (м. Суми, 2011 р.); Всеукраїнській науково-методичній конференції молодих науковців «Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики, фізики, інформатики у середніх та вищих навчальних закладах» (м. Кривий Ріг, 2011 р.); IV Всеукраїнській науково-практичній конференції «Особистісно орієнтоване навчання математики: сьогодення і перспективи» (м.Полтава, 2013 р.);

– всеукраїнських семінарах:

Всеукраїнському науково-методичному семінарі «Актуальні проблеми методики навчання математики» (м.Київ, 2010 р., 2014 р.)

Публікації. За темою дослідження опубліковано 19 наукових, навчальних та методичних праць, зокрема: 7 – у наукових фахових виданнях України [176, 179, 184, 185, 188, 190, 207],3 – у наукових виданнях зарубіжних країн [187, 191, 208], 9 – у наукових матеріалах і тезах конференцій [177, 178, 180 – 183, 186, 189, 192].

Структура дисертації. Дисертація складається зівступу, двох розділів, висновків до кожного з розділів, загальних висновків, списку використаних джерел (225найменувань, розміщених на 22 сторінках) та додатків. Повний обсяг дисертації становить 256 сторінок, з них 193 сторінки основного тексту. Робота містить 26 таблиць, 32 рисунки і діаграми. Обсяг додатків – 41 сторінка.

РОЗДІЛ І
ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖУВАНОЇ ПРОБЛЕМИ

1.1. Стан проблеми дослідження у науково-методичній іматематичній літературі та шкільній практиці

Сьогодення об'єктивно вимагає переведення освітнього процесу на технологічний рівень, активізації пошуку перспективних інноваційних педагогічних технологій, спрямованих на розвиток і саморозвиток особистості. Сучасна освіта – це освіта для людини, її стрижень – виховання відповідальної особистості, яка вміє використати набуті знання і вміння для розв'язання поточних проблем, уміє здобувати і опрацьовувати різноманітні відомості, прагне змінити на краще своє життя і життя своєї країни.

Від того, як людина сприймає оточуюче середовище, залежить результат її дій. Особливо це стосується цілеспрямованих дій, тому людина прагне діяти найраціональнішим способом і задля цього досліджує реальні об'єктиза допомогою дещо спрощенихїх моделей.

Першим в історії прикладом науково обґрунтованого застосування методів моделювання можна вважати праці з дослідження гідродинамічних характеристик кораблів у дослідних басейнах, яке відбувалося в другій половині XIX ст.[131]. Але на той час трактування поняття «модель» було пов'язано не з наукою, а з виробництвом.

Зламним моментом у розвитку моделювання виявилася середина XX ст. Саме в цей час розширилось коло дослідницьких і ***прикладних задач***, які розв'язувалися науковими методами, а це спричинило необхідність побудови моделей для їх розв'язання. Відтоді моделювання стало невід'ємною частиною для наукових досліджень і повсякденної практики.

Розглянемо докладніше поняття ***«математична модель»*** та ***«математичне моделювання».***

1.1.1. Поняття математичної моделі та математичного моделюванняв математиці

Поняття «модель» виникло в процесі дослідного вивчення навколишнього середовища і походить від латинських «modus», «modulus», що означає міра, образ, спосіб. Існує багато підходів до визначення поняття «модель». Зокрема, цим терміном називають логічну структуру, у якій описано ряд відношень між її елементами; графічне подання об'єкту чи процесу у вигляді графіка, блок-схеми або кривої, що характеризує динаміку досліджуваного процесу; систему математичних співвідношень, які описують досліджуваний процес або явище та ряд інших форм і понять[93, 131].

Наприклад, І.І. Блехман, А.Д. Мишкіс та Я.Г. Пановко дають таке визначення моделі: «…об'єкт *M* є моделлю об'єкта *A*відносно деякої системи *S* характеристик (властивостей), якщо *M* будується (або обирається) для імітації *A* за цими характеристиками» [20, с. 106].

Дещо іншого спрямування (через поняття подібності) знаходимо визначення у М.О. Терешина: «Під моделлю, – пише він, – розуміється деяка реально існуюча або уявна система, яка, заміщуючи і відображаючи у пізнавальних процесах іншу систему, – оригінал, знаходиться з нею у відношенні подібності, завдяки цьому вивчення моделі дозволяє отримати інформацію про оригінал» [167, с. 13].

Досить часто на практиці використовується математична модель, яка має свою специфіку у порівнянні з іншими різновидами моделей. Про це мова ітиме далі.

Нічуговська Л.І. виділяє три найбільш поширених напрями побудови математичних моделей[133]:

1. Абстрактні математичні моделі, що носять яскраво виражений формальний характер.

2. Математичні моделі прикладних задач.

3. Математичні моделі окремих процесів, які за допомогою математич-

них засобів повністю або частково описують дедуктивні системи.

У ***навчально-виховному процесі*** (надалі НВП) в школі під час вивчення математики учням пропонується лише другий нарям. Усвоємудослідженні ми притримуємося наступного визначення, яке найповніше, на нашу думку, відповідає вказаному напряму: ***«Математична модель – це опис досліджуваного об'єкта, процесу чи деякої ситуації мовою математичних понять, формул, рівнянь, відношень тощо.».***

Процес створення і дослідження математичної моделі називають математичним моделюванням. Отже, ***математичне моделювання – це метод наукового пізнання оточуючого світу, який полягає в побудові та дослідженні математичних моделей його окремих процесів, явищ і об'єктів.***

Не всі матеріальні об'єкти, реально існуючі зв'язки і відношення об'єктивної реальності можуть бути предметом вивчення науковців-теоретиків. Як правило, зміст їхньої діяльності пов'язаний із побудовою, дослідженням та реалізацією на практиці певної моделі, зокрема математичної. Тому спектр застосування методу моделювання є досить широким, зокрема: економіка, техніка, наукові дослідження, освіта, психологія, охорона здоров'я, метеорологія, стихійні лиха, військові конфлікти тощо.

На необхідності використання моделей у навчальному процесі наголошував основоположник теорії розвивального навчання В.В.Давидов: «Узагалі там, де змістом навчання є зовнішні властивості речей, принцип наочності себе виправдовує. Але там, де змістом навчання стають зв'язки і відношення предметів, – там наочність не є достатньою. Тут, на наш погляд, вступає в силу метод моделювання» [59, с.385]. Таким чином, моделювання є багатофункціональним, тобто використовується для досягнення різноманітних цілей на різних рівнях (етапах) дослідження чи перетворення. У зв'язку з цим існує велика кількість типів і форм моделей.

Проведений нами аналіз наукових джерел [73, 78, 122, 133, 167] дав змогу виділити найпоширеніші класи моделей:

1. За природою об'єкту дослідження: фізичні, хімічні, математичні,

економічні, військово-політичні, історичні та ін.

2. За характером інформації: апріорні, апостеріорні.

3. За фактором часу: статичні, динамічні.

4. За фактором невизначеності: детерміновані, стохастичні.

5. За ступенем наочності: матеріальні, ідеальні.

Зупинимося детальніше на останній класифікації, запропонованій Л.М.Фрідманом, оскільки вона, на наш погляд, може успішно використовуватися у процесі навчання математики в школі [195]. До *матеріальних* моделей відносяться ті, які конструюються з матеріальних елементів і функціонують за законами природи. Всі ці моделі можуть бути безпосередньо чуттєво сприйняті, оскільки існують реально.

Матеріальні моделі поділяються на *статичні* і *динамічні*. До першого виду автор відносить моделі, геометрично схожі на оригінал, які передають лише просторові особливості оригіналу у певному масштабі. До другого виду належать ті моделі, які відтворюють певні процеси та явища. Вони можуть бути фізично подібні оригіналам і відтворюють змодельоване явище у певному масштабі.

Серед *ідеальних* моделей розрізняють *образні (іконічні), знакові (знако-символьні), та мисленнєві*. До образних моделей належать різного роду рисунки, креслення, схеми, які в графічній формі передають структуру чи інші особливості змодельованих предметів та явищ. Знакові моделі – це запис структури або деяких особливостей об’єктів за допомогою певних символів чи знаків. Мисленнєві моделі – це уявлення про деяке явище, процес чи предмет, яке відображає теоретичну схему змодельованого об’єкта.

Оскільки не існує єдиної класифікації моделей, неможливо однозначно класифікувати і види моделювання. Зупинимося лише на тій класифікації, яка стосується математичного моделювання. Таким чином, за способом побудови виділяють мисленнєве і реальне моделювання. Мисленєве, у свою чергу, поділяється на: наочне, символьне і математичне.

Розглянемо детальніше види математичного моделювання, представлені у наукових працях [78, 133]:

1. Аналітичне – характерним є запис основних законів функціонування у вигляді деяких аналітичних співвідношень чи логічних умов.

2. Імітаційне – передбачає відтворення алгоритму функціонування системи в часі, причому імітуються елементарні явища, що складають процес, зі збереженням їх логічної структури і послідовності протікання.

3. Комбіноване (аналітично-імітаційне).

4. Інформаційне – особливий вид відображення об'єктивної дійсності, в ході якого суб'єкт подає здобуті відомості на одній із мов кодування.

5. Структурне – передбачає ототожнення оригіналу і моделі на основі подібності, аналогії їх структур.

6. Ситуаційне – передбачає створення певних ситуацій, взаємодіючи з якими учасник засвоює матеріал.

Заболотський В.П., Оводенко О.О. та Степанов А.Г. виділяють наступні переваги математичного моделюваннянад іншими видами[78]:

- універсальність, обумовлена універсальністю математики як мови опису і методу дослідження найрізноманітнішихоб'єктів навколишнього середовища;
- висока адаптивність, тобто можливість внесення змін при необхідності;
- можливість реалізації загрозливих або важковідтворюваних у природі режимів;
- можливість моделювання гіпотетичних, тобто нереалізованих у природі об'єктів.

Етапи математичного моделювання по суті у всіх дослідженнях схожі і досить широко висвітлені у науковій та навчальній літературі, зокрема у роботах І.І. Блехмана, А.Д. Мишкіса, Я.Г.Пановко [20], В.В. Кафарова [86], О.А. Самарського, А.П. Михайлова [152], М.О. Терешина [167], А.М. Тихонова [168].

Узагальнивши існуючі в науковій літературі різноманітні підходи до визначення процесу математичного моделювання, ми виокремили таку послідовність етапів його здійснення (***розширена схема***).

I етап. Постановка задачі.

На цьому етапі визначається об’єкт дослідження, виділяються його головні характеристики, вирішується питання щодо якісних уявлень і законів, що пов’язують ці характеристики у світлі існуючих даних про об’єкт дослідження.

II етап. Створення математичної моделі.

Визначені в постановці задачі якісні уявлення виражаються математичними символами і термінами, тобто здійснюється вибір «еквівалента» досліджуваного об’єкта, що відображає в математичній формі найважливіші його характеристики. Процес побудови математичної моделі залежить від ряду чинників, зокрема:

1. Ступінь повноти відомостей про досліджуваний об'єкт, його внутрішні механізми, зв’язки, притаманні його складовим частинам.

2. Мета і завдання моделювання.

3. Інтелектуальний рівень, математична підготовка дослідника тощо.

III етап. Дослідження створеної моделі.

Математична модель досліджується шляхом розв’язування певних математичних задач, що дозволяють отримати попередні знання про об’єкт.

На цьому етапі здійснюється за необхідності алгоритмізація та програмна реалізація моделі на комп’ютері.Визначається форма моделі, зручна для застосування чисельних методів, послідовність обчислювальних та логічних операцій і точність шуканих величин.Внаслідок цього відбувається уточнення, доопрацювання моделі, встановлюються межі її використання, визначаються загальні властивості моделі та її розв’язків.

IV етап. Перевірка якості математичної моделі шляхом інтерпретації одержаних результатів.

На даному етапі слід визначити, чи відповідає створена математична модель наступним вимогам, висвітленим у посібнику [78]:

1. ***Якість моделі*** – властивість моделі, яка характеризує її здатність заміщувати досліджуваний об’єкт для отримання нового інформаційного ресурсу

про оригінал (адекватність,складність, інформативність, інтерпретованість).

а) *адекватність* – правильний якісний опис об’єкта за обраними характеристиками і правильний кількісний опис об’єкта за обраними характеристиками з певним ступенем точності [20, с. 110–111];

б) *складність* визначається структурою моделі і характеризує можливість її використання під час моделювання;

в) *інформативність* – здатність моделі відображати або відтворювати інформаційний ресурс про оригінал;

г) *інтерпретовність* – можливість перенесення нового інформаційного ресурсу з моделі на оригінал.

2. ***Ефективність*** – властивість моделі, яка характеризує ступінь її пристосованості до досягнення цілей моделювання (результативність, оперативність, ресурсомісткість).

а) *результативність* – можливість отримання нового інформаційного ресурсу про об’єкт;

б) *оперативність* – визначається затратами часу, необхідними для досягнення кінцевого результату;

в) *ресурсомісткість* – визначається витратами ресурсів, необхідних для реалізації моделі.

Також на даному етапі результати чисельного моделювання на комп’ютері порівнюються з уже відомими або експериментально одержаними даними.

Цей етап потребує особливої уваги, тому що адекватність моделі – поняття дещо умовне: неможливо досягти повної відповідності формалізованої моделі реальному об’єкту дослідження.

V етап. Аналіз моделі та її уточнення.

Розглядається питання про повноту результатів моделювання з метою їх практичного застосування і подальшого удосконалення моделі, тобто відбувається вивчення і використання отриманого інформаційного ресурсу в реальній дійсності, на основі чого модель може уточнюватися за етапами I – IV.

Аналіз етапів математичного моделювання, розроблених В.О.Стукаловим [163], Н.А.Тарасенковою [164]та іншими науковцями, для учнів загальноосвітніх шкіл дозволив спростити розширену схему моделювання.

У ***шкільному курсі математики*** (надалі ШКМ) використовують навчальні математичні моделі, коли результат етапу постановки задачі відомий – певна текстова задача. Тому етапи I і V не є актуальними, їх можна опустити і отримати ***спрощену схему***:

I етап. Побудова математичної моделі до задачі (формалізація).

II етап. Розв'язування задачі в межах математичної моделі (дослідження або аналіз моделі).

III етап. Інтерпретація одержаного розв'язку (синтез результатів).

Саме такої схеми (адаптованої до розуміння школярів) ми і притримуємосяв даному дослідженні.

Більш детальнопитання еволюції математичного моделювання як методу пізнання та навчання висвітлено нами у публікації [207].

Таким чином, ключові поняття даного дослідження (***математична модель, математичне моделювання, етапи математичного моделювання***) нами визначені.

Перейдемо до аналізу деяких результатів дослідження проблеми застосування математичного моделюванняу навчальному процесі, висвітлених у наукових джерелах.

1.1.2. Математичне моделюванняяк проблема у науково-методичних дослідженнях

Одним із перших,хто звернув увагу на фундаментальне значення моделей у процесі навчання,був В.Л.Гончаров. У 1958 р. в одній із статей він зазначив «Идея модели (между прочим, связанная с понятием функции в общем смысле слова) весьма успешно применяется в самых разнообразных (если не во всех) разделах элементарной математики. Использование ее делает усвоение более быстрым, прочным, эффективным, ускоряет умозаключения и процесс решения задач. Тот, кто хотя бы мысленно пользуется моделью, имеет громадные преимущества перед тем, кто ею пользоваться не умеет» [55, с.54].

Широкого ж обговорення проблема навчання учнів математичного моделюваннянабула після того, як у 1971 р. А.М.Колмогоров у статті «Современная математика и математика в современной школе»[88] вказав на необхідність ознайомлення школярів з методамиматематичного моделювання і навчання їх складанню елементарних моделей.

У методиці навчання математики питання про необхідність явного введення в шкільний курс понять модель і моделювання вперше озвучила І.А.Мешкова в дисертації «Активизация понятий методом комплексного моделирования (на материале школьной математики)» у 1974 р. [117], однак шляхи введення цих понять у роботі не вказувалися.

У дисертації В.О.Стукалова «Использование представлений о математическом моделировании в обучении математике» (1976) [163] розроблено загальну схему навчання учнів 7 – 10 класів побудові моделей, визначено зміст основних понять, необхідних для формування уявлень про методиматематичного моделювання.

Створена автором методика пропонувалась для проведення факультативних занять або занять в класах математичного профілю. У ній не піднімалося питання про цілі, завдання та шляхи навчання методамматематичного моделювання на більш ранніх етапах. Зазначалося лише, що «рассмотрение элементов математического моделирования в начальной школе и на среднем звене обучения полезно и целесообразно хотя бы в пропедевтических целях, тем не менее практическое решение этого вопроса связано со специальными педагогическими исследованиями» [163, с.77].

Проблема прикладної спрямованості ШКМ, а відтак і формування умінь математичного моделювання піднімалася і в статті В.В.Фірсова «О прикладной ориентации курса математики», опублікованій у 1977 р. у відомому посібнику «Углубленное изучение алгебры и анализа»[171]. У роботі було обґрунтовано актуальність проблеми прикладної орієнтації ШКМ, можливість її позитивного вирішення, а також здійснено спробу з'ясувати специфіку прикладної математичної діяльності і визначено можливі шляхи її відображення під час навчання учнів. До процесу вирішення проблеми прикладної орієнтації курсу математики автор висував такі вимоги:

- «Компоненты математической культуры, вовлекаемые в процесс обучения математике, должны формировать правильные представления о математике и ее приложениях.
- Курс математики в школе должен правильно воспитывать математическую интуицию учащихся, основывающуюся на сознательном понимании происхождения и реальной семантики математических объектов.
- Среднее математическое образование должно приводить к овладению учащимися элементами математической культуры, относящимися ко всем трем этапам (формализации, решения задачи внутри построенной математической модели, интерпретации (добавлено нами – М.Ф.)) процесса применения математики к решению практических задач» [171, с.239].

Дані вимоги, на нашу думку, слушні і сьогодні, що підтверджує актуальність проведеного нами дослідження.

У 1978 р. Г.М.Морозов захистив дисертацію «Проблема формирования умений, связаных с применением математики» [126], де була розроблена та експериментально перевірена методика формування в учнів 7 – 10 класів поняття математичної моделі та основних умінь побудови математичної моделі у процесі навчання математики в загальноосвітній школі. Однак у його роботі чітко не прослідковується місце введення та закріплення основних понять теми у ШКМ, хоча і зазначається, що одним із основних методів навчання має бути проблемний.

Одночасно з Г.М. Морозовим Ю.О. Кусийвиконав дисертаційне дослідження на тему «Методы и приемы применения моделирования в процессе усвоения учащимися новых знаний (на материале предметов естественно-математического циклаIX – X классов)» [97], де вперше розглянув специфікумоделювання як теоретичного методу і прийому навчання.

У роботі розкриваються функції, роль і місце моделювання у навчанні, з'ясовуються оптимальні дидактичні умови, прийоми і методи застосування моделювання під час засвоєння учнями нових знань, визначаються особливості і шляхи використання моделювання у НВП. Зокрема, автор виділяє 4 види умінь моделювати залежно від рівня пізнавальної самостійності учнів:

1) уміння інтерпретувати готові моделі;

2) уміння створювати моделі об'єктів чи явищ під керівництвом учителя або користуючись алгоритмічним приписом;

3) уміння конструювати моделі об'єктів чи явищ за аналогією або користуючись узагальненим приписом;

4) уміння самостійно створювати моделі об'єктів чи явищ, користуючись узагальненими знаннями про моделювання [97].

Детально описана автором і структура засвоєння учнями цих умінь. Також обґрунтована можливість і ефективність застосування моделей при проблемному методі викладу навчального матеріалу, у процесі евристичної бесіди та самостійної роботи школярів.

Однак дана робота присвячена в основному використанню моделей у фізиці і лише частково зачіпає математику. Не висвітленим залишилось і питання вікових особливостей засвоєння учнями методу моделювання.

Дисертаційне дослідження В.С. Карапетяна «Моделирование как компонент деятельности учения» (1981) [85] присвячене розробці програми навчання учнів моделюванню з виділенням послідовності операцій і необхідних засобів. Значну увагу автор приділяє використанню графічних моделей (схем, рисунків) у НВП. Але його робота стосувалася навчання в цілому і не конкретизувалася стосовно математичного моделювання.

Значно більше уваги математичному моделюванню як методу навчання було приділено у дисертації Л.Г. Петерсон «Моделирование как средство формирования представлений о понятии функции в 4 – 6 классах средней школы» (1984) [138]. У дослідженні:

1) здійснено вивчення проблеми формування змістовних уявлень про поняття функції в 4 – 6 класах середньої загальноосвітньої школи;

2) розкрито роль моделювання як мети і засобу навчання;

3) розроблено і експериментально перевірено методичну систему, яка створює умови для переходу від уявлень до поняття функції, зокрема:

- обґрунтована необхідність пропедевтичного вивчення функціональної залежності величин;
- визначені завдання навчання молодших школярів математичному моделюванню;
- висвітлені методичні умови організації побудови учнями математичних понять;
- досліджена синтезуюча функція навчального моделювання;
- встановлено конкретні методичні шляхи знайомства школярів з поняттями «модель», «математичне моделювання»;
- враховані вікові особливості учнів 4 – 6 класів;

4) розроблено відповідні методичні рекомендації для вчителів.

Результатами дослідження Л.Г. Петерсон ми частково скористалися під час розробкипропедевтичного етапу навчання учнів 5 – 6 класів методамматематичного моделювання.

У дисертації В.С. Билкова «Формирование понятия о математическом моделировании средствами курса алгебры и начал анализа 9 и 10 классов» (1986) [26] розроблена і обґрунтована система формування в учнів поняття математичного моделювання на основі неявного вивчення його структури і з’ясування компонент моделювання на матеріалі навчальних прикладних задач з використанням диференціальних рівнянь.

До основних етапів математичного моделювання автор відносить:

1) структурний аналіз об’єкта;

2) уточнення мети вивчення об’єкта;

3) вибір математичних засобів опису;

4) побудова математичної моделі;

5) формально-логічний аналіз побудованої моделі;

6) інтерпретація результатів аналізу моделі;

7) уточнення моделі;

8) контроль адекватності моделі.

До кожного з цих етапів розроблено комплекс вправ для учнів, спрямований на покомпонентне відпрацювання елементів і структури математичного моделювання, та методичні рекомендації для вчителя. Також В.С. Билков обґрунтував модельний спосіб введення математичних понять, що мають дослідне походження.

Практично одночасно з В.С. Билковим у 1987 р. Є.В. Величко захистив дисертацію на тему «Реализация прикладной направленности курса алгебры неполной средней школы» [32], в якій обґрунтував підхід до реалізації прикладної спрямованості алгебри через певним чином створену і методично опрацьовану систему задач прикладного характеру.

Автор виділив ряд прикладних умінь, які повинні формуватися у процесі вивчення алгебри, і розробив методичні рекомендації по оволодінню кожним із цих умінь (див. табл. 1.1).

Таблиця 1.1

Прикладні уміння та методичні рекомендації по їх оволодінню

Уміння	**Рекомендації**
Знаходити відомості для розв'язування математичними методами проблем, що виникають у реальному світі	Розв'язувати задачі з недостатніми або зайвими даними
Здійснювати ідеалізацію характеристик вихідної ситуації	Використовувати добре знайомі учням ситуації або застосовувати в умові задач спеціальні запитання, вимоги, зауваження
Будувати модель реальної ситуації на неформальній мові	Залучати учнів до пошукової діяльності з елементами творчості під час розв'язування спеціальних задач
Інтерпретувати отримані результати задачі	Застосовувати в умові задач спеціальні запитання, вимоги
Будувати математичну модель задачі	Розв'язувати задачі з трьома взаємопов'язаними величинами

На основі запропонованих рекомендацій автором була дібрана система прикладних задач. Значна увага у дослідженні приділялася використанню графічних моделей в алгебрі, зокрема графіків функцій, рівнянь і нерівностей.

Більш ґрунтовне дослідження у цьому напрямку здійснила Л.О.Соколенко, захистивши у 1997 р. дисертацію «Методика реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу алгебри і початків аналізу» [158]. Вона розкрила психолого-педагогічні передумови для реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу алгебри і початків аналізу, особливості змісту цього курсу, що сприяють реалізації прикладної спрямованості; обґрунтувала доцільність і ефективність застосування конкретно-індуктивного методу при введенні нових понять курсу; з'ясувала особливості процесу формування узагальнень і понять в учнів та можливості, які виникають при використанні на уроках системи прикладних задач. На основі цього автором були сформульовані методичні вимоги щодо реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу алгебри і початків аналізу, зокрема вимоги до системи прикладних задач та їх розв'язування, на яких зупинимося детальніше.

Оскільки набуття учнями вміння розв'язувати прикладні задачі тісно пов'язане із питанням математичного моделювання, Л.О.Соколенко виокремлює такі розумові і практичні дії, володіння якими необхідне для розв'язування будь-якої прикладної задачі: «1) розчленування формулювання задачі на умови та вимоги; 2) виявлення в умові задачі об'єктів і їх характеристик (властивостей об'єктів, відношень між об'єктами); 3) співставлення умов з вимогами; 4) встановлення типу прикладної задачі; 5) виділення з умови задачі математичного співвідношення, яке присутнє в математичній моделіприкладної задачі; 6) вибір методу дослідження побудованої моделі; 7) створення на основі загальних правил (формул, тотожностей) або загальних положень (означень, теорем) алгоритму розв'язання формалізованої задачі; 8) розв'язання формалізованої задачі за створеним алгоритмом; 9) дотримання правил наближених обчислень, а також використання обчислювальних засобів у процесі розв'язання задачі; 10) переклад на змістовну мову прикладної задачі одержаних результатів розв'язання» [161, с.21 – 22]. При цьому п'ята дія наведеного мінімуму замінюється ще одинадцятьма розумовими і практичними діями, володіння якими сприяє формуванню вмінь будувати математичні моделі: «1) вибір даних, необхідних для розв'язування задачі…; 2) заміна вихідних термінів вибраними математичними еквівалентами; 3) встановлення математичних співвідношень між введеними змінними і параметрами задачі…; 4) вибір із сукупності всіх можливих математичних співвідношень, що описують ситуацію задачі, тих, які складають математичну модель; 5) зображення геометричних фігур, які виконують роль математичних еквівалентів; 6) виділення на малюнку необхідних для пошуку плану розв'язання фігур; 7) проведення додаткових побудов; 8) переусвідомлення елементів малюнка в плані різних понять; 9) встановлення необхідних співвідношень між елементами фігури, яка є геометричною моделлю даної задачі…; 10) переформулювання нестандартної задачі до еквівалентної їй стандартної; 11) поділ нестандартної задачі на декілька складових стандартних задач» [161, с. 22]. Даний перелік розумових і практичних дій може слугувати основою формування методичних рекомендацій для вчителя щодо ефективності організації навчальної діяльності учнів 9 класу із застосування методів математичного моделювання.

Для успішного оволодіння школярами згаданими вище розумовими і практичними діями Л.О.Соколенко розроблено систему задач прикладного характеру, які доцільно використовувати у НВП поряд із задачами діючих шкільних підручників [157, 160, 161].

Таким чином, дисертації В.С. Билкова, Є.В. Величка та Л.О.Соколенко заслуговують на увагу у плані обґрунтування доцільності та ефективності використання прикладних задач в курсі алгебри і розробки відповідних методичних рекомендацій, але потребує детальнішого дослідження питання формування в учнів умінь математичного моделювання в процесі навчання геометрії в основній школі.

Дисертаційне дослідження Л.Л.Панченко «Формування вмінь математичного моделювання в процесі навчання майбутніх учителів математики» (2006) [137] присвячене розробці компонентів методичної системинавчання математичному моделюванню майбутніх учителів математики під час вивчення ними математичних і методичних дисциплін в умовах особистісно орієнтованого навчання, зокрема:

- доведено ефективність застосування діяльнісного підходу до вивчення математичного моделювання;
- визначено психолого-педагогічні передумови формування у студентів знань, умінь і навичок математичного моделювання;
- запропоновано ряд лекцій, присвячених вивченню теоретичного матеріалу, пов'язаного з математичним моделюванням;
- описано методику організації та проведення практичних занять з математичного моделювання;
- розроблено систему різнорівневих задач, які можуть використовуватися в умовах особистісно орієнтованого, диференційованого навчання;
- створено спецкурс «Математичне моделювання» для IV – V курсів;
- сформульовано методичні рекомендації для викладачів;
- розроблено критерії та методику визначення рівнів сформованості вмінь математичного моделювання у студентів.

Однак робота Л.Л. Панченко стосувалася навчання студентів педагогічних вузів і шкільний етап не розглядався.

У 2007 р. А.В. Прус захистила дисертацію на тему «Прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії» [142], в якій на основі створеної концептуальної моделі реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії була розроблена відповідна методика. Стрижнем побудованої моделі є включення у процес навчання старшокласників стереометрії методу математичного моделювання. Для ефективної організації такої діяльності автором визначено методичні прийоми та орієнтовні дії для вчителя. Зупинимося на них детальніше.

«I.Перед розв'язуванням прикладної задачі доцільно:

1) з'ясувати із учнями, що таке прикладна задача, визначити етапи її розв'язування…;

2) познайомити учнів із таблицею застарілих мір;

3) започаткувати ведення словника для полегшення перекладу умови прикладної задачі на мову математики;

4) з'ясувати доцільність додержання правил наближених обчислень під час розв'язування прикладної задачі, нагадати ці правила учням.

II. На етапі формалізації важливо:

1) використовувати евристичні питання;

2) абстрагуватися від властивостей об'єкту, несуттєвих для побудови його моделі;

3) допомагати учням чітко вказувати відмінності між об'єктом та його моделлю, формулювати умову та вимогу прикладної задачі на мові математики.

III.На етапі розв'язування задачі всередині побудованої моделі слід:

1) навчити учнів користуватися джерелами необхідних додаткових даних та теоретичних відомостей;

2) систематично застосовувати ІКТ для виконання рисунків, проведення обчислень;

3) вводити задачі-двійники;

4) доводити знайдений розв'язок до числового значення або розрахункової формули;

5) перед виконанням учнями рисунків до прикладних задач дозволяти їм виконувати відповідні ескізи.

IV. На етапі інтерпретації потрібно:

1) наголосити на необхідності здійснювати перевірку знайденого

розв'язку на відповідність вимозі задачі» [143, с. 36 – 37].

Дані методичні рекомендації частково були використані намипід час розробки методики навчання учнів 7 – 9 класів методу математичного моделювання на уроках геометрії.

Як спосіб підсилення прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії автором здійснено системно-структурний розподіл матеріалу, тобто виділено 9 ***навчально-математичних теорій*** (надалі НМТ). Для кожної з них розроблена структурна схема, сконструйовано спеціальні картки-НМТ для учнів, а також складена система прикладних задач. Однак повністю застосувати подібний підхід до курсу геометрії основної школи досить складно, оскільки в учнів ще не на достатньо високому рівні розвинене абстрактно-логічне мислення, навички самоконтролю і самоорганізації.

Заслуговує на увагу розроблена А.В.Прус комп'ютерна програма «Стереометрія для нас». З окремими її частинами ми ознайомлювали учнів 5 – 6 класів під час вивчення елементів стереометрії (прямокутний паралелепіпед, куб, паралельні та перпендикулярні прямі і т.д.), а також у 9 класі при вивченні теми «Початкові відомості стереометрії».

В останні роки в педагогічній пресі збільшилася кількість публікацій присвячених прикладній спрямованості навчання математики і, зокрема, математичному моделюванню. Серед авторів слід відмітити Н.М. Войналович [43],О.О. Гриб'юк [53], Л.І.Нічуговську[132], С.П.Семенця [153]та інших методистів. Ряд статей належить С.І. Великодному [29 – 31]. Як правило, публікації містять можливі варіанти методичних розробок для ознайомлення учнів з математичним моделюванням у межах шкільної програми, а також системи задач, завдань та запитань до них. Висловлюються навіть побажання впровадити у навчальний процес самостійну змістову лінію «Математичне моделювання».

Проведений нами огляд названих вище джерел дав підстави стверджувати, що у науково-методичних дослідженнях:

1) доведено необхідність і можливість засвоєння учнями понять «мо-

дель», «моделювання», «математичне моделювання»;

2) виділено основні етапи побудови математичної моделі, їх операційний склад;

3) описано функції моделювання у НВП;

4) визначено зміст навчання школярів методу математичного моделювання: вивчення нових понять, доведення теорем, розв’язування прикладних задач;

5) розроблено методичні системи навчання учнів методу математичного моделювання засобами курсів алгебри (7 – 9 класи), алгебри і початків аналізу (10 – 11 класи), стереометрії (10 – 11 класи);

6) частково розкрито питання пропедевтичного навчання методу математичного моделювання учнів 1 – 6 класів;

7) запропоновано шляхи використання інформаційно-комунікаційних технологій у процесі навчання учнів математичному моделюванню.

Разом з тим невисвітленими залишаються питання:

1) розробки методики формування умінь математичного моделювання в учнів7 – 9 класів у процесі навчання геометрії;

2) детальнішої розробки системи пропедевтичного навчання методу математичного моделювання в 5 – 6 класах під час навчання математики.

Ці невирішені проблеми і стали завданнями нашого дисертаційного дослідження.

Логіка дослідження спонукала нас до з’ясування питання: яке місце у процесі навчання математики займало математичне моделювання в українських і російських школах за останні 50 років. Відповідь на нього подано нами в наступному пункті.

1.1.3. Стан проблеми дослідження у шкільній практиці

Реформування шкільної освіти, яке почалося в 60-х роках XX ст., мало на меті «підвищити якість навчання і виховання підростаючого покоління, забезпечити більш високий науковий рівень викладання кожного предмету, міцне оволодіння основами наук» [105, С. 3]. Задля реалізації цього завдання наприкінці 1958 року за ініціативи М.С. Хрущова Верховною Радою СРСР було прийнято «Закон про зміцнення зв’язку школи з життям і про дальший розвиток системи народної освіти в СРСР», а також відкриті середні загальноосвітні трудові політехнічні школи з виробничим навчанням. Нові програми передбачали у кожному класі виконувати вимірювальні роботи на місцевості (на це виділялося по 4 – 6 годин на рік), здійснювати екскурсії на виробництво тощо. Шкільні підручники та методичні посібники наповнювалися різними задачами з практичним змістом, як правило, технічного спрямування.

Що стосується методу математичного моделювання, то він досить опосередковано втілився у нормативних документах того часу. Зокрема, у пояснювальній записці до програми з математики для середньої загальноосвітньої школи серед цілей навчання математики зазначалося: «Практична значимість шкільного курсу математики обумовлена тим, що об’єктом її вивчення є просторові форми і кількісні відношення реального світу…Математика важлива для повсякденної діяльності людини… З її допомогою моделюються, вивчаються і прогнозуються багато явищ і процесів, що відбуваються в природі та суспільстві. Тому математична підготовка випускників середньої школи є необхідною умовою прискорення науково-технічного прогресу…»[105, С. 5]. Окремий розділ програми був присвячений питанню міжпредметних зв’язків, підкреслювалася значимість засвоєння апарату рівнянь, нерівностей та їх систем як основного засобу математичного моделювання прикладних задач, але навчального часу на ознайомлення з математичним моделюванням як засобом наукового пізнання не передбачалося.

Аналіз підручників [1 – 3, 6, 33, 34, 89] дозволив зробити висновки, що вимоги програми в достатній мірі були реалізовані в задачному матеріалі, в якому переважали текстові задачі на рух, вимірювання величин, виробничого спрямування (див. табл. 1.2).

Таблиця 1.2

Кількість задач прикладного змісту у підручниках для основної школи СРСР

Назва предмету	**Задачі прикладного змісту (%)**	**Задачі прикладного геометричного змісту (%)**
Математика	28 – 35	2,5 – 4
Алгебра	10 – 15	0,5 – 1,5
Геометрія	3 – 10	3 – 10

Після розпаду СРСРу перші роки незалежності України математика в школах викладалася, як і раніше, за тими ж самими програмами і підручниками.

Тільки через 3 – 4 роки почали друкувати перші пробні підручники українських авторів, а нова програма була створена лише у 2001 році. Саме тоді у ШКМбуло введено тему «Елементи прикладної математики», яка пропонувалася учням 9 класу. Мета вивчення математичного моделювання у програмі була сформульована так: «Ввести поняття про математичне моделювання. Розглянути загальну задачу математичного моделювання, проілюструвати прикладами» [144, С. 41 – 42].

Опанувавши тему, учні повинні були«*мати уявлення* про математичне моделювання і його загальну задачу; … *знати* правила подання відповіді до прикладної задачі;… *уміти* складати моделі до прикладних задач та розв'язувати їх» [144, С. 41 – 42]. Однак на вивчення даної теми відводилося лише 10 год, з них на математичне моделювання – не більше 2 год.

У підручнику Г.П. Бевза «Алгебра. 7 – 9 кл.» [7, с. 253 – 256] математичному моделюванню відведено один параграф, в якому вводяться поняття «прикладна задача», «математична модель», «математичне моделювання», перераховуються етапи математичного моделювання, наводяться приклади задач. Зокрема, математична модель означується так: «Моделлю називають спеціально створений об'єкт, який відображає властивості досліджуваного об'єкта (modele – копія, зразок). … Математичні моделі створюються з математичних понять і відношень: геометричних фігур, чисел, виразів тощо» [7, С. 254].

Що стосується задачного матеріалу в підручниках [7, 134, 135, 139], то ситуація практично не змінилася ні в якісному, ні в кількісному плані (див. табл. 1.3).

Таблиця 1.3

Кількість задач прикладного змісту в українських підручниках для основної школи кінця XX – початку XXI ст.

Назва предмету	**Задачі прикладного змісту (%)**	**Задачі прикладного геометричного змісту (%)**
Математика	23 – 33	4,2 – 4,4
Алгебра	12 – 18	0,8 – 1,3
Геометрія	2 – 5	2 – 5

Значно більше уваги навчанню математичного моделювання приділялося у програмі з математики для 12-річної школи [145], якій так і не судилося бути повністю впровадженою у НВП. У ній зазначалося, що однією з цілей навчання математики в основній школі є: «… формування в учнів математичних знань як невід'ємної складової загальної культури людини, необхідної умови її повноцінного життя в суспільстві на основі ознайомлення школярів з ідеями і методами математики як універсальної мови науки і техніки, ефективного засобу моделювання і дослідження процесів і явищ навколишньої дійсності» [145, С. 3].

Навчання математики у старшій школі було спрямоване на досягнення кожним учнем практичної компетентності.

«**Практична компетентність** передбачає, що випускник загальноосвітнього навчального закладу:

- вміє будувати і досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ, задач, пов'язаних із ними, за допомогою математичних об'єктів, відповідних математичних задач…» [145, С. 42]

Тому курс математики для учнів старшої школи був побудований на засадах застосування методу математичного моделювання і передбачав:

«1) створення запасу математичних моделей, які описують реальні явища і процеси, мають загальнокультурну значущість, а також вивчаються у суміжних предметах;

2) формування в учнів знань та вмінь, які необхідні для дослідження цих математичних моделей;

3) навчання учнів побудові та дослідженню найпростіших математичних моделей реальних явищ і процесів» [145, С. 43].

У Державному стандарті базової і повної середньої освіти, затвердженому постановою Кабінету Міністрів України від 14 січня 2004 р., також ішла мова про виключну важливість методу математичного моделювання, зокрема серед завдань реалізації змісту освітньої галузі виділялися:

«…формування уявлення про функцію як математичну модель;

…формування уявлень про математичні поняття і методи як важливі засоби моделювання реальних процесів і явищ» [64, С. 5]

Перераховані цілі та завдання знайшли своє відображення і в підручниках. Поняття «математична модель» вводилося в алгебрі вже у 7 класі. Зокрема, у підручнику Бевза Г.П., Бевз В.Г. [14] зазначалося: «Щоб розв'язати задачу за допомогою рівняння, спочатку слід скласти відповідне до цієї задачі рівняння. Власне кажучи, треба перекласти задачу зі звичайної мови на алгебраїчну, тобто скласти математичну модель даної задачі. … Модель завжди подібна до оригіналу. У ній відображаються ті чи інші важливі властивості досліджуваного об'єкта. …Якщо модель побудовано на основі рівнянь, формул чи інших математичних понять, її називають математичною моделлю»[14, С.212]. Також вказувалися етапи розв'язання прикладних задач методом математичного моделювання:

«1) створення математичної моделі даної задачі;

2) розв'язування відповідної математичної задачі;

3) аналіз відповіді» [14, С.213].

У одному із альтернативних підручників [82] модель означувалася так: «Щоб розв'язати задачу, яка має практичний зміст, можна спочатку створити її математичну модель, тобто записати залежність між відомими і невідомими величинами за допомогою математичних понять, відношень, формул, рівнянь тощо. Тому рівняння складене за умовою задачі, можна вважати математичною моделлю цієї задачі» [82, С. 135]. Жодних інших відомостей про метод математичного моделюванняу цьому підручнику не надається.

Будь-яка система математичної освіти повинна враховувати необхідність оволодіння учнями уміннями, які стосуються всіх трьох етапів процесу математичного моделювання. Але до цього часу рівень математичної освіти школярів підвищується лише за рахунок оволодіння тими елементами математичної культури, які відносяться до другого етапу. Учням пропонуються задачі, сформульовані мовою моделі. Розв'язування їх відбувається також тільки внутрішньо модельними методами і отриманий результат формулюється мовою моделі.

Єдиною ілюстрацією повного застосування методу математичного моделювання є текстові задачі, якими і наповнені сучасні підручники. П.С.Александров стверджував: «составление уравнения данной задачи – это и есть тот основной прием, посредством которого математика применяется в естествознании и технике» [4, С. 30].

Задачі у підручниках [14, 15, 18, 19, 82, 217, 218] змінилися лише змістовно, а їх кількість залишилася тією ж (див. табл. 1.4).

Таблиця 1.4

Кількість задач прикладного змісту в підручниках для 12-річної школи (основна школа)

Назва предмету	**Задачі прикладного змісту (%)**	**Задачі прикладного геометричного змісту (%)**
Математика	23 – 39	1,7 – 3,3
Алгебра	11 – 15	1,3 – 1,6
Геометрія	1,3 – 2,8	1,3 – 2,8

Нині діючий Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти, затверджений постановою Кабінету Міністрів від 23 листопада 2011 року, серед основних завдань освітньої галузі «Математика» виділяє такі:

«…розкриття ролі та можливостей математики у пізнанні та описанні реальних процесів і явищ дійсності, забезпечення усвідомлення математики як універсальної мови природничих наук та органічної складової загальної людської культури;

…забезпечення оволодіння учнями математичною мовою, розуміння ними математичної символіки, математичних формул і моделей як таких, що дають змогу описувати загальні властивості об'єктів, процесів та явищ…» [65,С.20];

«…забезпечення оволодіння учнями…уміннями…моделювати за допомогою рівнянь реальні ситуації, пояснювати здобуті результати;

…формування умінь застосовувати здобуті знання у навчальних і життєвих ситуаціях.» [65, С.21 – 22].

Це дає змогу стверджувати, що прикладній спрямованості ШКМ, зокрема використанню математичного моделювання, приділяється достатня увага на нормативному рівні. Це підтверджує і нова навчальна програма з математикидля учнів 5 — 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів[128], в якій вказується, що: «Необхідною умовою формування компетентностей є діяльнісна спрямованість навчання…Необхідно, де це можливо, не лише показувати виникнення математичного факту із практичної ситуації, а й ілюструвати його застосування на практиці.» [128, С.4]. Однак значна увага математичному моделюванню приділяється лише під час навчання учнів алгебри, геометрія ж залишається поза увагою.

Що стосується задач, то їх кількість у нових підручниках [115, 116, 165, 166] зросла в середньому на 4 %. Змінилися задачі і змістовно. Наприклад, у підручниках [165, 166]цікавими з точки зору формування в учнів знань, умінь та навичок математичного моделювання є задачі:

«Побудуйте орнамент, використовуючи: 1) різні види трикутників; 2) тільки прямокутні трикутники.» [165, С. 91]

«Складіть та розв'яжіть задачу про купівлю канцелярських товарів, потрібних вам для школи.» [165, С. 147]

«Наведіть приклади предметів довкілля, які мають форму: 1) циліндра; 2) конуса; 3) кулі.» [166, С. 135]

Подібні зміни в освітньому просторі ще раз підтверджують актуальність нашого дослідження.

Проблема реалізації методу математичного моделювання у ШКМ детально розкрита нами у публікаціях [178, 181].

Розглянемо ситуацію з математичним моделюванням у країнах близького зарубіжжя, зокрема в Росії.

Програма з математики побудована таким чином, щоб учні мали можливість «…сформировать представления об изучаемых понятиях и методах математики как универсального языка науки и техники, важнейшего средства математического моделирования реальных процессов и явлений» [146, С.4]. Також у вимогах до рівня підготовки випускників по кожній дисципліні (арифметика, алгебра, геометрія, елементи логіки, комбінаторики, статистики і теорії ймовірностей) окремо виділені практичні уміння і навички, якими мають оволодіти учні. Причому основне місце відводиться методу математичного моделювання.

У більшості підручників питання математичного моделювання розглядається вже у 5 класі, зокрема у підручнику Г.В. Дорофеєва, Л.Г. Петерсон [66] в одному з перших параграфів пропонується тема «Математичні моделі», на яку спирається вивчення наступного матеріалу. Автори не дають строгого означення моделі, а вводять це поняття описово: «В совершенно различных, на первый взгляд, задачах можно обнаружить, что их решение практически одинаково. Например, если на столе лежат два яблока, два апельсина и груша, то как найти общее число фруктов? Конечно, 2+2+1=5. Но ведь точно также мы можем определить и число уроков во вторник, зная, что по расписанию будет два урока русского языка, два – математики и физкультура.

В этих двух непохожих ситуациях мы использовали одну и ту же **математическую модель**, складывая не яблоки с апельсинами и не физкультуру с математикой, а натуральные числа.

Для того чтобы построить математическую модель, надо, прежде всего, научиться переводить условие задачи с привычного родного языка на специальный, математический язык… » [66, С. 23]. Далі наводиться перелік завдань, спрямованих на відпрацювання навички перекладу задач прикладного змісту на математичну мову. Найбільш поширене формулювання таких завдань звучить так:

1) перекладіть умову задачі на математичну мову;
2) сформулюйте задачу за даною математичною моделлю;
3) складіть схему, таблицю до задачі тощо.

Причому завдання такого роду зустрічаються по всьому тексту підручника.

Оскільки в основі виконання дії заміни вихідних термінів вибраними математичними еквівалентами лежить, насамперед, життєвий досвід учнів, (який не є достатньо великим), то у системі задач проаналізованих підручників є багато завдань, які містять терміни із різних наукових сфер і не вимагають тривалого і громіздкого пояснення їх суті. Такі завдання розширюють словниковий запас і кругозір дітей, знайомлять з новими цікавими фактами, сприяють свідомому застосуванню отриманих знань у житті, розвивають логічне мислення і практичну кмітливість.

Також автори підручників пропонують два специфічних способи дослідження математичних моделей:

1) метод спроб і помилок;
2) метод перебору.

Кожен із них детально пояснюється на прикладах, зазначаються переваги і недоліки.

Велика увага приділяється формуванню в учнів умінь вибирати точність числових результатів, яка відповідає змісту задачі, і оцінювати можливість отримання результату.

У 6 класі формулюються етапи процесу математичного моделювання, на основі яких виділяються етапи розв’язування задач за допомогою рівнянь.

Таким чином метод математичного моделювання є одним із основних методів навчання учнів математики в російських школах. І не тільки.

Вагомим аргументом на користь цієї тези є особлива увага, що приділяється оволодінню математичними знаннями на рівні застосування їх для вирішення повсякденних проблем в освітньому процесі багатьох країн світу. Про це свідчать і вступні іспити до навчальних закладів різних типів, і національні підсумкові тестування, і міжнародні моніторингові дослідження.

У 2007 році школярі 4-х і 8-х класів України вперше стали учасниками міжнародного дослідження якості природничо-математичної освіти (TIMSS). Метою цього дослідження було з'ясування готовності учнів до розв'язування життєвих проблем, використовуючи природничо-математичні знання. Зокрема, в учнів 4-х класів з математики перевірялися уміння:

- « … використовувати числові вирази для моделювання простих ситуацій за допомогою однієї з чотирьох математичних операцій» [127, с. 27];
- «розв'язувати задачі, в тому числі взяті з реального життя (наприклад, задачі, пов'язані з вимірюванням або грошима)» [127, с. 28];
- «моделювати прості ситуації, використовуючи невідомі величини в числових виразах» [127, с. 29].

До учнів 8-х класів ставилися вимоги:

- «розв'язувати задачі в контексті повсякденного життя, використовуючи алгебраїчні моделі» [127, с. 36];
- «розпізнавати та записувати лінійні рівняння, нерівності, системи рівнянь або функції, які моделюють задані ситуації» [127, с. 37];
- « … розв'язувати задачі, використовуючи геометричні моделі; пояснювати співвідношення, які містять геометричні поняття» [127, с. 38].

Таким чином, визначалася так звана «математична грамотність школярів».

У якості показника, що характеризує успішність виконання тестів всіма учасниками дослідження, використовувався середній міжнародний бал, значення якого дорівнювало 500. Найкращі математичні знання продемонстрували учні з країн Південно-Східної Азії (Республіка Корея, Сінгапур, Гонконг) та Тихоокеанського регіону (Тайвань, Японія). Дещо менші результати у школярів із Російської Федерації, Литви, Венгрії. Українські ж учасники виявилися у нижній частині таблиці з результатами 462 бали (8 клас) і 469 балів (4 клас).

У дослідженні для характеристики математичної підготовки учнів, окрім середнього балу, визначалися і інші показники, які дозволили скласти більш повну і змістовну картину освітньої ситуації. Досить цікавим є розподіл школярів за рівнями математичної підготовки:

- просунутий рівень – 625 балів і більше;
- високий рівень – 550 – 624 бали;
- середній рівень – 475 – 549 балів;
- низький рівень – 400 – 475 бали.

Загальну картину про розподіл учнів 4-х і 8-х класів країн-учасниць дослідження за виділеними рівнями математичної підготовки дозволяють скласти дані, представлені в табл. 1.5.

Таблиця 1.5

Розподіл учасників 4-х і 8-х класів (у %) за рівнями підготовки з математики

Країна	**Клас**	**Просунутий рівень**	**Високий рівень**	**Середній рівень**	**Низький рівень**	**Рівень нижче нижчого**
Сінгапур	4	41	33	18	6	2
	8	40	30	18	9	3
Японія	4	23	38	28	9	2
	8	26	35	26	10	3
Литва	4	10	32	35	17	6
	8	6	24	35	25	10
Російська Федерація	4	16	32	33	14	5
	8	8	25	35	23	9
Україна	4	2	15	33	29	21
	8	3	12	31	30	24

Отже, українські школярі продемонстрували в середньому «низький рівень» знань. Тривожить і мала частка учнів з «просунутим рівнем». Варто звернути увагу і на той факт, що країни колишнього СРСР мають успіхи значно кращі від України, хоча успадкували однакові освітні системи. Цікавим є те, що в Російській Федерації учні 4-х класів показали результати дещо вищі, ніж 8-класники. Тому можна стверджувати, що на стані навчання в російських школах почали успішно відображатися зусилля, здійснені керівництвом держави у напрямку реформування освітньої системи.

Розглянемо причини незадовільних результатів українських школярів.

1. Діюча на момент написання тестів програма з математики для основної школи [145] практично повністю забезпечувала учнів знаннями, необхідними для виконання міжнародних тестів у дослідженні TIMSS, за винятком знань, що стосуються використання методу математичного моделювання.

2. Українські 8-класники показали непогані результати при виконанні традиційних завдань з алгебри і геометрії. З ними справилися 45 – 77,8 % учнів. У той же час невисокими були результати виконання завдань, складених на матеріалі курсу математики 5 – 6 класів. На нашу думку, це пов’язано з тим, що практично відсутня наступність між курсами математики 5 – 6 і 7 – 9 класів. Тому відповідні уміння не лише не розвиваються, а й не актуалізуються. Що стосується учнів початкової школи, то майже 80% виявили здатність використовувати основні математичні знання у нескладних ситуаціях, інтерпретувати дані. Труднощі викликали завдання на застосування набутих теоретичних знань і умінь до реальних ситуацій, характерних для повсякденного життя.

3. Українські 8-класники не вміють продуктивно застосовувати отримані знання під час виконання нестандартних завдань з алгебри, пов’язаних із виявленням закономірностей, розв’язуванням проблем, що виникають в описаній в задачі реальній ситуації. Це пов’язано з тим, що навчання розв’язувати текстові задачі фактично завершується в 5 – 6 класах, а в курсі

алгебри носить епізодичний характер і систематично не повторюється (про це вже згадувалося вище).

4. Стосовно геометрії спостерігаються значні розбіжності у традиціях української і зарубіжної шкіл. Зарубіжна школа робить акцент на розвиток просторових уявлень учнів, вивчення геометричних властивостей оточуючого середовища, українська ж школа – на розвиток логічного мислення, уміння аргументувати свої судження. На нашу думку, варто знайти розумний компроміс між українськими і міжнародними вимогами до геометричної підготовки школярів основної школи.

Отже, сьогодні є актуальним створення нових підручників та навчальних посібників з математики, зокрема з геометрії, для учнів основної школи, які б містили детальні відомості про математичне моделювання як засіб наукового пізнання і урізноманітнену систему практичних та прикладних задач.

1.2. Психолого-педагогічні передумови навчання учнів основної школи навичкам математичного моделювання

Навчання учнів елементів математичного моделювання –складний психолого-педагогічний процес, який вимагає від учителя ґрунтовних комплексних знань з психології, дидактики та методики навчання математики. Складність обумовлена ще й тим, що мова йде про підлітковий вік, який має специфічні особливості. Зупинимось на цьому детальніше.

Підлітковий вік – це нестабільний, критичний, особливий етап життя дитини. Сьогодні існує кілька підходів до визначення його меж. Зокрема, у Дж.Біррена цей вік обмежується 12 – 17 роками, у Д.Б.Брамлія – 11 – 15 роками, Г.Грімм вважає, що у дівчаток це вік від 12 до 15 років, а у хлопчиків – від 13 до 16. На нашу думку, найбільш вдалою є періодизація Д.Б.Ельконіна [209], яка ґрунтується на зміні та розвитку провідних видів діяльності людини і встановлює межі підліткового віку між 10 – 11 і 15 – 16 роками.

Пубертатний (від лат. pubertas – статева зрілість – пов’язаний із статевим дозріванням) період включає і біологічний аспект. У цей час в організмі дитини відбуваються кардинальні зміни. Розгортається процес статевого дозрівання, з яким пов'язане виникнення у підлітка фізичного відчуття власної дорослості. Відбувається втрата дитячого статусу, але водночас зберігаються нереалістичні уявлення про власні привілеї і статус дорослих. Цьому сприяють і суб'єктивні враження: кризові зіткнення із самим собою і сім'єю; мрії та ідеали, втілення яких виявляється все менш реальним; почуття самотності та прагнення якомога скоріше отримати визнання своєї дорослості.

У цей період особистості притаманні особливі форми поведінки, специфічні цінності, установки, соціальні ролі та приналежність до різного роду спільнот. Тепер по-іншому розставляються акценти між сім'єю, школою і однолітками. Саме у підлітків змінюється внутрішня позиція по відношенню до школи і навчання в цілому. Якщо у молодшому віці діти захоплені власне навчальною діяльністю, то у період пубертату їх більше приваблює спілкування з однолітками. Таким чином підліток активно пізнає самого себе, у нього виникають потреби, задовільнити які може лише він (потреби у дружбі, коханні).

Усе це досить часто негативно відображається на навчанні. Раніше виховані і охайні учні дозволяють собі не виконувати домашніх завдань, агресивно реагувати на зауваження вчителя. Будь-які спроби зацікавити їх оригінальністю форми подання нового навчального матеріалу чи іншими способами, як правило, не приносять очікуваного результату. Хоча в той же час підлітки охоче беруть участь у роботі різних гуртків, спортивних секцій, активно оволодівають необхідними для цього теоретичними знаннями.Отже, навчальна діяльність підлітка хоча і зберігає свою актуальність, але поступово відходить на другий план.

Незважаючи на велику кількість досліджень, поки що не існує єдиної думки з приводу визначення провідного виду діяльності підліткового віку.

Д.І.Фельдштейн [173] вважає, що саме участь у соціально визнаній і суспільно корисній діяльності допомагає підлітку пізнати і оцінити себе, отримати впевненість у власній значимості і при цьому адекватно віднестися до оцінок інших.

З огляду на це він виділяє три вікові групи підлітків (див. табл. 1.6), характерними особливостями яких є зміна потреб, мотивів і прагнень, відношення до суспільства в цілому, до соціальних груп, до себе і свого майбутнього.

