ІНСТИТУТ ПЕДАГОГІКИ АПН УКРАЇНИ

На правах рукопису

СМОРЖЕВСЬКИЙ Юрій Людвігович

УДК 371.32:514.1

ДИФЕРЕНЦІЙОВАНЕ ФОРМУВАННЯ ПРИЙОМІВ ЕВРИСТИЧНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ СТАРШОКЛАСНИКІВ НА УРОКАХ СТЕРЕОМЕТРІЇ

13.00.02 – теорія та методика навчання (математика)

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата педагогічних наук

Науковий керівник –
член-кореспондент АПН України,
доктор педагогічних наук, професор
БУРДА МИХАЙЛО ІВАНОВИЧ

Київ – 2008

З М І С Т

ВСТУП

Орієнтуючись на пріоритети Концепції загальної середньої освіти (12-річна школа) і Національної доктрини розвитку освіти в Україні, педагоги ведуть пошук нових педагогічних технологій, принципів і критеріїв відбору змісту освіти, які забезпечили б не тільки високу теоретичну і практичну підготовку, а й переорієнтацію навчального процесу на особистість учня, створили б сприятливі умови для досягнення кожним учнем можливого для нього рівня знань, загального і математичного розвитку.

Зокрема, в Концепції наголошується, що стрижнем шкільної освіти є „... розвиваюча, культуротворча домінанта, виховання відповідальної особистості, яка здатна до самоосвіти і саморозвитку, вміє критично мислити, використовувати набуті знання і вміння для творчого розв'язання проблем, опрацьовувати різноманітну інформацію ...” [119 , с. 1].

Тому найактуальніші на сьогодні завдання шкільної методики навчання математики – сформувати в учнів бажання і здатність самостійно вчитися, здобувати інформацію з різних джерел, засвоювати, поповнювати й оцінювати її, прагнути до творчості і саморозвитку, виробляти вміння застосовувати способи пізнавальної та творчої діяльності.

Реалізація цих завдань передбачає оволодіння учнями прийомами відкриття нового знання про математичні об'єкти, прийомами міркувань правдоподібного характеру, методами постановки і розв'язання задач, що не піддаються алгоритмізації, тобто оволодіння евристичною діяльністю під час засвоєння математики.

Проблема евристичної діяльності учнів досліджувалась психологами, дидактами, методистами.

Значний внесок у розв'язання цієї проблеми належить психологам: Л.С. Виготському, П.Я. Гальперіну, В.В. Давидову, К.М. Кабановій-Меллєр, Г.С. Костюку, Ю.М. Кулюткіну, О.М. Леонтьєву, В.О. Моляко, Н.Ф. Тализіній, Л.М. Фрідману та ін. Вченими з'ясовано механізми прогнозування, виникнення установки, інсайту, прийняття рішення, психологічні особливості емпіричного і теоретичного стилю мислення, навчальної діяльності учнів, закономірності формування розумових прийомів, різні аспекти управління евристичною діяльністю.

Визначаючи дидактичні вимоги до структури уроків математики, до відбору організаційних форм, методів і засобів диференційованого вироблення загальних і спеціальних прийомів евристичної діяльності, місце цієї діяльності в навчальному процесі, ми спиралися на дослідження дидактів: Г.О. Балла, Л.В. Занкова, М.І. Махмутова, Л.Л. Момота, В.О. Онищука, В.Ф. Паламарчук, Д. Пойа, О.Я. Савченко та ін. Системи навчання (розвивальне, проблемне, особистісно орієнтоване), що достатньо повно теоретично обґрунтовані і застосовуються на практиці, включають евристичну складову як обов’язковий компонент.

При розробці теоретичних і методичних засад поетапного формування евристик на різних рівнях навчальної діяльності, активізації пізнавальної діяльності на уроках математики, змісту і класифікації евристичних прийомів, принципів і критеріїв відбору різнорівневих завдань з орієнтацією на змістово методичні лінії розміщення геометричного матеріалу, використання інформаційних технологій у навчанні математики, особливе значення мали результати науково-методичних досліджень Г.П. Бевза, В.Г. Бевз, М.І. Бурди, О.С. Дубинчук, М.І. Жалдака, М.Я. Ігнатенка, Г.О. Михаліна, О.С. Осинської, М.В. Працьовитого, О.І Скафи, З.І. Слєпкань, М.І. Шкіля, В.О. Швеця та ін.

Важливу роль у дослідженні даної проблеми мали роботи, присвячені формуванню розумових прийомів, умінь у предметному, методико-геометричному аспекті. Це роботи М.І. Бурди, К.В. Власенко, Г.М. Гливи, Н.А. Глузман, І.А. Горчакової, А.Ю. Карлащук, О.С. Осинської, В.П. Хмеля та ін.

Проблемі реалізації евристичних ідей, евристичної діяльності в навчанні математики приділяли увагу такі методисти, як Г.П. Бевз, М.І. Бурда, Ю.О. Палант, Г.І. Саранцев, О.І. Скафа, З.І. Слєпкань та ін.

Проведений аналіз робіт вищеназваних авторів підтверджує, що в основі евристичного підходу до навчання лежить психологія творчого мислення, процедура пошуку, спроба формалізації творчої діяльності. Розглядаючи різні прийоми навчання розв'язуванню математичних задач, доведенню теорем, формуванню понять на евристичній основі, виникає проблема дослідження творчої діяльності учнів. Отже, важливим етапом у розгляді методологічної основи евристичної діяльності є аналіз психологічної концепції діяльності, яка відбувається в процесі організації та управління конкретною і реальною діяльністю школярів.

Для успішного здійснення евристичної діяльності важливо диференційовано формувати в учнів прийоми цієї діяльності, вміння застосовувати ці прийоми в процесі навчання.

Проблемам диференціації навчального матеріалу з математики присвячені роботи Г.П. Бевза, М.І. Бурди, І.Я. Віленкіна, О.С. Дубинчук, З.І. Слєпкань, Т.М. Хмари, В.О. Швеця та ін. В них розглядається створення дидактичних умов вироблення в учнів зацікавленості навчальною діяльністю, формування продуктивного мислення в процесі розв'язування математичних задач, організації навчальної розумової діяльності.

Однак, в цих роботах недостатньо розроблене питання обґрунтування дидактичної суті диференційованого формування прийомів евристичної діяльності на уроках стереометрії, не виявлено форм й засобів організації та управління цією діяльністю.

І все ж проблема формування прийомів евристичної діяльності при навчанні математики залишається недостатньо розробленою. Не були предметом спеціальних досліджень питання, пов'язані саме з диференційованим підходом до вироблення евристик при навчанні стереометрії, який передбачає найповніше врахування інтересів, потреб і здібностей учнів. Потребують ґрунтовних досліджень зміст і операційний склад евристичних прийомів на різних рівнях навчальної діяльності, розроблення відповідних дидактичних і методичних засад різнорівневого вироблення цих прийомів, а також засобів управління евристичною діяльністю.

Досліджувана проблема особливо актуальна в умовах запровадження профільного навчання в старшій школі. Таке навчання, за рахунок змін у цілях, змісті і організації навчального процесу, дає змогу учневі відповідно до його індивідуальних особливостей, професійного самовизначення обрати певний рівень вивчення математики (стандартний, академічний чи профільний).

Таким чином, актуальність проблеми оволодіння учнями евристичною діяльністю, її недостатня розробленість в методиці навчання стереометрії, важливість розв'язання цієї проблеми для ефективного навчання математики в старшій школі обумовили вибір теми дисертаційного дослідження **"Диференційоване формування прийомів евристичної діяльності старшокласників на уроках стереометрії"**.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Обраний напрям дисертаційного дослідження пов'язаний з темою науково-дослідної роботи лабораторії математичної і фізичної освіти Інституту педагогіки АПН України „Методична система диференційованого навчання математики в основній школі" (0105U000285). Тему дисертаційного дослідження затверджено Вченою радою Інституту педагогіки АПН України (протокол № 11 від 01.12.2003), а також рішенням бюро Ради з координації наукових досліджень у галузі педагогіки та психології в Україні (протокол № 1 від 27.01.2004).

Мета дослідження – розробити, теоретично обґрунтувати і експериментально перевірити методичну систему (зміст, організаційні форми, методи, прийоми і засоби) диференційованого формування прийомів евристичної діяльності старшокласників на уроках стереометрії.

Відповідно до мети дослідження були визначені такі **завдання**:

- проаналізувати стан досліджуваної проблеми в теорії і практиці навчання стереометрії;

- визначити різнорівневий зміст і операційний склад прийомів евристичної діяльності у процесі вивчення стереометрії;
- з’ясувати психолого-методичні засади диференційованого формування евристичних прийомів;
- визначити принципи відбору диференційованих задач з стереометрії для формування прийомів евристичної діяльності;
- розробити методичну систему (цілі, зміст, організаційні форми, методи і засоби) диференційованого формування у старшокласників загальних і спеціальних прийомів евристичної діяльності на уроках стереометрії;
- експериментально перевірити ефективність розробленої методичної системи.

Об’єкт дослідження – процес навчання стереометрії в старшій загальноосвітній школі.

Предмет дослідження – диференційований підхід до формування евристичних прийомів у старшокласників на уроках стереометрії.

Методологічною основою дослідження є теорія наукового пізнання, психологічна теорія діяльності, теорія поетапного формування мислительних дій і понять, психологічні і дидактичні принципи розвивального, проблемного, особистісно орієнтованого навчання, системно-структурний підхід до аналізу навчальної діяльності, результати досліджень відомих вітчизняних і зарубіжних психологів, дидактів і методистів про закономірності навчально-виховного процесу, формування прийомів мислительної діяльності.

Дослідження ґрунтувалося на основних положеннях Закону України “Про загальну середню освіту”, Національної доктрини розвитку освіти України у XXI столітті, Концепції загальної середньої освіти (12-річна школа), Концепції математичної освіти 12-річної школи (проект).

Для розв’язання поставлених завдань використано такі **методи** дослідження:
- теоретичні: системний та порівняльний аналіз психолого-методичної і навчальної літератури з проблеми дослідження (уточнення понять “евристика”,

“евристична діяльність”, “прийом”, розроблення змісту і операційного складу прийомів, визначення психолого-методичних закономірностей їх формування); моделювання навчальних ситуацій (з’ясування рівнів і особливостей навчальної діяльності на уроках стереометрії, методичних вимог до окремих етапів формування прийомів евристичної діяльності); методи математичної статистики (підтвердження ефективності розробленої методики);

- емпіричні: спостереження (анкетування, бесіди з учнями та вчителями, аналіз уроків і письмових робіт учнів, вивчення та узагальнення передового педагогічного досвіду); визначення принципів побудови різнорівневих вправ, відбір організаційних форм, методів і засобів вироблення прийомів; констатувальний, пошукувальний, формувальний експерименти (з’ясування недоліків традиційного навчання, уточнення рівнів сформованості прийомів евристичної діяльності, апробація запропонованої методичної системи та її впровадження в шкільну практику.

Наукова новизна результатів дослідження полягає в тому, що:

- вперше з’ясовано зміст і операційний склад евристичних прийомів (загальних і спеціальних) у процесі вивчення стереометрії з урахуванням особливостей та рівнів навчальної діяльності старшокласників;
- визначені принципи відбору вправ із стереометрії, диференційованих за складністю;
- розроблено методику диференційованого формування прийомів евристичної діяльності старшокласників, яка включає мету, зміст, організаційні форми, методи, засоби і враховує виділені змістово-методичні лінії розміщення матеріалу, запропоновано види орієнтовних основ розумових дій і понять учнів і різнорівневі вимоги до результатів навчання;
- дістав подальший розвиток діяльнісний підхід до визначення рівнів та критеріїв формування розумових процесів під час навчання геометрії.

Теоретичне значення одержаних результатів полягає у: визначенні психолого-дидактичних основ вибору методів, організаційних форм та засобів, які забезпечують диференційоване формування прийомів евристичної діяльності старшокласників на уроках стереометрії; з'ясуванні методичних умов організації і управління евристичною діяльністю учнів.

Практичне значення дослідження визначається тим, що: розроблена методична система забезпечує ефективне диференційоване формування прийомів евристичної діяльності старшокласників при вивченні стереометрії; одержані висновки і рекомендації розповсюджуються на альтернативні підручники і навчальні посібники зі стереометрії; розроблені теоретичні положення доведені до конкретної реалізації у вигляді збірників вправ для рівневого навчання стереометрії ([222], [226]); результати дослідження можуть бути використані вчителями математики загальноосвітніх навчальних закладів, авторами підручників при підборі задачного матеріалу, в лекціях для вчителів і майбутніх учителів математики.

Впровадження результатів дослідження здійснювалося у загальноосвітніх школах І-ІІІ ступенів №№ 6, 10, 12, 17; спеціалізованій загальноосвітній школі № 5 з поглибленим вивченням інформатики; навчально-виховних комплексах №№ 8, 13, 16; гімназії; ліцеї та навчально-виховному комплексі у складі загальноосвітньої школи І-ІІ ступенів та ліцею-інтернату м. Кам'янця-Подільського Хмельницької області (довідка № 571 від 17.05.2005); у Шатавському НВК „ЗОШ І-ІІ ступенів, колегіумі" Дунаєвецького району Хмельницької області (довідка № 54 від 19.05.2005); у спеціалізованій загальноосвітній школі № 1 м. Хмельницького (довідка № 57 від 30.05.2005); у загальноосвітній школі І-ІІІ ступенів № 58 м. Києва (довідка № 46 від 30.05.2005).

Вірогідність одержаних наукових результатів і висновків дослідження забезпечується методологічною обґрунтованістю його теоретичних положень, відповідністю методів дослідження його меті і завданням, репрезентативністю вибірок об'єктів дослідження, кількісним та якісним аналізом значного обсягу теоретичного і емпіричного матеріалу.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дослідження доповідались і обговорювались у період з 2003 по 2008 роки на конференціях, семінарах, зокрема на наукових конференціях викладачів та аспірантів за підсумками науково-дослідної роботи у 2003 – 2008 роках у Кам'янець-Подільському державному університеті; на 10 – 12 Міжнародних наукових конференціях імені академіка М. Кравчука (м. Київ, 2004 р., 2006 р., 2008 р.); на Міжнародній науково-практичній конференції "Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики" (м. Київ, 2004 р.); на Всеукраїнському науково-методичному семінарі з проблем методики навчання при НПУ імені М.П. Драгоманова (м. Київ, 2006 р.); на звітній науковій конференції Інституту педагогіки АПН України 30 – 31 березня 2004 року; на Міжнародній науково-практичній конференції „Інформатизація освіти України: Європейський вимір" (м. Кам'янець-Подільський, 2007 р.); на ІІІ Всеукраїнській науково-практичній конференції „Особистісно орієнтоване навчання математики: сьогодення і перспективи" (м. Полтава, 2008 р.), а також на засіданнях лабораторії математичної і фізичної освіти Інституту педагогіки АПН України (2003 – 2008 рр.).

Публікації. Основні положення і результати дослідження опубліковано в 15 одноосібних роботах. Серед них: один навчально-методичний посібник, 5 статей у наукових фахових виданнях, 3 статті у матеріалах конференцій, 6 тез доповідей на конференціях.

РОЗДІЛ І
ПРЕДМЕТ І ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Стан досліджуваної проблеми в теорії і практиці навчання стереометрії

У Концепції математичної освіти 12-річної школи [119], Державному освітньому стандарті з математики [81], програмі з математики для старшої загальноосвітньої школи (рівень стандарту) [191] визначено цілі, завдання і функції шкільної математичної освіти. Особлива увага приділяється впровадженню особистісно орієнтованих технологій, практичному і творчому складникам навчальної діяльності; виробленню вмінь вчитися, відкривати нові для себе математичні закономірності.

Так, Концепцією математичної освіти 12-річної школи визначено серед основних пріоритетів розвитку математичної освіти такі: особистісна орієнтація освіти; приведення обсягу і складності змісту у відповідність з віковими можливостями учнів; посилення практичної і прикладної спрямованості навчання математики; використання у процесі навчання математики особистісно орієнтованих педагогічних технологій [119, с. 12].

У цьому документі особлива увага приділяється принципу пріоритету розвивальної функції навчання. Суть даного принципу полягає в тому, що зміст навчального матеріалу має забезпечувати не екстенсивне, а інтенсивне та самостійне навчання учнів, перенесення акцентів із збільшення обсягу інформації, що призначається для засвоєння учнями, на вироблення вмінь її використовувати для інтелектуального розвитку учня. Такий підхід передбачає не тільки засвоєння готових знань, але й способів цього засвоєння, способів міркувань, що використовуються в математиці. Тому навчальний матеріал повинен містити загальні схеми розв’язування задач, загальні підходи до моделювання прикладних ситуацій, відомості про суть задач, їх склад і структуру. Навчальний матеріал має містити алгоритми та евристики, якими визначається процес переходу від вихідних даних до шуканого результату, а також завдання на самостійні пошуки алгоритмів і евристик шляхом узагальнення розв'язань певних груп задач. Також в цьому документі наголошується на ролі математики в інтелектуальному розвитку, у формуванні позитивних якостей особистості, рис характеру, розумової активності, пізнавальної самостійності, продуктивного мислення. Формуючи цілі та завдання вивчення математики, автори зупиняються на необхідності оволодіння системою основних навичок і умінь, необхідних у буденному житті та трудовій діяльності, достатніх для подальшого навчання. У програмі з математики для старшої 12-річної школи підкреслюється, що учень повинен оволодіти „... прийомами математичної діяльності та навичками їх застосувань до розв'язання практичних задач" [191, с. 42]. Серед практичних компетентностей, якими має оволодіти випускник, виділяються такі: вміння проектувати і здійснювати алгоритмічну та евристичну діяльність на математичному матеріалі; вміння оволодівати необхідною оперативною інформацією для розуміння постановки математичної задачі, знаходити необхідну додаткову інформацію, засоби розв'язання задачі, складати план розв'язання та ін.

Таким чином, у названих документах наголошується на важливості оволодіння учнями такими складовими навчальної діяльності, які характеризують її як евристичну діяльність учнів при вивченні математики в умовах рівневої диференціації.

Розглянемо характеристику евристики як спеціальної системи знань.

Евристику пов'язують з системою словесного навчання Сократа [231]: шляхом особливих запитань і міркувань він допомагав співрозмовнику самостійно приходити до постановки і розв'язання проблеми, в результаті чого істина відкривалась і учню, і вчителю. Безперечно, Сократ був набагато досвідченішим за своїх учнів і ближче стояв до істини, ніж вони, але він не просто підводив їх до власного розуміння, а проектував в діалозі евристичну діяльність. В методиці такого проектування, а не в отриманні відповідей на питання, міститься цінність методу Сократа.

Давньогрецький математик Папп Александрійський ввів термін “евристика” (III ст. н. е.) і узагальнив праці античних математиків. Методи, які відмінні від чисто логічних, він об’єднав під умовною назвою “евристика”. Його трактат “Искусство решать задачи” вважають першим методичним посібником, який показує, які дії треба виконувати, якщо задачу не можна розв’язати з допомогою відомих математичних і логічних прийомів.

Евристика трактується в різних науках по-різному: як “метод відкриття нового”, “розділ сучасної психології мислення”, “вчення про розв’язування задач продуктивним, творчим мисленням”. “Евристика – в широкому розумінні – розділ психології, що розкриває природу мислительних операцій людини при розв’язуванні різних задач незалежно від їх конкретного змісту. В більш вузькому розумінні – евристика – це здогадки, основані на загальному досвіді розв’язування споріднених задач” [262, с. 359].

У тлумачному словнику англійської мови “Random house” під евристикою розуміється метод дискусії, а також вивчення евристичної процедури [287].

Енциклопедичний словник [230, с. 1544] пропонує три визначення евристики:

1) спеціальні методи, що використовуються в процесі відкриття нового (евристичні методи);

2) наука, яка вивчає продуктивне творче мислення (евристичну діяльність);

3) висхідний Сократівський метод навчання (“Сократові” бесіди).

Р.Г. Перельман у своїй роботі [176] щодо інтенсифікації науково-технічної творчості ототожнює евристику з психологією наукової творчості: психологія наукової творчості – евристика – вивчає, як розв’язуються наукові задачі, що потребують, окрім знань і вмінь, також і кмітливості, здогадки.

“Евристика – це абстрактно-аналітична наука, що вивчає один із структурних рівнів організації творчої діяльності та її продуктів”, – вважає психолог Я.О. Пономарьов [186, с. 127].

В “Українському педагогічному словнику” наводяться такі трактування евристики (від грецького $\varepsilon\, \upsilon\, \rho\, \iota\, \gamma\, \tau\, \omega$ – знаходжу, відкриваю):

“1) спеціальні методи розв’язування задач (евристичні методи), які звичайно протиставляються формальним методам розв’язування, що спираються на точні математичні моделі. Використання евристичних методів (евристик) скорочує час розв’язування задачі порівняно з методом повного довільного перебору можливих альтернатив. Іноді в психологічній і методичній літературі евристичними вважають будь-які методи, спрямовані на скорочення перебору варіантів, або індуктивні методи розв’язування задач;

2) організація процесу продуктивного творчого мислення (евристична діяльність). В цьому розумінні евристику розуміють як сукупність притаманних людині механізмів, за допомогою яких породжуються процедури, спрямовані на розв’язання творчих завдань;

3) наука, яка вивчає евристичну діяльність; спеціальний розділ науки про мислення. Її основний об’єкт – творча діяльність; найважливіші проблеми – завдання, що пов’язані з моделями прийняття рішень;

4) спеціальний метод навчання (сократівські бесіди) або метод колективного розв’язування проблем. Колективний метод розв’язування складних проблем (який дістав назву “мозкового штурму”) ґрунтується на тому, що учасники колективу ставлять авторові ідеї розв’язання навідні запитання з прикладами і контрприкладами;

5) методична або методологічна наука, предметом якої є розв’язання проблем в умовах невизначеності, спеціальний розділ науки про мислення. Головною проблемою евристики є усунення суперечностей.” [68, с. 108].

З іншого боку, в психолого-педагогічній літературі відсутній єдиний підхід до визначення поняття “евристики”. В різних працях, а іноді навіть і в одній, цей термін використовується в різних значеннях, кожне з яких усвідомлюється з контексту. Проаналізувавши літературу з даного питання, нами розглядаються чотири напрямки розмежування поняття “евристики” за різними аспектами:

1) евристики як різні засоби (графічні схеми, друковані інструкції, усні вказівки викладача, наочні матеріали, відомості і т.д.), які знаходяться у розпорядженні суб'єкта, несуть для нього інформацію, застосування якої полегшує розв'язання задачі. Полегшення тут розуміється як зменшення суб'єктивної складності задачі у порівнянні з тим випадком, коли за інших рівних умов розглядуваний евристичний засіб відсутній (Г.Д. Балк [15], Г.О. Балл [16]);

2) евристики як прийоми розв'язання певних класів задач, що не піддаються чіткій алгоритмізації. Ці евристики об'єктивно можуть бути виражені у вигляді послідовності дій, яка не є строго детермінованою, і приймати вигляд евристичних схем, порад-орієнтирів, загальних схем-вказівок (В.І. Андрєєв [6], О.Б. Єпішева, В.І. Крупіч [86], З.І. Слєпкань [215]);

3) евристики як прийоми міркувань правдоподібного характеру (Дж. Брунер [32], Д. Пойа [183]);

4) евристики як специфічні розумові прийоми, що складають пошукові стратегії і тактики (Ю.М. Колягін [114], Ю.Н. Кулюткін [129], Л.М. Фрідман [253]).

У роботах М. Мінського [154], [155] розглядається схожий підхід до евристики у зв'язку із загальними питаннями машинного інтелекту. Евристичним називається такий метод, який допомагає покращити процес розв'язування задач, не звертаючись до повного перебору всіх варіантів розв'язання, а використовуючи лише деякі з цих варіантів. На думку автора, проблема евристики виникає у зв'язку з таким розв'язанням задач. Термін "евристика" застосовується до будь-якого методу чи прийому, що допомагає підвищити ефективність системи, яка розв'язує задачі [154, с. 14].

У нашому дослідженні ми будемо притримуватись означення евристики, запропонованого М. Мінським.

У вітчизняній науці 60 – 80 років XX ст. визначились три аспекти евристики: кібернетичний, направлений на побудову машинних програм; винахідницький, що використовується для висунення творчих ідей, науковотехнічних, раціоналізаторських і конструкторських розв'язань; психолого-педагогічний, пов'язаний з розробкою методів організації продуктивної навчальної діяльності учнів.

У методичній і психологічній літературі евристичними методами називають будь-які методи, що спрямовані на скорочення перебору розв'язків [132], [126], [196].

Евристичний метод для розв'язання винахідницьких задач в техніці почав застосовуватись в 40-х роках XX століття. Він ґрунтувався на узагальненні винахідницького досвіду і містив рекомендації стосовно напрямку дій, які можуть навести на шукане технічне розв'язання (не гарантуючи результатів).

У психолого-педагогічній літературі евристичний метод вирізнився у зв'язку із розробкою методів організації продуктивної навчальної діяльності учнів. Він визначився як метод, за яким вчитель підводить учнів до "перевідкриття" теорем, їх доведень, до самостійного формулювання означень, складання задач замість викладання навчального матеріалу в готовому вигляді. Однак, диференційований підхід до використання цього методу не розглядався.

Евристична діяльність тісно пов'язана з особистісно орієнтованим навчанням. Це навчання передбачає можливість створення учнем власного освітнього продукту, наприклад, знань з певного предмета чи цілої системи освітніх знань ([280], [264]). Вчені і педагоги-практики по-різному розуміють зміст цього терміну. Деякі педагоги ([110], [168]) вбачають в ньому реалізацію індивідуального підходу в навчанні через організацію та презентацію навчального матеріалу різного рівня складності. Інші ([36], [217]) пов'язують його з інноваційними процесами в освіті, які активізувались останнім часом у зв'язку з відкриттям гімназій, ліцеїв, навчально-виховних комплексів, де використовуються різні форми диференційованого навчання.

Л.М. Фрідман евристичним називає тип діяльності, який характеризується тим, що в індивіда відсутній алгоритм розв'язання задачі, і тому його діяльність передбачає пошуки способу її розв'язання [254].

А.В. Хуторський розглядає евристичну діяльність як різновид людського мислення, яке створює нову систему дій або відкриває невідомі раніше закономірності оточуючих людину об’єктів [259]. У роботі [263], автор, евристичній діяльності надає рівень методології освіти, що визначається єдністю двох складових: 1) сукупністю евристичних прийомів, методів і засобів навчання; 2) вченням про ці методи та навчальні процеси.

В роботі З.І. Слєпкань [215] вказується на те, що успіх евристичної діяльності школярів визначається сформованістю таких загальних розумових дій, як аналіз, синтез, аналіз через синтез, узагальнення, абстрагування, а також специфічних розумових дій: підведення під поняття, розгортання умови, встановлення істотних зв’язків, вказується й на те, що ці прийоми мислення необхідно формувати вже на перших етапах навчання розв’язуванню задач.

О.І. Скафа під евристичною діяльністю розглядає навчальну сумісну діяльність вчителя й учнів, учнів між собою для відкриття нового знання про математичні об’єкти, прийоми постановки і розв’язання пов’язаних з ними задач, в тому числі і прикладних задач математики [214].

У нашому дослідженні ми будемо дотримуватись визначення евристичної діяльності, даного О. І. Скафою.

О.Ф. Есаулов писав: “Особливо цікаво придивитись до того, як виникає сам задум деякої технічної ідеї, до його подальшого формування в досить чіткий план, який і служить базою для стадійного процесу реалізації цієї ідеї, тобто для втілення задуму. В переважній більшості досліджень, пов’язаних з цими проблемами, підкреслюється велике значення раніше здобутого знання та досвіду людини. Яким чином і яка частина цього досвіду знову набувається людиною як засіб його подальшого збагачення і розвитку? Вже згорнутий в минулому мислительний акт існує не як „річ” абсолютно незмінна, а як динамічно змінюючий процес, що вибірково використовується в міру його включення в подальший хід мислення” [87, с. 41].

Підкреслював важливість ознайомлення з алгоритмом розв’язування винахідницьких задач не тільки інженерів-конструкторів, студентів вищих технічних закладів, а також і учнів, що прагнуть навчатися технічної творчості, в своїх працях В.О. Моляко [158 – 160].

Окремі задачі і прийоми, пов’язані з їх застосуванням, виявилися також корисними в шкільній практиці для розвитку евристичної діяльності учнів.

Об’єктивною передумовою розвитку цього напрямку в освіті є зміна парадигми в освітній галузі. Аналізуючи теоретичні основи реалізації особистісно орієнтованого підходу у навчанні, вчені ([279], [44]) пропонують враховувати ряд важливих позицій, що впливають на його впровадження в практику роботи шкіл:

1. Навчання має забезпечити розвиток і саморозвиток особистості учня, ґрунтуючись на виявлених індивідуальних особливостях його як суб’єкта пізнання і предметної діяльності.

2. Особистісно орієнтоване навчання дає кожному учневі на підставі його здібностей, нахилів, інтересів, ціннісних орієнтацій і суб’єктивного досвіду можливість реалізувати себе в пізнанні, навчальній діяльності.

3. Зміст освіти, його склад і засоби добираються і конструюються таким чином, щоб учень мав можливість вибору предметного матеріалу (за обсягом і формою).

4. База особистісно орієнтованого навчання враховує не тільки рівень досягнутих знань, умінь, навичок, але і інформованість певного інтелекту (його властивостей, якостей).

5. Освіченість як сукупність знань, умінь, індивідуальних здібностей є важливим засобом становлення духовних і інтелектуальних якостей учня, що виступає основною ціллю сучасної освіти.

6. Традиційне навчання вже не може бути провідним у цілісному освітньому процесі. Значущими стають ті складові, які розвивають індивідуальність, евристичну діяльність учня, створюють усі необхідні умови для його саморозвитку, самовираження.

7. Особистісно орієнтоване навчання будується на принципі варіативності, тобто визнання змісту, методів і форм навчального процесу,

прийомів евристичної діяльності, вибір яких має здійснюватися учителем з урахуванням розвитку кожної дитини і її педагогічної підтримки у пізнавальному процесі.

Вивчення наукових джерел доводить, що школа і раніше ставила перед собою мету розвитку особистості. Ця мета постійно декларувалася, існували соціально-педагогічні моделі самого розвитку, які описувалися у вигляді соціокультурних зв’язків. Особистість розумілась як носій цих зразків, і кожному учневі необхідно було ними оволодіти. Все це було обумовлено ідеологією, яка панувала у суспільстві.

З урахуванням цього в освіті розроблялись відповідні дидактичні моделі, через які здійснювався індивідуальний підхід у навчанні. В основному він зводився до: розподілу учнів на сильних, середніх і слабких; педагогічної корекції через спеціальну організацію навчального матеріалу за ступенем його складності, рівнем вимог до засвоєння цього матеріалу. Загальноосвітня школа в основному готувала до вищої школи і це соціальне замовлення виконувала через предметну диференціацію.

Індивідуальні здібності учня “розглядались” через навченість та научуваність, яка визначалась як здібність до засвоєння знань, умінь, навичок.

Особистісно орієнтований підхід характеризується визнанням індивідуальності, самобутності, самоцінності кожної дитини, її розвитку не як колективного суб’єкта, а, перш за все, як індивіда, наділеного своїм неповторним суб’єктивним досвідом. Під суб’єктивним досвідом розуміється досвід життєдіяльності, який отримує дитина до школи в конкретних умовах сім’ї, соціокультурного оточення, в процесі сприйняття і розуміння нею світу речей і людей.

До числа провідних принципів особистісно орієнтованого навчання необхідно віднести такі:

- індивідуалізація навчання, яка передбачає розв’язання двох завдань. По-перше, дозволити дітям з перших років цілеспрямованої освіти засвоювати завдання у тому темпі, який зумовлюється їх пізнавальними здібностями. По-друге, дати можливість здібним та обдарованим дітям максимально розвивати власні позитивні задатки, розкривати творчий інтелектуальний потенціал;

- максимальне наближення навчального матеріалу до реалій життя. Реалізація цього принципу сприяє розумінню учнями важливості знань, необхідності постійного їх оновлення;

- концентричне розгортання навчального матеріалу. Урахування цього принципу дозволяє повертатися до раніше вивченого і розглядати його з різних сторін на більш складному рівні, що дає можливість слабшим учням закріпити, а сильнішим поглибити знання;

- реалізація цілісного навчально-виховного процесу, що передбачає органічне поєднання навчальної роботи в школі і роботи в позаурочний час.

Однак, для успішного здійснення особистісно орієнтованого навчання, на нашу думку, важливо диференційовано формувати в учнів прийоми їх евристичної діяльності, вміння застосовувати ці прийоми в процесі навчання.

В даній роботі розглядається розроблена нами методична система розвитку прийомів евристичної діяльності учнів в умовах рівневої диференціації навчання стереометрії.

Диференціація – одна з ключових проблем організації навчання в сучасній школі. Вона є об’єктом гострої полеміки серед педагогів у багатьох країнах світу ([35], [37], [39], [52], [216], [217], [220], [141], [269]). Різні, навіть протилежні, погляди на ідею диференційованого навчання певною мірою відображають дві діалектично протилежні тенденції у розвитку сучасної науки, виробництва й освіти. Одна з них – інтеграція, яка обумовлена об’єктивними процесами взаємозв’язку і взаємозалежності різних наукових дисциплін, що потребує від кваліфікованого працівника широкої загальної культури й обізнаності у багатьох суміжних галузях.

У той же час існує й інша тенденція, що виключає можливість “універсалізму” в умовах великого нарощування наукових і професійних знань ([43], [107], [264], [286]). Важливою умовою досягнення успіху в будь-якій діяльності вважається спеціалізація працівника, хоча сам характер цієї спеціалізації зазнає суттєвих змін. Послідовники цієї тенденції справедливо вважають, що спеціалізація не тільки сприяє розвиткові виробничих сил, науки, культури, але й відповідає різноманітності задатків і здібностей людини, її індивідуальним нахилам до того чи іншого виду діяльності.

Відмінності між диференційованим та особистісно орієнтованим навчанням дітей молодшого віку ще не такі великі і їх можна в значній мірі враховувати і педагогічно доцільно використовувати при індивідуальному підході до учнів, що доповнюється гуртковими заняттями та іншими видами позакласної роботи. В старших класах ці відмінності проявляються різкіше, помітніше і їх стає все важче враховувати в роботі з неоднорідним за складом класом. Постає важлива і надзвичайно складна проблема пошуку таких умов, при дотриманні яких навчання і розвиток учнів проходили б в найбільш сприятливих умовах.

На необхідність застосування неоднакових підходів у роботі з учнями різного рівня знань і вмінь вказував ще Платон [180]. Це визнавали і такі педагоги минулого, як Я.А. Коменський [117], Й.Г. Песталоцці [177] та ін. Вони розуміли, що одним із шляхів розв’язання цієї проблеми є диференційоване навчання.

Ю.М. Колягін, В.А. Оганесян та ін. пояснюють принцип диференційованого підходу до учнів як “…оптимальне пристосування навчального матеріалу і методів навчання до індивідуальних здібностей кожного школяра. Диференційований підхід, як правило, передбачає деякий умовний поділ школярів на динамічні групи, склад яких, звичайно, не є постійним” [116, с. 177].

Інші автори виділяють і визначають “диференційований підхід” як:

- спосіб оптимізації, що передбачає оптимальне поєднання групових і індивідуальних форм навчання (Ю.К. Бабанський [12, с. 21]);

- особливий підхід вчителя до різних груп учнів, що полягає в організації навчання різного за змістом і обсягом складності матеріалу, методах, прийомах (А.А. Кірсанов [110, с. 35]);

- дидактичне положення, яке передбачає поділ класу на групи. Диференційований підхід – пристосування форм і методів роботи до індивідуальних особливостей учнів (Е.С. Рабунський [197, с. 18]).

В своїй праці В.А. Оганесян [166] пропонує розглядати диференційоване навчання як особливу форму навчання, при якій забезпечується всебічна доступність і результативність навчання для всіх учнів і для кожного з них окремо.

По-різному в психолого-педагогічній літературі трактується термін “диференційоване навчання” [265], [247], [126], [269], [82]. І.Е. Унт [247] під диференційованим навчанням розуміє врахування індивідуальних особливостей учнів у тій формі, коли учні групуються на основі певних особливостей для окремого навчання. І.М. Чередов стверджує, що диференційоване навчання – це процес навчання, який передбачає поглиблене вивчення індивідуальних особливостей учнів, їх класифікацію за типологічними групами і організацію роботи цих груп на виконання спеціальних навчальних завдань, які сприяють їх розумовому розвитку [265, с. 7].

В.А. Крутецький [126] вводить термін “диференційоване навчання”, переходячи до характеристики організації навчання школярів, що володіють зниженою навченістю. В його розумінні диференціація виступає як одна з проявів індивідуалізації і зводиться до розходження організаційних форм навчання.

Н.М. Шахмаєв зазначає: “Навчально-виховний процес, для якого характерний облік індивідуальних розходжень учнів, прийнято називати диференційованим, а навчання в умовах такого процесу – диференційованим навчанням” [269, с. 269 – 270].

В “Дидактиці сучасної школи” [82, с. 53] зазначається, що “диференційоване навчання передбачає надання достатньої уваги учням, рівень і швидкість роботи яких відрізняється від більшості: ліквідація прогалин в знаннях відстаючих учнів, навчання їх навичкам навчальної праці, а також факультативне поглиблене вивчення предметів з учнями, які проявляють підвищений інтерес до окремих галузей знань”.

Від початку 50-х років проблема рівневого навчання стає однією з основних у педагогіці та психології. Здійснення рівневого та індивідуального підходів розглядалося як засіб підвищення ефективності навчання, пізнавальної активності та самостійності учнів. Вивчалися способи поєднання фронтальної, групової та індивідуальної форм організації навчальної діяльності в рівневому навчанні, досліджувалася проблема формування індивідуального стилю діяльності, втілення принципу індивідуалізації і здійснення індивідуально-диференційованого підходу засобами програмованого навчання.

Сучасний український вчений-педагог П. Гусак [76] вважає, що рівневе навчання – це розрізнення діяльності учнів, які хочуть навчатися і які можуть навчатися. Залежно від цього диференційоване навчання поділяється на рівневе та профільне. Рівневе навчання передбачає планування результатів навчання, в результаті якого виділяють рівень обов’язкових знань, і на цій основі – вищі рівні оволодіння навчальним матеріалом. Зважаючи на ці рівні, а також враховуючи свої здібності, нахили, інтереси та потреби, учень дістає право і змогу обрати обсяг та глибину засвоєння даного матеріалу, оптимізувати своє навчальне навантаження. За таких умов навчальна праця стає для кожного посильною, мотивованою і цілеспрямованою.

Автори концепції розвитку шкільної математичної освіти [121, с. 8] розглядають рівневу диференціацію як вид диференціації. Проявляється вона в диференційованому завданні – постійному доповненні завдань “для всіх” індивідуальними завданнями для кожного. З.І. Слєпкань [215, с. 26] під рівневою диференціацією розглядає диференціацію вимог, що висуваються до учнів в процесі засвоєння навчального матеріалу, у зв’язку з цим його диференціюють, а також диференціацію допомоги різним групам і окремим учням. Таким чином, використання рівневої диференціації в процесі навчання математики дозволяє:

а) диференціювати мету вивчення теми, що сприяє формуванню позитивних мотивів учіння;

б) створити адекватні умови для досягнення мети;

в) підтримувати впевненість учнів у досягненні мети протягом всього процесу вивчення теми.

Аналіз різних підходів до проблеми рівневої диференціації ([4], [33], [40], [89], [141], [146], [198], [224], [242], [246]) дає змогу виділити її основні особливості:

1. Рівневе навчання передбачає обов'язкове врахування індивідуальних особливостей учнів.

2. Індивідуалізація в умовах класно-урочної системи здійснюється через рівневе навчання.

3. Мета рівневого навчання – створення оптимальних умов для виявлення і розвитку нахилів і здібностей кожного учня.

4. Рівневе навчання передбачає створення принципово нової педагогічної технології навчання, яка сприятиме широкому впровадженню ідей рівневого навчання в практику роботи школи.

5. Методи навчання в умовах рівневого навчання змінюються відповідно до індивідуально-типологічних особливостей учнів та змісту навчання.

6. Рівневе навчання оптимізує, гуманізує процес навчання, дає можливості для розвитку творчих здібностей учнів, забезпечує їхню максимальну пізнавальну активність на основі самостійної роботи, постійного зворотного зв'язку, об'єктивізації контролю та оцінки знань.

Враховуючи зазначені особливості, ми вважаємо, що можна визначити рівневе навчання як:

1) принцип врахування індивідуально-типологічних особливостей учнів в інтересах розвитку їхніх нахилів та здібностей;

2) педагогічну технологію навчання, що забезпечує реалізацію принципу рівневого навчання.

Однак, незважаючи на досить велику кількість досліджень з цієї проблеми, чіткого визначення поняття “рівневе навчання”, шляхів його реалізації немає й до цього часу.

Застосування рівневої диференціації дає змогу кожному учню працювати на будь-якому рівні навчальних досягнень і здобути відповідні результати. Учень має не тільки обов’язки, а й права. Найважливішим з них є право вибору – отримати відповідно до своїх здібностей і нахилів підвищену підготовку з предмета чи обмежитись середнім або достатнім рівнем засвоєння матеріалу.

Вчитель організовує навчання за чотирма рівнями навчальних досягнень (початковий, середній, достатній, високий), а учень сам вибирає рівень засвоєння навчального матеріалу.

До позитивних результатів рівневої диференціації відносять такі:

- зменшення навантаження на дітей, які інколи не тільки з соціальних, а й з фізіологічних причин не можуть опанувати високими навчальними досягненнями;
- отримання кожним учнем потрібного саме йому змісту навчання математики;
- зникнення страху учня перед оцінюванням [65, с. 1].

Організація рівневої диференціації передбачає:

1) збільшення кількості вправ, які потрібно виконати, та забезпечення розвивального характеру навчання;
2) відмову від авторитарного навчання;
3) свободу вибору кожним учнем рівня навчальних досягнень;
4) використання різних форм роботи.

Рівнева диференціація навчання є запорукою розвитку дітей з різними математичними здібностями й інтересами, а тому набуває особливої актуальності.

Відомо, що кожному етапу засвоєння знань відповідає певна особливість навчальної діяльності. Тому вчитель має знати, які завдання слід розв’язувати на різних етапах засвоєння навчального матеріалу. Ось чому постає необхідність виділення рівнів, яких повинен досягти кожен учень в процесі формування знань. Суть рівневої диференціації не в тому, що одним учням повідомляють менший, а іншим – більший обсяг навчального матеріалу, а в тому, що, пропонуючи однаковий обсяг, орієнтують їх на різні рівні вимог до засвоєння матеріалу. Рівні повинні бути добре відомими і зрозумілими учням. Враховуючи свої здібності, нахили, інтереси до засвоєння нового матеріалу, учні мають оптимізувати своє навчальне навантаження.

Для формування прийомів евристичної діяльності учнів треба розглянути і пояснити суперечність, що існує в традиційному навчанні. Вчителі ставлять досить обґрунтовані з предметної точки зору навчальні цілі, але вони розуміються і сприймаються різними школярами по-різному, а деякими з них зовсім не сприймаються. Виникає суперечність між зовнішньо заданими цілями й індивідуальним баченням їх учнями. Метою багатьох уроків є, в основному, "репродуктивне засвоєння" заданого предметного змісту. Такі ж самі недоліки мають зміст, методи, форми навчання. Результати наших досліджень свідчать про недостатній рівень методичного апарату для організації евристичного навчання, а також про потребу в ньому вчителів. В евристичному навчанні вчителю відводиться роль – допомогти учням у формулюванні цілей і наступному супроводі діяльності на досягнення даних цілей.

Перевага такого навчання полягає в застосуванні вчителем таких методичних підходів, які б сприяли розвитку евристичної діяльності учнів. На рівень евристичності навчання впливає кількість та якість запитань, що ставляться на заняттях. В роботі [48] розглядається дослідження психологів, результати якого, дають можливість стверджувати, що лише 10 % запитань вчителів стимулюють активність учнів, 80 % усіх запитань – перевірочні.

Шкільне навчання формує в учнів відповідні види діяльності. В роботі [49] зазначається, що за соціологічними даними 68 % учнів задовольняють пасивні види діяльності і тільки 15 % учнів – активно-творчі види діяльності.

Проведений нами аналіз стану викладання стереометрії у середніх загальноосвітніх навчальних закладах України свідчить про те, що старшокласники досить слабо володіють прийомами евристичної діяльності, особливо на достатньому та високому рівнях навчальної діяльності (див. табл. 1.1). Вони не можуть розв'язувати задачі, які вимагають використання цих прийомів. Вчителі математики недостатньо приділяють уваги диференційованому формуванню в учнів евристик. Все це призводить до того, що абітурієнти при вступі до вищих навчальних закладів не можуть розв'язувати запропоновані завдання, використовуючи згадані прийоми.

Таблиця 1.1

Рівні навчальних досягнень старшокласників у процесі вивчення стереометрії

	Евристичні прийоми	Рівні навчальних досягнень		
		Середній (%)	Достатній (%)	Високий (%)
1.	Порівняння	15	33	27
2.	Аналогія	12	35	28
3.	Узагальнення	17	30	27
4.	Конкретизація	16	35	24
5.	Аналіз	11	38	26
6.	Синтез	13	33	29
7.	Введення допоміжних величин:			
	а) допоміжного відрізка;	19	39	17
	б) допоміжного кута.	16	28	30
8.	Введення допоміжних побудов	11	37	26
9.	Введення допоміжних задач	14	36	25
10.	Переформулювання задач	18	30	24

В ряді дисертаційних досліджень розглядається проблема формування прийомів евристичної діяльності учнів на уроках геометрії.

Так, в роботі О.К. Артемова [8] наводиться методика формування умінь в умовах евристичної діяльності учнів. На думку автора, в евристичній діяльності учнів важливе значення мають деякі загальні евристичні прийоми, користування якими полегшує знаходження ними шляхів розв'язання задач.

М.Є. Тимощук називає серед згаданих прийомів такі: евристичні схеми, евристичну інформацію, узагальнені плани розв'язування класів задач, евристики. Вони спрямовані на складання планів розв'язання часткових задач та загальних підходів, які з них випливають [242].

В роботі В.П. Хмеля [258] наводиться методика формування у старшокласників загальних прийомів розв'язування математичних задач. Автором встановлено структуру загальних прийомів розв'язування геометричних задач; розроблено та описано шляхи формування загальних прийомів розв'язування стереометричних задач в старших класах.

У дисертації Й.Н. Іванова [94] проаналізовано механізми формування розумових умінь та навичок у навчальній діяльності під час вивчення геометрії в 6-х – 7-х класах, виділено необхідні умови розвитку продуктивного мислення учнів, раціональне поєднання алгоритмічних та евристичних прийомів розумової діяльності, навчання аналітико-синтетичній діяльності.

В роботі Швеця В.О. [270] описано послідовність дій користування підручником під час формування прийомів евристичної діяльності учнів на уроках геометрії: а) визначити дидактичні цілі й основні завдання курсу; б) проаналізувати структуру підручника з огляду повноти й відповідності програмі подання в ньому навчального матеріалу; в) структурувати навчальний матеріал кожної програмової теми, виділивши об'єкти, поняття, відношення, геометричні факти й теореми, що вивчаються; г) встановити логічний зв'язок між виділеними елементами знань; д) побудувати структурно-логічну схему подання кожної програмової теми в обраному підручнику; е) виділити навчальні теми.