Таблиця 1.6

Вікова періодизація пубертатного періоду за Д.Фельдштейном

Вік	Потреби	Самооцінка	Інтереси
10 – 11 років	бажання отримати високу оцінку своєї діяльності з боку інших людей, бути їм корисним; гостра потреба в самооцінці	позитивна самооцінка з появою негативних висловлювань про себе	різноманіття інтересів, прагнення все спробувати, у всьому прийняти участь
12 – 13 років	актуалізація потреби в самоповазі, загальному позитивному ставленні до себе як до особистості; потреба у визнанні власних прав, у включенні в дорослий світ на умовах виконання визначеної і значимої ролі	ситуативно негативна самооцінка, яка залежить від оцінки однолітків	стабілізація інтересів

14 – 15 років	розвиток готовності до функціонування в дорослому світі через прагнення використати всі свої можливості і проявити себе	оперативна самооцінка на основі зіставлення власних особистісних якостей і форм поведінки з визначеними підлітком ідеальними нормами	конкретизація інтересів

Таким чином, дослідження Д.І.Фельдштейна доводять, що особистість підлітка найкраще розвивається у процесі визнаної і схваленої суспільством праці.

На думку Д.Б. Ельконіна провідною діяльністю підлітка є інтимно-особистісне спілкування з однолітками, у процесі якого відбувається виявлення найрізноманітніших сторін людських відносин, реалізується прагнення до глибокого взаєморозуміння і, як наслідок, здійснюється практичне засвоєння моральних норм і цінностей. Однак залежно від віку дитини мотиви такого спілкування різні. У 10 – 11 років переважає бажання перебувати у середовищі однолітків, виконувати щось разом; у 12 – 13 років – мотив зайняти певне місце у колективі однолітків; у 14 – 15 років – прагнення до автономії, визнання цінності власної особистості.

У нашому дослідженні микористувалися класифікацією Д.Б.Ельконіна.

Розглянемо детальніше психолого-педагогічні особливості дітей кожної вікової групи.

1.2.1. Молодший підлітковий вік та його особливості

У психології існує кілька позицій щодо періоду віку 10 – 11 років. Одні дослідники вважають його початком стабільного підліткового періоду (Л.С. Виготський), інші –кінцевою стадією молодшого шкільного віку (В.В. Давидов), у деяких джерелах це частина критичного пубертату(Л.І. Божович). У періодизації Д.Б.Ельконіна даний період розглядається як кризовий між стабільними молодшим шкільним і підлітковим віком. Основною особливістю є глибока мотиваційна криза, пов'язана із визначенням соціального статусу дитини і обумовлена тим, що навчання уже стало одним із життєвих обов'язків, а змістовні мотиви здобування знань ще відсутні, не сформовані.Саме тому може спостерігатися негативне ставлення до школи, небажання її відвідувати, конфлікти з учителями.

Молодший підлітковий вік – це зламний період у житті кожної дитини, який знаменується насамперед переходом із початкової в основну школу. При цьому змінюється не лише структура навчання, а й тип спілкування з учителями. Замість одного вчителя початкової школи, який сам будував різносторонні стосунки з кожною дитиною і її батьками, з'являється багато вчителів-предметників, спілкування з якими обмежується в основному питаннями успішності і поведінки на уроках.

Ситуація ускладнюється ще й тим, що учитель початкової школи, випустивши своїх дітей в основну школу, чітко бачить, як виросла кожна дитина і який потенціал вона має для подальшого росту, тобто оцінює її з позитивної точки зору. Учителі-предметники навпаки, працюючи з новим класом і порівнюючи його з більш старшими, бачать своїх нових учнів досить несамостійними, невмілими і не надто освіченими.

У зв'язку з початком періоду статевого дозрівання зміни відбуваються і в пізнавальній сфері молодшого підлітка: уповільнюється темпйого діяльності,збільшується тривалість виконання тієї чи іншої роботи. Учні частіше відволікаються, неадекватно реагують на критику, поводять себе з викликом, у них відбуваються різкі зміни настрою. Все це і є причиною зауважень та покарань і призводить до зниження успішності, до виникнення конфліктів у стосунках.Одночасно молодший підлітковий вікхарактеризується зростанням пізнавальної активності, розширенням пізнавальних інтересів. Саме в цей період спостерігається так званий «пік допитливості». Тому основними завданнями вчителя на даному етапі є: надання учням можливості реалізувати свої творчі здібності; формування і розвиток пізнавальних процесів; стимулювання та підтримка інтересу до предмета.

Ще однією з основних особливостей є виникнення «почуття дорослості», яке проявляється у:

➢ потребах рівноправності, поваги, довіри і тактовності, визнання людської гідності і права на певну самостійність;

➢ наявності прагнення до самостійності і бажання захистити деякі сфери свого життя від втручання дорослих;

➢ наявності власної лінії поведінки, певних поглядів, цінностей і їх відстоювання навіть всупереч дорослим чи товаришам [199].

Врахування цих потреб сприяє підвищенню авторитету вчителя, оскільки переконує учнів в об’єктивності і справедливості педагога.

Одночасно у 10 – 11-річних дітей ще остаточно не сформоване почуття самостійності і вони комфортніше почувають себе у середовищі однолітків та прагнуть виконувати всі завдання разом. Тому акцент в організації навчально-виховного процесу учнів 5 – 6 класів має стояти саме на колективних формах роботи.

Для молодших підлітків властивим є і схильність до фантазування, бажання експериментувати, некритичне планування власного майбутнього. Тому першопочаткового значення для них набуває спосіб досягнення мети (авторський задум), а не сам результат діяльності.Якщо вчитель контролюватиме лише кінцевий продукт праці школярів і не оцінюватиме дитячу творчість, ініціативу, самостійність, то процес навчання втратить актуальність і привабливість.

Також варто відмітити наступні проблеми учителів при роботі з учнями 5 – 6 класів:

➢ Зміст курсу математики для основної школи передбачає добре розвинене теоретичне, абстрактно-логічне мислення. Однак у 10 – 11-річних дітей таке мислення знаходиться у початковій стадії розвитку. Тому з’являється небезпечна тенденція перевантаження учнів новими поняттями і зв'язками між ними. Таким чином, нові наукові терміни і поняття необхідно вводити поступово, спираючись на власний практичний досвід дитини.

➢ У основній школі існують досить високі вимоги до самостійності, відповідальності, ініціативності учнів, яким 5 – 6-класники ще не зовсім відповідають. Тому дуже важливою є допомога і підтримка вчителя у складних ситуаціях.

➢ Спільнота дорослих очікує від підлітків здатності розуміти людей іншої культури, епохи, світобачення і співіснувати з ними на засадах рівноправ'я і терпимості. Однак в учнів 5 – 6 класів ця риса знаходиться у стадії формування. Тому варто створювати такі навчальні ситуації, в процесі яких підлітки вчаться висловлювати власну точку зору, враховувати і поважати протилежні погляди.

Розглянемо особливості пізнавальної діяльності 10 – 11-річних школярів.

Сприймання. Учні володіють достатнім рівнем розвитку сприймання. Розвивається довільність, осмисленість, вибірковість за змістом, а не зовнішніми яскравими характеристиками. З'являється спостережливість як риса характеру.

Пам'ять.Зростає здатність до запам'ятовування (заучування), відбувається перехід від механічного до смислового запам'ятовування. Стає більш доступним запам'ятовування абстрактного матеріалу.

Увага. Учні володіютьздатністю керувати своєю увагою, концентрувати її на значимій діяльності. Тому на цьому етапі дуже важливо підтримувати інтерес до вивчення предмету.

Уява. Уява перетворюється у самостійну внутрішню діяльність, поєднуючись із мисленням.

Мислення. Переважає наочно-образне мислення, проте поступово більшого значення набуває абстрактно-логічне.

Враховуючи вище названі особливості, доцільною буде така організація НВП, при якій переважали б творчі методи, прийоми і форми діяльності з опорою на стимулювання і підтримку інтересу до предмету.

Зробити це можна застосовуючиелементи гри у навчанні, що надає можливість учневі самовизначитися, розвиває його творчі здібності, спостережливість, увагу, уяву, сприяє емоційному сприйманню змісту навчального матеріалу. Найбільш поширеними є наступні навчальні ігри: урок-казка, урок-мандрівка, урок-турнір тощо.

Як на уроках математики, так і в позакласній діяльності, учитель має робити акцент на таких формах роботи:

- розв'язування і самостійне складання учнями цікавих задач;
- розгадування і складання числобусів, кросвордів, судоку;
- складання тематичних віршів, казок, створення ілюстрацій;
- підготовка стінгазет, журналів тощо.

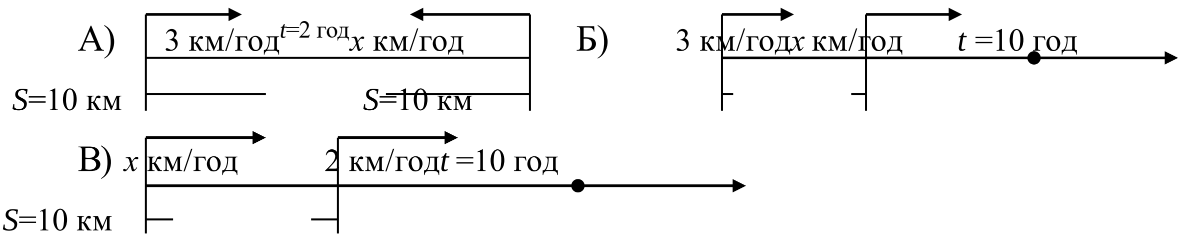
Подібні форми роботи виховують в учнів сумлінне ставлення до праці, наполегливість у досягненні мети, вміння долати труднощі. Творчий, дослідницький характер цієї діяльності сприяє формуванню і розвитку інтелектуальних умінь, є благодатним підґрунтям для реалізації особистісного потенціалу школярів.

Наприклад, під час вивчення теми «Десяткові дроби» у 5-му класі доцільно використати таку добірку задач:

1. Стрічку завдовжки 11,2 м розрізали на дві частини так, що одна з них виявилася у 2,2 раза довшою за другу. Знайдіть довжини частин стрічки.

2. Папуга летів поміж дерев 6 год зі швидкістю 1,5 км/год і над чистим полем 9 год зі швидкістю 2,8 км/год. Яка середня швидкість руху папуги?

3. Складіть задачу за схемою і розв'яжіть її.



Примітка: У завданнях Б) та В) точкою позначене місце зустрічі рухомих об'єктів.

4. Вага кавуна – 7,4 кг, вага груші – 0,75 кг. Знайдіть вагу яблука, якщо

вона становить 43% від середньої ваги кавуна і груші. Відповідь округліть до десятих, дослідіть життєву достовірність отриманих результатів.

Працюючи над такими завданнями, учні вчаться виділяти основні складові задачі, пов’язувати абстрактні числа з явищами оточуючого середовища, надавати їм конкретного змісту,подавати отримані дані різними способами, визначати достовірність отриманих результатів, урізноманітнювати і видозмінювати запропоновані ситуації. Таким чином школярі в неявній формі знайомляться з математичними моделями, процесом математичного моделювання, проходять деякі його етапи.

Водночас цікаві задачі сприяють підтриманню інтересу до математики і відіграють роль мотиву діяльності школярів. Незвичайність сюжету, способу подання задачі знаходять емоційний відгук у дітей і ставлять їх у ситуацію необхідності знайти розв’язки. Систематичне використання задач такого типу сприяє розвитку прийомів розумової діяльності, формуванню математичних уявлень учнів, підготовці їх до творчої діяльності.

Оскільки у школярів 5 – 6 класів переважає наочно-образне мислення, то при поданні нового матеріалу перевагу слід надавати пояснювально-ілюстративному методу, проблемному викладу з опорою на такі засоби навчання, яккомп’ютерні презентації, матеріальні та образні моделі тощо.

1.2.2. Середній підлітковий вік та його особливості

Середній підлітковий вік як етап психологічного розвитку людини характеризується насамперед стабільністю перебігу кризових явищ. Вся діяльність дитини пов’язана з пошуком власного місця в суспільстві. Завищені вимоги, не зовсім адекватні уявлення про власні можливості призводять до виникнення конфліктних ситуацій з батьками, учителями, протестної поведінки. Відбуваються часті демонстративні емоційні сплески та зміни настрою. Спостерігається асинхронність, стрибкоподібність, дисгармонійність розвитку. Можливі прояви як інteріндивідуальної нерівномірності (неспівпадіння часових характеристик розвитку різних сторін психіки у підлітків одного хронологічного віку), так і інтраіндивідуальної (наприклад, інтелектуальна сторона розвитку може досягати високого ступеню, а рівень довільності порівняно низького) [199]. Саме тому потреба самопізнання у підлітків стає провідною на даному етапі розвитку. Увага дитини цілком прикута до власної особистості, предметом осмислення стає своя зовнішність, поведінка, думки, мова, інтелект, здібності, риси характеру і переживання. Водночас глибокий інтерес викликає і особистість однолітка як можливість порівняти себе з іншими.

Провідною діяльністю стає спілкування з ровесниками на основі визначення рольових позицій кожного. Тому при організації НВП12 – 13-річних школярів перевагу варто надавати груповим формам роботи.

У навчальній діяльності середнього підлітка виокремлюється ряд труднощів та протиріч, але наявні і переваги, які полягають у вибірковій готовності, підвищеній сензитивності до тих чи інших сторін навчання. Підліток готовий до всіх видів навчальної діяльності, які доводять його дорослість. Його приваблюють самостійні форми організації занять на уроці, складний навчальний матеріал, можливість самому обирати види пізнавальної діяльності за межами школи. Але одночасно підліток характеризується емоційною нестабільністю і інтерес до виконання тієї чи іншої роботи може швидко згаснути. Як показують психологічні дослідження[47], основними причинами відмежування дітей від школи є:

- Нестійке чи недостатньо сформоване позитивне ставлення до навчальної діяльності.
- При загалом свідомому і відповідальному ставленні до навчання пріоритетнимистають позакласні види діяльності (читання пригодницької літератури, футбол, баскетбол, ролики, лижі, ковзани, комп’ютер тощо), що призводить до нехтування обов’язку щоденно готувати уроки.
- Болісне сприйняття невдач в оволодінні тими чи іншими навчаль-

ними предметами. Тому страх перед невдачами, боязнь поразок досить часто призводить до пошуку учнями поважних причин, щоб не відвідувати школу чи прогуляти урок.

- Неприученість до трудових зусиль, неготовність і неспроможність без допомоги батьків (як це було раніше у початковій школі і 5 – 6 класах) виконувати домашні завдання.
- Несистематичність виконання домашніх завдань, праця ривками, що зумовлює бажання вдаватись до різних легких нечесних способів (шпаргалок, списування у товаришів).
- Нерозуміння життєвої значимості знань чи їх значимості для розвитку особистості.
- Негативні висловлювання учителів, прояви з їх боку нетактовності, несправедливе оцінювання знань учнів, що призводить до неспівпадіння оцінки та самооцінки підлітка і викликає порушення його емоційного благополуччя.

Педагогу варто враховувати у своїй роботі вищезазначені проблеми з метою уникнення конфліктних ситуацій і створення позитивної атмосфери на уроці.

Розглянемо особливості пізнавальної діяльності 12 – 13-річних школярів.

Сприймання. Сприймання абуває все більш активного характеру і перетворюється у вибіркову, цілеспрямовану, аналітично-синтетичну діяльність.

Мислення.Поряд із наочно-образним мисленням інтенсивно розвивається і абстрактно-логічне. Формуються послідовність, гнучкість, точність, самостійність, критичність мислення.

Пам'ять. Процеси запам'ятовування і відтворення набувають смислового характеру (використовується прийом складання плану, зростає роль змістовних зв'язків), збільшується обсяг пам'яті.

Увага. Спостерігається зростання обсягу уваги, її контрольованості, концентрації та стійкості.

Уява. Стає повністю керованою функцією.

Враховуючи вище названі особливості, доцільною буде така організація НВП, при якій переважали б групові методи, прийоми і форми діяльності з опорою на практичне застосування знань.

Робота у великих чи малих групах сприяє формуванню в учнів адекватної самооцінки, уміння правильно розподіляти рольові позиції, цінувати зусилля кожного учасника, формулювати і захищати власну точку зору, аргументувати свої судження.Тому, на нашу думку, слід:

1) на уроках засвоєння нових знань застосовувати частково-пошуковий метод, метод проблемного навчання, «мозковий штурм»;

2) на уроках засвоєння і застосування навичок та умінь, узагальнення і систематизації знань, умінь та навичок використовувати методи «карусель», «акваріум», «навчаючи – вчуся», «ажурна пилка» тощо.

Доцільно проводити і нестандартні уроки, зокрема:

- урок-диспут, що передбачає створення ситуацій, в яких відбувається обговорення двох протилежних думок щодо питання, яке вивчається;
- урок-брейн-ринг, що надає можливість учням здійснити взаємоперевірку здобутих знань;
- урок-практикум, що дозволяє застосувати здобуті теоретичні знання для вирішення повсякденних проблем тощо.

Так як учні 7 – 8 класів згідно програми з математики знайомі з методом математичного моделювання, неявно використовували його при розв'язуванні задач у 5 – 6 класах, на уроках геометрії акцент слід робити на задачах практичного та прикладного характеру, оскільки саме вони є яскравою ілюстрацією застосування отриманих теоретичних знань у повсякденному житті.

Наприклад:

1. Скільки рулонів шпалер стандартного розміру (10м×0,80м) потрібно купити, щоб обклеїти кімнату (3,50м×4м×2,60м), в якій є вікно (1,20м×1,50м) та двері (0,80м×2м).

2. Сейсмічною станцією зафіксовані сильні підземні поштовхи на відс-

тані 75 км від станції під кутом 30^{o} до поверхні землі. Відстань між станцією і вулканом – 48 км. Визначити глибину епіцентру землетрусу.

3. Для виготовлення водопійного жолобу на тваринницькій фермі взяли три однакові дошки довжиною 4 м і шириною0,25 м кожна. Під яким кутом варто збивати дошки, щоб отримати жолоб найбільшого об’єму?

Кращому засвоєнню навчального матеріалу сприяє і активне використання знако-символьних та мисленнєвих моделей. Це стимулює формуванняв учнів абстрактно-логічного мислення, що в свою чергу є підґрунтям для побудови моделі власного життя.

1.2.3. Старший підлітковий вік та його особливості

Старший підлітковий вік – це перехідний етап до юності, що визначається зростанням самостійності, більш виваженим свідомим ставленням до власного майбутнього. Починає формуватися внутрішня система цінностей, визначаються життєві пріоритети, емоційні сплески стають менш демонстративними.

Саме у 14 – 15-річному віці дитина вперше потрапляє у ситуацію вибору – закінчення чи продовження освіти в одній із її конкретних форм. Тому бажання навчатися у цей період зростає, одночасно підвищується і вибірковість пізнавальних інтересів, яка так чи інакше пов’язана з майбутніми життєвими планами, професійними уподобаннями. Посилюється потреба у самостійному здобуванні знань, зростає інтерес до різних джерел інформації (книги, телебачення, інтернет тощо), починають хвилювати теоретичні проблеми, можливі точки зору на шляхи їх вирішення, нестандартні ситуації.

Має свою специфіку і пізнавальна діяльність старших підлітків.

Сприймання. Сприймання стає вибірковою, цілеспрямованою, аналітично-синтетичною діяльністю.

Мислення. Переважає абстрактно-логічне, розвивається формально-логічне та формально-операційне мислення. Властивим стає встановлення причинно-наслідкових зв'язків, систематичність, стійкість, критичність мислення.

Пам'ять. Значно змінюються способи запам'ятовування різноманітних відомостей, спостерігається широке застосування раціональних прийомів довільного запам'ятовування матеріалу.

Увага та уява. Увага та уява стають повністю контрольованими довільними процесами.

Враховуючи вище названі вікові особливості та специфіку пізнавальної діяльності, доцільною буде така організація НВП, при якій переважали б методи, прийоми і форми діяльності з опорою на наукові засади шкільних предметів.

Тому на даному етапі навчання у процесі пояснення нового матеріалу доцільно використовувати дослідницький метод, який дозволяє учням проявити самостійність у вирішенні тієї чи іншої проблеми, здійснити самоконтроль. Ефективними є проведення уроків-лекцій, уроків-семінарів, уроків-конференцій тощо. Такі форми організації навчальної діяльності сприяють розвитку смислового запам'ятовування, стимулюють мисленнєву роботу, роблять сприймання більш активним і емоційним. Краще засвоєння матеріалу забезпечує і використання знако-символьних та, як правило,мисленнєвих моделей.

Оскільки учні 9 класу схильні до аналітичної діяльності, варто залучати їх до написання науково-дослідницьких робіт. Тематика цих робіт може бути найрізноманітнішою, зокрема:

1) «Геометричні фігури в дизайні тротуарної плитки»;
2) «Геометрія дощу і снігу»;
3) «Геометрія у житті села»;
4) «Моделювання навколишнього середовища» тощо.

Психолого-педагогічні особливості навчання підлітків методу математичного моделювання окреслені намив публікації[190].

Отже, для успішного формування в учнів 5 – 9 класівзнань, умінь та навичок математичного моделювання необхідно перш за все:

- враховувати психологічні особливості кожної вікової групи підлітків;
- застосовувати найефективніші для даного віку методи, прийоми і форми діяльності із врахуванням провідних мотивів.

Більш детально про це йдеться у другому розділі під час опису методики навчання учнів математичному моделюванню на уроках геометрії в основній школі.

1.3. Концептуальні засади методики формування в учнів основної школи умінь математичного моделювання

Проблема застосування математичного моделювання задекларована у «Державному стандарті базової шкільної середньої освіти: освітня галузь «Математика»» [65], у програмах з математики для середньої школи[128, 145] та інших нормативних документах. Причому у всіх них стверджується, що використання на уроках математики методу моделювання як потужного універсального інструменту пізнавальної діяльності сприяє формуванню в учнів основних прийомів розумової діяльності та комунікативних навичок; умінь моделювати ситуацію чи процес, аналізувати і порівнювати дані, інтерпретувати результати, оцінювати їх з різною точністю; викликає стійкий інтерес до математики; допомагає у здійсненні пропедевтичної профорієнтаційної роботи.

Однак навчальний процес має не лише декларувати, а й забезпечувати школярам можливість формування цих умінь. Тому, на нашу думку, математичне моделювання має стати самостійною змістовою лінією ШКМ, але не виокремленою(оскільки зосередження математичного моделювання як окремої теми значно обмежує його навчальний потенціал), а супроводжувати вивчення усіх інших тем, зокрема бути задіяним при формуванні понять, доведенні теорем, розв’язуванні задач.

У своєму дослідженні ми спрямували зусилля на створення науково обґрунтованої методики формування в учнів основної школи знань, умінь та навичок математичного моделювання. Розглянемо її основні положення:

1. Визначаючи цільовий компонент методикиформування в учнівнавичок і вмінь математичного моделювання, слід враховувати психолого-педагогічні особливості школярів кожної вікової групи, зміст математичної освіти, а також забезпечувати наступність у навчанні.

2. Змістова складова методики формування в учнів навичок і вмінь математичного моделювання передбачає його вивчення як наскрізної змістової лінії ШКМ, що завершується окремою темою, де учні отримують узагальнені знання про математичне моделювання.

3. Процес формування навичок і вмінь математичного моделюваннямає складатися з таких етапів: пропедевтичний (5 – 6 класи), початковий (7 – 8 класи), основний (9 клас) та дослідницький.

4. Формування навичок і вмінь математичного моделювання, висока якість знань та творчий розвиток школярів має забезпечуватисячерез доцільне використання організаційно-методичного інструментарію (методів, форм і засобів) в процесі навчання математикив 5 – 6 класах та геометрії в 7 – 9 класах. Зокрема:

- Ефективність формування навичок і вмінь математичного моделювання має досягатися за рахунок раціонального поєднання традиційних та інноваційних методів навчання. Особливу роль при цьому необхідно відвести інтерактивним методам та методу проектів.

- Вибір організаційних форм навчання учнів математичного моделювання залежить від вікових особливостей та змісту математичної світи.

- Засоби навчання школярів математичного моделювання визначаються, виходячи з цілей цього навчання. Значну увагу слід приділяти використанню наочностей та електронних засобів.

5. Контроль результатів навчанняматематичного моделювання в учнів має здійснюватися на основі комплексного підходу, який полягає у виконанні школярами різних видів завдань: доведення теорем, розв’язування приклад-

них задач, виготовлення засобів навчання, виконання вимірювальних робіт на місцевості, написання дослідницьких та розрахунково-графічних робіт, створення проектів.

6. Вивчення і використання елементів математичного моделювання на уроках математики в 5 – 6 класах та геометріїв 7 – 9 класах створює сприятливі умови для:

- свідомого оволодінню учнями методом математичного моделювання як універсальним методом навчального пізнання навколишнього середовища;
- підвищення рівня розвитку творчих здібностей школярів;
- активізації пізнавального інтересу до вивчення предмету та ефективності навчання.

Окреслимо розроблені нами ***цілі*** навчання математичному моделюванню учнів кожної вікової групи.

Для учнів 5 – 6 класів:

1. **Формувати**:
   - уявлення про математичну модель та її види;
   - уміння будувати математичну модель до задачі або складати задачу за даною математичною моделлю;
   - уміння інтерпретувати отримані у процесі розв’язання задачі дані.

2. **Розвивати** мислення, уяву, увагу, пам’ять, креативність учнів, а також загальнологічні прийоми розумової діяльності.

3. **Виховувати** пізнавальний інтерес до математики, моральність, культуру, уміння гармонізувати своє «хочу», «можу» і «повинен».

Для учнів 7 – 8 класів:

1. Формувати:
   - поняття про математичну модель, її види, етапи математичного моделювання;
   - уміння будувати або добирати доцільні математичні моделі до задачі;
   - уміння інтерпретувати отримані у процесі розв’язання задачі дані.

2. **Розвивати** абстрактно-логічне мислення, уяву, увагу, пам’ять учнів, а також загальнологічні прийоми розумової діяльності.

3. **Підтримувати** пізнавальний інтерес до математики; виховувати моральність, культуру, адекватну самооцінку, уміння формулювати і захищати власну точку зору, аргументувати свої судження.

Для учнів 9 класу:

1. **Узагальнювати** знання про математичну модель, її види, етапи математичного моделювання; **удосконалювати** уміння розв’язувати задачі методом математичного моделювання; **формувати** уміння використовувати інформаційно-комунікаційні технології при створенні та дослідженні математичної моделі.

2. **Розвивати** формально-логічне та формально-операційне мислення, пам’ять учнів, удосконалювати володіння загальнологічними прийомами розумової діяльності.

3. **Виховувати** інтерес до теоретичних проблем математики, моральність, культуру, самостійність у здобутті нових знань, уміння розглядати ситуацію під різними кутами зору, обирати найоптимальніший вихід.

Відповідно до мети ставляться такі ***завдання***:

а) **навчальні**:

1) інтелектуального характеру:

1.1) стимулювання інтелектуальної активності;

1.2) формування наукового світорозуміння;

2) практичного характеру:

2.1) підвищення життєвої компетентності учнів;

2.2) формування навичок пошукової діяльності;

б) **розвивальні**:

1) формування і розвиток пізнавальних процесів (пам’яті, уяви, уваги, мислення), загальнологічних прийомів розумової діяльності та комунікативних навичок;

в) **виховні**:

1) створення широкого поля для встановлення міжпредметних зв'язків;

2) стимулювання та підтримка інтересу до предмета;

3) здійснення пропедевтичної профорієнтаційної роботи.

Розглянемо концептуальну модель формування в учнів основної школи навичок і умінь математичного моделювання, запропоновану В.О.Швецем (див. табл. 1.7) [201]. З таблиці зрозуміло, що автор розглядає математичне моделювання як наскрізну змістову лінію ШКМ, вивчення якої завершується окремою темою, де учні мають можливість отримати узагальненні знання про математичне моделювання.

Таблиця 1.7

Концептуальна модель формування в учнів знань, умінь та навичок математичного моделювання

Навчальний предмет «Математика» 5 – 6 кл.	**Навчальний предмет «Геометрія» 7 – 9 кл.**	**Навчальний предмет «Геометрія» 10 – 12 кл.**	**Навчальна тема «Математичне моделювання» 12 кл.**
Чисельне моделювання: числові і буквенні вирази, діаграми і графіки як математичні моделі	*Геометричне моделювання:* планіметричні фігури як моделі реальних об'єктів	*Геометричне моделювання:* стереометричні фігури як моделі реальних об'єктів	
	Навчальний предмет «Алгебра» 7 – 9 кл.	**Навчальний предмет «Алгебра» 10 – 12 кл.**	
	Аналітичне моделювання: вирази, рівняння, нерівності та їх системи, функції та їх	*Аналітичне моделювання:* рівняння, нерівності та їх системи, функції та їх графіки, похідна та	**(Зміст)** Математична модель, види математичного моделювання,

	графіки як математичні моделі	інтеграл, диференціальні рівняння як математичні моделі *Стохастичне моделювання:* випадкова подія, ймовірність, гістограма, полігон,	етапи побудови і дослідження моделі. Математичні моделі в ШКМ

Скориставшись цією моделлю, ми розширили її стосовно навчання учнів математичного моделювання на уроках математики у 5 – 6 класах і геометрії у7 – 9 класах (див. табл. 1.8) та подали в публікаціях[186, 188].

Таблиця 1.8

Структурна модель навчання учнів основної школи математичного моделювання на уроках математики та геометрії

Клас	**Зміст навчального матеріалу**	**Види математичних моделей**	**Вимоги до рівня підготовки учнів**
5	***Тема 1.*** Натуральні числа. Геометричні фігури і величини ***Тема 2.*** Дробові числа	***Знако-символьні:*** числові і буквенні вирази; формули; лінійні рівняння. ***Образні:*** шкала; рисунки прямокутника, квадрата, трикутника, прямокутного паралелепіпеда, куба. ***Статичні:*** наочності геометричних фігур.	***Має уявлення*** про числові і буквенні вирази, формули і лінійні рівняння як математичні моделі. ***Будує*** знако-символьні моделі для розв'язування прикладних задач. ***Зображує*** вивчені геометричні фігури.
6	***Тема 1.*** Подільність чисел ***Тема 2.*** Звичайні дроби ***Тема 3.*** Відношення і пропорції ***Тема 4.*** Раціональні числа та дії над ними	***Знако-символьні:*** числові і буквенні вирази; лінійні рівняння; відношення і пропорції; формули. ***Образні:*** рисунки кола, круга; стовпчасті та кругові діаграми; таблиці; графіки залежностей між величинами. ***Статичні:*** наочності геометричних фігур.	***Має уявлення*** про числові і буквенні вирази, лінійні рівняння і пропорції як математичні моделі. ***Будує*** знако-символьні та образні моделі для розв'язування прикладних задач. ***Зображує*** вивчені геометричні фігури.

7	***Тема 1.*** Найпростіші геометричні фігури та їх властивості ***Тема 2.*** Взаємне розташування прямих на площині ***Тема 3.*** Трикутники ***Тема 4.*** Коло і круг. Геометричні побудови	***Знако-символьні:*** числові і буквенні вирази; рівняння, формули. ***Образні:*** рисунки трикутника, кола, круга та їх елементів. ***Статичні:***наочності геометричних фігур.	***Має уявлення*** про планіметричні фігури як математичні моделі. ***Будує*** знако-символьні. образні моделі для розв'язування прикладних задач. ***Зображує*** вивчені геометричні фігури та їх комбінації.

Продовження таблиці 1.8

8	***Тема 1.*** Чотирикутники ***Тема 2.*** Подібність трикутників ***Тема 3.*** Многокутники. Площі многокутників ***Тема 4.*** Розв'язування прямокутних трикутників	***Знако-символьні:*** числові і буквенні вирази; рівняння, формули. ***Образні:*** рисунки чотирикутників, трикутника та їх елементів; вписаних і описаних многокутників ***Статичні:***наочності геометричних фігур.	***Має розширене уявлення*** про планіметричні фігури як математичні моделі. ***Будує*** знако-символьні, образні моделі для розв'язування прикладних задач. ***Зображує*** вивчені геометричні фігури та їх комбінації.
9	***Тема 1.*** Розв'язування трикутників ***Тема 2.*** Правильні многокутники ***Тема 3.*** Декартові координати на площині ***Тема 4.*** Геометричні перетворення ***Тема 5.*** Вектори на площині ***Тема 6.*** Початкові відомості з стереометрії	***Знако-символьні:*** числові і буквенні вирази; рівняння, формули. ***Образні:*** рисунки чотирикутників, трикутника, правильних многокутників та їх елементів; призми, піраміди, циліндра, конуса, кулі. ***Статичні:***наочності геометричних фігур.	***Має розширене уявлення*** про планіметричні фігури як математичні моделі. ***Має уявлення*** про стереометричні фігури як математичні моделі. ***Будує*** знако-символьні, образні моделі для розв'язування прикладних задач. ***Зображує*** вивчені геометричні фігури та їх комбінації.

Отримані у процесі вивчення математики у 5 – 6 класах і геометрії у 7 – 9 класах знання про математичне моделювання потребують, на нашу думку, узагальнення і систематизації. У своєму дослідженні ми пропонуємо здійснити це наприкінці 9 класу на уроках геометріїпід час повторення та систематизації навчального матеріалу. Чинною програмою [128] на це виділяється 8 год.

Орієнтовну модель вивчення теми «Математичне моделювання» ми подали у табличній формі, що містить дві частини: зміст навчального матеріалу і вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів (див. табл. 1.9). Вимоги до підготовки учнів орієнтують на результати навчання, які є об'єктом контролю й оцінювання.

Таблиця 1.9

Структурна модель вивчення теми «Математичне моделювання» на уроках геометрії у 9 класі

Зміст навчального матеріалу	Вимоги до рівня підготовки учнів
Математична модель, її види. Математичне моделювання.Етапи математичного моделювання. Математичні моделі в курсі математики основної школи	***Має уявлення*** про алгебраїчні вирази, рівняння, нерівності та їх системи, функції та їх графіки, планіметричні фігури як математичні моделі. ***Будує*** знако-символьні, образні моделі для розв'язування прикладних задач. ***Розв'язує***прикладні задачі методом математичного моделювання.

Стосовно методів і прийомів навчання, які сприяють формуванню умінь і навичок математичного моделювання, а також доцільних організаційних форм та необхідних дидактичних засобів детально мова йтиме у наступному розділі.

Таким чиномзапропонова вище методика формування в учнівнавичок і умінь математичного моделювання на уроках математики (5 – 6 класи) і геометрії (7 – 9 класи) органічно включається у навчальний процес тавраховує психолого-педагогічні особливості підлітків.

Актуальнимзалишається вирішення таких проблем, як:

- створення ефективних навчальних засобів з математики (підручників, посібників, комп’ютерних презентацій тощо) для учнів основної школи, які б містили більш детальні відомості про математичне моделювання і значну частку прикладних задач різного змістового наповнення;
- напрацювання відповідних методичних рекомендацій вчителям математики.

Шляхи розв’язання вище зазначених проблем висвітленів наступному розділі дисертації.

Висновки до розділу I

1. На сучасному етапі розвитку суспільства завдання виховання практично компетентної особистості є однієюіз актуальних проблем освітнього процесу. У вирішенні цього завдання під час навчання математики, зокрема геометрії в основній школі, дієвим засобом може бути метод математичного моделювання.

2. Аналіз науково-методичної літератури та особливостей НВП в школі засвідчив, що невисвітленими залишаються питаннярозробки методики формування умінь математичного моделювання в учнів 7 – 9 класів у процесі навчання геометрії та детальнішої розробки системи пропедевтичного навчання методу математичного моделювання у 5 – 6 класах.

3. Оволодіння методом математичного моделювання передбачає формування в учнів знань, умінь та навичок на основі спрощеної евристичної схеми діяльності математичного моделювання.

4. Дослідження психолого-педагогічних передумов навчання учнів навичкам математичного моделювання показало, що:

➢ для молодших підлітків доцільною буде така організація НВП, при якій переважають творчі методи, прийоми і форми діяльності з опорою на стимулювання і підтримку інтересу до предмету;

➢ для середнього підліткового віку найбільш вдалою буде така організація НВП, при якій застосовуються групові методи, прийоми і форми діяльності з опорою на практичне застосування знань;

➢ для старших підлітків доцільною буде така організація НВП, при якій перевага надається методам, прийомам і формам діяльності з опорою на наукові засади шкільних предметів.

5. Основні положенняметодики формування в учнів основної школи знань, умінь та навичок математичного моделювання такі:

1. Визначаючи цільовий компонент методики формування в учнів навичок і вмінь математичного моделювання, слід враховувати психолого-педагогічні особливості школярів кожної вікової групи, зміст математичної освіти, а також забезпечувати наступність у навчанні.

2. Змістова складова методики формування в учнів навичок і вмінь математичного моделювання передбачає його вивчення як наскрізної змістової лінії ШКМ, що завершується окремою темою, де учні отримують узагальнені знання про математичне моделювання.

3. Процес формування навичок і вмінь математичного моделювання має складатися з таких етапів: пропедевтичний (5 – 6 класи), початковий (7 – 8 класи), основний (9 клас) та дослідницький.

4. Формування навичок і вмінь математичного моделювання, висока якість знань та творчий розвиток школярів має забезпечуватисячерез доцільне використання організаційно-методичного інструментарію (методів, форм і засобів) в процесі навчання математики в 5 – 6 класах та геометрії в 7 – 9 класах. Зокрема:

➢ Ефективність формування навичок і вмінь математичного моделювання має досягатися за рахунок раціонального поєднання традиційних та інноваційних методів навчання. Особливу роль при цьому необхідно відвести інтерактивним методам та методу проектів.

➢ Вибір організаційних форм навчання учнів математичного моделювання залежить від вікових особливостей та змісту математичної світи.

➢ Засоби навчання школярів математичного моделювання визначаються, виходячи з цілей цього навчання. Значну увагу слід приділяти використанню наочностей та електронних засобів.

5. Контроль результатів навчанняматематичного моделювання в учнів має здійснюватися на основі комплексного підходу, який полягає у виконанні школярами різних видів завдань: доведення теорем, розв’язування прикладних задач, виготовлення засобів навчання, виконання вимірювальних робіт на місцевості, написання дослідницьких та розрахунково-графічних робіт, створення проектів.

6. Вивчення і використання елементів математичного моделювання на уроках математики в 5 – 6 класах та геометріїв 7 – 9 класах створює сприятливі умови для:

➢ свідомого оволодінню учнями методом математичного моделювання як універсальним методом навчального пізнання навколишнього середовища;

➢ підвищення рівня розвитку творчих здібностей школярів;

➢ активізації пізнавального інтересу до вивчення предмету та ефективності навчання.

Основні результати першого розділу дисертації відображено в роботах [178], [181], [186], [188], [190], [207].

РОЗДІЛ II
МЕТОДИКА ФОРМУВАННЯ В УЧНІВ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ УМІНЬ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ ГЕОМЕТРІЇ

Для набуття учнями відповідного рівня умінь застосовувати методи математичного моделювання його навчання має бути наскрізним. Ми пропонуємо організувати процес формування умінь математичного моделювання в кілька етапів:

1). ***Пропедевтичний етап (5 – 6 класи)***, який передбачає формування уявлень про математичну модель, її види, деякі властивості; уміння будувати математичну модель до задачі або складати задачу за даною математичною моделлю.

2). ***Початковий етап (7 – 8 класи)***, який передбачає формування поняття про математичну модель, її види, етапи математичного моделювання; уміння будувати або добирати доцільні математичні моделі до задачі.

3). ***Основний етап (9 клас)***, який передбачає узагальнення знань про математичну модель, її види, етапи математичного моделювання; формування уміння використовувати інформаційно-комунікаційні технології при створенні та дослідженні математичної моделі.

4). ***Дослідницький етап***, який передбачає глибше вивчення математичного моделювання на гуртках, факультативах; написання наукових робіт в системі діяльності ***Малої академії наук*** (надалі МАН).

Детально вище вказані етапи описано в нашій публікації [191]. Зупинимося ґрунтовніше на кожному з них.

2.1. Пропедевтичний етап вивчення математичного моделювання

Шкільна геометрична освіта передбачає пропедевтику систематичного курсу геометрії в процесі навчання математики у 5 – 6 класах. Саме у цей період в учнів формуються уявлення про основні геометричні фігури та їх властивості, уміння виконувати найпростіші вимірювання і побудови, розв'язувати задачі на обчислення значень геометричних величин (довжин відрізків, градусних мір кутів, площ фігур, об'ємів тіл). Тому понятійний апарат, графічні уміння і навички, сформовані на цьому ступені вивчення курсу, мають стати міцним підґрунтям систематичного вивчення геометрії в наступних класах. Таким чином, геометричний матеріал, призначений для вивчення у 5 – 6 класах, уможливлює з одного боку поглиблення і розширення уявлень учнів про відомі їм геометричні фігури, а з іншого – є основою для систематичного вивчення геометрії в 7 – 9 класах.

Врахування психолого-педагогічних особливостей учнів 5 – 6 класів дозволяє виділити у процесі вивчення геометричного матеріалу ***наступні важливі положення***:

1. Зміст геометричного матеріалу та методи його подання мають опиратися на життєвий досвід і попередні знання школярів, причому основою навчання повинно бути максимальне використання наочності (моделі геометричних об’єктів, комп’ютерні презентації тощо).

2. Знайомство з новими поняттями, властивостями геометричних об’єктів має відбуватися на практичних роботах з елементами конструювання та ***вимірювальних роботах на місцевості*** (надалі ВРнМ).

3. Система вправ має бути спрямована з одного боку на розвиток просторової уяви та абстрактного мислення, а з іншого сприяти формуванню на-

вичок виконання найпростіших арифметичних та логічних операцій.

4. Система вправ має включати значну частку прикладних задач, завдань на розвиток уміння бачити в навколишній дійсності геометричні фігури, здійснювати вимірювання «на око».

5. Зміст геометричного матеріалу має бути логічно структурованим.

6. Значна увага повинна приділятися формуванню усного і писемного мовлення учнів.

Для визначення можливості застосування діючих підручників з математики у процесі навчання учнів елементів математичного моделювання нами було визначено порядок розміщення основних тем із *розділу 1. Натуральні числа, геометричні фігури і величини* та виділено види моделей, з якими знайомляться школярі (див. табл. 2.1 та 2.2).

Таблиця 2.1

Моделі у підручнику Математика. 5 клас. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С.

Тема	Види моделей
Додавання і віднімання натуральних чисел	Числовий вираз.
Числові і буквенні вирази. Формули. Рівняння	Числовий і буквенний вирази, формула, рівняння.
Прямокутник. Трикутник і його види	Прямокутник, квадрат, трикутник.
Множення і ділення натуральних чисел	Числовий вираз, рівняння.
Площа. Площа прямокутника. Прямокутний паралелепіпед і його об'єм. Піраміда	Прямокутник, квадрат, прямокутний паралелепіпед, куб, піраміда, числовий вираз, формула.

Таблиця 2.2

Моделі у підручнику Математика. 5 клас. Тарасенкова Н.А., Богатирьова І.М., Бочко О.П., Коломієць О.М., Сердюк З.О.

Тема	Види моделей
Буквенні вирази. Формули	Буквенний вираз, формула.
Дії першого ступеня з натуральними числами	Числовий вираз.
Многокутник та його периметр.	Многокутник, прямокутник, квад-

Трикутник та його види	рат, трикутник, числовий вираз, формула.
Дії другого ступеня з натуральними числами. Рівняння	Числовий вираз, рівняння.
Площа прямокутника і квадрата. Прямокутний паралелепіпед. Куб. Піраміда. Об'єм прямокутного паралелепіпеда та куба	Прямокутник, квадрат, прямокутний паралелепіпед, куб, піраміда, числовий вираз, формула.

Проведений аналіз альтернативних підручників з математики показав, що порядок висвітлення в них вище зазначених тем такий самий, як в підручниках [115] або [165]. Тому детальніше на цьому зупинятися не будемо.

Основним у проведеному дослідженні вважається підручник [165]. Використовуючи його, можна послідовно ознайомити учнів із різними видами моделей, починаючи від знако-символьних (числовий і буквенний вираз, формула, рівняння) і закінчуючи образними (рисунки прямокутника, квадрата, трикутника, прямокутного паралелепіпеда, куба, піраміди).

Відомості про види моделей, з якими ознайомляться школярі при подальшому вивченні математики у 5 – 6 класах, розміщені нижче у таблицях (див. табл. 2.3 та табл. 2.4). Слід лише зауважити, що у 6 класі з'являється нова модель – діаграма.

Таблиця 2.3

Моделі у підручниках Математика. 5 клас та Математика. 6 клас. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С.

Тема	Вид моделі
5 клас	
Звичайні дроби. Додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками	Числовий і буквенний вирази, рівняння
Десяткові дроби. Додавання, віднімання, множення і ділення десяткових дробів	
Середнє арифметичне. Відсотки. Масштаб	Числовий і буквенний вирази, рівняння, масштаб
6 клас	
Подільність натуральних чисел. Ознаки подільності. НСД, НСК	Числовий і буквенний вирази, рів-
Основна властивість дробу. Скоро-	

чення дробів. Зведення дробів до спільного знаменника. Додавання, віднімання, множення і ділення дробів	няння
Відношення і пропорції. Ймовірність випадкової події	Числовий і буквенний вирази, рівняння, відношення і пропорції
Коло і круг. Діаграми	Коло, круг, круговий сектор, лінійні, стовпчасті та кругові діаграми
Додатні і від'ємні числа. Додавання, віднімання, множення і ділення раціональних чисел	Числовий і буквенний вирази, рівняння, координатна пряма
Перпендикулярні й паралельні прямі. Координатна площина. Графіки	Прямі, графік залежності між величинами

Таблиця 2.4

Моделі у підручниках Математика. 5 клас та Математика. 6 клас. Тарасенкова Н.А., Богатирьова І.М., Бочко О.П., Коломієць О.М., Сердюк З.О.

Тема	**Вид моделі**
5 клас	
Звичайні дроби. Дії першого ступеня зі звичайними дробами з однаковими знаменниками	Числовий і буквенний вирази, рівняння.
Десяткові дроби та дії з ними	
Відсотки. Середнє арифметичне	
6 клас	
Подільність натуральних чисел. Ознаки подільності. НСД, НСК	Числовий і буквенний вирази, рівняння.
Основна властивість дробу. Скорочення дробів. Зведення дробів до спільного знаменника. Додавання, віднімання, множення і ділення дробів	
Відношення і пропорції	Відношення і пропорції.
Коло і круг. Діаграми. Циліндр, конус, куля. Ймовірність випадкової події	Коло, круг, круговий сектор, лінійні, стовпчасті та кругові діаграми, циліндр, конус, куля.
Додатні і від'ємні числа. Додавання, віднімання, множення і ділення раціональних чисел	Числовий і буквенний вирази, рівняння, координатна пряма.
Вирази та їх спрощення. Рівняння. Основні властивості рівнянь. Перпендикулярні й паралельні прямі.	Буквенний вираз, рівняння, пряма, графік залежності між величинами

Координатна площина. Графіки	

Аналіз діючих підручників з математики на наявність і різноманітність текстових задач показав, що у підручнику [115] – 26% текстових задач, у [165] – 24%, у [116] – 23%, у [166] – 25%. Таким чином загальна кількість текстових задач у підручниках майже однакова і розміщені вони досить рівномірно по всьому матеріалу.

У підручниках [115, 116] переважають задачі на рух, спільну роботу та ринкові відносини. Вони характеризуються і значним розмаїттям сюжетів задач, зокрема:

- на основі казок, мультфільмів;
- з використанням географічних, астрономічних, біологічних відомостей;
- на суміші і сплави тощо.

Підручники [165, 166] відзначаються наявністю рубрики «Застосуйте на практиці». Загалом у них переважають задачі на ринкові відносини, рух та виконання ремонтних робіт. Наявні і завдання типу:

- скориставшись малюнком, дайте відповідь на запитання;
- за таблицями або малюнком складіть рівняння
- за допомогою малюнка складіть і розв'яжіть задачу;
- перенесіть таблицю у зошит і заповніть її тощо.

Подібні завдання значно допомагають при ознайомленні учнів з елементами методів математичного моделювання.

Таким чином задачний матеріал вище вказаних підручників дещо подібний і взаємодоповнює один одного.

Оскільки курс математики 5 – 6 класів передбачає інтеграцію геометричного матеріалу з арифметичним та алгебраїчним ми пропонуємо спочатку детально розглянути особливості формування в учнів уявлення про числовий, буквенний вираз та рівняння як математичні моделі. У подальшому вони будуть активно використовуватися у процесі вивчення планіметричнихфігур (відрізок, промінь, пряма, кут, трикутник, прямокутник, квадрат, коло, круг) і стереометричних (прямокутний паралелепіпед, куб, піраміда, циліндр, конус, куля) тіл.

2.1.1.Числовий вираз як модель

Текстовим задачам в курсі математики початкової школи відведено практично половину навчального часу уроку. Це пояснюється, насамперед, їх значною корекційно-виховною, освітньою і розвиваючою роллю. Адже розв’язування текстових задач допомагає розкрити основний зміст арифметичних дій, конкретизувати їх, пов’язати з певною життєвою ситуацією, сприяє засвоєнню математичних понять, відношень і закономірностей, розвитку довільної уваги, спостережливості, креативності та загальнологічних прийомів розумової діяльності. Тому вже на початок 5 класу учні на достатньому рівні володіють навичками розв’язуваннятекстових задач арифметичним способом.

Спроектуємо загальновідомі етапи розв’язуваннятекстовоїзадачіна процес застосування методів математичного моделювання.

Надалі нами розглядаються лише прикладні задачі. ***Під прикладною задачею ми розуміємо задачу, яка виникла за межами математики, але її розв’язанняпотребуєзастосуванняматематичногоапарату.***

Таблиця 2.5

Співвідношення етапів роботи над прикладною задачею і процесом моделювання

Етапи роботи над текстовою задачею	Етапи застосування методівматематичного моделювання
Робота над змістом задачі	Побудова математичної моделі
Пошук шляхів її розв’язання	
Запис розв’язаннязадачі	Розв’язуваннязадачі в межах математичної моделі
Формулювання відповіді	Інтерпретація одержаного розв'язку
Перевірка розв'язкузадачі	

Таким чином можна стверджувати, що на початок 5 класу учні в неявному вигляді володіють елементарними навичками математичного моделювання.

Розглянемо детально кожен етап роботи над прикладною задачею у контексті математичного моделювання.

I етап. Робота над змістом задачі. Варто використовувати таку послідовність роботи над засвоєнням змісту задачі:

1. Аналіз тексту задачі.

1.1. *Семантичний аналіз,* якийнаправлений на забезпечення розуміння змісту задачі і включає:

- Виділення і осмислення конкретних слів, понять, термінів, граматичних конструкцій, кількісних характеристик об'єктів. Залежно від ситуації можна це робити або ж усно, або ж використовуючи комп'ютерніпрезентації.
- Встановлення предметної ситуації, описаної в умові задачі, шляхом спрощеного переказу тексту з виділенням лише суттєвих властивостей.

1.2. *Логічний аналіз* передбачає уміння замінювати терміни поняттями і виводити наслідки із даних, що містяться в умові задачі.

1.3. *Математичний аналіз* включає:

- Аналіз умови, що спрямований на виділення об'єктів (предметів, процесів); величин, які характеризують кожний об'єкт; характеристик величин (числові значення, відомі і невідомі дані, відношення між відомими даними).
- Аналіз вимоги передбачає виділення невідомих кількісних характеристик величин шуканих об'єктів.

2. Запис умови задачі.

Залежно від виду задачі можна застосовувати одну із наступних форм запису:

- *Скорочену*, при якій із тексту задачі виписуються числові дані і ті поняття та вирази, які необхідні для розуміння логічного змісту задачі.Наприклад:

Задача 2.1. Дитячому садку подарували 4 ящики цукерок по 5 кг у кожному і 6 ящиків печива по 3 кг у кожному. На скільки кілограмів більше подаровано було цукерок, ніж печива?

Скорочений запис задачі:

Цукерки: 4 ящики по 5 кг.

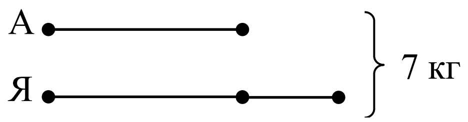
Печиво: 6 ящиків по 3 кг.

На скільки більше цукерок?

➢ *Схематичну*. Наприклад:

Задача 2.2. Для новорічних подарунків придбали 87 кг фруктів, причому яблук було на 17 кг більше, ніж апельсин. Скільки кілограм яблук і апельсин придбали окремо?

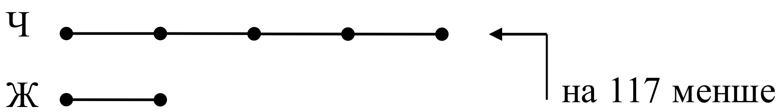
Схематичний запис задачі:



Скільки кілограм яблук і апельсин окремо?

Задача 2.3. На новорічній ялинці червоних кульок у 4 рази більше, ніж жовтих. Скільки кульок кожного кольору було на ялинці, якщо жовтих кульок було на 117 менше?

Схематичний запис задачі:

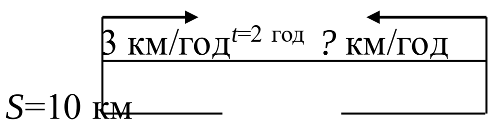


Скільки кульок кожного кольору на ялинці?

➢ *Графічну* (для задач на рух). Наприклад:

Задача 2.4. З двох сіл, відстань між якими 10 км, вирушили назустріч один одному два пішоходи. Зустрілися вони через 2 год. Яка швидкість другого пішохода, якщо перший рухався зі швидкістю 3 км/год?

Графічний запис умови задачі:



➢ *Табличну* (для задач на пропорційну залежність: на співвідношення швидкості, часу, відстані; ціни, кількості, загальної вартості тощо). Наприклад:

Задача 2.5. Велосипедист за 5 год проїхав 60 км. Перші 30 км він їхав зі швидкістю 15 км/год. З якою швидкістю він проїхав решту відстані?

Запис умови задачі у вигляді таблиці:

<table>
<tr><th>Відстань, км</th><th>Швидкість, км/год</th><th>Час, год</th></tr>
<tr><td>30</td><td>15</td><td rowspan="2">5 год</td></tr>
<tr><td>30</td><td>?</td></tr>
</table>

Кожна із запропонованих форм запису умови задачі є для школярів моделлю, яка допомагає виявити ті характеристики і відношення об’єктів, що залишаються непомітними при читанні умови.

У результаті проведеної роботи над змістом учень заглиблюється у предметно-дієву сферу задачі і йому простіше встановити залежності між даними, а також даними і шуканими величинами.

II етап. Пошук шляхів розв’язаннязадачі. На цьому етапі варто разом зі школярами шукати відповідь на запитання, поставлене в задачі, складаючи при цьому план її розв’язання.

III етап. Запис розв’язаннязадачі. На даному етапі здійснюється реалізація складеного плану розв’язання у одній з наступних форм:

- запис арифметичних дій і відповіді до задачі;
- запис розв’язання з поясненням того, що знайдено в результаті кожної дії;
- запис розв’язанняіззапитаннями до кожноїдії;
- запис спочатку лише плану розв’язання, а потімвідповіднихдій.

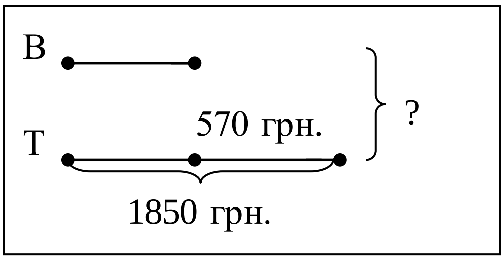
Також на даному етапі слід запропонувати учням спробувати записати розв’язаннязадачі одним виразом, знайомлячиїх таким чином зізнаково-символьноюмоделлю.

IV етап. Формулювання відповіді. Відповідь до задачі має бути короткою і повною.

V етап. Перевірка розв'язкузадачі.Арифметичну правильність відповіді до задачі варто перевіряти з учнями, підставивши отриманий результат у речення, яке містить запитання задачі. Також на даному етапі звертається увага на раціональність використаного способу розв’язання та життєву достовірність отриманого розв’язку.

Продемонструємо описані вище етапи роботи з текстовою задачею на конкретному прикладі.

Задача 2.6.Телевізор коштує 1850 грн., а відеоприставка на 570 грн. дешевша від нього. Скільки коштує телевізор разом з відеоприставкою?



Оскільки всі об'єкти даної задачі є зрозумілими учням, після її прочитання слід скласти разом з ними схематичний запис (*образну модель*).

Розв'язанняцієїзадачі не викликає в учнівтруднощів і результат роботи такий:

1) 1850–570 = 1280 (грн.) – вартість відеоприставки.

2) 1850+1280 = 3130 (грн.) – вартість телевізора і відеоприставки разом.