В роботі А.Ю. Карлащук [109] показана важливість використання задач з параметрами в плані формування дослідницьких умінь і навичок учнів.

У дисертаційній роботі І.А. Горчакової [71] наведено систему задач шкільного курсу й обґрунтовано доцільність їх використання для формування евристичної діяльності учнів.

У роботі К.В. Власенко [47] визначені шляхи і способи формування прийомів евристичної діяльності у процесі навчання геометрії в класах з поглибленим вивченням математики, встановлено ефективність евристичних методів, форм та засобів навчання в процесі організації та управління евристичною діяльністю учнів.

Але в цих дисертаційних дослідженнях не приділяється належної уваги диференційованому формуванню евристичних прийомів на уроках стереометрії, не розглядається операційний склад прийомів та рівні навчальної діяльності учнів.

Проаналізувавши дисертаційні дослідження, в яких розглядались питання, пов’язані з організацією евристичної діяльності в процесі навчання геометрії, приходимо до висновку, що ці питання не повністю досліджені; не розглядаються основні евристичні прийоми, що сприяють розвитку творчих здібностей учнів. В даних роботах розглядаються різні активні прийоми навчання, але недостатньо уваги приділено диференційованому формуванню цих прийомів. У зв’язку із переходом шкіл на рівневе навчання виникає необхідність у розробці методичної системи диференційованого формування прийомів евристичної діяльності старшокласників у процесі вивчення стереометрії.

Проаналізуємо задачний матеріал підручників з геометрії для 10 – 11 класів загальноосвітніх навчальних закладів з точки зору достатності його для диференційованого формування прийомів евристичної діяльності старшокласників. Для прикладу розглянемо матеріал теми «Многогранники» підручників з геометрії.

У підручнику [111] задача №2 „*Повна поверхня прямокутного паралелепіпеда дорівнює 1714 м*^{2}*, а нерівні сторони основи дорівнюють 25 м і 14 м. Обчислити бічну поверхню і бічне ребро*” дає можливість формувати прийоми порівняння і аналогії на середньому рівні.

Задача №8 „*Висота зрізаної піраміди дорівнює 6, а площі основ 18 і 8. Піраміда розрізана площиною, яка паралельна основам і поділяє висоту* *пополам. Обчислити площу перерізу*" сприятиме формуванню згаданих прийомів на достатньому рівні.

Задача №4 „*Правильна шестикутна піраміда має сторону основи а і висоту h. Обчислити бічне ребро, апофему, бічну поверхню і повну поверхню*" сприяє формуванню прийомів узагальнення і конкретизації на достатньому рівні.

Прийоми аналізу і синтезу можна формувати на середньому рівні за допомогою задачі №1 „*Висота прямої призми, основа якої є правильний трикутник, дорівнює 12 м, сторона основи 3 м. Обчислити повну поверхню призми*".

На достатньому рівні – за допомогою задачі №5 „*Обчислити повну поверхню і висоту трикутної піраміди, в якої кожне ребро дорівнює а*".

У підручнику [10] задача №280 „*Ребро куба рівне а. Знайти площу перерізу, що проходить через діагоналі двох його граней*" може використовуватись вчителем для формування прийомів порівняння і аналогії на середньому рівні.

Задача №236 „*Доведіть, що площа бічної поверхні похилої призми дорівнює добутку периметра перпендикулярного перерізу на бічне ребро*" дозволить формувати ці прийоми на достатньому рівні.

Розв'язування задачі №238 „*В похилій трикутній призмі дві бічні грані взаємно перпендикулярні, а їх спільне ребро, що знаходиться на відстані 12 см і 35 см від двох інших бічних ребер, рівне 24 см. Знайти площу бічної поверхні призми*" дозволить формувати згадані прийоми на високому рівні.

Задача № 220 „*Основою прямого паралелепіпеда є ромб з діагоналями 10 см і 24 см, а висота паралелепіпеда рівна 10 см. Знайдіть більшу діагональ паралелепіпеда*" сприяє формуванню прийомів узагальнення і конкретизації на середньому рівні.

Задача №269 „*Сторони основ правильної зрізаної трикутної піраміди рівні 4 дм і 2 дм, а бічне ребро рівне 2 дм. Знайдіть висоту і апофему піраміди*" буде корисною при формуванні цих прийомів на достатньому рівні.

Задача №262 „*Довести, що площина, яка проходить через висоту правильної піраміди і висоту бічної грані, перпендикулярна до площини бічної грані*” може використовуватись при формуванні їх на високому рівні.

За допомогою задачі №240 „*Основою піраміди є паралелограм, сторони якого рівні 20 см і 36 см, а площа рівна 360 см^2. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи і рівна 12 см. Знайти площу бічної поверхні піраміди*” можна формувати прийоми аналізу і синтезу на середньому рівні.

На високому рівні формуванню цих прийомів сприятиме задача № 267 „*Піраміда перетнута площиною, паралельною основі. Доведіть, що бічні ребра і висота піраміди діляться цією площиною на пропорційні частини*”.

В даному підручнику є задача №225 „*Діагональ правильної чотирикутної призми утворює з площиною бічної грані кут в 30^o. Знайдіть кут між діагоналлю і площиною основи*”, яка дає можливість вчителю формувати прийом введення допоміжної задачі на достатньому рівні.

В підручнику [181] задача №27 „*Дано кути, утворені ребрами паралелепіпеда, які сходяться в одній вершині. Як знайти кути між ребрами, що сходяться у будь-якій іншій вершині?*” дає можливість формувати прийоми порівняння і аналогії на середньому рівні.

Задача №79 „*Доведіть, що центри граней куба є вершинами тетраедра*” сприяє формуванню цих прийомів на достатньому рівні.

Задача №15 „*Через сторону нижньої основи правильної трикутної призми проведено площину, яка перетинає бічні грані по відрізках, що утворюють кут α. Знайдіть кут нахилу цієї площини до основи призми*” дозволить формувати їх на високому рівні.

Розв’язуючи задачу №7 „*Побудуйте переріз чотирикутної призми площиною, яка проходить через сторону основи і одну з вершин другої основи*”, вчитель може формувати прийоми узагальнення і конкретизації на середньому рівні.

Задача №25 „*Площина, яка проходить через сторону основи правильної трикутної призми і середину протилежного ребра, утворює з основою кут 45°. Сторона основи l. Знайдіть бічну поверхню призми*” дає можливість формувати ці прийоми на достатньому рівні.

За допомогою задачі №19 „*Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 15, висота дорівнює 20. Знайдіть найкоротшу відстань від сторони основи до діагоналі призми, яка не перетинає її*” названі прийоми можуть формуватися вчителем на високому рівні .

Прийоми аналізу і синтезу на середньому, достатньому і високому рівнях вчитель може формувати за допомогою задач:

№5 „*Доведіть, що переріз призми, паралельний основам, дорівнює основам*”;

№13 „*Основою призми є правильний шестикутник із стороною а, а бічні грані – квадрати. Знайдіть діагоналі призми і площі її діагональних перерізів*”;

№14 „*У правильній шестикутній призмі, бічні грані якої – квадрати, проведіть площину через сторону нижньої основи і протилежну їй сторону верхньої основи. Сторона основи дорівнює а. Знайдіть площу побудованого перерізу*” відповідно.

У підручнику [18] формування прийомів порівняння і аналогії на середньому рівні можна здійснювати, розв’язуючи задачу №340 „*Точка прямого тригранного кута віддалена від його граней на 3 см, 4 см і 5 см. Як вона віддалена від вершини тригранного кута?*”.

Задача №342 „*Кожний плоский кут тригранного кута дорівнює 60^o. Знайдіть кут між його ребром і бісектрисою протилежного плоского кута*” сприяє формуванню названих прийомів на достатньому рівні.

Розв’язування задачі №391 „*Чи можна перетнути прямокутний паралелепіпед площиною так, щоб у перерізі утворився прямокутний трикутник*” дозволить вчителю формувати ці прийоми на високому рівні.

Прийоми узагальнення і конкретизації на середньому рівні можна формувати за допомогою задачі №335 „*Знайдіть кут між однією гранню двогранного кута* 100^o *і прямою, перпендикулярною до другої грані*”.

Задача №355 „*Якщо від куба* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *відрізати тетраедр* $A_1AB_1D_1$, *залишиться многогранник* $ABCDD_1B_1C_1$. *Скільки граней, ребер і вершин він матиме? Знайдіть площу його найбільшої грані, якщо* $AB = a$” дає можливість вчителю формувати ці прийоми на достатньому рівні.

Для формування прийомів аналізу і синтезу на середньому, достатньому і високому рівнях слід розв’язувати задачі:

№350 „*Многогранник має 9 ребер. Доведіть, що його гранню не може бути п’ятикутник*”;

№392 „*На ребрах* AA_1 *і* CC_1 *куба* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *взято точки K і P такі, що* $AK{:}KA_1 = 2{:}3$ *і* $CP = PC_1$. *В якому відношенні площина* D_1KP *ділить ребро AB*?”;

№419 „*PABC – правильна піраміда,* $AP = b$, $\angle APB = 90^\circ$. *Точка K ділить ребро BC у відношенні 1:2. Знайдіть площу трикутника APK*” відповідно.

Прийом введення допоміжної задачі на достатньому рівні вчитель може формувати при розв’язуванні задачі №410 „*Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює* h *і утворює з бічним ребром кут* α. *Через діагональ основи піраміди проведено площину під кутом* φ *до основи. Знайдіть площу перерізу*”.

Однак, в даних підручниках не досить задач для формування прийомів аналізу і синтезу, порівняння і аналогії, узагальнення і конкретизації та відсутні задачі для формування прийомів введення: допоміжних величин, допоміжних побудов, допоміжних задач, переформулювання задач. Тому, виникає необхідність у підборі такої системи задач, яка б дала можливість диференційовано формувати згадані прийоми евристичної діяльності учнів на уроках стереометрії.

1.2. Зміст і операційний склад прийомів евристичної діяльності учнів у процесі вивчення стереометрії

Відповідно до предмета дослідження визначимо поняття прийому евристичної діяльності учнів.

Прийом евристичної діяльності визначається як система дій, що виконується в певному порядку і використовується для розв'язання задач [86, с. 7].

Під прийомом навчання розуміють "окремі операції, розумові чи практичні дії вчителя або учнів, які розкривають чи доповнюють спосіб засвоєння матеріалу, що виражає даний метод" [68, с. 269].

Прийоми поділяють на такі види:

1) прийоми, що стосуються розв'язування завдань, які тільки позначають характер дії (побудуйте графік, порівняйте);

2) прийоми розв'язування завдань, які виступають як результат виконаної вчителем системи дій (різного типу викладена інформація, побудова послідовної сукупності вправ або задач і т.д.);

3) прийоми, що містять дії вчителя, які не передбачають виконання учнем будь-яких завдань (іронія, докір, похвала і т.д.) [136].

В роботі О.Б. Єпішової та В.І. Крупіч [86] дається класифікація прийомів навчальної діяльності за двома напрямками: 1) характер (тип) навчальної діяльності учнів; 2) етапи процесу засвоєння знань і способів діяльності. Перший відображає зв'язок прийомів із змістом навчального предмета і типами навчальних задач, другий – з організацією реального процесу навчання.

За першим напрямком в шкільному курсі математики автори виділяють чотири групи прийомів навчальної діяльності:

I. Загальнонавчальні прийоми, які не залежать від специфіки предмета математики і використовуються в різних навчальних предметах. Цю групу можна розділити на дві підгрупи: 1) прийоми загальної організації навчальної діяльності – організація уваги, планування, самоконтроль, робота з підручником і т.д.; їх можна назвати прийомами управління навчальною діяльністю; 2) прийоми мислительної діяльності – оволодіння і оперування уявленнями, поняттями, судженнями, мислительними операціями.

ІІ. Загальні прийоми навчальної діяльності з математики, що використовуються у всіх математичних дисциплінах. Це: 1) прийоми роботи з підручником математики і математичними таблицями і т.д.; 2) прийоми мислительної діяльності в сфері математичних об'єктів: прийоми роботи з математичними поняттями, твердженнями, умовисновками, прийоми характерних для математики мислительних операцій.

ІІІ. Спеціальні прийоми навчальної діяльності з окремих математичних дисциплін – це такі загальноматематичні прийоми, які набувають своєї особливої форми у відповідності із специфікою змісту курсу і особливостями його задач. Вони використовуються в будь-яких розділах цього курсу. В кожному із спеціальних прийомів можна виділити підгрупи часткових прийомів, що відповідають конкретним задачам. Без засвоєння спеціальних прийомів навчальної діяльності зміст предмета засвоюється формально.

IV. Часткові прийоми навчальної діяльності – це такі спеціальні прийоми, які конкретизовані для розв'язання більш вузьких задач і використовуються в певних темах курсу [86, с. 15 –16].

За другим напрямком в шкільному курсі математики автори виділяють три групи прийомів навчальної діяльності учнів:

І. Прийоми сприйняття нових знань і способів діяльності.

ІІ. Прийоми переробки і осмислення нових знань і способів діяльності.

ІІІ. Прийоми закріплення, застосування знань і способів діяльності [86, с. 16].

В психологічному плані в навчальній роботі розглядаються прийоми розумової діяльності: аналіз, синтез, порівняння, узагальнення, класифікація, конкретизація, абстрагування, аналогія та ін. Прийоми розумової діяльності підпорядковані закономірностям мислення в процесі оволодіння даним навчальним предметом. Але між вказаними типами прийомів неможливо провести чіткої границі. Так, прийом порівняння в практиці навчання називають і прийомом розумової діяльності, прийомом навчальної діяльності, і прийомом евристичної діяльності.

До прийомів евристичної діяльності відносять: виділення головного, суттєвого в матеріалі, узагальнення, порівняння, конкретизацію, абстрагування, аналіз, синтез, аналогію, прийоми кодування та ін. [170].

В роботах таких авторів, як Д. Пойа [183], Ю.М. Кулюткіна [129], І.А. Кушнір [130] та ін., описані евристичні прийоми, що використовуються в процесі розв'язування задач. До них відносять аналіз, синтез, аналогію, неповну індукцію, отримання наслідків та ін.

О.К. Артемов у своїй статті [9] крім згаданих раніше прийомів розглядає такі: прийом рівносильного перетворення вимоги задачі, прийом отримання наслідків, прийом незакінчених задач, прийом формування і виконання похідного завдання, прийом співставленого виділення.

Г.Д. Балк у роботі [15] розглядає такі прийоми евристичної діяльності, як аналогію, індукцію, граничний випадок, міркування неперервності.

А.Ю. Карлащук зазначає, що для формування дослідницьких вмінь у процесі розв'язування задач з параметрами виникає необхідність ознайомлення учнів з великою кількістю евристичних прийомів загального і спеціального характеру [109].

Г.І. Саранцев [208] до прийомів евристичної діяльності відносить такі, як: а) прийом елементарних задач; б) прийом опорних задач; в) прийом побудови фігури; г) прийом представлення розв'язання задачі в просторі станів; д) прийом граничних випадків і т.д.

Групу найбільш складних прийомів, на думку Г.І. Саранцева [208], утворюють прийоми наукового пізнання: аналогія, аналіз, синтез, узагальнення і т.д.

За широтою застосування прийоми поділяють на загальні і часткові (спеціальні). Загальними називають ті прийоми, що використовуються в різних галузях знань, тоді як до часткових (спеціальних) відносять ті прийоми, які необхідні тільки для засвоєння математики.

Прийоми, що використовуються в процесі пізнання не тільки математики, називають загальнопізнавальними; прийоми, що використовуються в процесі вивчення різних розділів математики – загальними; відповідно при вивченні її окремих тем – частковими [170].

До загальнопізнавальних прийомів в роботі [171] відносять: спосіб проходження від абстрактного до конкретного, цілеспрямовані спроби під час розв'язування задачі, складання алгоритмів, постановка проблеми, гіпотези, побудова індуктивних і дедуктивних умовисновків, заміна понять їх означеннями, підведення під поняття, складання схем, формування узагальненої задачі та ін.

До загальних прийомів евристичної діяльності учнів у процесі вивчення стереометрії відносять ([159], [171]): відкидання частини умови, перетворення умови задачі з метою позбавлення від деякої ознаки, алгоритми доведень рівносильності математичних тверджень, доведення від супротивного, повної індукції, переклад математичних тверджень на мову математичних символів, пошук ідеї доведення.

Часткові прийоми: мислене уявлення розміщення елементів просторової фігури в динаміці, узагальнення способів перетворення виразів, алгоритм побудови перерізів многогранників, побудова лінійних кутів при ребрі призми і піраміди, обчислення відстані від точки до площини та інші.

Прийомом також називають такий складовий компонент методу, який спрямовує учнів на розв'язання часткових дидактичних задач [170]. Дидактичний прийом включає дії. Дія – це акт цілеспрямованої діяльності, що характеризується усвідомленням результату, умов і шляхів його досягнення. Дія визначається ціллю, на досягнення якої вона направлена, і мотивом, що спонукає учня досягнути її. Метод зобов'язаний розв'язувати основні дидактичні задачі, а прийоми, дії – конкретні задачі, що ведуть до досягнення основної цілі.

У нашому дослідженні прийоми евристичної діяльності поділяються на загальні і спеціальні. До загальних віднесено прийоми, які використовуються при вивченні різних предметів, а до спеціальних – ті прийоми, що використовуються лише при вивченні шкільного курсу стереометрії.

Загальні прийоми:

1. Порівняння і аналогія.
2. Узагальнення і конкретизація.
3. Аналіз і синтез.

Спеціальні прийоми:

1. Введення допоміжних величин: а) допоміжного відрізка; б) допоміжного кута.
2. Введення допоміжних побудов.
3. Введення допоміжних задач.
4. Переформулювання задач.

Розглянемо зміст прийомів евристичної діяльності та їх операційний склад.

Загальні прийоми

Порівняння і аналогія

Порівняння і аналогія – загальні прийоми евристичної діяльності, що використовуються як в наукових дослідженнях з математики, так і в навчанні математики. За допомогою порівняння виявляються схожість і відмінність стереометричних об’єктів, що порівнюються, тобто наявність у них спільних і відмінних властивостей. Порівняння готує підставу для застосування аналогії, при якій відбувається перенесення інформації про ознаки і відношення з одного стереометричного об’єкта на інший на основі певного зв’язку між ними [15]. Наприклад, порівнюючи піраміду і конус і встановлюючи аналогію між ними, учні, згадавши означення піраміди, самостійно формулюють означення конуса.

Є широкі можливості для формування в учнів прийомів порівняння і аналогії при розв’язуванні стереометричних задач. Наприклад, „Скільки спільних точок з кулею має дотична площина? Чому?”. Сформулювавши аналогічну планіметричну задачу „Скільки спільних точок з кругом має дотична пряма? Чому?”, легко її розв’язавши і провівши аналогічні міркування, учні розв’язують дану задачу.

Порівняння і аналогія корисні тим, що вони сприяють виникненню в учня здогадки, тобто являють собою прийоми евристичної діяльності. У навчанні стереометрії не менш важливо, ніж вчити доводити, вчити здогадуватися, що саме підлягає доведенню і як знайти це доведення. Застосування порівняння і аналогії в стереометрії характеризується тим, що воно ґрунтується на глибокій внутрішній “схожості”, на однаковій структурі різних геометричних понять і тверджень [31].

Прийоми аналогії та порівняння визначаються таким операційним складом:

- визначити мету дії;
- розглянути деякі властивості або відношення стереометричного об’єкта, що розглядається;
- згадати, чи не зустрічався раніше такий об’єкт;
- якщо так, то згадати всі його властивості;
- порівняти властивості першого та другого геометричних об’єктів;
- якщо другий об’єкт має властивості, не виявлені поки в першому об’єкті, спробувати їх віднайти;
- зробити висновок відповідно поставленої мети.

Висновок за аналогією тільки правдоподібний, але не завжди вірний, і тому підлягає ще доведенню. Не варто уникати виникнення хибних висловлень за аналогією. В цьому випадку слід вважати їх гіпотезами. Оскільки найчастіше пошук, дослідження ведуться способом “спроб і помилок”, то помилки, які при цьому допускаються, цілком правомірні. В евристичній діяльності помилки неминучі. Важливо, щоб учні самостійно могли знаходити помилковість припущень, які виникають у пошуку правильних відповідей [30]. Наприклад,

„Чи завжди дві прямі в просторі, перпендикулярні до третьої прямої, паралельні?”. Оскільки на площині дві прямі, перпендикулярні третій прямій, паралельні, то, використовуючи аналогію, учні стверджують, що і в просторі дані прямі будуть паралельні. Тут вчителю слід запропонувати навести приклади, використовуючи оточуючі об’єкти, наприклад, класну кімнату. Учні помічають, що відповідь їх невірна.

Формувати прийоми порівняння і аналогії евристичної діяльності старшокласників на уроках стереометрії доцільно як при підведенні до формулювання означень геометричних понять, до формулювання і доведення теорем, так і при розв’язуванні задач.

У тих випадках, коли аналогія може призвести до помилок, потрібно своєчасно про це попереджати учнів, наголошуючи при цьому на походженні тих чи інших помилок.

Узагальнення і конкретизація

Узагальнення – це мислене виділення, фіксування яких-небудь загальних істотних властивостей, які належать певному класу об’єктів або відношень. Під узагальненням розуміють також перехід від одиничного до загального, від менш загального до більш загального.

Під конкретизацією розуміють зворотний перехід – від більш загального до менш загального, від загального до одиничного [211].

Багато понять в шкільному курсі стереометрії є результатом узагальнення раніше засвоєних понять. Суть узагальнення понять полягає у відкиданні видових ознак, тобто у зменшенні змісту і збільшенні обсягу понять. Наприклад, відкинувши в понятті „паралелепіпед” видову ознаку „в основі лежить паралелограм”, учні одержують узагальнене поняття „призма”. Протилежний процес – конкретизація – полягає у доповненні видових ознак до родових [272]. Наприклад, доповнивши до поняття „прямокутний паралелепіпед” видову ознаку „всі ребра рівні”, учні одержують більш конкретне поняття „куб”.

Уявлення про узагальнення і конкретизацію в учнів формувалося завжди, але робилось це стихійно, не під керівництвом вчителя, а як результат вивчення навчального матеріалу. Деякі учні оволодівали цими прийомами. Більшість з них не помічала використання ні узагальнення, ні конкретизації при вивченні стереометрії.

Навчання узагальненню і конкретизації необхідно проводити цілеспрямовано при формуванні понять, розв'язуванні різних видів задач, доведенні теорем.

Прийом узагальнення задається таким операційним складом:

- визначити мету узагальнення;
- знайти відмінні ознаки стереометричних понять, що узагальнюються;
- вказати загальні ознаки стереометричних понять, що узагальнюються у відповідності до поставленої мети;
- сформулювати висновок.

Прийом конкретизації визначається таким операційним складом:

- вивчити окреме стереометричне поняття;
- відновити в пам'яті родове поняття, правило або закон, до якого повинно бути віднесене дане одиничне стереометричне поняття;
- суттєві ознаки та відношення одиничного стереометричного поняття співвіднести з такими ж ознаками та відношеннями наведеного родового загального поняття, правила чи закону;
- співвідношення одиничного та загального закріпити в мисленні та мові учнів дедуктивним умовисновком, в результаті чого дані одиничні предмети та явища конкретизуються.

Д. Пойа виділяє два напрямки узагальнення:

1) заміна сталої змінною;
2) відкидання обмежень

і, відповідно, два напрямки конкретизації:

1) заміна змінної сталою;
2) внесення деяких обмежень [183, с. 34.]

Перший напрям узагальнення є частковим випадком другого: заміну сталої змінною (перехід від розгляду множини трикутних пірамід до розгляду множини n-кутних пірамід) можна вважати і відкиданням обмеження (перехід від розгляду множини пірамід, основами яких є трикутники, до розгляду пірамід, основами яких є многокутники). Це зауваження справедливе і для конкретизації. Тому далі ці напрями узагальнення і конкретизації розрізняти не будемо.

Навчання учнів узагальненню і конкретизації при вивченні геометричних понять повинно включати в себе розв’язання таких типів задач:

1. На перерахування властивостей понять, які містяться в означенні.
2. На з’ясування властивостей, які є наслідками властивостей, перерахованих в означенні.
3. На засвоєння необхідної і достатньої умови конкретизації і узагальнення поняття у випадку включення чи виключення деякої властивості.
4. На з’ясування, чи є одне з двох даних понять узагальненням (конкретизацією) другого.

Задачі на з’ясування, чи є одне з двох даних понять узагальненням другого, несуть в собі кілька дидактичних функцій. Виділимо дві з них, які важливі для навчання узагальненню і конкретизації. По-перше, через них учні усвідомлюють, що існують такі пари понять, що ні одне з них не є ні узагальненням, ні конкретизацією другого. По-друге, з допомогою такого типу задач учні знайомляться з доступними їм способами узагальнення і конкретизації понять, відмінними від способу включення чи виключення властивості [275].

Мотивацію діяльності учнів можна провести, пояснивши їм, що, розв’язавши узагальнену задачу, ми тим самим розв’язуємо всі конкретні задачі такого типу. Тому важливо після розв’язання задачі з конкретними числовими даними узагальнити її, перевірити, чи зберігається при цьому спосіб розв’язання. Такі узагальнення приводять до “відкриття” важливих формул [276]. Наприклад, розглянувши задачу „У похилій трикутній призмі проведено переріз, який перпендикулярний до бічних ребер і перетинає всі бічні ребра. Знайти об’єм призми, якщо площа перерізу *30* см^2, а бічні ребра дорівнюють *5* см”, учні узагальнюють її та отримують наступну задачу: „У похилій призмі проведено переріз, який перпендикулярний до бічних ребер і перетинає всі бічні ребра. Знайти об’єм призми, якщо площа перерізу Q, а бічні ребра дорівнюють l”. Розв’язання цієї задачі дає формулу об’єму похилої призми: $V = Q \cdot l$.

Навчити учнів узагальнювати задачі можна, якщо вони постійно будуть практикуватися у виконанні завдань на застосування різних прийомів, узагальнених після засвоєння схеми узагальнення. Тому після розв’язання конкретної стереометричної задачі доцільно пропонувати учням завдання на її узагальнення. Розглянемо задачу: „За стороною основи *6* см і бічним ребром *5* см знайти повну поверхню правильної трикутної призми”. Основне поняття в задачі – правильна трикутна призма. Конкретні числові дані – сторона основи *6* см і бічне ребро *5* см. Замінимо правильну трикутну на правильну чотирикутну призми, сторону основи *6* см і бічне ребро *5* см на сторону основи a і бічне ребро b.

Одержимо узагальнену задачу про повну поверхню правильної чотирикутної призми. Якщо замінити квадрат довільним правильним n-кутником, одержимо нову узагальнену задачу: „За стороною основи a і бічним ребром b знайти повну поверхню правильної n-кутної призми”. Замінивши дані a і b конкретними числами, одержимо конкретні задачі даної групи. Якщо розв’язування задач цієї групи розпочати з загальної задачі, тоді перехід до часткових задач цієї групи буде конкретизацією. Слід прагнути, щоб ці два прийоми – узагальнення і конкретизація сприймалися учнями в єдності.

Прийом узагальнення через відкидання обмежень широко використовується при вивченні стереометрії, використовуючи аналогію з планіметрією. Наприклад, паралелепіпед можна розглядати як узагальнення поняття паралелограма, куб як узагальнення поняття квадрата і т.д.

Навчання узагальненню і конкретизації дозволяє більш цілеспрямовано, чітко і послідовно організувати роботу з учнями по формуванню і вивченню понять, забезпечити їх більш високу математичну підготовку, активізувати їх евристичну діяльність.

Аналіз і синтез

У математиці під аналізом розуміють міркування від невідомого, від того, що треба знайти чи довести, до відомого, до того, що вже знайдено або дано, а під синтезом – міркування від того, що дано, до того, що треба знайти чи довести.

Аналіз є засобом пошуку розв'язання, доведення, хоча сам по собі у більшості випадків не є розв'язанням, доведенням. Синтез дає розв'язання задачі або доведення теореми.

Аналіз дозволяє показати учневі, як знайти доведення теореми чи розв'язання стереометричної задачі, як можна самому догадатися до цього. Якщо аналіз використовувати систематично, то в учнів формуються навички пошуку доведення теорем і розв'язування задач, у них інтенсивно розвивається евристична діяльність. Якщо учень ним користується при пошуку розв'язання задачі, то лише до тих пір, поки у його свідомості не виникне ідея розв'язання. Чим більш складною для учня є задача, тим чіткіше він може прослідкувати елементи аналізу в своїх міркуваннях, які мали місце в процесі пошуку розв'язання. При розв'язуванні стереометричних задач аналіз може виступати у двох формах: а) коли в міркуваннях рухаються від шуканих до даних задачі; б) коли ціле розділяють на частини [276].

Схема проведення аналізу полягає в послідовному проведенні трьох етапів міркувань:

1) припустимо, що задача розв'язана;
2) подивимось, які з цього можна зробити висновки;
3) співставляючи одержані висновки, постараємось знайти шлях для розв'язання задачі.

Доцільно систематично нагадувати учням, що аналіз представляє собою лише частину процесу розв’язання чи доведення.

Аналіз являє собою найбільш важку, творчу стадію процесу міркувань. Тому дуже важливо вчити учнів процесу аналізу.

Аналіз, як перша, пошукова стадія міркування, – це загальний евристичний прийом, загальний метод мислення, який слід широко використовувати при доведенні теорем і розв’язуванні стереометричних задач.

Суть синтетичного прийому доведення теорем і розв’язування задач полягає у відшуканні таких необхідних умов, які випливають з справедливості даних, перехід від яких до шуканих очевидний. Він здійснюється в такому порядку. Використовуючи дані теореми чи задачі і опираючись на відомі стереометричні твердження (аксіоми, означення, теореми і наслідки з них), виводять шукане як логічний наслідок даних. Іноді безпосередньо не вдається перейти від даних до шуканих. Тоді, використовуючи дані, приходять до деякого проміжного наслідку, раніше невідомого, який з цього моменту, будучи виведеним з даних теореми чи задачі, стає відомим. Використовуючи цей наслідок і дані, виводять новий наслідок. Якщо цей наслідок є шуканим, то теорема доведена чи задача розв’язана. Якщо ні, то використовують другий наслідок і дані та одержують третій наслідок і т.д., доки у вигляді наслідку не одержать шукане [80].

Прийоми аналізу і синтезу визначаються таким операційним складом:

- охарактеризувати дані стереометричні об’єкти, що розглядаються;
- назвати зв’язки, якими можуть бути пов’язані дані об’єкти;
- назвати нові якості першого об’єкту, який пов’язаний з другим об’єктом;
- зробити висновок про нові властивості першого об’єкту.

У шкільних підручниках з стереометрії доведення теорем і розв’язання задач переважно викладається тільки з допомогою синтезу, тому учні не привчаються до самостійного пошуку доведення теорем і розв’язування задач, що гальмує розвиток їх мислення, не розвиває їх евристичної діяльності. Тому найбільш ефективним є використання у поєднанні аналізу і синтезу.

Однак практика роботи школи показує, що в ряді випадків вивчення теореми, її доведення носить формальний характер. При цьому переважає синтетичний спосіб доведення, постійне використання якого не розкриває суті теорем; його виклад не доповнюється аналізом, який дозволяє учням осмислити хід міркування, зрозуміти обґрунтованість ряду додаткових побудов, не виділяються особливості доведення. Не завжди проводиться аналіз формулювання теорем, не розкривається значення кожного з елементів формулювання, не наводяться необхідні контрприклади. Все це призводить до того, що значна частина учнів завчає доведення теореми без достатнього розуміння. Процес доведення теорем не стає тією основною ланкою процесу навчання математики, в ході якого розвивається математичне мислення учнів [2].

Тому при вивченні теорем доцільно використовувати аналітико-синтетичний прийом, який дає можливість учням брати активну участь в навчальному процесі, що, безумовно, сприятиме розвитку їх евристичної діяльності. В навчальному процесі використовується також прийом аналізу через синтез. Даний прийом є основним шляхом до відкриття способу розв’язування стереометричних задач. Суть його полягає не в тому, що стереометрична задача чи матеріал не розбиваються на частини, які потім пізнаються, а у включенні основних і вихідних даних, що містяться в умові задачі, у все нові і нові зв’язки. Предмет ніби розвертається новою стороною, в ньому виділяються не виділені раніше властивості, відношення, розкриваються нові можливості їх використання для досягнення цілі. Прикладом застосування прийому може бути виведення формул площ бічної поверхні та об’ємів прямої та похилої призми (висота і основа прямої призми замінюється бічним ребром і перпендикулярною до нього площиною похилої призми).

Проведення аналізу формулювання і доведення теореми ми пропонуємо проводити у вигляді евристичної бесіди, при правильній організації якої учні із пасивних слухачів перетворюються в активних учасників доведення. Це розвиває їх ініціативу, творчу активність, сприяє кращому розумінню напрямку доведення.

Спеціальні прийоми

Введення допоміжних величин

У багатьох задачах стереометрії вдається побудувати такі трикутники, в які входять задані лінійні і кутові елементи; тим самим є можливість знайти в побудованому трикутнику потрібні елементи і виразити їх через задані елементи.

Однак, є немало і таких стереометричних задач, в яких дані лінійні елементи не входять ні в один з трикутників, що містять у собі дані кути; крім того, бувають задачі, в яких даються тільки кути.

У таких задачах для знаходження шуканих невідомих вводять допоміжні величини. За допомогою цих допоміжних величин шукані величини задаються як неявні функції від відомих або раніше знайдених величин. Вводяться або допоміжні відрізки, або допоміжні кути.

Операційний склад даних прийомів наступний:

- визначити мету дії;
- розчленити задачу на частини;
- до частин поставити запитання так, щоб отримати наслідки;
- шукані величини задати як неявні функції від відомих або раніше знайдених величин;
- сформулювати висновок.

Розглянемо кожен з цих випадків.

<u>*а) Введення допоміжного відрізка.*</u>

Допоміжний відрізок вводять при розв'язуванні таких стереометричних задач, в яких не дано лінійних елементів і треба знайти певну залежність між кутами. У цих задачах величину введених допоміжних відрізків звичайно знайти не можна, але для розв'язування задачі це не завжди потрібно [235].

Розглянемо приклад розв'язування такої задачі.

Задача. Мимобіжні діагоналі двох суміжних бічних граней прямокутного паралелепіпеда нахилені до площини основи під кутами α і β. Знайти кут γ між цими діагоналями.

Кутом між мимобіжними прямими A_1D і D_1C є кут BA_1D між прямою A_1D і прямою A_1B, паралельною прямій D_1C (рис. 1.1). Оскільки висота паралелепіпеда входить у два трикутники A_1DA і D_1CD, що мають дані кути α і β, то приймають її за допоміжний відрізок.

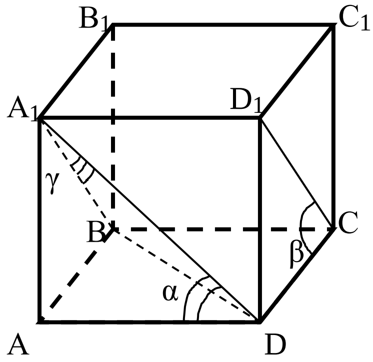


Рис. 1.1

Позначимо $A_1A = D_1D = a$. Оскільки кут γ входить в ΔA_1DB, то його можна спробувати визначити, скориставшись теоремою косинусів. Для цього можна спочатку визначити сторону цього трикутника через висоту a і дані кути.

З ΔDD_1C $(\angle D = 90^\circ)$: $D_1C = \dfrac{DD_1}{\sin\beta} = \dfrac{a}{\sin\beta}$, $DC = DD_1 \cdot ctg\beta = a\,ctg\beta$. З ΔAA_1D $(\angle A = 90^\circ)$: $A_1D = \dfrac{AA_1}{\sin\alpha} = \dfrac{a}{\sin\alpha}$, $AD = AA_1 \cdot ctg\alpha = a\,ctg\alpha$. Оскільки $A_1B = D_1C$, то $A_1B = \dfrac{a}{\sin\beta}$; $AB = DC$, то $AB = a\,ctg\beta$. З ΔABD $(\angle A = 90^\circ)$:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = a^2ctg^2\beta + a^2ctg^2\alpha.$$

За теоремою косинусів з ΔA_1BD: $BD^2 = A_1B^2 + A_1D^2 - 2A_1B \cdot A_1D \cdot \cos\gamma$, тому

$$a^2ctg^2\beta + a^2ctg^2\alpha = \frac{a^2}{\sin^2\beta} + \frac{a^2}{\sin^2\alpha} - 2\cdot\frac{a}{\sin\beta}\cdot\frac{a}{\sin\alpha}\cdot\cos\gamma;\quad \frac{2\cos\gamma}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} = \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\alpha} -$$

$$-ctg^2\beta - ctg^2\alpha;\quad \frac{2\cos\gamma}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} = \frac{1-\cos^2\beta}{\sin^2\beta} + \frac{1-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha};\quad \frac{2\cos\gamma}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} = 2;\quad \cos\gamma = \sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

Введенням допоміжного відрізка користуються і при розв’язуванні задач, в яких задані лінійні величини не входять в один трикутник з заданими кутами.

Розв’язування таких стереометричних задач введенням допоміжного відрізка зводиться до складання рівняння для знаходження одного з невідомих відрізків, який легко зв’язується з даними елементами; шукану величину знаходять за допомогою знайденого відрізка [86].

<u>б) Введення допоміжного кута.</u>

Як і введення допоміжного відрізка, так і введення допоміжного кута застосовується у тих випадках, коли даний лінійний елемент не входить ні в один з тих трикутників, що мають дані кути. Крім того, цей прийом може застосовуватись і в інших випадках.

Розглянемо ці міркування на конкретному прикладі.

Задача. Плоский кут при вершині правильної чотирикутної піраміди дорівнює α. Висота піраміди *H*. Знайти площу основи піраміди [17].

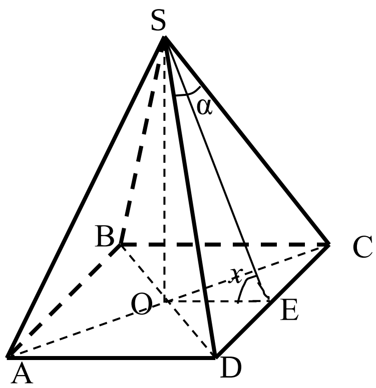


Рис. 1.2

Введемо допоміжний кут *x* нахилу бічної грані *SDC* до площини основи *ABC* (рис. 1.2). Бачимо, що ΔOSE містить введений кут *x*, а ΔESC – відомий кут $\frac{\alpha}{2}$, і вони мають спільну сторону *SE*. Визначимо *SE* з кожного з цих трикутників.

З $\Delta OSE(\angle O = 90^\circ)$: $SE = \frac{OE}{\cos x}$. З $\Delta ESC(\angle E = 90^\circ)$: $SE = EC\,ctg\frac{\alpha}{2}$, отже, $\frac{OE}{\cos x} = EC\,ctg\frac{\alpha}{2}$. Але $OE = EC = \frac{CD}{2}$, тому $\frac{1}{\cos x} = ctg\frac{\alpha}{2}$, звідки $\cos x = tg\frac{\alpha}{2}$.

З $\Delta OSE(\angle O = 90^\circ)$: $OE = OS \cdot ctg x = H \cdot ctg.$ $S_{осн} = DC^2 = (2OE)^2 = 4H^2 ctg^2 x =$

$$= 4H^2 \frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x} = 4H^2 \frac{tg^2\frac{\alpha}{2}}{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}} = 4H^2 \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}} = 4H^2 \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.$$

Введення допоміжного кута корисно використовувати і при розв’язуванні стереометричних задач на доведення.

Введення допоміжних величин активізує мислення учнів, розвиває їх евристичну діяльність.

Введення допоміжних побудов

Прийом введення допоміжних побудов спрощує доведення теорем і розв’язання стереометричних задач. Це ті побудови, відносно яких у формулюванні теорем і в умовах задач немає явних вказівок, і в доцільності і необхідності яких учні повинні здогадатися. Важливо привчати учнів свідомо шукати ці побудови, показувати їм, що вони виникають не випадково, а є наслідком певних логічних міркувань.

Даний прийом має такий операційний склад:

- визначити мету дії;
- розчленити стереометричний об'єкт на частини;
- до частин поставити запитання так, щоб отримати наслідки;
- шукані геометричні величини задати як неявні функції від відомих або раніше знайдених величин;
- сформулювати висновок.

Наприклад, при вивченні теореми 5.3. "Діагоналі паралелепіпеда перетинаються і в точці перетину діляться пополам" [181] учні мають здогадатися, що, включивши дві діагоналі в паралелограм, легко довести теорему. А для цього слід провести дві діагоналі бічних граней.

Проілюструємо використання прийому введення допоміжних побудов при розв'язуванні задачі.

Задача. Мимобіжні діагоналі двох суміжних бічних граней прямокутного паралелепіпеда нахилені до площини його основи під кутами α і β. Знайти кут x між цими діагоналями [201].

В даній задачі треба встановити зв'язок між кутами α, β і x. Тому потрібно виконати допоміжну побудову, яка дасть можливість встановити цей зв'язок. При цьому бажано одержати прямокутні трикутники, бо в них елементи легко виражаються через дані кути (рис. 1.3).

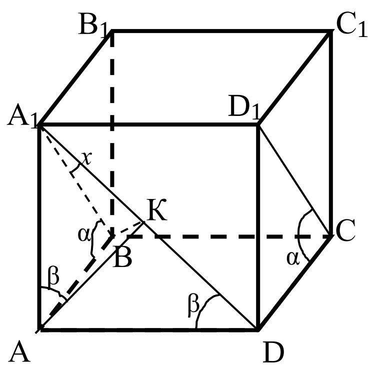


Рис. 1.3

Ребро AA_1 легко зв'язується і з кутом α, і з кутом β, тому його і слід використати при побудові прямокутних трикутників.

Звідси випливає побудова: з вершини A опускаємо перпендикуляр AK на A_1D і точку K сполучаємо з точкою B. Трикутник A_1KB теж прямокутний, бо $A_1D \perp BK$ за теоремою про три перпендикуляри.

Оскільки $\angle A_1AK = \angle A_1DA = \beta$ (що випливає з подібності прямокутних трикутників A_1AK і A_1DA), то відрізки A_1K і A_1B виразимо через ребро A_1A. Отже, $\cos x = \frac{A_1K}{A_1B} = \frac{AA_1 \cdot \sin\beta}{\frac{AA_1}{\sin\alpha}} = \sin\alpha \cdot \sin\beta$. $\cos x = \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

Дану задачу можна розв’язати і з допомогою векторного методу розв’язування стереометричних задач, що пов’язаний з використання векторів. В роботі [19] описано, що розв’язуючи задачу векторним методом, спочатку подані в задачі співвідношення перекладають на „мову векторів”, тобто записують їх відповідними векторними рівностями; потім, користуючись правилами векторної алгебри, ці векторні рівності перетворюють і, нарешті, від мови векторів знову переходять до мови геометрії. Зрозуміло, чим більше геометричних співвідношень учні можуть записати у вигляді векторних рівностей, тим ширший клас геометричних задач вони зможуть розв’язати векторним способом.

Введення допоміжних побудов при доведенні стереометричних теорем і розв’язуванні задач підвищує інтерес учнів до вивчення предмета і активізує їх евристичну діяльність.

Введення допоміжних задач

Процес розв’язування складної стереометричної задачі зводиться до процесу розв’язання деякої сукупності допоміжних задач. Тому пошук розв’язання будь-якої складної задачі розчленовується на розв’язання допоміжних задач. У цій задачі, на відміну від основної (поданої спочатку), вимога задачі безпосередньо учню не дається. Після розв’язання допоміжних задач дана задача вже розв’язується значно простіше. Допоміжними задачами при розв’язуванні стереометричних задач виступають планіметричні задачі.

Операційний склад даного прийому наступний:

- визначити мету дії;
- розчленити стереометричну задачу на частини, та проаналізувати їх;

- до частин поставити такі запитання, що приведуть до отримання допоміжних задач;
- до деякої частини отриманих задач поставити відповідні запитання, що допоможуть розв'язати задачу самостійно;
- сформулювати висновок.

Розглянемо приклад.

Задача. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з кутом β при основі і радіусом вписаного кола *r*. Діагональ бічної грані, що містить основу цього трикутника, утворює кут α з площиною основи призми. Знайдіть об'єм призми.

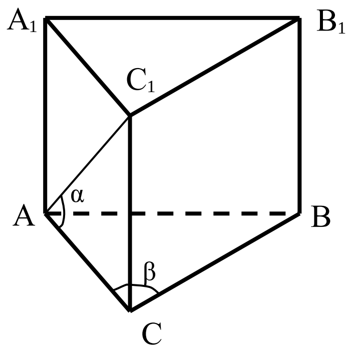


Рис. 1.4

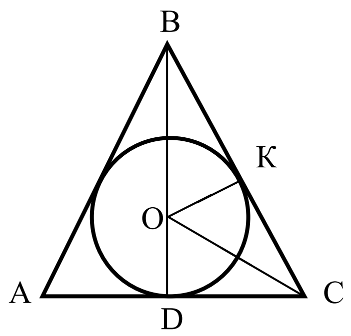


Рис. 1.5

Розв'язання задачі зводиться до знаходження висоти CC_1 призми і площі основи, тобто площі $\triangle ABC$ (рис. 1.4, рис. 1.5).

Оскільки призма $ABCA_1B_1C_1$ пряма, то $CC_1 \perp ABC$ і AC є проекцією діагоналі AC_1 бічної грані AA_1C_1C. За умовою $\angle C_1AC = \alpha$. Щоб знайти CC_1 з $\triangle ACC_1 (\angle C = 90°)$, потрібно знати основу AC $\triangle ABC$. Отже, для розв'язання даної задачі досить розв'язати таку допоміжну задачу: "Знайти основу AC і площу рівнобедреного трикутника ABC, якщо кут при основі дорівнює β, а радіус вписаного кола дорівнює r".

$AB = BC$, $\angle BCA = \beta$. Оскільки $AD = DC$, то $OD = r$ і $\angle DCO = \frac{\beta}{2}$. З $\triangle ODC (\angle D = 90°)$: $DC = OD \cdot ctg\frac{\beta}{2} = r \cdot ctg\frac{\beta}{2}$,

з $\triangle BDC$ $(\angle D = 90°)$: $BD = DC \cdot tg\beta = r \cdot ctg\frac{\beta}{2} \cdot tg\beta$. $AC = 2DC = 2r \cdot ctg\frac{\beta}{2}$;

$$S_{\triangle ABC} = DC \cdot BD = rctg\frac{\beta}{2} \cdot rctg\frac{\beta}{2} \cdot tg\beta = r^2 ctg^2\frac{\beta}{2} tg\beta.$$

З $\triangle AC_1C$ $(\angle C = 90°)$: $CC_1 = AC \cdot tg\alpha = 2rctg\frac{\beta}{2} tg\alpha$.

$$V = S_{\triangle ABC} \cdot CC_1 = r^2 ctg^2\frac{\beta}{2} \cdot tg\beta \cdot 2rctg\frac{\beta}{2} tg\alpha = 2r^3 \cdot ctg^3\frac{\beta}{2} \cdot tg\alpha \cdot tg\beta.$$

Виділення, формулювання і розв’язування допоміжних задач сприяє повторенню, поглибленню і систематизації математичних знань. Формування прийому використання допоміжних задач дає можливість активізувати евристичну діяльність учнів.

Переформулювання задачі

Трикутна піраміда має таку властивість, що коли взяти за основу будь-яку її грань, то новий многогранник теж буде трикутною пірамідою. Те ж саме стосується і паралелепіпеда [100].

Цю властивість використовують для спрощення розв’язання деяких задач, переформулювавши їх умови.

Даний прийом визначається наступним операційним складом:

- визначити мету дії;
- розчленити об’єкти, які входять в стереометричну задачу на частини, що аналізуються, та розглянути перехід до нової системи відношень;
- зіставити ці об’єкти за цими ознаками (відношеннями);
- переформулювати задачу;
- сформулювати висновок.

Розглянемо задачу: “Бічні грані трикутної піраміди взаємно перпендикулярні, площі їх дорівнюють S_1, S_2 і S_3. Знайти об’єм піраміди” [108].

Розв’язання задачі значно спрощується, якщо прийняти за основу одну з бічних граней піраміди. Тому краще сформулювати дану задачу так:

„В основі трикутної піраміди лежить прямокутний трикутник з площею S_1, дві бічні грані з площами S_2 і S_3 перпендикулярні до площини основи. Знайти об’єм піраміди” (рис. 1.6).

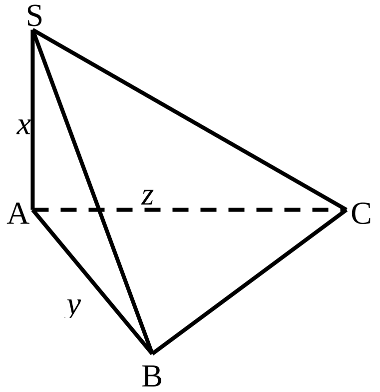


Рис. 1.6

Спільне ребро SA двох бічних граней SAB і SAC буде перпендикулярне до площини основи (як лінія перетину двох площин, перпендикулярних до третьої площини) і буде висотою піраміди. Позначимо $SA=x$, $SB=y$, $SC=z$, тоді шуканий об’єм $V=\frac{1}{6}xyz$.

За умовою задачі $\frac{1}{2}xz=S_2$, $\frac{1}{2}yz=S_3$, $\frac{1}{2}xy=S_1$. Перемноживши почленно ці рівності, матимемо: $x^2y^2z^2=8\cdot S_1\cdot S_2\cdot S_3$, звідки $xyz=2\sqrt{2\cdot S_1\cdot S_2\cdot S_3}$ і, отже, $V=\frac{1}{3}\sqrt{2\cdot S_1\cdot S_2\cdot S_3}$.

Прийом переформулювання задачі розвиває мислення старшокласників, активізує їх евристичну діяльність.

Таким чином, наведена система прийомів (як загальних, так і спеціальних) евристичної діяльності старшокласників необхідна для успішного вивчення ними шкільного курсу стереометрії.

1.3. Психолого-методичні засади диференційованого формування евристичних прийомів

При визначенні рівнів навчальних досягнень учнів аналізу підлягають:
- характеристика відповіді учня;
- якість знань;
- ступінь сформованості загальнонавчальних та предметних умінь та навичок;
- рівень оволодіння розумовими операціями;
- досвід творчої діяльності;
- самостійність оціночних суджень.

Вказані орієнтири покладено в основу чотирьох рівнів навчальних досягнень: початкового, середнього, достатнього, високого.

У загальнодидактичному плані рівні визначаються за такими характеристиками [125]:

– початковий – відповідь учня при відтворенні навчального матеріалу елементарна, фрагментарна, зумовлюється початковими уявленнями про предмет вивчення;

– середній – учень відтворює основний навчальний матеріал, здатний розв'язувати завдання за зразком, володіє елементарними вміннями навчальної діяльності;

– достатній – учень знає основні ознаки понять, явищ, закономірностей, зв'язків між ними, а також самостійно застосовує знання в стандартних ситуаціях, володіє розумовими операціями (аналізом, абстрагуванням, узагальненням тощо), вміє робити висновки, виправляти допущені помилки; відповідь учня повна, правильна, логічна, обґрунтована, хоча їй і бракує власних суджень; він здатний самостійно здійснювати основні види навчальної діяльності;

– високий – знання учня є глибокими, міцними, узагальненими, системними; учень вміє застосувати знання творчо, його навчальна діяльність має дослідницький характер, позначена вмінням самостійно оцінювати різноманітні життєві ситуації, явища, факти, виявляти і відстоювати особисту позицію.

Як правило, рівневе навчання базується на плануванні результатів навчання: явного виділення рівня обов'язкової підготовки і формування на цій основі підвищених рівнів оволодіння матеріалом ([19], [42], [46], [53], [76], [88], [92], [137], [197], [232], [250], [266]). Узгоджуючись з ними та враховуючи свої здібності, інтереси, учень отримує право і можливість вибирати обсяг та глибину засвоєння навчального матеріалу. Досягнення обов'язкових результатів навчання при такому підході стає тим об'єктивним критерієм, на основі якого може видозмінюватись найближча мета у навчанні кожного учня, перебудовуватись у відповідності із цим зміст його роботи. Саме такий підхід призводить до того, що диференційоване навчання набуває реального для вчителя і учня змісту. Збільшуються можливості роботи із сильними учнями, відпадає необхідність постійно розвантажувати програму та знижувати загальний рівень вимог, оглядаючись на слабких учнів.

Перерахуємо ряд важливих умов, встановлених в ході нашого дослідження, виконання яких необхідне для успішного та ефективного здійснення диференційованого навчання.

1. Рівні засвоєння матеріалу та, в першу чергу, обов'язкові результати навчання повинні бути відкритими для учнів. Як і успіх навчального процесу в цілому, успіх диференційованого підходу в навчанні залежить від пізнавальної активності учнів, від того, наскільки вони будуть зацікавлені у своїй діяльності. Чітке знання конкретних цілей при умові їх осмисленості, можливості виконати вимоги вчителя активізує пізнавальний інтерес учнів, причому на різних уроках.

2. Наявність чіткого розмежування між рівнем вимог і рівнем навчання. Рівневе навчання здійснюється не за рахунок того, що одним учням дають менший обсяг навчального матеріалу, а другим – більший, а в силу того, що, пропонуючи учням однаковий обсяг матеріалу, ми встановлюємо різні рівні вимог до його засвоєння.

3. В навчанні повинна бути забезпечена певна наступність в переході учнів від нижчого рівня до вищого. Це означає, що в ході навчання не слід ставити більш високі вимоги перед учнями, які ще не досягли рівня обов'язкової підготовки. В той же час, якщо для одних учнів необхідно продовжити етап відпрацювання основних, опорних знань та вмінь, то інших не слід безпідставно затримувати на цьому етапі.

Рівневе навчання дозволяє враховувати такі якості учнів, як самостійність, працьовитість, інтерес до навчання, рівень мислення, уважність тощо. В більшій мірі не слід розглядати ці якості як вже задані для поділу учнів на групи, а розвивати, формувати їх у всіх учнів у ході диференційованої роботи.

Взагалі, необхідність використання в школі диференційованого навчання зумовлена, передусім, тим, що засвоєння різними учнями навчального матеріалу здійснюється на різних рівнях.

Практика роботи середніх загальноосвітніх навчальних закладів свідчить про те, що саме чотирьохрівневе навчання дає можливість вчителю математики об'єктивно оцінювати навчальні досягнення учнів, користуючись 12-бальною шкалою.

Однак, в роботі Бурди М.І. [35] розглядаються три рівні навчальних досягнень: обов'язковий, оптимальний і високий. В нашому дослідженні ми використовуємо три рівні для формування евристичних прийомів: середній, достатній та високий, бо на початковому рівні досить важко формувати ці прийоми.

На середньому рівні навчальних досягнень орієнтовна основа діяльності дається учневі у вигляді зразка застосування прийому. Нове завдання учень співвідносить із зразком і, якщо вони однотипові, переносить даний прийом на нове завдання. Однак таке перенесення обмежене, воно можливе лише в схожих, аналогічних ситуаціях. На цьому рівні рекомендується репродуктивний шлях вироблення прийомів – роз'яснення суті прийому, показ зразка його виконання і застосування в стандартних ситуаціях (розв'язування пробних і тренувальних вправ). Більшої уваги, ніж на інших рівнях навчання, приділяється наочності. Рекомендується використовувати програмно-педагогічні засоби для подання наочно-образної інформації в поєднанні із знаково-символьною, динамізації зображень геометричних залежностей. На цьому рівні використовуємо пояснювально-ілюстративні методи навчання (бесіда, розповідь, навчальна дискусія та ін.).

На достатньому рівні навчальних досягнень орієнтовна основа діяльності дається учням у вигляді спеціальних вказівок, які є необхідною умовою правильного виконання евристичного прийому. Учні мають уміти виконувати математичні операції, послідовність яких їм знайома, але зміст і умови виконання змінені. Вони знають основні властивості понять, закономірностей, зв’язків між ними, самостійно застосовують знання в стандартних ситуаціях, володіють розумовими операціями, вміють робити висновки, виправляти допущені помилки. На цьому рівні рекомендується поєднувати емпіричний і теоретичний шляхи вироблення прийомів. Рекомендується використовувати програмно-педагогічні засоби, ілюструвати динаміку утворення зображень просторових фігур і залежностей між їх елементами. Доцільно використовувати проблемний метод вивчення матеріалу.

На високому рівні навчальних досягнень значна увага приділяється не стільки способу діяльності, скільки аналізу опорної задачі чи групи задач. Аналізуючи дібрані задачі, учні самостійно складають евристичну схему розв’язання. Задачі високого рівня – це задачі підвищеної складності (нестандартні, творчі). Основне їх призначення – систематично формувати у старшокласників елементи творчої пошукової діяльності. Щоб розв’язати задачі цього рівня, їх потрібно проаналізувати, розглянути умову і вимогу, сформулювати наслідки з умови, відшукати достатні умови для виконання вимоги, знайти допоміжні елементи, ввести вхід міркувань нові об’єкти. Учень має усвідомити нові для нього математичні факти, ідеї, використати набуті знання і вміння в незнайомих для нього ситуаціях, виявити варіативність мислення і раціональність у виборі способу розв’язання математичної проблеми в межах вимог навчальної програми. На цьому рівні рекомендується творчий шлях вироблення евристичних прийомів та використання проблемного і дослідницького методів навчання.

При підборі задач ми користувалися критеріями оцінювання навчальних досягнень учнів з математики [125]. Згідно з цими критеріями на середньому рівні учень може:

– прочитати і записати числа, переписати даний математичний вираз, формулу;
– зобразити найпростіші геометричні фігури (намалювати ескіз);
– впізнати окремі математичні об’єкти і пояснити свій вибір;
– співвіднести дані або словесно описані математичні об’єкти і пояснити свій вибір;
– відтворити означення математичних понять і формулювання тверджень;
– формулювати деякі властивості математичних об’єктів;
– виконати за зразком елементарні завдання;
– відтворити інформацію, операцію, дію в тому вигляді і в тій послідовності, як вони подавались у процесі навчання, а також в процесі відповіді він може допускати окремі видозміни навчальної інформації, наводити власні приклади;
– записати математичний вираз, формулу за словесним формулюванням і навпаки.

Завдання середнього рівня – це задачі на 2 – 3 дії. Одна задача дозволяє перевірити знання кількох формул, понять. Отже, для того, щоб охопити весь теоретичний матеріал конкретного параграфа, задач середнього рівня потрібно найбільше.

Завдання достатнього рівня складені таким чином, щоб при їх розв’язуванні учень міг показати:

– вміння застосовувати означення математичних понять та їх властивості до розв’язування завдань у знайомих або змінених ситуаціях;
– знання залежності між елементами математичних об’єктів.

Для розв'язування задач достатнього рівня учень повинен вільно володіти навчальним матеріалом, вміти аргументувати математичні міркування і розв'язання задач. Задача достатнього рівня дозволяє перевірити знання кількох тем, тобто вона охоплює кілька різних математичних понять, формул, об'єктів. На цьому рівні задачі можуть містити довільне число дій.

Задачі високого рівня вирізняються тим, що умови і вимоги їх безпосередньо не відповідають означенням і теоремам. Щоб розв'язати такі задачі, учневі потрібно їх проаналізувати – розглянути умову і вимогу; вивести наслідки з умови; відшукати достатні умови для виконання вимоги; вибрати найбільш значиму властивість для розв'язання задачі; знайти допоміжні елементи; ввести в хід міркування нові об'єкти.

При доборі задач високого рівня ми враховували те, що на цьому рівні учень може:

– усвідомити нові для нього математичні факти, ідеї, використати набуті знання і вміння в незнайомих для нього ситуаціях;
– виявити варіативність мислення і раціональність у виборі способу розв'язування математичної проблеми у межах вимог навчальної програми;
– розв'язати нестандартні задачі у межах вимог навчальної програми.

Для встановлення рівня розвитку математичного мислення учнів ми будемо розрізняти такі рівні навчальних досягнень:

1. Емпіричний рівень засвоєння стереометричних понять та їх властивостей. Геометричні поняття та їх властивості учні засвоюють переважно на чуттєво-предметній основі із використанням життєвих прикладів. Рівень осмислення залишається емпіричним, чуттєво-конкретним. Учні володіють безпосередніми знаннями, які вони отримали від емпіричного аналізу окремого явища, взятого довільно без акцентування уваги на систему, що включає дане явище, і на умови, які його породжують.

В учнів формуються загальні уявлення про стереометричні об'єкти. Знання учнів відображають переважно видимі зовнішні властивості та відношення предметів і містять лише окремі сторони узагальнення, в якому опускаються особливість та одиничність властивостей об'єктів, які перебувають у розвитку. Такі знання носять фрагментарний характер. Учні орієнтуються на розрізнені, часткові ознаки, міркування будують в порядку від часткового до загального. Цьому рівню відповідає емпіричне мислення.

Традиційна система навчання переважно орієнтувалась на формування в учнів емпіричного мислення, головна функція якого полягала в класифікації об'єктів та явищ, що вивчаються, за їх зовнішніми ознаками.

Емпіричному мисленню відповідає етап чуттєвої сходинки пізнання, який коротко виражається як "сходження від конкретно-предметного до абстрактного", при якому з допомогою емпіричного аналізу і мови відокремлюються від об'єктів загальні властивості і за допомогою синтезу доводяться до рівня їх абстрактно-узагальненого у вигляді словесного визначення.

Навчання стереометрії при орієнтації на емпіричне мислення веде до того, що учні не завжди можуть відрізнити зовнішні ознаки предмета, факту від справжнього змісту понять [36].

В період швидкого зростання обсягу інформації, як відмічалось А.Н. Леонтьєвим [135], важливим завданням школи стає виховання в учнів нахилів до самостійного та творчого засвоєння все нових і нових наукових понять. Ці нахили неможливо виховати, розвиваючи тільки емпіричне мислення. Для цього необхідно розвивати також теоретичне мислення, яке по суті є діалектичним.

2. Теоретичний рівень формування понять. В процесі мислення школярі відображають внутрішні зв'язки і закономірності об'єкта, виходять за межі даного в досвіді зовнішнього представлення, що сформувалось на емпіричному рівні. В учнів з допомогою системи означень та описів формуються наукові математичні поняття. Учні не тільки відтворюють словесне формулювання означень стереометричних понять, але і пояснюють, як вони утворені, в яких формах і способах діяльності вони отримані. Вони розуміють внутрішню логіку стереометрії; вміють розміщувати послідовно навчальний матеріал, який

вивчається; правильно співвідносять одні факти, поняття і правила з іншими фактами, поняттями і правилами; розуміють систему предмета, його важливі ідеї та закономірності; усвідомлюють вивчений матеріал, правильно і впевнено проводять міркування, вміють відповідати на видозмінені питання, застосовують теоретичні знання до пояснення і розв’язання нових питань. Цьому рівню відповідає теоретичне мислення.

Визначаючи загальну задачу теоретичного мислення, В.В. Давидов підкреслює, що вона “полягає в тому, щоб дані споглядання і уявлення перетворювати у формі понять, і тим самим всебічно відтворювати систему внутрішніх зв’язків, що породжують дану конкретність, розкривати її суть” [78, с. 207].

Теоретичне мислення відображає внутрішні зв’язки між об’єктами та закони їх руху. Основу мислительної діяльності учнів при теоретичному мисленні складає особлива форма аналізу через синтез, яка полягає в наступному: аналіз, виконуваний на певному, конкретному факті або на конкретній задачі, разом з тим розкриває внутрішній зв’язок, який лежить в основі багатьох часткових проявів цього факту або задачі.

Теоретичному мисленню відповідає етап раціональної сходинки пізнання, яка коротко виражається як “сходження від абстрактного до конкретного засобами мислення”. Розвиток теоретичного мислення дозволяє учням значно швидше виявляти суттєві властивості об’єктів, загальні закономірності їх поведінки і визначати це у формі понять.

Розвиток в учнів теоретичного мислення підвищує науковий рівень змісту освіти, сприяє послідовному проведенню в життя принципу науковості, що висувається в дидактиці.

Л.С. Виготський [55], С.Л. Рубінштейн [205] та ін. базувались на тому, що засвоєння розумових операцій, що складають прийом, проходить в процесі оволодіння конкретним навчальним матеріалом. Суть цього емпіричного підходу до формування прийомів евристичної діяльності полягає в припущенні, що процес оволодіння знаннями є одночасно і процесом формування прийомів евристичної діяльності. При цьому засвоєння цих прийомів не включається в структуру знань як особливий предмет.

У свою чергу емпіричний та теоретичний рівні пов’язані з рівнями навчальних досягнень учнів, що розглядаються нами, наступним чином: на середньому рівні переважає емпіричний рівень навчальних досягнень; на достатньому – емпіричний рівень поєднується з теоретичним; на високому – переважає теоретичний рівень навчальних досягнень.

Вагомий внесок стосовно розуміння умов організації й управління евристичною діяльністю був зроблений наприкінці XIX ст. під час розробки психо-фізіологічних основ умовно-рефлекторної теорії Л.І. Божович [29], Д.Н. Богоявленським [25], Ю.А. Самаріним [207].

Навчання, відповідно до цієї теорії, розглядається як стимулювання пізнавальної і дослідницької активності учнів у процесі організації їхньої практичної діяльності. Важливим на сьогодні в даній теорії і застосованим в організації і управлінні евристичною діяльністю є зовнішній стимул активності евристичної діяльності, який з даних позицій здійснюється не інакше, як через висування навчальних проблем, постановку цілей. Слід пам’ятати, що найбільш сприятливі умови для евристичної діяльності отримуватимуться тоді, коли зовнішній стимул буде поєднуватися із внутрішніми стимулами самого учня.

На основі асоціативно-рефлекторної теорії одержали обґрунтування психологічні механізми навчання, засвоєння знань та умінь в розробках Ю.А. Самаріна [207], С.Л. Рубінштейна [204], Д.Н. Богоявленського [26], Н.А. Менчинської [150] та інших.

В даних працях зазначається, що центральним поняттям при аналізі діяльності є асоціація. “Ми вважаємо, – пишуть Д.Н. Богоявленський і Н.А. Менчинська, – що основним простішим елементом пізнавального процесу є асоціація, а основне завдання наших досліджень полягає в тому, щоб вивчити, яким чином асоціації та їх системи утворюються в умовах навчання” [26, с. 11 – 12]. Ю.А. Самарін вважає, що аналітичною одиницею в психології є відчуття.

Асоціацію він вважає механізмом діяльності: “Асоціація – є зв’язок психічних процесів, від самих простих до найбільш складних” [207, с. 383].

Мислительна діяльність учнів, на думку авторів даної теорії, проходить в двох напрямках. По-перше, здійснюється розчленування знань, при цьому відбувається виділення їх суттєвих сторін. Цей процес вони позначають як процес диференціації знань. По-друге, проходить систематизація знань, яка виражається в поєднанні та узагальненні окремих, раніше роз’єднаних ознак. Цей процес вони називають систематизацією знань, вона проходить на основі диференціації.

Н.Ф. Тализіна під час обґрунтування психологічних основ формування розумових дій дає розгорнутий критичний аналіз асоціативно-рефлекторної теорії. Вона зазначає, що “вибір асоціації як одиниці аналізу процесу засвоєння є неправильним – це закриває шлях до аналізу засвоєння як процесу, так і послідовної зміни якісно своєрідних етапів пізнавальної діяльності учнів” [238, с. 199].

На нашу думку, сприятливою дидактичною умовою формування евристик, з погляду асоціативно-рефлекторної теорії, є така: кожне евристичне завдання повинно бути зв’язане з попереднім, якщо не в плані змістовному, то в плані процесуальному, тобто в прийомах і процедурах діяльності повинні простежуватись наступність і зв’язок.

Ю.А. Самарін у своїй теорії ставить таку задачу: “Визначити, хоча б схематично, деякі етапи у формуванні знань, а тим самим у розумовій діяльності школярів у розумінні переходу від окремих асоціацій і часткових асоціативних систем до все більш узагальнених асоціативних систем” [207, с. 388].

Передусім відмітимо, що етапи формування розумової діяльності не можуть бути зведені до етапів формування знань: в склад розумової, як і будь-якої іншої психічної діяльності, обов’язково входить певна система дій суб’єкта. Більше того, процес утворення асоціацій того чи іншого виду, як і перехід на наступний етап, може осмислюватись в своєму специфічно психологічному вираженні тільки через аналіз дій суб'єкта, направлених на ті предмети, знання про які повинні бути сформовані. Д.Н. Богоявленський і Н.А. Менчинська в якості етапів засвоєння беруть етапи становлення аналітико-синтетичної діяльності головного мозку [26].

Важливими психологічними закономірностями процесу засвоєння, обґрунтованими асоціативно-рефлекторною теорією, є наступні: навчання являє собою аналітико-синтетичну діяльність; в основі процесу засвоєння лежить системність психічної діяльності.

У своїй праці В.В. Давидов показав існування значних невикористаних резервів у розвитку теоретичного мислення учнів на основі формування в них змістовного узагальнення, що є значним внеском у розумінні активного навчання, деякі з елементів якого використовуються для організації евристичної діяльності [78].

В роботі П.Я. Гальперіна, Н.Ф. Тализіної [60] та ін. розкрито зміст концепції "поетапного формування розумових дій і понять".

Згідно цієї теорії навчання зводиться до засвоєння орієнтирів діяльності і розумових дій для її планування і здійснення. Для повноцінного формування будь-якого знання і уміння необхідно: 1) створення мотивації; 2) пояснення і виділення схеми орієнтованої основи дій, тобто поділ дії на елементарні операції, що доступні учню; 3) формування дії в матеріальній або матеріалізованій формі; 4) формування дії з допомогою усної мови без опори на матеріальні засоби; 5) формування дії з допомогою внутрішньої мови; 6) перехід дії у внутрішні мову, в розумову дію.

Згідно теорії поетапного формування розумових дій виділяють три основні типи орієнтовних основ діяльності:

1-й тип: учню дають зразок дії і називають її результат, але без вказівок, як виконувати дану дію. Учень сам шукає правильний спосіб розв'язання методом спроб і помилок і в кінці кінців може навчитись виконувати розумову дію правильно, але міцна навичка в нього не створюється, та навіть під час несуттєвої зміни умови задачі він не може виконати цю дію, не вміє перенести її на нові знання. Вчитель, працюючи за першим типом орієнтування, по суті, сам програмує помилки учнів у виконанні дії, тому йому приходиться займатись перевчанням, довчанням, а не правильним навчанням [128].

2-й тип: учню даються всі вказівки, як правильно виконувати дії або завдання, тобто готовий алгоритм дії.

При строгому виконанні вказівок, що даються вчителем, навчання проходить в принципі без помилок і значно швидше, ніж при 1-му типі орієнтування. При кожному повторенні дії пункти алгоритму або системи орієнтирів, що складені попередньо самим вчителем, виступають для учня опорними точками, необхідною умовою правильного виконання дії.

3-й тип: на перше місце виступає навчання не стільки способу дії, скільки аналізу ситуації. Вчитель спеціальним чином організовує з учнями такий поглиблений аналіз розв'язування задачі, що вони самостійно складають узагальнену схему або алгоритм розв'язування.

Третій етап орієнтування, на думку психологів, вимагає набагато глибшого переосмислення навчальних предметів, виділення основних одиниць матеріалу, розробки методу їх аналізу, особливо блоків знань, основних типів задач.

В теорії поетапного формування розумових дій розглядається ідея інтеріоризації. Вона дає значний ефект на практиці для управління засвоєнням знань і розумових дій. Але це досягається на основі домінування прямого й оперативного управління. Зазначимо, що психологи визнають інтеріоризацію як єдиний можливий шлях керівництва засвоєнням та інтелектуальним розвитком.

У своїй роботі Б.Г. Ананьєв [5] зазначає, що психічним процесам інтелектуального розвитку в однаковій мірі відповідають й інтеріоризація, й екстеріоризація. “Екстеріоризація генетично залежить від розвитку інтеріоризації і на окремих рівнях інтелектуального й практичного розвитку екстеріоризація сама починає впливати на процес засвоєння”, – пише автор [5, с. 138].

Дослідження показують, що елементом аналізу повинні виступати відповідні процесуально-змістовні компоненти конкретних видів навчальної діяльності, які розкривають її розвиток. У роботах Н.Ф. Тализіної [237], П.Я. Гальперіна [59], А.М. Леонтьєва [135], Л.Б. Ітельсона [102], Д.Б. Эльконіна [274] одиницею аналізу виступає відокремлена "дія" відповідного виду навчальної діяльності. З іншого боку, в роботах І.Я. Лернера [136], Б.І. Коротяєва [122], В.І. Загвязинського [90], які користуються структурно-функціональним підходом до аналізу навчальної діяльності, за одиницю аналізу береться більш ширший компонент – "прийом" навчальної діяльності.

Частина прийомів використовується в аналітичній діяльності учнів і носить алгоритмічний характер. Інша частина – в евристичній діяльності, і дані прийоми подані у вигляді загальних схем і орієнтирів, наприклад, загальна схема розв'язування задач (Д. Пойа [182]), культура пошуку розв'язання невідомої задачі (Л.М. Фрідман [252]).

Педагоги і методисти справедливо вбачають нові можливості розвитку дітей з різними рівнями здібностей в диференційованому навчанні. Відомо, що у вивченні курсу стереометрії використання завдань, які містять в собі варійовані за рівнем знань завдання, відкриває широке поле діяльності вчителя для реалізації проблеми диференційованого навчання.

Диференційовані завдання є інструментом формування стереометричних понять, розвитку мислення учнів, їх самостійності, засобом контролю якості та глибини засвоєння предмета. Вони сприяють зменшенню формалізму в знаннях учнів [157].

При формуванні евристичних прийомів щодо розв'язування стереометричних задач, засвоєнні теоретичних положень можлива групова робота учнів, в кожній з цих груп є учні різних рівнів математичної підготовки. Ефективність навчальної діяльності в неоднорідних групах досягається за рахунок збільшення взаємодії між учнями і між учнями та вчителем.

Останнім часом зростає роль вчителя в процесі індивідуальної роботи учнів, коли вчитель виступає як порадник і помічник у розв’язуванні задач. Індивідуальна робота учнів при цьому розглядається як їх самостійна робота під керівництвом або з допомогою вчителя і організовується в двох варіантах: 1) учні отримують однакове завдання, але різної міри індивідуальну допомогу вчителя на окремих етапах їх діяльності; 2) учні працюють із завданнями різного рівня складності.

Від певних дидактичних цілей уроку, особливостей класу, від позицій вчителя залежить вибір тієї чи іншої форми навчання (колективної, індивідуальної, групової, парної).

Оскільки будь-яка діяльність в якості невід’ємних компонентів має організацію, стимулювання і контроль, то і методи навчання розділяють на три групи:

– методи організації навчально-пізнавальної діяльності;
– методи стимулювання навчально-пізнавальної діяльності;
– методи контролю за ефективністю навчально-пізнавальної діяльності [12, с. 127].

Кожна з названих груп методів складається з цілого ряду конкретних методів навчання. Так, при організації навчально-пізнавальної діяльності застосовуються, в першу чергу, словесні методи (розповідь, лекція, бесіда та ін.), наочні методи (демонстрація приладів, показ ілюстрацій та ін.), практичні методи (вправи, задачі, досліди, трудові дії та ін.). Всі ці методи забезпечують передачу навчальної інформації вчителем та сприйняття її учнями засобами спостереження, практичних дій. Дану групу методів також поділяють на проблемно-пошукові та репродуктивні методи, маючи на увазі, як здійснюють учні засвоєння навчального матеріалу – шляхом самостійних роздумів над проблемними ситуаціями або ж репродуктивного запам’ятовування навчальної інформації, що оголошується вчителем.

До методів стимулювання і мотивації навчання можна віднести метод пізнавальної гри, метод навчальних дискусій, метод заохочення, метод створення ситуацій успіху в навчанні.

Основним завданням даного дослідження є питання про шляхи формування евристичних прийомів. Спільними зусиллями педагогів, психологів, методистів-математиків реалізуються ідеї про цілеспрямоване навчання прийомам евристичної діяльності. Необхідною умовою сформованості цих прийомів в учнів є розвиток їх мислення [240], [244].

Існує два шляхи оволодіння учнями прийомами евристичної діяльності – опосередкований і безпосередній. В першому випадку прийоми спеціально не вивчаються, їх формування проходить при засвоєнні знань, в процесі розв'язування задач і т.д. При цьому вони залишаються недостатньо усвідомленими, недостатньо узагальненими і обмеженими в своєму застосуванні. В другому випадку прийоми евристичної діяльності виступають предметом спеціального вивчення і засвоєння.

На думку В.Н. Осинської [171], в процесі навчання постійно поєднуються прямий і непрямий шляхи формування прийомів, але ведучим завжди був прямий шлях, а непрямий виступає ніби фоном, що забезпечує пропедевтику в засвоєнні деяких прийомів, навчання яким надалі стає прямим.

У нашому дослідженні нами використовується як прямий, так і непрямий шляхи формування евристичних прийомів.

Відмінність цих шляхів полягає в тому, що непрямий шлях переважно створює тільки умови для формування стереометричних понять, в той час як прямий шлях безпосередньо їх формує [171]. В навчальному процесі обидва ці шляхи виступають в єдності, яка породжує деякі перехідні варіанти, що включають ознаки першого і другого шляхів. Одним з таких варіантів є методика формування прийомів розумової діяльності, яку пропонує Е.Н. Кабанова-Меллер [104]. При формуванні прийомів емпіричного мислення старшокласників часто доцільно застосовувати такий варіант, який містить обидва ці шляхи. Характерним для нього є те, що в центрі уваги знаходяться визначені прийоми розумової діяльності, але структура цих прийомів учням чітко не задається. Тому вони в багатьох випадках ставляться в умови самостійного знаходження тієї чи іншої структури в загальному змісті здійснюваної діяльності.

Той же змістовний підхід до засвоєння прийомів розумової діяльності характеризує і прихильників формування мислення через систему спеціально підібраних пізнавальних задач (І.Я. Лернер [137] та ін.). Хоча автори і виходять з більш складного розуміння знання, в структуру якого вони включають методологічні знання як компонент навчального змісту, що підлягає спеціальному засвоєнню, цей шлях теж характеризується як непрямий, і формування прийомів розумової діяльності виступає як продукт процесу оволодіння знаннями.

Концепції засновників теоретичного напрямку (Г.Я. Гальперін [57], А.І. Раєв [198] та ін.) ґрунтувались на ідеї про те, що оволодіння конкретними знаннями вимагає спеціально організованого навчання прийомам і способам учіння. Теоретично обґрунтовано і практично доведено, що формування поняття проходить в результаті аналітико-синтетичної діяльності з одночасним практичним закріпленням і засвоєнням.

На відміну від основних прийомів емпіричного мислення (порівняння, узагальнення та ін.), прийоми теоретичного мислення (аналіз, синтез, абстракція та ін.) не мають строго логічного опису і психологічних характеристик. Будемо вважати, що ці прийоми вихідні, тобто лежать в основі інших мислительних прийомів. Тому вони не можуть бути представлені як система більш часткових операцій. На думку психологів (Д.Н. Богоявленський, Н.А. Менчинська [26], С.Л. Рубінштейн [206] та ін.), можна помітити певну послідовність для цілеспрямованого їх формування через систему інших розумових дій.

В останні роки другий напрямок (Г.Я. Гальперін [57], А.І. Раєв [198] та ін.) набув найбільшого розвитку у зв’язку з реалізацією ідей кібернетики, методики програмованого навчання, інформаційних технологій. Педагоги, психологи, методисти приходять до єдиної думки відносно того, що інформація і розумові дії, з допомогою яких вона засвоюється, виступають в тісному зв'язку як дві сторони цілісного педагогічного процесу.

Зміст математичної діяльності складають специфічні і логічні прийоми мислення. В складі цієї діяльності можна виділити дві основні частини: систему предметних знань і систему операцій, необхідних для розв'язання стереометричних задач. А.А. Столяр в роботі [235, с. 56] виділяє три складові частини навчальної діяльності: 1) набір загальних логічних прийомів мислення; 2) набір специфічних для математики прийомів мислення; 3) система знань. Це означає, що проблема формування прийомів розумової діяльності в процесі навчання математики не може бути зведена до проблеми формування предметних знань. Крім того, прийоми розумової діяльності повинні виступати як предмет спеціального засвоєння, а не формуватись тільки по ходу засвоєння знань. Н.Ф. Тализіна підкреслює, що операційна сторона людського досвіду, необхідна для оволодіння будь-яким предметом, не міститься в самому предметі, але формується в процесі оволодіння ним [240, с. 60].

Прийоми евристичної діяльності можуть бути різного ступеня складності і узагальненості. Більш складний прийом складається з більшого числа дій, включаючи в себе інші прийоми як складові і т.д. Прийом діяльності називають узагальненим, якщо він отримується на основі аналізу "часткових" прийомів, шляхом виділення загального, незмінного змісту діяльності для розв'язання конкретних задач.

В процесі засвоєння геометрії старшими учнями необхідно навчати їх, в першу чергу, системі узагальнених прийомів, що застосовують в різних навчальних предметах. Дані прийоми будуть зустрічатись в більш спеціальних, чисто математичних, причому для останніх потрібні елементи логіки та математична символіка. Розвиток мислення через засвоєння елементів логіки служить складовою частиною формування узагальнених прийомів навчальної діяльності.

Завдання вчителя – сформувати тим чи іншим шляхом узагальнений прийом, оскільки він створює орієнтовну основу необхідної евристичної діяльності для розв’язання навчальних задач і забезпечує перенесення прийому на широке коло нових часткових задач.

Самостійне перенесення знань і прийомів діяльності в нову ситуацію – це рівень творчої діяльності. Організація навчання учнів перенесенню засвоєних прийомів виступає одним із шляхів навчання їх способам засвоєння досвіду творчої діяльності.

Прийоми навчальної діяльності повинні складати систему, адекватну системі матеріалу, який вивчається. Побудова такої системи виконується з допомогою класифікації прийомів навчальної діяльності.

Як зазначено в роботі З.І. Калмикової [107], у продуктивній, а значить, і в евристичній діяльності, в тісній взаємодії перебувають різні її компоненти (і практичні, і образні, і понятійні), а перевага одного із них визначається особистими особливостями психіки учнів. Отже, у навчанні повинен реалізовуватись принцип гармонійного розвитку різних видів мислення.

С.П. Семенець в своїх дослідженнях [209] зазначає, що евристичні прийоми під час розв’язування нових задач використовують найбільш розвинені школярі, а потрібно формувати ці прийоми і в учнів, що навчаються на початковому і середньому рівнях.

У процесі навчання учні засвоюють прийоми із тих, що застосовує вчитель. Самі ж школярі, навіть старші, зазвичай не усвідомлюють їх.

Евристична діяльність передбачає відкриття нового. Для відкриття нового потрібно володіти раніше вивченим матеріалом, мати достатньо широкий фонд знань, яких досить для руху вперед і які знаходяться в стані готовності до актуалізації. Потрібна спеціальна організація мнемічної діяльності, щоб виконати цю вимогу. Тому організація такої діяльності – це ще один важливий принцип організації евристичної діяльності [47].

На стику реалізації ідей програмованого, проблемного та індивідуального підходів до організації процесу навчання знаходиться програмування евристичної діяльності як галузі психології.

Відстоюючи свої думки про визначеність процесу мислення, С.Л. Рубінштейн говорив: “Мислення визначається об’єктом, але не безпосередньо, а через внутрішні закономірності розумової діяльності – аналіз, синтез, узагальнення та ін., що перетворюють чуттєві дані, де суттєві властивості об’єкта не виступають у чистому виді” [204, с. 95].

Таке розуміння принципу детермінізму стосовно організації й управління евристичною діяльністю орієнтує на те, що було б невірно розглядати даний вид навчальної діяльності тільки як процес самостійного відкриття учнем нового знання чи надати особливої ролі зовнішнім факторам і умовам керуючих педагогічних впливів.

Таке ставлення до аналізу евристичної діяльності орієнтує на те, щоб розглядати її як відображально-перетворювальний процес. Відображення і перетворення відбувається не тільки змістом навчального матеріалу, але й тим, що сама діяльність активно перетворює і розвиває учня.

В дидактичному дослідженні В.І. Андрєєва предметом є “взаємозв’язок і відношення процесу викладання та учіння у створеній системі евристичного програмування навчально-дослідницької діяльності, а також результати функціонування цієї системи” [6, с. 10]. Загальною гіпотезою автора стало припущення про те, що ефективно управляти навчально-дослідницькою діяльністю і розвивати дослідницькі якості особистості можна, спираючись не на алгоритмічні, а на евристичні засоби.

В психолого-педагогічній літературі ([3], [7], [13], [55], [215]) досить точно обґрунтовано положення про те, що в процесі навчання необхідно виділяти два самостійних, але взаємопов’язаних завдання: оволодіння учнями змістом того чи іншого предмета і ціленаправлене формування в них прийомів розумової діяльності (Д.Н. Богоявленський, А.І. Раєв, В.Ф. Паламарчук та ін.).

Формування в учнів прийомів розумової діяльності, уміння вчитись – завдання, яке необхідно розв’язувати на всіх етапах навчання, починаючи з раннього шкільного віку. Але особливої уваги в цьому плані потребують старшокласники, в яких мислення з емпіричного рівня переважно переходить на теоретичний, і тому сильніше проявляються не тільки прогалини в знаннях, але й відсутність сформованих раціональних способів роботи. Тому необхідно спеціально формувати у школярів такі прийоми.

Отже, психологія і дидактика, які мають у цьому випадку спільний об’єкт дослідження – навчальну діяльність, виділяють різні предмети й застосовують відповідно до предмета дослідження й різні методи наукового пошуку.

Для сприйняття психічних механізмів навчальної діяльності необхідний мікроаналіз цього процесу. Отже, за одиницю аналізу психологи часто вибирають і більш “дрібний структурний елемент навчальної діяльності – “дію”. Дидакти ж, навпаки, одиницею аналізу найчастіше вибирають більш великий компонент – “прийом” навчальної діяльності. В нашому дослідженні одиницею аналізу виділяється “прийом” евристичної діяльності, а конкретніше – “евристичний прийом”, що лежить в основі “евристичної дії”.

Н.Ф. Тализіна досліджувала можливості застосування способів управління, встановлених кібернетикою, та зробила висновок про те, що “для процесу навчання характерне циклічне управління, під час здійснення якого необхідно: вказати загальні й проміжні цілі оптимального управління; визначити програму оптимальних впливів; організувати за певною системою параметрів одержання інформації про стан керованого процесу, тобто забезпечити інформацією, отриманою через канал зворотного зв’язку, вироблення регулюючих впливів і їхню реалізацію” [239, с. 12]. Це питання досить докладно розглядається в роботах багатьох авторів: А.М. Матюшкіна [147], В.П. Беспалько [20] та ін.

Виходячи з даних досліджень, приходимо до висновку, що ідеї кібернетичного підходу до управління діяльністю повинні застосовуватись диференційовано, з урахуванням особливостей процедур навчання, що організуються, його цілей [21]. Разом з тим, якщо здійснити таку диференціацію, то для цілей оптимізації дидактичних умов евристичної діяльності необхідно: створити систему перспективних і найближчих цілей евристичної діяльності; визначити рівень знань і умінь учнів щодо виконання відповідного евристичного завдання; розробити систему оптимальних за рівнем проблемності евристичних завдань, що постійно ускладнюються; організувати отримання інформації для вчителя і для учня про успішність розв'язання евристичного завдання на його найбільш важливих етапах, про просування в розвитку відповідних знань і дослідницьких умінь; передбачити систему необхідної і достатньої допомоги та створити оптимальні умови для її індивідуального використання тільки у випадку труднощів під час виконання відповідних етапів евристичного завдання.

У роботі [198] зазначається, що важливою умовою у формуванні умінь і навичок мислительної діяльності в учнів є розуміння суті тієї чи іншої мислительної операції, вміння свідомо застосовувати її на практиці. Показник засвоєння розв'язання будь-якого питання – вміння учня, що розв'язує, із множини різноманітних розв'язків виділити потрібний, пояснити його значимість в даній ситуації.

Ці обставини дозволяють проводити дослідження, пов'язані з мислительними операціями, з різних позицій:

1) можна, спираючись на знання, формувати в учнів ті чи інші операції мислення;
2) спираючись на мислительні операції, які відомі учням, "озброювати" їх знаннями – тут операції виступають в якості прийомів;
3) спираючись на знання і операції одного рівня розвитку, або вдосконалювати мислительні операції, або "озброювати" знаннями, або робити і те, і інше, тобто одночасно розвивати мислительні операції і "озброювати" знаннями більш високого рівня.

Дослідженнями психологів [14], [28], [77], [133], [136], [187], [197], встановлено: формування прийомів алгоритмічного типу – необхідна, але недостатня умова розвитку мислення. Вона необхідна тому, що, по-перше, сприяє вдосконаленню репродуктивного мислення, яке є важливим компонентом творчої діяльності, і, по-друге, ці прийоми є тим фондом знань, на основі яких учень може розв'язувати нові для нього задачі, оволодівати більш складними прийомами мислительної діяльності. Вона недостатня тому, що алгоритмічна діяльність не вичерпує творче мислення. Тривалі вправи по розв'язуванню задач на основі алгоритмів формують установку на дію за готовим зразком, копіюють пошук рамками вже відомих прийомів, створюють "бар'єр минулого досвіду". Тому формування таких прийомів повинно поєднуватись із спеціальним навчанням прийомам евристичної діяльності старшокласників.

Як зазначається в роботі [171], багато прийомів неможливо виразити в строгому переліку дій, вони характерні більше для евристичної діяльності, яка не володіє строгою послідовністю операцій мислення. Такими є основні прийоми теоретичного мислення і основані на них загальні схеми та орієнтири. Проведений поділ служить інструкцією по створенню педагогічних умов для формування як окремих прийомів, так і їх систем в цілому.

Узагальнюючи результати досліджень психологів ([56], [58], [102], [135], [149], [178], [185], [193], [197]), методистів ([104], [162], [179], [215]), наших експериментальних даних, можна виділити основні етапи навчання прийомам евристичної діяльності:

- усвідомлення задачі, розв'язання якої потребує застосування певного прийому;
- усвідомлення необхідності оволодіння цим прийомом;
- засвоєння змісту прийому, послідовності виконання відповідних операцій;
- виконання вправ, спрямованих на відпрацювання операційного складу прийому;
- самоконтроль за рівнем оволодіння прийомом;
- застосування прийому у стандартних і нестандартних ситуаціях;

- поглиблення та узагальнення прийому.

Як показало наше дослідження, засвоєння учнями окремих прийомів евристичної діяльності здійснюється дедуктивно-індуктивним шляхом, в якому велику роль відіграє пояснення вчителем операційного складу прийому, його значення на різних етапах процесу навчання, області застосування. Це визначає таку послідовність їх формування:

1) створення проблемної ситуації;
2) суть прийому, значення прийому;
3) операційний склад;
4) роздільне відпрацювання операцій;
5) узагальнення операцій і складання орієнтовної основи дій (ООД);
6) навчання учнів перенесенню прийому на новий матеріал.

В процесі формування прийомів вчитель стикається з рядом проблем: недостатнє засвоєння матеріалу за минулі роки деякими учнями, низький рівень праці через відсутність багатьох знань і умінь пізнавальної діяльності, невисока якість засвоєння нового матеріалу і низький інтерес учнів до предмета, що є наслідком, як правило, перших двох проблем. Щоб розв'язати на уроці в єдності завдання формування в учнів прийомів евристичної діяльності і засвоєння ними системи знань, доцільно попередньо розробити плани з окремих тем. Це дозволяє орієнтовно виділити наскрізні лінії у формуванні кожного прийому, виявити можливості створення проблемних ситуацій, намітити спеціальну роботу для середніх і слабких учнів, знайти час, способи контролю і обліку знань і умінь розумової діяльності, надбаних паралельно із системою знань по темі, орієнтовно намітити систему питань, вправ або задач, спеціально направлених на формування прийомів.

Значні можливості для диференційованого формування прийомів евристичної діяльності учнів має широке застосування педагогічних програмних засобів (ППЗ) у навчальному процесі. Великий вплив на навчання стереометрії може спричинити цільове навчальне використання вітчизняного програмного засобу GRAN-3D, створеного на кафедрі інформатики НПУ імені М.П. Драгоманова [88]. Використання подібних програм дає можливість у багатьох випадках зробити розв’язування задач настільки ж доступним, як і просте розглядання рисунків чи інших графічних зображень.

На основі проведеного дослідження було зроблено такі висновки:

- для диференційованого формування прийомів евристичної діяльності учнів доцільно використовувати комп’ютер, звертаючи увагу на вік та рівень розумового розвитку учнів;
- цілеспрямоване і систематичне використання ППЗ у процесі навчання стереометрії створює необхідні умови для інтенсифікації евристичної діяльності й гуманізації навчального процесу, диференціації навчання, сприяє розкриттю творчого потенціалу вчителя й учнів;
- ППЗ навчання з урахуванням системи психолого-дидактичних і методико-психологічних закономірностей розкривають широкі можливості активізації і розвитку евристичної, інтелектуально-творчої діяльності учнів.

Нами обґрунтовано, що основні розумові дії доцільно розглядати як евристичні прийоми загального виду, необхідно диференційовано формувати ці прийоми, оскільки вони сприяють розвитку пізнавальної активності і продуктивного мислення школярів та є основою диференційованого формування їх навчально-пізнавальної евристичної діяльності, сприяють кращому засвоєнню матеріалу, що вивчається, та розвивають інтерес до вивчення математики, активізують евристичну діяльність старшокласників.