Далі варто запропонувати дітям спробувати записати розв'язання цієїзадачіодним виразом, поставивши для цього ряд запитань:

*Учитель:*Якою є вимога задачі?

*Очікувана відповідь:*У задачі необхідно знайти вартість відеоприставки разом з телевізором.

Учитель: Як ми можемо знайти вартість відеоприставки?

Очікувана відповідь: Для того, щоб знайти вартість відеоприставки, необхідно знайти різницю чисел 1850 та 570, тобто (1850–570).

Учитель: Тепер ми знаємо, що різниця (1850–570) – вартість відеоприставки. Що ми маємо робити далі?

Очікувана відповідь: Далі нам треба знайти вартість телевізора і відеоприставки разом.

Учитель: Як ми можемо це зробити?

Очікувана відповідь: Треба знайти суму вартостей телевізора і відеоприставки, тобто суму 1850+(1850–570).

*Учитель:*Отриманий нами числовий вираз $\boxed{1850+(1850-570)}$ і є *знакосимвольною моделлю* до даної задачі. А складений на початку розв'язаннясхематичнийзапис є *образною моделлю*. Давайте перевіримо її достовірність, знайшовши значення отриманого виразу! (Учні знаходять значення складеного виразу і переконуються у його правильності.)

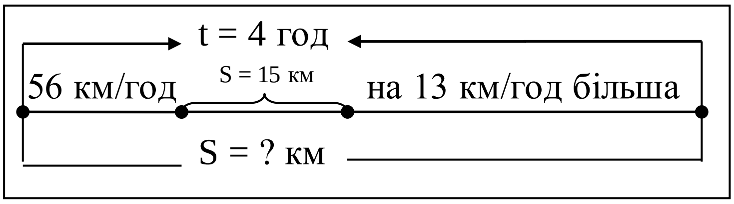
Подібні діалоги необхідно вести з учнями якомога частіше з метою формування уявлень про модель, її види та засвоєння відповідних термінів. Також варто звертати увагу на формулювання школярами повної відповіді на поставлені вчителем запитання.

Враховуючи вік учнів 5 – 6 класів, вчитель може не конкретизувати види математичних моделей (знако-символьна, образна), що розглядаються у процесі розв’язування задач.

Розглянемоіншу задачу.

Задача 2.7. З двох пунктів одночасно назустріч один одному виїхали два мотоциклісти. Швидкість одного з них дорівнює 56 км/год, а другого – на 13 км/год більша. Знайди відстань між пунктами, якщо через 4 год відстань між мотоциклістами була 15 км.

Найперше слід скласти графічний запис задачі (*образну модель*).



Потім, проаналізувавши її умову і вимоги та керуючись образною моделлю, необхідно скласти разом з учнями план розв’язання задачі. Це може бути у вигляді фронтальної бесіди з класом, чи групової роботи, чи індивідуальної пропозиції школяра.

1. Знайти шлях, який подолав перший мотоцикліст за 4 год.

2. Знайти швидкість другого мотоцикліста.

3. Знайти шлях, який подолав другий мотоцикліст за 4 год.

4. Знайти відстань між пунктами, просумувавши відстані, подолані обома мотоциклістами, і 15 км.

Далі згідно вище вказаного плану потрібно розв’язати задачу.

1. 56·4 – шлях, подоланий першим мотоциклістом.

2. 56+13 – швидкість другого мотоцикліста.

3. (56+13)·4 – шлях, подоланий другим мотоциклістом.

4. $56\cdot4+(56+13)\cdot4+15$ – відстань між пунктами.

Отже, складений числовий вираз $\boxed{56\cdot4+(56+13)\cdot4+15}$– *знако-символьна модель* задачі. Обчисливши значення даного виразу, знаходимо, що відстань між пунктами дорівнює 515 км.

Після вище наведеного розв’язання задачі варто поцікавитися в учнів, чи можлива за заданою умовою ситуація, відмінна від розглянутої, і запропонувати їм разом розглянути ситуацію, коли мотоциклісти зустрічалися протягом 4 год. Тоді *знако-символьна модель* задачі матиме вигляд: $\boxed{56\cdot4+(56+13)\cdot4}$ $\boxed{-15}$

Подібне розв’язування задач є пропедевтикою застосуванняв майбутньому алгебраїчного способу і значно спрощує роботу вчителя у цьому напрямку.

Описаний вище спосіб розв’язуваннятекстових задач ми називаємо **«поелементним» моделюванням**, ***тобто моделюванням, у якого етапи роботи такі:***

1. Робота над змістом задачі. Передбачає, як правило, побудову образноїмоделі.

2. Пошук шляхів розв’язання.

3. Незавершене розв’язаннязадачі в межах математичноїмоделі.

4. Складання знако-символьноїмоделі (числовий вираз) до задачі.

5. Завершенерозв’язаннязадачі в межах математичноїмоделі (знаходження значення числового виразу).

6. Інтерпретація одержаного розв’язку.

Виходячи з цього: ***основне завдання вчителя математики у 5 – 6 класах, полягає в тому, щоб сформувати в учнів уявлення про математичну модель, її види і деякі властивості та допомогти здійснити перехід від «поелементного» до повноцінного застосування методів математичного моделювання.***

Розв’язування в 5 – 6 класах прикладних задач сприяє також формуванню в учнів уявлення про ***універсальність моделі***, тобто того факту, що одна і та ж математична модель може відображати різні життєві ситуації. Наприклад, за такою *знако-символьною моделлю* $\boxed{50 - 2\cdot(12+13)}$ можуть розв'язуватися наступні задачі:

Задача 2.8. Два велосипедисти виїхали одночасно назустріч один одному з пунктів А і В, відстань між якими дорівнює 50 км. Один з них їхав зі швидкістю 12 км/год, а другий – зі швидкістю 13 км/год. Яка відстань буде між ними через 2 год?

Задача 2.9. Мама дала Олегу 50 грн, попросивши його купити у магазині 2 кг рису по 13грн/кг і 2 кг гречки по 12грн/кг. Чи вистачить Олегу грошей на жувальну гумку, вартість якої 25 к.?

Важливо також показувати учням, що для розв'язування однієї і тієї ж задачі, можна використовувати не одну математичну модель. Наприклад:

Задача 2.10.Довжина кімнати дорівнює 6 м, її ширина становить 75%

довжини, а висота – ширини. Знайдіть масу повітря в цій кімнаті, якщо 1 м^3 повітря має масу 1,29 кг.

До такого виду задач необхідно запропонувати учням скласти схематичний запис, який і буде *образною моделлю*.

Висота – 6 м

Ширина – ? 75 %

Об'єм ? м^3

Знайти масу повітря в кімнаті.

У процесі розв'язанняотримуєтьсязнако-*символьна* модель:

$$\boxed{6\cdot(6\cdot 0{,}75)\cdot\left(6\cdot 0{,}75\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot 1{,}29}$$

Числовий вираз як модель буде використовуватися на уроках математики і в наступних класах, але міститиме інші види чисел: звичайні, десяткові дроби, від'ємні числа тощо. Методика роботи з числовим виразом як моделлю залишається такою ж самою.

Детально робота з числовим виразом як знако-символьною моделлю описана у нашій публікації [183].

2.1.2.Рівняння як математична модель

На вивчення теми «Числові і буквенні вирази. Рівняння» у 5 класі за програмою виділяється 2 – 3 год, тому використати їх потрібно максимально раціонально. Адже саме тут формується уявлення про алгебраїчний спосіб розв’язуваннятекстових задач, який і буде превалювати у подальшому курсі математики.

Ми пропонуємо такий план вивчення цієї теми (див. табл. 2.6).

Таблиця 2.6

Календарно-тематичний план вивчення теми «Числові і буквенні вирази. Рівняння»

№	Зміст навчального матеріалу	Вимоги до рівня підготовки учнів
1	Числовий і буквенний вираз. Формула	***Розпізнає*** числові та буквенні вирази, формули. ***Наводить приклади*** числових і буквенних виразів. ***Розв’язуєвправи, щопередбачають:*** обчислення значень числових і буквенних виразів, складання буквенних виразів за умовою задачі.
2	Рівняння	***Наводить приклади рівнянь.*** ***Описує поняття рівняння, розв’язок рівняння.*** ***Пояснює, що означає «розв’язати рівняння».*** ***Розв’язує вправи, що передбачають знаходження розв’язків лінійних рівнянь на основі залежностей між компонентами арифметичних дій.***
3	Задачі, що зводяться до розв’язування рівнянь	***Пояснює, що означає «розв’язати задачу за допомогою рівняння».*** ***Аналізує залежності між величинами (швидкість, час і відстань; ціна, кількість і вартість тощо).*** ***Розв’язує нескладні текстові задачі, складаючи образні та знакові моделі до них.***

Методика вивчення даної теми у контексті математичного моделювання має складатися з ***двох етапів***:

1. ***Формування уявлення про буквенний вираз як знакову модель.***
2. ***Формування уявлення про рівняння як знакову модель.***

Розглянемо докладніше кожен із цих етапів.

На першому етапі важливо сформувати в учнів уміння складати буквенні вирази за умовою задачі і знаходити компоненти дій за результатом та іншими компонентами. Тому значну увагу слід приділити, наприклад, завданням такого змісту:

1. Запиши суму і різницю чисел 8 і a.

2. Запиши добуток чисел: а)a іc; б)xі 3; в) 5 іc.

3. Запиши число, яке на 6 більше за число x.

4. Дано числа 7 і a. Запиши: а) суму їх квадратів; б) квадрат їх різниці; в) різницю їх квадратів; г) куб їх суми.

5. У саду росло 132 дерева, з них a дерев становили яблуні, а решту – вишні. Запиши вираз, який показує, скільки вишень росло в саду?

6. Дано число a. Збільш його в три рази. Запиши отримане число. Зменш записане число на 8. Запиши, що отримане число дорівнює: 1) подвоєному a; 2) половині a; 3) числу a, збільшеному на 5.

7. Сума двох чисел дорівнює 40. Одне з них x. Знайди друге. Збільш перше число у 4 рази, а друге у 5 разів, і запиши їх суму.

Подібні завдання формують в учнів розуміння того факту, що ***арифметична дія та її результат можуть мати тотожне знакове вираження.***

Відпрацювання вище зазначених навичок спрощує процес формування у школярів уявлення про ***буквенний вираз як знакову модель***. Проілюструємо це на прикладі.

Задача 2.11. Петрик купив m олівців по 24 к. і 5 зошитів по n к., заплативши за зошити більше, ніж за олівці. На скільки більше заплатив хлопчик за зошити, ніж за олівці? Обчисліть значення отриманого виразу при $m = 6$, n=32.

Спочатку слід скласти з учнями *образну модель* задачі – таблицю, остання колонка якої заповнюється учнями у процесі бесіди з учителем.

	Ціна, к.	Кількість, шт.	Вартість, к.
Олівці	24	m	$24\cdot m$
Зошити	n	5	$n\cdot 5$

При цьому доцільно провести діалог:

Учитель: Як знайти загальну вартість олівців, знаючи їх ціну і кількість?

Очікувана відповідь: Щоб знайти загальну вартість олівців, треба їх ціну помножити на кількість, тобто $24\cdot m$. (Заповнюється відповідна колонка таблиці.)

Учитель: Аналогічно знаходимо загальну вартість зошитів. Чому вона дорівнюватиме?

Очікувана відповідь: Загальна вартість зошитів буде дорівнювати $n\cdot 5$.

Учитель: Знаючи, що на зошити Петрик потратив більше грошей, ніж на олівці, як нам дізнатися, на скільки була дорожчою покупка зошитів?

Очікувана відповідь: Щоб дати відповідь на запитання задачі, слід від вартості зошитів відняти вартість олівців, тобто записати різницю $n\cdot 5–24\cdot m$.

Учитель: Отриманий нами буквений вираз $\boxed{n\cdot 5–24\cdot m}$ є *знако-символьною моделлю* задачі. Знайдемо значення виразу, підставивши m=6, n=32.

Очікувана відповідь: Маємо: $32\cdot 5–24\cdot 6 = 160–144 = 16$.

Учитель: Який висновок ми можемо зробити стосовно нашої задачі?

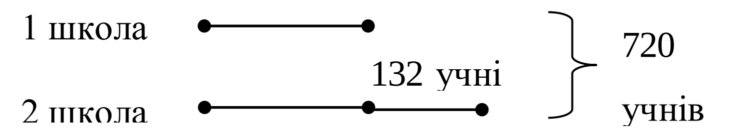
Очікувана відповідь: На купівлю 5 зошитів по 32 к. Петрик витратив на 16 к. більше, ніж на купівлю 6 олівців по 24 к.

Таким чином в учнів формується уявлення про те, що склавши до задачі буквенний вираз і надаючи різні числові значення змінним, можна отримати різні числові вирази. Тобто буквенний вираз, зокрема формула, дозволяє узагальнити розв’язаннярізнихтипів задач і скластипевні правила-орієнтири.

Другий етап слід розпочинати із розв'язуваннятекстовоїзадачізвичним для учніварифметичнимспособом. Наприклад:

Задача 2.12.У двох школах навчаються 1720 учнів. Скільки учнів навчаються у кожній школі, якщо в одній із них на 132 учні більше ніж у другій?

Слід скласти до задачі *образну модель* – схему.



Знайти кількість учнів у кожній школі.

Цю задачу учні спроможні розв'язатиарифметичним способом, але вона є для них досить складною і за ходом міркувань, і за поясненням. Тому учитель повинен запропонувати інший спосіб розв'язування – алгебраїчний (за допомогою рівняння), провівши діалог:

Учитель: Що нам необхідно спочатку знайти, щоб відповісти на запитання задачі?

Очікувана відповідь: Щоб відповісти на запитання задачі, необхідно знайти кількість учнів у першій школі.

Учитель: Звичайно! Позначимо її через x. А скільки учнів тоді буде в другій школі?

Очікувана відповідь: У другій школі на 132 учні більше, тобто (x+132).

Учитель: Тепер нам відомо, що у першій школі x учнів, у другій – (x+132) учні. Як тепер можна знайти загальну кількість учнів у двох школах?

Очікувана відповідь: Щоб знайти загальну кількість учнів у двох школах, слід додати xта (x+132), тобто x+(x+132).

Учитель: Що відомо з умови задачі про значення знайденого виразу x+(x+132)?

*Очікувана відповідь:*Це значення дорівнює 1720, тобто

Кількість учнів першої школи x	+	Кількість учнів другої школи x+132	=	1720.

Таким чином маємо рівняння:

$$\boxed{x+(x+132) = 1720}$$

Це рівняння і є *знако-символьною моделлю* до задачі.

Далі учні можуть самостійно знайти корінь рівняння: $x+(x+132) = 1720$; $x+x+132 = 1720$; $2x+132 = 1720$; $2x= 1720–132$; $2x = 1588$; $x =794$.

Тоді $x+132 = 794+132 = 926$.

Отже, у першій школі навчається 794 учні, а у другій – 926 учнів.

Розв’язання цієї задачі демонструє учням доцільність використання алгебраїчного способу і додає до вже відомого переліку моделей нову – ***рівняння***.

На основі розв’язування таких задач учитель має запропонувати учням **<u>схему застосуванняалгебраїчного способу</u>**:

1. Починаємо розв’язувати задачу, визначаючиневідому величину і позначаючи її через х.

2. Якщо в задачі є інші невідомі величини, то виражаємо їх через х і дані в задачі умови.

3. Над отриманими невідомими проводимо дію, яка нагадує собою перевірку розв’язкузадачі, в результаті отримуємо рівняння (знако-символьну модель).

4. Розв’язавширівняння, отримуємозначенняоднієї з невідомих величин.

5. Знаходимо значення інших невідомих величин.

6. Здійснюємо інтерпретацію отриманих результатів і перевіряємо правильність розв’язаннязадачі.

Далі під час роботи із задачами, що зводяться до розв’язаннярівнянь, учні можуть активно користуватися складеною схемою.

Розглянемо її покроковона прикладінаступноїзадачі.

Задача 2.13. У трьох ящиках було 70 кг яблук. У другому ящику – вдвічі більше, ніж у першому, а в третьому – на 5 кг менше, ніж у другому.

Скільки кілограмів яблук було у кожному ящику?

Розв’язання:

Образна модель задачі – схема – матиме вигляд:

1 ящик

2 ящик у 2 рази більше

3 ящик на 5 кг менше

70 кг

Скільки кілограмів яблук було у кожному ящику?

Далі хід міркувань, визначених шляхом діалогу вчителя з учнями,може бути таким:

1. Позначимо за x – кількість яблук у першому ящику.

2. Тоді у другому ящику буде $2x$ яблук, а у третьому $(2x–5)$ яблук.

3. Так як за умовою задачі у всіх ящиках разом було 70 кг яблук, то додавши кількість яблук кожного з трьох ящиків, ми повинні отримати 70. Маємо рівняння: $\boxed{x+2x+(2x–5) = 70}$, яке є *знако-символьною моделлю* до задачі.

4. Розв’язавширівняння, отримаємо, що$x = 15$.

5. Тоді $2x = 2\cdot 15 = 30$; $2x–5 = 2\cdot 15–5 = 25$.

6. Отже, у першому ящику було 15 кг яблук, у другому – 30 кг, а у третьому – 25 кг. Здійснимо перевірку 15+30+25 = 70, 30:2 = 15, 25+5 = 30, що відповідає умові задачі.

Зрозуміло, що найскладнішим для учнів є перший крок пам’ятки – вибір невідомої величини. Якщо задача проста, тобто шукана величина одна, то вибір зрозумілий. У задачах, де кілька невідомих величин, вибір досить широкий і від нього дуже часто залежить зручність (раціональність) розв’язання. До свідомості учнів необхідно донести, що вибір невідомої величини може бути будь-яким, але бажано вибирати так, щоб отримане рівняння та його розв’язання були якомога простішими. Для прикладу наведемо діалог зі школярами стосовно попередньої задачі.

Учитель: Нехай у другому ящику буде y яблук. Тоді що нам відомо про перший ящик?

Очікувана відповідь: За умовою задачі у другому ящику яблук вдвічі більше, ніж у першому.

Учитель: А скільки ж тоді у першому?

Очікувана відповідь: А у першому – вдвічі менше, ніж у другому.

Учитель: Знаючи, що у другому ящику y яблук, скільки ж тоді яблук буде у першому ящику?

Очікувана відповідь: У першому ящику буде $y:2$ яблук.

Учитель: Що нам відомо про третій ящик?

Очікувана відповідь: У третьому ящику на 5 кг менше ніж у другому, тобто $(y–5)$.

Учитель: Таким чином знаючи кількість яблук у кожному ящику і у всіх разом, отримуємо рівняння: $\boxed{y:2+y+(y-5) = 70}$, яке є *знако-символьною моделлю* до задачі.

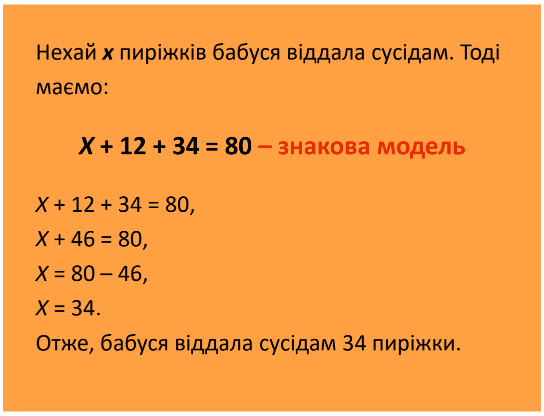
Але розв'язатицерівнянняучні 5 класу не можуть. Аналогічнаситуація складається і з вибором як невідомої величини кількості яблук у третьому ящику. Тому учитель має дати школярам рекомендацію: ***у подібних задачах часто зручніше за невідому величину приймати найменшу шукану величину.***

Схожі рекомендації варто дати і під час розв'язування інших типів задач.

Зупинимося ще на аспекті застосування на уроках комп'ютерних презентацій. Ми вжезазначалиїх доцільністьна етапі аналізу тексту задачі, зокрема при ознайомленні учнів з невідомими поняттями. Покажемо можливість їх застосування при розв'язуванні задач, щозводяться до рівнянь.

Розглянемо задачу.

Задача 2.14. Бабуся спекла 80 пиріжків. Частину пиріжків вона віддала сусідам, а 12 пиріжками пригостила онуків. Після цього у неї залишилось 34 пиріжки. Скільки пиріжків бабуся віддала сусідам?



Мал. 2.1. Слайди 1, 2.

Таке подання задачі (див. мал. 2.1) допомагає навіть найслабшим учням правильно здійснити побудову математичної моделі. Тому варто супроводжувати процес розв'язування задачі, зокрема етапи її аналізу і пошуку шляхів розв'язання, комп'ютерними презентаціями.

Варто звернути увагу і на формування уміння за даною математичною моделлю складати умову задачі. Наприклад:

5. Склади задачу за схемою і розв'яжиї ї.

А) 3 км/год t=2 год x км/год Б) 3 км/год x км/год t=10 год

S=10 км S=10 км

Примітка: У завданні Б) точкою позначене місце зустрічі рухомих об'єктів.

2. Склади задачу за заданим рівнянням і розв'яжиї ї.

А) $5x + 2 = 157$; .Б) $x + 2x + (2x – 5) = 70$; В) $(76{,}2 – x) \cdot 3{,}5 = 232{,}4$.

3. Придумай ситуацію, математичноюмоделлюякоїє заданий вираз, ізнайди відповідь:

А) (-9) + (+4);Б) (+6) + (+3); В) (-5) + (-2); Г) (-1) + (+7).

Подібні задачі не лише розвивають креативність, абстрактно-логічне мислення учнів, а й формують стійке уявлення про математичну модель та її види. Аналіз діючих підручників [115, 116, 165, 166] показав, що саме таких задач у ШКМ бракує.

Вивчення числового і буквенного виразів за описаною вище методикою є гарною пропедевтикою алгебраїчного моделювання.

2.1.3. Найпростіші геометричні фігури як математичні моделі

Зміст геометричного матеріалу в 5 – 6 класах передбачає систематизацію, узагальнення і розширення геометричних уявлень та знань, отриманих в курсі математики початкової школи. На цьому етапі навчання на наочно-інтуїтивному рівні, з використанням дедуктивних міркувань починають розвиватися майже всі змістові лінії шкільної геометрії, зокрема учні отримують початкові відомості про деякі планіметричні фігури,стереометричні тіла, їх побудову та властивості, набувають навичок вимірювання геометричних величин.

Враховуючи психолого-педагогічні особливості молодших підлітків,вивчення геометрії в 5 – 6 класах слід організовувати як процес, в якому розвиток геометричних уявлень відбувається через спостереження і перетворення об'єкта вивчення – конструювання, креслення, вимірювання тощо. Це саме ті види діяльності, до яких більшість учнів цього віку виявляють цікавість. Таким чином процес вивчення геометрії відповідатиме внутрішнім потребам школярів, створюватиме позитивний емоційний фон та сприятливо впливатимена розвиток інтересу до предмету. Разом з тим наочне вивчення геометричної фігури (аналіз її структури, визначення властивостей, порівняння з іншими фігурами), проведення практичного експерименту та аналіз його результатів передбачає включення в роботу різних форм мислення, а використання встановлених властивостей фігури для її розпізнавання – вміння оперувати відповідним понятійним апаратом.

Отже, метою вивчення геометричного матеріалу учнями 5 – 6 класів є оволодіння образними геометричними моделями і методами дослідження на наочно-емпіричному рівні, а також розвиток мислення, просторової уяви, геометричного бачення.

Розглянемо методи і прийоми вивчення окремих геометричних тем.

1. Пряма, промінь, відрізок, ламана. Кути

Вивчення прямої розвиває один із основних компонентів просторових уявлень – поняття про лінійну протяжність. Тому особливий акцент слід робити на такій властивості прямої, як її необмеженість. Образом прямої може бути натягнута нитка чи гумовий шнур, слід на аркуші паперу після його перегинання тощо. Варто запропонувати учням знайти у класі і поза ним предмети, моделями яких може бути пряма, вказати випадки у повсякденному житті, коли необхідно побудувати прямі (у процесі побудови будівель, доріг, насадженні дерев і т.д.).

Одночасно слід протиставити прямим криві лінії, які школярі можуть теж знайти в оточуючому середовищі.

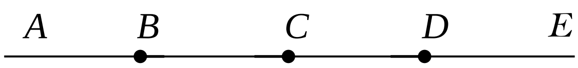
Вивчення властивостей прямих варто здійснювати на практичних роботах. Зокрема, провівши кілька прямих через одну точку, учні переконуються, що таких прямих можна провести багато. Після цього легко підвести їх до аксіоми про пряму, що проходить через дві точки, давши завдання, яке показує, що через 3, 4 і більше точок провести одну пряму не завжди можливо.

Розглядаючи перетин прямих, окрім завдань на побудову прямих, що проходять через одну точку, варто зупинитися на побудові продовження частин прямих до їх перетину. Після чого легко ввести поняття паралельних прямих як таких, які не перетинаються.

Наступним етапом у вивченні даної теми є розмежування понять пряма, промінь і відрізок, тобто:

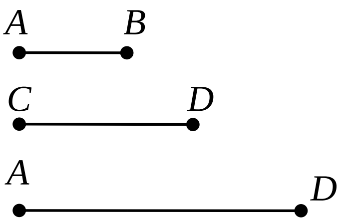
- пряма не має ні початку, ні кінця;
- промінь має початок, але не має кінця;
- відрізок має і початок, і кінець.

На закріплення варто запропонувати учням завдання типу: назвати на малюнку прямі, промені і відрізки.

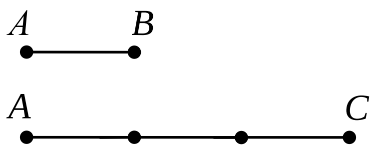


Для вимірювання довжин відрізків найчастіше використовують лінійку зі шкалою. Щоб виміряти довжину відрізка, треба прикласти лінійку до відрізка так, щоб один кінець відрізка сумістився з поділкою шкали, що відповідає нулю, тоді поділка, що буде суміщена з другим кінцем відрізка, вкаже на відповідне значення довжини відрізка. Варто наголосити школярам, що таким чином можна виміряти довжину відрізка з точністю до поділки на шкалі.

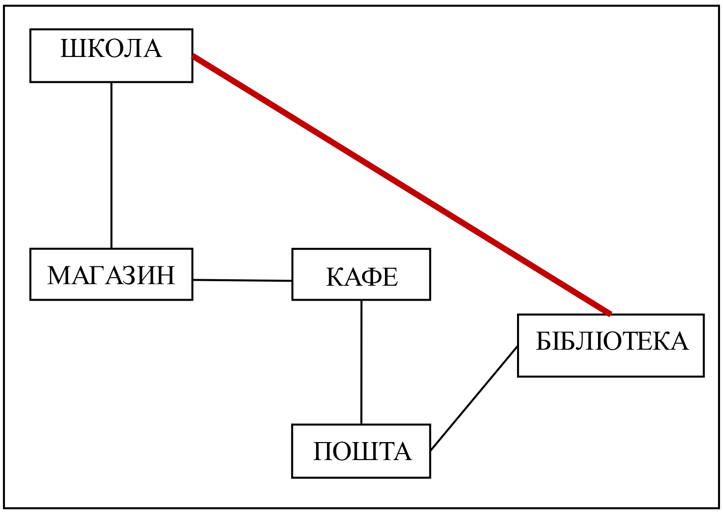
Практичні роботи з відрізками яскраво демонструють учням взаємопов'язаність алгебри і геометрії. Зокрема результати арифметичних дій над довжинами відрізків можна перевірити за допомогою вимірювань.



$AB+CD=AD$



$3 \cdot AB=AC,\ AC:3=AB$



Важливо також акцентувати увагу учнів на тому, що поняття ***довжина відрізка характеризує, наскільки великим є цей відрізок***, причому:

- кожен відрізок має довжину, відмінну від нуля;
- довжина заданого відрізка дорівнює сумі довжин відрізків, на які він розбивається будь-якою його точкою;
- рівні відрізки мають рівні довжини.

Такий підхід до поняття довжини відрізка в подальшому знайде своє продовження при вивченні градусної міри кута, площі фігури, а потім і об'єму тіла.

Введення поняття ламаної слід розпочинати із задачі типу:

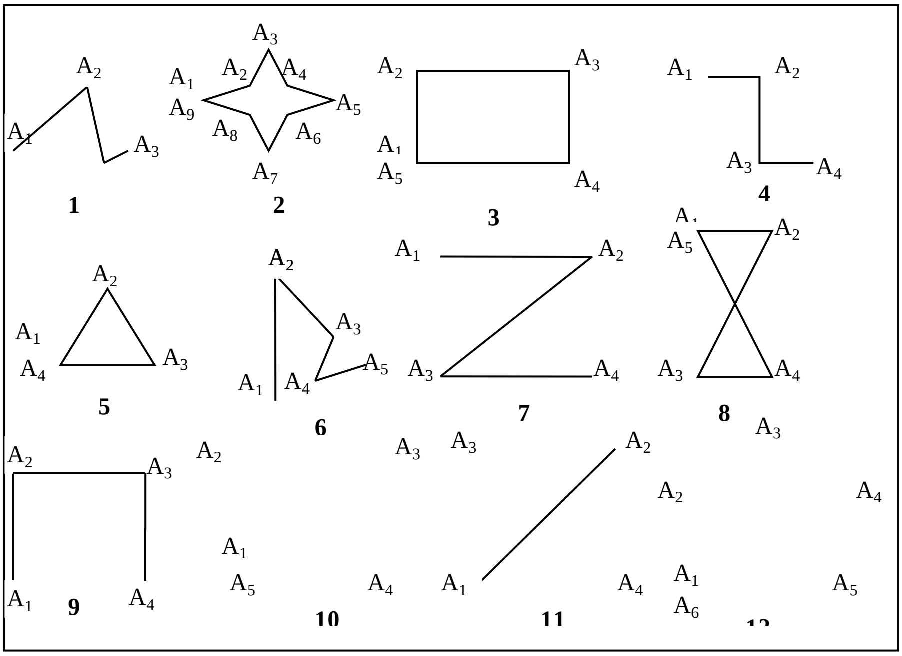
Задача 2.15. За малюнком (див. мал. 2.2) визначити відстань від школи до бібліотеки (1 см вважати за 80 м).

У цій задачі, окрім поняття ламаної, школярі стикаються із поняттям мас-

Мал. 2.2.

штабу, яке відоме їм ще з початкової школи і буде детально вивчатися у 6 класі. Тут же доцільно продемонструвати учням той факт, що найкоротшою відстанню між об’єктами є відстань по прямій. Вони можуть пересвідчитись у цьому, виконавши необхідні вимірювання. Слід також звернути увагу школярів на те, що малюнок є *образною моделлю* шляху від школи до бібліотеки, і пояснити, що ***у повсякденному житті відстань від одного об’єкта до іншого найчастіше ототожнюють з довжиною шляхів, що сполучають ці об’єкти: автомобільні, залізничні, морські тощо. Ці шляхи найчастіше відмінні від відрізків прямих, тому потрібно абстрагуватися від нерівностей рельєфу і знаходити результат з незначною похибкою.***

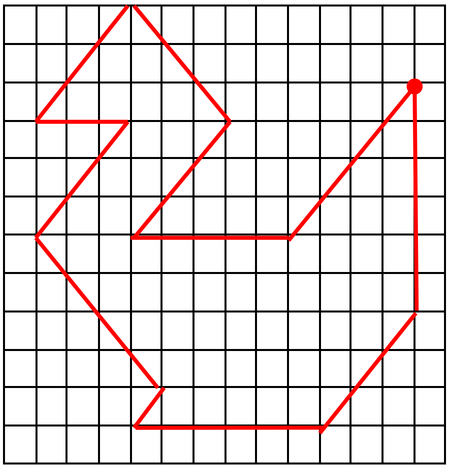
У процесі вивчення теми «Ламана» учні знайомляться ще й з поняттям «замкнена ламана», що є пропедевтикою подальшого вивчення многокутників. Введення даного поняття варто зробити теж на практичній роботі. Зокрема, можна запропонувати учням завдання типу: виберіть на малюнку (див. мал. 2.3) фігури, побудовані таким же способом, що і фігури 1 і 2, та розділіть їх на дві групи відповідно.



Мал. 2.3

Зрозуміло, що до першої групи відносяться фігури 1, 4, 6, 7, 9, 11; до другої – 2, 3, 5, 8, 10, 12 (вони і є замкненими ламаними). Особливу увагу учнівслід звернути на фігури 8 і 11, які теж є ламаними, однак їх ланки перетинаються між собою.

Тема «Ламана» дає гарну можливість на пропедевтичному рівні ознайомити учнів із системою координат. Зробити це можна на так званих «графічних» диктантах. Наприклад: з фіксованої точки, не відриваючи олівця від аркуша паперу і користуючись підказками, побудуйте картинку.



Мал. 2.4

«Графічний» диктант: З точки вниз 6, вліво вниз по діагоналі квадрата 3, вліво 6, вправо вверх по діагоналі квадрата 1, вліво вверх по діагоналі квадратаи4, вправо вверх по діагоналі квадрата 3, вліво 3, вправо вверх по діагоналі квадрата 3, вправо вниз по діагоналі квадрата 3, вліво вниз по діагоналі квадрата 3, вправо 5, вправо вверх по діагоналі квадрата 4 (див. мал.2.4).

Подібні завдання не лише сприяють зацікавленості учнів математикою, а й розвивають координацію, високу виконавську дисципліну.

Що стосується теми «Кути», то на початку їх вивчення варто вводити поняття прямого кута, використовуючи для цього шарнірну або паперову модель. До речі, кожен з учнів шляхом подвійного перегинання аркуша паперу може власноруч виготовити модель прямого кута. Далі слід запропонувати школярам знайти прямі кути в оточуючому середовищі, користуючись виготовленою моделлю.

Подальше введення видів кутів (розгорнуті, гострі, тупі) також зручно здійснювати з допомогою моделі прямого кута шляхом накладання. Слід акцентувати увагу учнів на тому, що градусна міра кута не залежить від його розміщення у просторі.

Вивчення всіх вище зазначених геометричних фігур слід супроводжувати вправами на розвиток окоміру. Спочатку варто пропонувати школярам «на око» визначити довжину відрізків (градусну міру кутів), зображених на дошці, або побудувати у зошиті відрізки, заданої довжини (кути, заданої градусної міри). Для орієнтиру на дошці можна накреслити відрізок, довжиною 1 см, 1 дм тощо (кут, градусна міра якого 10° тощо). Довжини відрізків (градусні міри кутів), визначені «на око», слід перевіряти безпосереднім вимірюванням і визначати величину допущеної помилки, закладаючи таким чином фундамент для подальшого вивчення наближених величин та похибок.

2. Многокутники. Площа прямокутника

З поняттям «многокутник» учні знайомилися у процесі вивчення замкненої ламаної, тому основний акцент слід зробити на вивченні прямокутника (квадрата) і трикутника. Ці фігури образно відомі школярам ще з початкової школи. Однак заслуговують на увагу ***наступні моменти***:

1). При вивченні прямокутників, щоб відділити суттєві ознаки від несуттєвих, корисними будуть такі вправи: побудувати прямокутники з різним співвідношенням сторін та різним розміщенням; виготовити кілька моделей прямокутника з кольорового паперу, скла, фанери тощо; знайти об'єкти у навколишньому середовищі, математичною моделлю яких є прямокутник і т.д. Учні повинні засвоїти, що лише зміна градусної міри кутів порушує суттєві ознаки прямокутника. Аналогічні вправи слід пропонувати і при вивченні інших геометричних фігур, особливо коли мова йтиме про види трикутників.

2). Оскільки навичками знаходження периметру прямокутника (квадрата) і трикутника учні вже володіють, варто зупинитися на розв'язуванні прикладних задач (наприклад, визначення довжини огорожі, розмірів пришкільної ділянки, футбольного поля тощо). Паралельно з цими мають бути завдання, в яких учням пропонується: вибрати масштаб і побудувати відповідне зображення (наприклад, розміщення кімнат власного будинку, грядок різних видів овочів на присадибній ділянці тощо); за даним периметром побудувати прямокутник (квадрат) і вказати кількість можливих побудов. Подібні завдання формуватимуть у школярів ***уміння співвідносити об'єкти навколишнього середовища з їх математичними еквівалентами, тобто будувати математичні моделі.***

3). Необхідно продовжити роботу над розвитком окоміру, тобто пропонувати завдання на визначення довжин сторін фігур чи їх периметру.

Зупинимося детальніше на понятті «площа фігури». Площу фігури варто розглядати як величину, по відношенню до якої можуть бути встановлені критерії порівняння і яка є властивістю фігури. Однак процес знайомства учнів з поняттям«площа фігури» має свою специфіку і здійснюється в кілька етапів:

1) введення поняття площі як величини;
2) знайомство з одиницями вимірювання;
3) вимірювання площ шляхом розбивання фігури на квадратні одиниці;
4) знайомство з правилами обчислення площі прямокутника (квадрата);
5) розв'язування прикладних задач.

Реалізувати вище зазначені етапи слід на практичній роботі.

Порівняння площ фігур шляхом накладання (наприклад, картини на стіну) формує у школярів поняття площі як величини, до якої можна застосовувати критерії «більше», «менше» чи «рівні». Однак одночасно варто дати учням завдання типу: порівняти площі прямокутників зі сторонами 6 см і 4 см, 8 см і 3 см та 12 см і 2 см. Спроба порівняти їх площі за допомогою накладання виявляє той факт, що всі три прямокутники мають спільну частину, а їх частини, що не суміщаються при накладанні, є рівними. Доцільно продемонструвати школярам можливість розбиття вказаних прямокутників на рівні частини, використовуючи flash-ролик чи мультимедійну презентацію. Також вчитель має наголосити на тому, що у повсякденному житті у разі необхідності визначення площі певного об'єкта його розбивають на фігури, площу яких визначити легко і результати додають.

За аналогією з тим, що довжина відрізка вимірюється в сантиметрах, дециметрах, метрах і т.д., учні встановлюють, що для вимірювання площі фігури використовуються квадратні сантиметри, квадратні дециметри, квадратні метри і т.д. Слід виконати з учнями кілька завдань на визначення площі фігури шляхом розбивання її на квадратні одиниці (на см^2 у зошиті, на дм^2 на дошці). Подібна робота дасть школярам конкретні уявлення про нові одиниці вимірювання і розуміння значної трудомісткості цього способу визначення площі. Таким чином назріє потреба пошуку легшого способу, тобто формули.

Але перш ніж перейти до формулювання правила обчислення площі прямокутника, варто розглянути з учнями випадок, коли сторони прямокутника виражені в різних одиницях вимірювання. Тоді ***правило обчислення площі прямокутника*** звучатиме наступним чином: ***щоб знайти площу прямокутника, не-***

обхідно виміряти в однакових одиницях його довжину та ширину і отримані числа перемножити. Отриманий результат покаже, скільки квадратних одиниць міститься в даному прямокутнику.

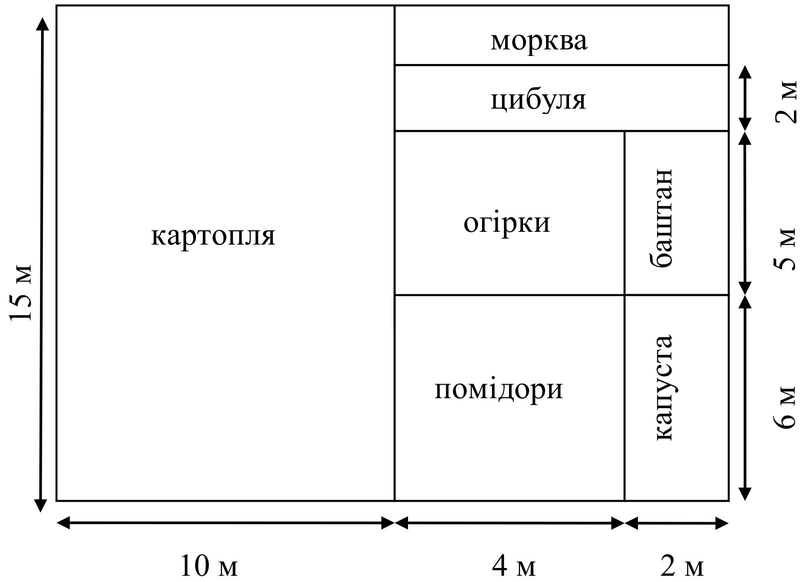
Окрім задач на визначення площі прямокутника, варто розв'язати і кілька задач на знаходження периметра цього прямокутника, щоброзмежуватиціпоняття. Корисними є також задачі, що розв'язуються на основіданих, отриманихбезпосереднімвимірюванням, яке виконуютьучні в класічивдома. Наприклад, знайти площу першої сторінки підручника з математики, площу підлоги власної кімнати тощо.

Після розв'язуванняучнями задач з використанням одиниць, що не перевищують м^2, варто познайомити їх із земельними одиницями вимірювання площі (ар, га). Виконати це краще на ВРнМ (див. додаток Б).

Корисними для школярів будуть вправи на знаходження площі фігури, яка має криволінійний контур. Спочатку варто розглядати цю фігуру на папері в клітинку. А згодом можна користуватися палеткою, тобто прозорою пластинкою, розділеною на квадрати із стороною 0,2 см, 0,4 см, 0,5 см або 1 см. При підрахунку, якщо частина фігури менша половини квадрата, її відкидають; якщо більша або рівна половині, то її вважають за цілий квадрат. Палетка дає уявлення про наближене обчислення площі фігури.

Серед завдань, що пропонуються учням, мають бути і задачі, де прямокутник розбитий на кілька прямокутників чи квадратів і необхідно знайти площу кожної частини. Наприклад:

Задача 2.16. Знайти площу городу сім'ї Петренків, а також площу, відведену ними під посадку кожної із овочевих культур (див. мал. 2.5).



Мал. 2.5

Ця задача, окрім

удосконалення навичок обчислення площі прямокутника, сприяє якісному засвоєнню однієї з основних властивостей площі, зокрема: якщо фігура розбита на кілька частин, що не мають спільних внутрішніх точок, то її площа дорівнює сумі площ цих частин.Слід звернути увагу учнів на те, що виконане зображення є *образною моделлю*городу сім'ї Петренків, виконаною у певному масштабі.

Також варто зупинитися зі школярами на кількох завданнях на розвиток окоміру, зокрема маючи на дошці модель 1 дм^2, визначити площу кришки парти, картини на стіні, віконного скла тощо.

3. Прямокутний паралелепіпед, куб. Об'єм

Ознайомлення учнів із прямокутним паралелепіпедом має відбуватися таким же чином, як і з прямокутником. Особливу увагу необхідно звернути на суттєві і несуттєві (матеріал, колір, розмір моделі) ознаки. Варто також запропонувати учням знайти у навколишньому середовищі об'єкти, моделлюяких є прямокутний паралелепіпед. Вивчення ж його властивостей слід здійснити на практичній роботі, план якої може бути такий:

1). Покладіть модель прямокутного паралелепіпеда на аркуш зошита і обведіть. Обведена частина паралелепіпеда називається «грань». Якою фігурою є грань? Скільки граней має паралелепіпед?

2). Покажіть дві сусідні грані куба. Їх спільна частина називається «ребро». Якою фігурою є ребро? Скільки ребер має паралелепіпед? Чи є у паралелепіпеда однакові за довжиною ребра? Скільки груп однакових за довжиною ребер має паралелепіпед? Однакові за довжиною ребра є відповідно довжиною, шириною і висотою. Їх називають вимірами паралелепіпеда. Знайдіть їх довжину.

3). Покажіть спільну частину трьох сусідніх граней паралелепіпеда. Вона називається вершиною. Скільки вершин у паралелепіпеда?

4). Покладіть паралелепіпед на одну із граней (наприклад, червону). Вкажіть верхню і бокові грані (передню і задню). Вкажіть грань, яка є протилежною до грані, пофарбованої у синій колір. Якими вони є?

5). Скільки пар однакових граней має прямокутний паралелепіпед?

Знайдіть їх площу.

6). Що називають площею поверхні прямокутного паралелепіпеда?Знайдіть площу поверхні прямокутного паралелепіпеда.

Окремо слід розглянути паралелепіпед, сторони якого рівні, тобто куб, та його властивості.

Поняття про об’єм як величину необхідно вводити аналогічно до площі. Можна порівняти місткість різних посудин, наповнюючи одну із них водою і переливаючи її в інші. Таким чином буде продемонстровано, що тіла різної форми можуть мати однаковий об’єм. Оскільки дано поняття про об’єм як величину, досить легко перейти до питання про необхідність визначення одиниць вимірювання. Для цього з учнями повторюється процес обчислення довжини та площі і з’ясовується, що кожен новий різновид величини потребує і нових одиниць вимірювання. Після цього школярам варто продемонструвати моделі кубічних одиниць – 1 см^3, 1 дм^3, 1 м^3.

Знайомство учнів з формулою обчислення об’єму прямокутного паралелепіпеда можна також здійснити за аналогією до площі прямокутника, тобто:

1). Порівняти об’ємидвох паралелепіпедів шляхом вкладання одного тіла (наприклад, коробки) в інше.

2). Потім взяти два тіла (наприклад, коробки) однакового об’єму, але з різними лінійними вимірами і порівнятиїх.

3). Оскільки спроба вкласти їх одне в інше не дасть результату, учитель має запропонувати заповнити тіла (наприклад, коробки) кубиками (об’єм кожного 1 дм^3). Підрахунок кубиків і дасть змогу порівняти об’ємитіл.

4). Так як процес заповнення тіла кубічними одиницями досить трудомісткий і не завжди можливий, то виникне потреба знайти формулу для обчислення об’єму прямокутного паралелепіпеда.

Під час розв’язування задач на обчислення об’ємів тіл варто звертати увагу учнів на суттєві і несуттєві ознаки цих тіл. Наприклад, змінюючи положення прямокутного паралелепіпеда так, щоб висота, ширина і довжина помінялись місцями, можна продемонструвати незалежність об’ємувід розміщеннятіла у просторі. Також слід пропонувати учням завдання, в яких на основі власних вимірів вони мають знайти об’єм того чиіншоготіла у класі або вдома.

Великі труднощі у школярів при розв’язуванні прикладних задач викликає процес заміни об’єктів, що описані в умові задачі, геометричними фігурами і термінами, оскільки для цього має бути гарно розвинене абстрактне мислення, що для 10 – 11-річних підлітків не є характерним.

Тому ***на початкових етапах необхідно робити акцент на завданнях, в яких поряд з вихідним об’єктом зазначається його математичний еквівалент, тобто математична модель.***

Наприклад, математичним еквівалентом понять «цех», «льох», «каністра», «брусок» та ін. є «прямокутний паралелепіпед».

Задача 2.17. Приміщення цеху має форму прямокутного паралелепіпеда. Його довжина – 13 м, ширина – 12 м, а об’єм – 624 м^3. Обчисли його висоту.

Задача 2.18. Щоб зробити льох, викопали яму у вигляді прямокутного паралелепіпеда з вимірами 2, 3 і 3 м. Скільки кубометрів землі вийняли?

Задача 2.19. Брусок, що має форму прямокутного паралелепіпеда з вимірами 4 см, 5 см і 6 см, пофарбували з усіх сторін і розрізали на кубики з ребром 1 см. Скільки утвориться кубиків, у яких пофарбовано: 1) три грані; 2) дві грані; 3) одну грань?

Такі задачі сприяють формуванню і закріпленню в уяві дітей предметів, які мають і можуть мати форму прямокутного паралелепіпеда. Тому задачі, в яких немає прямого співставлення об’єкта і прямокутногопаралелепіпеда (математичного еквівалента), в подальшому будуть розв’язуватисядосить легко.

Розглянемо задачу.

Задача 2.20. В акваріум, довжина якого 6 дм, ширина – 4 дм, висота – 4 дм, налили воду до висоти 30 см. Скільки літрів води налили в акваріум? А скільки ще можна налити води в акваріум?

Для початку слід визначитися з учнями, якої форми бувають акваріуми і про який із них йде мова в умові задачі, а потім приступати до розв'язування. Пропонуємо провести діалог:

Учитель: Яке геометричне тіло є моделлю акваріума, що фігурує у задачі?

Очікувана відповідь: Прямокутний паралелепіпед.

Учитель: Що відомо про цей паралелепіпед?

Очікувана відповідь: В умові задачі сказано, що його виміри: 6 дм, 4 дм і 4 дм. Також відомо, що в акваріум налили воду до висоти 30 см.

Учитель: Як знайти об'ємналитої води?

Очікувана відповідь: Вода, налита в акваріум, займає форму прямокутного паралелепіпеда з вимірами 6 дм, 4 дм і 30 см. Отже, потрібно знайти його об'єм.

Учитель: Чи можемо ми відразу знайти об'ємналитої води?

Очікувана відповідь: Ні, спочатку необхідно перевести виміри в однакові одиниці вимірювання, тобто 30 см = 3 дм. Потім можна знайти об'єм, перемноживши виміри прямокутного паралелепіпеда.

Учитель: Таким чином добуток $\boxed{3\cdot4\cdot6}$ – ***знако-символьна модель*** задачі. Скільки ж води налили в акваріум?

Очікувана відповідь: $3\cdot4\cdot6=72$ (дм^3), але так як вода – рідина, то її об'ємвимірюється в літрах, тому, згадавши, що 1 дм^3 = 1л, маємо 72 дм^3 = 72 л. Отже, в акваріум налили 72 л води.

Учитель: Скільки води можна ще налити в акваріум?

Очікувана відповідь: Для цього спочатку необхідно знайти місткість усього акваріума: $4\cdot4\cdot6=96$ (дм^3). А потім знайти різницю: $96–72=24$ (дм^3). Тобто в акваріум можна ще налити 24 л води.

Учитель: Який числовий вираз буде моделлю до задачі?

Очікувана відповідь: $\boxed{4\cdot4\cdot6–3\cdot4\cdot6 \text{ або } (4–3)\cdot4\cdot6}$.

Розв'язування подібних задач сприяє розвитку абстрактного мислення учнів, зацікавленості у вивченні предмета.

Детально елементи математичного моделювання у процесі вивчення геометричного матеріалу в 5 – 6 класах викладено нами у публікації [187].

2.1.4. Діаграми як математичні моделі

Тема «Діаграми»є досить важливою в курсі математики, оскільки:

1. Діаграми слугують одним із засобів зв'язку математики з життям, так як відображають дані, взяті із повсякденності. Вони є зручним засобом наочності, дозволяючи в простій і доступній для сприймання формі показати співвідношення між величинами та виразити характер зміни тієї чи іншої величини.
2. Діаграми допомагають на пропедевтичному рівні ознайомити учнів з прямокутною системою координат і графіками функцій.

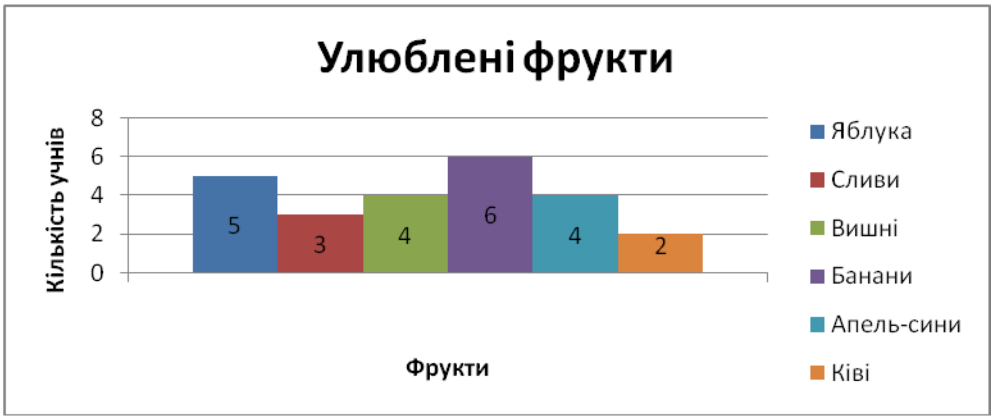
Формування навичок побудови діаграм може відбуватися у такій послідовності:

1. Побудова лінійних або стовпчастих діаграм, в яких певне значення величини чи визначена кількість об'єктівпозначаєтьсяоднієюклітинкою.
2. Побудова лінійних або стовпчастих діаграм з використанням масштабу, тобто те чи інше значення величини позначається не клітинкою, а відрізком (стовпчиком), висотою в 1 см або 1 мм.
3. Побудова кругових діаграм.
4. Побудова діаграм за допомогою комп'ютера.

Варто продемонструвати школярам весь цикл роботи від отримання повідомлення до його дослідження шляхом побудови діаграм. Наприклад, можна проаналізувати з учнями результати опитування їхнього класу про улюблений фрукт. Спочатку результати необхідно занести в таблицю.

Назва фруктів	Яблука	Сливи	Вишні	Банани	Апельсини	Ківі
Кількість учнів	5	3	4	6	4	2

Скласти стовпчасту діаграму (див. мал.2.6) варто запропонувати учням, взявши масштаб 1см:1відповідь.



Мал. 2.6

Потім можна провести діалог:

Учитель: Який із фруктів є найулюбленішим у класі?

Очікувана відповідь: Найулюбленіший фрукт – банан.

Учитель: Який із фруктів зібрав найменше голосів?

Очікувана відповідь: Найменше голосів у ківі.

Учитель: Яку із груп фруктів найбільше полюбляють учні: місцеву чи екзотичну?

Очікувана відповідь: Школярі не віддали перевагу конкретній групі фруктів. Уподобання розділилися порівну.

Учитель: Які фрукти (два найменування) необхідно купити, щоб задовольнити найбільшу кількість учнів?

Очікувана відповідь: Щоб задовольнити уподобання більшої частини класу, варто придбати яблука і банани.

Проведення подібного аналізу показує учням, які різнопланові дані можна отримати, користуючись діаграмою, і формує у них навички «читання» графічних зображень, що в подальшому допоможе їм при розв'язуванні задач за готовими малюнками.

Також нами складено добірку задач для учнів 5 – 6 класів, які будуть корисними для формування у школярів знань, умінь та навичок математичного моделювання (див. додаток А).

Отже, по закінченню вивчення курсу математики у 5 – 6 класах можна очікувати, що в учнів будуть сформовані:

- уявлення про числовий і буквенний вираз, рівняння як знакову модель;
- уявлення про кілька видів образних моделей: схеми, таблиці, малюнки, зображення геометричних фігур та тіл, діаграми;
- уявлення про деякі властивості моделі;
- елементарні навички застосування методів математичного моделювання.

Детальніше про це йде мова у нашій публікації [179].

2.2. Початковий етап вивчення математичного моделювання

Аналіз масової практики навчання учнів в основній школі засвідчив, що вивчення геометрії відбувається, як правило, без проектування на реальні об'єкти та життєві ситуації. У переважній більшості випадків від учніввимагається лише відтворення теоретичного матеріалу та його застосування під час розв'язування абстрактних задач. Ми ж пропонуємо навчати школярів геометрії з використанням математичного моделювання. Продемонструємо це на прикладі вивчення основних змістових ліній курсу, зокрема «Геометричні фігури та їх властивості» і «Геометричні величини».

Аналіз діючих підручників [18,19, 23, 25] на наявність прикладних задач показав, що при необхідній кількості у 20 – 30% в них є в середньому лише 16% (див. табл. 2.7).

Таблиця 2.7

Кількість задач прикладного змісту в діючих підручниках з геометрії

Назва підручника	**Тема**	
	Геометричні фігури та їх властивості	**Геометричні величини**
Бевз Г.П. та ін. Геометрія. 7 клас.		21,4%
Бевз Г.П. та ін. Геометрія. 8 клас.	2,2%	3,1%
М.І.Бурда, Н.А. Тарасенкова Геометрія. 7 клас.	7,2%	45,4%
Бурда М.І. Геометрія. 8 клас.		16,6%

Щодо змістового наповнення задач, то у підручниках [18, 19] наявні завдання на конструювання, визначення площі земельної ділянки заданої форми та кількості рулонів шпалер і плиток паркету, необхідних для ремонту кімнати, на принцип дії механічної рейсшини, на виготовлення паперових моделей паралелограма, прямокутника, ромба і квадрата.

Підручники [23, 25] містять задачі на обчислення довжини власного кроку; розвиток окоміру; побудову маршрутів на географічній карті та у зошиті; визначення кількості аркушів паперу, складеного у великий стос, діаметру дуже тонкого дроту, діагоналі цеглини, кількості кахельних плиток, паркетних дощечок, ламінату тощо, необхідних для ремонту квартири; знаходження площі фігури методом зважування; ознайомлюють школярів з приладом для вимірювання діаметра колод, будовою розсувного кронштейна та розсувної решітки, можливістю провішування прямої через перешкоду, процесом побудови навісу над входом у дачний будинок і т.д.

Разом з тим незважаючи на значне розмаїття сюжетів задачний матеріал діючих підручників потребує як змістового, так і кількісного доповнення.