ВИСНОВКИ ДО І РОЗДІЛУ

У першому розділі дисертації систематизовано і узагальнено теоретичні засади методичної системи диференційованого формування прийомів евристичної діяльності старшокласників на уроках стереометрії:

- проаналізовано стан даної проблеми в теорії і практиці навчання стереометрії, обґрунтовано, що психолого-методичними засадами диференційованого формування евристичних прийомів є основні психологічні теорії навчання, розвитку і виховання учнів загальноосвітніх навчальних закладів;
- встановлено, що евристичні прийоми повинні бути складовою сучасних технологій навчання;
- визначено зміст і операційний склад прийомів евристичної діяльності у процесі вивчення стереометрії;
- виділено загальні (порівняння і аналогія, узагальнення і конкретизація, аналіз і синтез) і спеціальні (введення допоміжних величин: а) допоміжного відрізка; б) допоміжного кута; введення допоміжних побудов, введення допоміжних задач, переформулювання задач) евристичні прийоми, якими мають оволодіти старшокласники в процесі вивчення курсу стереометрії, враховуючи емпіричний та теоретичний рівні навчальної діяльності учнів;
- встановлено, що використовувати ППЗ GRAN-3D доцільно для підвищення ефективності диференційованого формування прийомів евристичної діяльності старшокласників у процесі вивчення стереометрії;
- зроблено концептуальний висновок щодо методики навчання – необхідним є забезпечення взаємозв’язку змістового і процесуально-операційного аспектів у формуванні прийомів: врахування при формуванні прийомів особливостей певного рівня навчальних досягнень учнів і навпаки.

РОЗДІЛ ІІ

МЕТОДИКА ДИФЕРЕНЦІЙОВАНОГО ФОРМУВАННЯ ПРИЙОМІВ ЕВРИСТИЧНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ СТАРШОКЛАСНИКІВ

2.1. Принципи відбору диференційованих завдань з стереометрії для формування прийомів евристичної діяльності учнів

Диференційоване формування прийомів евристичної діяльності учнів передбачає використання системи диференційованих вправ. Дослідження показало, що відбір вправ має враховувати такі принципи: відповідність завдань критеріям оцінювання навчальних досягнень учнів, відповідність завдань логічній структурі навчального матеріалу, орієнтація на цілеспрямоване і систематичне використання прийомів евристичної діяльності, диференційована реалізованість, повнота системи вправ, протиставлення в підборі системи завдань, а також дидактичні принципи навчання (наочність, науковість, доступність, свідомість). Розкриємо зміст цих принципів.

Принцип відповідності завдань критеріям оцінювання навчальних досягнень учнів

Принцип полягає в тому, що система завдань повинна бути структурована за складністю відповідно критеріїв оцінювання навчальних досягнень учнів з математики [119] та відповідати їх навчальним особливостям.

Однак, результати констатувального експерименту показали, що перехід до нової системи оцінювання навчальних досягнень учнів носить, на жаль, формальний характер. Це пояснюється тим, що задачі в шкільних підручниках з математики не складені відповідно до чотирьох рівнів (початковий, середній, достатній, високий) навчання, що унеможливлює перехід на 12-бальну шкалу оцінювання.

Згідно критеріїв оцінювання навчальних досягнень учнів на середньому рівні в результаті вивчення навчального матеріалу учень називає математичні об’єкти, але тільки в тому випадку, коли цей об’єкт запропонований йому безпосередньо, відтворює інформацію, операцію, дії, засвоєні ним в процесі навчання.

Задачі середнього рівня складені з урахуванням вимог, які ставляться до учнів на цьому рівні (див. с. 69).

Наприклад, для формування прийомів порівняння і аналогії пропонуємо задачі такої складності: “Сформулюйте і порівняйте означення призми і піраміди. Чи мають згадані многогранники схожі властивості?” Відтворивши означення цих многогранників, учень називає їх спільні властивості. Розглядаючи задачу “Пригадайте властивість діагоналей паралелограма. Сформулюйте аналогічну властивість для паралелепіпеда”, учень, згадавши властивість “Діагоналі паралелограма перетинаються і точкою перетину діляться пополам”, за аналогією формулює властивість “Діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці і точкою перетину діляться пополам”.

На достатньому рівні учні мають вміти виконувати математичні операції, послідовність яких їм знайома, але зміст та умови виконання змінені. Тому завдання достатнього рівня рекомендується складати таким чином, щоб при їх розв’язуванні учень міг виробити вміння:

- застосовувати означення геометричних понять та їх властивості для розв’язання завдань в знайомих або змінених ситуаціях;
- знаходити залежності між елементами геометричних фігур.

Наприклад, для формування прийомів узагальнення і конкретизації на достатньому рівні пропонуємо таку задачу: “Доведіть, що відрізки, які з’єднують середини протилежних ребер а) правильного тетраедра, б) правильної трикутної піраміди, в) довільної трикутної піраміди, перетинаються в одній точці”.

При відборі задач високого рівня ми враховували те, що на цьому рівні учень:

- усвідомлює нові для нього властивості геометричних фігур, ідеї, використовує набуті знання і вміння в незнайомих для нього ситуаціях;
- варіативно мислить і раціонально знаходить спосіб розв'язання задачі;
- розв'язує нестандартні задачі у межах вимог навчальної програми.

Високий рівень в експериментальній методиці складають задачі, умови і вимоги яких безпосередньо не відповідають означенням і теоремам. Щоб розв'язати такі задачі, учневі потрібно проаналізувати їх умову і вимогу; вивести наслідки з умови; відшукати достатні умови для виконання вимоги; вибрати найбільш значиму властивість для розв'язання задачі; знайти допоміжні елементи; ввести в хід міркування нові об'єкти.

Наприклад, для вироблення прийомів аналізу і синтезу доцільно пропонувати учням задачі такої складності:

"В правильній чотирикутній піраміді бічне ребро рівне b, а двогранний кут при основі – α. Знайдіть бічну поверхню піраміди".

Дослідження показало, що дотримання відповідності завдань критеріям оцінювання навчальних досягнень учнів дає змогу не лише диференційовано сформувати в учнів прийоми евристичної діяльності, але і повторити, закріпити, систематизувати вивчений матеріал.

Принцип відповідності завдань логічній структурі навчального матеріалу

Будь-який відрізок навчального матеріалу характеризується логічною структурою, а успішне оволодіння матеріалом залежить від того, як в процесі навчання враховані взаємозв'язки цієї структури. У зв'язку з цим учитель повинен оволодіти окремими методами аналізу відповідності завдань та зв'язку між їх елементами, а також вміти використовувати ці методи під час формування відповідних знань.

Розглянемо аналіз логічної структури навчального матеріалу для 11 класу у підручнику О.В. Погорєлова [181] з теми „Многогранники". Складемо список понять, які тут розглядаються:

1. Двогранний кут. 2. Ребро двогранного кута. 3. Лінійний кут двогранного кута. 4. Тригранний кут. 5. Многогранний кут. 6. Многогранник. 7. Опуклий многогранник. 8. Грані многогранника. 9. Ребра многогранника. 10. Вершини многогранника. 11. Призма. 12. Властивість основ призми. 13. Властивість бічних ребер призми. 14. Поверхня призми. 15. Бічна поверхня призми. 16. Висота призми. 17. Діагональ призми. 18. Діагональний переріз призми. 19. Пряма призма, похила призма. 20. Правильна пряма призма. 21. Площа бічної поверхні призми (Т. 5.1.). 22. Площа повної поверхні призми. 23. Паралелепіпед. 24. Властивість протилежних граней паралелепіпеда (Т. 5.2.). 25. Властивість діагоналей паралелепіпеда (Т. 5.3.). 26. Властивість точки перетину діагоналей паралелепіпеда (наслідок з Т. 5.3.). 27. Прямокутний паралелепіпед. 28. Властивість діагоналі прямокутного паралелепіпеда (Т. 5.4.). 29. Піраміда. 30. Основа, вершина піраміди. 31. Бічні ребра, висота піраміди. 32. Тетраедр. 33. Діагональний переріз піраміди. 34. Властивість площини, яка паралельна основі піраміди і перетинає її (Т. 5.5.). 35. Зрізана піраміда. 36. Правильна піраміда. 37. Апофема піраміди. 38. Бічна поверхня піраміди. 39. Властивість бічної поверхні правильної піраміди (Т. 5.6.). 40. Правильний опуклий многогранник. 41. Типи правильних опуклих многогранників.

Щоб мати найбільш повну інформацію про виклад навчального матеріалу, корисно встановити, скільки разів той чи інший навчальний матеріал використовується для розв’язування задач, які містяться у підручнику.

Складемо відповідний граф, основними елементами якого будуть означення, властивості, що зображаються кружечками, та логічні зв’язки між ними, що зображаються стрілками (Рис. 2.1).

Звернемо увагу на те, що окремі елементи знань навчального матеріалу в даному графі мають декілька стрілок, що до них підходять і відходять від них. Так, до кружечка 20 – правильна пряма призма – підходять 2 стрілки, а відходить від нього лише одна. Це означає, що вказаний навчальний матеріал вивчається за допомогою означення призми (11), прямої і похилої призм (19), а сам сприяє вивченню площі бічної поверхні призми (21). Однак є й такі елементи 28, 39, з яких стрілки не виходять. Це свідчить про те, що або деякий зв'язок, або знання, що відповідають їм, використовуються в недостатній мірі для закінчення вивчення навчального матеріалу в цілому.

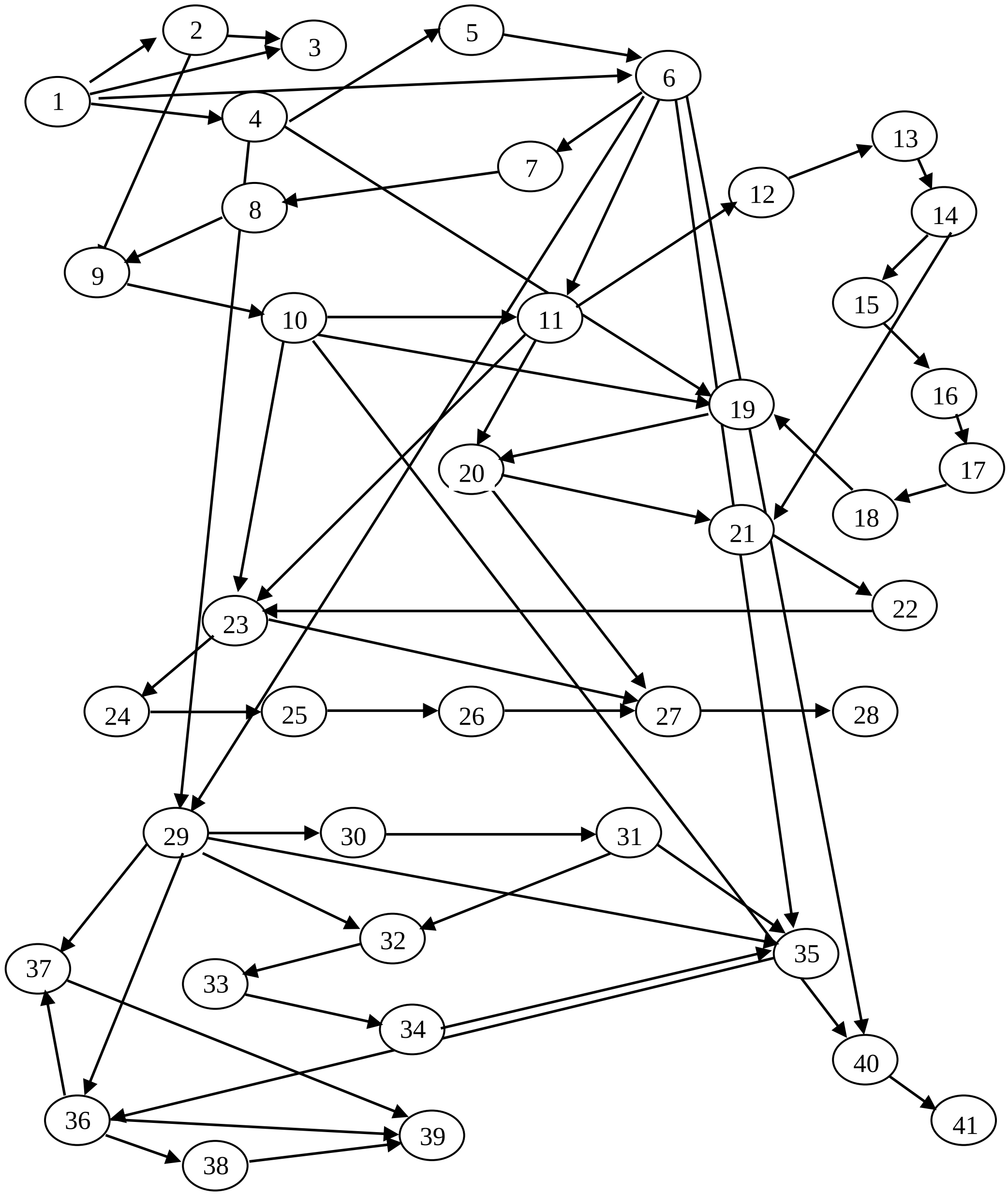


Рис. 2.1

На уроках стереометрії вчителі часто з метою повторення раніше вивченого матеріалу опитують учнів. Для цього вони використовують матеріал, який вивчався на попередніх заняттях.

Наприклад, в кружечок 35 входить три стрілки з кружечків 6, 29, 34. Тому перед вивченням зрізаної піраміди (35) потрібно повторити означення многогранника (6), означення піраміди (29) та властивість площини, яка паралельна основі піраміди і перетинає її (34).

Таким чином, в процесі вивчення нового матеріалу буде повторюватись раніше вивчений матеріал.

Враховуючи все це, потрібно більше повторювати як ті поняття, означення, що позначені на рис. 2.1 і з яких виходить тільки одна стрілка, так і ті означення, з яких на даному рисунку стрілки не виходять, якщо до того ж в задачах вони використовуються рідко.

Наприклад, розв’язуючи задачу середнього рівня “Знайдіть повну поверхню правильної шестикутної призми з стороною a і висотою b”, учень має використати такі питання стереометрії: правильна шестикутна призма, її елементи, формула повної поверхні призми і такі питання планіметрії: формула площі рівностороннього трикутника, поняття правильного шестикутника.

Розв’язання задачі достатнього рівня “В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція з бічною стороною c і гострим кутом α. Діагоналі цієї трапеції взаємно перпендикулярні. Діагональ призми утворює з площиною основи кут γ. Знайдіть об’єм призми” вимагає від учня використання таких питань стереометрії: пряма призма, її елементи, кут між прямою і площиною, формула об’єму призми і таких планіметричних питань: рівнобічна трапеція, її властивості, розв’язування прямокутних трикутників.

При розв’язанні задачі високого рівня “Основою прямого паралелепіпеда є паралелограм, у якого одна з діагоналей дорівнює *17* см, а сторони дорівнюють *9* см і *10* см. Площа повної поверхні паралелепіпеда рівна *334* см^2. Знайдіть об’єм паралелепіпеда” учень має знати такі стереометричні питання: прямокутний паралелепіпед, формули площі повної, бічної поверхонь і об’єму паралелепіпеда та питання планіметрії: паралелограм, його площа, властивість діагоналей паралелограма.

Аналіз завдань середнього, достатнього і високого рівнів для диференційованого формування як загальних, так і спеціальних прийомів евристичної діяльності старшокласників при вивченні тем “Многогранники” і “Об’єми многогранників” свідчить про те, що ці завдання повністю забезпечують принцип відповідності їх логічній структурі навчального матеріалу, тобто при їх розв'язанні учні використовують весь теоретичний матеріал цих двох тем і раніше вивчений матеріал, що дає можливість не лише диференційовано сформувати в учнів прийоми евристичної діяльності, але й повторити, закріпити, систематизувати вивчений матеріал.

Принцип орієнтації на цілеспрямоване і систематичне формування прийомів евристичної діяльності учнів

Суть цього принципу полягає в тому, що завдання мають підбиратися таким чином, щоб при їх розв'язуванні в учнів формувалися як загальні, так і спеціальні прийоми евристичної діяльності при вивченні кожної теми шкільного курсу стереометрії.

Вивчаючи призму і піраміду та розв'язуючи задачу „Сформулюйте і порівняйте означення призми і піраміди. Чи мають вони схожі властивості?", в школярів формуються прийоми порівняння і аналогії на середньому рівні.

Розв'язування задачі „В правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині $60°$. Доведіть, що один з двогранних кутів її вдвоє менший за другий" дає можливість формувати в старшокласників прийоми порівняння і аналогії на достатньому рівні, а в процесі розв'язування задачі „Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через середини двох суміжних ребер і найбільш віддалену від прямої, що їх з'єднує, вершину куба" відбувається формування даних прийомів на високому рівні.

При вивченні паралелепіпеда та його різновидів розв'язуючи задачі: „Для якого поняття паралелепіпед є узагальненням, а для якого – конкретизацією?", „Сформулюйте означення прямокутного паралелепіпеда, використовуючи поняття призми. Виділіть основні властивості і наслідки з них" та „Основою похилої трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ є прямокутний трикутник ABC, в якого $\angle C = 90°$ і $BC = 10$ см. Вершина B_1 проектується на середину сторони BC. Двогранний кут з ребром BB_1 рівний $60°$, бічні ребра утворюють з площиною основи кут $45°$. Знайдіть бічну поверхню призми", в учнів відбувається формування таких загальних прийомів евристичної діяльності, як узагальнення і конкретизація на середньому, достатньому і високому рівнях відповідно.

У процесі вивчення піраміди розв'язуючи задачу „Площа основи та бічна поверхня правильної чотирикутної піраміди відповідно рівні *36* см^2 і *60* см^2. Знайдіть апофему цієї піраміди", в учнів формуються прийоми аналізу і синтезу на середньому рівні. На достатньому і високому рівнях формуванню названих прийомів сприяє виконання учнями таких задач: „Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює *6* см, а радіус кола, вписаного в основу, – $\sqrt{3}$ см. Знайдіть повну поверхню піраміди" і „В правильній чотирикутній піраміді бічне ребро рівне b, а двогранний кут при основі – α. Знайдіть бічну поверхню піраміди" відповідно.

При вивченні призми задача "У правильній чотирикутній призмі площа основи *144* см^2, а висота *14* см. Знайдіть діагональ призми" формує прийом введення допоміжних побудов на середньому рівні, задача "Основа прямої призми – трапеція, в якій паралельні сторони *9* см і *39* см. Три бічні грані призми – квадрати. Знайдіть повну поверхню призми" формує даний прийом на достатньому рівні. Розв'язуючи задачу "Основою похилої трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ є прямокутний трикутник ABC, в якого $\angle C = 90^\circ$ і $BC = a$. Вершина B_1 проектується на середину сторони BC. Двогранний кут з ребром BB_1 рівний φ, бічні ребра утворюють з площиною основи кут α. Знайдіть бічну поверхню призми", в учнів формується прийом введення допоміжних побудов на високому рівні.

Розв'язування задачі "В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція з основами *4* см і *10* см і бічною стороною *5* см. Бічне ребро призми рівне *10* см. Знайдіть повну поверхню призми" сприяє формуванню в учнів прийому використання допоміжних задач на середньому рівні, розв'язування задачі "В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині і радіусом описаного кола R. Діагональ бічної грані, що містить бічну сторону цього трикутника, утворює з площиною основи кут β. Знайдіть об'єм призми" допомагає формуванню цього прийому на достатньому рівні, а задача

"Основою прямого паралелепіпеда є паралелограм, у якого одна з діагоналей дорівнює *17* см, а сторони рівні *9* см і *10* см. Площа повної поверхні паралелепіпеда рівна *334* см^2. Знайдіть об'єм паралелепіпеда" сприяє формуванню згаданого прийому на високому рівні.

Вивчаючи піраміду та її види і розв'язуючи задачу "В трикутній піраміді *SABC* бічні грані *SAB* і *SBC* перпендикулярні до площини основи, $\angle BCA = 90^\circ$, $\angle BAC = \beta$, $\angle SAB = \alpha$, $\angle SAB = \gamma$. Знайдіть залежність між кутами α, *β* і *γ*", відбувається формування такого спеціального прийому евристичної діяльності, як введення допоміжного відрізка, на середньому рівні. Під час розв'язування учнями вправ "Сторони основ правильної зрізаної трикутної піраміди відносяться як *1:2*, висота піраміди дорівнює *3* см, бічне ребро утворює з більшою основою кут *45*$^\circ$. Знайдіть площі основ піраміди" та "У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро рівне *b*, а двогранний кут при основі – α. Знайдіть бічну поверхню піраміди" відбувається формування даного прийому на достатньому та високому рівнях відповідно.

Розв'язуючи задачу "Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди утворює з площиною основи кут α. Знайдіть відношення висоти піраміди до сторони основи", в учнів формується прийом введення допоміжного кута на середньому рівні. Розв'язування задачі "В правильній трикутній піраміді сторона основи рівна *8* см, а плоский кут при вершині рівний φ. Знайдіть висоту піраміди" дає можливість формувати в старшокласників даний прийом на достатньому рівні, а задача "У правильній трикутній піраміді з висотою *h* через сторону основи *a* проведено площину, яка перетинає протилежне ребро під прямим кутом. Знайдіть площу перерізу" сприяє формуванню у школярів прийому введення допоміжного кута на високому рівні.

В процесі розв'язування учнями задачі "У правильній чотирикутній зрізаній піраміді сторони основ *8* м і *2* м. Висота дорівнює *4* м. Знайдіть повну поверхню піраміди" відбувається формування такого прийому евристичної діяльності, як введення допоміжних побудов, на середньому рівні. Формування цього прийому на достатньому і високому рівнях проходить під час розв'язування вправ "Сторони основ правильної зрізаної трикутної піраміди дорівнюють *2* см і *6* см. Бічна грань утворює з більшою основою кут *60*º. Знайдіть висоту піраміди" та "Основою піраміди є правильний трикутник; з трьох бічних граней піраміди одна перпендикулярна до площини основи, а дві інші нахилені до неї під кутом α. Під яким кутом нахилені до площини основи бічні ребра?"

Розв'язуючи задачу "Площина, що проходить через більшу сторону нижньої основи і середини двох бічних ребер прямокутного паралелепіпеда, розбиває його на два многогранники. Знайдіть об'єм верхнього многогранника, якщо сторони основи паралелепіпеда рівні *8* см і *6* см, а висота – *10* см", в школярів формується прийом переформулювання задач на середньому рівні. Розв'язування вправи "Одне ребро трикутної піраміди дорівнює *4* см, а кожне з інших дорівнює *3* см. Знайдіть об'єм піраміди" дає можливість формувати у старшокласників даний прийом на достатньому рівні, а розв'язування задачі "У зрізаному паралелепіпеді три бічні ребра мають довжини *15* см, *23* см, *18* см відповідно. Знайдіть четверте бічне ребро" сприяє формуванню в учнів прийому переформулювання задач на високому рівні.

Результати експерименту показали, що дотримання принципу орієнтації на цілеспрямоване і систематичне формування прийомів евристичної діяльності учнів під час підбору вправ сприяє більш глибокому засвоєнню ними стереометричного матеріалу, активізує їх мислення.

Принцип диференційованої реалізованості

Програми курсів геометрії старшої школи повинні бути розраховані на реалізацію диференційованого навчання.

Диференціація навчання стереометрії, як і іншим предметам, повинна мати такі основні два види: 1) за змістом навчального матеріалу (профільна диференціація); 2) за рівнем програмних вимог, що пред'являються до геометричної підготовки учнів (рівнева диференціація).

В теорії і практиці навчання нерідко ототожнюють поняття „рівнева диференціація” і „внутрішня диференціація”, хоча їх зміст принципово відмінний. Внутрішня диференціація, як загально педагогічна проблема, не є новою для школи. Суть її полягає в оптимальному виборі таких методів, прийомів і організаційних форм навчання, які відповідали б психолого-фізіологічним особливостям різних учнів і індивідуальними шляхами приводили б до кінцевих навчальних цілей.

Основна ідея рівневої диференціації – планування результатів навчання, при якому у запропонованому змісті виділяється рівень мінімально базових результатів навчання і, на цій основі, – вищі рівні оволодіння навчальним матеріалом. Рівнева диференціація – це диференціація за глибиною засвоєння навчального матеріалу, за складністю навчальних завдань і вправ. Вона здійснюється на всіх етапах навчання не за рахунок варіювання обсягу навчального матеріалу, а за рахунок орієнтації учнів на рівні вимог щодо його засвоєння.

Диференціація за змістом передбачає навчання різних груп учнів за програмами і підручниками, які відрізняються обсягом матеріалу, його змістом і упорядкованістю, вимогами до знань і вмінь учнів. Такий підхід дає змогу школяру вибрати певний рівень засвоєння геометричного матеріалу і варіювати своє навчальне навантаження.

Наприклад, для формування спеціального прийому введення допоміжного відрізка пропонуємо вправи такої складності:

Середній рівень: “Об’єм правильної чотирикутної піраміди – *48* см^3, а висота – *4* см. Знайдіть сторону основи піраміди.” За допоміжний відрізок учень обирає сторону основи. Тоді $V=\frac{1}{3}a^2h=\frac{1}{3}a^2\cdot 4=48$ (см^3). Звідки $a^2=36\text{см}^2;\ a=6$ см.

Достатній рівень: “Сторони основ правильної зрізаної трикутної піраміди відносяться як *1:2*, висота піраміди дорівнює *3* см, бічне ребро утворює з більшою основою кут *45*°. Знайдіть площі основ піраміди". За допоміжний відрізок учень обирає сторону верхньої основи зрізаної піраміди.

Високий рівень: "Довжини сторін основ і висота правильної чотирикутної зрізаної піраміди відносяться як *4,5:3:1*. Площа бічної поверхні – *3* дм^2. Знайдіть площу повної поверхні піраміди". За допоміжний відрізок учень обирає висоту піраміди.

Аналіз розроблених нами завдань середнього, достатнього і високого рівнів для диференційованого формування як загальних, так і спеціальних прийомів евристичної діяльності старшокласників свідчить про те, що ці завдання повністю відповідають принципу диференційованої реалізованості, що дає можливість не лише диференційовано сформувати в учнів прийоми евристичної діяльності, але і повторити, закріпити, систематизувати вивчений матеріал.

Принцип повноти системи вправ

Суть даного принципу полягає у визначенні оптимального набору стереометричних вправ для цілісного і міцного засвоєння знань, для активізації евристичної діяльності старшокласників.

У принципі повноти системи вправ виділяються два напрямки:

1) система вправ повинна містити різні види задач (на обчислення, на побудову, на доведення). Наприклад, такі задачі: „Основою піраміди є прямокутник з сторонами *16* см і *6* см. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи і дорівнює *12* см. Знайдіть бічну поверхню піраміди", „Побудуйте переріз піраміди *DABC* площиною, що проходить через точки *M*, *N* і *P*, де *M* і *N* належать граням *DAC* і *ADB* відповідно, точка *P* належить ребру *CB*, причому *MN* не паралельна площині *ABC*" і „В правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині 60°. Доведіть, що один з двогранних кутів її вдвоє менший за другий".

2) система задач має охоплювати всі теми, наприклад, при вивченні об'ємів многогранників слід розглядати задачі на обчислення об'ємів: прямого

паралелепіпеда („Основою прямого паралелепіпеда є паралелограм, у якого одна з діагоналей дорівнює *17* см, а сторони рівні *9* см і *10* см. Площа повної поверхні паралелепіпеда рівна *334* см^2. Знайдіть об'єм паралелепіпеда"), прямокутного паралелепіпеда („Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо сторони основи *2* см і *3* см, а діагональ паралелепіпеда $\sqrt{38}$см"), похилого паралелепіпеда („Основою похилого паралелепіпеда є квадрат, сторона якого дорівнює a. Одне з бічних ребер дорівнює b і утворює з кожною з прилеглих сторін основи кут 60^o. Знайдіть об'єм паралелепіпеда"), прямої призми („В основі прямої призми лежить прямокутна трапеція з гострим кутом α. Більша діагональ трапеції дорівнює l і є бісектрисою гострого кута. Більша діагональ призми утворює з площиною основи кут β. Знайдіть об'єм призми"), похилої призми („В основі похилої призми лежить прямокутник із сторонами a і b. Дві суміжні бічні грані утворюють з основою гострі кути α і β. Бічне ребро дорівнює c. Знайдіть об'єм призми"), правильної піраміди („Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, бічне ребро якої l, а двогранний кут між суміжними бічними гранями β"), довільної піраміди („Основою піраміди є правильний трикутник, площа якого дорівнює S. Одна бічна грань піраміди перпендикулярна до площини основи, а дві інші нахилені до неї під кутом α. Знайдіть об'єм піраміди"), зрізаної піраміди („Знайдіть об'єм правильної чотирикутної зрізаної піраміди, сторони основи якої дорівнюють *4* дм і *8* дм, а діагональ – *11* дм"), правильного многогранника („Знайдіть відношення об'єму куба до об'єму правильного тетраедра, ребро якого дорівнює діагоналі куба").

Аналізуючи систему стереометричних задач, можна знайти дві якісно відмінні особливості. Структура одних задач така, що при їх розв'язуванні розвиваються навички в прямолінійному застосуванні правил; розв'язування інших пов'язане із здійсненням постійного контролю, перевірки кожної операції, причому останні нерідко стають навичками і здійснюються підсвідомо.

Розв'язуючи звичайні задачі, самоконтроль довго не стає „звичкою", навичкою, що здійснюється без нагадування. Причину цього можна побачити в тому, що розв'язування задачі прямої структури закінчується отриманням відповіді ніби-то на напівциклі та етап перевірки виконується лише за спеціальною вимогою вчителя. Наприклад, задача „Основою прямої трикутної призми є прямокутний трикутник з катетом *5* см і гіпотенузою *13* см. Висота призми *8* см. Знайдіть повну поверхню призми" є звичайною задачею.

Обернені завдання є більш місткішими, ніж прямі: розв'язування обернених задач в більшій мірі розвиває в учнів уміння виконувати прямі перетворення, причому економним чином: записана одна задача, а в процесі її розв'язування випробувано декілька варіантів, виконано не менше 3 – 4 вправ. Це легко побачити на прикладі такої задачі: „Основою прямої трикутної призми є прямокутний трикутник з катетом *5* см і гіпотенузою *13* см. Повна поверхня призми рівна *300* см^2. Знайдіть висоту призми."

Цим пояснюється підвищення активності учнів під час розв'язування обернених задач і відповідно більша результативність виконання цих задач.

Принцип протиставлення в підборі системи завдань

Дидактична суть даного принципу полягає в тому, що доцільно розв'язувати одночасно прямі і обернені задачі.

При одночасному розв'язуванні прямих і обернених стереометричних задач в учнів формуються системні знання, в них активізується евристична діяльність. Такий підхід дає можливість суттєво зекономити час (до 20 % навчального часу), що дозволить вчителю більше уваги приділити розв'язуванню складніших задач і досягти цим самим дійових знань.

При розв'язуванні взаємо обернених задач учень зразу ж розглядає відмінність і схожість задач різного виду, оволодіває прийомами їх розподілу, вибору дій.

Вивчаючи стереометрію, важливо порівнювати протилежні поняття, розглядаючи їх одночасно. Можна співставляти етапи роботи над задачами, способи розв'язання, наприклад: аналітичний і синтетичний способи доведення теорем і розв'язування задач, доведення міркуваннями і за допомогою граф-схем.

Звернемо увагу на особливості розв'язування взаємно обернених задач.

Першою особливістю протиставлення взаємно обернених задач є зміна форми при збереженні числових даних.

Наприклад: „В основі призми лежить трикутник зі сторонами *7* см, *5* см і *6* см. Висота призми *4* см. Знайдіть об'єм цієї призми" і „В основі призми лежить трикутник зі сторонами *7* см, *5* см і *6* см. Об'єм цієї призми рівний $24\sqrt{6}$ см^3. Знайдіть висоту призми".

Вправи, що відповідають першій особливості, задовольняють вимогу розділення важкості; зміна форми (дій) при збереженні змісту (виразів) дозволяє осмислити один і той же матеріал з різних точок зору.

Після розв'язування декількох пар задач із збереженням послідовності: пряма задача, потім обернена – потрібно запропонувати виконати спочатку „обернену" задачу, а потім перевірити відповідь прямою задачею. Це друга особливість.

Розглянемо наступні задачі: „Бічна поверхня похилої трикутної призми рівна *2016* см^2. Дві бічні грані цієї трикутної призми взаємно перпендикулярні, а їх спільне ребро віддалене від інших бічних ребер на *12* см і *35* см. Знайдіть довжину цього ребра" та „Дві бічні грані похилої трикутної призми взаємно перпендикулярні, а їх спільне ребро дорівнює *24* см і віддалене від інших бічних ребер на *12* см і *35* см. Знайдіть бічну поверхню цієї призми".

Третя особливість – це розв'язування задач, в яких послідовність прямих і обернених операцій йде без певного порядку, причому відповіді перевіряються перетворенням операції тільки в окремих випадках (переважно усно).

Це можна розглянути на таких, наприклад, задачах: „В правильній чотирикутній піраміді бічне ребро рівне b, а двогранний кут при основі – α. Знайдіть бічну поверхню піраміди" та „В правильній чотирикутній піраміді бічне ребро рівне b, а двогранний кут при основі – α. Бічна поверхня піраміди рівна $\frac{4b^2\cos\alpha}{\cos^2\alpha+1}$. Обчислити апофему бічної грані”.

Під час одночасного розгляду обох видів задач на основі принципу протиставлення доцільно пропонувати більше обернених і видозмінених задач з пропущеними елементами, ніж прямих.

Це викликано тим, що виконання оберненої задачі пов’язане з перевіркою безпосередньо прямої задачі. В цьому розумінні обернена задача ніби включає в себе пряму, стаючи тим самим інформаційно багатшою за неї.

Розв’язання таких задач, як підтверджують експериментальні дослідження, активізує евристичну діяльність старшокласників.

Нами розроблені задачі трьох рівнів (середнього, достатнього та високого) з стереометрії (див. додатки А – Л), які повністю відповідають розглянутим принципам, а також принципам дидактики: наочності, науковості, доступності, свідомості і дають можливість диференційовано формувати прийоми евристичної діяльності старшокласників.

2.2. Формування загальних прийомів евристичної діяльності старшокласників при вивченні стереометрії

Загальні прийоми евристичної діяльності займають важливе місце у підведенні учнів до геометричних понять, формулюванні означень, доведенні теорем та розв’язуванні задач.

Під час диференційованого формування загальних прийомів рекомендується враховувати особливості рівневого навчання, особистісно орієнтовану теорію навчання, теорію поетапного формування вмінь учнів та асоціативно-рефлекторну теорію навчання.

Зміст і операційний склад загальних прийомів евристичної діяльності учнів на уроках стереометрії висвітлено в Р. І., п. 1.2. (с. 37 – 46).

Формування згаданих прийомів будемо розглядати у такій послідовності:

1) суть і значення прийому;
2) операційний склад;
3) роздільне відпрацювання операцій;
4) узагальнення операцій і складання ООД;
5) навчання учнів перенесенню прийому на новий матеріал.

Розглянемо методику диференційованого формування загальних прийомів евристичної діяльності (порівняння і аналогія, узагальнення і конкретизація, аналіз та синтез) старшокласників при вивченні стереометрії за трьома рівнями: середнім, достатнім та високим.

Середній рівень навчальних досягнень

<u>Порівняння і аналогія</u>

При вивченні стереометрії порівняння в учнів доцільно диференційовано формувати, пропонуючи їм вправи наступного змісту:

1. Чим відрізняється геометрична фігура 1 від фігури 2?
2. Яких властивостей немає у фігурі 1 порівняно з фігурою 2?
3. Які додаткові властивості має фігура 1 порівняно з фігурою 2?

В навчанні стереометрії тісно пов'язаний з прийомом порівняння прийом аналогії. Розумова дія аналогії в процесі диференційованого формування понять сприяє активізації мислительної діяльності учнів та організації евристичної діяльності, допомагає запам'ятовувати головне в матеріалі, що вивчається.

Вміння порівнювати формується в процесі пошуку зв'язків за аналогією. Порівняння виступає як основа прийому аналогії. Без порівняння і аналогії неможливе перенесення способу розв'язання однієї задачі на інші того ж типу, висунення здогадки про закономірності, певні властивості фігур, що вивчаються.

Пригадавши з учнями операційний склад прийому порівняння, організовуємо роботу для його формування. Пропонуємо задачу: “Чи завжди правильна піраміда є правильним многогранником? Відповідь поясніть.” Учні спочатку роздільно відпрацьовують операцію прийому. Потім складають під керівництвом вчителя орієнтовну основу діяльності (ООД). Рекомендується використати перший тип ООД:

1. Встановити мету порівняння: Чи завжди правильна піраміда є правильним многогранником.
2. Перевірити, чи знають учні означення правильної піраміди, правильного многогранника і правильного тетраедра.
3. Скласти план порівняння: сформулювати означення правильної піраміди і правильного многогранника, засвоїти основні знання, що використовуються.
4. Знайти схожі властивості, для чого порівняти означення цих понять.

Учні роблять висновок: тільки у випадку, коли правильна піраміда є правильним тетраедром, вона є правильним многогранником.

Формуючи прийом порівняння, доцільно спочатку пригадати суть прийому, його операційний склад, а потім перейти до роздільного відпрацювання операцій. Наприклад, розв'язуючи задачу “В основі призми лежить трикутник зі сторонами *7* см, *5* см і *6* см. Висота призми *4* см. Знайдіть об'єм цієї призми", учні виділяють операційний склад прийому:

1. Виконати малюнок, повторити означення призми, прямої призми, їх властивостей, формули для обчислення об'єму призми, формули Герона для обчислення площі трикутника за трьома сторонами (рис. 2.2).

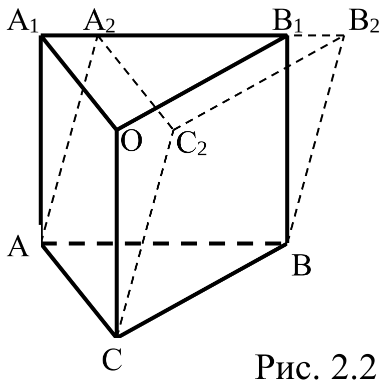


Рис. 2.2

2. Скласти план діяльності: порівняти означення призми, прямої призми з умовою задачі та отримати висновок.

3. Сформулювати висновок: "Не так важливо, яку призму розглядати, оскільки всі дані для обчислення об'єму є в умові задачі".

Далі учні переходять до відпрацювання операцій:

1. $P = 18$ см, $p = \dfrac{P}{2} = 9$ см.

2. За формулою Герона площа основи рівна:

$$S_0 = \sqrt{9\cdot(9-7)\cdot(9-5)\cdot(9-6)} = \sqrt{9\cdot 24} = 6\sqrt{6} \text{ (см}^2\text{)}.$$

3. Об'єм $V = S_0 \cdot H = 6\sqrt{6}\cdot 4 = 24\sqrt{6}$ (см^3).

Розглянемо задачу: "Пригадайте властивість діагоналей паралелограма. Використовуючи аналогію між паралелограмом і паралелепіпедом, сформулюйте аналогічну властивість для паралелепіпеда".

Учні спочатку пригадують суть прийомів порівняння і аналогії та їх операційний склад, проводять роздільне відпрацювання операцій під керівництвом вчителя.

Для розв'язання даної задачі учням потрібно пригадати означення паралелограма та паралелепіпеда, властивість діагоналей паралелограма. Порівнявши дані означення, старшокласники помічають, що у паралелограма протилежні сторони паралельні і рівні, а у паралелепіпеда протилежні грані паралельні і рівні. Тому паралелепіпед є просторовим аналогом паралелограма. Оскільки діагоналі паралелограма перетинаються і в точці перетину діляться пополам, то, згадавши суть прийому аналогії, учні формулюють властивість діагоналей паралелепіпеда: діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці і точкою перетину діляться пополам.

Узагальнення та конкретизація

Для формування прийомів узагальнення і конкретизації на середньому рівні учням пропонуємо задачу: “Для якого поняття паралелепіпед є узагальненням, а для якого – конкретизацією?”

Після аналізу умови задачі учні пригадують суть прийомів узагальнення і конкретизації та їх операційний склад, проводять разом з вчителем роздільне відпрацювання операцій та складання ООД.

Для розв’язання даної задачі вони пригадують означення паралелепіпеда, далі – означення прямого, прямокутного паралелепіпеда, куба. Згадавши суть прийому узагальнення, учні формулюють висновок, що паралелепіпед є узагальненим поняттям для прямого, прямокутного паралелепіпеда і куба.

Потім, згадавши означення призми, многогранника та суть прийому конкретизації, учні під керівництвом вчителя формулюють ще один висновок: паралелепіпед є конкретизацією понять призми, многогранника.

Сформульована задача відповідає середньому рівню навчальної діяльності учнів. Формування даних прийомів корисно здійснювати і під час розв’язування такої задачі: “Основою прямої призми є трикутник з сторонами *4* см, *5* см і *6* см. Висота призми *8* см. Знайдіть бічну поверхню призми”.

Проаналізувавши умову задачі і пригадавши суть прийомів, названих вище, та їх операційний склад, учні під керівництвом вчителя проводять роздільне відпрацювання операцій та складання ООД.

Згадавши означення прямої призми та її властивості, суть прийому узагальнення та формулу для обчислення бічної поверхні призми $S_б = P \cdot H$, вчитель наголошує, що розміри призми можуть бути різними. Тому їх можна позначити в загальному випадку через a, b, c і h. Після питання вчителя: “Чи можна сформулювати узагальнену задачу?” старшокласники формулюють узагальнену задачу: “Знайти бічну поверхню прямої призми, основою якої є трикутник з сторонами *a, b, c* і висотою *h*”.

Розв’язання цієї задачі дає формулу для обчислення площі бічної поверхні призми $S_б = P \cdot H = (a+b+c) \cdot h$. Підставивши конкретні значення, учні отримують $S_б = P \cdot H = (a+b+c) \cdot h = (4+5+6) \cdot 8 = 120$ (см^2).

Роздільне відпрацювання операцій в даній задачі таке:

1. Згадати означення призми та формулу для обчислення бічної поверхні призми.
2. Сформулювати узагальнену задачу, розв’язати її.
3. Підставити в отриману формулу конкретні значення.
4. Записати відповідь.

Розв’язуючи задачу “Доведіть, що у прямій чотирикутній призмі всі бічні грані – прямокутники”, учні проводять аналіз умови задачі, згадують суть прийомів, формулюють узагальнену задачу “Доведіть, що у прямій *n*-кутній призмі всі бічні грані – прямокутники”. Виходячи з означення прямої призми і розглянувши, що $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel \ldots$, дана задача розв’язується просто.

Аналіз і синтез

У процесі навчання математики аналіз і синтез тісно пов’язані між собою. Учителю важливо вміти відокремлювати аналіз та синтез, де це необхідно, пам’ятаючи про те, що аналіз – це шлях до відкриття, а синтез – шлях до обґрунтування.

Доцільно частину задач аналізувати усно. Проведення стадії аналізу робить учня не пасивним спостерігачем, а активним, свідомим учасником процесу міркувань.

Розв’язуючи задачу “Одне бічне ребро призми перпендикулярне до площини основи. Доведіть, що решта бічних ребер теж перпендикулярні до площини основи”, учні під керівництвом вчителя спочатку пригадують операційний склад прийомів аналізу і синтезу, потім виконують роздільне відпрацювання операцій та складання ООД під керівництвом вчителя (аналіз):

1. Встановити мету дослідження: Довести, що інші три з чотирьох бічних ребер теж перпендикулярні до площини основи.

2. Пригадати означення призми, властивості перпендикулярності прямої і площини.

3. Скласти план. Учні ставлять перед собою питання: “Які між собою бічні ребра призми? Чому?” Відповідають, що бічні ребра призми паралельні за означенням. Наступне питання в учнів таке: “Якщо одне з бічних ребер перпендикулярне до площини основи, то як розміщені інші бічні ребра до площини основи? Чому?” Старшокласники відповідають, що за властивістю перпендикулярності прямої і площини, бічні ребра призми перпендикулярні до площини її основи.

4. Синтез. Оскільки бічні ребра призми паралельні за означенням і одне з них перпендикулярне до площини основи, то за т. 3.3. ([181], с. 26) інші теж перпендикулярні до площини основи.

5. Сформулювати висновок: “Всі бічні ребра призми перпендикулярні до площини її основи”.

Формування прийомів аналізу і синтезу доцільно проводити і на такій, наприклад, задачі: “Основою прямої трикутної призми є прямокутний трикутник з катетом *5* см і гіпотенузою *13* см. Висота призми *8* см. Знайдіть повну поверхню призми”.

Розв’язування задачі вимагає від учнів знання суті прийомів аналізу і синтезу та їх операційного складу. Старшокласники під керівництвом вчителя виконують роздільне відпрацювання операцій (аналіз):

1. Встановити мету дослідження: Обчислити повну поверхню призми.

2. Пригадати означення призми, прямої призми, їх властивості, формули для обчислення поверхні призми.

3. Скласти план розв’язання. Старшокласники зазначають, що для розв’язання даної задачі потрібно записати формулу повної поверхні призми $S_n = 2S_{осн} + S_б$. Далі потрібно обчислити другий катет для знаходження площі

основи. Після цього досить обчислити периметр, щоб знайти бічну поверхню призми.

4. Сформулювати висновок: “Знайдені величини підставляємо у формулу і записуємо відповідь”.

Переходимо до роздільного відпрацювання операцій (синтез):

1. $S_п = 2S_{осн} + S_б$.
2. $b = \sqrt{165 - 25} = 12$ (см).
3. $2S_{осн} = 2 \cdot 12 \cdot 5 = 60$ (см^2), $P = 12 + 13 + 5 = 30$ (см), $S_б = 30 \cdot 8 = 240$ (см^2).
4. $S_п = 60 + 240 = 300$ (см^2).

Для розв’язання задачі “Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через ребро AB і точку перетину діагоналей грані $A_1B_1C_1D_1$” учням потрібно провести аналіз: встановити, чим визначається січна площина, чи перетне січна площина площини основ куба (рис. 2.3). В процесі міркування вони зазначають, що січна площина перетне нижню основу по прямій AB, а верхню – по прямій, яка проходить через точку M, а також зазначають, що вона паралельна до прямої AB, за властивістю паралельних площин $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$, перетятих січною площиною. Ця пряма перетне ребра A_1D_1 і B_1C_1 відповідно в точках K і N.

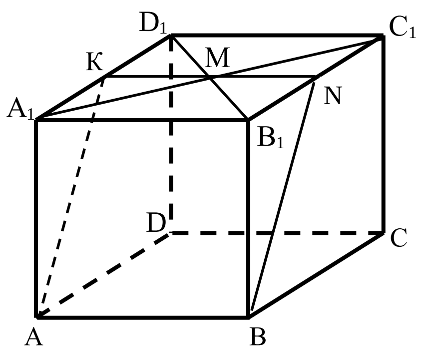


Рис. 2.3

Синтез. 1. Через точку M проводимо $KN \parallel AB$. $K = A_1D_1 \cap KN$, $N = B_1C_1 \cap KN$. 2. Сполучимо точки A і K, B і N. Чотирикутник $AKNB$ – шуканий переріз.

У процесі розв’язування даних задач учням не даються вказівки, як виконувати дії, їм показується лише зразок дії і називається її результат. Вони самі шукають правильний спосіб розв’язування методом спроб та помилок і в результаті цієї діяльності вчаться виконувати дану дію правильно. Однак, міцна навичка в учнів не створюється, вони не можуть перенести дану дію на нові знання.

Достатній рівень навчальних досягнень

<u>Порівняння і аналогія</u>

Прийоми порівняння і аналогії на цьому рівні доцільно формувати на такій, наприклад, задачі: „У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α. Відрізок, що сполучає центр кола, описаного навколо бічної грані, з серединою бічного ребра цієї грані, дорівнює *d*. Знайдіть апофему піраміди."

Після того, як учні пригадали суть прийому аналогії, вчитель ставить їм питання відповідно до операційного складу прийому.

Нехай *SABCD* – дана правильна піраміда (рис. 2.4). Проаналізувавши умову цієї задачі, учні бачать, що бічні грані – рівні рівнобедрені трикутники і формулюють аналогічну планіметричну задачу: „В рівнобедреному трикутнику кут при вершині дорівнює α, відрізок, що сполучає центр кола, описаного навколо трикутника, з серединою бічної сторони, дорівнює *d*. Знайти висоту трикутника".

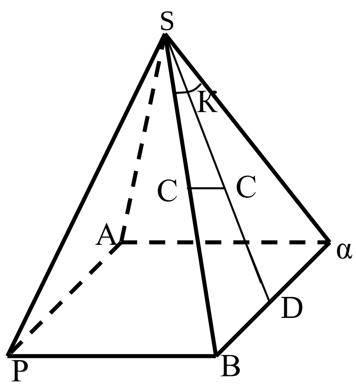


Рис. 2.4

Вчитель: Що необхідно для розв'язання цієї планіметричної задачі?

Учні: Провести $SK \perp DC$. Оскільки SK є бісектрисою і медіаною, бо ΔSDC рівнобедрений, то *O* – центр описаного кола навколо ΔSDC лежатиме на SK.

Вчитель: Що ще потрібно зробити?

Учні: Потрібно знайти довжини відрізків SP і SL, а потім обчислити SK.

Далі учні під керівництвом вчителя переходять до роздільного відпрацювання операцій:

1. Будуємо зображення правильної піраміди.
2. Формулюємо аналогічну планіметричну задачу.
3. За умовою $\angle DSC = \alpha$. Провівши $SK \perp DC$, учні роблять висновок, що SK є бісектрисою і медіаною, бо ΔSDC – рівнобедрений, тому *O* – центр

описаного кола навколо $\triangle SDC$, лежатиме на SK. Нехай P – середина SC. Тоді за умовою $OP = d$, $\angle DSK = \frac{\alpha}{2}$. Оскільки $OS = OC$, як радіуси кола, то $OP \perp SC$ ($\triangle SOC$ – рівнобедрений і OP – медіана). З $\triangle SOP (\angle P = 90^\circ)$: $SP = OP \cdot ctg\frac{\alpha}{2} = dctg\frac{\alpha}{2}$. $SD = 2SP = 2dctg\frac{\alpha}{2}$.

4. З $\triangle SDK (\angle K = 90^\circ)$: $SK = SD\cos\frac{\alpha}{2} = 2dctg\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \dfrac{2d\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. Отже, $SK = \dfrac{2d\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Формування прийому порівняння на достатньому рівні доцільно проводити за допомогою і такої задачі: “В правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині 60°. Доведіть, що один з двогранних кутів її вдвоє менший за другий”.

Коли учні згадали суть прийому, вчитель ставить їм питання відповідно до його операційного складу.

Вчитель: Яка мета нашого дослідження?

Учні: Довести, що один з двогранних кутів в правильній чотирикутній піраміді вдвоє менший за другий.

Вчитель: Згадайте означення та властивості многогранників, які нам потрібно розглянути.

Учні: Потрібно пригадати означення правильної піраміди, октаедра та їх властивості.

Вчитель: Який наступний крок дослідження?

Учні: Пригадати суть прийому порівняння та застосувати його до розв’язання задачі.

Вчитель: Як саме його застосувати?

Учні: Порівнявши властивості правильної піраміди і октаедра, приходимо до висновку, що дана піраміда є половиною правильного октаедра.

Вчитель: Який висновок можна зробити?

Учні: Двогранний кут при основі піраміди дорівнює половині двогранного кута при бічному ребрі октаедра.

Після цього учні переходять до відпрацювання операцій під керівництвом вчителя:

1. Формулюємо означення правильної піраміди, октаедра та їх властивості.
2. Порівнюємо властивості правильної піраміди і октаедра.
3. Формулюємо висновок: "Дана піраміда є половиною правильного октаедра, а тому двогранний кут при основі піраміди дорівнює половині двогранного кута при бічному ребрі октаедра".

<u>Узагальнення та конкретизація</u>

Розглянемо задачу: "Доведіть, що відрізки, які з'єднують середини протилежних ребер довільної трикутної піраміди, перетинаються в одній точці".

Пригадавши суть даних прийомів, учням ставляться питання відповідно до їх операційного складу.

Вчитель: Встановіть мету дослідження.

Учні: Довести, що відрізки, які з'єднують середини протилежних ребер довільної трикутної піраміди, перетинаються в одній точці.

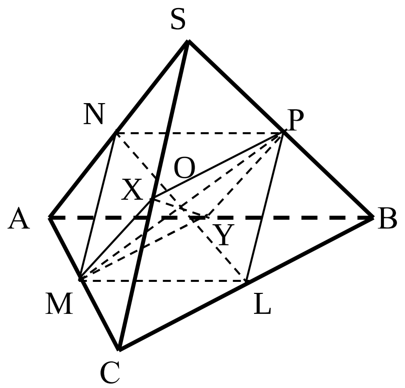


Рис. 2.5

Вчитель: Яка наступна дія нашого дослідження?

Учні: Виконати малюнок, пригадати означення піраміди та її властивості (рис. 2.5).

Вчитель: Чи можна, проаналізувавши властивості піраміди та тетраедра, сформулювати задачу, для якої дана задача є узагальненою чи конкретизованою?

Учні: Можемо сформулювати задачу, що є конкретизованою по відношенню до даної задачі: “Доведіть, що відрізки, які з’єднують середини протилежних ребер правильного тетраедра, перетинаються в одній точці”.

Вчитель: Що необхідно зробити для розв’язання задачі?

Учні: Покажемо, що відрізки *MP* і *NL* перетинаються в точці *O*.

Вчитель: Що для цього треба зробити?

Учні: Показати, що *MXPY* – паралелограм і $O = MP \cap XY$.

Далі учні під керівництвом вчителя переходять до роздільного відпрацювання операцій:

1. Будуємо зображення піраміди.
2. Формулюємо конкретизовану задачу.
3. Нехай *SABC* – даний тетраедр, *M, N, P* і *L* – середини ребер *AC, AS, SB* і *BC* відповідно. Покажемо, що відрізки *MP* і *NL* перетинаються в одній точці *O*. Проведемо *MN, NP, PL* і *ML*. $MN \parallel SC$ як середня лінія ΔASC і $MN = \frac{1}{2}SC$. Аналогічно $PL \parallel SC$ і $PL = \frac{1}{2}SC$. Звідси $MN \parallel PL$ і $MN = PL$. За ознакою паралелограма *MNPL* – паралелограм, а *MP* і *NL* – його діагоналі. Отже, *MP* і *NL* перетинаються в точці *O*.
4. Аналогічно показуємо, що *MXPY* – теж паралелограм і $O = MP \cap XY$. Що і треба було довести.

Дана спочатку задача є узагальненою по відношенню до розв’язаної нами задачі і розв’язання її аналогічне.

Формування прийомів узагальнення і конкретизації можна проводити також за допомогою такої задачі: “Основою піраміди є прямокутник з сторонами *16* см і *6* см. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи і дорівнює *12* см. Знайдіть бічну поверхню піраміди”.

Пригадавши операційний склад прийомів та їх суть, учні відповідають на питання вчителя.

Вчитель: Яка мета нашого дослідження?

Учні: Знайти бічну поверхню піраміди.

Вчитель: Який наступний крок нашого дослідження?

Учні: Потрібно пригадати означення піраміди, формулу для обчислення бічної поверхні піраміди.

Вчитель: Що нам необхідно знайти для розв'язання задачі?

Учні: Виконавши побудову зображення піраміди, записавши формулу

$$S_б = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot AD\cdot SN + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot DC\cdot SM = AD\cdot SN + DC\cdot SM,$$

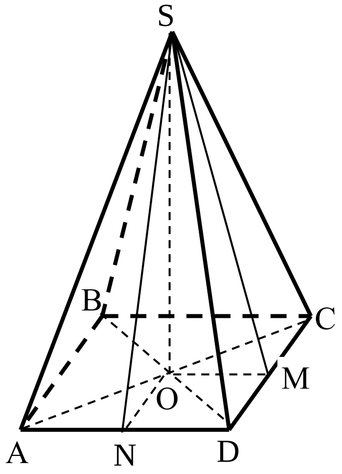


Рис. 2.6

бачимо, що нам потрібно знайти *SN* і *SM* та підставити отримані значення у формулу (рис. 2.6).

Вчитель: Що будемо робити далі?

Учні: Підставивши конкретні значення, розв'яжемо поставлену перед нами задачу.

Вчитель: Чи можемо сформулювати задачу, що є узагальненням або конкретизацією нашої задачі?

Учні: Можемо, наприклад: "Основою піраміди є прямокутник з сторонами a і b. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи і дорівнює h. Знайти бічну поверхню піраміди". Дана задача є узагальненою по відношенню до нашої задачі.

Вчитель: Розв'язання цієї задачі дасть загальну формулу, за якою можна знаходити бічну поверхню конкретної піраміди.

Після цього учні під керівництвом вчителя переходять до роздільного відпрацювання операцій:

1. Будуємо зображення піраміди.
2. Формулюємо і розв'язуємо узагальнену задачу.
3. Знаходимо *SN* з $\Delta SON(\angle O = 90^\circ)$, $ON = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}b$.

$$SN = \sqrt{SO^2 + ON^2} = \sqrt{h^2 + \frac{b^2}{4}}.$$

4. Знаходимо SM з $\triangle SOM(\angle O = 90^\circ)$, $OM = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}a$.

$SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}$ (см).

5. Підставивши значення у формулу, отримуємо: $S_б = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot b\sqrt{h^2 + \frac{b^2}{4}} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}} = b\sqrt{h^2 + \frac{b^2}{4}} + a\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}$.

Підставивши в цю формулу дані наведеної вище конкретної задачі, зразу одержимо розв'язок: $S_б = 6\sqrt{12^2 + \frac{6^2}{4}} + 16\sqrt{12^2 + \frac{16^2}{4}} = \left(6 \cdot \sqrt{153} + 64 \cdot \sqrt{13}\right)$ (см²).

<u>Аналіз і синтез</u>

Задача "Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює *6* см, а радіус кола, вписаного в основу, – $\sqrt{3}$см. Знайдіть повну поверхню піраміди" дає можливість формувати в учнів прийоми аналізу і синтезу наступним чином.

Після того, як учні пригадають суть названих евристичних прийомів, їм ставляться питання відповідно до операційного складу цих прийомів (проводиться аналіз).

Вчитель: Встановіть мету нашої діяльності.

Учні: Потрібно знайти повну поверхню піраміди.

Вчитель: Який наступний крок нашої діяльності?

Учні: Потрібно пригадати означення правильного трикутника, радіуса кола, вписаного в трикутник, означення і властивості правильної трикутної піраміди, означення апофеми бічної грані, формулу для обчислення площі рівностороннього трикутника, формулу для обчислення повної поверхні правильної трикутної піраміди.

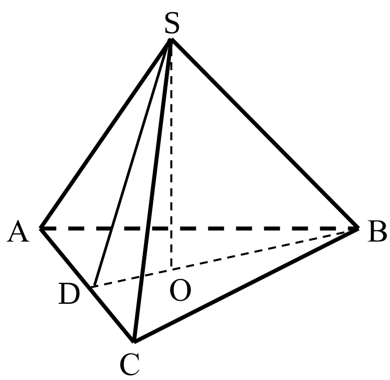


Рис. 2.7

Вчитель: Що необхідно для розв'язання задачі?

Учні: Згадавши формулу повної поверхні правильної трикутної піраміди, $S_п = S_{осн} + S_б = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot l$, бачимо, що необхідно знайти сторону основи (рис. 2.7). Для цього потрібно провести медіану *BD* в трикутнику *ABC* і обчислити сторону основи з $\triangle BDC (\angle D = 90^\circ)$.

Вчитель: Що залишається ще зробити?

Учні: Підставити знайдені значення величин у початкову формулу.

Далі учні під нашим керівництвом переходять до роздільного відпрацювання операцій (синтезу).

1. Будуємо зображення піраміди.
2. Записуємо формулу повної поверхні піраміди: $S_n = S_{осн} + S_б = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot l$.
3. Нехай *AB* = *BC* = *AC* = *a*. Проведемо медіану *BD*.
4. З $\triangle BDC (\angle D = 90^\circ)$: $BD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. $OD = \frac{1}{3} BD = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.
5. Тоді $S_n = \frac{36\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 6 = \left(9\sqrt{3} + 54\right)$(см^2).

Формування прийомів аналізу і синтезу доцільно проводити також за допомогою такої задачі: “В похилій трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ основою служить прямокутний трикутник *ABC* ($\angle C = 90^\circ$). Площина бічної грані AA_1C_1C перпендикулярна площині основи. Доведіть, що CC_1B_1B – прямокутник”.

Пригадавши суть прийомів аналізу і синтезу, ми ставимо питання учням відповідно до операційного складу прийомів (проводимо аналіз).

Вчитель: Сформулюйте мету нашого дослідження.

Учні: Довести, що в призмі $ABCA_1B_1C_1$ CC_1B_1B – прямокутник.

Вчитель: Який перший крок дослідження?

Учні: Потрібно пригадати означення призми, її властивості.

Вчитель: Що необхідно для розв’язання задачі?

Учні: Пригадавши означення призми, можемо зазначити, що всі бічні грані призми є паралелограмами. Щоб довести, що паралелограм CC_1B_1B є прямокутником, нам потрібно показати, що $BC \perp CC_1$. Для того, щоб довести, що $BC \perp CC_1$, ми можемо довести, що $BC \perp A_1C_1C$. Але за умовою площини *ABC* і A_1C_1C перпендикулярні, перетинаються по прямій AC і $BC\perp AC$, то $BC\perp A_1C_1C$.

Вчитель: Що залишилось ще зробити?

Учні: Сформулювати висновок: паралелограм CC_1B_1B – прямокутник.

Після цього учні під керівництвом вчителя переходять до роздільного відпрацювання операцій (синтезу):

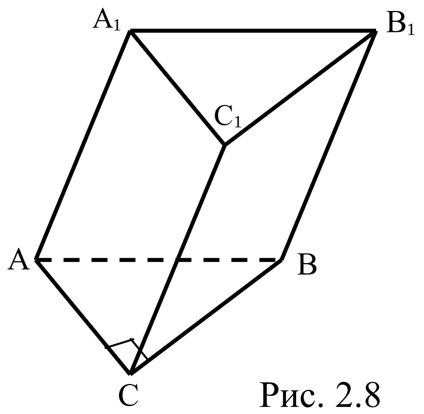


Рис. 2.8

1. Будуємо зображення призми (рис. 2.8).
2. Оскільки площини ABC і A_1C_1C перпендикулярні, перетинаються по прямій AC і $BC\perp AC$, то пряма BC перпендикулярна до площини A_1C_1C.
3. Отже, $BC\perp CC_1$. Це означає, що паралелограм CC_1B_1B є прямокутником.

Під час розв'язування даних задач учнями використовується другий тип ООД, оскільки учням даються всі вказівки, як правильно виконувати дії чи завдання. При кожному повторенні дії пункти евристичної схеми, що складені нами, виступають для учня опорними точками, необхідною умовою правильного виконання дії.

Високий рівень навчальних досягнень

Порівняння і аналогія

Використовуючи задачу "У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α. Відрізок, що сполучає центр кола, описаного навколо бічної грані, з серединою бічного ребра цієї грані, дорівнює d. Знайдіть відношення апофеми піраміди до її сторони основи", в учнів можна формувати прийоми порівняння і аналогії на високому рівні наступним чином.

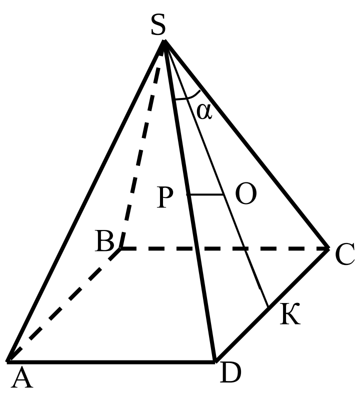


Рис. 2.9

Пригадавши суть прийому аналогії, у відповідності з його операційним складом проводимо аналіз задачі.

Для аналізу виконаємо малюнок (рис. 2.9). Нехай

SABCD дана правильна піраміда. Пригадавши означення правильної чотирикутної піраміди, старшокласники роблять висновок, що всі бічні грані – рівні рівнобедрені трикутники з кутом α при вершині. Провівши аналіз умови задачі і врахувавши останній висновок, учні під керівництвом вчителя формулюють аналогічну планіметричну задачу: “В рівнобедреному трикутнику кут при вершині дорівнює α, відрізок, що сполучає центр кола, описаного навколо трикутника, з серединою бічної сторони, дорівнює *d*. Знайти відношення висоти трикутника до основи”.

Далі потрібно провести висоту SK, знайти кут DSK. Потім з $\triangle SOP$ обчислити *SP* та *SD*, а з $\triangle SDK$ обчислити *DK* та *DC*, знайти *SK*. І, нарешті, знайти відношення *SK* до *DC*.

Тепер переходимо до роздільного відпрацювання операцій.

Провівши $SK \perp DC$, учні записують, що SK є бісектрисою і медіаною, бо $\triangle SDC$ – рівнобедрений. Тому *O* – центр описаного кола навколо $\triangle SDC$ лежатиме на SK. Нехай *P* – середина SC. З умови задачі учні записують: $OP = d$, $\angle DSK = \frac{\alpha}{2}$. Оскільки $OS = OC$, як радіуси кола, то $OP \perp SC$ ($\triangle SOC$ – рівнобедрений і OP – медіана). З $\triangle SOP (\angle P = 90^\circ)$: $SP = OP \cdot ctg\frac{\alpha}{2} = d\,ctg\frac{\alpha}{2}$.

$SD = 2SP = 2d\,ctg\frac{\alpha}{2}$. З $\triangle SDK (\angle K = 90^\circ)$: $DK = SD\sin\frac{\alpha}{2} = 2d\,ctg\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = 2d\cos\frac{\alpha}{2}$.

$DC = 2DK$; $DC = 4d\cos\frac{\alpha}{2}$; $SK = SD\cos\frac{\alpha}{2} = \dfrac{2d\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Тоді, $\dfrac{SK}{DC} = \dfrac{\dfrac{2d\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}}{4d\cos\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{1}{2}ctg\dfrac{\alpha}{2}$.

Формування прийому порівняння на високому рівні ми пропонуємо учням за допомогою розв’язування такої задачі: “Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через середини двох суміжних ребер і найбільш віддалену від прямої, що їх з'єднує, вершину куба".

Пригадавши суть прийому порівняння та його операційний склад, проводимо аналіз задачі.

Виконаємо малюнок для аналізу задачі (рис. 2.10). Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – даний куб і K та L – середини ребер D_1C_1 і C_1B_1. Пригадавши означення куба та порівнявши розташування вершин, учні приходять до висновку, що найбільш віддаленою від прямої KL вершиною є вершина A. Площина перерізу перетинається з площиною $A_1B_1C_1D_1$ по прямій KL. Далі старшокласники зазначають, що прямі A_1D_1 і A_1B_1 перетинаються з прямою KL в точках E і F. Точка E належить площині грані ADD_1A_1 і точка A належить цій площині. Отже, площина перерізу перетинається з площиною ADD_1A_1 по прямій AE, яка перетинає ребро DD_1 в точці N. Точки N і K належать перерізу, а також грані DCC_1D_1. Відрізок NK є стороною многокутника шуканого перерізу. Далі учні аналогічно отримують точку M. П'ятикутник $ANKLM$ – шуканий переріз.

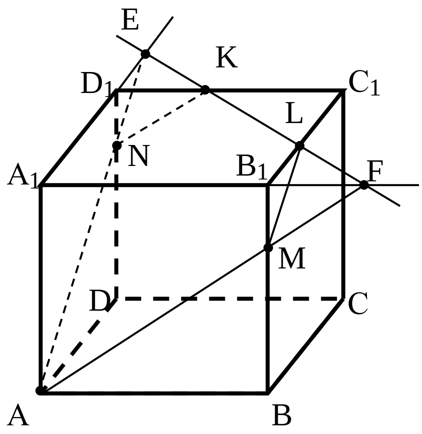


Рис. 2.10

Після цього переходимо до відпрацювання операцій:

1. Продовжимо KL до перетину з прямими A_1D_1 і A_1B_1.
2. Будуємо точки $E = A_1D_1 \cap KL$ і $F = A_1B_1 \cap KL$.
3. Точка E належить ADD_1A_1. Тут же розміщена ще одна точка нашого перерізу – точка A. Площина перерізу перетинається з площиною ADD_1A_1 по прямій AE.
4. Позначимо через N точку перетину AE і DD_1.
5. Точки K і N належать перерізу, а також площині грані DCC_1D_1. Будуємо KN, що є стороною многокутника перерізу.
6. Аналогічно будуємо точку M.
7. П'ятикутник $ANKLM$ – шуканий переріз.

Узагальнення і конкретизація

Розглянемо задачу: „Основою похилої трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ є прямокутний трикутник ABC, в якого $\angle C = 90^\circ$ і $BC = 10$ см. Вершина B_1 проектується на середину сторони BC. Двогранний кут з ребром BB_1 рівний 60°, бічні ребра утворюють з площиною основи кут 45°. Знайдіть бічну поверхню призми”.

Згадавши суть названих прийомів, проводимо аналіз розв’язування задачі відповідно до їх операційного складу.

Для аналізу задачі виконаємо малюнок (рис. 2.11). Нехай $ABCA_1B_1C_1$ – дана похила призма. Пригадавши означення призми, похилої призми, їх властивості та провівши аналіз умови задачі, учні помічають, що вона може бути конкретизованою по відношенню до такої задачі: „Основою похилої трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ є прямокутний трикутник ABC, в якого $\angle C = 90^\circ$ і $BC = a$. Вершина B_1 проектується на середину сторони BC. Двогранний кут з ребром BB_1 рівний φ, бічні ребра утворюють з площиною основи кут α. Знайти бічну поверхню призми”.

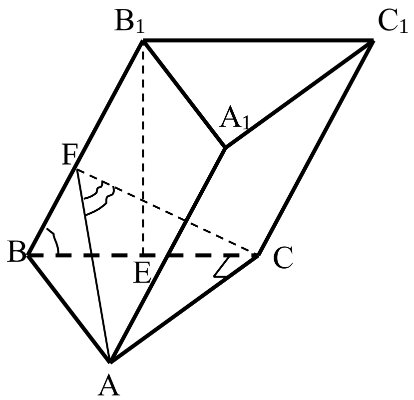


Рис. 2.11

Учні розв’язують узагальнену задачу, а потім в результат тільки підставляють значення даної задачі.

Пригадавши теорему про три перпендикуляри, старшокласники роблять висновок, що $AC \perp BB_1$. Перпендикулярним перерізом призми є прямокутний трикутник ACF $(\angle ACF = 90^\circ)$. Звідси знаходимо довжини сторін CF, AC і AF. Після цього легко знаходять периметр трикутника AFC.

За умовою $BE = EC$, $\angle BCA = 90^\circ$, $BC = a$ см, $B_1E \perp ABC$, $\angle AFC = \varphi$ і $AF \perp BB_1$, $CF \perp BB_1$, $\angle B_1BC = \alpha$. Виходячи з узагальненої задачі, учні записують: $S_б = P_{AFC} \cdot BB_1$. З трикутника ACF $(\angle ACF = 90^\circ)$: $CF = BC \sin\alpha = a\sin\alpha$. $AC = CF \cdot tg\angle AFC = a\sin\alpha \cdot tg\varphi$. Для знаходження периметра трикутника AFC залишається знайти довжину сторони AF: $AF = \dfrac{CF}{\cos\angle AFC} = \dfrac{a\sin\alpha}{\cos\varphi}$. Тоді,

$P_{AFC}=a\sin\alpha\cdot tg\varphi+\dfrac{a\sin\alpha}{\cos\varphi}+a\sin\alpha$. Для обчислення бічної поверхні залишається знайти довжину сторони B_1E.

Розглянувши ΔBB_1E, можна звідси обчислити довжину B_1E.

З ΔBB_1E ($B_1E\perp BC$): $BB_1=\dfrac{BE}{\cos\angle B_1BC}=\dfrac{\frac{a}{2}}{\cos\alpha}$. Далі отримані значення слід підставити у формулу $S_б=P_{AFC}\cdot BB_1$. Отже,

$S_б=P_{AFC}\cdot BB_1=(a\sin\alpha\cdot tg\varphi+\dfrac{a\sin\alpha}{\cos\varphi}+a\sin\alpha)\cdot\dfrac{\frac{a}{2}}{\cos\alpha}$. Підставивши у формулу конкретні дані першої задачі, учні зразу ж знаходять розв'язок задачі.

Тепер переходимо до роздільного відпрацювання операцій.

З трикутника ACF ($\angle ACF=90^\circ$): $CF=BC\sin\angle B_1BC=10\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}$(см). $AC=CF\cdot tg\angle AFC=5\sqrt{2}\cdot tg60^\circ=5\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=5\sqrt{6}$(см). Для знаходження периметра трикутника AFC залишається знайти довжину сторони AF: $AF=\dfrac{CF}{\cos\angle AFC}=\dfrac{5\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=10\sqrt{2}$(см). Тоді, $P_{AFC}=5\sqrt{2}+5\sqrt{6}+10\sqrt{2}=5\sqrt{2}\cdot\left(3+\sqrt{3}\right)$ (см).

З ΔBB_1E ($B_1E\perp BC$): $BB_1=\dfrac{BE}{\cos\angle B_1BC}=\dfrac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=5\sqrt{2}$ (см). Отже, $S_б=P_{AFC}\cdot BB_1=$ $=5\sqrt{2}\cdot\left(3+\sqrt{3}\right)\cdot5\sqrt{2}=50\cdot\left(3+\sqrt{3}\right)$(см^2).

Формування прийомів узагальнення і конкретизації пропонуємо учням також за допомогою задачі: "У тетраедра $SABC$ всі плоскі кути при вершині S прямі, бічні ребра рівні. Доведіть, що квадрат площі трикутника ABC дорівнює сумі квадратів площ решти граней" (рис. 2.12).

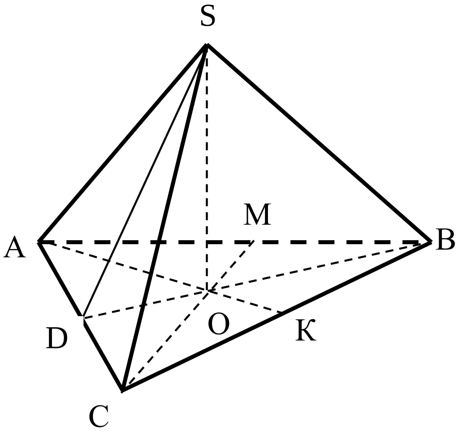


Рис. 2.12

Пригадавши суть прийомів узагальнення і конкретизації, відповідно до їх операційного складу проводимо аналіз умови задачі.

Для розв'язання задачі учні проводять висоти в основі та зазначають, що основа висоти *SO* проходить через точку перетину висот ΔABC.

Оскільки $BS \perp CS$ і $BS \perp AS$, то $BS \perp ASC$. Тому $\angle ASD = 90^\circ$. З подібності трикутників ΔSOD і ΔBSD старшокласники записують $\frac{SD}{DO} = \frac{DB}{SD}$, тобто $SD = \sqrt{DO \cdot DB}$. Далі вони помічають, що якщо отриману рівність домножити на $\frac{1}{2}AC$, то отримаємо $\frac{1}{2}AC \cdot SD = \sqrt{\frac{1}{2}AC \cdot DO \cdot \frac{1}{2}AC \cdot DB}$, тобто $S_{\Delta ASC} = \sqrt{S_{\Delta AOC} \cdot S_{\Delta ABC}}$ (1).

Тепер учні зазначають, що аналогічно вони можуть отримати рівності $S_{\Delta CSB} = \sqrt{S_{\Delta COB} S_{\Delta ABC}}$ (2) і $S_{\Delta ASB} = \sqrt{S_{\Delta AOB} \cdot S_{\Delta ABC}}$ (3). Піднісши обидві частини рівностей (1), (2) і (3) до квадрата та додавши їх, старшокласники отримують: $S^2_{\Delta ASC} + S^2_{\Delta CSB} + S^2_{\Delta ASB} = S_{\Delta ABC} \cdot \left(S_{\Delta AOC} + S_{\Delta COB} + S_{\Delta AOB}\right) = S_{\Delta ABC} \cdot S_{\Delta ABC} = S^2_{\Delta ABC}$. Що й потрібно було довести.

Пригадавши означення плоского кута, тетраедра, його властивості та проаналізувавши умову задачі, учні стверджують, що дана задача є конкретизацією до такої задачі: "Всі плоскі кути тетраедра *SABC* при вершині *S* прямі. Доведіть, що квадрат площі трикутника *ABC* дорівнює сумі квадратів площ решти граней", яка є узагальненням даної. Для розв'язання спочатку слід показати, що основа *O* висоти *SO* тетраедра є точкою перетину висот трикутника *ABC*. Далі доведення повністю аналогічне.

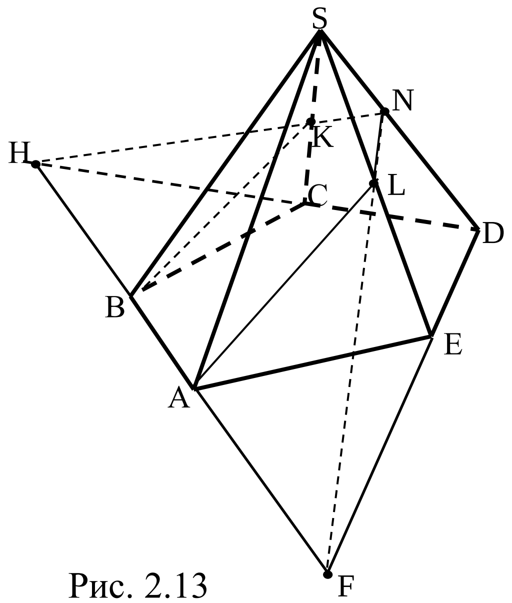


Рис. 2.13

Також формуванню прийомів узагальнення і конкретизації сприяє така задача: "Побудуйте переріз п'ятикутної піраміди *SABCDE* площиною, що проходить через сторону основи піраміди *AB* і точку *N* на ребрі *SD*" (рис. 2.13).

Проаналізувавши умову задачі, учні приходять до висновку, що *AB* є слідом перетину січної площини з площиною основи, тому можна знайти точку перетину площини бічної грані *SCD* з слідом *AB*. Це точка $H = AB \cap DC$. Далі вони доводять, що *NH* належить площині *SCD* і січній площині та перетинає бічне ребро *SC* в точці *K*. Аналогічно знаходять точки *L* і *F*.

$L = NF \cap SE$, а $F = AB \cap DE$. Учні роблять висновок, що *ABKNL* – шуканий переріз.

Узагальненою задачею до даної є така: „Побудуйте переріз шестикутної піраміди *SABCDEF* площиною, що проходить через сторону основи піраміди *AB* і точку *N* на ребрі *SD*”, розв’язання якої аналогічне до даної задачі.

Аналіз і синтез

Аналіз є основою досить загального підходу до розв’язування задач, відомого під назвою зведення задачі до сукупності підзадач.

Ідея такого підходу полягає саме у властивому для аналізу „міркуванні у зворотному напрямі” від задачі, яку треба розв’язати, до підзадач, потім від цих підзадач до ще простіших підзадач і т.д., поки вихідна (первинна) задача не буде зведена до набору елементарних задач. Що ж розуміють під „елементарними задачами”? Це, по-перше, задачі, які розв’язуються за один крок пошуку, по-друге, більш складні задачі, тобто, які не розв’язуються за один крок пошуку, розв’язання яких уже відоме з досвіду.

З такого розуміння елементарної задачі випливає, що чим більший досвід розв’язування задач, тим більше задач стають для учнів „елементарними” в згаданому вище розумінні, а значить тим менший обсяг пошуку при розв’язуванні нових задач, їх зведення до елементарних, оскільки мета пошуку полягає в одержанні елементарних задач, які й зупиняють процес пошуку.

Розглянемо застосування даного підходу на високому рівні при розв’язуванні такої, наприклад, задачі: “Всі грані паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – рівні ромби; кути між ребрами, які мають спільну точку *A*, рівні. Доведіть, що пряма AC_1 перпендикулярна прямій B_1D_1”.

Аналіз. Позначимо через *P* – умову: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – паралелепіпед, всі грані – рівні ромби, $\angle A_1AB = \angle A_1AD$; через *Q* – висновок: $AC_1 \perp B_1D_1$

(рис. 2.14). Тоді задачу можна в цих позначеннях записати так: $\Gamma, P \xrightarrow{?} Q$, де Γ – сукупність вже відомих істинних тверджень геометрії.

Звідки можна отримати перпендикулярність цих прямих? Пригадавши означення паралелепіпеда та його властивості, учні приходять до висновку, що прямі AC_1 і B_1D_1 мимобіжні. Щоб довести, що вони перпендикулярні, нам досить показати перпендикулярність B_1D_1 до деякої площини, що проходить через A_1C_1. Нехай це площина A_1C_1CA. А для цього нам досить показати, що пряма B_1D_1 перпендикулярна до двох прямих даної площини, що проходять через точку перетину прямої B_1D_1 і площини A_1C_1CA. Нехай цією точкою є точка O – середина відрізка B_1D_1. $A_1C_1 \perp B_1D_1$, як діагоналі ромба $A_1B_1C_1D_1$. Отже, потрібно довести, що $AO \perp B_1D_1$.

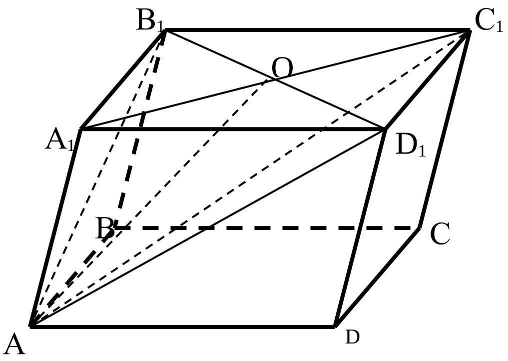


Рис. 2.14

Тобто, $\Gamma, P, A_1C_1 \perp B_1D_1 \xrightarrow{?} AO \perp B_1D_1$ – елементарна задача, але тоді виникає нова задача: потрібно показати, що медіана АО трикутника AB_1D_1 є висотою цього трикутника лише тоді, коли $AB_1 = AD_1$.

$\Gamma, P, \xrightarrow{?} AB_1 = AD_1$.

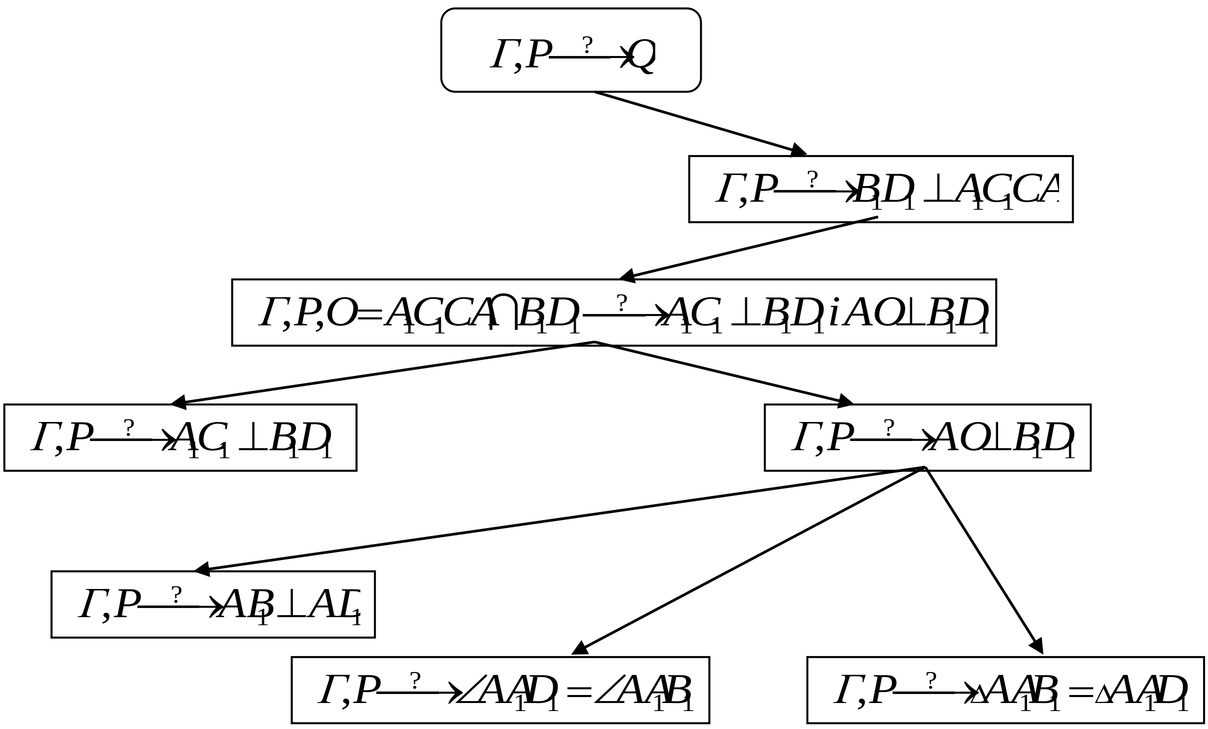


Рис. 2.15

Синтез. Тепер, йдучи зворотним шляхом, від елементарних задач, до яких ми звели в кінці кінців дану задачу, одержимо розв’язання цієї задачі, тобто доведення сформульованого твердження.

Здійснений пошук доведення за допомогою зведення задачі до сукупності підзадач і сам розв’язок, одержаний внаслідок цього пошуку, можна наочно зобразити у вигляді таких графів: пошуку доведення – аналіз (рис. 2.15), доведення – синтез (рис. 2.16).

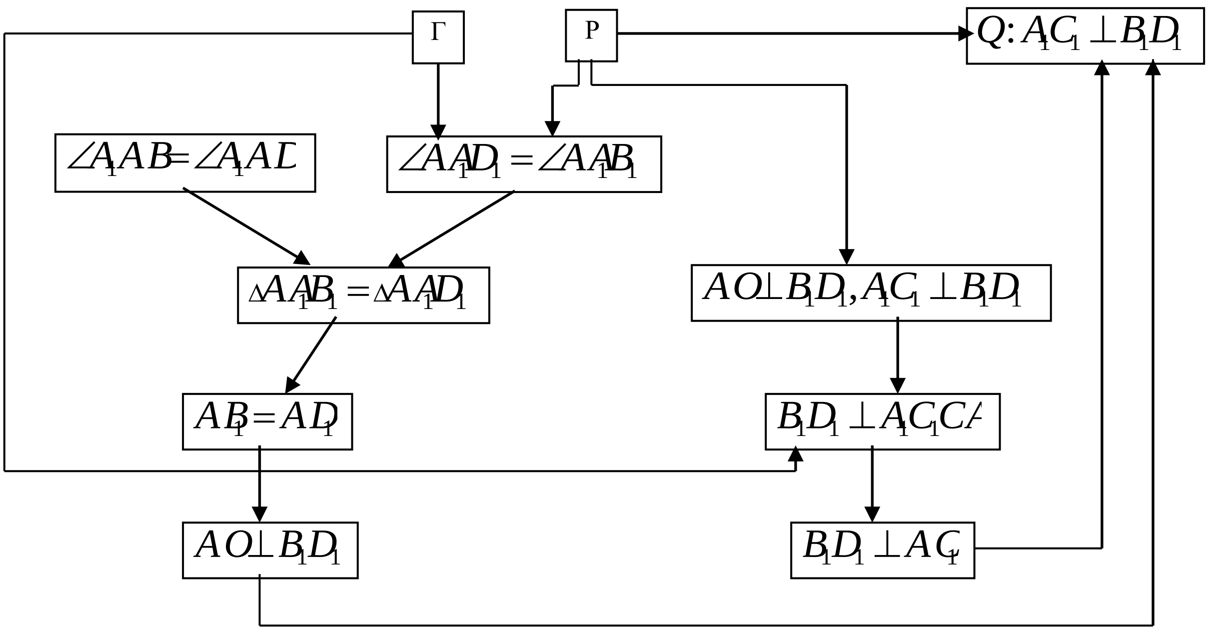


Рис. 2.16

Для формування в учнів прийомів аналізу і синтезу на цьому рівні доцільно використовувати задачу “В правильній чотирикутній піраміді бічне ребро рівне *b*, а двогранний кут при основі – α. Знайдіть бічну поверхню піраміди”.

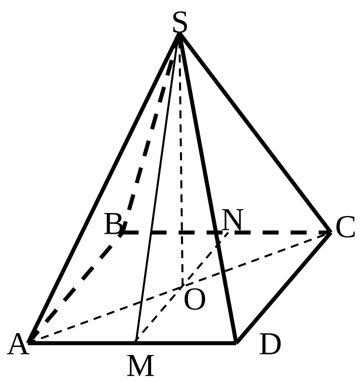


Рис. 2.17

Пригадавши суть названих прийомів, у відповідності до їх операційного складу проводимо аналіз розв’язування задачі.

Для цього спочатку побудуємо зображення піраміди. Нехай *SABCD* – дана правильна піраміда (рис. 2.17). Пригадавши означення правильної чотирикутної піраміди, формулу для обчислення бічної поверхні $S_б = \frac{1}{2} P \cdot l$, де P – периметр основи, а l – апофема бічної грані, учні приходять до висновку, що для обчислення бічної поверхні досить знайти сторону квадрата $ABCD$ і апофему SM. Розглянувши трикутник ASD, старшокласники стверджують, що він рівнобедрений, тому медіана SM є і висотою, тобто $SM \perp AD$. Далі, $OM \perp AD$ (за теоремою про три перпендикуляри). Оскільки основа O висоти SO піраміди є центром квадрата $ABCD$, то $OM = \frac{1}{2} AL$. Розглянувши малюнок і пригадавши означення двогранного кута, учні роблять висновок, що $\angle SMO$ є лінійним кутом двогранного кута при основі і за умовою $\angle SMO = \alpha$. Тому з ΔSMO ($\angle O = 90^\circ$), знаючи OM і $\angle SMO$, вони можуть знайти SM. Позначивши сторону основи через a, знаходять $AO = \frac{1}{2} AC$, а $AC = a\sqrt{2}$. Тоді старшокласники знаходять SO з ΔASO ($\angle O = 90^\circ$) і з ΔSMO ($\angle O = 90^\circ$). Прирівнявши праві частини цих двох рівностей, учні знаходять довжину сторони a. Підставивши значення у формулу, отримують відповідь.

Тепер переходимо до роздільного відпрацювання операцій, тобто проводимо синтез.

Позначимо сторону основи $AD = a$. Тоді $OM = \frac{1}{2} a$. З ΔSMO ($\angle O = 90^\circ$) знаходимо $SM = \frac{a}{2\sin\alpha}$. З ΔACD ($\angle D = 90^\circ$): $AC = a\sqrt{2}$, $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. З ΔSOM ($\angle O = 90^\circ$): $SO = \frac{a}{2} tg\alpha$ (1). З ΔSAO ($\angle O = 90^\circ$): $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}$ (2). З рівностей (1) і (2) учні отримують: $\frac{a}{2} tg\alpha = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}$, тобто $\frac{a^2}{4} tg^2\alpha = b^2 - \frac{a^2}{2}$; $\frac{a^2}{4}\left(tg^2\alpha + 2\right) = b^2$; $a = \frac{2b}{\sqrt{tg^2\alpha + 2}}$.

Далі обчислюється периметр: $P=\frac{8b}{\sqrt{tg^2\alpha+2}}$. $SM=\frac{a}{2\sin\alpha}=\frac{2b}{2\sin\alpha\sqrt{tg^2\alpha+2}}=$

$=\frac{b}{\sin\alpha\sqrt{tg^2\alpha+2}}$. Тепер обчислюється площа бічної поверхні $S_б=\frac{1}{2}P\cdot SM=$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{8b}{\sqrt{tg^2\alpha+2}}\cdot\frac{b}{\sin\alpha\sqrt{tg^2\alpha+2}}=\frac{4b^2ctg\alpha}{\cos^2\alpha+1}.$$

Для розв'язання задачі "Побудуйте переріз п'ятикутної піраміди *SABCDE* площиною, що проходить через сторону основи піраміди *AB* і точку *N* на ребрі *SD*" учням потрібно провести аналіз задачі. Для побудови перерізу піраміди досить знайти точки перетину січної площини, що визначається прямою *AB* і точкою *N*, з ребрами *SE* і *SC* (рис. 2.18).

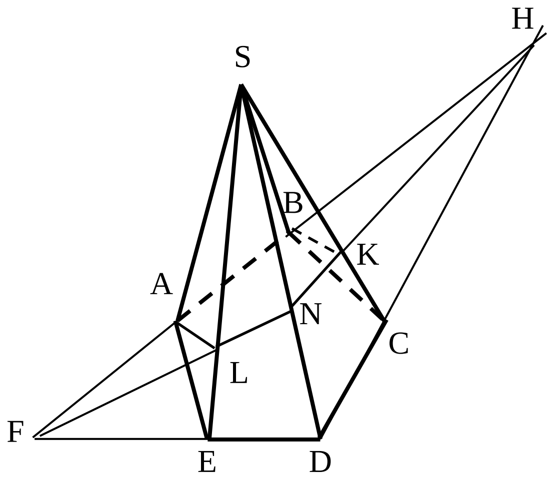


Рис. 2.18

Далі старшокласники переходять до роздільного відпрацювання операцій (синтезу).

Будуємо точку $F = AB\cap DE$ і точку $H = DC\cap AB$. Проводимо прямі *FN* і *HN*, одержимо точки $L = FN\cap SE$ і $K = SC\cap HN$. З'єднавши точки *A*, *L*, *N*, *K*, *B*, учні отримають шуканий переріз *ABKNL*.

Стосовно розв'язування задач такого типу на високому рівні навчальної діяльності учнів на перше місце висувається навчання не стільки способу дії, скільки аналізу ситуації. Нами організовується такий аналіз розв'язування задачі, при якому учні самостійно складають евристичну схему розв'язування (тобто використовується третій тип ООД). Даний тип ООД відповідає теоретичному рівню навчальної діяльності учнів.

Експериментальні дослідження переконують в тому, що диференційоване формування в старшокласників загальних прийомів евристичної діяльності сприяє свідомому засвоєнню ними теоретичного матеріалу, активному розв'язуванню задач різних типів, що значною мірою активізує евристичну діяльність учнів.

2.3. Формування спеціальних прийомів евристичної діяльності учнів на уроках стереометрії

Спеціальні прийоми евристичної діяльності учнів, як і загальні прийоми, займають важливе місце у "відкритті" понять, доведенні теорем та розв'язуванні задач. До спеціальних евристичних прийомів ми відносимо: введення допоміжних величин (допоміжного відрізка, допоміжного кута), введення допоміжних побудов, використання допоміжних задач та переформулювання задач (див. Р.I, п. 1.2, с. 46 – 52).