2.2.1. Формування навичок математичного моделювання у процесі вивчення змістової лінії «Геометричні фігури та їх властивості»

Геометричні фігури та їх властивості – традиційно одна з провідних змістових ліній шкільного курсу геометрії. Це викликано тим, що використовуватимуть їх учні постійно у процесі вивчення предмету, у практичній діяльності вдома та у майбутній професійній діяльності.

З найпростішими геометричними фігурами та деякими їх властивостями на наочно-інтуїтивному рівні школярі ознайомлюються вже у початковій школі та в 5 – 6 класах. (див. 2.1.1.3).

Систематичне ж вивчення цієї змістової лінії відбувається у 7 – 9 класах. Спочатку узагальнюються наочні уявлення про найпростіші фігури, вводяться первісні поняття, формулюються аксіоми, потім вивчаються ознаки рівності трикутників, які разом з ознаками паралельності є основним аргументом під час доведення теорем та розв'язування задач. Далі вивчення трикутників відбувається протягом усього курсу планіметрії. Також учні ознайомлюються з поняттям кола, круга, їх елементами та властивостями. Однією з найбільших тем змістової лінії є «Чотирикутники», методичні особливості якої з точки зору навчання школярів математичного моделювання ми і розглянемо далі.

У діючих шкільних підручниках [19, 23] кожний вид чотирикутника вивчається окремо у послідовності: паралелограм → прямокутник → ромб → квадрат → трапеція. Причому основна увага приділяється засвоєнню властивостей фігур, що вивчаються, в той час, як розв'язування задач залишається на другому плані. ***Ми пропонуємо змінити порядок вивчення матеріалу і ознайомити учнів зі всіма видами чотирикутників одночасно: спочатку ввести означення, потім властивості і далі ознаки.*** Таким чином календарне планування теми «Чотирикутники» (16 год) матиме наступний вигляд (див. табл. 2.8).

Таблиця 2.8

Календарно-тематичний план вивчення теми «Чотирикутники»

№	Зміст навчального матеріалу	Вимоги до загальноосвітньої підготовки учнів
1	Чотирикутник, його елементи	**Розпізнає** опуклі і неопуклі чотирикутники. **Описує** чотирикутник і його елементи. **Наводить** приклади матеріальних об'єктів, моделями яких є чотирикутник. **Зображує** та знаходить на малюнку чотирикутник.
2-4	Види чотирикутників: паралелограм, прямокутник, ромб, квадрат, трапеція. Їх властивості.	**Описує** чотирикутники, зазначені в змісті. **Наводить** приклади матеріальних об'єктів, моделями яких є паралелограм, прямокутник, ромб, квадрат і трапеція. **Формулює** означення вказаних у змісті чотирикутників **і доводить** основні їх властивості. **Зображує** та **знаходить** на малюнку види чотирикутників.
5	Ознаки паралелограма, прямокутни-	**Формулює і доводить** ознаки, вказаних у змісті чотирикутників.

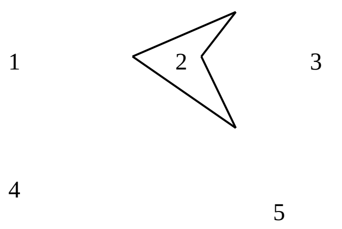
	ка, ромба, квадрата і трапеції	
6-16	Розв’язуваннязадач	**Застосовує** вивчені означення і властивості для розв’язування задач. **Будує** математичні моделі для розв’язування прикладних задач.

Такий підхід дозволяє значно зменшити час на вивчення нового матеріалу. Так як властивості різних видів чотирикутника легко побачити на малюнку, а їх доведення ґрунтується на ознаках рівності трикутників, з якими школярі добре знайомі, немає необхідності послідовно доводити всі властивості. Достатньо буде, якщо кожен учень самостійно доведе принаймні дві-три властивості. При цьому з’являєтьсяможливість приділити увагу розв’язуваннюрізнихвидів задач: на обчислення, на доведення, на побудову.

Пропонуємо один із варіантів методики одночасного введення означень та властивостей всіх видів чотирикутників, які вивчаються у школі.

Спочатку слід ввести поняття чотирикутника. Усі діючі підручники з математики пропонують конструктивне означення цього поняття. Однак у підручнику [19] зазначається, що «фігуру, що складається з чотирикутника та його внутрішньої області, також називають чотирикутником» [19, С.6]. Тобто до поняття чотирикутника входить не лише його зовнішня границя, а й внутрішня частина площини. На нашу думку, таке означення є найбільш вдалим, оскільки спрощує в подальшому процес ознайомлення учнів з поняттям многокутника та знаходження його площі.

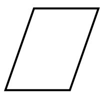
Важливим для розуміння властивостей видів чотирикутників, що вивчаються у школі, є коректне з точки зору психологічних особливостей підлітків введення поняття опуклого та неопуклого чотирикутника. Зробити це варто у ході обговорення кількох побудованих чотирикутників (див. мал. 2.7), причому учням слід запропонувати об’єднати їх у дві групи за величиною внутрішніх кутів. Зро-



Мал.2.7

зуміло, що до першої групи належатимуть чотирикутники 1, 3, 5 (у них градусна міра кутів менша за 180°), а до другої – 2 і 4 (у них наявний один кут з градусною мірою, більшою за 180°). Далі необхідно повідомити школярам, що чотирикутники першої групи належать до так званих опуклих фігур (саме вони вивчатимуться в шкільному курсі геометрії), а чотирикутники другої групи – до неопуклих. При цьому варто наголосити, що характеристичною властивістю довільної опуклої фігури є те, що відрізок, який з'єднує дві будь-які точки фігури, повністю належить цій фігурі. Виконання цієї властивості слід продемонструвати на прикладах.

Ознайомлення учнів із видами чотирикутників та їх властивостями варто здійснити у ході практичної роботи. Для цього школярам слід роздати два набори: паперові моделі чотирикутників (див. мал. 2.8) та пронумеровані твердження про них:



Мал.2.8

1. Протилежні сторони паралельні.

2.Тільки дві протилежні сторони паралельні.

3. Всі кути прямі.

4. Всі сторони рівні.

Учні повинні самостійно співставити паперові фігури (див. мал. 2.8) із вище вказаними твердженнями і записати в чотирикутнику відповідний номер властивості.

Потім вчителю слід провести фронтальну бесіду такого змісту:

1. Чотирикутник, в якому записано цифру 1, має дві пари паралельних сторін і є паралелограмом. (Новий термін варто записати на дошці).

2. Скільки чотирикутників є у наборі, у яких записано окрім цифри 1, ще й інші цифри? Які ще властивості їм притаманні? Як називаються ці чотирикутники?

3. Чи є у наборі ще чотирикутник, у якому записана лише одна цифра? Яка властивість притаманна цьому чотирикутнику? Такий чотирикутник на-

зивається трапецією. (Новий термін варто записати на дошці). Скільки трапецій у наборі? Чим вони відрізняються?

Потім слід ввести поняття діагоналі чотирикутника. Для цього вчитель пропонує учням задачу:

Задача 2.21. У клас зайшли чотири хлопчика. Привітавшись, вони обмінялися рукостисканнями. Скільки було рукостискань?

Після того, як учні розв’яжуть цю задачу, їм необхідно на зображенні паралелограма та інших видів чотирикутників добудувати дві прямі, яких не вистачає.

Продемонструємо спосіб вивчення властивостей діагоналей на прикладі квадрата. Школярам варто запропонувати наступні завдання:

1. Візьміть паперову модель квадрата і завдяки перегинанням отримайте дві діагоналі.

2. Порівняйте довжини цих діагоналей (*Учні вимірюють довжини діагоналей лінійкою та роблять висновок про їх рівність.*).

3. Як діагоналі розташовані одна відносно іншої?

4. Як діагоналі поділяються точкою перетину? (*Учні вимірюють довжини частинок діагоналей лінійкою та роблять висновок про їх рівність.*)

5. На які фігури поділяється квадрат кожною діагоналлю?

6. Що можна сказати про ці фігури?

7. Порівняйте їх між собою.

8. Як поділяються кути квадрата діагоналями?

Ознайомившись за допомогою моделі квадрата із властивостями його діагоналей, учні в зошитах з допомогою вчителя чи у процесі групової роботи доводять ці властивості, використовуючи відомі їм геометричні факти.

Потім варто провести із школярами бесіду стосовно того, які з доведених властивостей діагоналей квадрата притаманні іншим видам чотирикутників, зокрема паралелограму, прямокутнику, ромбу та трапеції. Довести їх слід запропонувати учням вдома. При цьому слід наголосити, що малюнки, які школярі використовуватимуть у процесі доведення відповідних теорем є їх *образними моделями*.

Що стосується поняття висоти, то у авторів діючих підручників з математики різний підхід до цього питання: у підручнику [19] висота паралелограма означується в темі «Площа паралелограма» наприкінці 8 класу, у підручнику [23] – відразу після введення поняття паралелограм. Ми вважаємо, що *раннє введення поняття висоти дозволить урізноманітнити систему задач.*

Після проведення вище вказаної роботи обов'язково слід зробити з учнями *висновки:*

1. Перерахувати всі види чотирикутників, що наявні в наборі (див. мал. 2.8), і обговорити питання, чи є чотирикутники, що не належать до жодного з цих видів, навести відповідні приклади.

2. Дати означення кожному виду чотирикутників. Перші спроби зробити це були у ході фронтальної бесіди, тому варто прочитати відповідні означення ще й у підручнику. Як правило, вони формулюються через найближчий рід та видові ознаки – це традиційний підхід. Хоча у підручнику [200] дещо інший підхід: кожен вид означується через поняття чотирикутника з відповідними властивостями.

3. Переформулювати означення через прийом підведення під поняття, тобто виділити суттєві ознаки. Наприклад, можна запропонувати задачу.

Задача 2.21. Учитель дав учням завдання вирізати з кольорового паперу квадрат. Надя перевірила вирізану фігуру, порівнявши довжини сторін. Аліна виміряла не сторони, а діагоналі. Данило перевірив, чи всі кути прямі. А Гліб порівняв всі чотири відрізки, на які поділилися діагоналі точкою перетину. Хто з учнів правий? Чому? Як з'ясувати, що вирізана фігура – дійсно квадрат?

4. Здійснити класифікацію чотирикутників.

5. Назвати властивості кожного з них у порядку: сторони, кути, діагоналі. Результати варто зафіксувати у звідній таблиці, зробити яку учні можуть вдома.

На закріплення видів чотирикутників слід запропонувати школярам знайти на малюнках (наприклад, див. мал. 2.9) та в навколишньому середовищі предмети, моделями яких вони є.

Мал.2.9

Якщо для учнів це завдання виявиться складним, вчителю слід надати їм підказку такого плану.

У повсякденному житті форму чотирикутника мають рами велосипедів, мотоциклів, де для жорсткості проведена діагональ.

У фізиці застосовують паралелограм при вивченні розкладання сил, при знаходженні рівнодіючої сили.

Форму прямокутника мають стіни будинків, підлога, стеля, грані олівців тощо.

У хірургічному відділенні для пересадки шкіри застосовують спеціальний апарат, який вирізає шкіру у вигляді квадратів. Їх розташовують на обпаленій ділянці в шаховому порядку, а так як шкіра має властивість рости у всіх напрямках, з часом проміжки між квадратами заростають.

У сільському господарстві застосовують квадратно-гніздовий спосіб посадки культур задля отримання кращого врожаю.

Рейковий домкрат для легкових автомобілів має форму ромба.

Вчитель повинен акцентувати увагу на тому факті, що вище вказані об'єкти, незважаючи на їхні розміри, колір, матеріал, з якого вони виготовлені тощо, є прообразами вивчених геометричних фігур. На цьому етапі навчання школярам доцільно дати означення математичної моделі, тобто: ***«Математична модель – це опис досліджуваного об'єкта, процесу чи деякої ситуації мовою математичних понять, формул, рівнянь, відношень тощо».***

Вчителю необхідно досягти того, щоб термін «математична модель» став звичним для учнів і використовувався у потрібних ситуаціях без зусиль та з достатньою свободою. При цьому слід домагатися правильного співвідношення між внутрішнім змістом поняття та його зовнішнім вираженням.

Також варто ознайомити школярів із видами моделей та запропонувати їм навести відповідні приклади.

Таким чином використання моделей у процесі вивчення видів чотирикутників, їх властивостей та ознак сприяє унаочненню навчального матеріалу, а отже, і глибокому розумінню його суті та свідомому засвоєнню.

Розглянемо застосування моделювання у процесі розв'язування задач.

Для усвідомлення можливості використання властивостей чотирикутників у повсякденному житті та з метою проведення профорієнтаційної роботи з учнями, їм варто запропонувати завдання типу:

1. Дано дошку з паралельними краями. Теслиреві потрібно відрізати кінець дошки під кутом 45°. Як це зробити без транспортира?

2. Як будівельнику, не вимірюючи кутів чотирикутної земельної ділянки, відведеної під фундамент будинку, пересвідчитись, що вона має форму прямокутника?

3. Столяр, щоб перевірити, чи має стільниця форму квадрата, виміряв довжину кожної зі сторін і побачив, що вони рівні. Чи правильна така перевірка? Чи достатньо виміряти діагоналі стільниці і переконатися, що вони рівні?

4. Чотири виробничі об'єкти на будівельному майданчику розміщені у вершинах опуклого чотирикутника. У якому місці слід побудувати завод будівельних матеріалів, щоб сума відстаней від нього до всіх виробничих об'єктів була найменшою?

5. Швачка викроїла з тканини чотирикутник, який повинен мати форму ромба. Як перевірити правильність виготовлення викрійки, не користуючись інструментами?

Подібні завдання сприяють розвитку не лише уміння співставляти реально існуючий об'єкт з його математичним еквівалентом (*образною моделлю*), а й переносити властивості геометричної фігури на її реальний прообраз (*здійснювати інтерпретацію математичних фактів*).

Щоразу під час розв'язування прикладних задач учням слід наголошувати, що при створенні математичної моделі, зокрема *образної*, реально існуючого об'єкта використовуються правдоподібні міркування. Вибір тих чи інших геометричних фігур як інтерпретації описаних в умові реальних об'єктів, може бути недостатньо строгим та обґрунтованим. Так, наприклад, при розв'язуванні задачі: «Усередині Верхнього ставу (дендропарк «Софіївка»), який має форму круга, міститься Острів кохання. Укажіть найкоротший маршрут катера, що з'єднує будь-які дві точки берега і має проміжний причал біля острова» за став круглої форми приймаємо круг, хоча в дійсності не існує водойми точної круглої форми,навіть якщо вона створена штучно. У той самий час під час розв'язування задачі: «Як має проходити магістраль, щоб відстані від неї до кожного з трьох даних населених пунктів були однаковими? Укажіть розташування пунктів, при якому ця відстань мінімальна» за населені пункти, що за розмірами майже завжди перевершують розміри ставу, ми приймаємо точки.

Все це робить розв'язок прикладної задачі правдоподібним. Крім того, під час розв'язування задачі в межах математичної моделі часто використовуються наближені обчислення, що, в свою чергу, теж впливають на результат.

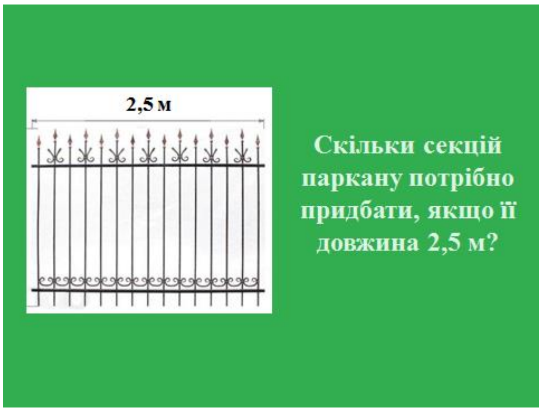
У такому разі можна говорити про ***зовнішню та внутрішню правдоподібність моделі.*** *Зовнішня характеризує адекватність моделі реальній життєвій ситуації, а внутрішня визначає можливість застосування математичних методів до описаної в задачі проблеми.* Тому під час розв'язування прикладних задач слід знаходити розумне співвідношення цих правдоподібностей, адже прагнення до високої зовнішньої правдоподібності призводить, як правило, до виникнення досить громіздких обчислень і, навпаки, побудова простої математичної моделі може спричинити значну похибку отриманого результату.

Продемонструємо застосування методів математичного моделювання до розв'язування задач.

Задача 2.22. Земельну ділянку розміром 30м×50м необхідно обнести металевим парканом, залишивши 4 м на ворота та хвіртку. Скільки секцій паркану потрібно придбати, якщо її довжина 2,5 м?

І. Побудова математичної моделі

Хоча в задачі йде мова про об'єкти добре відомі учням, варто продемонструвати їх на мультимедійній дошці (див. мал. 2.10).



Мал.2.10

Потім учитель має надати учням пояснення такого плану:

Геометрія – це наука, яка використовує ідеалізовані поняття, такі як «пряма», «площина», «квадрат», «куля» і т.д. Всі реальні прообрази цих понять насправді мають на своїй поверхні певні нерівності, а деякі з них навіть дещо відхиляються від «ідеальної» форми. І якби ми в обчисленнях враховували такі дрібниці, вони були б дуже громіздкими та вимагали великих затрат часу. Саме тому ми вивчаємо ідеальні форми реальних об’єктів, і хоча отримані формули при застосуванні їх до предметів навколишньої дійсності, дають наближений результат, він є достатнім для практичних потреб.

Подальшу роботу над задачею можна провести у формі фронтальної бесіди:

Учитель: Форму якої геометричної фігури має земельна ділянка?

*Очікувана відповідь:*Оскільки в умові задачі вказано два виміри ділянки, то це прямокутник.

*Учитель:*Що слід знайти, щоб дати відповідь на запитання задачі?

Очікувана відповідь: Щоб знайти кількість металевих секцій паркану, необхідно спочатку обчислити довжину самого паркану.

*Учитель:*Як це можна зробити?

*Очікувана відповідь:*Для цього варто знайти периметр ділянки, тобто периметр прямокутника: $(30+50)\cdot 2$

*Учитель:*Знаючи тепер довжину паркану, як знайти кількість його секцій?

*Очікувана відповідь:*Щоб відповісти на запитання задачі, слід обчислити довжину паркану без воріт та хвіртки і отримане число поділити на довжину однієї секції, тобто $((30+50)\cdot 2-4):2{,}5$

*Учитель:*Отже, вираз $((30+50)\cdot 2-4):2{,}5$ є *знако-символьною* моделлю задачі.

ІІ. Розв'язуваннязадачі в межах математичної моделі.

Обчисливши значення числового виразу, отримуємо:$((30+50)\cdot 2--4):2{,}5=(80\cdot 2-4):2{,}5=156:2{,}5=62{,}4$

ІІІ. Інтерпретація отриманого розв'язку

Оскількипридбати 62,4 секційметалевогопарканунеможливо, то округлюємо результат з надлишком і отримуємо 63 секції.

Отже, для того щоб земельну ділянку розміром 30м×50м обнести металевим парканом, залишивши 4 м на ворота та хвіртку, необхідно придбати 63 секції, довжиною 2,5 м.

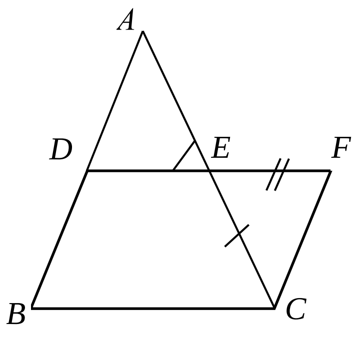
Подібні задачі слід пропонувати учням якомога частіше, оскільки їх розв'язування сприяє не лише засвоєнню теоретичного матеріалу, а й обґрунтуванню необхідності його вивчення для подальшого застосування у повсякденному житті (див. 1.2.2).

Оскільки школярі вже знайомі з поняттям математичної моделі, знають деякі її види та вміють розв'язувати задачі з використанням методів математичного моделювання, варто продемонструвати їм задачі, для розв'язування яких використовується лише знако-символьна модель. Наприклад:

Задача 2.23. Яким чином перекроїти заготовку, яка має форму рівнобічного трикутника, в паралелограм без втрат матеріалу?

І. Побудова математичної моделі

Нехай заготовка має форму рівнобічного трикутника *ABC (AB = BC)*. Його потрібно перебудувати в паралелограм.



Мал. 2.11

ІІ. Розв'язуваннязадачі в межах математичної моделі.

Проведемо у трикутнику *ABC* середню лінію *DE* (див. мал. 2.11) і повернемо його на кут 180° навколо точки *E* до накладання сторони *EA* на *EC*. $\angle DEA = \angle FEC$як вертикальні. Точки *D*і*E*лежать на одній прямій. *DE//BC*, а отже, і *DF//BC*, *BC=2DE=DF*. Тоді за ознакою паралелограма маємо, що *BDFC*– паралелограм. Мал. 2.11 і є *образною моделлю*задачі.

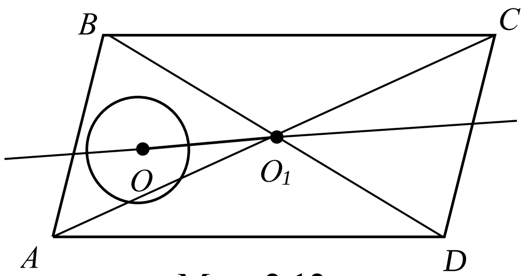
ІІІ. Інтерпретація отриманого розв'язку

Отже, для того щоб перекроїти заготовку з рівнобічного трикутника на паралелограм без втрат матеріалу, потрібно розрізати трикутник по середній лінії і скласти з отриманих деталей паралелограм.

Після цього варто запропонувати учням знайти інші способи розв'язання задачі, тобто перекроювання заготовки.

Розв'язування наступної задачі передбачає розгляд допоміжної задачі.

Задача 2.24. На земельній ділянці, що має форму паралелограма, вирита кругла водойма. Власник змушений продати половину ділянки, але за однієї умови: у його власності має залишитися половина ставка. Як розмежувати цю ділянку?



Мал. 2.12

І. Побудова математичної моделі

Вважатимемо, що паралелограм *ABCD* – це описана в умові задачі ділянка, а круг, що знаходиться всередині паралелограма, – став (див. мал. 2.12). Необхідно провести пряму, яка б поділила навпіл паралелограм і розташований у ньому круг.

ІІ. Розв'язуваннязадачі в межах математичноїмоделі.

Аналіз.На цьому етапі слід запропонувати школярам дві задачі-підказки:

1. Як поділити навпіл паралелограм?

2. Як поділити навпіл круг?

Залежно від підготовки класу учням можна їх розв'язати або ж самостійно в зошитах, або ж під керівництвом учителя на дошці. У результаті учні дізнаються, що кожна пряма, яка проходить через точку перетину діагоналей і через центр круга, ділить їх навпіл, тобто на частини однакової площі.

Після цього школярі отримують шукану відповідь: пряма, яка проходитиме через точку перетину діагоналей паралелограма та центр круга, задовольнятиме умову задачі.

Побудова.

1. Побудуємо діагоналі *ACiBD*. Вони перетнуться у точці O_1.

2. Знайдемо центр круга – точку *O*.

3. Проведемо пряму через точки *O* і O_1. ПрямаOO_1 – шукана.

Мал. 2.12 є *образною моделлю* задачі.

Доведення безпосередньо випливає з аналізу.

Дослідження. Якщо точки *O* і O_1 різні, то, оскільки розташування прямої визначається двома точками, задача матиме один розв'язок. Якщо ж точки *O* і O_1 збігаються, то існує нескінченна множина прямих, що задовольняють умову, тобто задача матиме безліч розв'язків.

ІІІ. Інтерпретація отриманого розв'язку

Отже, для розмежування ділянки на дві рівні частини необхідно провести пряму через центри цієї ділянки та ставу.

Розв'язування вище вказаних задач та задач, дібраних нами (див. додаток А), сприяє *формуванню в учнів уміння обирати доцільні моделі до задач*, що є одним із основних завдань навчання учнів методів математичного моделювання на початковому етапі.

2.2.2. Формування навичок математичного моделювання у процесі вивчення змістової лінії «Геометричні величини»

Поняття величини є одним із найважливіших не лише в математиці, а й у повсякденному житті. Це пов'язано з тим, що крізь призму величин описуються реальні властивості об'єктів та явищ, відбувається пізнання навколишньої дійсності, тобто здійснюється перехід від описового до кількісного вивчення характеристик (математизація знань про природу). Геометричні величини (довжина, градусна міра кута, площа, об'єм) допомагають встановити як міжпредметні зв'язки (з фізикою, хімією, економікою і т.д.), так і внутрішньопредметні – з числовими системами. Наявність великої кількості життєвих та професійних ситуацій, в яких необхідно виміряти величину чи обчислити її значення за формулою, зумовлює виокремлення геометричних величин в одну з найважливіших змістових ліній ШКМ, вивчення якої є наскрізним.

Особливості вивчення геометричних величин в основній школі розкрито у нашій публікації [180].

Програма з математики [128] ставить певні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів основної школи стосовно вивчення геометричних величин. Зокрема, опанувавши цю змістову лінію, учень:

1. Пояснює, що таке площа многокутника, і описує основні її властивості.

2. Володіє практичними навичками використання вимірювальних, креслярських та допоміжних інструментів для зображення геометричних фігур, а також для вимірювання довжин відрізків та градусних мір кутів.

3. Знаходить довжину відрізка, градусну міру кута та площу многокутника, використовуючи властивості і формули.

4. Застосовує вивчені властивості і формули до розв'язування прикладних задач.

Таким чином вивчення геометричних величин включає два аспекти:

1) поняття величини (довжини, площі тощо) – формально-логічний аспект;

2) інструменти, використовуючи які, вимірюється величина, та закони, правила і формули, з допомогою яких вона обчислюється, – прикладний ас-

пект [140].

У школі акцент більше робиться на прикладний аспект: учні розв'язуютьвеликукількість задач на обчислення величин, хочазмістцих задач, як правило, відірванийвіджиття.

Пропедевтика геометричних величин у школі відбувається у початкових та 5 – 6 класах і передбачає формування на інтуїтивному рівні уявлень про величини, їх властивості та розвиток навичок практичного вимірювання, а також введення формули обчислення площі прямокутника і об'єму прямокутного паралелепіпеда. Методика пропедевтичного вивчення геометричних величин представлена в 2.1.3.

У основній школі відбувається ознайомлення школярів із аксіомами вимірювання довжин відрізків і градусних мір кутів, поняттям площі, об'єму та їх властивостями; відпрацювання навичок розв'язування відповідних задач.

Розглянемо методику вивчення кожної геометричної величини, що входить в курс геометрії основної школи, окремо.

І. Довжина. У шкільному курсі геометрії довжина як величина вивчається стосовно таких фігур: відрізка, кола, їх частин та об'єднань.

Вивчення довжини відрізка починається з перших уроків геометрії, коли учні знайомляться з найпростішими геометричними фігурами.

У процесі аналізу діючих українських і російських підручників нами виявлено різні підходи до вивчення довжини відрізка.

У підручнику [18] у неявному вигляді пропонується аксіоматичне означення довжини відрізка, хоча саме поняття аксіоми не вводиться. Подання матеріалу супроводжується значною кількістю прикладів, а основні властивості вимірювання відрізків спеціально виділені в тексті жирним шрифтом. Такий підхід є достатньо науковим, так як сформульовані всі аксіоми довжини відрізка, і доступним для сприймання 12-річних підлітків.

Подібний підхід здійснено у підручнику [19]. Відмінність лише у тому, що автор окремо виділяє властивість відкладання відрізків.

Своєрідним є підхід І. Шаригіна [200]. На початку курсу автор пропонує цікаву бесіду про оточуючі об’єкти та їх виміри: тіло має три виміри (довжина, ширина і висота), поверхня – два (довжина і ширина), лінія – один (довжина), точка – жодного. Потім іде мова про можливість вимірювання довжини відрізка за умови наявності одиниці вимірювання. При цьому зазначається: «Что такое длина отрезка и как можно измерить отрезок, считаем известным» [200, С. 24]. А далі виділяються по суті аксіоми вимірювання відрізків, причому до їх переліку додається властивість про сталість відношення довжин двох відрізків незалежно від вибору одиниці їх вимірювання.

Таким чином, підсумовуючи все вище зазначене, можна стверджувати, що у всіх підручниках у тій чи іншій мірі здійснено аксіоматичний підхід до вивчення поняття довжини відрізка.

Згідно програми [128] на вивчення теми «Елементарні геометричні фігури та їх властивості» виділено 8 год. Ми пропонуємо організувати процес навчання наступним чином (див. табл. 2.9).

Таблиця 2.9

Календарно-тематичний план вивчення теми «Елементарні геометричні фігури та їх властивості»

№	Зміст навчального матеріалу	Вимоги до загальноосвітньої підготовки учнів
1	Чим займається геометрія? Основні геометричні поняття	**Пояснює,** що таке геометрія, планіметрія, геометрична фігура. **Описує** точку, пряму, промінь, площину. **Наводить** приклади матеріальних об’єктів, моделями яких є точка, пряма, промінь, площина. **Формулює** основні властивості розміщення точок на прямій. **Зображує** за допомогою креслярських інструментів точки, прямі, промені.
2	Відрізки та їх довжини	**Пояснює**, як знайти довжину відріка. **Описує** відрізок. **Формулює:** означення рівних відрізків, середини відрізка; основні властивості геометричної величини. **Знаходить** довжину відрізків, використовуючи властивості їх вимірювання. **Зображує** за допомогою креслярських інструме-

		нтів відрізки.
3	Кути та їх міри	**Описує** кут, його види. **Формулює:** означення рівних кутів, бісектриси кута. **Знаходить** градусну міру кутів, використовуючи властивості їх вимірювання. **Зображує** за допомогою креслярських інструментів кути.
4-8	Розв'язуваннязадач	З**астосовує** вивчені означення і властивості для розв'язування задач. **Будує** математичні моделі для розв'язування прикладних задач.

Оскільки в курсі математики 5 класу школярі у неявному вигляді знайомляться з правилами вимірювання довжин відрізківми пропонуємо на другому уроці сформулювати означення довжини відрізка та визначити властивості, які воно задовільняє.Для цього необхідно нагадати учнями, як відбувається процес вимірювання довжини відрізка. Варто наголосити на тому, що спочатку із множини відрізків слід вибрати відрізок, довжина якого вважається рівною одиниці і визначити, скільки разів одиничний відрізок повністю укладається у заданому відрізкові. Може виявитися, що відрізок, прийнятий за одиницю виміру, не вкладається ціле число разів у заданому відрізку – є залишок. Тоді одиничний відрізок ділять на рівні частини, зазвичай на 10 рівних частин, і визначають, скільки разів одна така частина вкладається в залишку. Але можливо, що і взята частина одиниці виміру не вкладається в залишку ціле число разів, і отримується новий залишок. Тоді для більш точного вимірювання заданого відрізка вказану частину одиничного відрізка можна розділити на 10 рівних частин і продовжити процес вимірювання. Подумки цей процес можна продовжувати і далі, вимірюючи довжину відрізка з усе більшою точністю. На практиці, однак, слід наголосити учням, користуються наближеними значеннями довжин відрізків, тобто вимірюють довжину відрізка з точністю до поділки шкали вимірювального інструменту.

Підсумовуючи вище вказане, вчитель може запропонувати учням наступне означення довжини відрізка:

Довжина відрізка – це число, що показує, скільки разів одиничний

відрізок і його частини укладаються в даному відрізку.

З цього означення випливають ***основні властивості довжини відрізка:***

➢ Кожен відрізок *AB*має невід'ємну довжину, причому ця довжина-нульова тоді і тільки тоді, коли точки *A* і *B* співпадають.

➢ Якщо точка *C* належить до відрізка*AB*, то довжина відрізка *AB* дорівнює сумі довжин відрізків *AC* і *CB*.

З основних властивостей довжини відрізка випливають її ***інші властивості***, зокрема:

➢ Рівні відрізки мають рівні довжини.

➢ Якщо відрізок *AB* складається із скінченної кількості відрізків без спільних внутрішніх точок, то довжина відріка *AB* дорівнює сумі довжин цих відрізків.

➢ Якщо відрізок *AB* є частиною відрізка *CD* і *AB* та *CD* не є рівними, то довжина відрізка *AB* є меншою за довжину відрізка *CD*.

Окрім довжини відрізка, в курсі планіметрії вивчається довжина кола. У всіх підручниках [18, 25] методика вивчення цього питання майже ідентична:

1). Пропонується наочне представлення довжини кола як довжини відрізка (у ході виконання практичної роботи з допомогою круглого тіла та нитки).

2). Розглядається ідея довжини кола як границі периметра вписаного в нього многокутника.

3). Доводиться теорема про сталість відношення довжини кола до його діаметра, вводиться число π,знаходиться його значення з певною точністю, виводиться формула $L = 2\pi r$.

Оскільки нами була запропонована відповідна ВРнМ у 6 класі (див. додаток Б), то учні уже мають уявлення про довжину кола, число π та формули $L = 2\pi r$ і $S = \pi r^2$. Тому учителю варто зосередитись на доведеннях відповідних теорем, а вивільнений час приділити розв'язуванню прикладних задач.

II. Площа. Систематичне вивчення площ відбувається у 8 – 9 класах. Програмою[128] визначена така послідовність тем:

1. Площа прямокутника, паралелограма, ромба, трикутника (за сторо-

ною та висотою, проведеною до неї).

2. Площа трапеції.

3. Площа трикутника (за формулою Герона, за двома сторонами і кутом між ними, за радіусами вписаного і описаного кола).

4. Площа круга та його частин.

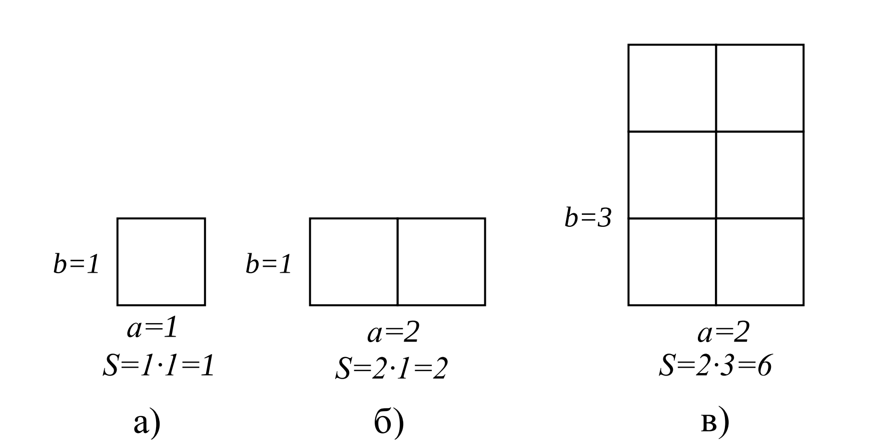
Поняття площі довільної фігури у підручниках не вводиться, основна увага приділена виведенню формул площ конкретних фігур.

Лише у підручнику [23] формулюється більш загальне поняття площі: «Кожен плоский многокутник займає частину площини. Якщо цю частину площини виразити деяким числом, то дістанемо площу многокутника» [23, С.132]. Також пропонуються два способи виведення формули площі фігури. Подібним чином поняття площі плоскої фігури вводиться і в підручнику [200]. За допомогою системи запитань автор приводить школярів до висновку, що «площадь – эточисло, которое ставится в соответствие ограниченной плоской фигуре» [200, С. 237]. У підручнику [19] площа многокутника означається як величина, що має визначені властивості.

Що стосується обчислення площ конкретних фігур, то це питання розглядається у всіх підручниках досить детально.

Зупинимося на площі чотирикутників.

Основою для виведення формул площ окремих видів чотирикутників є площа прямокутника. У підручниках [19, 200] теорема про площу прямокутника доводиться для двох випадків: якщо довжини сторін виражаються натуральними числами; якщо довжина хоча б однієї із сторін є дробовим або ірраціональним числом. Однак наведені доведення досить важко сприймаються учнями і, як свідчить практика роботи у школі, не усвідомлюються ними. *Ми пропонуємо дещо інший шлях виведення формули для обчислення площі прямокутника, який ґрунтується на використанні методу неповної індукції.*



Мал. 2.13

Розглянемо прямокутник, сторони якого рівні 1 (див. мал. 2.13 а)). Очевидно, що його площа дорівнює 1. Назвемо цей прямокутник одиничним квадратом. Розглянемо тепер прямокутник, який складається з двох одиничних квадратів (див. мал. 2.13 б)). Зрозуміло, що його площа буде рівною 2. Оскільки сторони цього прямокутника рівні 2 і 1, то $S=2\cdot1=2$. Аналогічні міркування проведемо стосовно прямокутника, який складається з 6 одиничних квадратів (див. мал. 2.13 в)). Отримаємо $S=2\cdot3=6$. Ці приклади дають підставу стверджувати, що площа довільного прямокутника з вимірами aта b визначається за формулою $S= a\cdot b$.

Після цього вчитель має переконатися з учнями, що для площі прямокутника, яка визначена за формулою $S= a\cdot b$, виконуються основні властивості площі.

Для 12 – 13-річних школярів, враховуючи їхні вікові особливості, вище наведене доведення є досить зрозумілим, оскільки застосовуються *образні моделі*(див. мал. 2.13).

Далі у всіх підручниках послідовно, використовуючи формулу площі прямокутника, виводяться формули площ паралелограма, трикутника, трапеції. Методика виведення цих формул добре відпрацьована і, як правило, не викликає труднощів у школярів. *Ми пропонуємо доведення кожної із теорем супроводжувати динамічними моделями, зокрема flash-роликами, використовуючи комп'ютерніпрезентаціїчимультимедійнудошку.* Для більшої наочності варто запропонувати учням виготовити власноруч з картону або цупкого паперу моделі геометричних фігур, зокрема чотирикутників, і на практичній роботі вивести формули для обчислення відповідних площ.

Фрагмент уроку

Тема: Площа паралелограма

Мета: вивести формулу для обчислення площі паралелограма; довести відповідну теорему; розвивати навички конструювання, логічне мислення; виховувати культуру розумової праці, креативність.

Обладнання: паперові моделі паралелограма, ножиці.

Тип уроку: практична робота.

Хід уроку

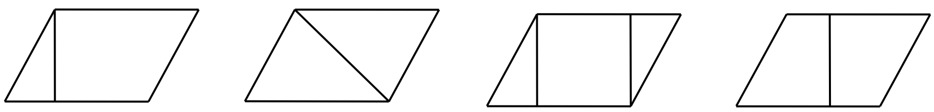
І. Актуалізація опорних знань

1. Що таке паралелограм? *(Паралелограмом називається чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні.)*

2. Вкажіть на малюнку паралелограми. *(1, 4, 6)*

1) 2) 3) 4) 5) 6)

3. На які фігури можна розбити паралелограм? *(на трикутник і трапецію (1), на два трикутники (2), на два трикутники і прямокутник (3), на дві трапеції (4)).* Учням пропонується розрізати паперові моделі паралелограмів на частини.



1) 2) 3) 4)

4. Що таке площа фігури? (*Площа фігури – це число, що показує, скільки разів одиничний квадрат і його частини укладаються в даній фігурі.)*

5. Які основні властивості має площа фігури? (*1. Кожна фігура має невід'ємну площу. 2. Площа фігури дорівнює сумі площ фігур, на які вона розбивається і які не перетинаються між собою*).

6. Які ще властивості площі фігури ви знаєте? (*1. Рівні фігури мають рівні площі. 2.Якщо фігура складається із скінченної кількості фігур, що не мають спільних внутрішніх точок, то площа фігури дорівнює сумі площ цих фігур. 3. Якщо фігура F_1 є частиною фігури F_2 і F_1 та F_2 не є рівними, то*

площа фігури F_1 є меншою за площу фігури F_2.)

6. Площі яких фігур ми вже вміємо знаходити і за якими формулами? *(Площа прямокутника зі сторонами aіbзнаходиться за формулою $S = a{\cdot}b$, а площа квадрата зі стороноюа – за формулою $S = a^2$).*

II. Подача нового матеріалу

Після того як учні розглянули можливі способи розбиття паралелограма на фігури і згадали раніше вивчений матеріал, варто запропонувати їм знайти площу паралелограма. Якщо у школярів виникнуть труднощі, слід надати кілька підказок:

1). Зверніть увагу на перше розбиття паралелограма на фігури.

2). Як в даному випадку можна перетворити паралелограм на прямокутник?

Після наочного виведення формули обчислення площі паралелограма зі стороною a і висотоюh, проведеною до неї ($S = a{\cdot}h$), потрібно запропонувати учням оформити дане доведення математично. Як свідчить практика, доведення не викликає у школярів особливих труднощів.

Така практична робота сприяє кращому запам'ятовуванню теоретичного матеріалу і озброюєшколярів способом виведення формули для знаходження площібудь-якої фігури. У вигляді домашнього завдання варто запропонувати учням подібним чином вивести формули для обчислення площі трикутника і трапеції.

Першочерговими завданнями на початковому етапі навчання учнів методів математичного моделювання є формування умінь: виділяти суттєві характеристики об'єкта, процесу чи явища, що досліджується; обирати доцільну модель до задачі; виявляти і оцінювати ступінь точності отриманих результатів; поширювати знайдений спосіб розв'язання на подібні прикладні задачі.

У такій ситуації корисними будуть так звані ***задачі-«вкладки»,*** *що передбачають побудову на базі однієї елементарної задачі системи завдань, розв'язання кожного з яких потребує залучення нових знань, активізації додаткових умінь та навичок.* Наприклад, розглянемо таку задачу.

Задача 2.25. Класна кімната має розміри 5×8м. Знайдіть її площу.

Ця задача є елементарною, тому досить простими будуть для неї і математичні моделі (*образна та знако-символьна*), однак поставлені додаткові запитання дають змогу розкрити її прикладні можливості, збагатити і ускладнити модель. Зокрема:

1. Які ще лінійні розміри можуть бути у кімнати, яка рівновелика даній?

2. Чи існує в реальному житті кімната, один із лінійних розмірів якої дорівнює 1 м?

3. Як зміниться значення площі кімнати, якщо значення довжини кожної з її сторін збільшити удвічі?

4. Як зміняться значення лінійних розмірів кімнати, якщо значення її площі збільшити у 1,5 рази?

Запитання 1 – 2 формують в учнів розуміння реального походження даних, тобто дозволяють ситуацію, існуючу в математиці, перенести в реальну дійсність і з’ясувати її достовірність.

Запитання 3 – 4 сприяють засвоєнню структури формули для обчислення площі прямокутника.

Пропонуємо систему задач, створену на основі задачі 2.25.

Задача 2.26. Підлога класної кімнати має розміри 5×8м. Скільки банок фарби вагою 1 кг необхідно для фарбування підлоги, якщо витрати фарби на 1м^2 дорівнюють 120 г?

Задача 2.27. Якщо в кімнаті довжиною 8 м та шириною 5 м фарбувати нову підлогу, то технологія вимагає робити це тричі. Витрати для першого разу складають 150 г на м^2, для другого – 120 г на м^2, для третього – 70 г на м^2. Які загальні витрати фарби?

Задачі 2.26 і 2.27, незважаючи на спільність геометричної моделі, мають різні алгебраїчні представлення, а отже, і *знако-символьні* моделі у них будуть різні.

Розв’яжемо задачу 2.27.

I. Побудова математичної моделі

Так як у підлітків 13 років гарно розвинене наочно-образне мислення та уява, але не на високому рівні сформовані навички абстрактної побудови математичної моделі до задачі (див. 1.2.2.), варто запропонувати їм ряд додаткових запитань:

1) Форму якого геометричного тіла має класна кімната?

2) Яку форму має підлога класної кімнати?

Отримавши відповіді, учитель пропонує школярам абстрагуватися від можливих нерівностей підлоги у класній кімнаті і представити її у формі прямокутника, таким чином ідеалізувавши ситуацію. До речі, образну модель до цієї задачі будувати не обов’язково, оскільки учні, перебуваючи у класній кімнаті, добре уявляють, про що йде мова.

Таким чином в результаті маємо прямокутник зі сторонами 5 м і 8 м. Для того щоб знайти вагу фарби, необхідної для покриття підлоги, слід спочатку знайти площу отриманого прямокутника. Отже, числовий вираз $5 \cdot 8 \cdot 150 + 5 \cdot 8 \cdot 120 + 5 \cdot 8 \cdot 70 = 5 \cdot 8 \cdot (150 + 120 + 70)$ і буде шуканою *знако-символьною моделлю*.

II. Розв’язуваннязадачі в межах математичноїмоделі

Маємо: $5 \cdot 8 \cdot (150 + 120 + 70) = 40 \cdot 340 = 13600$

III. Інтерпретаціяодержанногорозв’язку

Отже, загальні витрати фарби на підлогу класної кімнати становлять 13600 г або 13,6 кг.

Після розв’язання цієї задачі варто задати учням кілька додаткових запитань типу:

1) Скільки банок фарби слід придбати, якщо вага однієї банки 0,75 кг?

2) Яку найменшу кількість банок фарби потрібно придбати, якщо в наявності є банки вагою 0,8 кг, 1,5 кг та 2 кг?

Такі запитання сприятимуть різносторонньому аналізу ситуації і вибору можливих шляхів її вирішення.

Наступні задачі стосуються проблем покриття підлоги.

Задача 2.28. Розміри паркетної дощечки 0,07×0,5м. Скільки упаковок дощечок потрібно для покриття підлоги у класній кімнаті, довжина якої 8 м, а ширина – 5 м? В упаковці містить 250 паркетних дощечок.

Задача 2.29. Довжина класної кімнати 8 м, а ширина – 5 м. Лінолеум без малюнка продається в рулонах завширшки 2 м. Скільки метрів лінолеуму необхідно придбати, щоб покрити всю підлогу?

Розв'язання цих задач передбачає розгляд різних варіантів покриття підлоги і необхідність здійснення вибору на користь одного із них за певним критерієм (естетичності, економності матеріалу чи грошових ресурсів, часу тощо).

Задача 2.30. Довжина класної кімнати 8 м, а ширина – 5 м. Лінолеум без малюнка продається в рулонах завширшки 1,5 м або 2,5 м. Скільки метрів лінолеуму і з якого рулону необхідно придбати, щоб покрити всю підлогу?

Модифікувати дану задачу можна, використавши запитання:

1. Скільки метрів лінолеуму завширшки 1,5 м (2,5 м) необхідно придбати, щоб покрити всю підлогу з найменшою довжиною швів?

2. Скільки метрів лінолеуму завширшки 1,5 м (2,5 м) необхідно придбати, щоб покрити всю підлогу з найменшою кількістю відходів? і т.д.

Такі задачі змушують учнів моделювати кілька можливих варіантів розв'язання (створювати різні *образні моделі*), аналізувати, обговорювати їх, приймати рішення, виходячи з власного життєвого досвіду. Це, в свою чергу, сприяє формуванню уміння обирати доцільну модель до задачі.

Загалом задачі-«вкладки» яскраво демонструють процес ускладнення математичної моделі, сприяють удосконаленню навичок математичного моделювання та якісному формуванню в учнів загальнологічних прийомів розумової діяльності, хоча і вимагають від учителя додаткових зусиль та часу.

Також доцільним, на нашу думку, є розв'язування задач з недостатніми або надлишковими даними.

Задача 2.31. Проведіть необхідні вимірювання і розрахуйте, яку кількість квадратних плит зі стороною 0,6 м необхідно придбати для монтування підвісної стелі у кімнаті у вас вдома.

Ця задача із недостатніми даними. Для її розв'язання необхідно знати розміри кімнати. І якщо *образну модель* до даної задачі побудувати легко, то створення *знако-символьної* може викликати труднощі. Враховуючи той факт, що значення недостатніх даних можна, як правило, взяти або ж з відповідної таблиці, або завдяки безпосереднім вимірюванням (як у задачі 2.30), слід звернути увагу школярів на можливість отримання похибки і необхідність її врахування.

Поступово зменшуючи кількість даних, учням варто запропонувати розв'язати задачі взагалі без заданих числових даних.

Задача 2.32. Розрахуйте, яку кількість рулонів шпалер (без підгонки малюнка) необхідно придбати для ремонту класної кімнати.

Подібні задачі сприяють формуванню в учнів навичок пошукової діяльності, комунікативних, вимірювальних та обчислювальних умінь.

Задачі з надлишковими даними виховують в учнів звичку більш вдумливо будувати зв'язки між даними і шуканими величинами, правильно здійснювати вибір математичної моделі.

Задача 2.33. Шкільний спортивний зал має розміри 18×9×6м (д×ш×в). Яка максимальна кількість школярів може одночасно перебувати у ньому, якщо норма на одного учня 1,25 м^2?

Корисними будуть для формування умінь математичного моделювання і задачі, дібрані нами (див. додаток А).

Оскільки у 6 класі учні вже ознайомилися з поняттям діаграми, її видами та способами побудови, доцільним буде запропонувати їм алгебраїчні задачі, які розв'язуються за допомогою діаграм. Це допоможе не лише озброїти школярів новим методом розв'язування задач, а й формуватиме цілісне уявлення про математику як науку.

Діаграма може використовуватися на різнихетапах розв'язування задачі. Підчас аналізу умови вона допомагаєучнямкращезрозуміти суть завдання, розкрити зв'язки між величинами (див. 2.1.1); у процесіпошуку способу розв'язання–скласти рівняння або числовий вираз (*знако-символьну модель*). Також діаграма можевикористовуватися для перевірки отриманого розв'язку.

Розглянемо застосування ***лінійної (одновимірної) діаграми*** (у 5 – 6 класах називалася схемою) до розв’язування прикладних задач.

Задачу 2.34. На одному складі вугілля у два рази більше, ніж на другому. Якщо з першого складу вивезти 750 т вугілля, а на другий привезти 350 т, то на обох складах буде вугілля порівну. Скільки тонн вугілля було на кожному складі спочатку?

Звичайно, цю задачу можна розв’язати і алгебраїчним методом, склавши рівняння, але варто продемонструвати школярам і *метод довжин*, який ґрунтується на побудові лінійної діаграми.

І. Побудова математичної моделі

Після ознайомлення з умовою задачі можлива наступна бесіда з учнями.

Учитель: Скільки різних ситуацій розглядається в задачі?

Очікувана відповідь: У задачі розглядається дві різні ситуації: початкова і кінцева.

Учитель: Як можна графічно відобразити початкову ситуацію?

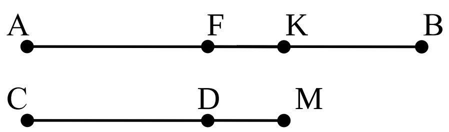
Очікувана відповідь: Можна побудувати два відрізки*AB* і *CD*, один із яких буде удвічі довший за інший. Перший відрізок відображатиме кількість вугілля на першому складі, а інший – на другому складі.

Учитель: А як від початкової ситуації перейти до кінцевої?

Очікувана відповідь: Щоб перейти від початкової ситуації до кінцевої, слід від відрізка *AB* відняти відрізок*KB*, умовно рівний 750 т, а до відрізка *CD* додати відрізок*DM*, умовно рівний 350 т.

Учитель: А добудовані відрізки беруться довільно?

Очікувана відповідь: Ні, варто враховувати той факт, що довжини кінцевих відрізків мають бути однаковими.



Мал. 2.13

Учитель: Побудовані відрізки і є лінійною діаграмою до задачі (див. мал.2.13), тобто *образною моделлю*.

ІІ. Розв’язуваннязадачі в межах математичноїмоделі

Нехай відрізок *AB* відображає кількість вугілля на першому складі, тоді відрізок CD = – відповідно на другому складі. Якщо з першого складу вивезти 750 т вугілля, а на другий привезти 350 т, то від відрізка AB слід відняти відрізок KB, умовно рівний 750 т, а до CD додати відрізок DM, умовно рівний 350 т. Таким чином маємо, що $CD=AF=FB$ (за побудовою), $AF+FK=AK=CM=CD+DM$ – за умовою, тому $FK=DM=350$, $FB=FK+KB=350+750=1100$, $CD=1100$, а $AB=2CD=2200$.

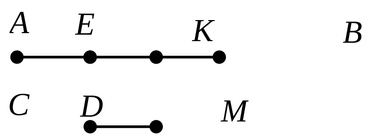
III. Інтерпретація одержанного розв'язку

Отже, на першому складі було 2200 т вугілля, а на другому – 1100 т.

Скориставшись лінійною діаграмою, можна набагато швидше скласти рівняння до задачі, причому не одне.

Дуже часто побудована лінійна діаграма дозволяє розв'язати задачу усно. Наприклад, розглянемо таку задачу.

Задача 2.35. На одній садовій ділянці було у 5 разів більше кущів смородини, ніж на другій. Після того як з першої ділянки на другу пересадили 22 кущі, то на обох ділянках кущів стало порівну. Скільки кущів смородини було на кожній ділянці спочатку?



Мал. 2.14

Розглянемо лінійну діаграму, побудовану до цієї задачі (див. мал. 2.14).

Нехай відрізок AB відображає кількість кущів смородини на першій ділянці, а відрізок CD= – на другій ділянці. Так як після пересадки на обох ділянках кущів стало порівну, розділимо відрізок $BE = AB - AE = \frac{4}{5}AB$ навпіл ($EK=KB$), від відрізка AB віднімемо BK і додамо його до CD. Тоді $BK = \frac{1}{2}BE = = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}AB = \frac{2}{5}AB = 2CD.$ За умовою задачі $BK=22$. Звідси маємо, що $BK = 22 = 2CD$, а тому $CD= 11$ і $AB=55$. Отже, на першій ділянці росло 55 кущів смородини, а на другій – 11 кущів.

Варто наголосити учням, що *лінійні діаграми використовуються пере-*

важно в тих задачах, в яких дано відношення значень величин і відображена одна ситуація в даний момент часу або дано відношення значень величин і відображені дві ситуації – первісна і кінцева. При розв'язуванні задач першого виду лінійна діаграма виступає в якості статичної *образної моделі*, тобто в процесі виконання завдання вона не змінюється і виконує лише ілюстративну функцію. Найбільший інтерес з точки зору використання лінійних діаграм в курсі геометрії представляють задачі другого виду. Побудова лінійної діаграми при їх розв'язуванні проходить у два етапи: спочатку будується діаграма, що відображає початковий (кінцевий) стан об'єктів, а потім згідно з умовою вона змінюється таким чином, щоб знову отримане зображення (діаграма) ілюструвало кінцевий (початковий) стан об'єктів. Зміна побудованої діаграми здійснюється шляхом дій над відрізками (додавання, віднімання і множення на число) [103].

Якщо ж одна з величин задачі визначається як добуток двох інших, то слід застосовувати *метод площ*, тобто будувати двовимірну діаграму. Перед побудовою *образної моделі*, вчителю потрібно встановити зв'язок між лінійними та двовимірними діаграмами. Для цього необхідно зауважити учням, що *у разі використання лінійних діаграм відрізками зображувалися значення однієї і тієї ж величини. Ці відрізки розташовувалися на паралельних прямих. У задачах, де розглядається добуток двох величин, відрізками будуть зображатися значення двох різних величин і відрізки будуть розташовуватися на двох перпендикулярних прямих так, щоб вони були суміжними сторонами прямокутника. Тоді площа прямокутника буде відповідати добутку цих величин, а отримане зображення буде називатися* ***двовимірною діаграмою.*** Наприклад, розв'яжемо таку задачу.

Задача 2.36. Моторний човен, швидкість якого у стоячій воді 15 км/год, пройшов за течією річки 35 км і проти течії 25 км. На шлях за течією річки було затрачено стільки ж часу, як і на шлях проти течії. Визначити швидкість течії.

І. Побудова математичної моделі

Учитель: Яка величина є невідомою в задачі? Як її можна позначити?

Очікувана відповідь: Невідомою є швидкість течії, її можна позначити x.

*Учитель:*Як знайти швидкість руху човна за течією та проти течії?

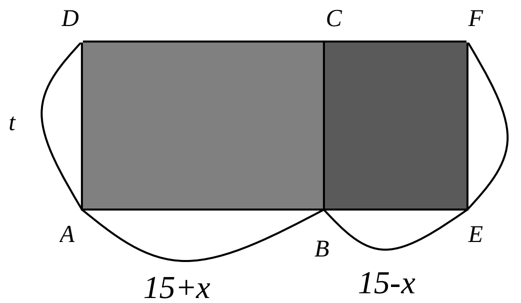
*Очікувана відповідь:*Швидкість руху човна за течією можна позначити (15+*x*), а проти течії – (15–*x*).

*Учитель:*Як пов’язані шлях зі швидкістю при рівномірному рухові?

*Очікувана відповідь:*Шлях – це добуток швидкості та затраченого часу.

*Учитель:*Яка геометрична величина знаходиться як добуток двох відомих величин?

Очікувана відповідь: Величина, що знаходиться як добуток двох відомих величин, – це площа прямокутника.



Мал. 2.15

*Учитель:*Правильно! Отже, як можна геометрично зобразити шлях 35 км, швидкість (15+*x*) км/год та затрачений час *t*?

Очікувана відповідь: У вигляді прямокутника *ABCD,* сторона *AB* якого відображає швидкість човна за течією річки (15+*x*), сторона *AD*– час *t*, а площа прямокутника – шлях, рівний 35 км (див. мал. 2.15).

*Учитель:*Яка рівність пов’язує площу прямокутника – шлях, рівний 35 км, з довжинами його сторін – швидкістю (15+*x*) та часом *t*?

Очікувана відповідь:$S_1 = AB \cdot AD = (15+x) \cdot t$буде дорівнювати шляху, пройденому човном за течією річки, тобто $35 = (15+x) \cdot t$.

*Учитель:*Як з цієї рівності знайти час *t*?

$$t = \frac{35}{15 + x}$$

Очікувана відповідь:

*Учитель:*Побудований прямокутник *ABCD* і є частиною двовимірної діаграми, тобто частиною *образної моделі* задачі, а рівність $t = \frac{35}{15 + x}$ – частиною *знако-символьної моделі* задачі.

Потім слід запропонувати учням самостійно побудувати аналогічну двовимірну діаграму руху човна проти течії річки. Одночасно варто звернути увагу на те, що висоти цих прямокутників мають бути однаковими – довжиною t , оскільки за умовою задачі човен рухався однаковий час за течією річки і проти течії. Тому прямокутники зручно зображати зі спільною стороною*CB*. У результаті дістається рівність $t = \frac{2s}{15 - x}$.

Отже, – *знако-символьна модель* задачі.

II. Розв'язуваннязадачі в межах математичноїмоделі

,

III. Інтерпретація одержаного розв'язку

Отже, швидкість течії річки 2,5 км/год.

За допомогою двовимірних діаграм можна скласти різні рівняння до однієї і тієї ж задачі та знайти більш раціональний шлях розв'язання.

Таким чином використання при розв'язуванні задач образних моделей, зокрема діаграм, допомагає учням оволодіти навичкою розв'язування прикладних задач, розширює їх математичний кругозір, сприяє розвитку абстрактно-логічного мислення, здатності до формалізації математичного матеріалу. Самостійна побудова діаграм розвиває кмітливість та винахідливість.

Для формування в учнів навичок математичного моделювання важливим є і використання інформаційно-комунікаційних технологій, зокрема застосування *інтерактивних моделей і динамічних flash-презентацій.*

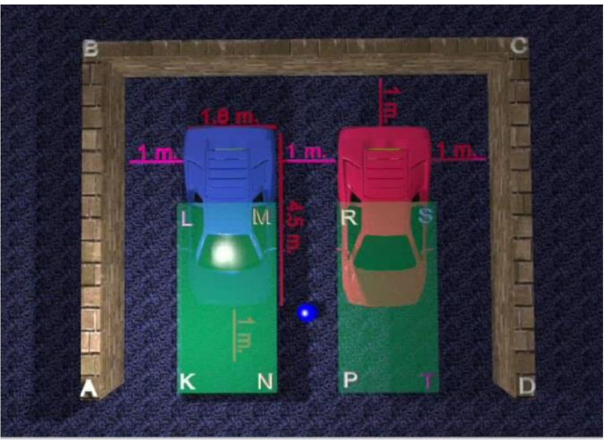
Розглянемо особливості використання flash-роликів на уроках геометрії на прикладі такої задачі.

Задача 2.37. Якими мають бути виміри гаража для двох автомобілів розмірами 4,5 м на 1,8 м, щоб між обома машинами та машинами і стінами залишався прохід шириною 1 м, а площа гаража була найменшою з можливих?

I. Побудова математичної моделі

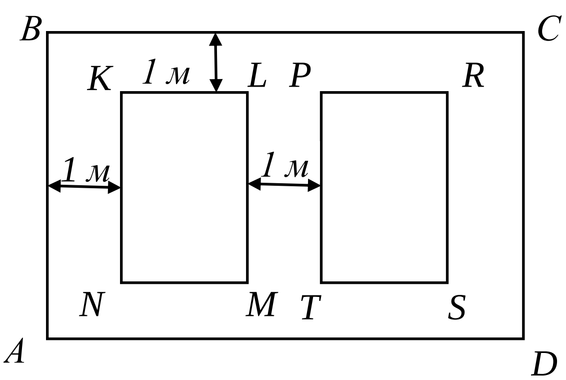
Хоча об'єкти, описані в умові задачі, добре відомі школярам, вчителю варто запропонувати їм роботу з наступним flash-роликом (див. мал. 2.16).

А потім продемонструвати *образну модель* до даної задачі (див. мал. 2.17).



Мал. 2.17

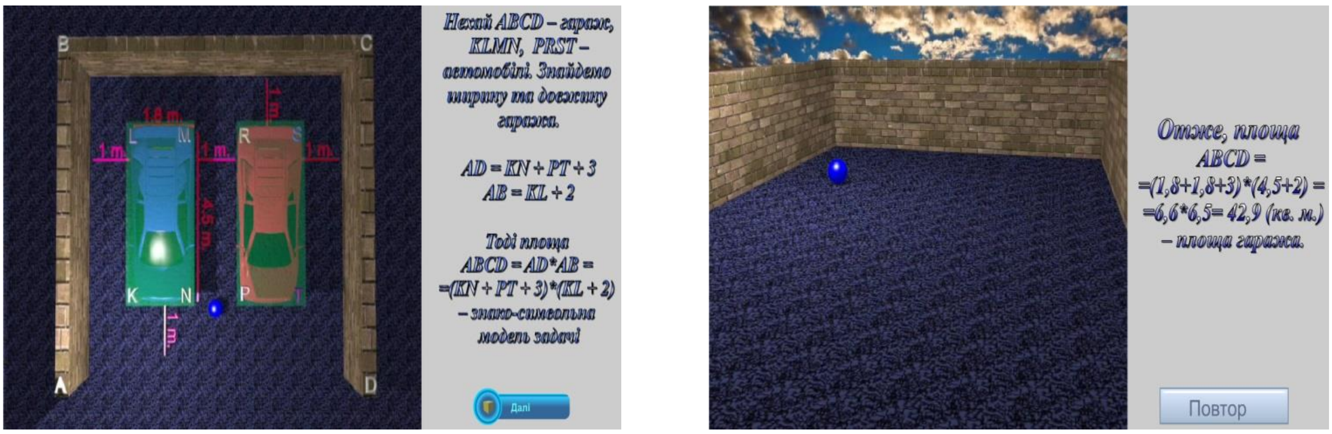
Після цього учителю слід запропонувати учням, абстрагуючись від матеріалу, з якого будується гараж, нерівностей його стін і т.д. та позначивши гараж і обидва автомобілі прямокутниками *ABCD, KLMN* і *PRST* відповідно, перенести *образну модель* в зошити та з'ясувати, що необхідно знайти, щоб відповісти на запитання задачі (див. мал. 2.18).



Мал. 2.18

II. Розв'язування задачі в межах математичної моделі

Обговоривши під час бесіди з учителем основні моменти розв'язування задачі, учні працюють в зошитах самостійно, користуючись побудованою образною моделлю. Для перевірки отриманого результату та культури ведення запису вчитель продовжує демонстрацію flash-ролика (див. мал. 2.19).



Мал. 2.19

III. Інтерпретація одержаного розв'язку.

Отже, виміри гаража – 6,6 м та 6,5 м , площа гаража при цьому дорівнює 42,9 м^2.

Після розв’язання задачі слід обговорити з учнями питання іншого розміщення машин у гаражі та відповідно отримання інших вимірів гаража.

Даний flash-ролик дозволяє змоделювати ситуацію, максимально наближену до реальності, що в свою чергу полегшує процес розуміння сутності задачі та її розв’язування і сприяє отриманню практико-орієнтованих знань.

Використання подібних flash-анімацій забезпечує активне сприйняття учнями нового навчального матеріалу, розвиток уміння застосовувати отримані теоретичні знання на практиці, підвищує мотивацію до навчання, допитливість школярів, а також дозволяє вчителеві організувати нові, нетрадиційні види навчальної діяльності, широко використовувати методи активного, діяльнісного навчання в організації творчої роботи школярів.

Детально питання використання flash-анімацій на уроках геометрії під час розв’язування прикладних задач висвітлено у нашій публікації [176].

Таким чином *застосування елементів математичного моделювання на уроках геометрії:*

*1.**На етапі вивчення нового матеріалу:** сприяє ознайомленню школярів з образними моделями понять та навчальними моделями методів доведення теорем; унаочнює властивості геометричних фігур; ставить школярів у ситуацію «відкриття» ними нових математичних фактів.*

*2. **На етапі застосування знань, умінь та навичок** сприяє більш глибокому і свідомому засвоєнню теоретичного матеріалу та підвищує життєву компетентність учнів.*

Отже, по закінченню вивчення курсу геометрії у 7 – 8 класах можна очікувати, що в учнів будуть сформовані:

- розширені уявлення про планіметричні фігури як математичні моделі;
- навички побудови кількох видів образних моделей: схем, таблиць, малюнків, зображень геометричних фігур та їх комбінацій;
- розширені уявлення про деякі властивості моделі;
- навички застосування методів математичного моделювання до дове-

дення теорем і розв’язування задач.

2.3. Основний етап вивчення математичного моделювання

Чинний Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти [65] не виділяє у якості окремої змістової лінії «Декартові координати та вектори на площині». Однак ***розгляд цієї теми має велике значення у процесі формування в учнів знань, умінь та навичок математичного моделювання, оскільки дає можливість ознайомити школярів з новими видами моделей та способами їх використання.***

Чинною програмою[128]для вивчення тем «Декартові координати на площині» та «Вектори на площині» виділяється по 10 год. За цей час учні повинні навчитися:

1) описувати прямокутну систему координат, вектор, модуль і напрям вектора, координати вектора, дії над векторами, а також рівність і колінеарність векторів;

2) записувати та доводити формули координат середини відрізка та відстані між двома точками;

3) формулювати властивості дій над векторами та означення скалярного добутку векторів, його властивості;

4) застосовувати вивчені означення, властивості, формули та рівняння фігур до розв’язування задач.

У програмі вище вказані теми вивчаються окремо і є розділеними в часі темою «Геометричні перетворення». На нашу думку, ***доцільно вивчати їх послідовно, починаючи з «Декартових координат на площині», оскільки вони нерозривно пов’язані між собою.***

Пропедевтика понять «координата точки», «координатна площина» починається вже у 5 класі, де вивчається координатний промінь і позначаються натуральні та дробові числа на ньому. Потім у 6 класі для зображення додатних та від’ємних чисел вводиться координатна пряма і виконуються вправи на знаходження координати точки та точки за її координатою. Лише після цього учні знайомляться з поняттям «прямокутна система координат на площині».

Знайомство доцільно розпочати із життєвої ситуації, добре знайомої кожному учневі: пошук власного місця у залі кінотеатру, актовій залі тощо. Також ***варто запропонувати школярам самостійно навести приклади використання системи координат у житті.*** Наприклад:

- Граючи в «морський бій» ми користуємося такою системою координат: кожна клітинка на ігровому полі визначається літерою і цифрою, зокрема літерами позначаються вертикалі ігрового поля, а цифрами – горизонталі.
- Схожа система координат є на шахівниці: горизонталі позначаються латинськими літерами, а вертикалі – цифрами.
- На квитках в цирк, на потяг, в театр тощо дано опис того, де знаходиться місце власника даного квитка: на квитках в цирк і в театр – це номер ряду і номер місця в цьому ряду, а на квитку на потяг– номер вагона і номер місця в цьому вагоні.

Надалі здобуті знання активно використовуються в курсі алгебри 7 – 9 класів під час побудови графіків функцій.

Вивчення у 9 класі теми «Декартові координати на площині» слід починати з повторення і узагальнення здобутих раніше знань та умінь. Зробити це можна у вигляді фронтального опитування:

1) Координатною площиною називається площина, на якій ... (*задана прямокутна система координат*).

2) Систему координат утворюють ... (*дві взаємно перпендикулярні координатні прямі*).

3) Області, на які вісі розбивають координатну площину, називають ... (*координатними чвертями*).

4) Координатна пряма Оx називається ... (*вісь абсцис*).

5) Координатна пряма Оy називається ... (*вісь ординат*).

6) Положення точки на координатній площині визначається … (*двома координатами*).

7) Перша координата точки називається ... (*абсциса*).

8) Друга координата точки називається ... (*ордината*).

9) Якщо абсциса точки дорівнює нулю, то точка лежить ... (*на вісі ординат*).

10) Якщо ордината точки дорівнює нулю, то точка лежить ...(*на вісі абсцис*).

11) Якщо обидві координати точки рівні нулю, то точка лежить ... (*на початку координат*).

Після цього варто запропонувати учням позначити на координатній площині точки за заданими координатами, визначити координати заданих точок, ***навести приклади застосування координат у повсякденному житті***(для моделювання ескізів промислових машин, устаткування, об'єктів на місцевості; під час проведення досліджень в галузі хірургії, виконання флюорографії, різноманітних знімків органів, кардіограм; у таблиці Менделєєва кожен елемент має своє місце в групі і підгрупі (координати елемента) тощо).

Подальше виведення формул для знаходження відстані між двома точками та координат середини відрізка особливих труднощів у школярів не викликає. На даному етапі вчителю слідзвернути увагу учнів на той факт, що ***поняття «відстань між двома точками A(x_1;y_1) і B(x_2;y_2)» має дві математичні моделі: образну – відрізок AB, довжину якого необхідно знайти,***

та знако-символьну – формулу AB = .

Розв’язування задач передбачає виконання арифметичних дій за виведеними формулами, однак слід продемонструвати школярам і практичне застосування даного матеріалу. Наприклад, детально розглянути такі задачі:

Задача 2.38.Основу драбини довжиною 6 м відсунуто від стіни на 1 м. На скільки знизиться верхній кінець драбини, якщо основу відсунути ще на 0,5 м? Розв'яжіть задачу, використовуючи систему координат.

Задача 2. 39.Два туристи, які знаходяться на відстані 100 м один від одного, одночасно почули вигук керівника групи. На якій найменшій відстані від кожного з них міг перебувати керівник у момент вигуку, якщо точно посередині між туристами стоїть дерево, яке в обхваті має 2,5 м?

Задача 2.40.Снаряд був запущений в точку $A(5, 6)$. Під час польоту сталося відхилення: снаряд упав у точці $B(7, 9)$ і вибухнув. Радіус ураження снаряду 5 км. Визначити, на яку відстань відхилився снаряд від заданої точки і чи виявилася ціль ураженою. Скласти рівняння кола, в межах якого снаряд зберігає вражаючу дію.

Задача 2.41.З літака вистрибнув десантник і приземлився в точці $B(5, 0)$, потім вийшов на базу супротивника в точку $C(1, 0)$. Після здійснення диверсії десантник прибув у вказане місце зустрічі в точку $D(-2, 0)$. Через 20 хвилин його підібрав вертоліт К – 60 "Ластівка". Визначити шлях, пройдений десантником.

Задача 2.42. Двом розвідникам було наказано з пункту A перейти в пункт D. Перший пішов по маршруту $A(3, 3)$ – $B_1(0, 0)$ – $C_1(3, 4)$ – $D(-5, 3)$, а другий по маршруту $A(3, 3)$ – $B_2(1, -3)$ – $C_2(-4, 0)$ – $D(-5, 3)$. З'ясувати, хто швидше прибуде в пункт D, якщо швидкість першого дорівнює 5 км/год, швидкість другого – 3,5 км/год?

У процесі їх розв'язування варто наголосити учням, що ***система координат – це самостійна математична модель, за допомогою якої розв'язується цілий спектр задач та вивчаються інші моделі, зокрема вектори.*** Також слід озброїти школярів **алгоритмом застосування методу координат**, який по своїй суті досить близький з методом математичного моделювання:

1) перевести умову задачі зі звичайної мови на мову координат;

2) розв'язати задачу мовою координат;

3) здобутий результат перевести на мову, якою сформульована задача.

Найбільш складним є перший етап алгоритму, який включає ***уміння:****обирати зручну систему координат, складати рівняння заданих фігур, визначати координати заданої точки, будувати точку за заданими координатами.*

Якщо останнім трьом вище наведеним умінням у школі приділяється достатньо часу, то вибір системи координат залишається поза увагою, хоча це – один із найважливіших моментів методу координат, який визначає в подальшому його результативність. *Обирати систему координат слід так, щоб алгебраїчні викладки при цьому були найпростішими*, інакше досить легку задачу можна зробити нерозв'язною. Тому на нашу думку, ***починаючи з 6 класу, необхідно формувати в учнів уявлення про можливість довільного вибору системи координат,*** пропонуючи їм завдання виду:

1) Довжина відрізка 4 см. Оберіть систему координат так, щоб кінці відрізка визначалися найпростіше.

2) Довжина відрізка 6 см. Оберіть систему координат так, щоб його початок мав координати (-3;0).

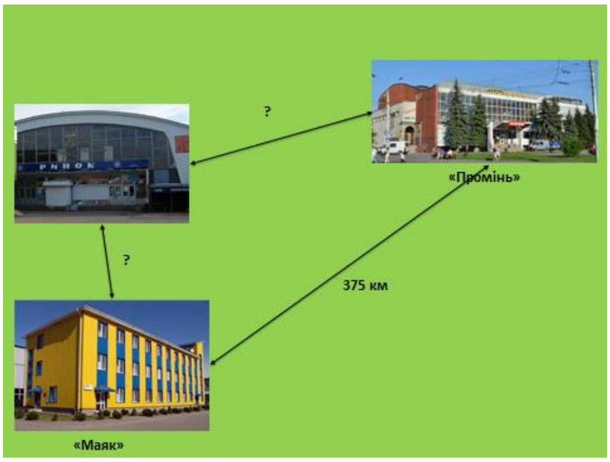
3) Побудуйте квадрат зі стороною 2 см і позначте в ньому точку. Оберіть систему координат так, щоб задана точка мала координати: а) (1;1); б) (-1;1); в) (1;-1).

4) Побудуйте довільний прямокутний трикутник. Оберіть систему координат так, щоб координати його вершин визначалися найпростіше.

Сформовані на високому рівні вище наведені уміння дозволять розв'язувати не лише класичні задачі на застосування методу координат, а й нестандартні. Розглянемо наступну задачу.

Задача 2.43.Підприємства «Промінь» і «Маяк» виготовляють однорідну продукцію, яку реалізовують за однаковою ціною p. Однак підприємство «Промінь» користується більш сучасними та потужними вантажівками, тому транспортні витрати на перевезення однієї одиниці продукції «Променя» рівні 15 грн на 1 км, а «Маяка» – 30 грн на 1 км. Відстань між підприємствами 375 км. Ціна одиниці продукції для покупця у торгівельному центрі складається із вартості p, транспортних витрат та торгівельних надбавок q. Як розмістити ринок збуту між двома підприємствами так, щоб ціна одиниці продукції кожного підприємства у торгівельному центрі для покупців була мінімальною?

І. Побудова математичної моделі



Мал.2.20

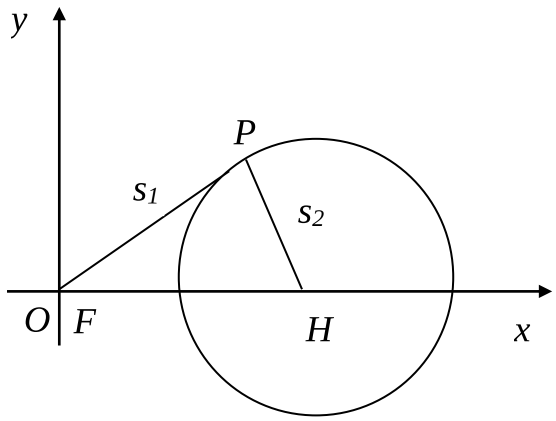
На даному етапі слід обрати зручну систему координат. Зробити це можна у процесі фронтальної бесіди зі школярами, демонструючи їм слайд із ситуацією, описаною в задачі (див. мал. 2.20).

Учитель: На слайді зображено два підприємства «Маяк» та «Промінь», відстань між якими 375 км. Як повинен розміщуватися ринок збуту, щоб виконувалася вимога задачі?

Очікувана відповідь: Ринок збуту має розміщуватися ближче до підприємства «Маяк», оскільки у нього більші витрати на перевезення однієї одиниці продукції.

Учитель: Як перейти від ситуації, зображеної у презентації, до геометричного малюнка?

Очікувана відповідь: Для цього варто підприємства і ринок збуту позначити точками F, H і P відповідно. У результаті отримаємо трикутник зі стороною FH=375 км.



Мал.2.21

Учитель: Як побудувати систему координат так, щоб вершини трикутника визначалися найпростіше?

Очікувана відповідь: Систему координат слід побудувати так, щоб вісь Оx проходила через точки F і H, а вісь Оy – через точку F. Тоді F(0;0), H(375;0), P($x;y$). (див. мал. 2.21)

Учитель: Як знайти ціну одиниці продукції у торгівельному центрі для кожного підприємства??

*Очікувана відповідь:*Ціна одиниці продукції з підприємства F буде рівна($p+15s_1+q$), а з підприємства H – ($p+30s_2+q$).

Учитель: За якої умови знайдені ціни будуть однаковими?

*Очікувана відповідь:*Знайдені ціни будуть однаковими, коли$p+15s_1+q=p+30s_2+q$, тобто $s_1=2s_2$.

*Учитель:*А коли ціна буде мінімальною для покупців?

Очікувана відповідь: Ціна для покупців буде мінімальною, коли s_1 набуватиме мінімального значення.

ІІ. Розв'язуваннязадачі в межах математичноїмоделі

Виразивши s_1 і s_2 через координати, отримаємо$\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{(375-x)^2+y^2}$,потім після ряду перетворень$(x-500)^2+y^2=250^2$ – це умова, за якої транспортні витрати підприємств є однаковими. Таким чином потрібно знайти $\boxed{s_1=}\min\sqrt{x^2+y^2}$ за умови $(x-500)^2+y^2=250^2$. Ці дві рівності є *знако-символьною моделлю* задачі, а мал. 2.21 – *образною моделлю*.

*Учитель:*Де лежать точки ($x;y$), що задовольняють умову$(x-500)^2++y^2=250^2$?

*Очікувана відповідь:*Ці точки лежать на колі з центром у точці (500;0) і радіусом 250.

*Учитель:*Зобразимо це коло (див. мал. 2.21). Коли $\sqrt{x^2+y^2}$ набуває найменшого значення за умови, що т. ($x;y$) лежать на зображеному колі?

Очікувана відповідь:$\sqrt{x^2+y^2}$ набуває найменшого значення у т. (250;0).

ІІІ. Інтерпретація отриманого розв'язку

Отже, для того щобціна одиниці продукції кожного підприємства у торгівельному центрі для покупців була мінімальною, ринок збуту необхідно розмістити на прямій, що з'єднує обидва підприємства, на відстані 250 км від «Променя».

Цю задачу можна розв'язати й іншими способами, зокрема із застосуванням апарату математичного аналізу (знаходження умовного мінімуму функції двох змінних). Однак метод координат дозволив знайти її розв'язокбільш раціонально, красиво і доступно для9-класників.

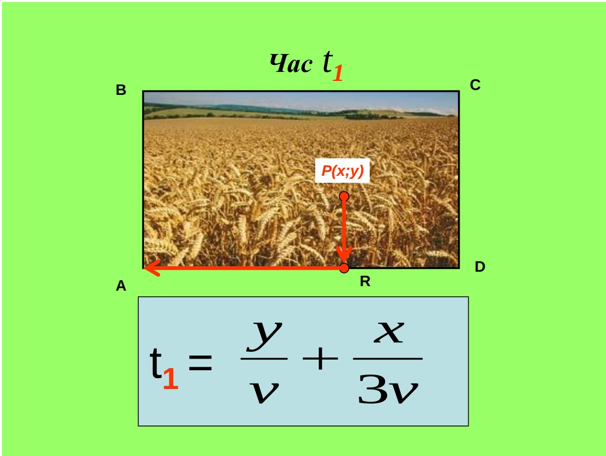
Варто відмітити, що ***розв'язування задач координатним методом у більшості випадків алгоритмізоване, вимагає володіння навичками алгебраїчних обчислень*** та іноді не потребує високого рівня кмітливості, а ***формальне застосування цього методу негативно впливає на розвиток творчих здібностей учнів.*** Тому учитель повинен урізноманітнювати систему задач. Розглянемо таку задачу.

Задача 2.44.Машини мають вивезти зерно від комбайна, що стоїть у полі, яке має форму прямокутника. По межі поля прокладені ґрунтові дороги, а в одній з вершин знаходиться виїзд на шосе. На ґрунтову дорогу машина виїжджає по перпендикуляру до неї.Відомо, що швидкість руху машини по полю в три рази менша швидкості руху по ґрунтовій дорозі. Потрібно вказати такі маршрути руху машин до шосе з різних точок поля, щоб витрати часу на вивезення зерна були найменшими.

І. Побудова математичної моделі

Нехай прямокутник $ABCD$ є зображенням поля, точка P визначає місцезнаходження комбайна, а точка A – виїзд на шосе. Приймемо сторону AD за вісь абсцис, а сторону AB за вісь ординат (див. мал. 2.22). Мал. 2.22 – *образна модель* задачі.

Мал.2.22



Мал.2.23

II. Розв'язуваннязадачі в межах математичноїмоделі

Позначимо через t_1 час руху машини з точки P до A з попередніми виїздом на дорогу AD, а швидкість руху машини по полю через v. Маршрут руху в цьому випадку–ламана PRA (див. мал. 2.23).

Аналогічно введемо позначення:t_2 – час руху машини з точки P до A з попередніми виїздом на дорогуAB, t_3 – час руху машини з точки P до A з попередніми виїздом на дорогиBC та AB, t_4 – час руху машини з точки P до A з попередніми виїздом на дороги CD таAD і розглянемо відповідні маршрути руху машини. Позначивши сторони $AD = a$, $AB = b$, отримаємо рівняння:

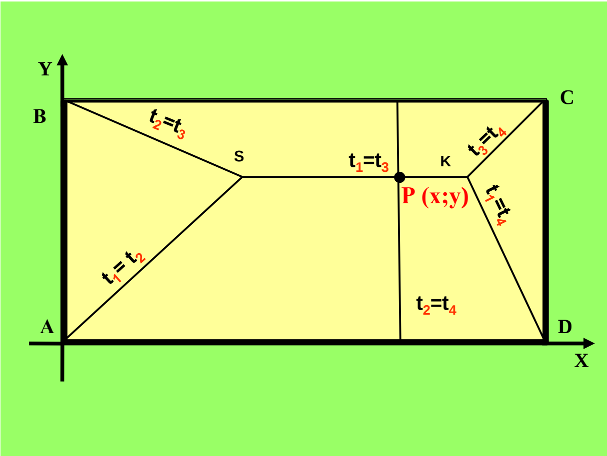
$$t_1 = \frac{y}{v} + \frac{x}{3v}, \qquad t_2 = \frac{x}{v} + \frac{y}{3v}, \quad t_3 = \frac{b-y}{v} + \frac{x+b}{3v}, \quad t_4 = \frac{a-x}{v} + \frac{y+a}{3v}.$$

Ці рівняння є *знако-символьними моделями* задачі.

Прирівняємо їх по черзі. У результаті отримаємо:

$t_1 = t_2$, тоді$y = x$; $t_1 = t_3$, тодіy= ; $t_1 = t_4$, тоді$y = -2x+a$;

$t_2 = t_3$, тоді$y = -\frac{1}{2}x + b;$ $t_2 = t_4$, тодіy= ; $t_3 = t_4$, тоді$y = x + b - a$



Мал. 2.24

Зобразимо отримані прямі (див мал. 2.24).

Ділянка поля, з якоїнайвигідніше виїжджати до дороги *AD*, визначається системою нерівностей $t_1<t_2$, $t_1<t_3$, $t_1<t_4$. Аналогічно знаходимо ділянки, з яких найвигідніше виїжджати до інших доріг.

III. Інтерпретація отриманого розв’язку

Отже, маршрути машин залежать від того, в якій точці поля знаходиться комбайн. Тоді рух машини здійснюється в межах однієї з трапецій чи одного з трикутників. (див. мал. 2.24)

Ця задача корисна тим, що:

- В умові практично відсутні числові дані (такі задачі, як свідчить практика роботи у школі, завжди викликають труднощі в учнів).
- У розв’язанні наявні 4 знако-символьні моделі (як правило, під час розв’язання задач використовується одна знако-символьна модель).
- Досить абстрактним є етап інтерпретації отриманого розв’язку.

Можна запропонувати учням розв’язати цю задачу в середовищі табличного процессораExcel, конкретизувавши дані щодо розмірів поля та швидкостей машини по полю та ґрунтовій дорозі. Це дозволить продемонструвати школярам ще один вид математичної моделі – *комп’ютерну таблицю* і перевірити правильність виконання задачі за допомогою методу координат.

Після вивчення теми «Декартові координати на площині» вартоопрацювати тему «Вектори на площині».

Особливі проблеми у школярів викликає розуміння поняття «вектор», оскільки воно є досить абстрактним. З метою мотивації варто нагадати учням, що з векторними величинами вони стикались раніше в курсі фізики 7 класу, вивчаючи силу, переміщення, швидкість, прискорення тощо. Саме тоді зазначалося, що величини, які окрім числового значення, мають напрям називаються векторними. Також ***доцільно розповісти школярам про широкий спектр використання векторів у різних сферах життєдіяльності людини.*** Зокрема:

- У фізиці будь-яка сила розкладається за векторами. Це використовується під час виконання розрахунків у будівництві різних споруд, літаючих апаратів, в навігації морського і повітряного флоту.
- У біології вектором називається організм, клітина, вірус, плазміда або інший біологічний об'єкт, що несе потенційно активний елемент. Наприклад, щури переносять збудників чуми, а кліщі є переносниками вірусу, що викликає енцефаліт.
- Вектор у генній інженерії – це автономна молекула ДНК, яка бере участь у перенесенні генів від організму-донора в організм-реципієнт, а також у клонуванні нуклеїнових послідовностей (клонуючий вектор).
- За допомогою векторів синтезуються різні ліки, зокрема антибіотики, ферменти та навіть цілі каскади ферментів, необхідні людині (наприклад, інсулін).
- У генній інженерії існує молодий напрямок, який називаєтьсягенотерапія, де вектори дозволяють виправляти генетичні дефекти.
- Вектори застосовуються також при клонуванні.

Прослухавши повідомлення, учні відмічають той факт, що вектори у різних науках мають одну спільну рису: вони напрямлені.

У більшості діючих підручників з геометрії вектор і визначається як напрямлений відрізок. Таке визначення легко запам’ятовується, але як показує практика, не сприяє усвідомленню поняття. Тому перш за все ***слід наголосити школярам, що вектор – це математична абстракція об’єктів, що характеризуються величиною і напрямом, тобто їх математична модель.***

У геометрії вектор визначається двома точками, одна з яких є його початком, а інша – кінцем. Відстань між цими точками і є довжиною вектора. Наступним по важливості є введення поняття рівності векторів. Слід запропонувати учням наступне означення: ***«Ненульові вектори називаються рівними, якщо вони: 1) співнапрямлені; 2) мають однакову***

довжину». Необхідно формувати в учнів розуміння рівності векторів по

аналогії з рівністю чисел 0,2; ; і т.д., тобто ***рівні вектори можуть мати різні форми запису завдяки різним початкам та різним кінцям, як і різні форми запису одного і того ж числа.***

Значні труднощі в учнів викликає введення координат вектора. Основною причиною цього є невідповідність сформованого у свідомості школярів поняття координат точки, які «прив'язують» її до координатної площини, і тим, що нескінченно багато векторів, розташованих в різних місцях координатної площини, мають одні й ті ж координати. Уникнути труднощів можна, знову ж таки провівши аналогію з числами: рівні, але різні за формою запису числа на координатній площині визначаються однозначно, так і рівні, але різні за розміщенням вектори мають однакові координати. Слід вказати учням і на той факт, що ***вектор як напрямлений відрізок – це образна модель, вектор як упорядкована пара точок – знако-символьна модель одного і того ж поняття.***

Загалом координати вектора дають змогу означити дії над векторами, довести їхні властивості, застосовувати до розв'язування задач і встановити зв'язок між геометричною інтерпретацією вектора і його алгебраїчним вираженням, тобто між його *образною* та *знако-символьною* моделями.

Під час вивчення теми «Вектори на площині» ***слід пропонувати школярам мультимедійні презентації***, оскільки основна їх перевага – це наочність, компактність та інтерактивність подачі матеріалу. Особливо корисними вони будуть, коли необхідно продемонструвати властивості векторів, рівність векторів на координатній площині, побудувати малюнок до задачі тощо.

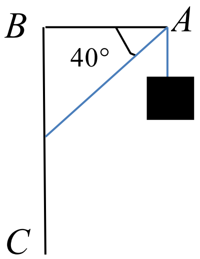
У процесі розв'язування задач, як на доведення, так і на обчислення,слід звернути увагу школярів на те, що векторний метод не є універсальним. Його зручно застосовувати для доведення паралельності чи перпендикулярності прямих, для визначення довжини відрізка чи градусної міри кута і т.д.

З векторним методом доведення геометричних тверджень варто ознайомити учнів на прикладі тих тверджень, які школярі вміють доводити без використання векторів. Наприклад, твердження про властивість середньої лінії трикутника чи трапеції, діагоналей ромба чи квадрата, суму квадратів діагоналей паралелограма, теорема косинусів тощо. Довівши кілька таких тверджень, учні самостійно або з допомогою вчителя мають виділити ***алгоритм застосування векторного методу, який за своїми етапами схожий на метод математичного моделювання.***

Після відпрацювання навички виконання дій з векторами ***слід запропонувати школярам кілька задач прикладного характеру***, як правило, вони тісно пов'язані з фізикою.

Задача 2.45. Групатуристів вирішила прогулятися вздовж річки. Спочатку вони пройшли на південь 300 м. Потім після того, як перетнули міст, вирушили вздовж річки в південно-східному напрямку і подолали ще 200 м. Яке переміщення здійснили туристи? Який шлях вони подолали?

Задача 2.46.Під яким кутом потрібно направити човен до берега, щоб перебратися на другий берег річки найкоротшим шляхом, коли відомо, що власна швидкість човна 25 м/хв, швидкість течії 10 м/хв, а ширина річки 250 м? Як довго відбуватиметься переправа?



Мал. 2.25

Задача 2.47.На тіло вертикально вверх діє сила 5Н, а вертикально вниз – сила 7Н. Знайдіть графічно рівнодіючу силу.

Задача 2.48.До кінця кронштейна (див. мал. 2.25) підвішений ліхтар вагою 18 кг. Знайти силу розтягування стрижня *AB* і силу стиснення стрижня *BC*.

Задача 2.49. Двоє коней біжать по берегам каналу і тягнуть важку баржу паралельно берегам. Чому дорівнює сила опору води, якщо канати натягнуті з силами 600 Н і 700 Н, а кут між ними дорівнює 60 °?

Задача 2.50.Велосипедист рухається зі швидкістю 15 км/год у північному напрямку, і йому здається, що південно-східний вітер зі швидкістю 9 км/год направлений до нього під кутом 15º. Знайти справжній напрям вітру.

Розглянемо задачу 2.45.

I. Побудова математичної моделі

Мал. 2.26

Для того щоб учні краще зорієнтувалися у напрямках руху туристів, вчитель повинен продемонструвати ситуацію, описану в задачі на мультимедійній дошці (див. мал. 2.26). Потім провести зі школярами бесіду.

Учитель: На слайді стрілками зображено напрямки руху туристів. Що таке шлях і як визначити довжину шляху, який подолали туристи?

Очікувана відповідь: Шлях — це довжина траєкторії, яку описало рухоме тілоза певний інтервал часу.Шлях – це скалярна фізична величина.Тому щоб знайти довжину шляху, який подолали туристи, необхідно виконати наступну дію: 300+ 200.

Учитель: Правильно! Таким чином числовий вираз 300+200 є однією із *знако-символьних моделей* задачі .Що таке переміщення і як знайти, переміщення, здійснене туристами?

Очікувана відповідь: Переміщення — це рух, що задається вектором, напрямленим із точки, що визначає положення тіла в момент початку відліку часу, у точку, що визначає положення тіла в даний момент часу Переміщення показує, на яку відстань і в якому напрямку змістилося тіло за даний час. Тому щоб знайти переміщення туристів, необхідно визначити довжину вектора, який сполучає початковий та кінцевий пункти руху туристів.

Учитель: Що для цього не вистачає в умові задачі?

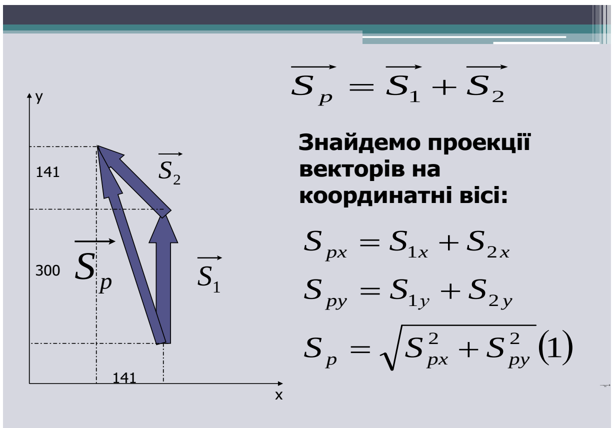
Очікувана відповідь: В умові задачі не вистачає значення кута, під яким туристи змінили свій напрямок руху. Але вказано, що вони пішли на південний схід, тобто очевидно, що кут буде дорівнювати 135º.

*Учитель:*Таким чином ми маємо трикутник з відомими двома сторонами та кутом між ними, в якому необхідно знайти третю сторону. Як це зробити?

*Очікувана відповідь:*Знайти третю сторону можна, скориставшись теоремою косинусів.

*Учитель:*Сьогодні я пропоную вам розв’язати цю задачу векторно-координатним методом. А результат перевірити за допомогою теореми косинусів.

Далі вчитель демонструє на мультимедійній дошці наступний слайд, супроводжуючи його відповідними поясненнями (див. мал. 2.27).



Мал. 2.27

*Учитель:*Нехай вектори $\overrightarrow{S_1}$ та $\overrightarrow{S_2}$ відображають напрямки руху туристів, тоді вектор $\overrightarrow{S_p}$ є вектором переміщення. За правилом трикутника маємо $\overrightarrow{S_p} = \overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{S_2}$. Помістимо вектори на координатну площину та знайдемо їх проекції на координатнівісі.Отримаємо, що $S_p = \sqrt{S_{px}^2 + S_{py}^2}$ – друга *знако-символьна модель* задачі. А малюнок, зображений на слайді, – *образна модель*.

II. Розв’язуваннязадачі в межах математичноїмоделі

Виконавши необхідні обрахунки на основі образної моделі, отримаємо, що $S_{px} = 0 + 141 = 141,\quad S_{py} = 300 + 141 = 441$ і

$$S_p = \sqrt{141^2 + 441^2} = \; = \sqrt{214362} \approx 463.$$

III. Інтерпретація отриманого розв’язку

Отже, переміщення, яке здійснили туристи, дорівнює 463 м.

Розв’язок задачі учні самостійно перевіряють за допомогою теореми косинусів.

Для успішного формування в учнів навичок математичного моделювання нами складено добірку задач (див. додаток А)

Застосування векторів до розв'язування задач сприяє формуванню в учнів навичок абстрагування та дослідницької роботи, встановленню міжпредметних зв'язків, а також підвищенню загального рівня математичної культури.

Оскільки тема «Елементи прикладної математики» в діючій програмі [128] відсутня, ми пропонуємо узагальнення та систематизацію отриманих знань про методи математичного моделювання здійснити на уроках геометрії в 9 класі під час повторення навчального матеріалу. Чинною програмою [128] на це виділяється 8 год.

Ми пропонуємо такий план вивчення (див. табл. 2.10).

Таблиця 2.10

Орієнтовний календарно-тематичний планузагальнення та систематизації знань про математичне моделювання

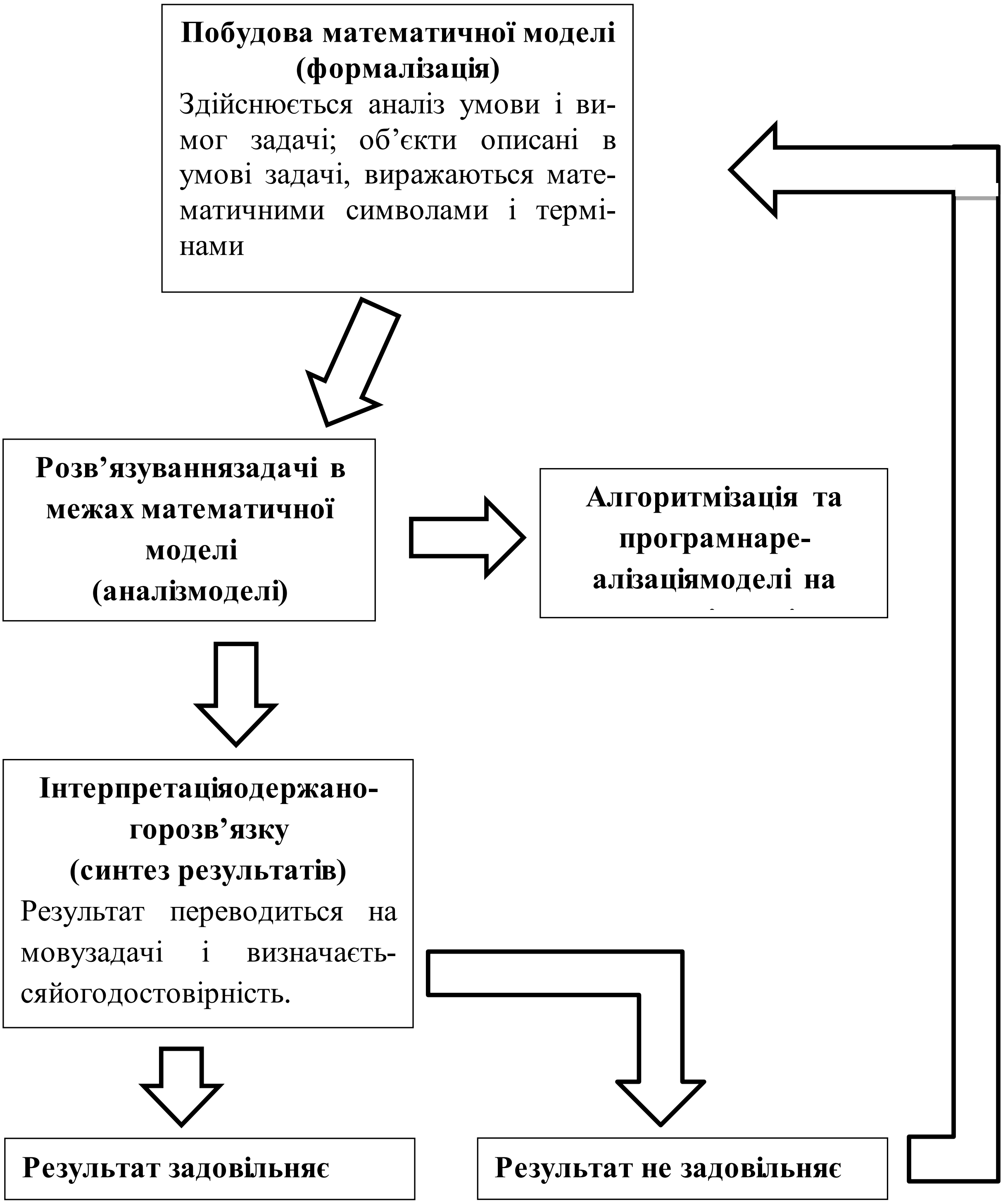
№	Зміст навчального матеріалу	Вимоги до рівня підготовки учнів
1	Математичне моделювання. Математична модель, її види. Етапи побудови і дослідження моделі.	***Має уявлення*** про математичне моделювання, його етапи, математичну модель, її види. ***Наводить приклади*** математичних моделей реальних ситуацій.
2	Математичні моделі в курсах алгебри та геометрії основної школи	***Має уявлення*** про алгебраїчні вирази, рівняння, нерівності та їх системи, функції та їх графіки, планіметричні фігури як математичні моделі. ***Будує***знако-символьні, образні моделі для розв'язування найпростіших прикладних задач.
3 – 4	Розв'язування задач	***Пояснює***, що означає «розв'язатизадачу за допомогою методу математичного моделювання». ***Розв'язує*** прикладні задачі різного рівня складності методом математичного моделювання.

Розкриваючи перед учнями зміст першого уроку, слід зазначити: «Людина живе і працює у світі, насиченому різноманітними об'єктами, кожен із яких має свої властивості та характеристики. Властивості об'єкта, які визначають його унікальність і не змінюються у процесі його перетворень, називаються суттєвими. Наприклад, розглянемо м'яч. Він може бути різного забарвлення та розміру (*демонструється слайд з м'ячами для футболу, баскетболу, волейболу, тенісу тощо*). Але незмінним залишається те, що м'яч – це предмет сферичної форми, призначений для використання у грі. Якщо відкинути всі другорядні характеристики об'єкта, то ми отримаємо його спрощений образ, тобто модель. Наприклад, моделлю м'яча є сфера. Взагалі термін «модель» зустрічається у повсякденному житті дуже часто: модель літака, модель автомобіля, модель Сонячної системи, модель на подіумі тощо. У математиці також є моделі. ***Математична модель – це опис досліджуваного об'єкта, процесу чи деякої ситуації мовою математичних понять, формул, рівнянь, відношень тощо.*** (*Після цього варто запропонувати школярам навести приклади відомих їм математичних моделей*). Однак математична модель не тотожна реальному явищу, а є лише його наближеним відображенням. ***Математичне моделювання – це метод наукового пізнання оточуючого світу, який полягає в побудові та дослідженні математичних моделей його окремих процесів, явищ і об'єктів..*** Практично всі задачі, з якими ми стикаємося у повсякденному житті, розв'язуються за допомогою методів математичного моделювання».

Після цього слід виокремити з учнями етапи математичного моделювання, відомі їм з курсів алгебри та геометрії основної школи (див. мал. 2.28).

Слід звернути увагу школярів на появу нового етапу моделювання «Алгоритмізація та програмна реалізація моделі на комп'ютері». Оскільки в курсі інформатики учні знайомляться з деякими програмними педагогічними засобами, даний етап буде їм доступний для використання.

На другому уроці варто розв'язати з учнями кілька найпростіших прикладних задач як з алгебри, так і з геометрії з використанням різних видів математичних моделей.



Мал. 2.28

На наступних уроках, як показали наші дослідження, доцільно буде продемонструвати школярам алгебраїчні задачі, які розв’язуються за допомогою геометричних моделей. Це можуть бути задачі на одно- і двовимірні діаграми (див. 2.2.2), а також розв’язування рівнянь та систем рівнянь за допомогою скалярного добутку векторів, теореми Піфагора, методом координат, доведення нерівностей з використанням векторів тощо.

Розглянемо таку задачу

Задача 2.50. Знайдіть числові значення змінних *a,b,c*, при яких значення виразу $6a - 4b + 24c$є найбільшим та найменшим, якщо відомо, що $9a^2 + 16b^2 + 144c^2 = 169$.

I. Побудова математичної моделі

*Учитель:*Як можна пов'язати вирази $6a - 4b + 24c$ та $9a^2 + 16b^2 + 144c^2$ з векторами?

Очікувана відповідь: Другий вираз можна вважати квадратом довжини вектора $\vec{x}$ $(3a;\ 4b;\ 12c)$, а перший вираз є скалярним добутком вектора $\vec{x}$на вектор (2;-1;2).

*Учитель:*Отже, скалярний добуток векторів $\vec{x}\cdot\vec{y}=6a-4b+24c$, а довжини $|\vec{x}|=13$, $|\vec{y}|=3$ і, враховуючи нерівність $|\vec{x}\cdot\vec{y}| \le |\vec{x}|\cdot|\vec{y}|$, отримаємо $|6a - 4b + 24c| \boxed{\le 39}$ (*знако-символьна модель*)

II. Розв'язуваннязадачі в межах математичноїмоделі

*Учитель:*Коли у нерівності $|\vec{x}\cdot\vec{y}| \le |\vec{x}|\cdot|\vec{y}|$ досягається рівність?

*Очікувана відповідь:*Рівність досягається тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{x}$ та $\vec{y}$ мають однакові чи протилежні напрями, або принаймні один із векторів є нульовим.

*Учитель:*Чи може хоча б один із векторів $\vec{x}$ та $\vec{y}$ бути нульовим?

*Очікувана відповідь:*Жоден із векторів $\vec{x}$ та $\vec{y}$ не може бути нульовим, оскільки їх довжини відмінні від нуля.

*Учитель:*А коли вектори $\vec{x}$ та $\vec{y}$ мають однакові або протилежні напрями?

*Очікувана відповідь:*Вектори $\vec{x}$ та $\vec{y}$ мають однакові або протилежні напрями за умови:$=\lambda$

Звідси маємо, що коли $\lambda > 0$, то $a=4c$, $b= -1{,}5c$. Підставивши у вираз $6a-4b+24c=39$ значення *a*і*b*, отримаємо $24c + 6c + 24c = 39$, $54c = 39$, $c = \frac{13}{18}$, $b=$

$-\frac{13}{12}$, a = $\frac{26}{9}$. У випадку, коли $\lambda < 0$ отримаємо c = $-\frac{13}{18}$, b= $\frac{13}{12}$, a =-=$-\frac{26}{9}$.

ІІІ. Інтерпретація отриманого розв'язку

Отже, за умови $9a^2+16b^2+144c^2=169$максимального значення рівного 39 вираз $6a–4b+24c$ досягає при a = $\frac{26}{9}$, b= $-\frac{13}{12}$, c =$\frac{13}{18}$, а мінімального рівного –39вираз $6a–4b+24c$ досягає при a = $-\frac{26}{9}$, b= $\frac{13}{12}$, c = $-\frac{13}{18}$.

Розв'язування подібних задач сприятиме розумінню того факту, що методи математичного моделювання застосовуються не лише до прикладних задач, і стимулюватиме пошукову роботу учнів у даному напрямку.

Ще однією ***важливою складовою в системі навчання школярів методам математичного моделювання є написання розрахунково-графічних та наукових робіт в системі МАН з тематики, пов'язаної з математичним моделюванням.***Досвід керування написанням дослідницьких робіт в школі та врахування психологічних вікових особливостей школярів свідчить про те, що роботи є особливо вдалими і мають позитивні результати, коли вчитель починає працювати з учнем вже з 5-го класу. Спочатку це можуть бути невеликі дослідження типу «Математика навколо нас», «Відсотки в моїй сім'ї», «Математика в прислів'ях», «Енергозберігаючі технології в школі» тощо, результати яких презентуються та обговорюються на шкільних, міських, районних наукових конференціях. Така діяльність формує в учнів навички пошукової роботи, уміння обробляти отримані дані, узагальнювати і систематизувати, виховує самостійність, впевненість у собі, розкутість, уміння відстоювати власну точку зору. У подальшому робота вчителя зводиться до складання сумісно з учнями розширеного плану наукової роботи, який у процесі написання може уточнюватися та змінюватися, і контролю результату. Також корисно давати школярам додаткову літературу та настанови щодо пошуку інформації в інших джерелах (бібліотеці, Інтернеті тощо).

Можливою формою роботи з учнями по засвоєнню методів мате-

матичного моделювання може бути ще гурткова робота, що сприяє поглибленню знань, якішколярі одержують на уроках, прищепленню навичок застосовувати ці знання на практиці, вихованню моральних якостей (волі, наполегливості, критичного ставлення до виконаної роботи), а також стимулює виникнення інтересу до вивчення предмета.***Ми пропонуємо повернути у навчально-виховний процес у школі вимірювальні роботи на місцевості.*** Детальніше про це йде мова у параграфі 2.4.

Узагальнити та систематизувати знання учнів про математичне моделювання на кожному з етапів навчання дозволяє використання методу проектів, який орієнтований на самостійну діяльність учнів (індивідуальну, парну, групову) у відведений для цього час (від декількох хвилин уроку до декількох тижнів, а іноді й місяців).

Проектна технологія передбачає наявність проблеми, що вимагає інтегрованих знань і дослідницького пошуку її розв'язання. Результатизапланованоїдіяльностіповинніматитеоретичну,практичну тапізнавальнузначущість. Дужеважливоютакож є структуризаціязмістовноїчастини проекту іззазначеннямрезультатів, яких потрібно досягти на кожному етапі. Необхідною складовою методики здійснення проектної діяльності є складання загальної моделі, що розглядається як умовний образ, схема, шлях до результату проекту.

Застосування методу проектів формує:

- *загальнонавчальні уміння*;
- *дослідницькі уміння*: самостійно знаходитипотрібнівідомості, кілька варіантів вирішення проблеми, висувати гіпотези, встановлювати причинно-наслідкові зв'язки;
- *уміння та навички роботи у колективі*: колективне планування, уміння взаємодопомоги в групі у вирішенні спільних завдань, навички ділового партнерського спілкування, вміння знаходити і виправляти помилки у роботі інших учасників групи;
- *менеджерські уміння та навички*: проектування результату, плану-

вання діяльності та витрат часу, прийняття рішень і прогнозування їх результатів, аналіз власної діяльності;

- *комунікативні вміння*: вступати в діалог, ставити запитання, вести дискусію, відстоювати власну точку зору, знаходити компроміс;
- *презентаційні уміння і навички*:навички монологічного мовлення, вміння впевнено тримати себе під час виступу, артистичні уміння, уміння використовувати різні засоби наочності при виступі.

Використовувати розроблені проекти можна як *на уроках* («Системи числення» (5 клас), «У світі чотирикутників» (8 клас), «Многогранники навколо нас» (9 клас) тощо), так і *у позакласній діяльності* («Цікаві числа», «Координатна площина очима художника», «Геометрія в зимових олімпійських видах спорту», «Планування міського парку», «Геометрія танцю» тощо).

Наприклад, цікавим з точки зору використання методів математичного моделювання є проект, запропонований вчителемПирятинського ліцею Кудіновою В.В. Розглянемо паспорт цього проекту.

Проект «Геометричні паркети»

Клас:8 – 9

Тема:Многокутники. Правильні многокутники

Тип проекту: дослідницький.

Мета проекту:

1. Дослідитивластивостімногокутників, яківикористовуються при побудовігеометричнихпаркетів.
2. Розглянутиспособипобудовигеометричнихпаркетівіз многокутників.
3. Розглянутизастосуванняпаркетіввжитті, скластирекомендації по догляду за паркетом.
4. Зібратиматеріал для занять математичногогуртка за темою «Многокутники».

Завдання проекту:

1. Дослідитиправильнімногокутникитазакономірностіїхукладання на

поверхні у виглядіправильнихпаркетів.

2. Вивчитиспособиотриманняпаркетів з довільнихфігур.

3. Освоїти роботу з програмнимзабезпеченням: MicrosoftWord, MicrosoftExcel, MathType, Paint.

4. Скласти власний паркет, використовуючи графічний редактор Paint.

5. Створитивідеоролик про те, як зробитигеометричніпаркети наекранікомп'ютера.

Методи проекту:

Опрацювання літератури з теми, Інтернет-ресурсів; виконання математичних розрахунків; робота в Paint 2009, PowerPoint 2007, SamStudio, кіностудіїWindowsLive.

Форми звітності проекту:

Реферат, презентація, відеоролик.

На тему «Многокутники. Правильні многокутники» програмою виділяється 2 години. Тому виконання такого проекту дозволить продемонструвати школярам важливість цієї теми, можливість її застосування у повсякденному житті, зв'язок геометрії з кресленням, інформатикою, образотворчим мистецтвом, історією та музикою.

Дещо іншого спрямування проект, запропонований вчителем загальноосвітньої школи I – III ступенів с.Вашківці,Сокирянського району, Чернівецької області Вакарчук О.М.

Проект «Школа майбутнього»

Клас: 9

Тема: Многокутники та їх площі. Многогранники та їх об'єми

Мета проекту:

➢ Перевірити на практиці застосування основних теорем та тверджень геометрії.

➢ Сформувати в учнів чітке розуміння професійних навичок будівельних професій, від архітектора до майстра-муляра.