Прийом введення допоміжних величин полягає в тому, що, позначивши деяку величину через x і встановивши залежності між даними і шуканими величинами, з'єднавши їх знаком „=", одержуємо рівняння. При складанні рівнянь слід зауважити учням, що потрібно знайти такий відрізок (кут) або два рівних між собою відрізки (кути), які можна виразити двома різними способами через введений відрізок (кут) та дані величини і порівняти ці вирази; таким відрізком (кутом) може бути і один з даних відрізків.

Слід учням пояснити, що введення допоміжного кута полягає в тому, що, користуючись даними кутами, визначають один з тих кутів, який лежить з даною лінійною величиною в одному трикутнику, що дає можливість розв'язати геометричну задачу.

Спочатку доцільно вчити учнів вводити допоміжний кут у задачі, зв'язані з правильними призмами та пірамідами, а пізніше перейти до задач з іншими многогранниками [99].

Потрібно привчати учнів відшукувати такий лінійний елемент даного многогранника, який входить одночасно і в трикутник, що має шуканий кут, і в трикутник, що має даний кут (цей елемент не повинен бути в основі многогранника), і визначити його через вказані кути і елементи основи даного многогранника.

Допоміжні побудови слід проводити при розв'язуванні стереометричних задач, в яких задано двогранний кут між гранями призми чи піраміди, кут нахилу діагоналі паралелепіпеда до площини основи, відстань від основи висоти піраміди до бічної грані і т.д. На ці випадки постійно треба звертати увагу учнів, що дасть можливість сформувати в них цей прийом евристичної діяльності [130].

Щоб виникла допоміжна задача, доцільно розглядати евристичні завдання типу:

1. До даних задачі поставити такі запитання, що приведуть до отримання наслідків.
2. До деякої частини отриманих наслідків поставити відповідні запитання, що допоможуть розв’язати задачу самостійно [129].

Виникає необхідність навчити учнів формулювати і розв’язувати допоміжні задачі. Суть даного прийому полягає в тому, що учням пропонується до даного набору даних самостійно сформулювати питання та відповісти на нього, тобто сформулювати та розв’язати допоміжну задачу.

При розв’язуванні стереометричних задач часто потрібно розв’язати одну або кілька допоміжних задач. Після розв’язання останніх дана задача розв’язується вже значно простіше. Старшокласників доцільно постійно вчити виділяти ці задачі, формулювати їх умови і розв’язувати дані задачі. Допоміжними задачами при розв’язанні стереометричних задач постійно виступають планіметричні задачі [192].

Прийом переформулювання задач полягає в тому, що переформульована задача розв’язується значно легше і простіше, ніж дана задача. В учнів потрібно формувати уміння виконувати цю операцію.

В процесі диференційованого формування названих прийомів нами використовувались особливості рівневого навчання (див. Р.І, п. 1.1, с. 24 – 25), особистісно орієнтованого навчання (див. Р.І, п. 1.1, с. 18 – 20), поетапної та асоціативно-рефлекторної теорій навчання (див. Р.І, п. 1.3, с. 59 – 63).

Методику диференційованого формування спеціальних прийомів евристичної діяльності старшокласників розглянемо на прикладах стереометричних задач.

Середній рівень навчальних досягнень

Прийом введення допоміжного відрізка

Розв'язуючи задачу "В трикутній піраміді *SABC* бічні грані *SAB* і *SBC* перпендикулярні до площини основи, $\angle BCA = 90^\circ$, $\angle BAC = \beta$, $\angle SAB = \alpha$, $\angle SAB = \gamma$. Знайдіть залежність між кутами α, β і γ", учні під керівництвом вчителя спочатку пригадують операційний склад прийому введення допоміжного відрізка та відповідно до нього виконують такі дії:

1. Встановити мету діяльності: знайти залежність між кутами α, β і γ в піраміді *SABC*, ввівши допоміжний відрізок.

2. Згадати означення піраміди, означення перпендикулярності площин, співвідношення між елементами трикутника, теорему про три перпендикуляри.

3. Виконати зображення піраміди (рис. 2.19).

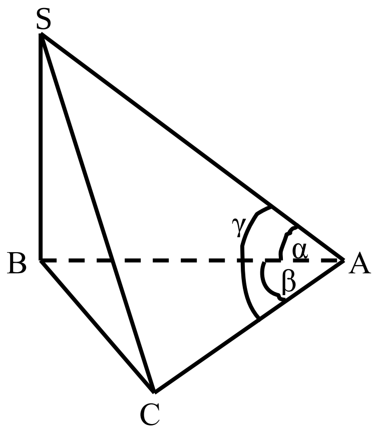


Рис. 2.19

Вчитель ставить питання: "Який відрізок варто взяти за допоміжний?" Відповідь: "За допоміжний відрізок доцільно взяти сторону основи *AB* = *a*".

Запитання до учнів: "Який наступний крок?" Старшокласники відповідають: "Можна знайти сторону *AC* з Δ*ABC* і сторону *AS* з Δ*ASB*. Далі, пригадавши теорему про три перпендикуляри та проаналізувавши задачу, потрібно зазначити, що коли $BC \perp AC$, то $SC \perp AC$. Тепер легко знайти $\cos\gamma$".

4. Сформулювати висновок: "Підставивши у вираз $\cos\gamma = \dfrac{AC}{AS}$ замість *AC* і *AS* їх значення, отримаємо відповідь".

Далі переходимо до роздільного відпрацювання операцій:

1. Проаналізувавши умову задачі, за допоміжний відрізок візьмемо сторону основи *AB* = *a*.

2. З Δ*ABC* ($\angle C = 90^\circ$) знаходимо $AC = AB\cos\beta = a \cdot \cos\beta$.

3. Знайдемо AS з ΔASB ($\angle B = 90^\circ$): $AS = \frac{AB}{\cos\alpha} = \frac{a}{\cos\alpha}$.

4. За умовою $BC \perp AC$, тому, пригадавши теорему про три перпендикуляри, можемо записати, що $SC \perp AC$.

5. Тоді з ΔACS ($\angle C = 90^\circ$) знаходимо $\cos\gamma = \frac{AC}{AS}$.

6. Підставивши значення в останній вираз, отримаємо шукане співвідношення між кутами α, β і γ: $\cos\gamma = \frac{AC}{AS} = \frac{a\cos\beta}{\frac{a}{\cos\alpha}} = \cos\alpha\cos\beta$.

Формування прийому введення допоміжного відрізка доцільно проводити і на такій задачі: “В основі призми лежить рівносторонній трикутник, площа якого $9\sqrt{3}$ см^2. Знайдіть об’єм призми, якщо її висота в $\sqrt{3}$ разів більша, ніж сторона основи”.

Розв’язування цієї задачі вимагає від учнів знання суті прийому та його операційного складу. Відповідно до нього старшокласники під керівництвом вчителя складають план:

1. Встановити мету дослідження: обчислити об’єм призми, використовуючи введення допоміжного відрізка.

2. Пригадати означення призми, рівностороннього трикутника, висоти призми, об’єму призми, формули об’єму призми, формулу для обчислення площі рівностороннього трикутника.

3. Старшокласники зазначають, що, провівши аналіз задачі, за допоміжний відрізок доцільно взяти довжину сторони основи призми. Пригадавши формулу для обчислення площі рівностороннього трикутника та прирівнявши її до величини, даної в умові, можна знайти сторону основи призми. Далі знаходять висоту призми. І, насамкінець, пригадавши формулу для обчислення об’єму призми, легко отримаємо шуканий результат.

4. Сформулювати висновок: “Підставляємо у формулу для обчислення об’єму знайдені величини і записуємо відповідь”.

Після цього переходимо до роздільного відпрацювання операцій:

1. Нехай довжина сторони основи призми *AB* дорівнює *a*.

2. Оскільки $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, а за умовою $S=9\sqrt{3}$см^2, то $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=9\sqrt{3}$, звідки $a^2 = 36$ см^2, $a = 6$ см.

3. Знаходимо висоту призми $h=a\sqrt{3}=6\sqrt{3}$ (см).

4. $V=S\cdot h=9\sqrt{3}\cdot 6\sqrt{3}=162$ (см^3).

<u>Прийом введення допоміжного кута</u>

Розв'язуючи задачу "Кут між бічними гранями правильної трикутної піраміди рівний α. Знайдіть відношення апофеми бічної грані піраміди до її бічного ребра", учні пригадують з допомогою вчителя операційний склад прийому та відповідно до нього записують:

1. Встановити мету діяльності: знайти відношення апофеми бічної грані піраміди до її бічного ребра, використавши для цього прийом введення допоміжного кута.

2. Пригадати означення правильної трикутної піраміди, кута між бічними гранями піраміди, апофеми бічної грані.

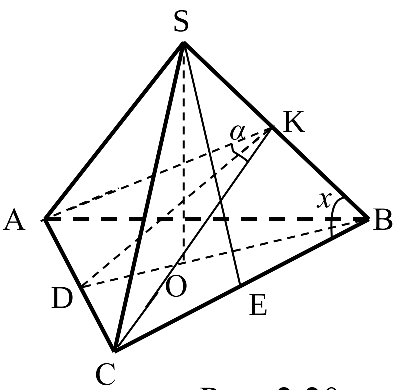


Рис. 2.20

3. Побудувати зображення піраміди (рис. 2.20). Далі учні виясняють, який кут слід вибрати за допоміжний. Проаналізувавши умову задачі, вони приходять до висновку, що за допоміжний кут доцільно взяти кут нахилу бічного ребра до сторони основи, тобто $\angle SBC=x$. Наступний крок нашої діяльності: проведення апофеми *SE* грані *SCB* та виконання запису: $\frac{SE}{SB}=\sin x$.

$\angle AKC=\alpha$ за умовою задачі, тоді $\angle DKC=\frac{\alpha}{2}$. Далі учні ставлять собі питання: "Які трикутники потрібно розглянути, щоб розв'язати задачу?" Старшокласники відповідають, що потрібно з $\triangle DKC(\angle D=90^\circ)$ виразити CK. Після цього з $\triangle CKB(\angle K=90^\circ)$ визначити CK.

Прирівнявши ліві частини рівностей, отримаємо шукане співвідношення.

4. Сформулювати висновок: “В отриману рівність підставляємо замість *CB* значення $2DC$ і отримуємо відповідь”.

Переходимо до роздільного відпрацювання операцій:

1. Провівши аналіз умови задачі, за допоміжний кут візьмемо $\angle SBC = x$.

2. Проведемо апофему *SE* грані *SCB* і запишемо: $\frac{SE}{SB} = \sin x$.

3. Оскільки $\angle AKC = \alpha$, $\angle DKC = \frac{\alpha}{2}$, то з $\triangle DKC (\angle D = 90^\circ)$ випливає, що $CK = \frac{DC}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

4. З $\triangle CKB (\angle K = 90^\circ)$: $CK = CB\sin x$. Прирівнявши ліві частини, отримаємо $\frac{DC}{\sin\frac{\alpha}{2}} = CB\sin x$. Але $CB = 2DC$, тому $\frac{DC}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 2DC\cdot\sin x$; $\sin x = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{SE}{SB}$.

Формувати прийом введення допоміжного кута доцільно і на прикладі такої задачі: “У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро нахилене до сторони основи під кутом α. Знайдіть апофему, якщо висота піраміди дорівнює *h*”.

Розв’язуючи дану задачу, учням потрібно пригадати суть даного прийому та його операційний склад і скласти план розв’язування:

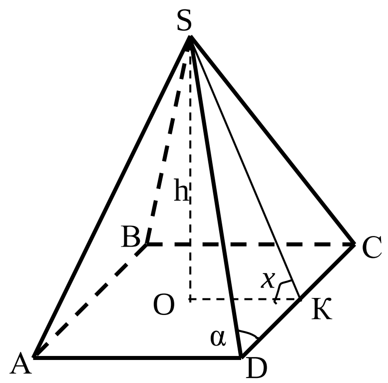


Рис. 2.21

1. Встановити мету діяльності: Знайти апофему правильної чотирикутної піраміди за допомогою введення допоміжного кута.

2. Повторити означення правильної чотирикутної піраміди, апофеми і висоти піраміди.

3. Виконати побудову зображення піраміди (рис. 2.21), провести аналіз умови задачі та пригадати означення, провести $SK \perp DC$. Слід зазначити, що за допоміжний кут доцільно взяти $\angle SKO = x$. Розглянути $\triangle SOK$ і $\triangle SDK$, знайти SK. Прирівнявши отримані дані, знайти значення $\cos x$.

4. Сформулювати висновок. Підставивши одержане значення у формулу, обчислити апофему.

Далі переходимо до роздільного відпрацювання учнями операцій під керівництвом вчителя:

1. Нехай *SABCD* – дана піраміда, $SO = h$, $\angle SDC = \alpha$.

2. Провівши $SK \perp DC$, бачимо, що за допоміжний кут варто взяти $\angle SKO = x$.

3. З $\triangle SOK(\angle O = 90^\circ)$: $SK = \dfrac{SO}{\sin x} = \dfrac{h}{\sin x}$, $OK = h \cdot ctg x$.

4. З $\triangle SDK(\angle K = 90^\circ)$: $SK = DK \cdot tg\alpha$, $DK = OK$, тому $SK = h \cdot ctg x \cdot tg\alpha$.

5. $\dfrac{h}{\sin x} = h \cdot ctg x \cdot tg\alpha$; $\sin x \cdot ctg x \cdot tg\alpha = 1$; $\cos x = \dfrac{1}{tg\alpha} = ctg\alpha$.

6. $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - ctg^2\alpha} = \dfrac{\sqrt{-\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}$. $SK = \dfrac{h \cdot \sin\alpha}{\sqrt{-\cos 2\alpha}}$.

<u>Прийом введення допоміжних побудов</u>

Розв'язуючи задачу "Основа піраміди – прямокутник із сторонами *6* см і *8* см. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює *13* см. Знайдіть висоту піраміди", учні при допомозі вчителя пригадують операційний склад прийому введення допоміжних побудов та відповідно до нього записують:

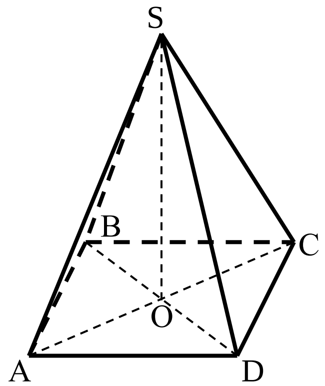


Рис. 2.22

1. Встановити мету діяльності: Знайти висоту піраміди, використовуючи прийом введення допоміжних побудов.

2. Пригадати означення піраміди, бічного ребра і висоти піраміди, теорему Піфагора.

3. Проаналізувати задачу та виконати зображення піраміди (рис. 2.22), прийти до висновку, що оскільки бічні ребра рівні, то їх проекції на площину основи теж рівні. Тому основа висоти є точкою перетину діагоналей прямокутника. Пригадати суть прийому введення допоміжних побудов, зазначити, що за допоміжну побудову варто вибрати побудову діагоналей основи і знайти точку *O* – точку їх перетину. Тоді *SO* – висота піраміди.

Згадавши теорему Піфагора, можна обчислити довжину діагоналі AC, потім AO.

4. Сформулювати висновок: “Розглянувши ΔSAO, знаходимо висоту SO піраміди”.

Переходимо далі до роздільного відпрацювання операцій:

1. Допоміжна побудова: провести діагоналі основи і знайти точку їх перетину.

2. За теоремою Піфагора: $AC=\sqrt{AD^2+DC^2}=10$ см. AO = 5 см.

3. З $\Delta SAO(\angle O=90^\circ)$ знаходимо висоту $SO=H=\sqrt{169-25}=12$ (см).

Розв’язування задачі “В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з катетом *6* см і гіпотенузою *12* см. Знайдіть об’єм піраміди, якщо всі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом *30*º” вимагає від учнів знання суті прийому введення допоміжних побудов та його операційного складу. Старшокласники під керівництвом вчителя складають план діяльності.

1. Встановити мету діяльності: обчислити об’єм піраміди, використавши прийом введення допоміжних побудов.

2. Повторити означення піраміди, прямокутного трикутника, формули для обчислення об’єму піраміди, співвідношення між сторонами прямокутного трикутника, кола, описаного навколо трикутника, теорему Піфагора.

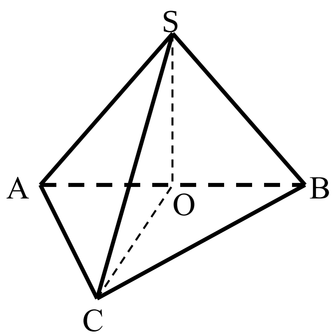


Рис. 2.23

3. Провести аналіз задачі та виконати зображення піраміди (рис. 2.23), прийти до висновку, що розв’язання задачі зводиться до побудови висоти *SO* піраміди. Оскільки бічні ребра нахилені до площини основи під однаковими кутами, то зазначити, що точка *O* – центр описаного кола, але ΔABC – прямокутний, тому точка *O* – середина *AB*. Далі легко знайти *AO*. З ΔASO знайти SO, а з ΔABC за теоремою Піфагора – *AC*.

4. Сформулювати висновок: “Пригадавши формулу для обчислення об’єму піраміди $V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot H$, отримуємо відповідь”.

Далі переходимо до відпрацювання операцій:

1. Допоміжна побудова: будуємо висоту *SO* піраміди.
2. Точка *O* – центр описаного кола, оскільки бічні ребра нахилені до площини основи під однаковими кутами і т. *O* – середина *AB*, бо ΔABC – прямокутний.
3. $AO = \frac{1}{2}AB$ = 6 см. З $\Delta ASO(\angle O=90^\circ)$: $SO=AO tg 30^\circ=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$(см).
4. З $\Delta ABC(\angle C=90^\circ)$: $AC=\sqrt{144-36}=6\sqrt{3}$(см).
5. $V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot H=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}=36$(см^3).

<u>Прийом використання допоміжних задач</u>

Розв’язуючи задачу “Знайдіть повну поверхню правильної шестикутної призми з стороною *a* і висотою *b*”, старшокласники під керівництвом вчителя спочатку пригадують операційний склад прийому використання допоміжних задач та відповідно до нього записують:

1. Встановити мету діяльності: Знайти повну поверхню правильної шестикутної призми, використовуючи прийом використання допоміжних задач.
2. Пригадати означення правильної призми, її елементів, формулу для обчислення повної поверхні призми, формули для обчислення площі правильного шестикутника та бічної поверхні призми.
3. Пригадати формулу для обчислення повної поверхні призми $S_п=2S_{осн}+S_б$. Далі вчитель ставить запитання учням: “Чи можна сформулювати допоміжну задачу?” Вони зазначають, що за допоміжну задачу варто взяти таку задачу: “Знайти площу правильного шестикутника із стороною *a*”. Далі учні пригадують формулу для обчислення площі правильного шестикутника і обчислюють її.
4. Сформулювати висновок: ”Підставивши значення у формулу, можна отримати відповідь”.

Переходимо до роздільного відпрацювання операцій:

1. $S_n = 2S_{осн} + S_б$.

2. Допоміжна задача: “Обчислити площу правильного шестикутника із стороною *a*”.

3. $S_{осн} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$.

4. $S_б = 6 \cdot a \cdot b$.

5. $S_n = 2 \cdot \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} + 6 \cdot ab = 3a^2\sqrt{3} + 6ab = 3a\left(\sqrt{3}a + 2b\right)$.

Формування прийому використання допоміжних задач доцільно проводити і на такій задачі: “Знайдіть об’єм прямокутного паралелепіпеда, якщо сторони основи *2* см і *3* см, а діагональ паралелепіпеда $\sqrt{38}$см”.

Розв’язування цієї задачі вимагає від учнів знання суті даного прийому та його операційного складу. Старшокласники відповідно до нього розмірковують під керівництвом вчителя:

1. Встановити мету діяльності: знайти об’єм прямокутного паралелепіпеда за допомогою прийому введення допоміжної задачі.

2. Пригадати означення прямокутного паралелепіпеда, формулу для обчислення об’єму паралелепіпеда.

3. Проаналізувавши задачу, учні відповідають на запитання вчителя: “Чи можете ви сформулювати допоміжну задачу? Що вам дає розв’язання допоміжної задачі?” Старшокласники формулюють допоміжну задачу: “Знайти висоту прямокутного паралелепіпеда, якщо сторони основи рівні *2* см і *3* см, а діагональ паралелепіпеда $\sqrt{38}$см”. Також вони відповідають, що розв’язання цієї задачі дає їм значення висоти, що є необхідним для розв’язання вихідної задачі. Учні пригадують формулу для обчислення діагоналі прямокутного паралелепіпеда $a^2 + b^2 + h^2 = l^2$, з якої можна знайти значення висоти h.

4. Сформулювати висновок: “Пригадавши формулу для обчислення об’єму паралелепіпеда $V = S \cdot H$, слід підставити значення в дану формулу і отримати відповідь”.

Далі переходимо до роздільного відпрацювання операцій:

1. Допоміжна задача: “Знайти висоту прямокутного паралелепіпеда, якщо сторони основи рівні *2* см і *3* см, а діагональ паралелепіпеда $\sqrt{38}$см”.

2. $a^2+b^2+h^2=l^2$; $h^2=38-4-9=25$(см^2); $h=5$см.

3. $V=S\cdot H=2\cdot 3\cdot 5=30$(см^3).

<u>Прийом переформулювання задач</u>

Розв’язуючи задачу “Бічні ребра трикутної піраміди взаємно перпендикулярні і кожне дорівнює *l*. Знайдіть об’єм піраміди”, учні під керівництвом вчителя пригадують суть прийому, його операційний склад та відповідно до нього складають план:

1. Встановити мету діяльності: знайти об’єм піраміди, використовуючи прийом переформулювання задач.

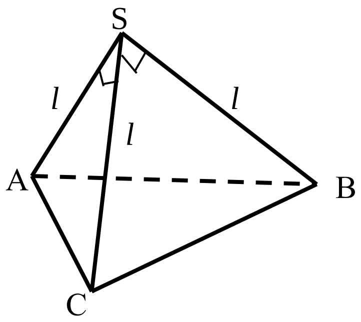


Рис. 2.24

2. Пригадати означення трикутної піраміди, бічного ребра піраміди, формулу для обчислення об’єму піраміди.

3. Побудувати зображення піраміди (рис. 2.24). Проаналізувавши задачу, бачимо, що якщо взяти одну з бічних граней, наприклад *ASC*, за основу, то цю задачу можна сформулювати так: “Основою трикутної піраміди є прямокутний рівнобедрений трикутник з катетом *l*. Бічне ребро піраміди перпендикулярне до площини основи і дорівнює *l*. Знайти об’єм піраміди”. Далі, пригадавши формулу, можна обчислити площу основи піраміди.

4. Сформулювати висновок: “Підставивши значення у формулу $V=\frac{1}{3}S\cdot H$, записати відповідь”.

Переходимо до роздільного відпрацювання операцій:

1. Переформулювання задачі: “Основою трикутної піраміди є прямокутний рівнобедрений трикутник з катетом *l*. Бічне ребро піраміди перпендикулярне до площини основи і дорівнює *l*. Знайти об’єм піраміди”.

2. $S = \frac{1}{2} \cdot l \cdot l = \frac{1}{2} \cdot l^2.$

3. $V = \frac{1}{3} S \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot l^2 \cdot l = \frac{1}{6} \cdot l^3.$

Формування прийому переформулювання задачі доцільно проводити і на такій задачі: “Площина, що проходить через сторону нижньої основи куба і середини двох бічних ребер, розбиває його на два многогранники. Знайдіть об’єм нижнього многогранника, якщо ребра куба рівні *6* см”.

Розв’язування цієї задачі вимагає від учнів знання суті прийому та його операційного складу. Відповідно до нього старшокласники під керівництвом вчителя розмірковують так:

1. Встановити мету діяльності: Знайти об’єм многогранника, використовуючи прийом переформулювання задачі.

2. Пригадати означення куба, многогранника, прямої призми, прямокутного трикутника, формули для обчислення площі трикутника і об’єму призми.

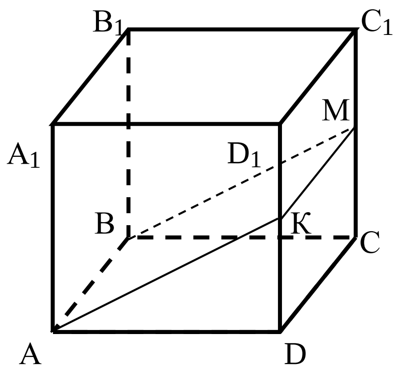


Рис. 2.25

3. Побудувати зображення куба (рис. 2.25). Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – даний куб. K – середина DD_1, M – середина CC_1. Що потрібно знайти? Учні відповідають, що потрібно обчислити об’єм многогранника $ABCDKM$. Аналізуючи задачу та згадані раніше означення, старшокласники під керівництвом вчителя приходять до висновку, що дану задачу можна переформулювати так: “Знайдіть об’єм прямої трикутної призми $ADKBCM$, основою якої є прямокутний трикутник з катетами *6* см і *3* см і висотою *6* см”.

Згадавши формулу для обчислення об’єму призми $V = S \cdot H$, учні бачать, що спочатку необхідно обчислити площу основи.

4. Сформулювати висновок: “Підставивши значення у формулу, легко отримати шуканий результат”.

Далі переходимо до відпрацювання операцій:

1. Переформульовання задачі: “Знайдіть об’єм прямої трикутної призми *ADKBCM*, основою якої є прямокутний трикутник з катетами *6* см і *3* см і висотою *6* см”.

2. $S=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3=9$(см^2).

3. $V=S\cdot H=9\cdot 6=54$ (см^3).

Під час розв’язування задач даного рівня вчителем не давались вказівки на виконання дії, учням давався лише зразок дії і називався її результат. Спосіб розв’язування старшокласники шукали методом спроб і помилок та вчились виконувати дану дію правильно, але вони не могли перенести дану дію на нові знання. Нами використовувався перший тип орієнтовної основи дій (ООД) для учнів з середнім рівнем навчальної діяльності, що, на нашу думку, відповідає емпіричному рівню засвоєння знань.

Сформульовані нами задачі відповідають емпіричному рівню навчальної діяльності учнів.

Достатній рівень навчальних досягнень

Прийом введення допоміжного відрізка

Задача “Основою прямого паралелепіпеда є ромб, площі діагональних перерізів якого дорівнюють *S* і *Q*. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда” дає можливість формувати в учнів прийом введення допоміжного відрізка наступним чином.

Пригадавши суть прийомів, учням ставляться питання відповідно до їх операційного складу.

Вчитель: Яка мета нашої діяльності?

Учні: Знайти площу бічної поверхні паралелепіпеда, ввівши допоміжний відрізок.

Вчитель: Яка наступна дія нашої діяльності?

Учні: Потрібно пригадати означення паралелепіпеда, прямого паралелепіпеда, ромба та їх властивості, формулу для обчислення площі бічної поверхні паралелепіпеда.

Вчитель: Чи могли б ви, проаналізувавши властивості паралелепіпеда, провівши аналіз задачі, зробити висновок, який відрізок ми візьмемо за допоміжний для обчислення площі бічної поверхні паралелепіпеда?

Учні: Проаналізувавши задачу, можемо зробити висновок, що за допоміжний відрізок доцільно взяти висоту паралелепіпеда, тобто бічне ребро.

Вчитель: Що необхідно зробити для розв'язання задачі?

Учні: Побудувати зображення (рис. 2.26) та виразити довжини діагоналей основи через дані величини в умові задачі. Після цього розглянути $\triangle A_1OD_1\ (\angle O = 90^\circ)$ і знайти сторону основи паралелепіпеда.

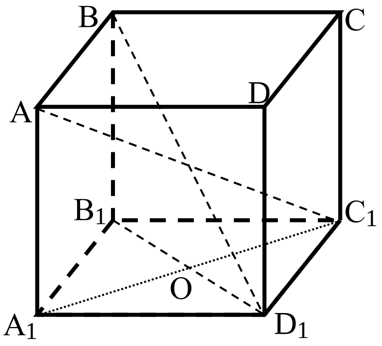


Рис. 2.26

Вчитель: Який результат отримаємо?

Учні: Пригадавши формулу для обчислення площі бічної поверхні паралелепіпеда, слід підставити в неї значення і записати відповідь.

Далі учні під керівництвом вчителя переходять до роздільного відпрацювання операцій:

1. Вводимо допоміжний відрізок $AA_1 = h$.
2. Тоді $h \cdot A_1C_1 = S,\ h \cdot B_1D_1 = Q$. Звідки $A_1C_1 = \frac{S}{h},\ B_1D_1 = \frac{Q}{h}$.
3. Розглянувши $\triangle A_1OD_1\ (\angle O = 90^\circ)$, знаходимо A_1D_1:

$$A_1D_1 = \sqrt{A_1O^2 + OD_1^2} = = \sqrt{\frac{A_1C_1^2}{4} + \frac{B_1D_1^2}{4}} = \frac{\sqrt{S^2 + Q^2}}{2h}.$$

4. Підставляємо значення у формулу

$$S_б = 4 \cdot A_1D_1 \cdot h = 4 \cdot \frac{\sqrt{S^2 + Q^2}}{2h} \cdot h = 2\sqrt{S^2 + Q^2}.$$

Розв'язуючи задачу "Сторони основ правильної зрізаної трикутної піраміди відносяться як *1:2*, висота піраміди дорівнює *3* см, бічне ребро утворює з більшою основою кут *45*º. Знайдіть площі основ піраміди", учні пригадують суть прийому і їм ставляться запитання відповідно до його операційного складу.

Вчитель: Яка мета нашого дослідження?

Учні: Знайти площі основ зрізаної піраміди, ввівши для полегшення обчислення допоміжний відрізок.

Вчитель: Яка наступна дія нашого дослідження?

Учні: Потрібно пригадати означення правильної піраміди, правильної зрізаної піраміди, їх властивості, означення висоти піраміди, формулу для обчислення площі правильного трикутника.

Вчитель: Чи можна, проаналізувавши властивості правильної зрізаної піраміди та провівши аналіз задачі, вказати, який відрізок візьмемо за допоміжний?

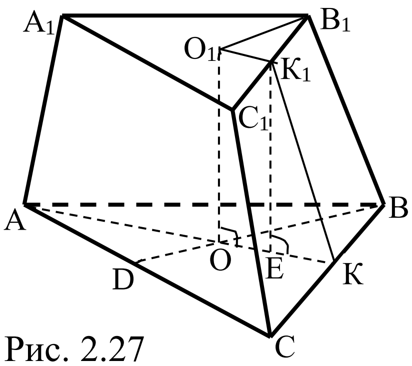


Рис. 2.27

Учні: Побудувавши зображення (рис. 2.27), проаналізувавши задачу та властивості зрізаної піраміди, можемо зробити висновок, що за допоміжний відрізок варто взяти сторону верхньої основи піраміди.

Вчитель: Що необхідно зробити для розв'язання задачі?

Учні: За умовою нам дано висоту $OO_1 = 3$ см і $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{1}{2}$. Оскільки SO – висота повної піраміди, SB – її бічне ребро, то OB – проекція SB на площину основи. Тому, $\angle SBO = 45^\circ$ і $\angle B_1BO = 45^\circ$. Розглянемо чотирикутник OO_1B_1B (рис. 2.28). Він є трапецією. Провівши $B_1F \parallel OO_1$, можна знайти $B_1F = OO_1$. Розглянувши $\triangle B_1BF (\angle F = 90^\circ)$, приходимо до висновку, що він рівнобедрений і $BF = B_1F$.

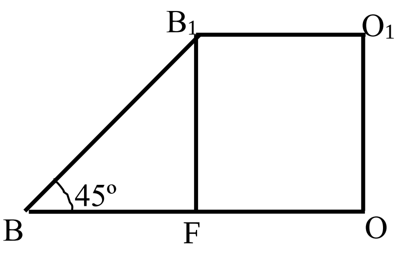


Рис. 2.28

Виходячи із співвідношення сторін основ піраміди, можна записати, що $A_1B_1 = x$ см, $AB = 2x$ см. Далі, розглядаючи $\triangle ABC$, можна знайти довжини відрізків BD і OB. Після цього обчислити O_1B_1, BF, A_1B_1 і AB.

Вчитель: Який результат отримаємо?

Учні: Пригадавши формулу для обчислення площі рівностороннього трикутника, обчислюємо площі основ.

Переходимо далі до роздільного відпрацювання операцій учнями під керівництвом вчителя:

1. Проведемо $B_1F \parallel OO_1$, тоді $B_1F = OO_1 = 3$ см.
2. З $\triangle B_1BF\left(\angle F = 90^\circ\right)$: $BF = B_1F = 3$ см.
3. Нехай $A_1B_1 = x$ см, $AB = 2x$ см. $BD = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{2x\sqrt{3}}{2} = x\sqrt{3}$(см); $OB = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3}x\sqrt{3} = \frac{2x}{\sqrt{3}}$ (см). $O_1B_1 = \frac{x}{\sqrt{3}}$ см.
4. Тоді $OB - O_1B_1 = \frac{2x}{\sqrt{3}} - \frac{x}{\sqrt{3}} = BF = 3$(см). Звідки $x = 3\sqrt{3}$см. $A_1B_1 = 3\sqrt{3}$см, $AB = 6\sqrt{3}$см.
5. Пригадавши формулу площі правильного трикутника, обчислюємо площі. $S_{ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(6\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3}$(см^2), $S_{A_1B_1C_1} = \frac{A_1B_1^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(3\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$(см^2).

<u>Прийом введення допоміжного кута</u>

Задача “В правильній трикутній піраміді сторона основи рівна *8* см, а плоский кут при вершині рівний *φ*. Знайдіть висоту піраміди” дає можливість формувати в учнів прийом введення допоміжного кута наступним чином.

Після того, як учні пригадають суть даного прийому, їм ставляться питання відповідно до операційного складу названого евристичного прийому.

Вчитель: Сформулюйте мету нашої діяльності.

Учні: Обчислити висоту правильної трикутної піраміди, використовуючи введення допоміжного кута.

Вчитель: Який наступний крок діяльності?

Учні: Потрібно пригадати означення правильної трикутної піраміди, плоского кута при вершині, співвідношення між сторонами прямокутного трикутника, означення висоти піраміди.

Вчитель: Що необхідно для розв’язання задачі?

Учні: Побудувати зображення піраміди (рис. 2.29). Проаналізувавши задачу, можемо зробити висновок, що за допоміжний кут варто взяти $\angle SDO = x$. Після цього, розглянувши ΔSDC, можна виразити відрізки SC і SD через введений нами кут. З $\Delta SAD (\angle D = 90^\circ)$ потрібно виразити SD через даний за умовою кут φ.

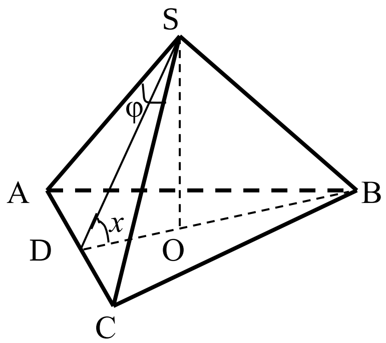


Рис. 2.29

Вчитель: Що залишається ще зробити?

Учні: Прирівнявши праві частини рівностей для SD, обчислити висоту піраміди.

Далі старшокласники під керівництвом вчителя переходять до роздільного відпрацювання операцій:

1. Вводимо допоміжний кут $\angle SDO = x$.

2. З $\Delta SDO (\angle O = 90^\circ)$: $SO = H = SD \sin x$, $SD = \dfrac{DO}{\cos x} = \dfrac{\frac{1}{3} DB}{\cos x} = \dfrac{\frac{1}{3} \cdot \frac{AC\sqrt{3}}{2}}{\cos x} =$

$= \dfrac{\frac{8\sqrt{3}}{6}}{\cos x} = \dfrac{4}{\sqrt{3}\cos x}$.

3. З $\Delta SAD (\angle D = 90^\circ)$: $SD = AD\, ctg \dfrac{\varphi}{2} = 4 \cdot ctg \dfrac{\varphi}{2}$.

4. $\dfrac{4}{\sqrt{3}\cos x} = 4 \cdot ctg \dfrac{\varphi}{2}$; $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{3}\, ctg \frac{\varphi}{2}}$.

5. Тоді, $H = SD \sin x = 4 \cdot ctg \dfrac{\varphi}{2} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 x} = 4 \cdot ctg \dfrac{\varphi}{2} \cdot \sqrt{1 - \dfrac{1}{3 ctg^2 \frac{\varphi}{2}}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \sqrt{3 ctg^2 \dfrac{\varphi}{2} - 1}$.

Також формуванню в учнів прийому введення допоміжного кута сприятиме і розв’язування такої задачі: “Основою похилого паралелепіпеда є квадрат, сторона якого дорівнює *а*. Одне з бічних ребер дорівнює b і утворює з кожною з прилеглих сторін основи кут *60º*. Знайдіть об’єм паралелепіпеда”.

Пригадавши суть прийому, ми ставимо учням питання відповідно до його операційного складу.

Вчитель: Сформулюйте мету нашої діяльності.

Учні: Знайти об'єм похилого паралелепіпеда, використовуючи прийом введення допоміжного кута.

Вчитель: Що спочатку необхідно зробити?

Учні: Спочатку потрібно пригадати означення похилого паралелепіпеда,

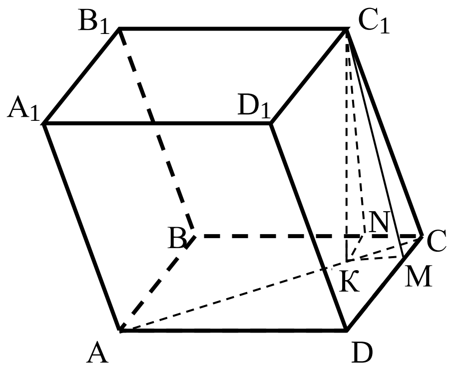


Рис. 2.30

квадрата, розв'язування прямокутних трикутників, формулу для обчислення об'єму паралелепіпеда.

Вчитель: Який наступний крок нашої діяльності?

Учні: Слід побудувати зображення паралелепіпеда (рис. 2.30). Проаналізувавши задачу, можна прийти до висновку, що за допоміжний кут варто взяти кут $\angle C_1CK = x$. Провівши висоту паралелепіпеда C_1K та розглянувши $\triangle C_1CK$, в якого $\angle K = 90^\circ$, слід виразити висоту C_1K. Після виконання допоміжних побудов $KM \perp DC$ і $KN \perp BC$, розглядаючи $\triangle C_1CM (\angle M = 90^\circ)$, знайти *MC*, а з $\triangle C_1CN (\angle N = 90^\circ)$ – *NC*.

В чотирикутнику *KNCM* всі кути прямі і *NC* = *MC*. Тому він є квадратом. Після цього обчислити довжину діагоналі *KC* квадрата *KNCM*. З $\triangle CC_1K\ (\angle K = 90^\circ)$ знайти *CK*. Прирівнявши значення *CK*, потрібно знайти *cosx*, а потім і саме значення допоміжного кута.

Вчитель: Що залишилось ще зробити?

Учні: Розглянути $\triangle C_1CK (\angle K = 90^\circ)$ та обчислити C_1K. Пригадавши формулу для обчислення об'єму паралелепіпеда та підставивши одержані значення, отримуємо результат.

Після цього учні під керівництвом вчителя переходять до роздільного відпрацювання операцій:

1. Вводимо допоміжний кут $\angle C_1CK = x$.

2. Проводимо висоту C_1K і з $\triangle C_1CK (\angle K = 90^\circ)$ знаходимо $C_1K = C_1C \cdot \sin x = b \sin x$.

3. Проводимо $KM \perp DC$ і $KN \perp BC$.

4. З $\triangle C_1CM(\angle M = 90^\circ)$: $MC = b \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}b$.

З $\triangle C_1CN(\angle N = 90^\circ)$: $NC = b \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}b$. Отже $KNCM$ – квадрат. $KC = CM \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}b$.

5. З $\triangle CC_1K\ (\angle K = 90^\circ)$: $CK = b \cdot \cos x$. $b \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}b$; $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = 45^\circ$.

6. З $\triangle C_1CK(\angle K = 90^\circ)$: $C_1K = b \cdot \sin 45^\circ = b\frac{\sqrt{2}}{2}$. $V = S \cdot H = a^2 \cdot \frac{b\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2b$.

<u>Прийом введення допоміжних побудов</u>

Розглянемо задачу: “Основа похилого паралелепіпеда – квадрат з стороною *a*, одна з вершин другої основи проектується в центр цього квадрата. Висота паралелепіпеда дорівнює *H*. Знайдіть бічну поверхню паралелепіпеда”.

Пригадавши суть прийому, учням ставляться питання відповідно до його операційного складу.

Вчитель: Яка мета нашої діяльності?

Учні: Знайти бічну поверхню паралелепіпеда, використовуючи прийом введення допоміжних побудов.

Вчитель: Яка наступна дія нашого дослідження?

Учні: Треба пригадати означення паралелепіпеда, квадрата, теорему про три перпендикуляри, формулу для обчислення площі бічної поверхні паралелепіпеда, ознаки рівності трикутників.

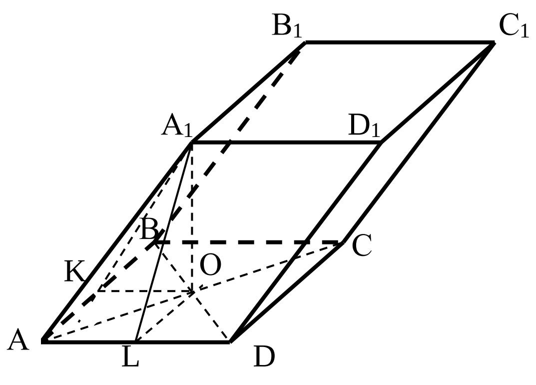


Рис. 2.31

Вчитель: Чи можна, проаналізувавши задачу, пригадавши означення та виконавши побудову зображення паралелепіпеда (рис. 2.31), запропонувати допоміжні побудови, що сприятимуть розв’язанню даної задачі?

Учні: Проаналізувавши задачу, можна запропонувати такі допоміжні побудови: через середини сторін AB і AD основи $ABCD$ провести OK, OL і A_1K, A_1L.

Вчитель: Що необхідно зробити для розв'язання задачі?

Учні: Пригадавши теорему про три перпендикуляри, можна зазначити, що $A_1K \perp AB$, $A_1L \perp AL$, тобто відрізки A_1K і A_1L є висотами граней ABB_1A_1 і ADD_1A_1. $\triangle A_1KO = \triangle A_1LO$ за двома катетами, тому ці грані рівновеликі. Далі можемо зауважити, що оскільки протилежні грані паралелепіпеда рівні, то в даному паралелепіпеді всі бічні грані рівновеликі, тому площу бічної поверхні можна обчислити наступним чином: $S_б = 4S_{ADD_1A_1}$.

Вчитель: Який результат отримаємо?

Учні: Підставити значення площі $S_{ADD_1A_1}$ і отримати розв'язок.

Далі учні під керівництвом вчителя переходять до роздільного відпрацювання операцій:

1. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – даний паралелепіпед і $O = AC \cap BL$, $A_1O \perp ABC$ і $A_1O = H$.

2. Допоміжні побудови: проведемо OK, OL і A_1K, A_1L через середини сторін AB і AD основи $ABCD$.

3. $OK \perp AB$, $OL \perp AL$. За теоремою про три перпендикуляри $A_1K \perp AB$, $A_1L \perp AL$, тобто відрізки A_1K і A_1L є висотами граней ABB_1A_1 і ADD_1A_1.

4. $\triangle A_1KO = \triangle A_1LO$ – за двома катетами, тому ABB_1A_1 і ADD_1A_1 – рівновеликі. А це означає, що всі бічні грані рівновеликі в даному паралелепіпеді.

5. $S_б = 4S_{ADD_1A_1} = 4 \cdot AD \cdot A_1L = 4a\sqrt{H^2 + \frac{a^2}{4}} = 2a\sqrt{4H^2 + a^2}$.

Розглянемо задачу: "Сторони основ правильної зрізаної трикутної піраміди дорівнюють *2* см і *6* см. Бічна грань утворює з більшою основою кут *60*º. Знайдіть висоту піраміди".

Згадавши суть названого прийому та його операційний склад, учні відповідають на питання вчителя.

Вчитель: Яка мета нашої діяльності?

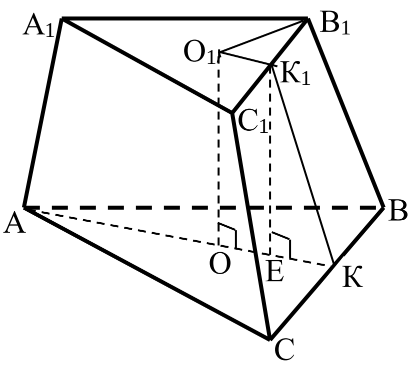


Рис. 2.32

Учні: Знайти висоту, використовуючи прийом введення допоміжних побудов.

Вчитель: З чого розпочнемо розв'язування задачі?

Учні: Потрібно пригадати означення правильної зрізаної трикутної піраміди, теорему про три перпендикуляри, співвідношення між сторонами прямокутного трикутника.

Вчитель: Чи можна, виконавши зображення піраміди (рис. 2.32), проаналізувавши задачу та пригадавши означення названих вище понять, запропонувати допоміжні побудови, які полегшать розв'язання даної задачі.

Учні: Якщо проаналізувати задачу, можна зазначити, що *SO* – висота повної піраміди і під допоміжною побудовою будемо розуміти проведення висоти *SK* бічної грані *SBC*.

Вчитель: Що потрібно зробити для розв'язання задачі?

Учні: Оскільки $OK \perp BC$ за теоремою про три перпендикуляри, то $\angle SKO = 60^\circ$, а отже, $\angle K_1KO = 60^\circ$. За умовою задачі піраміда правильна, то точка O – центр кола, вписаного в основу піраміди, OK – її радіус. Звідси можна знайти OK і O_1K_1.

Вчитель: Чи треба виконати ще одну допоміжну побудову?

Учні: Так, потрібно зробити ще одну допоміжну побудову: провести в трапеції OO_1K_1K, $K_1E \parallel O_1O$.

Вчитель: Які подальші дії?

Учні: Можна знайти $EK = OK - O_1K_1$. Після цього, розглянувши $\triangle K_1EK$ $(\angle E = 90^\circ)$, можна знайти K_1E.

Вчитель: Який результат отримаємо?

Учні: Оскільки $K_1E = O_1O$, то, підставивши значення, отримаємо розв'язок.

Після цього переходимо до відпрацювання операцій:

1. Основами даної піраміди є подібні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$.

2. Допоміжна побудова: оскільки SO – висота повної піраміди, то за допоміжну побудову візьмемо побудову висоти SK бічної грані SBC.

3. Тоді, $OK \perp BC$, тому $\angle SKO = 60^\circ$, а отже, $\angle K_1KO = 60^\circ$. Оскільки піраміда правильна, то точка O – центр кола, вписаного в основу піраміди, OK – її радіус. Звідси $OK = \frac{AC}{2\sqrt{3}} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$(см). $O_1K_1 = \frac{A_1C_1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (см).