Мал. 2.29

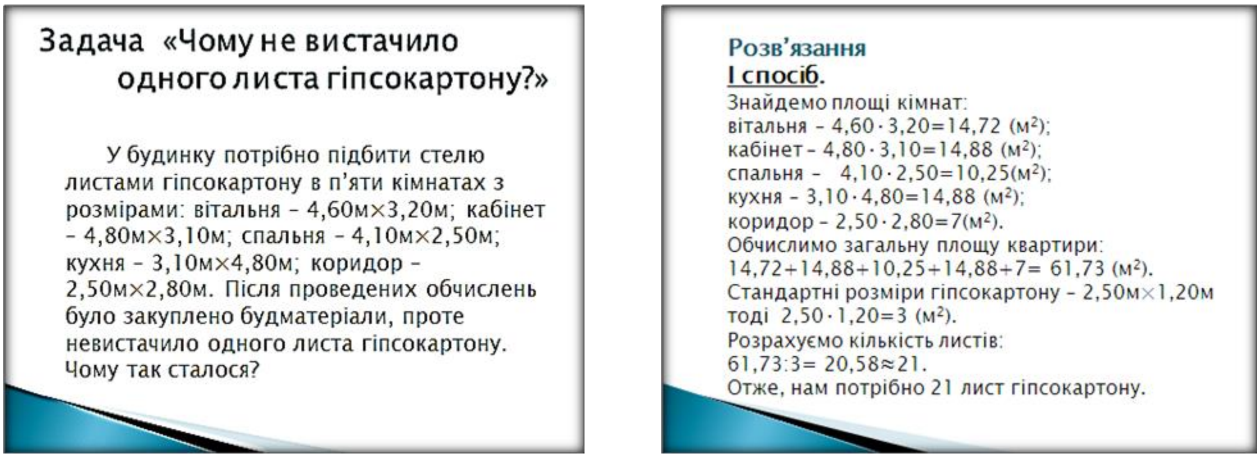
➢ Набути досвіду співпраці з органами виконавчої влади.

Тип проекту: практично-орієнтований.

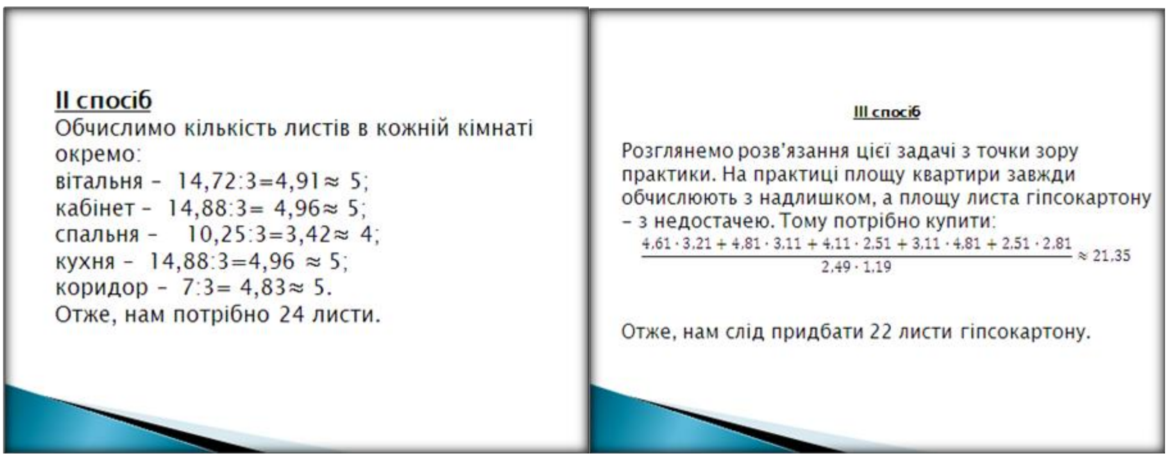
Форми звітності проекту:

Мультимедійна презентація, макет «Школи майбутнього», виконаний з геометричних тіл (див. мал. 2.29).

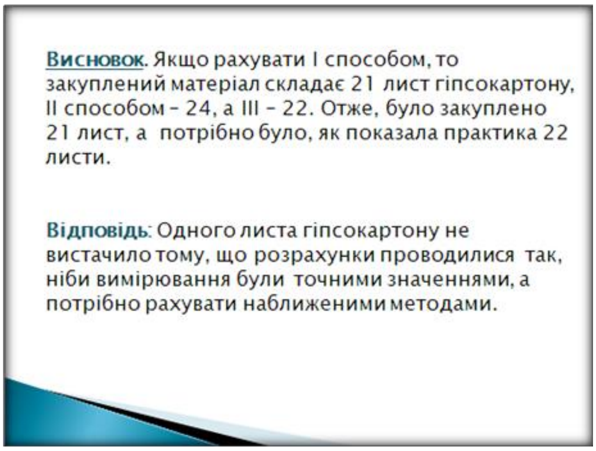
У процесі виконання проекту учні зіткнулися з цікавою ситуацією, яку описали в роботі (див мал. 2.30 – 2.32).



Мал. 2.30



Мал. 2.31



Мал. 2.32

Задача, розв'язана на слайдах трьома способами, дозволяє вчителеві продемонструвати можливість і необхідність застосування отриманих учнями теоретичних знань на практиці у ситуації, що є досить типовою у повсякденному житті.

Загалом ***метод проектів якнайкраще відображає застосування математичного моделювання незалежно від теми дослідження та типу проекту, оскільки і процес виконання проекту, і його результат – це завжди певна модель.***

Таким чином вивчення за наведеною вище методикою методам математичного моделювання дає можливість розширити кругозір учнів; сприяє розвитку абстрактно-логічного мислення: лаконічності мови, вміння вдало використовувати символіку, правильно застосовувати математичну термінологію, робити висновки та узагальнення, обґрунтовувати свої думки; забезпечує активізацію пізнавального інтересу до вивчення предмету та ефективність навчання.

Отже, по закінченню вивчення курсів алгебри та геометрії у 9 класі можна очікувати, що в учнів будуть сформовані:

- поняття математичного моделювання, математичної моделі, її видів, етапів побудови;

- розширені уявлення про про алгебраїчні вирази, рівняння, нерівності та їх системи, функції та їх графіки, планіметричні фігури як математичні моделі;
- навички побудови знако-символьних, образних моделей для доведення теорем та розв'язування прикладних задач;
- навички застосування методів математичного моделювання до доведення теорем, розв'язування задач та розробки і виконання проектів.

2.4. Вимірювальні роботи на місцевості як засіб формування навичок математичного моделювання

Зв'язок теорії з практикою при вивченні математики в школі має різні форми вираження, серед яких значне місце займають ВРнМ. *Вони дають учням можливість ознайомитися з будовою і способами використання найпростіших землемірних приладів, із методами розв'язування певних прикладних задач, унаочнюють деякі геометричні поняття, властивості фігур тощо, є ілюстрацією застосування методів математичного моделювання.*

Проводити вимірювальні роботи можна протягом всього навчального року, але найзручніше – восени і навесні. У зимовий же період варто скористатися спортивним залом, великою рекреацією чи класом залежно від характеру і масштабу роботи.

<u>**Цілі використання**</u>ВРнМ у НВП є такими:

1. Формувати:

- уміння застосовувати отримані теоретичні знання у повсякденному житті;
- уміння і навички користування найпростішими землемірними приладами, обчислювальною технікою, довідниками тощо.

2. ***Розвивати*** мислення, просторову уяву, увагу, пам'ять, креативність

учнів, загальнологічні прийоми розумової діяльності.

3. ***Виховувати*** пізнавальний інтерес до математики, культуру, уміння формулювати і захищати власну точку зору, аргументувати свої судження, а також уміння працювати в колективі.

Відповідно до мети ставляться наступні**завдання:**

1) навчальні:

- стимулювання інтелектуальної активності;
- формування наукового світогляду;
- підвищення життєвої компетенції учнів;
- формування навичок роботи з додатковою літературою;

2) ***розвивальні:*** формування і розвиток пізнавальних процесів (пам'яті, уяви, уваги, мислення), загальнологічних прийомів розумової діяльності та комунікативних навичок;

3) виховні:

- встановлення міжпредметних зв'язків, зокрема з природознавством, географією, трудовим навчанням, образотворчим мистецтвом;
- стимулювання та підтримка інтересу до предмета;
- формування моральних якостей особистості: почуття колективізму, винахідливості, допитливості, працелюбства, відповідальності, толеранства тощо;
- здійснення пропедевтичної профорієнтаційної роботи.

При відборі змісту навчального матеріалу кожної практичної роботи слід враховувати**вимоги:**

1) органічної єдності з програмним матеріалом;
2) врахування психолого-педагогічних та індивідуальних особливостей учнів кожної вікової групи;
3) розширення і поглиблення раніше отриманих знань;
4) поєднання колективної та індивідуальної форм діяльності;
5) використання диференційованого підходу.

Виходячи з вище зазначених вимог та власного досвіду роботи у школі ми пропонуємо наступний зразок планування ВРнМ у 5 – 9 класах.

Таблиця 2.11

Планування ВРнМ

№	Зміст ВРнМ	Відповіднийпрограм-нийматеріал	Кіль-кість годин
5 клас			
1	Провішування відрізка прямої	Відрізок. Пряма	1
2	Вимірювання на місцевості відста-ней рулеткою, польовим циркулем, кроками. Вимірювання відстаней «на око» з подальшим визначенням похибки.	Відрізки, ламані та їх довжини	2
3	Побудова прямокутної ділянки та визначення її площі. Побудова зе-мельних одиниць вимірювання площі (ар, гектар або його частина).	Кут. Побудова кутів. Прямокутник, квадрат, їх периметр та площа	1
6 клас			
4	Побудова кола та визначення його довжини. Побудова круга та визна-чення його площі.	Коло. Довжина кола. Круг. Площа круга	1
7 клас			
5	Вимірювання і побудова на місце-вості кутів з допомогою астролябії	Вимірювання кутів	1
6	Побудова паралельних прямих	Паралельні прямі, їх вла-стивості	1
7	Знаходження відстаней до недосту-пних точок за допомогою побудови трикутників	Ознаки рівності трикут-ників. Побудова трикут-ників за основними еле-ментами	2
8	Знімання плану нескладної земель-ної ділянки методом поділу на три-кутники	Побудова трикутників за даними елементами	1
9	Визначення висоти предмета	Побудова трикутників за даними елементами	1
8 клас			
10	Знаходження відстаней до недосту-пних точок на основі властивостей прямокутника та середньої лінії трикутника	Прямокутник, його влас-тивості. Середня лінія трикутника, її властиво-сті	2
11	Визначення відстаней і висот на	Ознаки подібності три-	2

	основі подібності трикутників	кутників	

Продовження таблиці 2.11

12	Обчислення площ земельних ділянок	Площа многокутників	2
	9 клас		
13	Застосування тригонометрії до розв’язуванняпрактичнихзавдань на місцевості	Розв’язуваннятрикутників	1

Методика організації ВРнМ має бути наступною:

1). Попередній огляд місцевості та визначення теми роботи.

2). Підготовча робота в класі.

3). Проведення ВРнМ.

4). Обробка отриманих результатів.

5). Захист учнями своїх робіт. Визначення кращих робіт.

6). Аналіз виконаної роботи, оцінювання знань учнів.

Підготовча робота у класі передбачає ознайомлення школярів з будовою геодезичних інструментів та особливостями їх використання. При цьому вчителю слід мати на увазі, що основна ідея кожного інструмента найяскравіше проявляється і легше засвоюється на саморобних приладах. А це в свою чергу сприяє розвитку конструктивних здібностей школярів. Після ознайомлення учнів з інструментами варто показати їм оформлення результатів ВРнМ. Зробити це зручно, використовуючи зошити школярів попередніх років або ж за їх відсутності продемонструвавши відповідну презентацію.

Проводити ВРнМ слід групами. Для конкретної роботи кількість учнів у групі необхідно підбирати так, щоб кожен учень виконував певну функцію. Тоді, чергуючи між ними обов’язки, можнаорганізуватипроцес так, щокожеженучепьпройдевсійогостадії. Як правило, у групі5 – 6 школярів.

Під час проведення вимірювальної роботи групами необхідно, щоб графічне її оформлення і розрахунки виконувались кожним учнем окремо.

Також учням слід враховувати такі **правила:**

1). На початку роботи варто виконувати найбільш складні її частини.

2). При розрахунках немає «неважливих» дій, дрібничних помилок, описок.

3). По завершенні роботи необхідно уважно переглянути записи і виправити наявні помилки.

4). При перевтомі важко розраховувати на правильні результати обчислень.

5). Обчислення варто виконувати зосереджено, не допускаючи відволікань.

При визначенні кращих робіт і оцінюванні знань учнів слід дотримуватися таких **критеріїв:**

1) ступінь розуміння конкретної ВРнМ;
2) оволодіння навичками користування землемірними приладами;
3) культура ведення записів і оформлення роботи;
4) поведінка учня під час проведення вимірювальної роботи, його активність;
5) ступінь самостійності виконання завдань.

Розглянемо детальніше орієнтовну методику проведення першої роботи.

Робота 1. Провішуваннявідрізка прямої.

Необхідне приладдя: віхи

Попередній огляд місцевості. Для виконання цієї роботи слід вибрати на місцевості таку ділянку, щоб провішуваний відрізок прямої мав довжину не меншу 50 м, інакше більш доцільним буде просто натягнути мотузку. Учитель має врахувати той факт, що при провішуванні відрізка прямої на рівній поверхні землі необхідно, щоб відстань між віхами була 50 м – 100 м, на горбистій – від 10 м до 50 м.

Підготовча робота в класі. Перш за все необхідно в ході бесіди з’ясувати з учнямиситуації із повсякденного життя, в яких потрібно здійснювати провішування відрізка прямої. Наприклад, встановлення телефонної лінії чи лінії високовольтних передач, розбивання земельної ділянки тощо. Потім слід ознайомити школярів із приладдям, його призначенням і прийомами використання. Учитель має пояснити учням, що точки на місцевості прийнято позначати кілочками та віхами. Віха – це пряма дерев'яна жердина, здебільшого круглого перерізу, загострена з одного боку, довжиною близько 2 м. Для того щоб віхи були добре помітними на місцевості, їх фарбують двома кольорами (як правило, білим та червоним або білим та чорним). Корисними будуть настільні моделі віх. Якщо такі моделі виготовлять учні, то можна буде провести фронтальну роботу по провішуванню відрізка прямої, встановивши віхи на партах.

Виконання роботи на місцевості. У землемірній практиці виділяють дві задачі, пов'язані з провішуванням відрізка прямої:

1).Провішування відрізка прямої між двома кінцевими точками. Спочатку відмічаються довільні точки *A* і *B* на визначеній відстані одна від одної за допомогою віх. Після цього один із учнів відходить від віхи *A* на 2 – 3 м і, закривши одне око, дивиться на віхи *A* і *B* так, щоб йому здавалося, що віха *A* закриває собою віху *B*. Інші учні з віхами в руках стають вздовж прямої (поблизу, а не самій прямій) на однаковій відстані один від одного. Учень, що стоїть найближче до віхи *B*, ставить третю віху *C* і, керуючись вказівками першого учня, пересуває її до тих пір, поки вона не закриється віхою *A*. Тобто першому учневі здаватиметься, що всі три віхи злились в одну. Вказівки по установці проміжної віхи слід надавати жестами. На практиці використовуються такі жести: «перемістити віху вправо (вліво)» – підняти праву (ліву) руку перпендикулярно до тіла, «поставити віху» – махнути рукою зверху вниз. Всі інші віхи виставляються аналогічно у напрямку від *B* до *A*. Варто звернути увагу школярів, що провішування відрізка прямої завжди здійснюється у напрямку «до себе». Корисним буде також задати учням запитання: «Чому провішування «на себе» буде більш точним, ніж провішування «від себе»?». Необхідно слідкувати, щоб всі віхи стояли вертикально.

Правильність вертикального напрямку перевіряється за допомогою виска. Висок – це шнур, на кінець якого прикріплено невеликий вантаж.

2).Продовження відрізка прямої за його кінцеві точки. Спочатку відмічаються довільні точки *A* і *B* за допомогою віх. Третя віха *C* ставиться за віхою *B* другим учнем так, щоб першому учневі, який стоїть перед віхою *A* за 2 – 3 м, здавалося, що всі три віхи співпадають. Зрозуміло, що таким чином можна побудувати відрізок прямої будь-якої довжини.

Корисним буде також запропонувати учням *знайти на місцевості точку перетину двох прямих*. Для цього необхідно поставити віхи у 4 точках *A*, *B*, *C* і *D*, так, щоб жодні три з них не лежали на одній прямій. Біля кожної віхи повинен стояти учень. П'ятийученьмаєітивздовжоднієї з прямих, наприклад*AB*. Коли він з'явиться на прямій*CD*, учні, щознаходятьсябілявіх*C* і *D*, повиннійогозупинити. На цьому місці забивається кілочок. Для корекції розміщення точки *O* перетину прямих *AB*і *CD* робота повторюється знову, але п'ятийученьідевже по прямій*CD*. Після цього виставляється віха *O*.

У нашій публікації [177]ми робимо акцент на особливостях проведення ВРнМ у 5 – 6 класах.

Щодо решти вимірювальних робіт (див.додаток Б) відмітимо основні методичні рекомендації:

1). Проведення роботи №2 передбачає графічне оформлення результатів, тому вчитель повинен ознайомити учнів із формою запису та озвучити вимоги щодо їх оцінювання.

2). Проведення робіт №1, 2, 3, 5, 8, 9, 11 вимагає попереднього ознайомлення школярів із землемірними приладами, їх будовою та принципом роботи.

3). Під час проведення роботи №6 слід запропонувати учням на основі вивчених ознак паралельності прямих довести правильність здійсненої побудови.

4). Виконання роботи №7 розраховане на 2 год. На одному уроці варто здійснити першу побудову (причому половина класу знаходить відстань до недоступної точки 1-м способом, інша половина – 2-м способом), а на наступному уроці виконати другу(визначення відстані між двома доступними точками, розділеними перешкодою) і третю (визначення відстані між двома доступними точками) побудови. Варто також запропонувати школярам у кожному з випадків обґрунтувати правильність виконаної побудови.

5). Виконання роботи №10 також розраховане на 2 год. На одному уроці слід здійснити перші дві (визначення відстані до недоступної точки і визначення відстані між двома доступними точками, розділеними перешкодою) побудови (причому другу побудову половина класу здійснює 1-м способом, інша половина – 2-м способом), а на наступному уроці виконати третю (визначення відстані між двома недоступними точками) побудову, оскільки вона є найскладнішою.

6). Виконання роботи №11 розраховане також на 2 год. На одному уроці необхідно провести визначення висоти предмета за допомогою висотоміра, а на наступному уроці здійснити визначення відстані до предмета за допомогою додаткових побудов на місцевості. Причому спочатку варто розділити клас на дві частини, одна з яких виконуватиме першу побудову, а інша – другу, а потім весь клас виконуватиме третю побудову. Варто також запропонувати школярам у кожному з випадків обґрунтувати правильність виконаної побудови.

Слід зазначити, що описані вище методичні рекомендації для проведення ВРнМ є лише орієнтовними.

Таким чином, застосування ВРнМ у НВП у школі, на нашу думку, сприяє не лише здійсненню пропедевтичної профорієнтаційної роботи, а й:

1) свідомому оволодінню теоретичними знаннями з геометрії;

2) формуванню уміння застосовувати отримані знання у повсякденному житті;

3) удосконаленню навичок застосування методів математичного моделювання;

4) розвитку вольових якостей, навичок колективної праці;

5) підвищенню інтересу до математики та розумінню її життєвої цінності.

2.5. Організація, методика проведення та результати педагогічного експерименту

Проведені дослідження в області дидактики та методик навчання тих чи інших предметів викликають необхідність експериментального підтвердження. Педагогічний експеримент дозволяє не лише підтвердити чи спростувати окреслену на початку гіпотезу, а й оцінити вплив розробленої методики на процес навчання, спрогнозувати подальший її розвиток, виявити помилки та здійснити їх корекцію.

Експериментальна частина нашого дослідження передбачала оцінку ефективності запропонованої методики формування в учнів основної школи знань, умінь та навичок математичного моделювання. Для цього були вирішені наступні ***завдання:***

1. Визначення ролі математичного моделювання в системі геометричної підготовки учнів основної школи.

2. Розробка методичних рекомендацій щодо навчання математичного моделювання учнів основної школи.

3. Створення методичного забезпечення, зокрема конспектів уроків, добірки задач, програми гуртка «Вимірювальні роботи на місцевості», завдань для діагностики та контролю успішності школярів.

4. Якісна та кількісна перевірка результативності запропонованої методики.

Порядок здійснення педагогічного експерименту повністю відповідав складеній для нього програмі.

Програма педагогічного експерименту

1. Експериментальна база дослідження.

Для проведення експерименту було залучено вчителів Київського університету імені Бориса Грінченка, інституту післядипломної педагогічної освіти та вчителів і учнів Пирятинського ліцею, Пирятинської загальноосвітньої школи I – III ступенів №6, Рівненської загальноосвітньої школи I – III ступенів №5, Снов'янської загальноосвітньої школи I – II ступенів.

У дослідно-експериментальній роботі взяло участь 390 учнів вище названих шкіл. Під час експерименту здійснювалося спостереження за педагогічним та учнівським колективами, зміною їх відношення до застосування у НВП математичного моделювання, проводилося анкетування вчителів, здійснювався моніторинг успішності школярів.

2. Характеристика засобів експерименту

Обрані засоби експериментальної роботи повністю відповідають поставленій меті та завданням дослідження, зокрема:

➢ аналіз спеціально складеної анкети та індивідуальних бесід з педагогами дозволяє отримати різнопланові відомості щодо ставлення та ступеню використання вчителями у навчальному процесі методів математичного моделювання;

➢ експериментальне навчання проводилося в межах існуючих навчальних планів та програм з урахуванням розроблених методичних рекомендацій;

➢ використані критерії щодо діагностики рівнів засвоєння знань та сформованості умінь математичного моделювання відповідають критеріям оцінювання навчальних досягнень учнів у системі загальної середньої освіти.

3. Етапи проведення експерименту.

Проведений нами педагогічний експеримент складався із трьох етапів: констатуючий, пошуковий і формуючий, кожен з яких мав експериментальну та аналітичну стадії.

Експериментальна стадія передбачала підготовку необхідних матеріалів, для чого використовувалися такі методи, як: анкетування; бесіди з учнями та вчителями; спостереження за НВП; опрацювання психолого-педагогічної та науково-методичної літератури з проблеми дослідження, освітніх стандартів, програм, підручників і навчальних посібників з математики для учнів 5 – 9 класів загальноосвітніх шкіл, шкільної документації.

На *аналітичній стадії* кожного етапу експериментального дослідження вивчалися, аналізувалися, порівнювалися, узагальнювалися і систематизувалися отримані дані, що дозволяло внести корективи у хід експерименту та розроблені методичні рекомендації.

Для забезпечення репрезентативності результатів дослідження у кожній школі було обрано ***контрольні***(надалі КК) та ***експериментальні класи*** (надалі ЕК) з урахуванням однорідності учнівського складу за такими показниками: інтерес до предмету та якісна успішність школярів. У цих класах, по можливості, навчання здійснювалося одним і тим же вчителем. У КК застосовувалася традиційна методика навчання геометрії, в ЕК – з урахуванням запропонованих нами методичних рекомендацій.

Оцінка ефективності створеної методики формування в учнів основної школи знань, умінь та навичок математичного моделювання здійснювалася за такими показниками: відповіді учнів та вчителів на запитання, запропоновані в анкетах та у процесі індивідуальних бесід, рівень виконання учнями контрольних робіт.

2.5.1. Констатуючий експеримент

Констатуючий експеримент проводився у 2006 – 2007 рр. з метою: вивчення ролімaтематичного моделювання в системі геометричної підготовки учнів основної школи; визначення готовності школярів та педагогів до застосування математичного моделювання у НВП; окреслення необхідності пошуку нових змістово-методичних підходів до удосконалення математичної освіти у напрямку дослідження.

Результати констатуючого експерименту, в основному, відображені в розділі 1. Зупинимося детальніше лише на аналізі проведеного анкетування.

Для виявлення проблем учителів, пов'язаних із організацією навчання геометрії, спрямованого на формування в учнів знань, умінь та навичок математичного моделювання, використовувалися наступні методи: спостереження за НВП, індивідуальні бесіди, анкетування. У анкетуванні взяли участь 103 вчителі.

Аналіз результатів анкетування (див. додаток В) показав, що:

1. Переважна більшість учителів дуже вузько розуміють математичне моделювання, трактуючи його як спосіб розв'язування прикладних задач (66%) або як розділ математики (18,8%).

2. При цьому педагоги єдині в тому, що математичному моделюванню потрібно навчати. Однак вони розходяться у визначенні часового фактору: 72,7% вважають, що у школі, а 27,3% – у ВУЗі.

3. На думку вчителів, знайомити учнів з математичним моделюванням потрібно при вивченні: всього курсу математики (47,9%), алгебри (18,8%), геометрії (12,5%), теорії ймовірності та математичної статистики (10,4%). Решта педагогів не визначилися.

4. Застосовують на практиці математичне моделювання 76,7% опитуваних. Хоча здійснюють вони це лише у процесі розв'язуванняприкладних задач (75,6%) та при поясненні нового матеріалу (22%).

5. Не використовують математичне моделювання 23,3 % педагогів, пояснюючи це відсутністю необхідних знань, умінь та навичок (60%), часу (15%) та неефективністю даного методу дослідження (15%).

6. Серед альтернативних підручників і методичних посібників, в яких висвітлено питання застосування математичного моделювання, вчителями були відмічені такі: Бевз Г.П. Алгебра: Підруч. для 7 – 9 кл. (32,3%), Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра: Підруч. для 9 кл. (29,4%) та ін.

7. Однак при цьому 79,5% педагогів відзначають необхідність додатко-

вого забезпечення методичною літературою з питань математичного моделювання, зокрема розширення та урізноманітнення системи прикладних задач (52%), створення методичних рекомендацій по застосуванню математичного моделювання (40%).

Користуючись результатами безпосереднього спостереження за навчально-виховним процесом, проведеного анкетування вчителів та бесід з ними, ми дійшли до висновку, що педагоги, відзначаючи важливість та необхідність формування в учнів знань, умінь та навичок математичного моделювання, не здійснюють таку роботу систематично і цілеспрямовано; відчувають труднощі при організації такого процесу; не мають необхідного дидактичного забезпечення.

Для виявлення причин, якими визначається, як правило, негативне ставлення школярів до геометрії, та для визначення труднощів, що виникають при її вивченні, нами було проведено анкетування учнів. У ньому брало участь 390 чоловік, що були поділені на дві групи залежно від того, люблять вони геометрію чи ні (див. додатки Г, Д).

Результати анкетування та бесід зі школярами наступні:

1. 37% учнів відзначають негативне ставлення до геометрії.

2. Причинами зниження інтересу до геометрії на початкових етапах її вивчення були названі: опрацювання давно відомого матеріалу (36%) та необхідність доводити теореми і розв'язувати задачі, справедливість яких очевидна з побудованого малюнка (27,3%).

3. Учні 8-х класів вказують на відсутність прикладних задач, завдань на конструювання і моделювання (34,5%) та на непотрібність геометричних знань у повсякденному житті (26%).

4. В учнів 9-х класів викликає труднощі доведення теорем (27,2%), побудова малюнків до задач (23,7%) та необхідність запам'ятовувати велику кількість аксіом, означень, властивостей та теорем (22%).

5. З іншого боку, 63% школярів вбачають необхідність у вивченні геометрії, оскільки отримані знання застосовуються при розв'язуванні багатьох

проблем, що виникають у повсякденному житті (54%). Учням подобається доводити теореми, здійснювати побудови (27%), розв'язувати важкі задачі (26,2%), так як це розвиває просторове (20%) та логічне мислення (17,8%), а також тренує пам'ять (15,6%).

Таким чином, результати анкетування вказують на необхідність пошуку нових форм, методів і засобів навчання геометрії, які б дозволили організувати процес формування в учнів знань, умінь та навичок математичного моделювання та активізувати пізнавальний інтерес до вивчення предмету.

2.5.2. Пошуковий експеримент

Аналіз результатів констатуючого експерименту дозволив визначити *напрям пошукового: скласти концептуальну модель формування в учнів основної школи навичок математичного моделювання і створити необхідні для цього дидактичні засоби. Пошуковий експеримент проводився у 2008 – 2009 рр.*

Задля досягнення поставленої мети вивчалася і аналізувалася науково-методична, психолого-педагогічна, математична література, власний досвід викладання у школі та спостереження за діяльністю колег. Одним із результатів такої роботи став висновок про необхідність комплексного вирішення поставленої проблеми, зокрема виділення концептуальних положень, створення дидактичного забезпечення та розробка ефективної методики їх використання. Було сформульовано загальну гіпотезу, складено план опрацювання та перевірки цієї гіпотези, визначено мету, завдання, предмет і об'єкт дослідження.

Для створення методики формування в учнів навичок і вмінь математичного моделювання було окреслено її основні положення, зокрема цілі та завдання; зміст навчального матеріалу та його структурування; методи, прийоми, організаційні форми та дидактичні засоби навчання (див. 1.3). Визначення цих компонентів відбувалося на основі всебічного аналізу наукової думки, досвіду вітчизняних та зарубіжних педагогів, психологів, дидактів, досвідчених вчителів математики.

Таким чином, під час пошукового експерименту було:

1. Розроблено конкретні методичні рекомендації для навчання учнів елементів математичного моделювання на кожному із виділених етапів.

2. Ретельно підібрано дидактичні матеріали для проведення експериментального навчання.

3. Визначено у кожній школі КК та ЕК.

4. Проведено навчальні бесіди з учителями, що викладатимуть математику в ЕК.

2.5.3. Формуючий експеримент

Третій етап педагогічного експерименту проводився найбільш інтенсивно з 2010 по 2012 рр. та продовжується і понині з метою:

1. Реалізації методики формування в учнів основної школи елементарних знань, умінь та навичок математичного моделювання шляхом організації такої роботи, яка включала розв'язування низки завдань на формування конкретних умінь математичного моделювання, прикладних задач, виконання ВРнМ, опрацювання додаткової літератури.

2. Оцінки впливу запропонованої методики на процес формування в учнів знань, умінь та навичок математичного моделювання.

3. Оцінки ефективності експериментальної методики у порівнянні з традиційною.

Для проведення формуючого експерименту нами було обрано по два 5-ті та 9-ті класи Пирятинського ліцею, Рівненськоїзагальноосвітньої школи I – III ступенів №5, два 7-мі класи Пирятинської спеціалізованої школи №6, Рівненськоїзагальноосвітньої школи I – III ступенів №5 та Снов'янської загальноосвітньої школи I – II ступенів.

Експериментальне навчання проводилося в рамках існуючих навчальних планів з урахуванням розробленої нами методики, яка передбачала розв'язування системи прикладних задач та виконання ВРнМ, що органічно включалися в прийняту традиційну структуру уроків за діючими підручниками з математики та геометрії.

Діагностичні ***контрольні роботи*** (надалі КР) проводилися на початку навчального року у 5-их, 7-их і 9-их класах, а підсумкові КР – в кінці навчального року у 6-их, 8-их і 9-их класах.

Для отримання результатів використовувалися розроблені нами варіанти контрольних завдань, спрямованих на з'ясування рівня розвитку знань, умінь та навичок математичного моделювання.

Математична обробка отриманих результатів здійснювалася на основі таких ***критеріїв*** [52]:

1. Коефіцієнт повноти виконаних дій у процесі розв'язанняприкладної задачі.

$$\overline{P_T} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{iT}}{nP_T},$$

де P_{iT} – число дій, виконаних правильнопід час розв'язування прикладної задачіi-тим учнем; n – кількість учнів, які прийняли участь у розв'язування задачі; P_T – кількість дій, необхідних для виконання прикладної задачі.

2. *Коефіцієнт повноти виконаних дій у процесі розв'язання репродуктивної задачі*:

$$\overline{P_{\text{Р}}} = ,$$

де – число дій, виконаних правильно під час розв'язування репродуктивної задачі i-тим учнем; n – кількість учнів, які прийняли участь у розв'язування задачі; $P_{\text{Р}}$ – кількість дій, необхідних для виконання репродуктивної задачі.

3. Коефіцієнт успішності формування знань, умінь та навичок мате-

матичного моделювання:

$$\lambda = \frac{P_{T_2}}{P_{T_1}},$$

де P_{T1} – кількість правильно виконаних дій у процесі розв’язуванняприкладної задачі на початку експерименту, P_{T2} – кількість правильно виконаних дій у процесі розв’язуванняприкладної задачі в кінці експерименту.

4. *Показник ефективності запропонованої методики:*

$$\eta = \frac{\lambda_E}{\lambda_K},$$

де λ_E – коефіцієнт успішності формування знань, умінь та навичок математичного моделювання в ЕК, λ_K – коефіцієнт успішності формування знань, умінь та навичок математичного моделюванняв КК.

Для аналізу розв’язування задач співвіднесемо етапи розв’язування репродуктивної та прикладної задачі та дії, необхідні для цього (див. табл. 2.12).

Таблиця 2.12

Етапи та безпосередні дії при розв’язуванні задач

Етапи розв’язування прикладних задач	**Етапи розв’язування репродуктивної задачі**	**Дії**
1.Побудова математичної моделі	1. Робота над змістом задачі 2. Пошук шляхів її розв’язання	1. Запис умови та вимог 2.Пошук можливих шляхів розв’язування
2.Розв’язування задачі в межах математичної моделі	3.Запис розв’язання задачі	1. Розв’язання задачі в загальному вигляді 2. Виконання обчислень
3.Інтерпретація одержаного розв’язку	4.Формулювання відповіді 5. Перевірка розв’язку задачі	1. Вибір способу перевірки отриманого результату 2. Перевірка правильності отриманого результату

На початку навчального року учням 5-их класів була запропонована наступна діагностична КР.

Задача 1. Обчислити значення виразу: 14 158 – 67223:13 + 2572

Задача 2. Побудувати прямокутник зі сторонами 3 см і 7 см. Обчислити його площу та периметр.

Задача 3. Шкільна їдальня закупила 24 кг сушених яблук по 14 грн і 12 кг сушених груш по 20 грн. Для приготування компоту сухофрукти змішали. Яка ціна 1 кг такої суміші?

Задача 4. Дід Панас посадив сад площею 120 м^2. Якої довжини необхідно йому поставити паркан, якщо ширина саду 10 м?

Перші дві задачі репродуктивного рівня мали на меті з'ясувати рівень володіння учнями елементарними навичками виконання арифметичних дій та побудови найпростіших геометричних фігур, наступні дві задачі перевіряли уміння використовувати ці навички при розв'язування прикладних задач.

Результативність виконання кожного завдання наведена в таблиці (див. табл. 2.13).

Таблиця 2.13

Результати аналізу діагностичної КР в 5-их класах

Номер задачі	**Дії, виконання яких необхідне для розв'язування задачі**	**% учнів, які правильно виконали дію**	
		КК	**ЕК**
1	Запис умови та вимог	100	100
	Пошук можливих шляхів розв'язування	100	100
	Розв'язування задачі в загальному вигляді	97	96
	Виконання обчислень	85	87
	Перевірка правильності отриманого результату	85	87
	Виконання всіх дій	85	87
2	Запис умови та вимог	100	100
	Пошук можливих шляхів розв'язування	98	95
	Розв'язування задачі в загальному вигляді	92	90
	Виконання обчислень	81	81
	Перевірка правильності отриманого результату	53	50
	Виконання всіх дій	53	50

3	Запис умови та вимог	75	77
	Пошук можливих шляхів розв'язування	54	57
	Розв'язування задачі в загальному вигляді	43	42
	Виконання обчислень	43	42
	Перевірка правильності отриманого результату	37	36
	Виконання всіх дій	37	36

Продовження таблиці 2.13

4	Запис умови та вимог	68	69
	Пошук можливих шляхів розв'язування	49	51
	Розв'язування задачі в загальному вигляді	36	35
	Виконання обчислень	31	34
	Перевірка правильності отриманого результату	21	23
	Виконання всіх дій	21	23

Коефіцієнт повноти виконаних дій у процесі розв'язання репродуктивної задачі 1 КК: $\overline{P_P} = 0,91$; ЕК: $\overline{P_P} = 0,94.$

Коефіцієнт повноти виконаних дій у процесі розв'язання репродуктивної задачі 2 КК: $\overline{P_P} = 0,85$; ЕК: $\overline{P_P} = 0,83.$

Коефіцієнт повноти виконаних дій у процесі розв'язанняприкладної задачі 3 КК: $\overline{P_T} = 0,51$; ЕК: $\overline{P_T} = 0,5$.

Коефіцієнт повноти виконаних дій у процесі розв'язання прикладної задачі 4 КК: $\overline{P_T} = 0,41;$ ЕК: $\overline{P_T} = 0,42$.

Таким чином, учні 5-их класів успішно справилися із завданнями репродуктивного рівня, однак не зуміли використати наявні знання, уміння та навички для розв'язування прикладних задач.

Аналогічні показники продемонстрували і учні 7-их класів, які писали наступну діагностичну КР.

Задача 1. Радіус круга дорівнює 8,4 см. Знайдіть його площу та довжину відповідного кола. (Значення числа π та результати обчислень округліть до сотих).

Задача 2. У розгорнутому куті *AMK* проведено два промені: *MC* і *MB* так, що кут *KMC* = 106°, а промінь *MB* є бісектрисою кута *AMC*. Обчисліть градусну міру кута *BMC*.

Задача 3. Зіниця людського ока має форму круга і здатна змінювати залежно від освітлення свій діаметр від 1,5 мм до 7,5 мм. Визначте, у скільки разів при цьому змінюється площа поверхні зіниці.

Задача 4. Скільки дощок довжиною 3,5 м, шириною 20 см і товщиною 20 мм можна зробити з дерев'яної балки, яка має форму прямокутного паралелепіпеда з розмірами 105,1 дм×42 см×34 см (Д×Ш×В), якщо на пропил відводиться 1,5 мм?

Коефіцієнт повноти виконаних дій у процесі розв'язання репродуктивної задачі 1 КК: $\overline{P_{\text{Р}}} = 0{,}95$; ЕК: $\overline{P_{\text{Р}}} = 0{,}96$.

Коефіцієнт повноти виконаних дій у процесі розв'язання репродуктивної задачі 2 КК: $\overline{P_{\text{Р}}} = 0{,}75$; ЕК: $\overline{P_{\text{Р}}} = 0{,}69$.

Коефіцієнт повноти виконаних дій у процесі розв'язання прикладної задачі 3 КК: $\overline{P_T} = 0{,}41$; ЕК: $\overline{P_T} = 0{,}45$.

Коефіцієнт повноти виконаних дій у процесі розв'язанняприкладної задачі 4 КК: $\overline{P_T} = 0{,}32;$ ЕК: $\overline{P_T} = 0{,}29$.

Проведена діагностична КР у 9-их класах (див. додаток Е) продемонструвала такі результати:

- Коефіцієнт повноти виконаних дій у процесі розв'язання репродуктивної задачі 1 КК: $\overline{P_{\text{Р}}} = 0{,}81$; ЕК: $\overline{P_{\text{Р}}} = 0{,}83$.
- Коефіцієнт повноти виконаних дій у процесі розв'язання репродуктивної задачі 2 КК: $\overline{P_{\text{Р}}} = 0{,}75$; ЕК: $\overline{P_{\text{Р}}} = 0{,}72$.
- Коефіцієнт повноти виконаних дій у процесі розв'язанняприкладної задачі 3 КК: $\overline{P_T} = 0{,}31$; ЕК: $\overline{P_T} = 0{,}33$.
- Коефіцієнт повноти виконаних дій у процесі розв'язанняприкладної задачі 4 КК: $\overline{P_T} = 0{,}22;$ ЕК: $\overline{P_T} = 0{,}2$.

Отже, розвиток в учнів знань, умінь та навичок математичного моделюваннязнаходиться на низькому рівні і позитивна динаміка у зміні даного показника з 5-го по 9-ий клас відсутня.

У кінці наступного навчального року у 6-их, 8-их та 9-их класах проводилися підсумкові КР.

У 6-их класах була проведена наступна КР.

Задача 1. У прямокутному паралелепіпеді довжина дорівнює 25 м, що в 5 разів більше ширини. Висота паралелепіпеда на 2 м менша від ширини. Знайдіть об'єм і площу поверхні паралелепіпеда.

Задача 2. Позначте на координатній площині точки *A* (0;5), *B* (-9;-1), *C* (2;-7) і *D* (-5;0). Проведіть прямі *AB* і *CD*. Визначте координати точки їх перетину.

Задача 3. Скільки потрібно кахельних плиток квадратної форми зі стороною 15 см, щоб облицювати ними стіну, що має форму прямокутника зі сторонами 3,3 м і 2,7 м?

Задача 4. Яка швидкість потягу (в км/год), якщо діаметр його колеса дорівнює 120 см і воно робить 350 обертів за хвилину? (Відповідь округлити до сотих).

Результати обчислень коефіцієнтів повноти виконаних дій у процесі розв'язання репродуктивної і прикладної задачі контрольним та експериментальним класами наведені в таблиці (див. табл. 2.14).

Таблиця 2.14

Аналіз результатів підсумкової контрольної роботи у 6-их класах

Номер задачі	**КК**		**ЕК**	
	$\overline{P_P}$	$\overline{P_T}$	$\overline{P_P}$	$\overline{P_T}$
1	0,83		0,82	
2	0,72		0,75	
3		0,41		0,63
4		0,29		0,48

Визначимо коефіцієнт успішності формування знань, умінь та навичок математичного моделюванняв учнів 6-их класів та показник ефективності запропонованої методики: $\lambda_{\text{К}} = 0{,}75;\ \lambda_{\text{Е}} = 1{,}21;\ \eta = 1{,}61.$

Результати обчислень коефіцієнтів повноти виконаних дій у процесі розв'язання репродуктивної і прикладної задачі під час написання підсумкової КР учнями 8-их класів (див. додаток Ж) наведені в таблиці (див. табл. 2.15).

Таблиця 2.15

Аналіз результатів підсумкової контрольної роботи у 8-их класах

Номер задачі	КК		ЕК	
	$\overline{P_{\text{Р}}}$	$\overline{P_T}$	$\overline{P_{\text{Р}}}$	$\overline{P_T}$
1	0,82		0,84	
2	0,74		0,71	
3		0,32		0,48
4		0,21		0,41

Визначимо коефіцієнт успішності формування знань, умінь та навичок математичного моделювання в учнів 8-их класів та показник ефективності запропонованої методики: $\lambda_{\text{к}} = 0{,}72;\ \lambda_{\text{е}} = 1{,}27;\ \eta = 1{,}76.$

Результати обчислень коефіцієнтів повноти виконаних дій у процесі розв'язання репродуктивної і прикладної задачі під час написання підсумкової КР учнями 9-их класів (див. додаток З) наведені в таблиці (див. табл. 2.16).

Таблиця 2.16

Аналіз результатів підсумкової контрольної роботи у 9-их класах

Номер задачі	КК		ЕК	
	$\overline{P_{\text{Р}}}$	$\overline{P_T}$	$\overline{P_{\text{Р}}}$	$\overline{P_T}$
1	0,83		0,85	
2	0,71		0,70	

3		0,33		0,51
4		0,19		0,43

Визначимо коефіцієнт успішності формування знань, умінь та навичок математичного моделювання в учнів 9-их класів та показник ефективності запропонованої методики: $\lambda_{к} = 0{,}97$; $\lambda_{е} = 1{,}83$; $\eta = 1{,}89$.

Аналіз даних результатів засвідчив, що учні ЕК під кінець формуючого експерименту набагато успішніше справляються із прикладними задачами, застосовуючи методи математичного моделювання,що свідчить про позитивний вплив розробленої нами методики.

Особливо значні зміни помітні в учнів 9-го класу. На нашу думку, це пояснюється тим, що у 9-му класі було проведено весь комплекс ВРнМ та конкурс-захист науково-дослідницьких робіт.

Розглянемо вплив запропонованої методики на якість знань учнів (див. таблицю 2.17).

Таблиця 2.17

Аналіз успішності школярів

Клас	**Кількість учнів (у %), що навчалися на початку експерименту на**								**Кількість учнів (у %), що навчалися в кінці експерименту на**							
	Вис. рівні		**Дост. рівні**		**Сер. рівні**		**Поч. рівні**		**Вис. рівні**		**Дост. рівні**		**Сер. рівні**		**Поч. рівні**	
	КК	ЕК	КК	ЕК	КК	ЕК	КК	ЕК	КК	ЕК	КК	ЕК	КК	ЕК	КК	ЕК
5	8,8	1,2	3,1	4,5	8,1	4,3	0	0								
6									21,9	27,3	53,1	66,7	25	6	0	0
7	22,6	20	48,4	50	22,6	23,3	6,4	6,7								
8									25,8	26,7	48,4	63,3	19,4	6,7	6,4	3,3

9	17,9	18,5	57,1	55,6	17,9	18,5	7,1	7,4	21,4	25,9	53,6	70,4	21,4	3,7	3,6	0

Аналіз даних результатів дозволив зробити висновок, що якість знань в учнів ЕК зросла в середньому на 11,35 %, що, на нашу думку, обумовлено позитивним впливом розробленої методики.

Статистичну обробку результатів педагогічного експерименту щодо порівняння якості математичної підготовки у КК та ЕК ми здійснювали за допомогою χ^2-критерію [130, С. 572], що обчислюється за формулою:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{m} \frac{(V_k - P_k)^2}{P_k},$$

де P_k – частота результатів спостережень до експерименту;

V_k – частота результатів спостережень після експерименту;

m – загальна кількість груп, на які розділилися результати спостережень.

Знайдемо значення χ^2-критерію для КК та ЕК

$$\chi^2 = \frac{(27-20)^2}{20} + + \frac{(67-53)^2}{53} + \frac{(5-22)^2}{22} + \frac{(1-5)^2}{5} = 2{,}45 + 3{,}70 + 13{,}14 + 3{,}2$$

.

Далі скористаємося таблицею [130, С. 573], де для заданого числа степенів свободи можна з'ясувати степінь значимості утворених розбіжностей до та після експерименту в розподіленні оцінок. Отримане нами значення $\chi^2 = 22{,}49$ більше відповідного табличного значення m – 1=3 степенів свободи, що дорівнює 16,27 при імовірності допустимої похибки менше, ніж 0,001%.

Отже, аналіз результатів всіх етапів проведеного експерименту дозволяє стверджувати, що розроблена методика формування знань, умінь та навичок математичного моделювання є ефективною і сприяє активізації пізнавального інтересу до вивчення геометрії та підвищенню рівня навчальних досягнень школярів.

Висновки до розділу II

У розділі висвітлена методика формування знань, умінь та навичок математичного моделювання в учнів основної школи під час навчання геометрії, зокрема встановлено, що:

1. Для набуття учнями умінь застосовувати методиматематичного моделюванняйого навчання має бути наскрізним і організованим за такими етапами: пропедевтичний етап (5 – 6 класи), початковий (7 – 8 класи), основний (9 клас) та дослідницький.

2. Формування в учнів 5 – 6 класів уявлень про математичну модель та її види повинно відбуватися у процесі: складання спрощеного запису умови прикладної задачі (схеми, малюнку, таблиці); складання числового виразу, результат обчислення якого задовольняє вимогу задачі; складання буквенного виразу за умовою прикладної задачі і обчислення компонентів дій за результатом та іншими компонентами; виготовлення моделі певної геометричної фігури чи тіла.

3. Навчання учнів 7 – 8 класів методам математичного моделювання має здійснюватися у двох напрямках:під час введення нових понять та доведенні теорем школярі знайомляться з образними моделями понять та навчальними моделями методів доведення, а у процесі розв’язування прикладних задачвчаться будувати доцільні моделі до задачі та інтерпретувати отримані результати.

4. Отримані у процесі вивчення математики у 5 – 6 класах та геометрії у 7 – 9 класах знання про математичне моделювання потребують узагальнення і систематизації. Здійснити це можна наприкінці 9 класу на уроках алгебри у процесі повторення вивченого матеріалу.

5. Узагальнити та систематизувати знання учнів про математичне моделювання на кожному з етапів навчання дозволяє використання методу проектів, який передбачає самостійну дослідницьку роботу школярів над раніше обраною темою.

6. Важливою складовою в системі навчання школярів методів математичного моделювання є написання дослідницьких та наукових робіт в системі МАН з тематики, пов'язаної з математичним моделюванням (причому залучати учнів до такої роботи слід вже з 5-го класу) та проведення гурткової роботи, зокрема ВРнМ.

7. Під час проведення ВРнМ учні не лише знайомляться з будовою і способами використання найпростіших землемірних приладів, із методами розв'язування певних прикладних задач, унаочнюють геометричні поняття, властивості фігур, а й практикуються у перенесенні сформованої мисленнєвої моделі певного об'єкта чи процесу в реальну дійсність.

8. Розроблена методика формування знань, умінь та навичок математичного моделювання в учнів основної школи під час навчання геометрії апробована в ході проведення педагогічного експерименту, який складався з трьох етапів.

Результати констатуючого експерименту, що відбувався у 2006 – 2007 рр. та передбачав вивчення ролі математичного моделювання в системі геометричної підготовки учнів основної школи і визначення готовності школярів та педагогів до застосування математичного моделювання у НВП, вказали на необхідність пошуку нових форм, методів і засобів навчання геометрії, які б дозволили організувати процес формування в учнів знань, умінь та навичок математичного моделювання та активізувати пізнавальний інтерес до вивчення предмету.

Під час пошукового експерименту, що проводився у 2008 – 2009 рр., було складено концептуальну модель формування в учнів основної школи навичок математичного моделювання і створено необхідні для цього дидактичні засоби.

Отримані результати контрольних робіт, достатньо велика вибірка та застосування методів математичної статистики для обробки результатів під час формуючого експерименту (2010 – 2012 рр.) дозволили стверджувати, що розроблена методика формування знань, умінь та навичок математичного моделюванняє ефективною і сприяє активізації пізнавального інтересу до вивчення геометрії та підвищенню рівня навчальних досягнень школярів.

Основні результати другого розділу дисертації відображено у публікаціях [176], [177], [179], [180], [182 – 185], [187], [189], [191], [192], [208].

ВИСНОВКИ

Одним із основних напрямків сучасної освіти є формування практично компетентної особистості, яка володіла б вміннями моделювати реальні процеси та явища, зокрема економічно-фінансові, аналізувати і порівнювати дані, прораховувати ризики, інтерпретувати результати, працювати зі знако-символьним представленням інформації і т.п. Тому формування в учнів знань, умінь і навичок математичного моделювання є одним із першочергових завдань школи. Реалізувати його можна, насамперед, у процесі навчання предметів політехнічного циклу (математики, фізики, хімії, біології, географії), а також інших предметів (трудового навчання, малювання і т.д.).

У дисертації розроблено методикуформування знань, умінь та навичок математичного моделювання в учнів основної школи під час навчання геометрії.

Відповідно до поставленої мети та визначених завдань дослідження отримано такі **результати**:

- з’ясовано стан розв’язання проблеми в науково-методичній, психолого-педагогічній, математичній літературі та рівень її практичної реалізації в навчанні математики в школі;

➢ розкрито психолого-педагогічні основи формування в учнів основної школи навичок математичного моделювання;

➢ розроблено і теоретично обґрунтовано цілі, завдання, зміст, організаційні форми, відповідні засоби та методичні рекомендації з формування в учнів основної школи елементарних знань, умінь і навичок математичного моделювання;

➢ визначено, теоретично обґрунтовано та розроблено методичне забезпечення процесу формування в учнів основної школи елементарних знань, умінь і навичок математичного моделювання, зокрема, цикл вимірювальних робіт на місцевості, добірки задач, методичні рекомендації вчителям;

➢ проведено експериментальну перевірку ефективності розробленої методики формування елементарних знань, умінь і навичок математичного моделювання в учнів основної школи в процесі навчання геометрії.

Результатом впровадження даної методики є позитивна динаміка рівнів навчальних досягнень учнів з математики та підвищення інтересу до вивчення предмету.

Отримані результати дослідження дають підстави сформулювати такі **висновки:**

1. Проведений аналізстанурозв'язання досліджуваної проблеми в науково-методичній, психолого-педагогічній, математичній літературі та рівень її практичної реалізації в навчанні математики у школі дав змогу стверджувати, що скорочення навчальних годин на вивчення математики, переважання традиційних форм роботи з учнями,незначна кількість завдань прикладного характеру у діючих підручниках з математики, зниження інтересу школярів до навчання в цілому не сприяють формуванню в учнів знань, умінь та навичок математичного моделювання.Під час розв'язування прикладних задач школярі найчастіше спрямовують свої зусилля на відшукання готової математичної моделі, а її прикладна спрямованість чи життєва інтерпретація залишаються поза увагою. Тому розробка ефективнихметодичних рекомenда-

цій з формування умінь математичного моделювання в учнів 7 – 9 класів у процесі навчання геометрії та більш детальна розробка системи пропедевтичного навчання математичного моделюваннядозволяють вирішити вище зазначені проблеми.

2. Виокремлення математичного моделювання як самостійної змістової лініїшкільного курсу математики вимагає особливого підходу, оскільки зосередження його як окремої теми значно обмежує навчальний потенціал. Формування уявлення про математичне моделювання більшою мірою має супроводжувати вивчення більшості тем шкільного курсу математики, зокрема бути задіяним при формуванні понять, доведенні теорем, розв'язуванні задач.

3. Для набуття учнями умінь застосовувати методи математичного моделювання його навчання має бути наскрізним і організованим за такими етапами:

- пропедевтичний (5 – 6 класи) передбачає формування уявлень про математичну модель, її види, деякі властивості; уміння будувати математичну модель до задачі або складати задачу за даною математичною моделлю;
- початковий (7 – 8 класи) передбачає формування поняття про математичну модель, її види та етапи математичного моделювання; уміння будувати або добирати доцільні математичні моделі до задачі;
- основний (9 клас) передбачає узагальнення знань про математичну модель, її види та етапи математичного моделювання; формування уміння використовувати інформаційно-комунікаційні технології при створенні та дослідженні математичної моделі, представляти чисельні результати за допомогою наближених обчислень;
- дослідницький передбачає більш глибоке вивчення математичного моделювання на гуртках, факультативах і написання наукових робіт в системі діяльності Малої академії наук.

4. Оволодіння методами математичного моделювання передбачає фор-

мування в учнів знань, умінь і навичок на основі спрощеної, адаптованої до розуміння школярів, схеми діяльності математичного моделювання, яка включає три етапи:

I етап. Побудова математичної моделі (формалізація).

II етап. Розв’язування задачі в межах математичної моделі (дослідження або аналіз моделі).

III етап. Інтерпретація одержаного розв’язку (синтез результатів).

5. Стосовно методів, прийомів і форм організації навчальної діяльності школярів, то дослідження психолого-педагогічної літератури показало, а проведення формуючого експерименту підтвердило, що найбільш доцільним буде застосування активних методів, які б для молодших підлітків були спрямовані на стимулювання і підтримку інтересу до предмету; для середнього підліткового віку – на практичне застосування знань; для старших підлітків – на наукові засади предмету.

6. Важливим напрямком у формуванні умінь математичного моделювання є застосування у навчально-виховному процесіу школі вимірювальних робіт на місцевості, що сприяє не лише ознайомленню учнів з будовою і способами використання найпростіших землемірних приладів, із методами розв’язування певних прикладних задач, унаочненню геометричних понять та властивостей фігур, а й здійсненню пропедевтичної профорієнтаційної роботи, формуванню уміння застосовувати отримані знання у повсякденному житті, підвищенню інтересу до математики та розумінню її життєвої цінності.

7. Результати експериментальної перевірки підтверджують ефективність розробленої методики формування знань, умінь і навичок математичного моделювання в учнів основної школи в процесі навчання геометрії і доводять, що дотримання запропонованої методики сприяє:

- свідомому оволодінню учнями математичним моделюванням як універсальним методом навчального пізнання навколишнього середовища;
- підвищенню рівня розвитку творчих здібностей школярів;

➢ активізації пізнавального інтересу до вивчення предмету та ефективності навчання.

8. Подальше дослідження може бути пов’язане з:

➢ розробкою нових ефективних інформаційно-комунікаційних технологій навчання учнів математичного моделювання, зокрема проектування і впровадження у навчальний процес програми імітаційного моделювання діяльності школярів у процесі проведення вимірювальних робіт на місцевості;

➢ створенням методичного посібника для вчителів математики зефективної організації навчання учнів методам математичного моделювання за вибраним типом структури змісту;

➢ створенням нових систем прикладних задач за основними змістовими лініями курсів математики 5 – 6 класів та геометрії 7 – 9 класів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алгебра: Підруч. для 6 кл. серед. шк. / Ю.М. Макаричев, Н.Г. Миндюк, В.М.Монахов, К.С Муравін, С. Б. Суворова; За ред. А.І. Маркушевича. – К.: Рад. шк., 1980. – 224 с.
2. Алгебра: Підруч. для 7 кл. серед. шк. / Ю.М. Макаричев, Н.Г. Миндюк, В.М.Монахов, К.С Муравін, С. Б. Суворова; За ред. А.І. Маркушевича. – К.: Рад. шк., 1981. – 236 с.
3. Алгебра: Підруч. для 8 кл. серед. шк. / Ю.М. Макаричев, Н.Г. Миндюк, В.М.Монахов, К.С Муравін, С. Б. Суворова; За ред. А.І. Маркушевича. – К.: Рад. шк., 1981. – 256 с.
4. Александров П.С. Математика как наука / П.С. Александров // Известия АПН РСФСР. – 1958. – №92. – с. 28 – 35
5. Анфилатов В.С. Системный анализ в управлении / В.С. Анфилатов, А.А. Емельянов, А.А. Кукушкин А.А. – М.: Финансы и статистика, 2002, – 600 с.
6. Атанасян А.С. Геометрия:Учеб. для 7 – 9 кл. сред шк. /А.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др..– М.: Просвещение, 1992. – 335 с.: ил.
7. Бевз Г.П. Алгебра: Підруч. для 7 – 9 кл. /Г.П. Бевз. – 4-те вид. – К.: Освіта, 2002. – 303 с.