4. Ще одна допоміжна побудова: проведемо $K_1E \parallel O_1O$ в трапеції OO_1K_1K, тоді $EK = OK - O_1K_1 = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (см).

5. З $\Delta K_1EK (\angle E = 90^\circ)$: $K_1E = EK \cdot tg 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = 2$ (см). Отже, $O_1O = 2$ см.

Прийом використання допоміжних задач

Розглянемо задачу: "В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція з бічною стороною c і гострим кутом α. Діагоналі цієї трапеції взаємно перпендикулярні. Діагональ призми утворює з площиною основи кут γ. Знайдіть об'єм призми".

Пригадавши суть прийому, учням ставляться питання відповідно до його операційного складу.

Вчитель: Яка мета діяльності?

Учні: Знайти об'єм призми, використовуючи прийом введення допоміжних задач.

Вчитель: З чого розпочнемо розв'язування?

Учні: Потрібно пригадати означення прямої призми, рівнобічної трапеції, їх властивості, співвідношення між сторонами в прямокутному трикутнику, формули для обчислення площі трапеції та для обчислення об'єму призми.

Вчитель: Який наступний крок розв'язування?

Учні: Побудувавши зображення призми (рис. 2.33) та проаналізувавши задачу, можна зазначити, що потрібно знайти площу трапеції і її діагональ, оскільки вони потрібні для обчислення об'єму призми.

Вчитель: Чи могли б ви сформулювати допоміжну задачу?

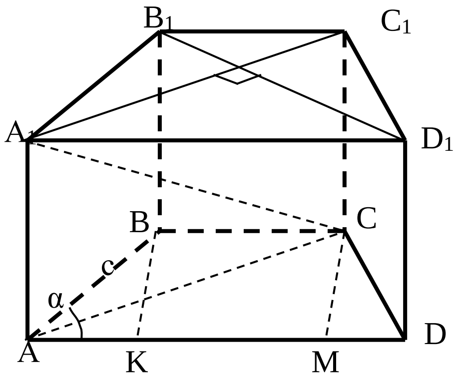


Рис. 2.33

Учні: Так. "У рівнобічній трапеції з бічною стороною *c* і гострим кутом α діагоналі взаємно перпендикулярні. Знайти площу і діагональ трапеції" (рис. 2.34).

Вчитель: Що необхідно зробити для розв'язання задачі?

Учні: Провести висоти *BK* і *CM* трапеції. Пригадавши співвідношення між сторонами прямокутного трикутника, з $\triangle ABK$ знайти BK. Оскільки $AC \perp BD$, то $\angle AON = \angle BOP = 45^\circ$, тому $\angle OAN = \angle OBP = 45^\circ$ і *BP = PO, AN = NO*. Тоді, $PN = \frac{1}{2}(AD + BC) = BK$.

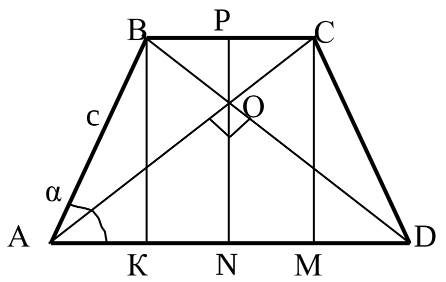


Рис. 2.34

Пригадавши формулу для обчислення площі трапеції, можна обчислити її площу. Залишається знайти діагональ трапеції. Площа трапеції дорівнює половині добутку діагоналей трапеції. Звідси можемо обчислити діагональ.

Вчитель: Що залишилось ще зробити?

Учні: Потрібно розв'язати основну задачу. Для цього знайти з $\triangle AA_1C$ висоту $AA_1 = H$.

Вчитель: Який результат отримаємо?

Учні: Згадавши формулу $V = S \cdot H$, слід підставити значення і записати відповідь.

Після цього учні під керівництвом вчителя переходять до роздільного відпрацювання операцій:

1. Допоміжна задача: “У рівнобічній трапеції з бічною стороною c і гострим кутом α діагоналі взаємно перпендикулярні. Знайти площу і діагональ трапеції”.

2. Проведемо BK і CM – висоти трапеції. З $\triangle ABK(\angle K=90^\circ)$: $BK=c\sin\alpha$. $AC\perp BL$, то $\angle AON=\angle BOP=45^\circ$, тому $\angle OAN=\angle OBP=45^\circ$ і $BP = PO$, $AN = NO$ і $PN=\frac{1}{2}(AD+BC)=BK=c\sin\alpha$.

3. $S=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot BK=BK^2=c^2\sin^2\alpha$. Але $S=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}AC^2=c^2\sin^2\alpha$; $AC=\sqrt{2}c\sin\alpha$.

4. З $\triangle AA_1C$ $(\angle A=90^\circ)$: $AA_1=H=ACtg\gamma=\sqrt{2}c\sin\alpha tg\gamma$.

Тоді, $V=SH=c^2\sin^2\alpha\cdot\sqrt{2}c\sin\alpha tg\gamma=\sqrt{2}c^3\sin^3\alpha tg\gamma$.

Розв’язуючи задачу “Знайдіть об’єм правильної чотирикутної зрізаної піраміди, сторони основи якої дорівнюють *4* дм і *8* дм, а діагональ – *11* дм”, учні пригадують суть прийому та відповідають на питання вчителя відповідно до операційного складу.

Вчитель: Яка мета нашої діяльності?

Учні: Знайти об’єм правильної чотирикутної зрізаної піраміди, використовуючи прийом введення допоміжних задач.

Вчитель: З чого почнемо розв’язування задачі?

Учні: Нам треба пригадати означення правильної чотирикутної зрізаної піраміди, кола, описаного навколо правильного чотирикутника, трапеції, формули площі квадрата, об’єму зрізаної піраміди, співвідношення між сторонами прямокутного трикутника, теорему Піфагора.

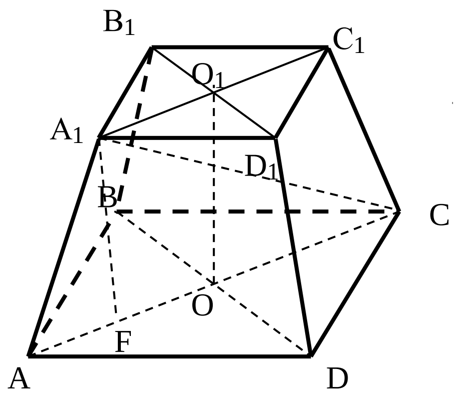


Рис. 2.35

Вчитель: Який наступний крок розв’язування?

Учні: Побудувати зображення зрізаної піраміди $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2.35). Провести аналіз задачі і згадати означення правильної зрізаної піраміди, знайти площі основ S_{ABC1} і $S_{A_1B_1C_1D_1}$. Точка O – центр описаного кола навколо нижньої основи, а O_1 – центр описаного кола навколо верхньої основи, тому можна відмітити, що OA і O_1A_1 – радіуси описаних кіл і обчислити їх.

Вчитель: Що необхідно зробити для розв’язання задачі?

Учні: Розглянути діагональний переріз піраміди і прийти до висновку: щоб знайти об’єм піраміди, потрібно обчислити висоту OO_1. Отже, можна сформулювати допоміжну задачу: “У рівнобічній трапеції AA_1C_1C діагональ $A_1C = 11$ дм, а сторони основ $4\sqrt{2}$ дм і $8\sqrt{2}$ дм. Знайти висоту OO_1 трапеції” (рис. 2.36).

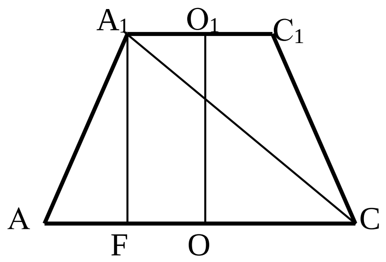


Рис. 2.36

Провести $A_1F \parallel OO_1$ і обчислити AF і FC. З $\Delta A_1FC (\angle F = 90^\circ)$ знайти A_1F, а значить, і OO_1.

Вчитель: Який висновок?

Учні: Пригадати формулу для обчислення об’єму зрізаної піраміди, підставити значення і записати відповідь.

Після цього переходимо до відпрацювання операцій:

1. $S_{ABCD} = AB^2 = 64$(дм^2), $S_{A_1B_1C_1D_1} = A_1B_1^2 = 16$(дм^2).

2. Якщо O – центр описаного кола навколо нижньої основи, а O_1 – центр описаного кола навколо верхньої основи, то OA і O_1A_1 – радіуси описаних кіл $O_1A_1 = \dfrac{A_1B_1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ (дм), $OA = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$(дм).

3. Допоміжна задача: “У рівнобічній трапеції AA_1C_1C діагональ $A_1C = 11$ дм, а сторони основ $4\sqrt{2}$ дм і $8\sqrt{2}$ дм. Знайти висоту OO_1 трапеції”.

4. Проведемо $A_1F \parallel OO_1$. $AF = AO - A_1O_1 = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$(дм). $FC = AC - AF = 8\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ (дм). З $\Delta A_1FC (\angle F = 90^\circ)$: $A_1F = \sqrt{A_1C^2 - FC^2} = \sqrt{11^2 - \left(6\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{121 - 72} = 7$(дм). $OO_1 = FA_1 = 7$ дм.

5. $V = \frac{1}{3} \cdot OO_1 \cdot \left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right) = \frac{1}{3} 7\left(64 + \sqrt{64 \cdot 16} + 16\right) = \frac{1}{3} 7\left(64 + 32 + 16\right) =$

$= \frac{7}{3} \cdot 112 = \frac{784}{3}$ (дм^3).

<u>Прийом переформулювання задач</u>

Задача "Бічні ребра трикутної піраміди взаємно перпендикулярні і кожне дорівнює *l*. Знайдіть об'єм зрізаної піраміди, яку відтинає від даної піраміди площина, що проходить через середини бічних ребер" дає можливість формувати в учнів прийом переформулювання задач наступним чином.

Коли учні пригадують суть названого евристичного прийому, ми ставимо питання їм відповідно до операційного складу прийому.

Вчитель: Яка мета діяльності?

Учні: Знайти об'єм зрізаної піраміди, використовуючи прийом переформулювання задач.

Вчитель: З чого розпочнемо нашу діяльність?

Учні: Потрібно пригадати означення піраміди, зрізаної піраміди, прямокутного трикутника, многогранника, формули для обчислення площі трикутника і об'єму піраміди.

Вчитель: Що необхідно зробити для розв'язання задачі?

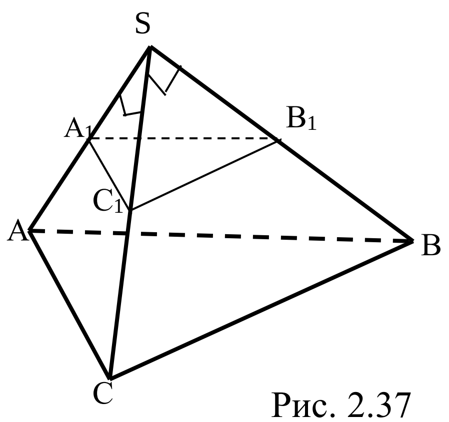


Рис. 2.37

Учні: Виконати побудову зображення даної піраміди (рис. 2.37) та проаналізувати задачу.

Вчитель: Чи могли б ви для полегшення розв'язання переформулювати задачу.

Учні: Так, якщо за основу піраміди взяти одну з бічних граней, наприклад, *SAC*. Тоді дану задачу можна переформулювати так: "Основою трикутної піраміди є прямокутний рівнобедрений трикутник з катетом *l*. Одне бічне ребро піраміди перпендикулярне до площини основи і дорівнює *l*. Площина, що проходить через середини рівних ребер, ділить дану піраміду на два многогранники. Знайти об'єм більшого многогранника".

Вчитель: Як розв'язувати цю задачу?

Учні: Позначити V_{SABC} всієї піраміди через V, об'єм $V_{SA_1B_1C_1}$ через V_1, а об'єм $V_{ABCA_1B_1C_1}$ многогранника, що залишився, через V_2. Тоді об'єм більшого многогранника, а це буде $ABCA_1B_1C_1$, можна обчислити наступним чином: $V_2 = V - V_1$.

Вчитель: Що залишається зробити?

Учні: Оскільки для обчислення об'єму піраміди потрібно знайти попередньо площу основи, то необхідно пригадати формулу для обчислення площі прямокутного трикутника та, підставивши значення, обчислити результат.

Після цього під керівництвом вчителя учні переходять до відпрацювання операцій:

1. Переформульовуємо задачу: "Основою трикутної піраміди є прямокутний рівнобедрений трикутник з катетом l. Одне бічне ребро піраміди перпендикулярне до площини основи і дорівнює l. Площина, що проходить через середини рівних ребер, ділить дану піраміду на два многогранники. Знайти об'єм більшого многогранника".
2. $V_{SABC} = V$, $V_{SA_1B_1C_1} = V_1$, $V_{ABCA_1B_1C_1} = V_2$.
3. $S_{SAC} = \frac{1}{2}l^2$, $S_{SA_1C_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2$.
4. $V_2 = V - V_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}l^2\cdot l - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2\cdot\frac{l}{2} = \frac{1}{6}l^3 - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8}l^3 = \frac{7}{48}l^3$.

Формувати даний прийом доцільно на прикладі і такої задачі: "Одне ребро трикутної піраміди дорівнює *4* см, а кожне з інших дорівнює *3* см. Знайдіть об'єм піраміди".

Пригадавши суть прийому, ми ставимо учням питання відповідно до його операційного складу.

Вчитель: Яка мета нашої діяльності?

Учні: Знайти об’єм піраміди, використовуючи прийом переформулювання задач.

Вчитель: З чого розпочнемо наше дослідження?

Учні: Треба пригадати означення трикутної піраміди, рівнобедреного трикутника, кола, описаного навколо трикутника, формули для обчислення об’єму піраміди, радіуса описаного навколо трикутника кола, теорему Піфагора, формулу Герона.

Вчитель: Який наступний крок нашої діяльності?

Учні: Побудувати зображення піраміди (рис. 2.38), проаналізувати задачу і поміркувати, чи можна переформулювати задачу для полегшення розв’язання.

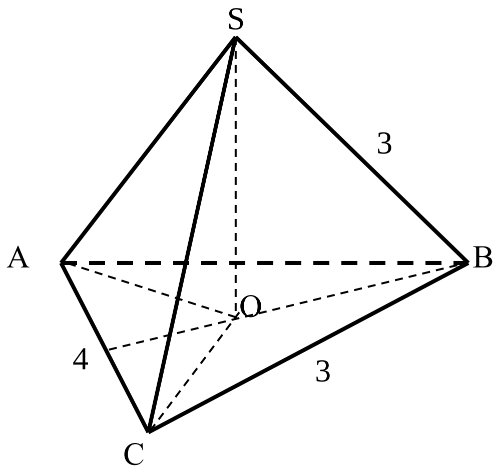


Рис. 2.38

Вчитель: Чи можна переформулювати дану задачу?

Учні: Ми вважаємо, що коли за основу піраміди взяти трикутник з сторонами *3* см, *3* см і *4* см, то всі бічні ребра будуть рівні *3* см і задача розв’язується легше, тому її слід переформулювати так: “В основі трикутної піраміди лежить рівнобедрений трикутник з основою *4* см і бічною стороною *3* см. Всі бічні ребра рівні і дорівнюють бічній стороні основи. Знайти об’єм піраміди”.

Вчитель: Що необхідно зробити для розв’язання задачі?

Учні: Оскільки бічні ребра піраміди рівні, то можна стверджувати, що рівні і їх проекції на площину основи. Тому висота піраміди проектується в центр описаного кола. Пригадуючи означення описаного навколо трикутника кола та формулу для обчислення радіуса описаного кола $R=\frac{abc}{4S}$, можна за формулою Герона обчислити площу основи *S*, а потім радіус *R*. Розглянути $\triangle SOB(\angle O=90^\circ)$. З нього за теоремою Піфагора обчислити висоту $SO=H$.

Вчитель: Що залишається ще зробити?

Учні: Записати формулу для обчислення об'єму піраміди $V=\frac{1}{3}S\cdot H$ та підставити значення.

Після цього переходимо до роздільного відпрацювання операцій:

1. Переформульовуємо задачу: "В основі трикутної піраміди лежить рівнобедрений трикутник з основою *4* см і бічною стороною *3* см. Всі бічні ребра рівні і дорівнюють бічній стороні основи. Знайти об'єм піраміди".

2. $S_{осн}=\sqrt{5\cdot 1\cdot 2\cdot 2}=2\sqrt{5}$(см^2). $R=OB=\frac{abc}{4S}=\frac{3\cdot 3\cdot 4}{4\cdot 2\sqrt{5}}=\frac{9}{2\sqrt{5}}$(см).

3. З $\triangle SOB(\angle O=90^\circ)$: $SO=\sqrt{SB^2-OB^2}=\sqrt{9-\frac{81}{20}}=\frac{3\sqrt{11}}{2\sqrt{5}}$(см).

4. $V=\frac{1}{3}2\sqrt{5}\cdot\frac{3\sqrt{11}}{2\sqrt{5}}=\sqrt{11}$(см^3).

В процесі розв'язування даних задач нами давались учням вказівки, як правильно виконувати дії чи завдання, тому при кожному повторенні дії пункти схеми розв'язання, що складені нами, виступали для учнів опорними точками, необхідною умовою правильного виконання дії. Ми переконані в правильності застосування другого типу ООД до задач достатнього рівня. Даний тип ООД відповідає емпірично-теоретичному рівню засвоєння навчальної діяльності учнями.

Високий рівень навчальних досягнень

Прийом введення допоміжного відрізка

Розглянемо задачу: "У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро рівне *b*, а двогранний кут при основі – α. Знайдіть бічну поверхню піраміди".

Згадавши суть прийому введення допоміжного відрізка, проводимо аналіз розв'язування задачі відповідно до його операційного складу.

Для кращого аналізу задачі виконаємо побудову зображення піраміди.

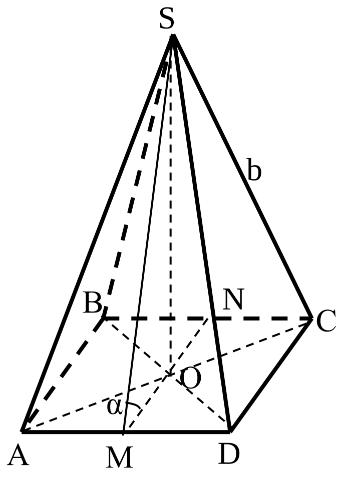


Рис. 2.39

Нехай *SABCD* – дана піраміда (рис. 2.39). Пригадавши означення правильної чотирикутної піраміди, двогранного кута, формулу для знаходження площі бічної поверхні піраміди та провівши аналіз задачі, учні приходять до висновку, що за допоміжний відрізок потрібно взяти сторону основи піраміди. Провівши $NM \parallel AB$, можна записати, що $NM \perp AD$ і $OM = \frac{1}{2}AB$. $\angle SMO = \alpha$ – за умовою задачі. Далі, розглянувши $\triangle SOM$, в якому $\angle O = 90^\circ$, можна обчислити SM, а з $\triangle SOC$, в якому $\angle O = 90^\circ$, знайти $SO = H$, попередньо обчисливши OC як половину діагоналі квадрата із стороною a. Також слід обчислити SC, розглянувши $\triangle SOM$ ($\angle O = 90^\circ$). Прирівнявши знайдені значення висоти SC, обчислити сторону основи a. Після цього знайти периметр основи і апофему SM.

Пригадавши формулу для обчислення бічної поверхні піраміди і підставивши дані значення, старшокласники можуть отримати шукану відповідь.

Тепер переходимо до роздільного відпрацювання операцій.

Нехай $AB = a$. Провівши $NM \parallel AB$, бачимо, що $NM \perp AD$. Тоді $OM = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$ і $\angle SMO = \alpha$ (за умовою). З $\triangle SOM$ ($\angle O = 90^\circ$): $SM = \frac{a}{2\cos\alpha}$.

$OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. З $\triangle SOC$ ($\angle O = 90^\circ$): $SO = H = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{b^2 - \frac{2a^2}{4}} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}$.

З $\triangle SOM$($\angle O = 90^\circ$): $SO = H = \frac{a}{2}tg\alpha$.

Можемо записати: $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a}{2}tg\alpha$; $b^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4}tg^2\alpha$; $a^2 = \frac{b^2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}tg^2\alpha}$;

$a = \frac{2b}{\sqrt{2 + tg^2\alpha}}$. Тоді $P = \frac{8b}{\sqrt{2 + tg^2\alpha}}$. Обчислимо $SM = \frac{a}{2\cos\alpha} = \frac{2b}{2\cos\alpha \cdot \sqrt{2 + tg^2\alpha}} =$

$$=\frac{b}{\sqrt{2+tg^2\alpha}\cos\alpha}.\quad \text{Отже, } S_б=\frac{1}{2}P\cdot SM=\frac{1}{2}\cdot\frac{8b}{\sqrt{2+tg^2\alpha}}\cdot\frac{b}{\sqrt{2+tg^2\alpha}\cos\alpha}=\frac{4b^2}{\left(2+tg^2\alpha\right)\cos\alpha}=$$

$$=\frac{4b^2\cos\alpha}{2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{4b^2\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha}.$$

Розв'язуючи задачу "Довжини сторін основ і висота правильної чотирикутної зрізаної піраміди відносяться як *4,5:3:1*. Площа бічної поверхні – *3* дм^2. Знайдіть площу повної поверхні піраміди", учні пригадують суть прийому введення допоміжного відрізка і відповідно до його операційного складу проводять аналіз задачі.

Побудувавши зображення правильної чотирикутної зрізаної піраміди (рис. 2.40), пригадавши означення правильної зрізаної піраміди, її властивості, формули для обчислення площі бічної та повної поверхонь піраміди і проаналізувавши умову задачі, учні приходять до висновку, що за допоміжний відрізок потрібно взяти висоту піраміди $OO_1 = x$. Далі слід виразити OK, O_1K_1 і LK. Розглянувши ΔK_1LK ($\angle L = 90^\circ$), обчислити KK_1. Після цього знайти x, використавши формулу бічної поверхні піраміди.

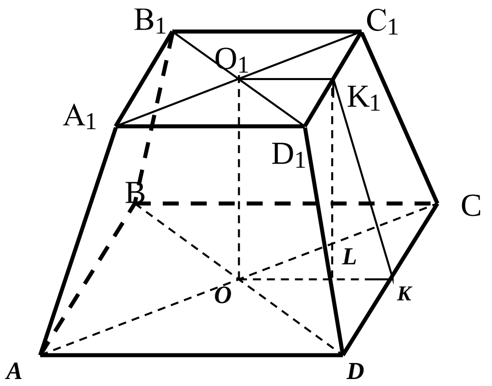


Рис. 2.40

Далі обчислити площі основ $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$. Пригадавши формулу для обчислення повної поверхні зрізаної піраміди та підставивши знайдені значення, старшокласники отримують відповідь.

Переходимо до роздільного відпрацювання операцій.

Оскільки $OK \parallel O_1K_1$, то $OKK_1O_1 \perp ABC$, бо $OO_1 \perp ABC$. Проведемо в площині OKK_1O_1 відрізок $K_1L \perp OK$. Нехай $OO_1 = x$. Тоді $AD = 4,5x$, $A_1D_1 = 3x$. Оскільки $OK=\frac{1}{2}AD=2,25x$, $O_1K_1=\frac{1}{2}A_1D_1=1,5x$, то

$$LK=OK-OL=OK-O_1K_1=2,25x-1,5x==0,75x.$$

З ΔK_1LK $(\angle L=90^\circ)$: $KK_1=\sqrt{K_1L^2+LK^2}=\sqrt{x^2+(0,75x)^2}=\frac{5}{4}x$. За умовою: $S_б=3\,дм^2=300\,см^2=4\cdot S_{CDD_1C_1}=4\cdot\frac{1}{2}(CD+C_1D_1)KK_1=4\cdot\frac{1}{2}(4,5x+3x)\cdot\frac{5}{4}x=\frac{75}{4}x^2$. Звідси $x^2=\frac{300\cdot 4}{75}=16$; $x=4$ см.

Отже, $AD=4,5\cdot 4=18$ (см), $A_1D_1=3\cdot 4=12$ (см), тому $S_{ABCD}=18^2=324$ (см^2), $S_{A_1B_1C_1D_1}=12^2=144$ (см^2). $S_п=S_б+S_{осн}=300+324+144=768$ (см^2).

<u>Прийом введення допоміжного кута</u>

Для формування в учнів прийому введення допоміжного кута на високому рівні доцільно розглянути задачу: „У правильній трикутній піраміді з висотою *h* через сторону основи *a* проведено площину, яка перетинає протилежне ребро під прямим кутом. Знайдіть площу перерізу”.

Пригадавши суть названого евристичного прийому, у відповідності до його операційного складу проводимо аналіз задачі.

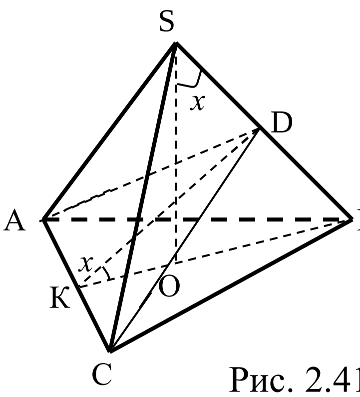


Рис. 2.41

Будують спочатку зображення піраміди (рис. 2.41). Нехай *SABC* – дана піраміда, *AC* = *a*, *SO* = *h*, $SB\perp ACD$. Пригадавши означення правильної трикутної піраміди, формули для обчислення площі трикутника та провівши аналіз умови задачі, учні приходять до висновку, що за допоміжний кут доцільно взяти кут нахилу площини перерізу піраміди до площини основи піраміди: $\angle DKB=x$. Тоді $S_{\Delta ADC}=S_{\Delta ABC}\cdot\cos x$. Розглянувши ΔSOB і ΔKDB, старшокласники зазначають, що вони подібні (за гострим кутом *B*). Далі з $\Delta SOB(\angle O=90^\circ)$ знайти $tg x=\frac{OB}{SO}$. Підставивши значення в останній вираз і піднісши його до квадрата та виразивши з нього *cosx*, слід підставити отримані значення у формулу $S_{\Delta ADC}=S_{\Delta ABC}\cdot\cos x$ і отримати розв’язок.

Тепер переходимо до роздільного відпрацювання операцій.

Введемо допоміжний кут $\angle DKB = x$. Тоді $S_{\Delta ADC} = S_{\Delta ABC}\cdot\cos x$. $\Delta SOB \sim \Delta KDB$ (за гострим кутом B). З $\Delta SOB(\angle O = 90^\circ)$: $tg x = \frac{OB}{SO} = \frac{a\sqrt{3}}{3h} = \frac{a}{\sqrt{3}h}$.

$$tg^2x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1; \quad tg^2x\cdot\cos^2 x + \cos^2 x = 1. \quad \cos^2 x = \frac{1}{tg^2x+1} = \frac{1}{\frac{a^2}{3h^2}+1} =$$

$= \frac{3h^2}{a^2+3h^2}$. Звідси $\cos x = \frac{\sqrt{3}h}{\sqrt{a^2+3h^2}}$. Тоді, $S_{\Delta ADC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}h}{\sqrt{a^2+3h^2}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{a^2h}{\sqrt{a^2+3h^2}}$.

Розв'язуючи задачу „Грані паралелепіпеда – рівні ромби із стороною a і гострим кутом α. Знайдіть об'єм паралелепіпеда", учні пригадують суть прийому введення допоміжного кута та проводять аналіз задачі відповідно до операційного складу прийому.

Будують спочатку зображення паралелепіпеда (рис. 2.42). Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – даний паралелепіпед. Пригадавши означення паралелепіпеда, його властивості, теорему про три перпендикуляри, формулу для обчислення об'єму паралелепіпеда та проаналізувавши умову задачі, учні зазначають, що, провівши $C_1K \perp ABC$ і $C_1M \perp DC$, $C_1N \perp CB$, можна отримати $KM \perp CD$ і $KN \perp BC$ (за теоремою про три перпендикуляри).

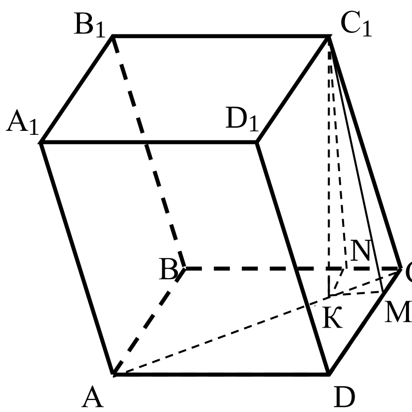


Рис. 2.42

Розглянувши $\Delta C_1CM(\angle M = 90^\circ)$, знаходять CM і C_1M, а з $\Delta C_1CN(\angle N = 90^\circ)$ – CN і C_1N. З отриманих значень випливає, що $CM = CN$ і $C_1M = C_1N$, то і $KN = KM$ як проекції рівних похилих C_1M і C_1N. Тому $\Delta CNK = \Delta CMK$ за двома катетами. Звідси випливає, що $\angle NCK = \angle MCK$ і точка K – лежить на бісектрисі кута NCM. Далі старшокласники пропонують ввести допоміжний кут $\angle C_1CK = x$, оскільки він буде потрібний для знаходження висоти паралелепіпеда. Знаходять KC з $\Delta C_1CK(\angle K = 90^\circ)$ і з $\Delta CMK(\angle M = 90^\circ)$. Прирівнявши отримані значення, обчислюють $\cos x$. Після цього з $\Delta C_1CK(\angle K = 90^\circ)$ остаточно знаходять значення висоти C_1K.

Пригадавши формулу для обчислення об’єму паралелепіпеда $V = S \cdot H$ та підставивши відповідні значення, отримують розв’язок задачі.

Далі переходимо до відпрацювання операцій:

1. Проведемо $C_1K \perp ABC$ і $C_1M \perp DC$, $C_1N \perp CB$, тоді за теоремою про три перпендикуляри отримаємо: $KM \perp CD$ і $KN \perp BC$.

2. З $\triangle C_1CM (\angle M = 90^\circ)$: $CM = CC_1 \cdot \cos\alpha = a \cdot \cos\alpha$, $C_1M = CC_1 \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\alpha$.

3. З $\triangle C_1CN (\angle N = 90^\circ)$: $CN = CC_1 \cdot \cos\alpha = a \cdot \cos\alpha$, $C_1N = CC_1 \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\alpha$.

Отже, $CM = CN$ і $C_1M = C_1N$, то і $KN = KM$. Звідси $\triangle CNK = \triangle CMK$ (за двома катетами).

4. $\angle NCK = \angle MCK$, тоді точка K належить бісектрисі кута NCM.

5. Введемо допоміжний кут $\angle C_1CK = x$.

6. З $\triangle C_1CK (\angle K = 90^\circ)$: $KC = a \cdot \cos x$. З $\triangle CMK (\angle M = 90^\circ)$: $KC = \dfrac{CM}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{a\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. Тоді $a\cos x = \dfrac{a\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}$; $\cos x = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

7. З $\triangle C_1CK (\angle K = 90^\circ)$: $C_1K = CC_1 \cdot \sin x = a\sin x =$

$$a\sqrt{1-\cos^2 x} = a\sqrt{1-\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\alpha}.$$

8. $$V = S \cdot H = a^2\sin\alpha \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\alpha} = 2a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\alpha}.$$

<u>Прийом введення допоміжних побудов</u>

Розглянемо задачу: “Основою піраміди є правильний трикутник; з трьох бічних граней піраміди одна перпендикулярна до площини основи, а дві інші нахилені до неї під кутом α. Під яким кутом нахилені до площини основи бічні ребра?”

Пригадавши суть прийому введення допоміжних побудов, проводимо аналіз задачі відповідно до його операційного складу.

Будуємо зображення піраміди (рис. 2.43). Нехай у даній піраміді *SABC* грань *SAC* перпендикулярна до площини основи, а грані *SAB* і *SBC* утворюють з нею кути α. Учні зазначають, оскільки грань *SAC* перпендикулярна до площини основи, то висота ΔSAC буде висотою піраміди. Пригадавши означення піраміди, правильного трикутника, лінійного кута, теорему про три перпендикуляри, середньої лінії трикутника, співвідношення між сторонами прямокутного трикутника та проаналізувавши умову задачі, старшокласники пропонують наступні допоміжні побудови: провести висоту *CF* трикутника основи *ABC* (*AF* = *FB*); через основу *O* висоти піраміди провести $OD \parallel CF$ і сполучити точки *D* і *S*.

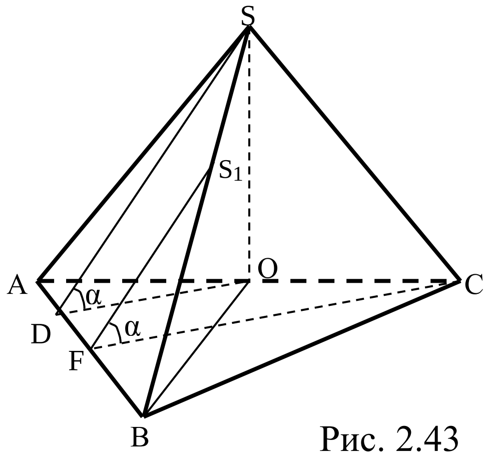


Рис. 2.43

Далі учні, пригадавши означення лінійного кута двогранного кута, зазначають, що кут *SDO* буде лінійним кутом двогранного кута між гранню *SAB* і площиною основи піраміди, бо $OD \parallel CF$, а $CF \perp AB$, то і $OD \perp AB$. За теоремою про три перпендикуляри отримують: $SD \perp AB$. Отже, $\angle SDO$ є лінійним кутом двогранного кута.

Після того, як учні згадали означення правильного трикутника і те, що грані *SAB* і *SBC* однаково нахилені до площини основи, роблять висновок, що висота піраміди проходить через середину сторони *AC*. Отже, потрібно знайти кути $\angle SBO$ і $\angle SAO = \angle SCO$.

Далі старшокласники, позначивши сторону основи піраміди через *a* та згадавши означення середньої лінії трикутника, знаходять OD з ΔAFC. З ΔSDO знаходять висоту SO, а потім з ΔSAO – $tg\angle SAO$.

Обчисливши значення BO, учні з ΔSBO знаходять $tg\angle SBO$.

Після цього переходимо до роздільного відпрацювання операцій:

1. Оскільки $SAC \perp ABC$, то *SO* – висота піраміди.

2. Допоміжні побудови: проводимо висоту *CF* (*AF* = *FB*), проводимо $OD \parallel CF$ через точку *O*, з’єднуємо точки *D* і *S*.

3. $\angle SDO$ – лінійний кут двогранного кута між *SAB* і *ABC*, бо $OD \parallel CF$, а $CF \perp AB$, то і $OD \perp AB$. Тоді $SD \perp AB$ за теоремою про три перпендикуляри. Звідси випливає, що $\angle SDO$ є лінійним кутом двогранного кута.

4. $\triangle ABC$ – правильний і грані *SAB* та *SBC* однаково нахилені до нього, тому висота піраміди *SO* проходить через середину сторони *AC*. Отже, потрібно знайти кути $\angle SBO$ і $\angle SAO = \angle SCO$.

5. Нехай $AC = a$. Тоді $OD = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ як середня лінія ΔAFC.

6. З $\triangle SDO (\angle O = 90^\circ)$: $SO = OD\, tg\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{4} tg\alpha.$

З $\triangle SAO (\angle O = 90^\circ)$: $tg\angle SAO = \frac{SO}{AO} = \frac{2a\sqrt{3}}{4a} tg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} tg\alpha.$

$BO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $tg\angle SBO = \frac{SO}{BO} = \frac{2a\sqrt{3}}{4a\sqrt{3}} tg\alpha = \frac{1}{2} tg\alpha.$

Розв’язуючи задачу “Основами зрізаної піраміди є квадрати зі сторонами *8* см і *4* см. Одна з бічних граней – рівнобічна трапеція, що перпендикулярна до площин основ, а протилежна до неї грань утворює з площиною основи кут 60º. Знайдіть бічну поверхню зрізаної піраміди”, учнями пригадується суть прийому, відповідно до його операційного складу проводиться аналіз задачі.

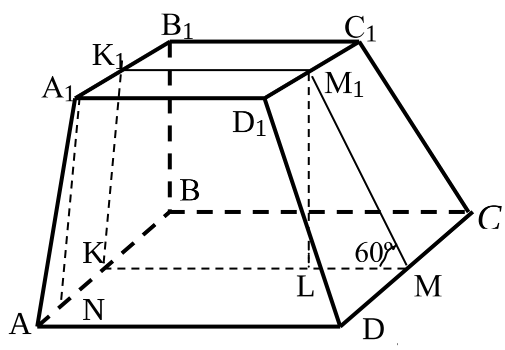


Рис. 2.44

Будуємо зображення зрізаної піраміди (рис. 2.44). Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – дана піраміда, $ABB_1 \perp ABC$, $AA_1 = BB_1$. Пригадавши означення зрізаної піраміди, квадрата, трапеції, теорему про три перпендикуляри, співвідношення між сторонами прямокутного трикутника, формулу для обчислення площі трапеції, формулу для обчислення площі бічної поверхні зрізаної піраміди та проаналізувавши задачу, учні приходять до висновку, що для обчислення бічної поверхні потрібно знайти площі бічних граней, отже, за допоміжні побудови пропонують вибрати такі: провести апофему KK_1 грані AA_1B_1B і апофему MM_1 грані DD_1C_1C та провести $A_1N \parallel KK_1$ і $M_1L \parallel KK_1$.

Пригадавши теорему про три перпендикуляри, старшокласники зазначають, що $KM \perp DC$, бо $MM_1 \perp DC$. За умовою $\angle M_1ML = 60^\circ$. Оскільки $KK_1 \perp AB$, то і $KK_1 \perp ABC$, тому $\angle K_1KM = \angle M_1LM$. Далі знаходять довжини відрізків KL і LM. З ΔM_1LM знаходять MM_1 і LM_1. Оскільки основами піраміди є квадрати, то $\angle BAD = 90^\circ$, тому за теоремою про три перпендикуляри можна записати: $\angle A_1AD = \angle B_1BC = 90^\circ$.

Після цього можна обчислити площі граней ABB_1A_1 і CDD_1C_1. Оскільки $A_1N \parallel KK_1$, то можна знайти AN. З $\Delta A_1NA\,(\angle N = 90^\circ)$ знаходять довжину відрізка AA_1 та обчислюють площу грані ADD_1A_1. Пригадавши формулу для обчислення площі бічної поверхні і зазначивши, що площі граней ADD_1A_1 і BB_1C_1C – рівні, знаходять шукану площу.

Далі переходимо до відпрацювання операцій.

Проведемо апофему KK_1 грані AA_1B_1B і апофему MM_1 грані DD_1C_1C та $A_1N \parallel KK_1$ і $M_1L \parallel KK_1$. $KM \perp DC$, бо $MM_1 \perp DC$. За умовою $\angle M_1ML = 60^\circ$. Оскільки $KK_1 \perp AB$, то і $KK_1 \perp ABC$, тому $\angle K_1KM = \angle M_1LM = 90^\circ$ і $KL = K_1M_1 = 4$см, а $LM = KM - KL = 8 - 4 = 4$(см).

З $\Delta M_1LM\,(\angle L = 90^\circ)$: $MM_1 = \dfrac{LM}{\cos 60^\circ} = 2LM = 8$(см). $LM_1 = K_1K = LM \cdot tg\,60^\circ = 4\sqrt{3}$(см). $\angle BAD = 90^\circ$, то і $\angle A_1AD = 90^\circ = \angle B_1BC$.

$S_{ABB_1A_1} = \dfrac{1}{2}\left(AB + A_1B_1\right) \cdot K_1K = \dfrac{1}{2}(8+4) \cdot 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$ (см^2).

$S_{CDD_1C_1} = \dfrac{1}{2}\left(CD + C_1D_1\right) \cdot MM_1 = \dfrac{1}{2}(8+4) \cdot 8 = 48$(см^2). Оскільки $A_1N \parallel KK_1$, то $AN = AK - A_1K_1 = 4 - 2 = 2$(см) і $\angle ANA_1 = 90^\circ$, тому $AA_1 = \sqrt{AN^2 + A_1N^2} = \sqrt{4+48} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ (см). $S_{ADD_1A_1} = \dfrac{1}{2}\left(AD + A_1D_1\right) \cdot AA_1 = \dfrac{1}{2}(8+4) \cdot 2\sqrt{13} = 12\sqrt{13}$ (см^2).

Тоді, $S_б = 24\sqrt{3} + 48 + 2 \cdot 12\sqrt{13} = 24\left(2 + \sqrt{3} + \sqrt{13}\right)$ (см^2).

Прийом введення допоміжних задач

Розв'язування задачі "Основою прямого паралелепіпеда є паралелограм, у якого одна з діагоналей дорівнює *17* см, а сторони рівні *9* см і *10* см. Площа повної поверхні паралелепіпеда рівна *334* см^2. Знайдіть об'єм паралелепіпеда" вимагає знання учнями суті прийому та проведення аналізу задачі відповідно до його операційного складу.

Побудуємо зображення паралелепіпеда (рис. 2.45). Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – даний паралелепіпед. Пригадавши означення паралелепіпеда, паралелограма, властивість діагоналей паралелограма, формули для обчислення площі паралелограма, повної і бічної поверхонь паралелепіпеда, об'єму паралелепіпеда та провівши аналіз задачі, учні приходять до висновку, що потрібно розв'язати допоміжну задачу: " Сторони паралелограма рівні *9* см і *10* см, а одна з діагоналей – *17* см. Знайти площу паралелограма і другу діагональ".

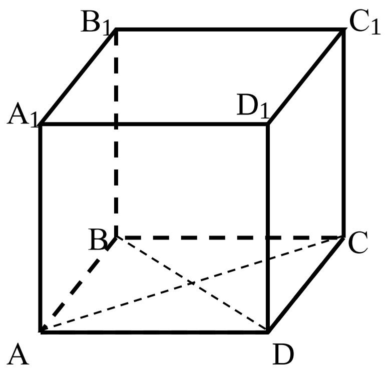


Рис. 2.45

Згадавши властивість діагоналей паралелограма, можна знайти другу діагональ паралелограма і обчислити площу паралелограма, як дві площі трикутника *ABC*, використовуючи формулу Герона. Після цього обчислити бічну поверхню паралелепіпеда. З формули $S_б = P \cdot H$ знайти висоту *H*.

Пригадавши формулу для об'єму паралелепіпеда та підставивши значення, учні отримують результат.

Після цього переходимо до роздільного відпрацювання операцій:

1. Допоміжна задача: "Сторони паралелограма рівні *9* см і *10* см, а одна з діагоналей – *17* см. Знайти площу паралелограма і другу діагональ".
2. $x^2 + 17^2 = 2 \cdot 9^2 + 2 \cdot 10^2$; $x^2 = 162 + 200 - 289$; $x^2 = 73$; $x = \sqrt{73} < 17$.
3. Отже, $AC = 17$ см, $BD = \sqrt{73}$ см. Тоді, $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2\sqrt{18 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 1} = 72$ (см^2).

4. $S_п = 2S_{осн} + S_б = 334$ (см^2). $S_б = 334 - 2\cdot 72 = 334 - 144 = 190$ (см^2). $S_б = PH =$ $= 2(9+10)\cdot H = 190$ (см^2), звідки $H = \frac{190}{38} = 5$ (см).

5. $V = SH = 72\cdot 5 = 360$ (см^3).

Розглянемо задачу: “В основі прямої призми лежить прямокутна трапеція з гострим кутом α. Більша діагональ трапеції дорівнює l і є бісектрисою гострого кута. Більша діагональ призми утворює з площиною основи кут β. Знайдіть об’єм призми”.

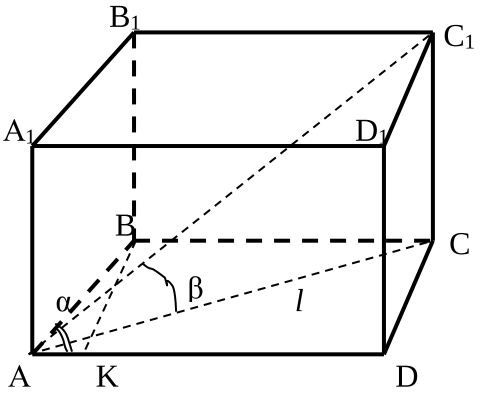


Рис. 2.46

Згадавши суть прийому введення допоміжних задач, проводимо аналіз задачі відповідно до його операційного складу.

Будуємо зображення прямої призми (рис. 2.46). Пригадавши означення прямої призми, прямокутної трапеції, бісектриси кута, діагоналі трапеції, співвідношення між сторонами прямокутного трикутника, формули для обчислення площі трапеції, об’єму призми та проаналізувавши умову задачі, учні приходять до висновку, що за допоміжну задачу, яка допоможе обчислити об’єм призми, варто взяти таку: “У прямокутній трапеції з гострим кутом α більша діагональ рівна l і є бісектрисою гострого кута. Знайти площу трапеції” (рис. 2.47).

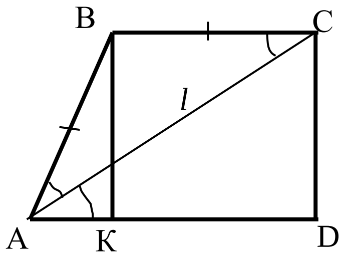


Рис. 2.47

Оскільки $\angle BAC = \angle CAD$, а $\angle BCA = \angle CAD$, то $\angle BAC = \angle BCA$ і $AB = BC$. З ΔACD можна знайти сторони CD і AD, а з ΔABK – сторону AK.

Пригадавши формулу для обчислення площі трапеції, обчислюють її значення: $S = \frac{1}{2}(AD + BC)\cdot CD$.

Оскільки AC є проекцією AC_1 на площину основи і $AC > BD$, то слід зазначити, що і $AC_1 > BD_1$, тому $\angle C_1AC = \beta$. Далі з ΔACC_1 знаходять висоту $H = CC_1$, яка необхідна для обчислення об’єму призми.

Пригадавши формулу для об’єму призми, можна записати формулу $V=S\cdot H$, підставити значення та знайти результат.

Далі переходимо до відпрацювання операцій:

1. Допоміжна задача: “У прямокутній трапеції з гострим кутом α більша діагональ рівна *l* і є бісектрисою гострого кута. Знайти площу трапеції”.

2. $\angle BAC = \angle CAD$, а $\angle BCA = \angle CAD$, то $\angle BAC = \angle BCA$ і $AB = BC$. З $\triangle ACD\ (\angle D = 90^\circ)$: $CD = BK = l\sin\frac{\alpha}{2}$; $AD = l\cos\frac{\alpha}{2}$.

З $\triangle ABK\ (\angle K = 90^\circ)$: $AB = BC = \frac{BK}{\sin\alpha} = \frac{l\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = \frac{l}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

3. $S = \frac{1}{2}(AD + BC)\cdot CD = \frac{1}{2}\left(l\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{l}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\right)\cdot l\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}l^2\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 1\right)tg\frac{\alpha}{2}$.

4. *AC* – проекція AC_1 на площину основи і $AC > BD$, то і $AC_1 > BD_1$, тому $\angle C_1AC = \beta$. З $\triangle AC_1C\ (\angle C = 90^\circ)$: $H = CC_1 = AC\,tg\beta = l\cdot tg\beta$.