8. Бевз Г. П. Виховання учнів математикою: методичний матеріал / Г.П. Бевз. – Х.: Видавнича група "Основа", 2004. – 96 с.
9. Бевз Г. П. Методи навчання математики: метод. посібник / Г.П. Бевз. – Х.: Видавнича група "Основа", 2003. – 96 с.
10. Бевз Г.П. Методика викладання математики: Навч. Посібник /Г.П. Бевз. – К.: Вища школа, 1989. – 367с.
11. Бевз Г.П. Методика розв'язування алгебраїчних задач / Г.П. Бевз. – К.: Рад. шк., 1975. – 240 с.
12. Бевз Г.П. Методика розв'язування стереометричних задач / Г.П. Бевз. – К.: Рад. шк., 1988. – 192 с.
13. Бевз Г.П. Прикладна спрямованість шкільного курсу геометрії: Посібник для учителя / Г.П. Бевз. – К., 1999. – 56 с.
14. Бевз Г.П. Алгебра: Підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл./ Г.П. Бевз, В.Г. Бевз. – К.: Зодіак – ЕКО, 2007. – 304 с.: іл.
15. Бевз Г.П. Алгебра: Підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл./ Г.П. Бевз, В.Г. Бевз. – К.: Зодіак – ЕКО, 2008. – 321 с.: іл.
16. Бевз Г.П. Математика: Підруч. для 5 кл. загальноосвіт. навч. закл./ Г.П. Бевз, В.Г. Бевз. – К.: Зодіак-ЕКО, 2005. – 352 с.:іл.
17. Бевз Г.П. Математика: Підруч. для 6 кл. загальноосвіт. навч. закл./ Г.П. Бевз, В.Г. Бевз. – К.: Генеза, 2006. – 304 с.:іл.
18. Бевз Г.П. Геометрія: Підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл./ Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г.Владімірова. – К.: Вежа, 2007. – 290 с.
19. Бевз Г.П. Геометрія: Підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл./ Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г.Владімірова – К.: Вежа, 2008. – 315 с.
20. Блехман. И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов /И.И. Блехман, А.Д. Мышкис, Я.Г. Пановко. – К.: Наукова думка, 1976. – 272 с.
21. Богоявленский Д.Н. Психология усвоения знаний в школе/ Д.Н Богоявленский, Н.А.Менчинская. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1959. – 348 с.

22. Богоявленский Д.Н. Формирование приемов умственной работы учащихся как путь развития мышления и активации учения / Д.Н.Богоявленский // Вопросы психологи. – 1962. – с.74 – 82.
23. Бурда М.І. Геометрія: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл./ М.І.Бурда, Н.А.Тарасенкова. – К.: Зодіак-ЕКО, 2008. – 240 с.: іл.
24. Бурда М.І. Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл./ М.І.Бурда, Н.А.Тарасенкова. – К.: Зодіак-ЕКО, 2009. – 242 с.: іл.
25. Бурда М.І. Геометрія: Підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. /М.І.Бурда, Н.А.Тарасенкова. – К.: Зодіак-ЕКО, 2007. – 208 с.: іл.
26. Былков В.С. Формирование понятий о математическом моделировании средствами курса алгебры и начал анализа 9 и 10 классов. – дисс. … канд. пед. Наук: 13.00.02 / Былков Владимир Станиславович. – М., 1986. – 195 с.
27. Варданян С.С. Задачи по планиметрии с практическим содержанием: Книга для учащихся 6 – 8 кл. сред. шк. /Под ред. В.А.Гусева. – М.: Просвещение, 1989. – 144 с.
28. Великодний С. І. Діагностика прийомів діяльності та дій, що входять до складу математичного моделювання / С.І. Великодний // Дидактика математики: Проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. – Донецьк : Б.в., 2005. – Вип. 24: Труди міжнародної науково-методичної конференції "Евристичне навчанняматематики". – С. 162 – 168.
29. Великодний С.І.Математичне моделювання в основній школі / С.І. Великодний// Математика в школі. – 2005. – №8. – С. 21 – 26.
30. Великодний С.І.Математичне моделювання при розв'язуванні задач / С.І. Великодний // Математика в школі. – 2005. – № 9. – С. 15 – 20.
31. Великодний С.І. Урок прикладної задачі. Формування навичок математичного моделювання/ С.І. Великодний //Математика в школі.– 2003. – № 2. – С. 26 – 30.

32. Величко Е.В. Реализация прикладной направленности курса алгебры неполной средней школы. –дисс. … канд. пед. наук: 13.00.02/ Величко Евгений Владимирович. – М., 1987. – 228 с.
33. Виленкин Н. Я. Математика: Учеб.для 4 кл. ср. шк. / Н. Я. Виленкин, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбурд. – М.: Просвещение, 1983. – 205 с.
34. Виленкин Н. Я. Математика: Учеб. для 5 кл. ср. шк. / Н. Я. Виленкин, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбурд. – М.: Просвещение, 1984. – 222 с.
35. Возняк Г.М. Взаємозв'язок теорії з практикою в процесі вивчення математики: посібник для вчителя / Возняк Г.М., Маланюк М.П. – К.: Рад. школа, 1989. – 128 с.
36. Возняк Г.М. Геометрія навколо нас. 7 – 9 класи /Г.М. Возняк, О.Г. Возняк.– Тернопіль: Навчальна книга. – Богдан, 2012. – 200 с.
37. Возняк Г.М. Математика. Прикладні задачі: від теорії до практики /Г.М. Возняк. – Тернопіль: Мандрівець, 2003. — 136 с.
38. Возняк Г.М. Прикладные задачи в мотивации обучения / Г.М. Возняк // Математика в школе, 1990. №2. – С. 9 – 11.
39. Возняк Г.М. Прикладные задачи на экстремумы в курсе математики 4 – 8 классов: кн. для учителя / Г.М. Возняк, В.А. Гусев. – М.: Просвещение, 1985. – 144 с.
40. Возняк Г. М. Взаємозв'язок теорії з практикою в процесі вивчення математики / Г.М. Возняк, М.П. Маланюк. — К.: Рад.шк.,1989. – 122 с.
41. Возняк Г. М. Прикладна спрямованість шкільного курсу математики / Г.М. Возняк, М.П. Маланюк. – К.: Рад.шк., 1984. – 80 с.
42. Войналович Н.М.Елементи дискретної математики в професійній підготовці вчителя: дис….канд. пед. наук: 13.00.02 / Войналович Наталія Михайлівна. – Кіровоград, 2000. – 204 с.
43. Войналович Н.М. «Числові» теореми/ Н.М. Войналович // У світі математики. – 1998. – Т.4. –Вип.3. – С.22 – 25.
44. Выготский Л.С. Избранные психологические исследования / Л.С.

Выготский. – М.: Изд-во АПН РСФСРб, 1956. – 519 с.

45. Выготский Л.С. Педагогическая психология / Л.С.Выготский. – М.: Педагогика, 1991. – 381 с.

46. Гальперин П.Я. Введение в психологию: [учеб. пособие для вузов] / П.Я.Гальперин. – М.: Университет, 2000. – 328 с.

47. Гамезо М.В.Возрастная и педагогическая психология: Учеб. пособие длястудентов всех специальностей педагогических вузов / М.В. Гамезо, Е.А. Петрова, Л.М. Орлова. — М.: Педагогическоеобщество России, 2003. — 512 с.

48. Глушков В.М. Моделирование развивающихся систем / В.М. Глушков, В.В. Иванов, В М. Яненко. – М.: Наука, 1983. – 350 с.

49. Гнеденко Б.В. Математика и математическое образование в современном мире / Б.В. Гнеденко. – М.: Просвещение, 1985. – 191 с.

50. Гнеденко Б.В. Прикладные аспекты преподавания математики в средней школе / Б.В. Гнеденко // Математика в школе. – 1977.– №2. – С. 57 – 63.

51. Гнеденко Б.В. Введение в теорию массового обслуживания /Б.В. Гнеденко, И.И. Коваленко. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. – 1987. – 336 с.

52. Грабарь М.И. Применение математической статистики в педагогических исследованиях. Непараметрические методы / М.И. Грабарь, К.А. Краснянская. – М.: Педагогика, 1977. – 136 с.

53. Гриб’юк О.О.Математичне моделювання екологічних процесів у профільних класах / О.О. Гриб’юк // Математика в школі. – 2004. – № 8. – С. 45–48.

54. Гриб’юк О.О. Математичне моделювання як засіб екологічного виховання учнів у процесі навчання математики в класах хіміко-біологічного профілю. Навчально-методичний посібник для учителів / О.О. Гриб’юк. – Рівне: РДГУ, 2006. – 202с.

55. Гончаров В.Л. Математика как учебный предмет / В.Л. Гончаров. – В

кн.: Известия АПН РСФСР – М.% 1958, вып.92, с. 37 – 66.

56. Гусев В.А. Векторы в школьном курсе геометрии. Пособие для учителей. / В.А. Гусев, Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканкин. – М.: Просвещение, 1976. – 48 с.
57. Гуткин Л.И. Сборник задач по математике с практическим содержанием / Л.И. Гуткин. – М.: Высшая школа, 1968. — 112 с.
58. Давыдов В.В. Проблемы развивающего обучения: Опыт теоретических и экспериментальных психологических исследований / В.В. Давыдов. – М.: Педагогика, 1986. – 239 с.
59. Давыдов В.В. Проблемы развивающего обучения/ В.В. Давыдов. – М.: Педагогика, 1987. – 240 с.
60. Давыдов В.В. Теория развивающего обучения/ В.В. Давыдов. – М.: ИНТОР, 1996. – 544 с.
61. Далингер В. А. Методика реализации внутрипредметных связей при обучении математике.Книга для учителя / В.А. Далингер. — М.:Просвещение, 1991. – 82 с.
62. Далингер В.А. Совершенствование процесса обучения математике на основе целенаправленной реализации внутрипредметных связей / В.А. Далингер. – Омск: Изд-во ИПКРО, 1993. – 323 с.
63. Державна національна програма "Освіта". Україна XXI століття. – К.: Райдуга, 1994. – 61 с.
64. Державний стандарт базової і повної середньої освіти в Україні // Математика в школі. – 2004. – №2. – С. 3 – 8.
65. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти в Україні [Електронний ресурс]. – Режим доступу:http://www.mon.gov.ua/ua/often-requested/state-standards/
66. Дорофеев Г. В. Математика, 5 класс. Часть 1: учебник для 5 кл. / Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон. – М.: Баллас, С-инфо, 1996. – 176 с.
67. Дорофеев Г. В. Математика, 5 класс. Часть 2: учебник для 5 кл. /

Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон. – М.: Баллас, С-инфо, 1997. – 240 с.
68. Дорофеев Г. В. Математика, 6 класс. Часть 1: учебник для 6 кл. / Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон. – М.: Баласс, С-инфо, 1998. – 112 с.
69. Дорофеев Г. В. Математика, 6 класс. Часть 2: учебник для 5 кл. / Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон. – М.: Баллас, С-инфо, 1999. – 128 с.
70. Дорофеев Г. В. Математика, 6 класс. Часть 3: учебник для 6 кл. / Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон. – М.: Баласс, С-инфо, 2002. – 176 с.
71. Дубинчук О. С. Математика в 4 і 5 класах: методичний посібник / О.С. Дубинчук. – К.: Радянська школа, 1986. – 168 с.
72. Дубинчук О. С. Методика викладання алгебри в 7 – 9 класах: посібник для вчителя / О.С. Дубинчук, Ю.І. Мальований, Н.П. Дичек. – К.: Радянська школа, 1991. – 254 с.
73. Егоренков Д.Л. Основы математического моделирования. Построение и анализ моделей с примерами на языке MATLAB / Д.Л. Егоренков, А.Л. Фрадков, В.Ю. Харламов. – СПбГУАП. СПб., 2001, – 188 с.
74. Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках геометрії: посібник для вчителів / М.І.Жалдак, О.В. Вітюк. – К.: ДІНІТ, 2003. – 168 с.
75. Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках математики / М.І. Жалдак – К.: Техніка, 1997. – 303 с
76. Жалдак М.І. Математика з комп'ютером / М.І.Жалдак, Ю.В.Горошко, Є.Ф.Вінніченко. – К.: РННЦ «Дініт», 2003. – 168 с.
77. Жалдак М.І. Педагогічний потенціал комп'ютерно-орієнтованих систем навчання / М.І. Жалдак // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: зб. наук. праць. – К.:НПУ імені М.П.Драгоманова, 2003. – Вип.7. – С.3 – 16.
78. Заболотский В.П. Математические модели в управлении: Учеб.пособие / В.П. Заболотский, А.А. Оводенко, А.Г. Степанов. – СПб., 2000. – 196 с.
79. Закгейм А.Ю. Введение в математическое моделирование химико-технологических процес сов / А.Ю. Закгейм. – М.: Химия, 1973, – 356 с.
80. Закон України «Про освіту» станом на 22 березня 1996 р. № 1060 / Укра-

їна. Верховна Рада. – Офіц. вид. – К.: ГЕНЕЗА, 1996. – 36 с.

81. Занков Л.В. Избранные педагогические труды / Л.В. Занков. – М.: Педагогика, 1990. – 424 с.

82. Істер О.С. Алгебра: Підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / О.С. Істер. – К.: Освіта, 2007. – 223 с.

83. Кабанова-Меллер Е.Н. Психология формирования знаний и навыков у школьников: Проблема приемов умственной деятельности и умственное развитие учащихся / Е.Н. Кабанова-Меллер. – М.: Просвещение, 1968. – 228 с.

84. Кабанова-Меллер Е.Н. Формирование приемов умственной деятельности и умственное развитие учащихся / Е.Н. Кабанова-Меллер. – М.: Просвещение, 1961. – 228 с.

85. Карапетян В.С. Моделирование как компонент деятельности учения. – дисс. … канд.. психол. наук: 13.00.02 / Карапетян Владимир Севанович. – М., 1981. – 183 с.

86. Кафаров В.В. Методы кибернетики в химии и химической технологи / В.В. Кафаров. – М.: Высш шк., 1985, – 258 с.

87. Колмогоров А. Н. Математика – наука и профессия / А.Н. Колмогоров. – М.: Наука, 1988. –288 с.

88. Колмогоров А.Н. Современная математика и математика в современной школе / А.Н.Колмогоров //Математика в школе. – 1971. – С. 2 – 3.

89. Колмогоров А.М. Геометрія. Навчальний посібник для 6 – 8 класів середньої школи / А.М. Колмогоров, О.Ф. Семенович, Р.С. Черкасов. – К.: Радянська школа, 1981. – 328 с.

90. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике. Часть І. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся / Ю.М. Колягин. – М., Просвещение, 1977. – 113 с.

91. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике. Часть ІІ. Обучение математике через задачи и обучение решению задач / Ю.М. Колягин. – М., Просвещение, 1977. – 145 с.

92. Колягин Ю. М.О прикладной и практической направленности обучения математике / Ю.М. Колягин, В.В. Пикан// Математика в школе. – 1985 – № 6. – с. 27 – 32.

93. Костицын В.Н. Моделирование на уроках геометри / В.Н.Костицын. – М.: Владос, 2000. – 160 с.

94. Костюк Г.С. Избранные психологические труды / Г.С.Костюк. – М.: Педагогика, 1988. – 301 с.

95. Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьников/ В.А.Крутецкий. – М.: Просвещение, 1968. – 432 с.

96. Крутецкий В.А. Психология обучения и воспитания школьников. Книга для учителей и классных руководителей / В.А.Крутецкий. – М.: Просвещение, 1976. – 303 с.

97. Кусый Ю.А. Методы и приемы применения моделирования в процессе усвоения учащимися новых знаний /на материале предметов естественно-математического цикла IX – X классов/. – дисс. … канд. пед. наук: 13.00.02 /Кусый Юрий Александрович. – К., 1978. – 205 с.

98. Леонтьев А.Н. Деятельность, сознание, личность / А.Н.Леонтьев. – М.: Политиздат, 1975. – 304 с.

99. Лук'янова С. М. Про зв'язок арифметичних способів розв'язування текстових задач із систематичним курсом алгебри / С.М. Лук'янова // Наукові записки / М-во освіти і науки України, НПУ ім. М.П. Драгоманова. – К.: НПУ, 2002. – Вип. 50: Педагогічні та історичні науки. – С. 131 – 137.

100. Лук'янова С. М. Розв'язування текстових задач арифметичними способами в основній школі : дис... канд. пед. наук: 13.00.02 / Лук'янова Світлана Михайлівна. – К., 2005. – 214 с.

101. Лук'янова С. М. Формування творчої особистості учня під час розв'язування текстових задач арифметичними способами / С.М. Лук'янова // Вісник: Збірник наукових статей Національного педагогічного університету ім. М.П. Драгоманова. – Київ: НПУ, 2003. – Вип. 6. – С. 14 – 16.

102. Лунина Л. С. Обучение решению геометрических задач алгебраическим методом / Л.С. Лунина // Математика в школе. – 1996. – № 4. – С. 34 – 39.

103. Мак-Лоун Р.Р. Математическое моделирование – искусство применения математики // Математическое моделирование / Ред. Дж.Эндрюс, Р.Мак-Лоун. – М.: Мир, 1979. – 279 с.

104. Малкова Т.В.Математическое моделирование – необходимый компонент современной подготовки школьника / Т.В. Малкова, В.М. Монахов // Математика в школе. – 1984. – №3. – С. 46 – 49.

105. Математика в школе: Сб. нормат. документов / Сост. М.Р.Леонтьев и др. – М.: Просвещение, 1988. – 208 с. – (Б-ка учителя математики)

106. Матюшкин А.М. Проблемное обучение в мышлении и обучении / А.М. Матюшкин. – М.: Педагогика, 1972. – 208 с.

107. Махмутов М.И. Проблемное обучение: основные вопросы теории. / М.И.Махмутов. — М.: Педагогика, 1975. – 367 с.

108. Махмутов М.И. Теория и практика проблемного обучения. / М.И. Махмутов. – Казань: Татарское книжное изд-во, 1972. – 551 с.

109. Махмутов М.И. Педагогическая технология развития мышления / М.И. Махмутов, Г.И. Ибрагимов. – Казань: КГУ, 1993. – 43 с.

110. Машбиц Е.И. Компьютеризация обучения: проблемы и перспективы / Е.И. Машбиц. – М.: Знание, 1986. – 80 с.

111. Машбиц Е.И. Психологические основы управления учебной деятельностью / Е.И. Машбиц. – К.: Выща школа, 1987. – 224 с.

112. Машбиц Е.И. Психолого-педагогические проблемы компьютеризации обучения / Е.И. Машбиц. – М.: Педагогика, 1988. – 192 с.

113. Межейнікова Л.С. Активізація пізнавальної діяльності учнів основної школи в процесі розв'язування математичних задач фінансового змісту: дис... канд. пед. наук: 13.00.02 / Межейнікова Лада Станіславівна. – К., 2005. – 244 с.

114. Межейнікова Л.С. Математичні задачі з фінансовим змістом в основній школі / Л.С. Межейнікова, В.О. Швець. – Х. : Видавнича група "Основа", 2005. – 96 с.

115. Мерзляк А.Г. Математика: підруч. для 5 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2013. – 352 с.

116. Мерзляк А.Г. Математика: підруч. для 6 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2014. – 400 с.

117. Мешкова И.А. Активизация формирования понятий методом комплексного моделирования (на материале школьной математики): дисс….канд. пед. наук: 13.00.02 / Мешкова Ирина Андреевна. – М., 1974. – 176 с.

118. Мишкіс А. Д. Елементи теорії математичних моделей / А.Д. Мишкіс.– 3-е изд., испр. – М.: КомКніга, 2007. – 192 с.

119. Мышкис А.Д. О прикладной направленности преподавания математики в средних специальных учебных заведениях. – В сб.: Методические рекомендации по математике. Вип. 11. / А.Д.Мышкис. – М.: Высшая школа, 1989.

120. Михалін Г.О. Професійна підготовка вчителя математики у процесі навчання математичного аналізу / Г.О. Михалін. – К.: ДІНІТ, 2003. – 320 с.

121. Михалін Г.О. Формування основ професійної культури вчителя математики у процесі навчання математичного аналізу: дис... д-ра пед. наук: 13.00.04 / Михалін Геннадій Олександрович. – К., 2004. – 413 с.

122. Моисеев Н.Н. Математика ставит експеримент / Н.Н. Моисеев. – М.: Наука, 1979. – 224 с.

123. Морзе Н.В. Методика навчання інформатики: Навч. посібник: У 3 ч. / М.І. Жалдак (ред.). —Ч. 2: Методика навчання інформаційних технологій / Н.В. Морзе. — К.: Навчальна книга, 2004 — 288с.

124. Морзе Н.В. Методика навчання інформатики: Навч. посібник: У 4 ч. / М.І. Жалдак (ред.). —Ч. 4: Методика навчання основ алгоритмізації та програмування / Н.В. Морзе. — К. : Навчальна книга, 2004 — 365с.

125. Морзе Н.В. Основи інформаційно-комунікаційних технологій: навч. посіб. для студ. ВНЗ / Н.В. Морзе. — К. : Видавнича група BHV, 2008. — 350с.

126. Морозов Г.М. Проблема формирования умений, связанных с применением математики: дисс. … канд. пед. наук: 13.00.02. / Морозов Григорий Михайлович.– М., 1978. – 150 с.

127. Мулліс Іна В.С. TIMSS – 2007: Засади вимірювань і відкриті завдання із математики та природничих наук для 4 і 8 класів/ переклад з англійської / Іна В.С. Мулліс, Майкл О. Мартін, Грехем Дж. Руддок. – Х.: Факт, 2006. – 672 с.

128. Навчальна програма для учнів 5 — 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Математика. [Електронний ресурс]. – Режим доступу:http://www.mon.gov.ua/ua/activity/education/56/692/educational_programs/1349869429/

129. Національна доктрина розвитку освіти України у XXI столітті від 03.02.1993 р. №2974-XII [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://zakon.rada.gov.ua/cgibin/laws/main.cgi?nreg=347%2F2002.

130. Немов Р.С. Психология: Учеб. для студ. высш. пед. учеб. заведений: В 3 кн. — 4-е изд. — М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 2001.— Кн. 3: Психодиагностика. Введение в научное психологическое исследование с элементами математической статистики / Р.С. Немов. — 640 с.

131. Неуймин Я.Г. Модели в науке и технике. История, теория, практика / Я.Г. Неуймин. – Л.: Наука, 1984. – 189 с.

132. Нічуговська Л.І. Елементи математичного моделювання у шкільному курсі математики / Л.І. Нічуговська // ПостМетодика. – 2001. – №36. – С.35 – 39.

133. Нічуговська Л.І. Математичне моделювання в системі економічної освіти / Л.І. Нічуговська. – Полтава: ВВ ПУСКУ, 2003. – 289 с.

134. Нурк Е.Р. Математика: Підруч. для 5 кл. серед. шк. /Е.Р. Нурк, А.Е.

Тельгмаа. – К.: Освіта, 1993. – 288 с.

135. Нурк Е.Р. Математика: Підруч. для 6 кл. серед. шк./Е.Р. Нурк, А.Е. Тельгмаа. – К.: Рад. шк., 1990. – 224 с.

136. Островский А. И. Геометрия помогает арифметике /А.И. Островский, Б.А. Кордемский. – М.: Столетие, 1994. – 176 с.

137. Панченко Л.Л. Формування вмінь математичного моделювання в процесі навчання майбутніх вчителів математики: дис….канд.пед.наук:13.00.02./ Панченко Лариса Леонтіївна. – К., 2006. – 260 с.

138. Петерсон Л.Г. Моделирование как средство формирования представлений о понятии функции в 4 – 6 классах средней школы: дисс. … канд.. пед. наук: 13.00.02. / Петерсон Людмила Георгиевна. – М., 1984. – 201 с.

139. Погорєлов А.В. Геометрія. Навчальний посібник для 6 – 10 класів середньої школи / А.В. Погорєлов. – К.: Радянська школа, 1984. – 272 с.

140. Полякова Т.С. Методика изучения геометрических величин в курсе геометрии основной школы: Учебно-методическое пособие для студентов педвузов и педколледжей /Т.С. Полякова. – Ростов н/Д: РГПУ, 2008. – 41 с.

141. Преподавание математики в 4 – 5 классах: пособие для учителей / сост.: К. И. Нешков, С. И. Шварцбурд. – М.: Просвещение, 1975. – 158 с.

142. Прус А.В. Прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії: Дис. … канд. пед. наук: 13.00.02/ Прус Алла Володимирівна. – К., 1997. – 245 с.

143. Прус А.В. Теорія та практика прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії: Навчальний посібник / А.В. Прус, В.О. Швець. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім.. І.Франка, 2007 – 156 с.

144. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика. 5 – 11 класи.– К.: Шкільний світ, 2001. – 112 с.

145. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика. 5 – 12 класи.– К.: Перун, 2005. – 64 с.

146. Примерная программа основного общего образования по математике.

Сборник нормативно-правовых документов и методических материалов.–М.: Вентена-Граф, 2008. – 206 с.

147. Раков С.А. Відкриття геометрії через комп'ютерні експерименти в пакеті DG. Посібник для викладачів математики / С.А. Раков, В.П. Горох, К.О. Осенков та ін. – Х.:Вікторія, 2002. – 136 с.
148. Раков С.А. Компьютерные эксперименты в геометрии / С.А. Раков, В.П. Горох. – Х.: РЦНИТ, – 1996. – 176 с.
149. Раков С.А. Формування математичних компетентностей учителя математики на основі дослідницького підходу у навчанні з використанням інформаційних технологій: дис. … докт. пед. наук: 13.00.02 / Раков Сергій Анатолійович. – Харків, 2005. – 516 с.
150. Рубинштейн С.Л. О мышлении и путях его исследования / С.Л.Рубинштейн. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1958. – 147 с.
151. Рубинштейн С.Л. Основы общей психологии / С.Л. Рубинштейн. – СПб.: Питер Ком, 1999. – 720с.: (Серия «Мастера психологии»)
152. Самарский А.А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. – М.: Физмат, 2001. – 320 с.
153. Семенець С. П. Методика навчання математики (підготовлено наоснові концепції розвивальної освіти): навчальний посібник / С. П. Семенець. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2009. – 536 с.
154. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: підруч. для студ. мат. спец. вищ. пед. навч. закл. / З. І. Слєпкань. – 2-ге вид., допов. і переробл. – К.: Вища шк., 2006. – 581 с.
155. Слєпкань З.І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики / З.І. Слєпкань. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. – 240 с.
156. Смирнова И.М. Геометрические задачи с практическим содержанием / И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. – М.: МЦМНО, 2010. – 136 с.
157. Соколенко Л. О. Математичне моделювання біологічних, хімічних, ме-

дичних процесів і явищ у класах природничого профілю / Л.О. Соколенко // Дидактика математики: пробл. і дослідж.. – 2006. – Вип. 25. – С. 99 – 106.

158. Соколенко Л.О. Методика реалізації прикладної спрямованості шкільної алгебри і початків аналізу: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Соколенко Лілія Олександрівна. – К., 1997. – 245 с.

159. Соколенко Л. О. Прикладна спрямованість шкільного курсу алгебри та початків аналізу / Л.О. Соколенко. – Чернігів : Сіверянська думка, 2002. – 127 с.

160. Соколенко Л. О. Система прикладних задач природничого характеру як засіб формування евристичної діяльності учнів / Л.О. Соколенко // Дидактика математики: пробл. і дослідж.. – 2009. – Вип. 32. – С. 24 – 28.

161. Соколенко Л.О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. Навчальний посібник / Л.О. Соколенко, Л.Г. Філон, В.О. Швець. – Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2010. – 128 с.

162. Стандарт основного общего образования по математике от05.03.2004 г. N 1089[Електронний ресурс]. – Режим доступу:http://www.school.edu.ru/dok_edu.asp?ob_no=19811

163. Стукалов В.А. Использование представлений о математическом моделировании в обучении математике: дисс….канд. пед. наук: 13.00.02 / Стукалов Валерий Алексеевич. – М., 1976. – 156 с.

164. Тарасенкова Н. А. Використання знаково-символічних засобів у навчанні математики / Н.А. Тарасенкова. – Черкаси: «Відлуння-Плюс», 2002. – 400 с.

165. Тарасенкова Н.А. Математика: підручник для загальноосв. навч. закл. 5 клас / Н.А.Тарасенкова, І.М.Богатирьова, О.П.Бочко, О.М.Коломієць, З.О.Сердюк. – К.: Видавничий дім «Основа», 2013. – 352 с.

166. Тарасенкова Н.А. Математика: підручник для загальноосв. навч. закл. 6 клас / Н.А.Тарасенкова, І.М.Богатирьова, О.М.Коломієць, З.О.Сердюк. – К.: Видавничий дім «Основа», 2014. – 304 с.
167. Терешин Н.А. Прикладная направленность школьного курса математики: Кн.для учителя / Н.А. Терешин. – М.: Просвещение, 1990. – 96 с.
168. Тихонов А.Н. Вводные лекции по прикладной математике / А.Н. Тихонов, Д.П. Костомаров. – М.: Наука, 1984, – 192 с.
169. Тихонов А.Н. Математическое моделирование технологических процес сов и метод обратных задач в машиностроении / А.Н.Тихонов, В.Д. Кальнер, В.Б. Гласко. – М.: Машиностроение, 1990. – 264 с.
170. Тоффлер Э. Шок будущего: Пер. с англ. / Э. Тоффлер. – М.: ООО «Издательство АСТ», 2002. – 557.
171. Углубленное изучение алгебры и анализа. Пособие для учителей (из опыта работы)/ Сост.: С.И. Шварцбурд, О.А. Боковиев. – М.: Просвещение, 1971. – С. 215 – 239.
172. Усова А.В. Формирование у школьников научных понятий в процессе обучения: монография / А.В. Усова.– 2-е изд., испр. – М.: Изд-во Ун-та РАО, 2007. – 309 с.
173. Фельдштейн Д.И. Возрастная и педагогическая психология / Д.И. Фельдштейн. – М.: МПСИ, МОДЭК, 2002. – 432 с.
174. Фельдштейн Д. И. Психология воспитания підростка / Д.И. Фельдштейн. — М.: Знание, 1978. — 47 с.
175. Фельдштейн Д. И. Психология современного підростка / Д.И. Фельдштейн. – М.: Педагогика, 1987. —240 с.
176. Філімонова М.О. Використання flash-анімацій на уроках геометрії під час розв'язування прикладних задач / М.О. Філімонова//Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія № 3. Фізика і математика у вищій і середнійшколі: Зб. наукових праць – К.:НПУ імені М.П. Драгоманова, 2014. – № 13. – с. 111 – 116.

177. Філімонова М.О. Вимірювальні роботи на місцевості в курсі математики 5 – 6 класів / М.О. Філімонова // Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс – 2011»: матеріали Всеукраїнської дистанційної науково-методичної конференції з міжнародною участю (11 лютого 2011 р., м.Суми): У 3-х томах. – Суми: Вид-во СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2011. Т.1. – с.92 – 94.

178. Філімонова М.О. Місце математичного моделювання у шкільному курсі математики / М.О. Філімонова // Стан та перспективи підготовки вчителя математики в Україні: матеріали Всеукраїнської науково-методичної конференції (10 – 11 грудня 2009 р.) – Вінниця: Планер, 2009. – с.226 – 228.

179. Філімонова М.О. Навчання учнів 5–6 класів елементам математичного моделювання / М.О. Філімонова// Дидактикаматематики : проблеми і дослідження : Міжнар. зб. наук.робіт / Донецький нац. ун-т, Ін-т педагогіки НАПН України, Нац. пед. ун-т ім. М.П. Драгоманова. – Донецьк : ДонНУ, 2011. – Вип. 35. – С. 154–158.

180. Філімонова М.О. Особливості вивчення геометричних величин в основній школі / М.О. Філімонова // Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики: зб. наук. праць за матеріалами Міжнар. наук.-практ. конф., 26 – 27 квітня 2012 р. / М-во освіти, науки, молоді та спорту України, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського [та ін.]. – Вінниця: ВДПУ, 2012. – с. 334 – 335.

181. Філімонова М.О. Проблема реалізації методу математичного моделювання у шкільному курсі математики / М.О. Філімонова// Материалы третьей международной научно-методической конференции «Эвристическое обучение математике» (1 – 3 октября 2009 г.) – Донецк: Изд-во ДонНУ. 2009 – с. 108 – 109.

182. Філімонова М.О. Формування навичок математичного моделювання у процесі навчання геометрії в основній школі / М.О. Філімонова // Матеріали IVВсеукраїнської науково-практичної конференції «Особистісно орієнтоване навчання математики: сьогодення і перспективи», 29 – 31 жовт. 2013 р. – Полтава: ТОВ «АСМІ», 2013. – с. 114 – 115.
183. Філімонова М.О. Числовий вираз як математична модель / М.О. Філімонова// Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики, фізики, інформатики у середніх та вищих навчальних закладах: зб. наук. праць за матеріалами Всеукр. наук.-метод. конф. молодих науковців, 17 – 18 лютого 2011 р. – Кривий Ріг: Криворізький держ. пед. ун-т, 2011. – с. 207 – 210.
184. Філімонова М.О.Вимірювальні роботи на місцевості в основній школі/ М.О. Філімонова, В.О. Швець // Математика в школі. – 2011. – №9.– С. 25–28.
185. Філімонова М.О.Графічний метод розв'язання текстових задач /М.О. Філімонова, В.О Швець // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія № 3. Фізика і математика у вищій і середній школі: Зб. наукових праць – К.:НПУ імені М.П. Драгоманова, 2012. – № 9. – С. 128–131.
186. Філімонова М.О. До питання формування в учнів основної школи навичок математичного моделювання / М.О. Філімонова, В.О. Швець// Матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2010), м. Черкаси, 24 – 26 листопада 2010 р. – Черкаси: Изд. отд. ЧНУ им. Б.Хмельницкого, 2010. – с. 205 – 207.
187. Філімонова М.О.Елементи математичного моделювання у процесі вивчення геометричного матеріалу в 5 – 6 класах / М.О. Філімонова, В.О. Швець// ScienceandEducationaNewDimension. PedagogyandPsychology. – Budapest, 2013. – №5. – С. 149–152.
188. Філімонова М.О.Математичне моделювання в курсі математики основ-

ної школи: зміст і вимоги до підготовки учнів / М.О. Філімонова, В.О. Швець// Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. – Вип. 34. – Донецьк: Вид-во ДонНу, 2010. – С. 72 – 76.

189. Філімонова М.О. Пропедевтичний етап вивчення математичного моделювання в основній школі / М.О. Філімонова, В.О. Швець// Міжнародна науково-практична конференція «Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики». До 80-річчя з дня народження доктора педагогічних наук, професора З.І. Слєпкань. Тези доповідей. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2011. – с. 232 – 234.

190. Філімонова М.О. Психолого-педагогічні особливості навчання підлітків методу математичного моделювання / М.О. Філімонова, В.О. Швець// Математика в школі. – 2010. – №11. – с. 21 – 25.

191. Филимонова М.А. Пути формирования у учащихся основной школы навыков математического моделирования / М.А. Філімонова, В.А. Швец// Матэматика. – 2013. – №6. – с. 59 – 64.

192. Филимонова М.А. Формы организации обучения учащихся основной школы методу математического моделирования / М.А.Филимонова, В.А.Швец // Материалы Международной научной конференции «Математическое образование: современное состояние и перспективы (к 95-летию со дня рождения профессора А. А. Столяра)», 19—20 февраля 2014 г.— Могилев: МГУ имени А. А. Кулешова, 2014. – с. 303 – 305.

193. Фирсов В.В. О прикладной ориентации курса математики / В.В. Фирсов // Математика в школе. – 2006. – №6. – с. 2–9.

194. Фирсов В.В. О прикладной ориентации курса математики / В.В. Фирсов // Математика в школе. – 2006. – №7. – с. 2–13.

195. Фирсов В.В. Состояние и перспективы факультативных занятий по математике / В.В. Фирсов, С.И. Шварцбурд. – М: Просвещение, 1977. – 48 с.

196. Фридман Л. М. Наглядность и моделирование в обучении / Л.М. Фрид-

ман. – М.: Знание, 1984. – 80 с. – (Новое в жизни, науке, технике. Сер. «Педагогика и психология», №6

197. Черватюк О.Г. Елементи цікавої математики на уроках математики / О.Г. Черватюк, Г.Д. Шинанська. – К.: Радянська школа, 1968. — 192 с.
198. Шапиро И. М. Использование задач с практическим содержанием в преподавании математики: Кн. для учителя / И.М. Шапиро. – М.: Просвещение, 1990. – 96с.
199. Шаповаленко И.В. Возрастная психология (Психология развития и возрастная психология) / И.В. Шаповаленко. – М.: Гардарики, 2005 – 349 с.
200. Шарыгин И.Ф. Геометрия. 7 – 9 кл. Учебник для общеобразовательных учреждений / И.Ф. Шарыгин. – М.: Дрофа, 1997. – 352 с.
201. Швець В. О. Математичне моделювання як змістова лінія шкільного курсу математики / В.О. Швець// Дидактика математики: проблеми і дослідження: міжнар. збірник наук. робіт.– Донецьк : ТЕАН, 2009. –Вип. 32. – С. 16–24.
202. Швец В. А. О прикладной направленности школьногокурса математики / В.А. Швець// Дидактика математики:проблеми і дослідження: міжнар. збірник наук. робіт. – Донецьк, 2008. –Вип. 30. – С. 135–142.
203. Швець В. О. Про прикладну спрямованість математики / В.О. Швець // М. В. Остроградський – видатний математик, механік, педагог: матеріали міжнар. конф., присвяченій 200-річчю з дня народження М. В. Остроградського. – Полтава, 2001. – С. 161–162.
204. Швець В.О. Формування і розвиток здібностей учнів 5–6 класів під час навчання математики / В.О. Швець// Математика в школі. – 2010. – № 5. – С. 19–24.
205. Швець В. О. Використання на заняттях з математики окремих видів самостійних робіт, що активізуютьформування практичних вмінь і навичок / В.О. Швець, Г.І. Білянін // Дидактика математики: проблеми і дос-

ліджения: міжнар. збірник наук. робіт.– Донецьк : ТЕАН, 2006. –Вип. 25. – С. 60–65.

206. Швець В.О. Міжпредметні зв'язки математики і фізики: стан, проблеми, перспективи / В.О. Швець, О.О. Бойко // Фізика та астрономія в школі. – 2002. – № 6. – С. 21–28.
207. Швець В.О. Еволюція математичного моделювання як методу пізнання і навчання / В.О. Швець, М.О. Філімонова // Математика в школі. – 2010. – №4. – С. 22 – 25.
208. Швец В.А.Формирование в учащихся 5 – 9 классов учений математическогомоделирования / В.А. Швец, М.А. Филимонова // Сборник научни трудове отнационална конференция с международно участие "40 години Шуменски университет 1971–2011" Факултет по математика и інформатика. – Университетско издателство: «Епископ Константин Преславски», Шумен, 2011. – С. 154–161.
209. Эльконин Д.Б. Возрастные и индивидуальные особенности младших подростков / Под ред. Д.Б.Эльконина, Т.В.Драгуновой. – М.: Педагогика, 1967. – 234 с.
210. Эльконин Д. Б. Детская психология: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / Д. Б. Эльконин. — 4-е изд., стер. — М.: Издательский центр «Академия», 2007. — 384 с.
211. Эльконин Д.Б. Избранные психологические труды/ Д. Б. Эльконин.– М.: Педагогика, 1989. – 560 с.
212. Якиманская И.С. Знания и мышление школьника / И.С. Якиманская. – М.: Знание, 1985. – 80 с.
213. Якиманская И.С. Как развивать учащихся на уроках математики (учебно-методическое пособие)/ И.С. Якиманская. – М.: МЭИ, 1996. – 107 с.
214. Якиманская И.С. Личностно-ориентированное обучение в современной школе/ И.С. Якиманская. – М.: Сентябрь, 1996. – 96 с.
215. Якиманская И.С. Личностно ориентированный урок: планирование и

технология проведения. / И.С. Якиманская // Директор школы. – 1998. — №3. – С.58 – 65.

216. Якиманская И.С. Технология личностно ориентированного образования/ И.С. Якиманская. – М.: Сентябрь, 2000. – 175 с.
217. Янченко Г.М. Математика: Підруч. для 5 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г.М. Янченко, В.Р. Кравчук. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2005. – 254 с.
218. Янченко Г.М. Математика: Підруч. для 6 кл. загальноосвіт. навч. закл./ Г.М. Янченко, В.Р. Кравчук. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2006. – 278 с.
219. Banerjee S. Mathematical Modeling: Models, Analysis and Applications / S. Banerjee. – N.-Y.: Chapman and Hall/CRC, 2014. – 276p.
220. Berry J. Mathematical Modelling / J. Berry, K. Houston. – London: Edward Arnold, 1995. – 156 p. — (Modular Mathematics Series)
221. BurghesD. ApplyingMathematics. / D. Burghes, I. Huntley, J. MacDonald.– Chichester: Ellis Horwood, 1982. – 526 p.
222. Duncan Marsh. Applied Geometry for Computer Graphics and CAD / MarshDuncan. – London: Springer, 2004. – 352 p.
223. HeinzS. Mathematical Modeling / S. Heinz. – Berlin: Springer Science & Business Media, 2011. – 460 p.
224. Lesh R. Students' Mathematical Modeling Competencies: ICTMA 13 / R. Lesh, P.L.Galbraith, C.R. Haines, A. Hurford. – London: Springer, 2009. – 624 p.
225. Meerschaert Mark M. Mathematical Modeling / Mark M.Meerschaert. – East-Lansing: Academic Press, 2013. – 384 p.

Додаток А

Добірка прикладних задач для учнів 5 – 6 класів

1. Відстань від дому до школи у 6 разів більша, ніж від школи до магазину. Визначте довжину шляху від дому до школи, якщо відстань від дому до магазину 490 м і школа розташована по дорозі до магазину?

Відповідь: 420 м

2. Уздовж бігової доріжки рівномірно розставлено стовпчики. Старт було дано від першого стовпчика. Через 12 хв Сергійко знаходився біля четвертого стовпчика. Через скільки хвилин від початку старту. Сергійко буде біля сьомого стовпчика, якщо його швидкість є сталою?

Відповідь: 24 хв

3. Відстань від Харкова до Києва дорівнює 483 км. Вона на 294 км більша, ніж відстань від Києва до Черкас і на 142 км більша за відстань від Черкас до Вінниці. Яку відстань подолав турист маршрутом Харків – Київ – Черкаси – Вінниця?

*Відповідь:*1013 км

4. Кімната у формі прямокутника має розміри 3 м × 4 м. Скільки метрів плінтуса потрібно купити для цієї кімнати?

*Відповідь:*14 м

5. Садок має форму прямокутника зі сторонами 6 м і 10 м. Чи вистачить 30 м паркану для того, щоб його огородити, якщо ворота та хвіртка мають сумарну довжину 2 м?

Відповідь: вистачить.

6. На уроці трудового навчання Марійка отримала завдання пошити трикутну хустинку розмірами 50 см, 50 см і 75 см. Дівчинка вирішила оздобити хустинку мереживом. Скільки їй треба купити мережива, щоб обшити хустинку?

Відповідь: 175 см

7. Довжина прямокутного поля дорівнює 850 м, а ширина — 600 м. Знайдіть площу поля і запишіть її в гектарах і арах.

Відповідь: 51 га, 5100 ар

8. Чи вистачить 5 т гороху, щоб засіяти ним поле, що має форму прямокутника зі сторонами 500 м і 400 м, якщо на 1 га землі треба висіяти 260 кг гороху?

Відповідь: не вистачить.

9. Ящик, який має форму прямокутного паралелепіпеда з вимірами 32 см,20 см і 12 см заповнили кубиками з ребром 4 см. Скільки кубиків поміститлося в ящику?

*Відповідь:*120 кубиків

10. Батько вирішив обкласти кахлем стіну кухні, довжина якої дорівнює 6 м, а висота – 3 м. Чи вистачить йому 5 ящиків кахлю, якщо одна плитка має форму квадрата зі стороною 15 см, а в один ящик уміщується 160 плиток?

Відповідь: вистачить

11. Скільки треба метрів дроту, щоб виготовити каркас прямокутного паралелепіпеда з вимірами 5 м, 6 м і 8 м?

*Відповідь:*76 м

12. Аркуш паперу має форму прямокутника розміром 210 мм × 297 мм. Чи вистачить одного аркуша, щоб обклеїти куб із ребром 6 см?

Відповідь: вистачить

13. Довжина ящика дорівнює 45 см, ширина — на 15 см менша, а висота – на 5 см більша від ширини та довжини разом. Знайдіть об'єм ящика.

Відповідь: 108000 $см^3$

14. Довжина басейну 44 дм, ширина на 18 дм менша, а глибина дорівнюєрізниці довжини і ширини. Знайдіть об'єм води, якою можна заповнитивесь басейн.

Відповідь: 20 592 л

15. Довжина акваріума 12 дм, ширина удвічі менша від довжини, а висота на 5 дм менша від довжини. Знайдіть об'єм акваріума.

Відповідь: 504 л

16. Щоб витягти відро води, треба ручку коловорота криниці повернути 15 разів. Знайдіть глибину криниці, якщо діаметр барабана дорівнює 26 см.

Відповідь:≈ 12, 246 м

17. Діаметр велосипедного колеса дорівнює 8 дм. Скільки обертів зробить колесо, якщо велосипед проїде 1км?

Відповідь: 398 обертів.

18. Діаметр колеса тепловоза дорівнює 80 см. За 2 хв колесо робить 800 обертів. Яка швидкість тепловоза в кілометрах за годину? Результат округліть до десятих.

*Відповідь:*60,3 км/год

19. Яка клумба для квітів має більшу площу: та, що має форму квадрата зі стороною 4 м, чи та, що має форму круга з діаметром 4 м?

*Відповідь:*та, що має форму квадрата зі стороною 4 м

20. Під час прогулянки Тарасик і Петрик пройшли від свого будинку спочатку 200 м прямо вулицею, на якій стоїть їхній будинок. Потім повернули ліворуч під прямим кутом і пройшли ще 200 м, а потім повернули праворуч під прямим кутом і пройшли ще 200 м. Визначте, на якій вулиці зараз перебувають хлопці: тій, що перпендикулярна до вулиці, на якій вони мешкають, чи тій, що паралельна їй?

Відповідь: на тій, що паралельна до вулиці, на якій мешкають хлопці.

Добірка задач до змістової лінії «Геометричні величини»

1. Із двох пунктів *A* і *B* вийшли в пункт *M* по прямолінійних маршрутах двоє зв'язкових. Відстань *AM*, пройдена першим зв'язковим, становить 4 км, а відстань*BM*, пройдена другим зв'язковим, –6 км. Якою може бути відстань *AB*?
Відповідь: ≤10 км

2. Вздовж двох сторін алеї на відстані 3 м один від одного необхідно посадити дерева. Скільки дерев слід замовити для садівлі, якщо довжина алеї 210 м? (Перше та останнє дерево саджатимуться на кінцях алеї.)

Відповідь: 142 дерева.

3. Автобус виїхав із пункту *K*в пункт *M* прямолінійним шляхом. Проїжджаючи повз стовп 120-го км, водій зауважив, що залишилося їхати втричі більше, ніж проїхали, а проїжджаючи повз стовп 80-го км, – що залишилося їхати втричі менше, ніж проїхали. На якому кілометрі розміщений пункт *M*?

Відповідь: на 60-му кілометрі.

4. Знайдіть кут між стрілками годинника, якщо вони показують 15 год; 18 год 15 хв; 9 год; 9 год 15 хв.

Відповідь: 90°; 97°30′; 90°; 172°30′.

5. Скільки найбільше кругів з діаметром 50 см можна вирізати з бляшаного листа прямокутної форми розмірами 140 см × 205 см? Яка частина матеріалу використовується при цьому?

Відповідь: 11 кругів; ≈ 75,2%.

6. Барабан лебідки має діаметр 530 мм і довжину 727 мм. За час роботи на барабан намотується 225 м тросу з діаметром 17 мм. У скільки шарів намотується трос?

Відповідь: У три шари.

7. Криницю циліндричної форми, діаметр якої 135 см, а глибина 380 см, потрібно викласти цеглою. Скільки штук цегли для цього необхідно, якщо розміри цеглини 25 см × 12 см × 6,5 см?

Відповідь: 826 штук.

8. Пластинка має форму трикутника зі сторонами 25 см, 34 см і 39 см. З яким найбільшим радіусом можна вирізати круг із цієї пластинки?

Відповідь: 8,5 см.

9. Поле має форму паралелограма, основа якого 500 м, а висота 180 м. Через це поле під прямим кутом до основи проходить шосейна дорога шириною 12 м. Визначте величину посівної площі поля.

Відповідь: 8 га.

10. Основа постаменту пам’ятника має форму квадрата зі стороною 6 м. Навколо пам’ятника розміщена алея шириною 2 м. Знайдіть площу алеї.

Відповідь: 64 м^2.

11. Поштукатурена стіна довжиною 8,25 м і висотою 4,32 м має три вікна розміром 2,2 м × 1,2 м кожне. Знайдіть площу тієї частини стіни, яка покрита штукатуркою.

Відповідь: 27,72 м^2.

12. Сад, в якому дерева посаджені в шахматному порядку, складається із 32 рядів, по 45 дерев у кожному. Сусідні дерева одного ряду розміщені на

відстані 6 м, а сусідні дерева різних рядів – на відстані 8,54 м. Від паркану, яким огороджено сад, крайні дерева віддалені на 3 м. Знайдіть площу саду.

Відповідь: ≈ 7,3 га.

13. Прямокутна клумба для квітів має площу 216 м^2. Вздовж довших сторін клумби необхідно прокласти доріжки шириною 2 м, вздовж коротших – шириною 3 м. Які мають бути розміри ділянки (клумби разом з доріжками), щоб площа доріжок була найменшою?

Відповідь: 24 м × 16 м.

14. Петренко, вирішивши викласти підлогу у квадратній кухні площею 7,29 м^2 квадратним різнокольоровим кахлем, купив такий набір: 1 кахель зі стороною 120 см, 3 кахлі зі стороною 90 см, 9 кахлів зі стороною 60 см і 2 кахлі зі стороною 30 см. Василенко, власник такої ж кухні, придбав на 1 кахель більше зі стороною 120 см, на 1 кахель менше зі стороною 90 см і на 1 кахель менше зі стороною 60 см. Хто з них вчинив раціональніше? Кахлі розрізати не можна.

Відповідь: Раціональніше вчинив Петренко.

15. Повітря тисне із силою 10,3 Н на кожен квадратний сантиметр. Знайдіть силу, з якою повітря тисне на трикутний майданчик, основа якого – 0,13 м, а висота– 0,18 м.

Відповідь: ≈ 200 Н.

16. Із прямокутного бляшаного листа довжиною 40 см та шириною 35 см вирізали для лійки частину, що має форму трапеції з основами, рівними 40 см та 12 см, і висотою 20 см. Знайдіть площу решток листа.

Відповідь: 980 см^2.

17. Із листа фанери розміром 220 см × 80 см необхідно вирізатидля ящиків рівнобічні трапеції з основами 30 см і 10 см та гострим кутом 45°, причому зробити креслення слід найраціональнішим способом. Скільки таких трапецій можна вирізати з цього листа?

Відповідь: 83 трапеції.

18. Підлогу прямокутного фойє театру, розмір якої 14,6 м × 8,4 м, необхідно викласти керамічним кахлем двох різних кольорів (порівну кожного кольору). Скільки слід замовити кахлю кожного кольору, якщо він має форму правильного шестикутника зі стороною 10 см?

*Відповідь:*2359 штук.

19. З бляшаного листа, який має форму прямокутної трапеції з основами 30 см і 20 см та висотою 20 см, вирізано круг найбільшого діаметру. Який відсоток складають відходи?

Відповідь: 37,2 %.

20. Обчисліть площу вікна, що має форму прямокутника, який закінчується зверху сегментом у 60˚. Висота вікна відраховується від середини дуги сегменту до основи та рівна 2,4 м, ширина – 1,6 м.

Відповідь: ≈ 3,7 м^2.

Добірка задач до змістової лінії «Геометричні фігури»

1. Із металевого дробу треба зробити деталь, яка мала б форму рівнобедреного трикутника. Одна зі сторін трикутника повинна мати довжину 25 см, а друга 10 см. Якою має бути довжина дроту, щоб можна було це виконати?

Відповідь: 60 см.

2. Столяру необхідно виготовити деталь трикутної форми. Скільки розмірів і які він повинен знати, щоб виконати замовлення, якщо деталь має форму: а) прямокутного трикутника; б) рівностороннього трикутника?

Відповідь: а) два; б) один.

3. Кут між кроквами металевого даху, як правило, дорівнює 120˚. Знайдіть довжину крокви, якщо її верхній кінець віддалений від основи даху на 2,5 м.

*Відповідь:*5 м.

4. Визначте кут підйому залізничної колії, якщо на довжині 100 м висота підйому дорівнює 4 м.

Відповідь:$\approx 2^\circ 18'$.

5. На залізниці необхідно побудувати станцію з таким розрахунком, щоб вона знаходилася на однакових відстанях від двох населених пунктів. Де повинна розміщуватися станція? У якому випадку таку станцію побудувати неможливо?

*Відповідь:*Слід побудувати серединний перпендикуляр до відрізка, що сполучає дві точки – населені пункти, і знайти точку його перетину із прямою, що є зображенням залізниці. Задача не має розв'язку, якщо точки, що зображають населені пункти, знаходяться на одному перпендикулярі до прямої, що зображає залізницю, але на різних відстанях від неї.

6. У прямокутній пластині слід зробити круглий отвір на однаковій відстані від її вершин. Як знайти центр цього отвору?

*Відповідь:*Знайти точку перетину діагоналей.

7. Фруктовий сад має форму прямокутника, сторони якого відносяться як 16:11, причому його ширина менша від довжини на 250 м. Скільки часу необхідно сторожу, щоб обійти увесь сад вздовж паркану, йдучи зі швидкістю 4 км/год?

*Відповідь:*40,5 хв.

8. Столяру необхідно виготовити підставку у формі чотирикутника. Скільки і які розміри він повинен знати, щоб виконати замовлення? Що повинен виміряти столяр, якщо підставка має форму: а) паралелограма; б) прямокутника; в) ромба; г) квадрата?

*Відповідь:*Необхідно мати п'ять розмірів: чотири сторони і кут; три сторони і два кути; дві сторони і три кути. а) дві суміжні сторони та кут між ними; б) дві суміжні сторони; в) сторону і один з кутів; г) сторону.

9. Між двома телеграфними стовпами на одній з ними прямій і на однаковій відстані від них розміщено третій телеграфний стовп. На якій відстані від дороги, знаходиться цей стовп, якщо два інші віддалені від неї на 32 м і 58 м?

Відповідь: 45 м.

10. Земельну ділянку, що має форму трапеції, віддали під спортивний майданчик. Які розміри повинен знати землемір, щоб накреслити план цієї ділянки?

Відповідь: три сторони і один кут.

11. Під парк відведено ділянку землі, яка має форму рівнобедреної трапеції, одна з основ якої на 50 м більша кожної із решти сторін, а середня лінія дорівнює 90 м. Навколо парку розміщено алею шириною 2 м. По обидва боки алеї потрібно посадити дерева на відстані 3 м одне від одного. Скільки потрібно замовити саджанців?

Відповідь: 212 саджанців.

12. Ділянка, зайнята фруктовим садом, має форму трапеції. Дерева розміщені п'ятьма паралельними між собою рядами, однаково віддаленими один від одного. У всіх рядах відстані між сусідніми деревами однакові. У крайніх рядах кількість дерев 18 та 26 відповідно. Скільки дерев у кожному із решти рядів?

Відповідь: 20, 22, 24 дерева відповідно.

13. Сейсмічною станцією зафіксовані сильні підземні поштовхи на відстані 75 км від станції під кутом 30° до поверхні землі. Між станцією і вулканом 48 км. Визначити глибину осередку (гіпоцентру) землетрусу.

Відповідь: ≈ 41 км.

14. Із гвинтокрила, що знаходиться над дорогою, помічено колону машин. Початок колони видно під кутом 75°, а її кінець – під кутом 70°. Знайти довжину колони, якщо гвинтокрил знаходиться на висоті 1650 м.

Відповідь: 1042 м.

15. Лісник спостерігає за пожежею із вишки, побудованої на високому пагорбі. Висота пагорба 726 м, а висота вишки – 24 м. На якій відстані від пункту спостереження виникла пожежа, якщо лісник помітив вогонь під кутом 7° до горизонту?

Відповідь: ≈ 6153 м.

16. Літак наближається до аеропорту, знаходячись на висоті 7000 км. Пілот має розпорядження здійснювати зниження для посадки під постійним кутом 6°. На якій відстані (з точністю до 1 км) від посадкової смуги він повинен розпочати зниження?

Відповідь: ≈ 67 км.

17. Драбина довжиною 12,5 м приставлена до стіни так, що відстань від її нижнього кінця до стіни дорівнює 3,5 м. На якій висоті від землі впирається у стіну верхній кінець драбини?

Відповідь: 12 м.

18. Від пристані одночасно відпливли два теплоходи: один на південь зі швидкістю 16 морських миль за годину, а другий на захід зі швидкістю 12 морських миль за годину. Яка відстань буде між теплоходами через 2,5 год, якщо 1 морська миля ≈ 1,85 км?

Відповідь:≈ 92,5 км.

19. Чи можливо скласти паркет із правильних десятикутників і п’ятикутників і чому?

*Відповідь:*Неможливо.

20. Лісова галявина має форму ромба. У якій точці галявини слід знаходитися, щоб одночасно почути відлуння свого вигуку від усіх сторін лісу?

*Відповідь:*У точці перетину діагоналей ромба.

Добірка задач до тем «Декартові координати на площині» та «Вектори на площині»

1. Знайдіть координати центра шківа, який треба розмістити рівновіддалено від двох взаємно перпендикулярних планок і від шарніра, який віддалений від планок на 3 одиниці і на 6 одиниць.

Відповідь: O (15; 15) і O (3; 3).

2. Знайдіть місце розміщення центра шківа з радіусом 5 дм, щоб він проходив через точку, яка віддалена від двох взаємно перпендикулярних стержнів на 2 дм і 4 дм, а його центр знаходився на одному із заданих стержнів і дотикався до другого.

Відповідь: O (5; 0).

3. На відстані 1 км від газопроводу треба побудувати газорозподільну станцію, з якої газ по трубах надходитиме до населених пунктів A і B, віддалених від газопроводу відповідно на 4 км і на 9 км. Відстань між населеними пунктами 13 км. В якому місці треба побудувати газорозподільну станцію, щоб відстань від неї до пунктів A і B була однаковою? Визначте довжину газопровідних труб, прокладених до населених пунктів A і B.

Відповідь: Газорозподільна станція знаходиться у точці з координатами (8,3; 1). Довжина газопровідних труб дорівнює приблизно 8,8 км.

4. Обчислити роботу, яку виконує сила $\vec{F} = (6; 2)$, якщо її точка прикладання, рухаючись прямолінійно, переміщається з положення A (-1; 3), в положення B (3; 4).

*Відповідь:*26 Дж.

5. Знайти потужність, яку розвиває сила рівна 5 Н, що діє на швидкість у 3,5 м/с, якщо кут між ними 45°.

Відповідь:≈ 12,4 Вт.

6. На одну точку діють три сили F_1 = 10 Н, F_2 = 10 Н, F_3 = 20 Н. Ці сили розміщені в одній площині, кожні дві сусідні сили утворюють кут 120°. Визначте напрямок та величину рівнодіючої сили.

Відповідь: напрямок рівнодіючої сили відповідаю напрямку сили F_3, а її величина рівна 10 Н.

7. Під яким кутом треба направити човен до берега, щоб перебратися на другий берег річки найкоротшим шляхом, коли відомо, що власна швидкість човна 50 м/хв, швидкість течії 25 м/хв., а ширина річки 250 м? Скільки часу триватиме переправа?

Відповідь: під кутом 30°; ≈ 5,77 хв.

8. Яку силу слід прикласти під кутом 31° до напрямку руху, щоб на шляху, довжиною 100 м, вона виконала роботу, рівну 1400 Дж?

Відповідь: ≈ 16,3 Н.

9. Вантаж масою 3 т підвішений на двох канатах, симетрично розміщених відносно вертикалі, кут між якими дорівнює 60°. Знайдіть сили натягів канатів.

Відповідь:

10. На вантаж, що ковзає по плоскій горизонтальній поверхні, діє сила 200 Н, напрямлена під кутом 60° до горизонту. Яку роботу виконує сила під час переміщення на 5 м, якщо вантаж рухається прямолінійно і рівномірно?

Відповідь: 500 Дж.

11. Сили 7,25 Н і 10,3 Н діють на одну і ту ж точку тіла перпендикулярно одна до одної. Знайдіть рівнодіючу цих сил і кути, які вона утворює з ними.

Відповідь: ≈ 12,6 Н; ≈ 35º; ≈ 55º.

12. Рівнодіюча двох взаємно перпендикулярних сил, прикладених до однієї точки, утворює із однією із складових сил, яка дорівнює 8 Н, кут 35º. Знайдіть іншу складову силу.

Відповідь: ≈ 5,6 Н.

13. До точки прикладена сила 18,3 Н. Відома одна її складова, рівна 12,8 Н і кут 37º між даною силою і відомою складовою. Знайдіть іншу складову.

Відповідь: ≈ 11,2 Н

Додаток Б

Вимірювальні роботи на місцевості

Робота 2.<u>Вимірювання на місцевості відстаней рулеткою, польовим циркулем, кроками. Вимірювання відстаней «на око» з подальшим визначенням похибки.</u>

Необхідне приладдя: віхи або кілочки, рулетка, польовий циркуль.

Підготовча робота в класі. Перш за все необхідно пояснити учням, що правильний вислів «вимірювання довжини відрізка прямої лінії» на практиці звучить так: «вимірювання лінії». Також варто ознайомити школярів із вимірювальними приладами.

Рулетка – це тонка металева або з міцної тканини стрічка, з нанесеними на неї поділками. Довжина рулетки, як правило, рівна 10 м або 20 м. На кожному з кінців стрічки є косий виріз, на якому поставлено початковий штрих. На одному боці стрічки нумерація одиниць вимірювання іде в одному напрямку, а на другому – у зворотному порядку. Метри позначаються бляшками із зазначенням порядкового номера кожного із них. Меншими круглими бляшками позначаються пів метри, дірочками – дециметри. Для збереження та зручності у користуванні рулетка поміщається у шкіряний, пластмасовий або картонний футляр.

Польовий циркуль – інструмент у вигляді літери А висотою 1,37 м і шириною 2м. Для учнів варто використовувати польовий циркуль шириною 1 м.

Виконання роботи на місцевості.

І).Вимірювання відстаней рулеткою. Лінії на місцевості можна вимірювати рулеткою або, якщо її немає, мірною мотузкою чи саморобним вимірювальним шнуром. Якщо вимірюються значні відстані, то щоб не помилитися у підрахунках, робота виконується наступним чином. Перший учень, який іде попереду, має з собою 10 кілочків. Відклавши стрічку рулетки, він забиває кілочок біля останньої її мітки, а на початковій мітці другий учень, що знаходиться позаду, забиває бирку. Перший учень тягне стрічку далі, а другий забирає бирку із собою. Дійшовши до кілочка, він зупиняє першого учня і зачіпляє за кілочок кінець стрічки так, щоб той сумістився з початковим штрихом. Перший учень натягує стрічку, забиває другий кілочок і подавши відповідний знак другому учню, рушає вперед. Той забирає кілочок і робота продовжується далі доти, доки перший учень не поставить десятий кілочок. Тоді другий учень забиває на місці 10-го кілочка бирку, іде до першого і передає йому зібрані 10 кілочків. Подальше вимірювання відбувається за такою ж схемою доти, доки перший учень не дійде до кінцевої точки. Під час вимірювання третій учень записує число передач кілочків, а також стежить за тим, щоб сума кілочків у першого і другого школярів завжди дорівнювала 10. По закінченні вимірювання заданої відстані визначається довжина лінії. Щоб запобігти помилкам, кожну лінію вимірюють принаймні двічі. Якщо робота проводиться на твердому ґрунті чи асфальті, то замість кілочків можна використовувати невеликі камінці.

ІІ).Вимірювання відстаней польовим циркулем. При вимірюванні ліній польовим циркулем учень іде вздовж лінії, тримаючи циркуль у правій руці, і переставляє його з одного кінця на інший, впираючись загостреним кінцем передньої планки у землю. При цьому необхідно підраховувати кількість переставлянь. Під час роботи варто слідкувати, щоб кінці циркуля йшли точно по прямій, а не зигзагами. Хоча, звичайно, незначні зигзаги будуть неминучі. Хорошим завданням для учнів є визначення похибки вимірювання польовим циркулем на основі контрольного вимірювання рулеткою і відповідних розрахунків.

ІІІ).Вимірювання відстаней кроками.Існують два способи вимірювання відстаней кроками. Перший спосіб починається із визначення середньої довжини кроку кожного учня. Для цього слід провести таку роботу. На рівній місцевості рулеткою відмірюють відрізок завдовжки, наприклад, 20 м. Ідучи вздовж цього відрізка звичним кроком, учні підраховують їх кількість, а дані заносять в таблицю. Чим більше буде проведено подібних експериментів, тим точнішим буде результат (див.табл.1.).

Таблиця 1

Визначення середньої довжини кроку

№	Довжина відрізка, см	Кількість кроків
1	2000	37
2	2000	40
3	2000	39
Всього:	6000	116

Отже, середня довжина кроку у нашому випадку дорівнює $\frac{6000}{116} \approx 50$ см

Так як учні 5 класу на момент проведення роботи ще не знайомі з поняттям десяткового дробу, для уникнення непорозумінь варто користуватися як одиницями вимірювання сантиметрами з подальшим їх переведенням у метри. Слід також зауважити, що обчислювати середню довжину кроку варто з точністю до 5 см. Необхідно запропонувати учням скласти таблицю для перерахунків кроків у сантиметри (масштаб кроків) (див табл.2.).

Розглянемо детальніше використання цієї таблиці на практиці. Припустимо, що необхідно перевести у метри 137 кроків. Це зручно виконати так:

100 кроків = 5000 см

30 кроків = 1500 см

7 кроків = 350 см

137 кроків = 6850 см або 68 м 50 см

Таблиця 2

Масштаб кроків

Кількість кроків	Довжина, у см
1	50
2	100
3	150
4	200
5	250
6	300
7	350
8	400
9	450
10	500

Однак такий спосіб вимірювання довжини лінії не завжди є зручним, оскільки потребує виконання досить громіздких обчислень.

Другий спосіб ґрунтується на визначенні середньої кількості кроків, що поміщаються у 10 м та в 100 м. Тому для вимірювання довжини лінії достатньо лише відраховувати кількість кроків, що відповідає 100 м, а потім – 10 м. Величина залишку, меншого10 м, визначається «на око». Оскільки обчислення в даному випадку нескладні, їх можна виконувати усно.

На даній практичній роботі варто ознайомити учнів з відстанню в 1 км. Зробити це можна, відмірюючи її або кроками, або з допомогою рулетки чи польового циркуля.

Важливо, щоб відстань в 1 км містилася між двома досить помітними орієнтирами і проглядалася по всій довжині. Якщо ці вимоги виконати неможливо, відстань необхідно обирати так, щоб орієнтири, якими вона визначається, були добре знайомі учням. Вперше 1 км варто відміряти кроками одним із вище описаних способів. Наприклад, роботу можна організувати у вигляді екскурсії. Поставивши дітей парами, учитель перевіряє,чи пам’ятають вони, скільки їх кроків міститься в 100 м. Потім виводить колону до початку обраного маршруту і дає завдання першій парі, рахуючи про себе кроки, відміряти перші 100 м. Після цього перша пара іде в кінець колони, а відмірювання наступних 100 м виконує друга пара і т. д. В кінці маршруту учитель повідомляє, скільки було витрачено часу, щоб пройти 1 км, і звертає увагу учнів на подолану відстань.

Подальше вимірювання відстані в 1 км можна здійснювати, використовуючи визначений час, як це зазвичай робиться на практиці.

IV).Вимірювання відстаней «на око». Під час подорожей дуже важливо вміти без використання спеціальних приладів визначати відстані і розміри предметів. Здатність людини оцінювати «на око» відстані до оточуючих його об'єктів і розміри предметів називається окоміром. Це індивідуальна особливість людини, але її можна розвивати шляхом виконання різних вправ.

Перш за все необхідно навчити школярів уявляти і впевнено розрізняти на будь-якій місцевості кілька найбільш зручних в якості еталонів відстаней (наприклад 10, 50, 100 м). Закріпивши їх у зоровій пам'яті, учні зможуть в подальшому мисленно порівнювати еталони з відстанями, що їх цікавлять. Зробити це можна таким чином: вчитель обирає від точки спостереження кілька об'єктів, що знаходяться на відстанях від 10 – 20 м до 100 – 150 м, і пропонує кожному учневі оцінити ці відстані «на око» і записати результати в зошит. Потім учні розбиваються на пари, і кожна пара проводить вимірювання заданих відстаней. Результати записуються, обчислюється різниця і відсоток похибки. Форма таблиці для звітності може бути наступна (див. табл.3.).

Таблиця 3.

Вимірювання відстаней «на око»

№	Відстань фактична, м	Відстань по вимірам, м		Похибка	
		«на око»	рулеткою	Надлишок – недостача	У відсотках

Результат можна вважати задовільним, якщо учень помиляється не більше, ніж на 0,3 вимірюваної відстані.

Варто звернути увагу школярів на те, що на вимірювання відстаней «на око» впливає ряд факторів, зокрема освітленість, характер місцевості, контрастність оточуючого фону і об’єктів, що розглядаються, їх розміри. Тому виділяють такі правила:

1). Предмети здаються розміщеними ближче, ніж справді:

а) при яскравому сонячному освітленні;
б) на відкритій місцевості, особливо на водній чи засніженій;
в) на місцевості із западинами та ярами;
г) при спостереженні зверху вниз;
д) при спостереженні лежачи;
е) якщо сонце знаходиться позаду спостерігача;
ж) якщо предмети пофарбовані в світлі, яскраві кольори;
з) якщо колір предмета різко відмінний від фону місцевості.

2). Предмети здаються розміщеними далі, ніж справді:

а) при слабкому або миготливому освітленні;
б) у дощ, туман, присмерки, похмуру погоду, при насиченості повітря пилом;
в) якщо об’єкт, що цікавить, знаходиться в оточенні великої кількості дрібних об’єктів;
г) при спостереженні проти джерела освітлення;
д) при спостереженні знизу догори;
е) при спостереженні стоячи;
ж) якщо предмети пофарбовані в темні кольори;
з) якщо колір предмета зливається з фоном місцевості.

Робота 3.<u>Побудова прямокутної ділянки та визначення її площі. Побудова земельних одиниць вимірювання площі (ар, гектар або його частина).</u>

Необхідне приладдя: мірна мотузка, екер, віхи або кілочки.

Підготовча робота в класі. Варто ознайомити школярів із одним із основних вимірювальних приладів – екером.

Найбільш використовуваною конструкцією екеру є дві планки, скріплені під прямим кутом. На кінцях планок ставляться цвяхи (діоптри) так, щоб прямі, які з'єднують їх, були взаємно перпендикулярні. Екер кріпиться на тринозі чи стовпчику. Можна запропонувати учням зробити самостійно кілька екерів. Можливими варіантами екерів є: прямокутний трикутник, закріплений в горизонтальному положенні на стовпчику; квадратна дошка з двома взаємно перпендикулярними прямими; квадратна коробка з проміжками між верхньою і нижньою кришками та діоптрами у вигляді металічних шпильок між ними (екер Орлова) тощо.

Виконання роботи на місцевості.

I).Побудова прямого кута. Будувати прямий кут можна двома способами: за допомогою мірної мотузки або використовуючи екер.

1).За допомогою мірної мотузки. Для цього використовують єгипетський трикутник: береться мірна мотузка, на якій через кожний метр закріплюються металеві мітки або зав'язуються вузли. Загальна довжина мотузки має дорівнювати 12 м. Її кінці зв'язуються між собою. Побудова кута відбувається за таким планом:

- будь-який вузол прикладається до кілочка, забитого в землю у тій точці прямої, яка є вершиною прямого кута;
- другий кілочок на прямій забивається на відстані 4 м, і за нього закидається мотузка;
- потім вільний кінець мотузки прив'язується до першого кілочка;
- третім кілочком мотузку натягують на відстані 3 м від першого і 5 м від другого.

Таким чином напрямок від 1-го до 3-го кілочка буде перпендикулярним до напрямку від 1-го до 2-го.

2).За допомогою екера. Для цього у вершині кута слід встановити екер і провісити дві прямі лінії: одну – у напрямку першої пари діоптрів, другу – у напрямку іншої. Ця побудова зводиться до продовження прямої за її кінцеві точки, роль яких відіграють діоптри.

II). Побудова прямокутної ділянки і визначення її площі. Для того щоб побудувати на місцевості прямокутник, потрібно встановити в одній з його вершин екер, наприклад у вершині *A*, і побудувати прямий кут $\angle PAK=90^\circ$. Потім слід провісити прямі *AP* і *AK*, вздовж яких з допомогою рулетки відміряти бажану ширину (*AB*) і довжину (*AD*) прямокутника. Далі необхідно перенести екер у вершину *B*, визначити напрямок прямої *BM*, перпендикулярної до *AB*, і відкласти *BC*=*AD*.Щоб мати впевненість у правильності виконаної побудови, слід провести контрольний замір: виміряти довжину сторони *CD*, яка має дорівнювати довжині сторони *AB*. Якщо розбіжність буде велика, роботу варто виконати ще раз.

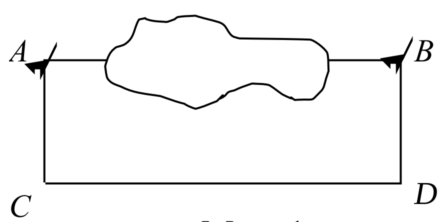
Завдання на побудову прямокутника можна видозмінювати. Наприклад, побудувати фігуру без попереднього надання розмірів її сторін або за даною площею тощо.

III).Побудова земельних одиниць вимірювання площі (ар, гекктарабо його частина). Побудова 1 ара (або, як говорять у повсякденному житті, сотки) на місцевості здійснюється аналогічно до побудови прямокутника. Корисною вправою є побудова 1 ара за допомогою «живих віх» – учнів, які стоять у вершинах квадрата обличчям до середини фігури. Оглядаючи побудовану таким чином ділянку, школярі отримують конкретні уявлення про ар. Слід пояснити учням, що ар можна побудувати і у вигляді прямокутника зі сторонами 5 м і 20 м та 4 м і 25 м.

Якщо дозволяє місцевість, то можна виконати побудову і 1 га. Коли ж

можливості такої немає, то слід обмежитися побудовою га.

IV).Задача на визначення відстані між двома точками, між якими є перешкода. За наявності вільного часу слід запропонувати учням розв'язати та-



Мал. 1.

ку задачу за допомогою екера, рулетки та віх. Зробити це можна наступним способом. У даних точках *A* і *B* за допомогою екера ставляться перпендикуляри *AC* і *BD* до прямої *AB* (див.мал.1.). Потім користуючись рулеткою, відміряються на них однакові довжини. Тоді *CD* = *AB*.

Робота 4.<u>Побудова кола та визначення його довжини. Побудова круга та визначення його площі.</u>

Необхідне приладдя:кілочки, мотузка, рулетка.

Виконання роботи на місцевості.

І).Побудова кола та визначення його довжини. Щоб побудувати на місцевості коло, слід встановити кілочок (центр), до якого прив'язана мотузка, визначеної довжини (радіус). Тримаючись за вільний кінець мотузки і рухаючись навкруги кілочка, можна описати коло.

Довжину кола слід знаходити, вимірюючи рулеткою довжину мотузки, що визначає межу кола.

Варто провести з учнями дослідження, знайшовши відношення довжини кількох кіл до їх діаметра. Таким чином дослідним шляхом буде знайдено значення π.

ІІ).Побудова круга та визначення його площі. Побудова круга відбувається аналогічно до кола. Слід акцентувати увагу учнів на тому, що коло – це лише лінія, тоді як круг містить у собі цю лінію й усе, що всередині нього.

Єгипетські математики обчислювали площу круга за його діаметром. За їхніми правилами площа круга дорівнювала площі квадрата, сторона якого складає $^8/_9$ діаметра круга. На підтвердження цього факту можна виконати кілька вправ.

Робота 5. <u>Вимірювання і побудова на місцевості кутів з допомогою астролябії</u>

Необхідне приладдя: астролябія, віхи.

Підготовча робота в класі. Перш за все необхідно в ході бесіди з’ясувати з учнями ситуації із повсякденного життя, в яких потрібно здійснювати вимірювання кутів. Наприклад, знімання і нанесення на план земельної ділянки, розбивання клумби певної форми тощо. Потім слід ознайомити школярів із астролябією, її призначенням і прийомами використання.

Астролябія (від грецького слова αστρον – зірка і λαμβανω – брати)– найпростіший інструмент для вимірювання на місцевості кутів у горизонтальній площині. Складається з металевого лімбу, до якого прикріплено нерухому пару діоптрів уздовж напряму 0° - 180°. Лімб – це круг радіусом 15 або 20 см, який поділками розбито на 360°. Окрім цього на лімб для намічення напрямку прямої на місцевості (візування) встановлюється рухома лінійка (алідада) із загостреними кінцями (указками) та діоптрами. Лімб з допомогою втулки кріпиться на штатив з виском.

Потім на геометричних схемах учитель показує школярам, як вимірюються кути на місцевості.

Виконання роботи на місцевості.

1) ***Вимірювання кутів***. Нехай, наприклад, необхідно виміряти градусну міру кута *BAC*. Для цього слід встановити з допомогою виска астролябію так, щоб центр лімба (точка перетину нерухомої пари діоптрів і алідади) та точка місцевості *A* були на одній вертикалі (це називається центруванням), а нерухома пара діоптрів вказувала на провішену пряму *AB*. Потім за допомогою рівня привести лімб у горизонтальне положення (це називається нівелюванням). За допомогою алідади потрібно візувати на віху *C*. Тоді величина дуги між нерухомою парою діоптрів та алідадою і вказує на градусну міру кута *BAC*.

Вимірювання градусної міри кутів з допомогою астролябії не лише удосконалює відповідні навички, а й служить пропедевтикою вивчення у 8 класі співвідношень між центральним кутом та відповідною дугою кола.

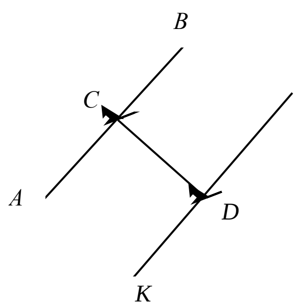
2) ***Побудова кутів***. Використання астролябії дозволяє побудувати на

місцевості кут будь-якої градусної міри. Для цього слід провісити довільну пряму *ML* і центрувати лімб з точкою *M* в напрямку *ML*. Потім за допомогою алідади відмітити необхідну градусну міру кута і визначити напрям другої сторони кута. Після цього провісити пряму *MN*. *LMN* – кут із заданою градусною мірою.

Робота 6.Побудова паралельних прямих

Необхідне приладдя: віхи, екер, рулетка.

Виконання роботи на місцевості. Нехай необхідно побудувати пряму, паралельну до заданої прямої *AB*, на відстані 25 м від неї. Для цього на прямій *AB* потрібно вибрати довільну точку *C*(див. мал.2.). Потім за допомогою екеру через точку *C* провести пряму, перпендикулярну до *AB*, і відкласти на ній відрізок *CD* довжиною 25 м. Після цього слід в точці *D* встановити екер так, щоб одна пара діоптрів вказувала напрям *CD*, тоді інша пара визначатиме пряму *KL*, яка і буде паралельною до *AB*.



Мал. 2

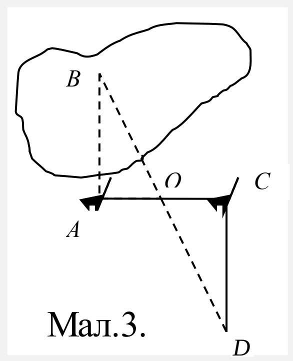
Робота 7.Знаходження відстаней до недоступних точок за допомогою побудови трикутників

Необхідне приладдя: віхи, екер, рулетка, астролябія.

Підготовча робота в класі. У ході бесіди з'ясувати з учнями ситуації із повсякденного життя, в яких потрібно здійснювати знаходження відстаней до недоступних точок. Наприклад, визначення відстані від берега до корабля у морі (задача Фалеса), ширини річки тощо.

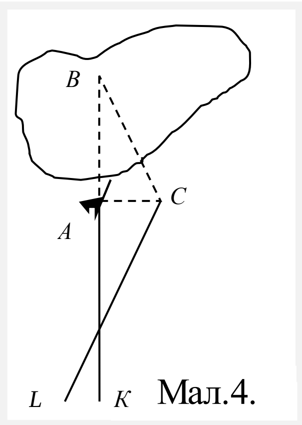
Виконання роботи на місцевості. В землемірній практиці виділяють три задачі, пов'язані зі знаходженням відстаней до недоступних точок за допомогою побудови трикутників.

1) Визначення відстані до недоступної точки.



Мал.3.

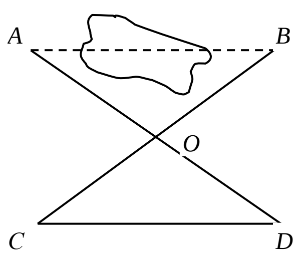
*1-й спосіб.*Перш за все необхідно, орієнтуючись на точку *B*, відмітити точку *A*(див.мал.3.).Потім поставивши у точку *A* екер, побудувати $\angle BAC$=90˚. На прямій *AC* слід послідовно відміряти два рівні відрізки *AO* і *OC*. Після цього, перенісши екер в точку *C*, побудувати пряму, перпендикулярну до *AC*. Пересуваючись з віхою вздовж побудованої прямої, потрібно відшукати точку *D*, яка знаходиться у створі прямої *BO*. Тоді *CD*=*AB*.



Мал.4.

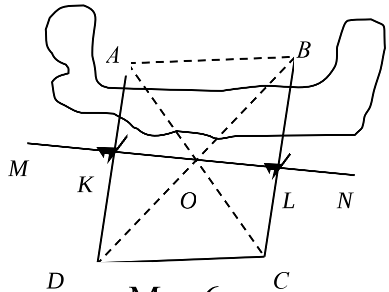
2-й спосіб. Поставивши екер у точці *A*, слід побудувати пряму *AC* перпендикулярну до *AB*(див.мал.4.).Потім у напрямку *AB* провісити пряму *AK*. Після цього слід виміряти, скориставшись астролябією, величину $\angle BCA$ і побудувати $\angle ACL=\angle BCA$. Точка *D* визначається так, щоб вона була одночасно в створі і прямої *BK*, і прямої *CL*. Тоді *AB*=*AD*.

2) Визначення відстані між двома доступними точками, розділеними перешкодою.Спочатку слід провісити довільну пряму *AD*(див.мал.5.). Точку*O* поставити так, щоб *AO*=*OD*. Потім будуються *BO*=*OC*.Тоді *AB*=*CD*.



Мал.5.

3) Визначення відстані між двома недоступними точками. По інший бік перешкоди варто провісити довільну пряму *MN*(див.мал.6.). За допомогою екера на ній відшуковуються точки *K* і *L*так, щоб $\angle AKM$=90˚ і$\angle BLN$=90˚. Вимірявши довжину відрізка *KL*, слід знайти його середину – точку *O*. Продовживши прямі *AK* і *BL*, варто відшукати на них точки *D* і *C*, які лежать у створі прямих *BO* і *AO* відповідно.Тоді *AB*=*CD*.



Мал.6.

Робота 8.<u>Знімання плану нескладної земельної ділянки методом поділу на трикутники</u>

Необхідне приладдя: астролябія, компас, віхи, рулетка.

Попередній огляд місцевості. Для виконання цієї роботи слід вибрати на місцевості одну або дві ділянки розміром 40 м×30 м з рівним рельєфом. Кілочками намітити на них вершини шестикутника зі сторонами 15 – 20 м.

Підготовча робота в класі. Спочатку варто ознайомити учнів з основними поняттями даної роботи: план місцевості, його види, способи знімання.

Планом місцевості називається зображення на папері у певному масштабі проекції місцевості на горизонтальну площину.

Виділяють два види планів: контурні (зображуються лише контури елементів місцевості) та топографічні (показується ще і рельєф).

Є два способи знімання плану місцевості: горизонтальне і вертикальне (нівелювання).

Потім слід ознайомити учнів з правилами роботи з компасом.

Компас – це найпростіший прилад для орієнтування на місцевості. Він складається з мідної чи пластмасової коробки циліндричної форми, всередині якої під склом обертається магнітна стрілка на шпилі, укріпленому в центрі кільця або диска. Цей диск або кільце називається лімбом і має градусні поділки, що йдуть за годинниковою стрілкою. На диску компаса позначено буквами сторони світу, причому позначка 0° відповідає півночі. Ціна поділки звичайного шкільного компасу – 5°. Кінець магнітної стрілки, який завжди напрямлений на північ, зафарбований темно-синім кольором. Щоб гострі кінці стрілки не тупилися, при зберіганні компаса її трохи підіймають за допомогою гальма, яке називають аретиром, і притискують до скла кришки. Деякі компаси оснащені ще й візиром (те ж саме, що і алідада).

Для того щоб знята ділянка була розміщена на плані по відношенню до сторін світу так, як і на місцевості, визначають азимут або румб.

Азимут – це кут між даною прямою та північним напрямом меридіану- за годинниковою стрілкою. Величина азимуту може змінюватися від 0˚ до 360˚.

Румб – це кут між даною прямою і найближчим кінцем магнітної стрілки. Величина румба коливається від 0˚ до 90˚.

Для того щоб визначити компасом азимут, потрібно:

1. Стати обличчям у напрямку предмета, азимут якого необхідно визначити.

2. Відпустити аретир і повертати компас у горизонтальній площині доти, доки північний напрям магнітної стрілки не суміститься з нульовою поділкою лімбу.

3. Повертаючи кришку компаса, направити візир на предмет. Якщо візира немає, то на скло покласти сірник у напрямку предмета і здійснити відлік.

Для того щоб визначити на місцевості напрям за заданим азимутом, необхідно:

1. Встановити візир на поділку, що відповідає заданому азимуту.

2. Повертати компас у горизонтальній площині доти, доки північний напрям магнітної стрілки не суміститься з нульовою поділкою лімбу. Тоді візир вказуватиме шуканий напрям.

Після ознайомлення з правилами роботи варто запропонувати учням виміряти в різних точкахазимути кількох прямих.

Виконання роботи на місцевості. В землемірній практиці виділяють два способи знімання плану земельної ділянки шляхом поділу її на трикутники.

1) Знімання плану способом лінійних засічок. Спосіб лінійних засічок полягає у поділі земельної ділянки на трикутники та вимірюванні їх сторін. Задля орієнтації плану на місцевості визначають азимут або румб однієї із сторін. Після цього робота зводиться до побудови трикутника за трьома сторонами.

2) Знімання плану способом кутових засічок. Спосіб кутових засічок ґрунтується на побудові трикутника за стороною і прилеглими кутами. Особливо зручний він для знімання плану місцевості, частина якої недоступна. Кути вимірюються астролябією, а сторона – рулеткою. Величину кута слід вимірювати кілька раз і вираховувати середнє арифметичне значення. Для орієнтування на місцевості визначається азимут вимірюваної сторони. Слід запропонувати учням результати вимірювання занести в таблицю (див.табл.4.).

Таблиця 4.

Результати вимірювання заданої ділянки

№ вершини	Кут	Середнє арифметичне значення кута	Азимут	Довжина сторони, м
	в градусах			

Робота 9.<u>Визначення висоти предмета</u>

Необхідне приладдя:екліметр, рулетка.

Підготовча робота в класі. Спочатку варто ознайомити учнів з новим вимірювальним приладом – екліметром.

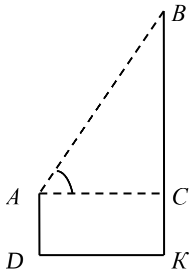
Екліметр – це найпростіший інструмент для вимірювання кутів у вертикальній площині. Він складається з лінійки, до якої прикріплено півкруг з вільно звисаючим виском чи стрілкою. Півкруг поділено на градуси від середини праворуч і ліворуч від 0° до 90°. Коли нитка виска проходить через поділку 0°, лінійка буде в горизонтальному положенні. Для візування на лінійці встановлюють діоптри у вигляді пластинок з горизонтальними щілинами або довгої трубки, причому один її кінець відкритий і має два взаємно перпендикулярні дротики (предметний діоптр), а інший – закритий з маленьким отвором посередині (очний діоптр). Для зручності екліметр часто прикріплюють до загостреної жердини або триноги.

Для того щоб виміряти заданий кут, необхідно:

1. Встановити екліметр у вершині вимірюваного кута так, щоб висок сумістився з поділкою 0°.

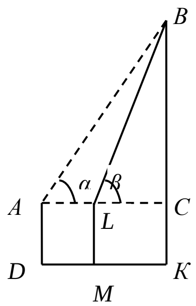
2. За допомогою встановлених діоптрів візувати на предмет, тоді кут відхилення виска і буде шуканим.

Виконання роботи на місцевості. У землемірній практиці виділяють два випадки визначення висоти предмета.



Мал.7.

1) Визначення висоти предмета, до основи якого можна підійти. Для цього слід встановити екліметр в деякій точці D і виміряти $\angle BAC$ і довжину відрізка $DK=AC$(див.мал.7.). Потім користуючись знайденими даними, побудувати у зошиті в певному масштабі Δ ABC, виміряти довжину BC та інтерпретувати її згідно масштабу. Тоді якщо висота екліметра h, а $BC=a$, то шукана висота предмета $BK=a+h$.



Мал.8.

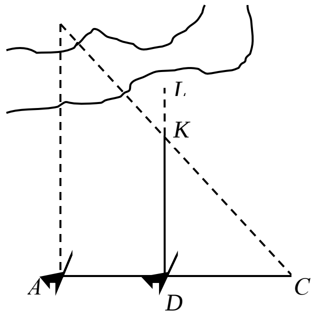
2) Визначення висоти предмета, до основи якого не можна підійти. Для цього необхідно здійснити аналогічні вимірювання кутів з двох точок A і L та довжини відрізка $DM=AL$(див.мал.8.). Потім у зошиті побудувати в певному масштабі Δ ABL за відомими $\angle BAL$ і $\angle BLA$ та стороною AL, потім слід виміряти довжину висоти BC та інтерпретувати її згідно масштабу. Тоді якщо висота екліметра h, а $BC=a$, то шукана висота предмета $BK=a+h$.

Робота 10. **<u>Знаходження відстаней до недоступних точок на основі властивостей прямокутника та середньої ліній трикутника.</u>**

Необхідне приладдя: екер, рулетка, віхи.

Підготовча робота в класі. Оскільки подібна робота вже проводилася з учнями, слід повторити основні моменти.

Виконання роботи на місцевості. У землемірній



Мал.9.

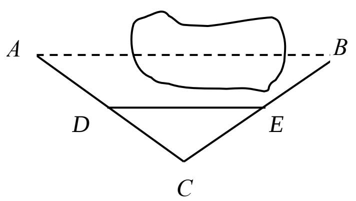
B

практиці виділяють три задачі, пов'язані зі знаходженням відстаней до недоступних точок на основі властивостей прямокутника та середньої ліній трикутника.

1) Визначення відстані до недоступної точки. По один бік від перешкоди слід обрати довільну точку *A*, провісити пряму перпендикулярну до*A*-*B*і виміряти довжину відрізка *AC*(див.мал.9.). З середини *AC* – точки *D* – за допомогою екеру необхідно провісити пряму *DL* перпендикулярну до *AC*. Точка *K* визначається так, щоб вона одночасно була в створі і прямої *DL*, і прямої *BC*. Потім варто виміряти довжину *DK*. Тоді *AB=2DK*.

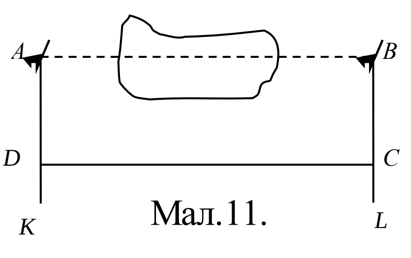
2) Визначення відстані між двома доступними точками, розділеними перешкодою.

1-й спосіб. Спочатку слід обрати таку точку *C*, щоб від неї можна було вільно дістатися і до точки *A*, і до точки *B* (див.мал.10.). Потім варто виміряти довжину *CA* і *CB* та знайти їх середини – точку *D* і точку *E* відповідно. Тоді *DE* – середня лінія Δ *ABC*, *AB=2DE.*



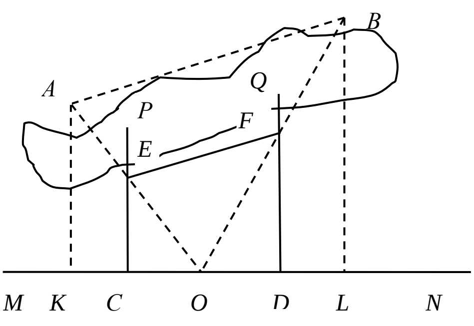
Мал.10.

2-й спосіб. Цей спосіб застосовується у випадку, коли можна візувати точку *B* з точки *A*(див.мал.11.). Спочатку в точці *A*слід поставити екер, а в точці *B* – віху, і провісити пряму *AK* перпендикулярну до *AB*. Аналогічно потрібно провісити пряму *BL*. Вздовж прямих *AK* і *BL* необхідно відкласти рівні відрізки *AD=BC*. Тоді *ABCD* – прямокутник і *AB=CD*.



Мал.11.

3) Визначення відстані між двома недоступними точками. По один бік від перешкоди слід провісити довільну пряму *MN* та за допомогою екеру знайти точки *K*і *L* (вони є основами перпендикулярів, опущених з точок *A* і *B* на пряму *MN*) (див.мал.12.). Потім у довільну точку*O* прямої *MN* варто



Мал.12.

поставити віху і знайти точки *C* і *D* як середини *KO* і *LO* відповідно. З точок *C* і *D* необхідно побудувати прямі перпендикулярні до *MN*.Точка *E* знаходиться так, щоб вона одночасно була у створі прямої *AO* і прямої*CP*. Аналогічно слід позначити точку *F*. Тоді *CE* – середня лінія Δ *AKO* і *DF* – середня лінія Δ *BLO*. Отже, *AE=EO, BF=FO*, тобто *EF* – середня лінія Δ *ABO*.Тоді *AB=2EF*.

Робота 11.<u>Визначення відстаней і висот на основі подібності трикутників</u>

Необхідне приладдя:висотомір, рулетка, екер, віхи.

Підготовча робота в класі.Спочатку варто ознайомити учнів з новим вимірювальним приладом – висотоміром.

Висотомір – це найпростіший інструмент для визначення висоти предмета. Він складається з жердини, до якої прикріплена дошка у формі квадрата. На дошці вздовж її нижнього горизонтального краю та вздовж вертикального краю, протилежного до спостерігача, проводяться прямі. Горизонтальна пряма береться визначеної довжини, як правило 20 см, і ділиться на 10 рівних частин поділками (від 0,1 до 1,0). До протилежного до спостерігачакута верхнього горизонтального краю прикріплюють висок. Для зручності візуваннявстановлюються очний і предметний діоптри.

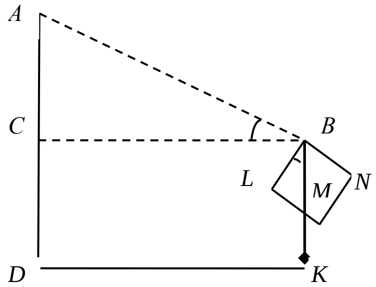
Для того щоб знайти висоту предмета, необхідно:

1. Взяти висотомір таким чином, щоб сторона з поділками була повернута донизу, і дивлячись уздовж протилежної сторони в очний діоптр, спрямувати її так, щоб вершина досліджуваного предмета була на продовженні лінії візування.

2. Не змінюючи положення інструмента, помітити на нижній шкалі точку, через яку проходить лінія виска.

3. Провівши необхідні обчислення, знайти висоту досліджуваного предмета.

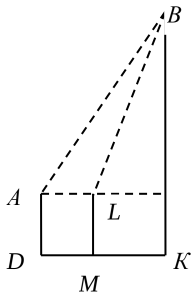
Виконання роботи на місцевості. Розглянемо два способи визначення відстаней і висот на основі подібності трикутників.



Мал.13.

I) Визначення висоти предмета за допомогою висотоміра.

1) Визначення висоти предмета, до основи якого можна підійти. Спочатку слід знайти величину відхилення LM виска висотоміра. Нехай це буде сьома поділка, тобто $LM=0{,}7LN=0{,}7LB$ (див.мал.13.). Оскільки $\Delta ABC\infty\Delta MBL$, то $CA=0{,}7CB$. Отже, $AD=AC+CD$, де CD – висота інструменту.

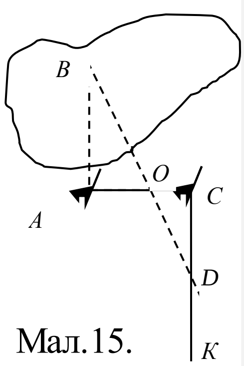


Мал.14.

2) Визначення висоти предмета, до основи якого не можна підійти. У такому разі спостереження слід проводити з двох точок A і L (див.мал.14.). Нехай в результаті спостереження отримали $BC=0{,}7LC$ і $BC=0{,}3AC$. Тоді $LC=\frac{BC}{0{,}7}$ і $AC=\frac{BC}{0{,}3}$, $AL=AC-LC=\frac{BC}{0{,}3}-\frac{BC}{0{,}7}=\frac{40}{21}BC$.

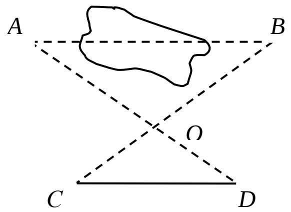
Звідси $BC=\frac{21}{40}AL=0{,}525AL$. Тоді $BK=BC+CK$, де CK – висота інструменту.

II) Визначення відстані до предмета за допомогою додаткових побудов на місцевості.



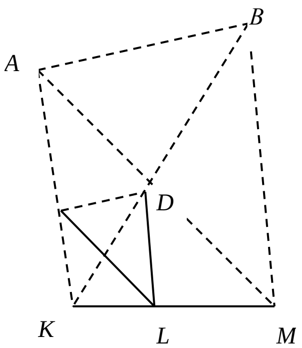
Мал.15.

1) Визначення відстані до недоступної точки. Спочатку слід користуючись екером, побудувати пряму перпендикулярну до AB і відкласти на ній відрізки AO і $OC=$ AO (див.мал.15.). Потім варто, перенісши екер в точку C, побудувати пряму CK перпендикулярно до AC. На прямій CK необхідно знайти точку D, яка лежить у створі прямої BO. Тоді $\Delta ABO\infty\Delta CDO$ і $AB=n\cdot CD$.



Мал.16.

2) Визначення відстані між двома доступними точками, розділеними перешкодою. Спочатку слід обрати таку точку *O*, щоб від неї були доступними і точка *A*, і точка *B*, та виміряти відрізки *AO* і *BO* (див.мал.16.). Потім варто на їх продовженнях відкласти відрізки *OD* і *OC* відповідно, які в *n* раз менші відрізків *AO* і *BO*. Тоді $\Delta ABO \infty \Delta DCO$ і $AB = n \cdot CD$.



Мал.17.

3) Визначення відстані між двома недоступними точками. По один бік від перешкоди слід провісити довільну пряму *KM* (див.мал.17.). Потім через будь-яку точку *L* необхідно провісити *LD*//*BM*і*LC*//*AM*, при перетині утворяться точки *C* і *D*. Оскільки $\Delta AKM \infty \Delta CKL$і $\Delta BKM \infty \Delta DKL$ $\frac{AK}{CK}=\frac{KM}{KL}$ і $\frac{BK}{DK}=\frac{KM}{KL}$, звідси $\frac{AK}{CK}=\frac{BK}{DK}$, тобто $\Delta ABK \infty \Delta CDK$. Тоді $\frac{AB}{CD}=\frac{BK}{DK}=\frac{KM}{KL}$.

Отже, $AB=\frac{CD \cdot KM}{KL}$. Далі слід виміряти довжини відрізків *CD, KM, KL* і здійснити відповідні розрахунки.

Робота 12. **<u>Обчислення площ земельних ділянок.</u>**

Необхідне приладдя: екер, віхи, рулетка, палетка.

Попередній огляд місцевості.Для виконання цієї роботи слід вибрати на місцевості таку ділянку, щоб вона мала форму довільного многокутника і у рельєфному плані була досить рівною. Можна використати шкільну ділянку.

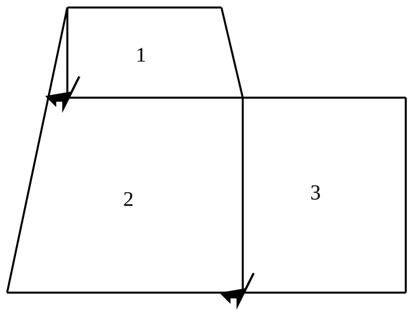
Підготовча робота в класі. Оскільки учні знайомі з усіма використовуваними приладами, учителеві варто оглядово зупинитися лише на плані проведення роботи.

Виконання роботи на місцевості.

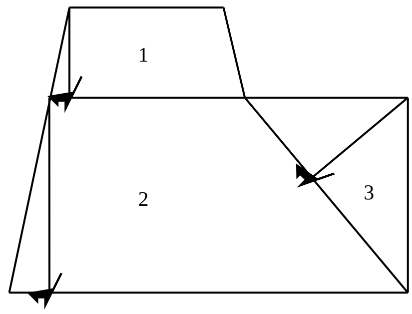
Обчислення площ земельних ділянок здійснюється трьома способами.

І.Визначення площі земельної ділянки за результатами безпосередніх вимірювань.

1. Обрану ділянку слід розбити на більш прості фігури (трикутники, прямокутники і трапеції) кількома способами (див.мал.18, 19.). Криволінійні контури розбивають на такі частини, сторони яких можна наближено вважати прямими.



Мал. 18.



Мал. 19.

2. Необхідно виміряти основу і висоту трикутників, паралельні сторони та висоту трапецій, довжину і ширину прямокутників. Результати занести в таблицю. (див.табл.5.)

Таблиця 5.

Результати вимірювань

№ фігури	Основа (м)	Основа (м)	Висота (м)	Площа ($м^2$)
1	45,5	35	24	966
2	45,5	51	45	2171,25
3		38	45	1710
				S = 4847,3
1	45	35,5	24	966
2	45	89,5	44,5	3003,75
3		59	30	885
				S = 4854,8

3. Якщо розходження у результатах великі, слід знайти помилку і виправити її. Якщо незначні, то знайти середнє арифметичне результатів,

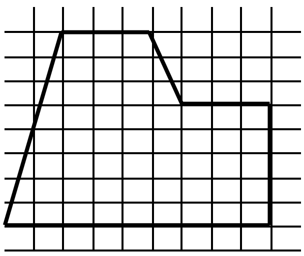
$S=\frac{4847{,}3+4854{,}8}{2}\approx 4851$ (м^2). Чим більше буде здійснено способів розбиття, тим точнішим буде середнє арифметичне результатів.

ІІ.Геометричний спосіб.

Цей спосіб використовується для знаходження площі земельної ділянки за планом. Полягає він у тому, що ділянку спочатку у певному масштабі переносять на план, потім діють у порядку, визначеному попереднім способом. В кінці згідно масштабу інтерпретують отримані результати. При оцінюванні точності слід врахувати подвійну похибку: при нанесенні ділянки на план і при вимірюванні довжин сторін відповідних фігур.

ІІІ.Механічний спосіб.

Полягає у тому, що площу земельної ділянки обчислюють за її планом за допомогою спеціального приладу – планіметру. У школі достатньо ознайомити учнів з більш простим приладом – палеткою. Робота з палеткою для школярів знайома. Якщо ж у 5 класі у процесі вивчення теми «Площа прямокутника» палетка не використовувалася, слід ознайомити учнів із правилами роботи. Палетка накладається на план.(див.мал.20.) і по ній підраховується, скільки цілих квадратних одиниць міститься всередині контуру.



Мал.20.

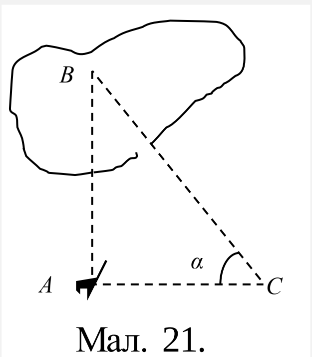
Квадратні одиниці, які контур перетнув, підраховуються окремо на око. Потім результати додаються та інтерпретуються згідно масштабу. Палетка не дає великої точності. Вона найкраще підходить для вимірювання площі фігури з неправильним контуром. А також завдяки простоті та доступності нею зручно користуватись в польових умовах, коли потрібно визначати великі площі з невеликою точністю.

Робота 13.<u>Застосування тригонометрії до розв'язування практичних завдань на місцевості.</u>

Необхідне приладдя: екліметр, рулетка, екер, астролябія, віхи.

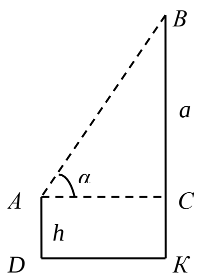
Виконання роботи на місцевості. Розглянемо дві практичні задачі на місцевості, при розв'язанні яких використовується тригонометрія.

Задача 1.Визначення відстані до недоступної точки. З точки *A* за допомогою екеру слід побудувати пряму перпендикулярну до *AB* і, взявши на ній довільну точку *C*, виміряти рулеткою довжину відрізка *AC* (див.мал.21.). Потім використовуючи астролябію, необхідно виміряти $\angle BCA$. За співвідношеннями у прямокутному трикутнику: $\mathrm{AB} = \mathrm{AC} \cdot tg\alpha$.



Мал. 21.

Задача 2.Визначення висоти предмета, до основи якого можна підійти. Спочатку, встановивши у довільній точці *D* екліметр, слід виміряти $\angle BAC=\alpha$(див.мал.22.). Потім рулеткою виміряти довжину відрізка $DK=AC$. За співвідношеннями у прямокутному трикутнику: $\mathrm{BC} = \mathrm{AC} \cdot tg\alpha$. Тоді якщо висота екліметра *h*, а $BC=a$, то шукана висота предмета $BK=a+h$.



Мал. 22.

Додаток В

Анкета для вчителів

1. Математичне моделювання– це:

а) спосіб розв'язування прикладних задач (60%);

б) метод науковихдосліджень реальних об'єктів, явищ та процесів (7,6%);

в) розділ математики (18,8%);

г) не можу визначитися (13,6%).

2. Математичного моделювання слід навчати:

а) у школі (72,7%);

б) в університеті (27,3%);

в) взагалі не варто (0%).

3. Знайомити учнів з математичним моделюванням потрібно при вивченні:

а) всього курсу математики (47,9%);

б) алгебри (18,8%);

в) геометрії (12,5%);

г) теорії ймовірності та математичної статистики (10,4%);

д) не можу визначитися (10,4%).

6. Чи застосовуєте Ви на практиці математичне моделювання?

а) так (76,7%); б) ні (23,3%).

7. Ви застосовуєте математичне моделювання:

а) при поясненні нового матеріалу (22%);

б) при доведенні теорем (2,4%);

в) при розв’язуванні задач (75,6%);

г) Ваш варіант:____.

8. Ви не застосовуєте математичне моделювання, тому що:

а) не володію необхідною для цього інформацією (60%);

б) не вважаю математичне моделювання ефективним (15%);

в) Ваш варіант: не маю для цього часу (15%), не задумувався (10%)

9. Середальтернативних діючих підручників і методичних посібників, в яких висвітлено питання застосування математичного моделювання, Ви знаєте такі: Бевз Г.П. Алгебра: Підруч. для 7 – 9 кл. (32,3%), Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра: Підруч. для 9 кл. (29,4%) та ін.

10. Чи необхідне, на Вашу думку, додаткове забезпечення методичною літературою з питань математичного моделювання?

а) так (79,5%); б) ні (3,2%); в) не можу визначитися (17,3%).

11. Висвітлення яких питань, на Вашу думку, є необхідним?

а) теоретичні відомості (8%);

б) інформація по практичному застосуванню (40%);

в) система задач прикладного змісту (52%);

г) Ваш варіант____.

Додаток Г

Анкета 1 (для школярів)

«Чому я не люблю геометрію»

Вкажіть клас, в якому Ви навчаєтесь_______________

Вам необхідно обрати з наведеного списку лише ті твердження, які слугують причиною негативного ставлення до предмету «Геометрія».

1. На уроках геометрії нецікаво (43,7%).
2. Не люблю доводити теореми (27,2%).
3. Не вмію будувати малюнки до задач (23,7%).

4. Не розумію матеріал, викладений в підручнику, і не можу в ньому самостійно розібратися (17%).
5. Потрібно дуже багато запам’ятовувати аксіом, означень, властивостей, теорем тощо (22%).
6. Не хочу забивати голову тим, що в житті мені не знадобиться (26%).
7. Немає практичних задач, завдань на конструювання, моделювання (34,5%).
8. Не люблю сам предмет, мені більше до вподоби інші шкільні дисципліни (25,4%).
9. Ваш варіант: опрацювання давно відомого матеріалу (36%), необхідність доводити теореми і розв’язувати задачі, справедливість яких очевидна з побудованого малюнка (27,3%)

Додаток Д

Анкета 2 (для школярів)

«Чому я люблю геометрію»

Вкажіть клас, в якому Ви навчаєтесь_______________

Вам необхідно обрати з наведеного списку лише ті твердження, які слугують причиною позитивного ставлення до предмету «Геометрія».

1. На уроках геометрії цікаво (67%).
2. Геометрія розвиває просторове мислення (20%).
3. Мені подобається доводити теореми, здійснювати побудови (27%).

4. Матеріал викладено в підручнику доступно і в ньому можна самостійно розібратися (54%).
5. Мені подобається розв'язувати важкі геометричні задачі (26,2%).
6. Геометрія тренує пам'ять (15,6%).
7. Геометрія застосовується при розв'язуванні багатьох задач, що виникають у повсякденному житті (54%).
8. Геометрія розвиває логічне мислення (17,8%).

Ваш варіант____

Додаток Е

Діагностична контрольна робота для учнів 9-их класів

Задача 1. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 25 см, а основа – 30 см. Знайти площу цього трикутника.

Задача 2. Сторони трикутника дорівнюють 3 см, 7 см і 9 см. Знайти сторони подібного йому трикутника, у якого сума найбільшої та найменшої сторін дорівнює 24 см.

Задача 3. Сейсмічною станцією зафіксовані сильні підземні поштовхи на відстані 75 км від станції під кутом 30^o до поверхні землі. Між станцією і вулканом 48 км. Визначити глибину епіцентру землетрусу.

Задача 4. У торшера бічні вставки мають форму трапеції з паралельними сторонами 12 см і 28 см та відстанню між ними 15 см. Чи вистачить відрізу матерії прямокутної форми розмірами 50 см на 30 см, щоб вирізати 4 вставки?

Додаток Ж

Підсумкова контрольна робота для учнів 8-их класів

Задача 1. Периметр паралелограма дорівнює 56 см. Знайти сторони паралелограма, якщо одна із них на 6 см більша за другу.

Задача 2. Знайти основи трапеції, якщо її середня лінія довжиною 12 см поділяється діагоналлю на відрізки, різниця яких 2,4 см.

Задача 3. Тінь від башти дорівнює 24 м, а тінь від людини зростом 1,8 м в ту ж саму пору дня – 50 см. Знайти висоту башти

Задача 4. У ванній кімнаті, довжина якої 3 м, а ширина 2 м, необхідно замостити підлогу методом «за діагоналлю», тобто коли сторони плитки не паралельні стінам. Скільки для цього треба придбати кахельної плитки розміром 33 см×33 см?

Додаток З

Підсумкова контрольна робота для учнів 9-их класів

Задача 1. Дві сторони трикутника дорівнюють $6\sqrt{2}$ см і 10 см, а кут проти більшої з них 45°. Знайти інші кути трикутника.

Задача 2. Чотирикутник *ABCD*– паралелограм. *A* (1;1), *B* (6;1), *C* (7;4). Знайти координати вершини *D*.

Задача 3. На футбольному полі на відстанях 23 м і 24 м від стійок воріт знаходиться гравець із м’ячем. Визначити кут влучення м’яча у ворота, якщо їх ширина 7 м.

Задача 4. Віз проїхав 6,3 км. Діаметри його переднього і заднього коліс відповідно рівні 70 см і 90 см. Яке колесо зробило більше обертів і на скільки?