5. $V = SH = \frac{1}{4}l^2\cdot\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 1\right)\cdot tg\frac{\alpha}{2}\cdot l\cdot tg\beta = \frac{1}{4}l^3\cdot tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\beta\cdot\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 1\right)$.

<u>Прийом переформулювання задач</u>

Використовуючи задачу “У зрізаному паралелепіпеді три бічні ребра мають довжини *15* см, *23* см, *18* см відповідно. Знайдіть четверте бічне ребро”, в учнів можна формувати прийом переформулювання задач наступним чином.

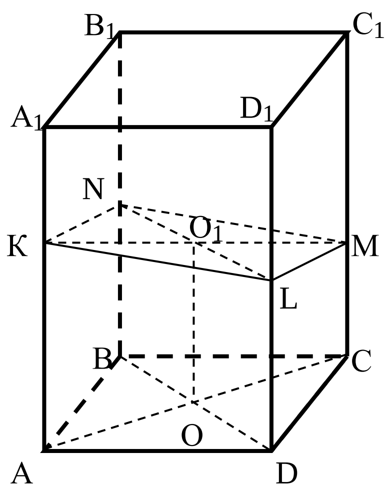


Рис. 2.48

Пригадуючи суть даного прийому, у відповідності до його операційного складу проводимо аналіз задачі.

Спочатку будуємо зображення паралелепіпеда (рис. 2.48). Пригадавши означення паралелепіпеда, трапеції, середньої лінії трапеції та провівши аналіз умови задачі, учні помічають, що для спрощення розв’язання даної задачі її потрібно переформулювати так: “Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На променях AA_1, BB_1 і DD_1 взято такі точки K, N і L відповідно, що $AK = 23$ см, $BN = 15$ см і $DL = 18$ см. Площина KNL перетинає пряму CC_1 в точці M. Знайдіть довжину відрізка MC”.

Пригадавши означення трапеції, слід зазначити, що $AKMC$ і $BNDL$ – трапеції і OO_1 – їх середня лінія. Далі варто згадати формулу для обчислення середньої лінії трапеції і записати $OO_1 = \frac{1}{2}(BN + DL) = \frac{1}{2}(AK + CM)$. З останньої рівності виразити CM.

Тепер переходимо до роздільного виконання операцій.

Записавши переформульовану задачу, розглядають чотирикутники $AKMC$ і $BNDL$, які є трапеціями, OO_1 – їх середня лінія.

Тоді, $OO_1 = \frac{1}{2}(BN + DL) = \frac{1}{2}(15 + 18) = \frac{1}{2}(AK + CM)$.

Звідки $CM = 33 - 23 = 10$ (см).

Відповідно до розв’язування задач на високому рівні навчальної діяльності нами висувався на перше місце не стільки спосіб дії, скільки аналіз ситуації. Ми старалися організувати такий аналіз розв’язування задачі, щоб учні самостійно складали евристичну схему розв’язування. В процесі розв’язування задач високого рівня користувались третім типом ООД, що відповідає теоретичному рівню навчальної діяльності учнів.

Розроблена нами система задач дає змогу диференційовано формувати у старшокласників спеціальні прийоми евристичної діяльності. Оволодіння цими прийомами учнями дає можливість активізувати їх евристичну діяльність при вивченні стереометрії.

Результати формувального експерименту дають можливість нам стверджувати, що в результаті навчання диференційованому формуванню прийомів евристичної діяльності учні вільно володіють, свідомо застосовують як загальні, так і спеціальні евристичні прийоми, підвищують рівень своєї підготовки, знаходять оптимальні варіанти розв'язування стереометричних задач (див. таблиця 2.1).

Таблиця 2.1

Рівні володіння учнями прийомами евристичної діяльності після проведення формувального експерименту

Рівні навчальної діяльності / Евристичні прийоми		Середній, %	Достатній, %	Високий, %
1.	Порівняння	20	43	37
2.	Аналогія	17	45	38
3.	Узагальнення	23	40	37
4.	Конкретизація	21	45	34
5.	Аналіз	16	48	36
6.	Синтез	18	43	39
7.	Введення допоміжних величин:			
	а) допоміжного відрізка;	24	49	27
	б) допоміжного кута.	21	38	41
8.	Введення допоміжних побудов	16	48	36
9.	Введення допоміжних задач	19	46	35
10.	Переформулювання задач	25	40	35

Порівнюючи таблиці 1.1 і 2.1, бачимо, що диференційоване формування прийомів евристичної діяльності в процесі вивчення стереометрії значно підвищило рівні навчальних досягнень старшокласників

2.4. Використання інформаційних технологій для диференційованого формування прийомів евристичної діяльності учнів на уроках стереометрії

Порівняно недавно в шкільному курсі геометрії стали використовувати сучасні інформаційні технології. Проте ця реальність, визначена надзвичайною складністю і важливістю цього навчального предмету для розумового розвитку школярів, активізації їх евристичної діяльності, приносить позитивні результати і має дидактично виправдану перспективу розвитку. Особливо привабливою вбачається ідея запровадження комп’ютерної підтримки на уроках стереометрії.

На даний час існує небагато програмних продуктів, які можна з ефективністю використовувати в шкільній практиці для підтримки вивчення стереометрії. Великий вплив на навчання геометрії в старшій школі може спричинити цільове навчальне використання вітчизняного програмного засобу GRAN-3D, створеного на кафедрі інформатики НПУ імені М.П. Драгоманова [88]. Розробляючи методику диференційованого формування евристичних прийомів на уроках стереометрії за допомогою програмних засобів управління діяльністю учнів, були поставлені такі завдання:

- розглянути можливості використання програмного продукту GRAN-3D для диференційованого формування прийомів евристичної діяльності старшокласників під час розв’язування стереометричних задач на побудову, доведення, обчислення;
- організувати використання важливих функцій цього педагогічного програмного засобу, що переконливо вирізняється серед інших комп’ютерних програм з геометрії навчального призначення – в ньому раціонально підібрані алгоритми виконання швидких побудов та обчислень, реалістичного відображення моделей просторових об’єктів, програмно організовані можливості здійснення імітаційних досліджень в просторі.

Використання згаданого програмного засобу під час розв’язування задач стереометрії дозволяє учням оперувати динамічними геометричними об’єктами, відіграє велику роль у запобіганні помилок, які часто трапляються в розв’язуванні задач такого типу, а також є засобом формування в них широких узагальнень на різному графічному матеріалі. Дані задачі є однією з форм використання знань, набутих у процесі вивчення стереометрії.

Для активізації евристичної діяльності учнів задачі, які їм пропонуються для розв’язування, повинні не тільки розширювати і поглиблювати теоретичні знання, але й містити евристичні прийоми в розв’язанні. Проілюструємо ці положення на конкретних задачах.

1. Побудувати переріз паралелепіпеда площиною, що проходить через кінці трьох ребер, які виходять з однієї вершини.

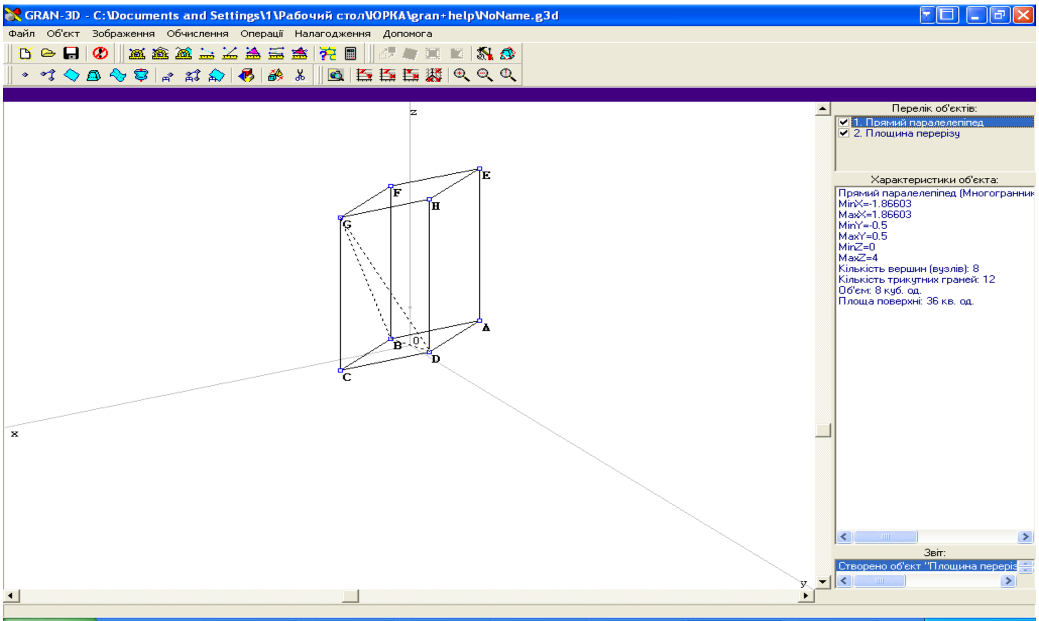


Рис. 2.49

Використовуючи програмний продукт GRAN-3D, учні будують паралелепіпед: Об’єкт \ Створити \ Паралелепіпед. Потім відмічають точки B, D і G та будують ламану BDG (Об’єкт \ Створити з екрану \ Ламана). GBD – шуканий переріз (рис. 2.49).

2. Побудувати переріз трикутної піраміди площиною, яка проходить через дві вершини основи і точку на бічному ребрі.

Учні будуть піраміду, використовуючи послуги програми GRAN-3D: Об'єкт \ Створити \ Многогранник. Потім на ребрі *BD* будують точку *E*

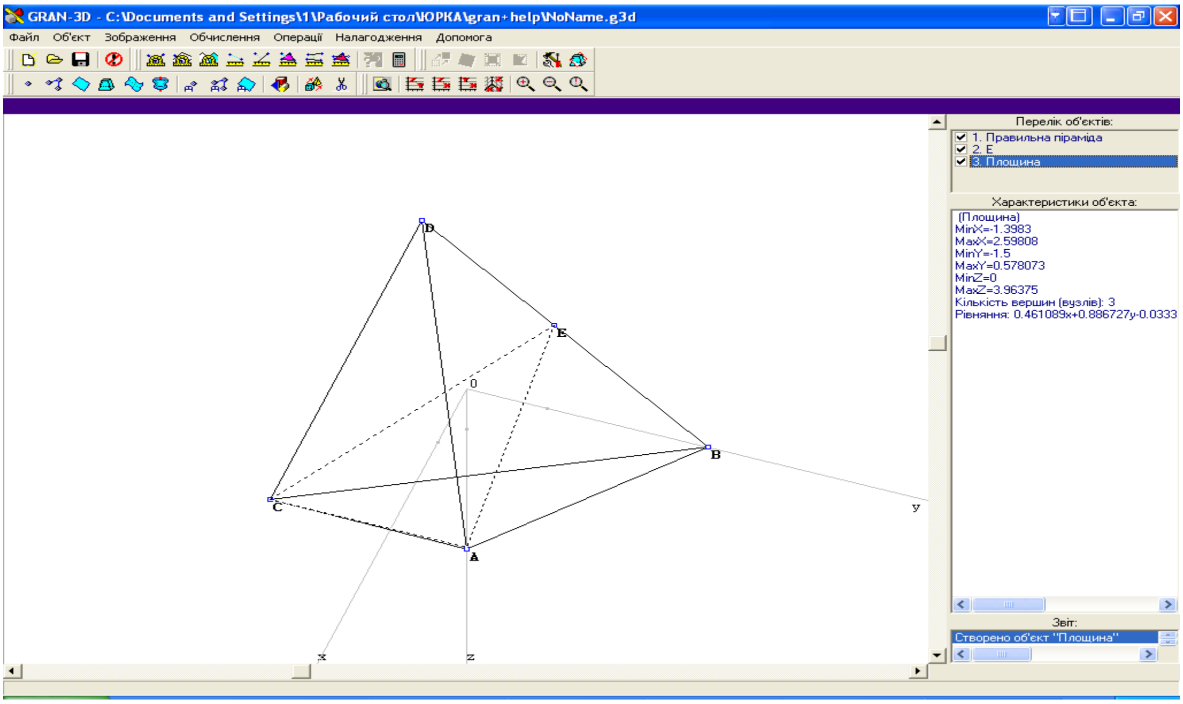


Рис. 2.50

(Об'єкт \ Створити з екрану \ Точка). Переріз проходить через дві вершини *A* і *C* основи та точку *E*, значить точки *A*, *C* і *E* лежать в одній площині. Оскільки точки *A* і *E* лежать в площині *ABD*, то відрізок *AE* можна побудувати (Об'єкт \ Створити з екрану \ Ламана) і він належить шуканій площині. Аналогічно учні будують відрізок *CE*. Переріз *ACE* – шуканий. Після побудови перерізу дану піраміду варто деталізувати і розглянути, які фігури можуть утворитися в результаті перерізу залежно від розміщення точки *E* на ребрі *BD* (якщо т. *E* співпадає з вершинами *B* або *D*, то площина перерізу співпадає відповідно з площинами граней *ABC* та *ADC*) (рис. 2.50).

Розглянемо методику використання ППЗ GRAN-3D для диференційованого формування прийомів евристичної діяльності на прикладі прийомів аналізу і синтезу та введення допоміжних задач.

Аналіз і синтез

Середній рівень

Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює *2* см, а висота – *4* см. Знайти повну поверхню призми.

Застосовуючи програму GRAN-3D, учні будують правильну чотирикутну призму (Об’єкт \ Створити базовий об’єкт \ Правильна призма).

Аналіз. Використовуючи побудоване зображення і аналізуючи умову задачі, учні згадують, що повна поверхня призми обчислюється за формулою $S_n = 2S_{осн} + S_б$. Оскільки призма правильна чотирикутна, то основою є квадрат, площа якого рівна квадрату сторони. Бічна поверхня правильної чотирикутної призми обчислюється за формулою $S_б = 4a \cdot H$, де a – сторона основи, H – висота призми (рис. 2.51).

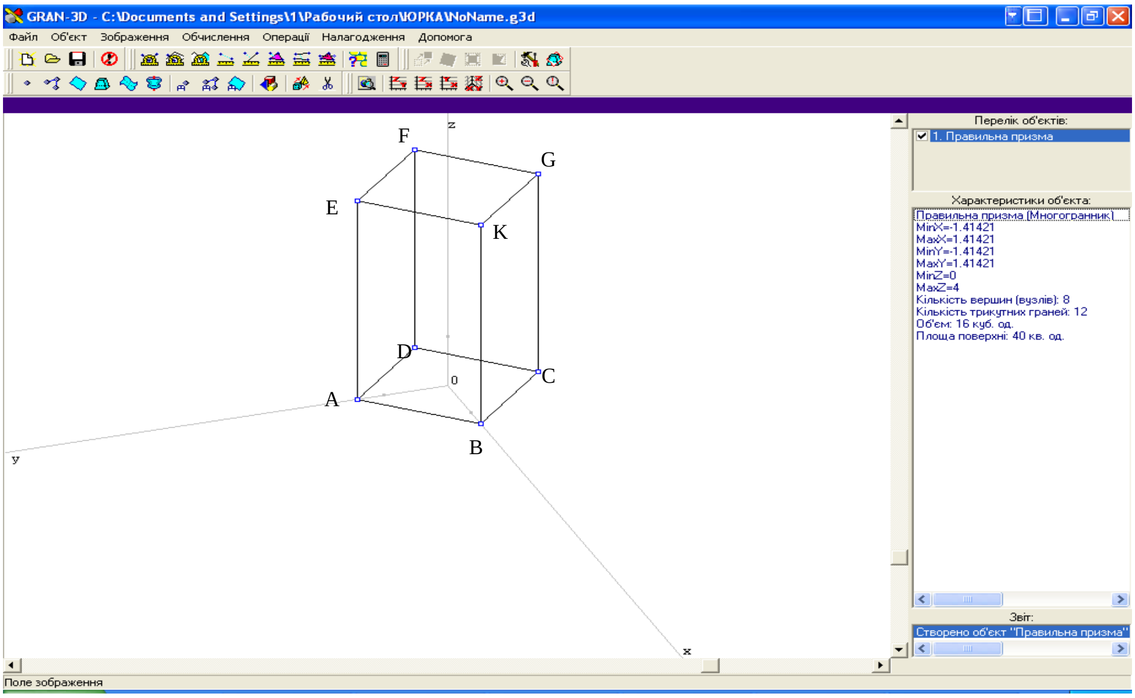


Рис. 2.51

Синтез. $S_{осн} = a^2 = 4$ см^2, $2S_{осн} = 2 \cdot 4 = 8$ (см^2), $S_б = 4 \cdot 2 \cdot 4 = 32$ (см^2), $S_n = 8 + 32 = 40$ (см^2).

Достатній рівень

У похилій трикутній призмі *ABCDEF* основою служить прямокутний трикутник *ABC* ($\angle C = 90°$). Площина бічної грані *ACFD* перпендикулярна площині основи. Довести, що *CBEF* – прямокутник.

Учні будують зображення призми за допомогою програми GRAN-3D (Об’єкт \ Створити \ Многогранник).

Аналіз. Всі бічні грані призми є паралелограмами. Щоб довести, що паралелограм $CBEF$ є прямокутником, досить показати, що $BC \perp CF$. Для того, щоб довести, що $BC \perp CF$, досить довести, що $BC \perp DFC$. Але за умовою площини ABC і DFC перпендикулярні, перетинаються по прямій AC і $BC \perp AC$, то $BC \perp DFC$. Отже, паралелограм $CBEF$ – прямокутник (рис. 2.52).

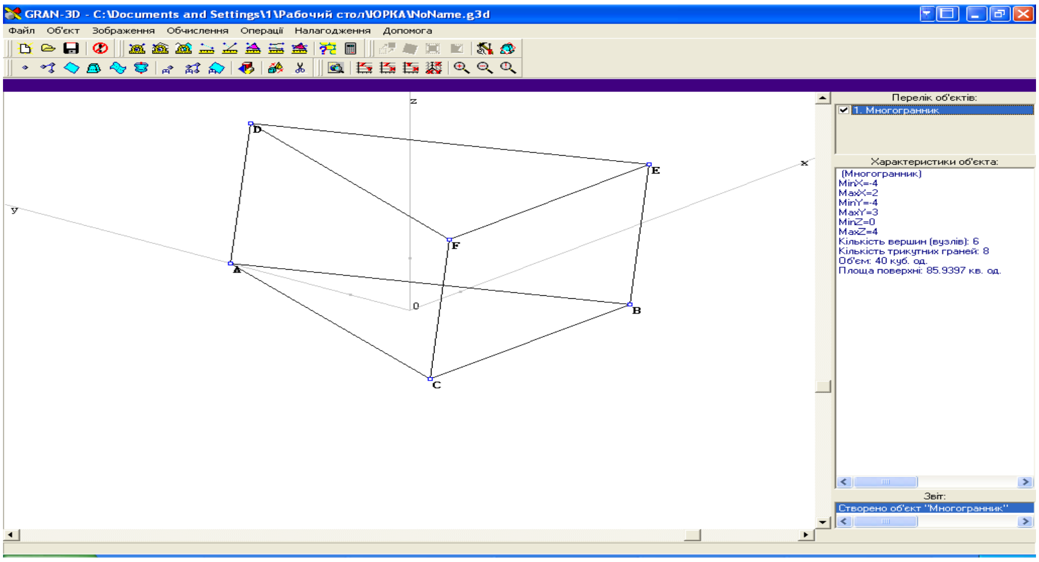


Рис. 2.52

Високий рівень

Всі грані паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – рівні ромби; кути між ребрами, які мають спільну точку A, рівні. Довести, що пряма AC_1 перпендикулярна прямій B_1D_1.

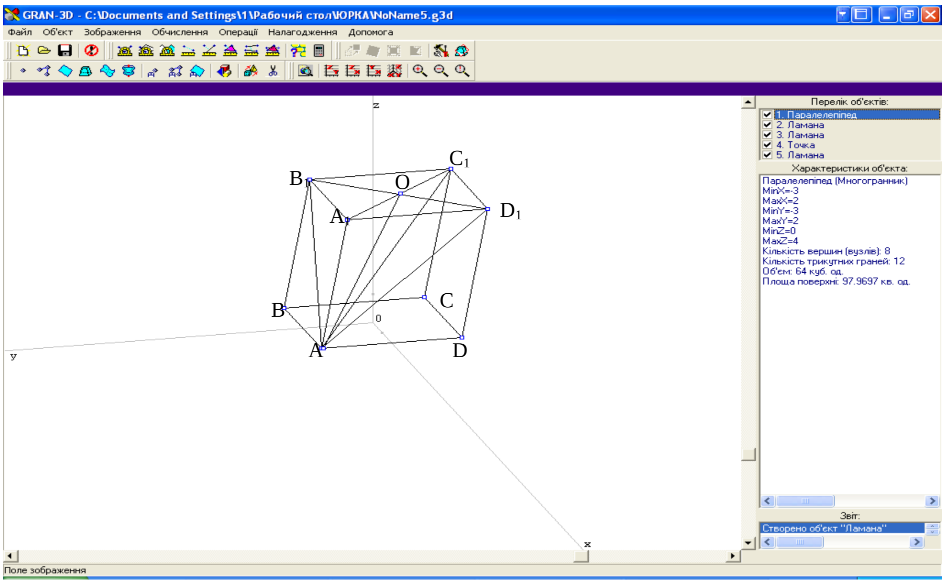


Рис. 2.53

Учні будують спочатку зображення паралелепіпеда за допомогою програмного продукту GRAN-3D: Об’єкт \ Створити \ Многогранник.

Аналіз. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – даний паралелепіпед. Пригадавши означення паралелепіпеда та його властивості, проаналізувавши умову задачі, учні зазначають, що прямі AC_1 і B_1D_1 мимобіжні. Щоб довести, що вони перпендикулярні, нам досить через одну з них, наприклад, через AC_1 провести площину (за допомогою GRAN-3D: Об’єкт \ Створити з екрана \ Площина) і довести, що пряма B_1D_1 перпендикулярна до цієї площини. AC_1 лежить в площині A_1C_1CA. Для того, щоб довести, що пряма B_1D_1 перпендикулярна до цієї площини, досить довести, що ця пряма перпендикулярна до двох прямих даної площини, що проходять через точку перетину прямої B_1D_1 і площини A_1C_1CA. Нехай цією точкою є точка O – середина відрізка B_1D_1 (побудова точки O: Об’єкт \ Створити з екрана \ Точка). $A_1C_1 \perp B_1D_1$ – як діагоналі ромба $A_1B_1C_1D_1$. Отже, старшокласники мають довести, що $AO \perp B_1D_1$. Але AO, медіана трикутника AB_1D_1, є висотою цього трикутника лише тоді, коли AB_1 = AD_1. За умовою AA_1B_1B і AA_1D_1D рівні ромби і $\angle A_1AB = \angle A_1AD$, тому $\angle AA_1D_1 = \angle AA_1B_1$ і $\Delta AA_1B_1 = \Delta AA_1D_1$ за першою ознакою рівності трикутників. Отже, $AB_1 = AD_1$ (рис. 2.53).

Синтез. За умовою грані AA_1B_1B і AA_1D_1D – рівні ромби і $\angle A_1AB =$ $= \angle A_1AD$, тому $\angle AA_1D_1 = \angle AA_1B_1$ і $\Delta AA_1B_1 = \Delta AA_1D_1$ за першою ознакою рівності трикутників. Звідси учні записують: $AB_1 = AD_1$. Нехай O – середина відрізка B_1D_1. ΔAB_1D_1 – рівнобедрений, тому $AO \perp B_1D_1$. $A_1C_1 \perp B_1D_1$ як діагоналі ромба $A_1B_1C_1D_1$. За ознакою перпендикулярності прямої і площини $B_1D_1 \perp A_1C_1CA$. Але пряма AC_1 лежить в цій площині, тому $B_1D_1 \perp AC_1$. Що і потрібно було довести.

Використання допоміжних задач

Середній рівень

Знайти об’єм прямокутного паралелепіпеда, якщо сторони основи *2* см і *3* см, а діагональ паралелепіпеда $\sqrt{38}$см.

Використовуючи ППЗ GRAN-3D, учні будують зображення прямокутного паралелепіпеда (Об’єкт \ Створити базовий об’єкт \ Прямокутний паралелепіпед). З вершини основи проводять діагональ паралелепіпеда (Об’єкт \ Створити з екрану \ Ламана). Проаналізувавши умову задачі, учні формулюють допоміжну задачу: “Знайти висоту прямокутного паралелепіпеда, якщо сторони основи рівні *2* см і *3* см, а діагональ паралелепіпеда $\sqrt{38}$см”. Також вони зауважують, що розв’язання цієї задачі дає їм значення висоти, що є необхідним для розв’язання початкової задачі. Далі учні пригадують формулу для обчислення діагоналі прямокутного паралелепіпеда $a^2+b^2+h^2=l^2$. Звідси можна знайти висоту (рис. 2.54).

Пригадавши формулу для обчислення об’єму паралелепіпеда $V=S\cdot H$,

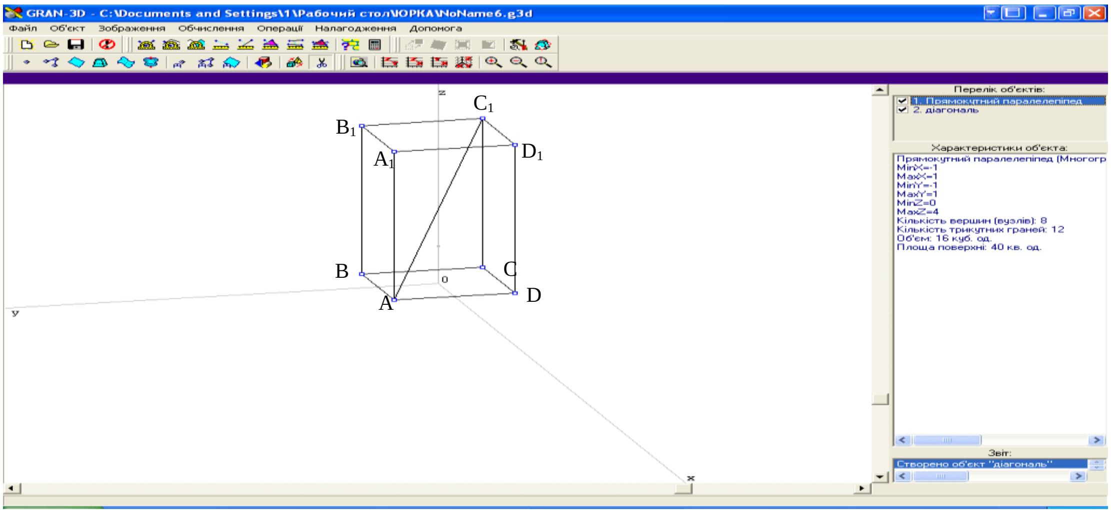


Рис.2.54

підставляють значення в дану формулу і отримують відповідь:

4. $a^2+b^2+h^2=l^2$; $h^2=38-4-9=25$(см^2); $h=5$см.
5. $V=S\cdot H=2\cdot 3\cdot 5=30$(см^3).

Достатній рівень

1. Знайти об’єм правильної чотирикутної зрізаної піраміди, сторони основи якої дорівнюють *4* дм і *8* дм, а діагональ – *11* дм.

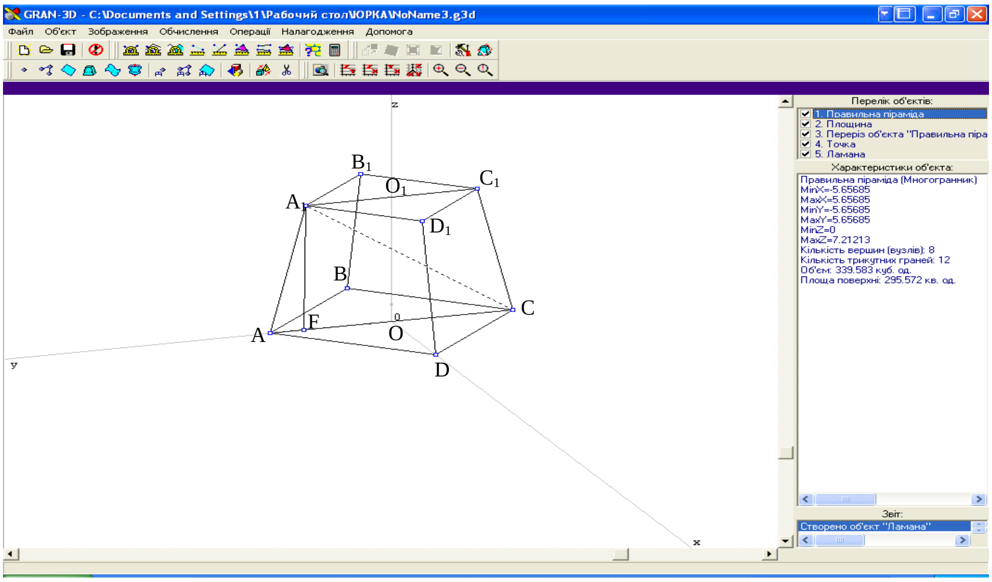


Рис. 2.55

Учні виконують побудову зображення зрізаної піраміди $ABCDA_1B_1C_1D_1$, використавши послуги програми GRAN-3D: Об’єкт \ Створити \ Правильна зрізана піраміда. Провівши аналіз умови задачі і згадавши означення правильної зрізаної піраміди, можна зразу знайти площі основ S_{ABC1} і $S_{A_1B_1C_1D_1}$. Точка O – центр описаного кола навколо нижньої основи, а O_1 – центр описаного кола навколо верхньої основи, тому можна відмітити, що OA і O_1A_1 – радіуси описаних кіл і обчислити їх (рис. 2.55).

Розглянувши діагональний переріз піраміди, учні приходять до висновку: щоб знайти об’єм піраміди, потрібно обчислити висоту OO_1. Отже, можна сформулювати допоміжну задачу: “У рівнобічній трапеції AA_1C_1C діагональ $A_1C = 11$ дм, а сторони основ $4\sqrt{2}$ дм і $8\sqrt{2}$ дм. Знайти висоту OO_1 трапеції” .

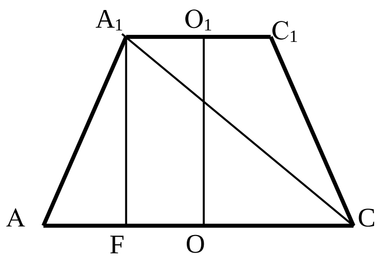


Рис. 2.56

Учні проводять $A_1F \parallel OO_1$ і обчислюють AF і FC. З $\Delta A_1FC (\angle F = 90^\circ)$ знаходять A_1F, а значить, і OO_1.

Пригадавши формулу для обчислення об’єму зрізаної піраміди, підставляють значення і записують відповідь:

1. $S_{ABCD} = AB^2 = 64$ (дм²), $S_{A_1B_1C_1D_1} = A_1B_1^2 = 16$ (дм²).

2. O – центр описаного кола навколо нижньої основи, а O_1 – центр описаного кола навколо верхньої основи, то OA і O_1A_1 – радіуси описаних кіл. $O_1A_1 = \frac{A_1B_1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ (дм), $OA = \frac{AB}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$ (дм).

3. Допоміжна задача: “У рівнобічній трапеції AA_1C_1C діагональ $A_1C = 11$ дм, а сторони основ $4\sqrt{2}$ дм і $8\sqrt{2}$ дм. Знайти висоту OO_1 трапеції”.

4. Проводять $A_1F \parallel OO_1$ (рис. 2.56). $AF = AO - A_1O_1 = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ (дм). $FC = AC - AF = 8\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ (дм). З ΔA_1FC ($\angle F = 90^\circ$): $A_1F = \sqrt{A_1C^2 - FC^2} = \sqrt{11^2 - (6\sqrt{2})^2} = \sqrt{121 - 72} = 7$ (дм). $OO_1 = FA_1 = 7$ дм.

$$V = \frac{1}{3} \cdot OO_1 \cdot \left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right) = \frac{1}{3} 7\left(64 + \sqrt{64 \cdot 16} + 16\right) = \frac{1}{3} 7(64 + 32 + 16) =$$

$$= \frac{7}{3} \cdot 112 = \frac{784}{3} \text{ (дм}^3\text{)}.$$

Високий рівень

Правильна п’ятикутна піраміда *SABCDE* перетинається площиною, що проходить через вершини *A* і *C* основи і середини ребер *SD* і *SE*. Знайти площу перерізу, якщо ребро основи піраміди дорівнює *4* см, а бічне ребро – *5* см.

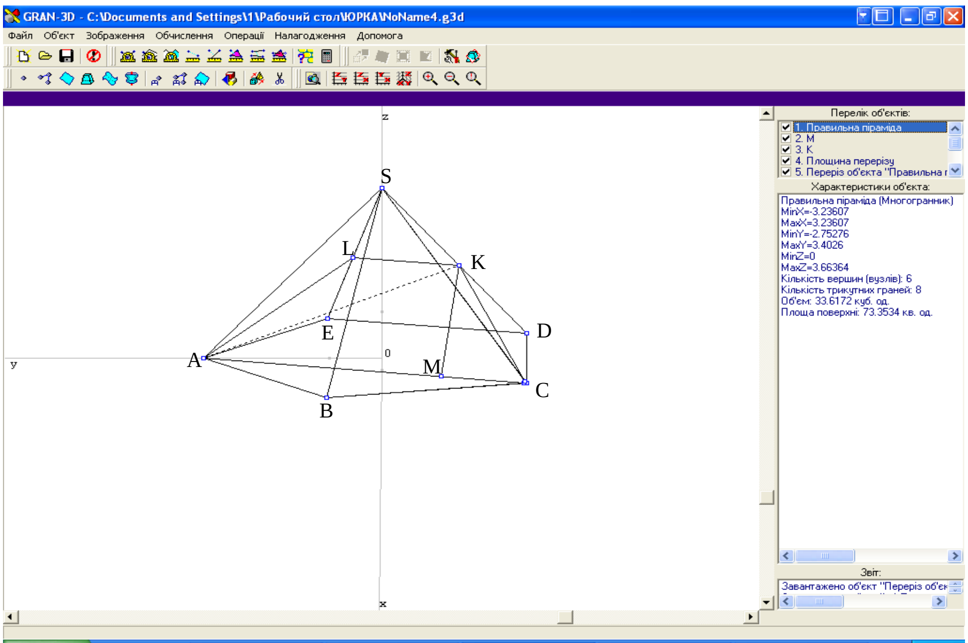


Рис. 2.57

Учні будують піраміду *SABCDE* за допомогою програми GRAN-3D: Об'єкт \ Створити базовий об'єкт \ Правильна піраміда. В правильному п'ятикутнику $AC \parallel DE$. Дійсно, $\angle ABC = \angle CDE = 108^\circ$. Оскільки $\angle BAC = \angle BCA = 36^\circ$, то $\angle DCA = 72^\circ$. Отже, $\angle CDE + \angle DCA = 108^\circ$, тому $AC \parallel DE$. Якщо $SK = KD$, то $LK \parallel DE$, тому площина *ACK* проходить через точку *L* і трапеція *ACKL* є даним перерізом (Об'єкт \ Створити з екрану \ Площина). У правильній піраміді $\angle SDC = \angle SEA$, тому $\Delta CDK = \Delta AEL$, звідки $AL = CK$, тобто перерізом є рівнобічна трапеція (Рис. 2.57).

Допоміжна задача: „Знайти площу рівнобічної трапеції *ACKL*".

Для розв'язання цієї задачі потрібно знайти її основи *AC, KL* і висоту *KM*. $KL = \frac{1}{2}ED = \frac{q}{2}$. Оскільки *CK* – медіана ΔCDS, то

$$CK = \frac{1}{2}\sqrt{2SC^2 + 2CD^2 - SD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 5^2 + 2\cdot 4^2 - 5^2} = \frac{1}{2}\sqrt{25+32} = \frac{\sqrt{57}}{2} \text{ (см)}.$$

З ΔABC: $\frac{AC}{\sin 108^\circ} = \frac{AB}{\sin 36^\circ}$. Звідки $AC = 4\frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} = 8\cos 36^\circ$.

Допоміжна задача: „Знайти cos 36^0". Учні розглядають рівнобедрений трикутник *OPQ* (рис. 2.58), в якому $\angle POQ = 36^\circ$ і *PR* – бісектриса. $\angle QPR = \angle RPO = 36^\circ = \angle POR$, тому $QP = PR = RO$. За властивістю бісектриси кута

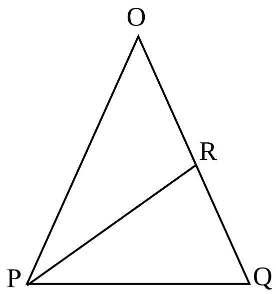


Рис. 2.58

трикутника $\frac{OR}{RQ} = \frac{OP}{PQ}$, тобто $PQ^2 = RQ \cdot OP$. Позначають $PQ = a$, $OP = r$, тоді $a^2 = (r-a)r$; $a^2 + ra - r^2 = 0$, $a = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} + r^2} = -\frac{r}{2} \pm \frac{r\sqrt{5}}{2}$. Оскільки $a < r$, то $a = \frac{r(\sqrt{5}-1)}{2}$. За теоремою косинусів: $a^2 = 2r^2 - 2r^2\cos 36^\circ = 2r^2(1-\cos 36^\circ)$, тому $\frac{r^2(\sqrt{5}-1)^2}{4} = 2r^2(1-\cos 36^\circ)$. Звідси $\cos 36^\circ = \frac{8-(5-2\sqrt{5}+1)}{8}$; $\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Отже, $AC = 8\cos 36^\circ = 8\frac{1+\sqrt{5}}{4} = 2(1+\sqrt{5})$ (см).

$$MC = \frac{1}{2}(AC - KL) = \frac{1}{2}\left(2(1+\sqrt{5}) - 2\right) = \sqrt{5} \text{ (см)}.$$

З $\Delta KMC(\angle M=90^{\circ})$: $KM=\sqrt{CK^{2}-MC^{2}}=\sqrt{\frac{57}{2}-5}$ (см).

$$S_{ACKL}=\frac{1}{2}(AC+KL)\cdot KM=\frac{1}{2}\left(2\left(1+\sqrt{5}\right)+2\right)\cdot\sqrt{\frac{57}{2}-5}=\left(2+\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{23{,}5}\ (\text{см}^{2}).$$

Використання педагогічного програмного засобу GRAN-3D, як показують експериментальні дослідження, допомагає вчителю організовувати і керувати евристичною діяльністю учнів, воно забезпечує індивідуалізацію навчального процесу, при цьому учні мають можливість опановувати прийомами евристичної діяльності, поліпшувати знання, задовольняти інтереси і схильність до наукових знань.

ППЗ GRAN-3D дозволяє учням усвідомлено підходити до вивчення стереометрії, сприяє розвитку пам’яті, умінню виявляти свої помилки і виправляти їх. Застосування цієї програми дозволяє вчителю раціонально використовувати час для розв’язування цікавих, евристичних задач, надавши учням можливість самостійно опанувати техніку розв’язання стандартних задач; допомагає активізувати евристичну діяльність учнів щодо закріплення і поглиблення знань, умінь і навичок.

Таким чином, використання ППЗ GRAN-3D дає вчителю можливість реалізувати комп’ютерне моделювання в процесі диференційованого формування прийомів евристичної діяльності старшокласників.

2.5. Організація, проведення педагогічного експерименту та аналіз його результатів

Основні положення дисертаційного дослідження перевірялись у ході констатувального, пошукувального і формувального експериментів.

Мета експерименту полягала в перевірці ефективності розробленої методики для диференційованого формування прийомів евристичної діяльності учнів при вивченні стереометрії. Тому нами були поставлені наступні завдання, що вимагали розв'язання:

1. Розробити експериментальні матеріали, які б допомогли перевірити гіпотезу дослідження.
2. Підібрати експериментальні та контрольні класи так, щоб рівень успішності був однаковий на час проведення експерименту.
3. Провести навчання в експериментальних класах, використовуючи крім діючого підручника також розроблений нами навчальний посібник "Прийоми евристичної діяльності учнів при вивченні геометрії. Диференційовані завдання."
4. Провести тематичне оцінювання навчальних досягнень учнів з тем "Многогранники", "Об'єми многогранників" учнів контрольних та експериментальних класів.
5. Виконати якісний і кількісний аналізи результатів педагогічного експерименту.

Експеримент проводився в таких загальноосвітніх навчальних закладах: загальноосвітніх школах І-ІІІ ступенів №№ 6, 10, 12, 17; спеціалізованій загальноосвітній школі І-ІІІ ступенів № 5 з поглибленим вивченням інформатики; навчально-виховних комплексах №№ 8, 13, 16; гімназії; ліцеї; навчально-виховному комплексі у складі загальноосвітньої школи І-ІІ ступенів та ліцею-інтернату м. Кам'янця-Подільського; загальноосвітній школі № 2 м. Хмельницького; в Шатавському НВК "ЗОШ І-ІІ ступенів, колегіумі" Дунаєвецького району Хмельницької області; загальноосвітній школі № 58 м. Києва. Контрольні та експериментальні класи були виділені в кожному навчальному закладі. В експерименті брали участь 692 учнів (по 346 в експериментальній та контрольній класах).

На першому етапі проаналізовано психолого-педагогічну та методичну літературу з теми дослідження, виявлено рівні володіння учнями евристичними прийомами в процесі формування понять, доведення теорем, розв'язування задач учнями 11-х класів середніх загальноосвітніх закладів, розроблено пробну евристично-орієнтовану систему задач. При проведенні констатувального експерименту використовувались обсерваційні методи педагогічних досліджень (спостереження) та діагностичні методи (анкетування, тестування), а також були сформульовані гіпотеза і завдання дослідження.

Аналіз проведеного констатувального експерименту дозволив зробити висновок, що більшість учнів орієнтована на репродуктивний характер навчально-пізнавальної діяльності, не володіє на необхідному рівні загальними та спеціальними прийомами евристичної діяльності, не користується евристиками, наслідком чого стає поверховість, неусвідомленість, наслідуваність, інертність, що свідчить про досить низький рівень сформованості прийомів евристичної діяльності. Все це підтвердило необхідність врахування та дотримання сформульованих в першому розділі дисертації психолого-педагогічних та методичних передумов диференційованого формування прийомів евристичної діяльності учнів.

На другому етапі відбувався пошук методів і форм, традиційних і сучасних засобів навчання, що сприяють диференційованому формуванню прийомів евристичної діяльності учнів через систему математичних задач, а також проводилася робота по відбору задач, на матеріалі яких доцільно навчати учнів прийомам евристичної діяльності. За цей період було проаналізовано отримані результати, внесено необхідні корективи, уточнено побудову і зміст окремих компонентів методичної системи.

На третьому етапі перевірялась ефективність розробленої системи математичних задач і методики її використання для диференційованого формування прийомів евристичної діяльності учнів шляхом розв’язування учнями експериментальних класів розроблених нами рівневих завдань, спостереження за діяльністю учнів на уроках стереометрії, анкетування вчителів та учнів, індивідуальних бесід з ними, аналізу занять.

Анкети для учнів та вчителів подано в додатках М і Н.

Однак, провідними були результати виконання письмових робіт (дві тематичні перевірочні роботи після тем: “Многогранники” та “Об’єми многогранників”) .

Контрольна робота № 1 на тему “Многогранники”

В – 1

1. Основою прямої трикутної призми є прямокутний трикутник з катетом *5* см і гіпотенузою *13* см. Висота призми *8* см. Знайдіть повну поверхню призми. (2 бали) (Середній рівень)

2. Побудуйте переріз тетраедра *ABCD* площиною, що проходить через ребро DC і точку перетину медіан грані *ABC*. (2 бали) (Середній рівень)

3. Основою піраміди є прямокутник зі сторонами *6* см і *16* см. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи і дорівнює *4* см. Знайдіть бічну поверхню піраміди. (2 бали) (Достатній рівень)

4. В основі прямої призми лежить паралелограм зі сторонами $3\sqrt{2}$ см, $\sqrt{2}$ см і кутом між ними 45°. Площа бічної поверхні призми в *4* рази більша від площі основи. Знайдіть висоту призми. (3 бали) (Достатній рівень)

5. Основами зрізаної піраміди є квадрати зі сторонами *8* см і *4* см. Одна з бічних граней – рівнобічна трапеція, що перпендикулярна до площин основ, а протилежна до неї грань утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть повну поверхню зрізаної піраміди.(3 бали) (Високий рівень)

В – 2

2. Основою прямої трикутної призми є прямокутний трикутник з катетами *3* см і *4* см. Висота призми рівна *10* см. Знайдіть повну поверхню призми. (2 бали) (Середній рівень)

3. Дано тетраедр *ABCD* і точки *M* і *N*, що належать відповідно ребрам *DC* і *AB*. Побудуйте лінію перетину площин *AMB* і *DCN*. (2 бали) (Середній рівень)

4. Висота правильної чотирикутної піраміди *7* см, а сторона основи *8* см. Знайдіть бічне ребро піраміди. (2 бали) (Достатній рівень)

5. Основою прямого паралелепіпеда є ромб з гострим кутом 60° і більшою діагоналлю $6\sqrt{3}$см. Менша діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут 45°. Знайдіть бічну поверхню паралелепіпеда. (3 бали) (Достатній рівень)

6. Площі основ зрізаної піраміди відносяться як *1:4*. Більша основа – ромб з діагоналями *6* дм і *8* дм. Одне з бічних ребер перпендикулярне до основи і дорівнює *7* дм. Знайдіть площу поверхні цієї піраміди. (3 бали) (Високий рівень)

Контрольна робота № 2 на тему "Об'єми многогранників"

В – 1

1. Основою прямокутного паралелепіпеда є квадрат. Знайдіть об'єм цього паралелепіпеда, якщо висота його рівна *6* см, а діагональ утворює з площиною основи кут 45°. (2 бали) (Середній рівень)

2. Знайдіть об'єм похилої призми, у якої основою є прямокутний трикутник з катетами *5* см і *6* см, а бічне ребро, рівне *10* см, утворює з площиною основи кут 45°. (2 бали) (Середній рівень)

3. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює *6* см, а бічне ребро утворює з площиною основи кут 30°. Знайдіть об'єм піраміди. (2 бали) (Достатній рівень)

4. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині і радіусом описаного кола R. Діагональ бічної грані, що містить бічну сторону цього трикутника, утворює з площиною основи кут β. Знайдіть об’єм призми. (3 бали) (Достатній рівень)

5. Кути правильного тетраедра зрізані так, що утворився многогранник, у якого *4* грані правильні трикутники і *4* – правильні шестикутники. Знайдіть відношення об’єму одержаного многогранника до об’єму тетраедра. (3 бали) (Високий рівень)

В – 2

1. В основі прямокутного паралелепіпеда лежить квадрат зі стороною *1* дм. Довжина діагоналі паралелепіпеда дорівнює $\sqrt{6}$ дм. Знайдіть об’єм паралелепіпеда. (2 бали) (Середній рівень)

2. Знайдіть об’єм похилої призми, у якої основою є прямокутник зі сторонами *6* см і *8* см, а бічне ребро, рівне *8* см, утворює з площиною основи кут 30°. (2 бали) (Середній рівень)

3. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює *4* см і утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть об’єм піраміди. (2 бали) (Достатній рівень)

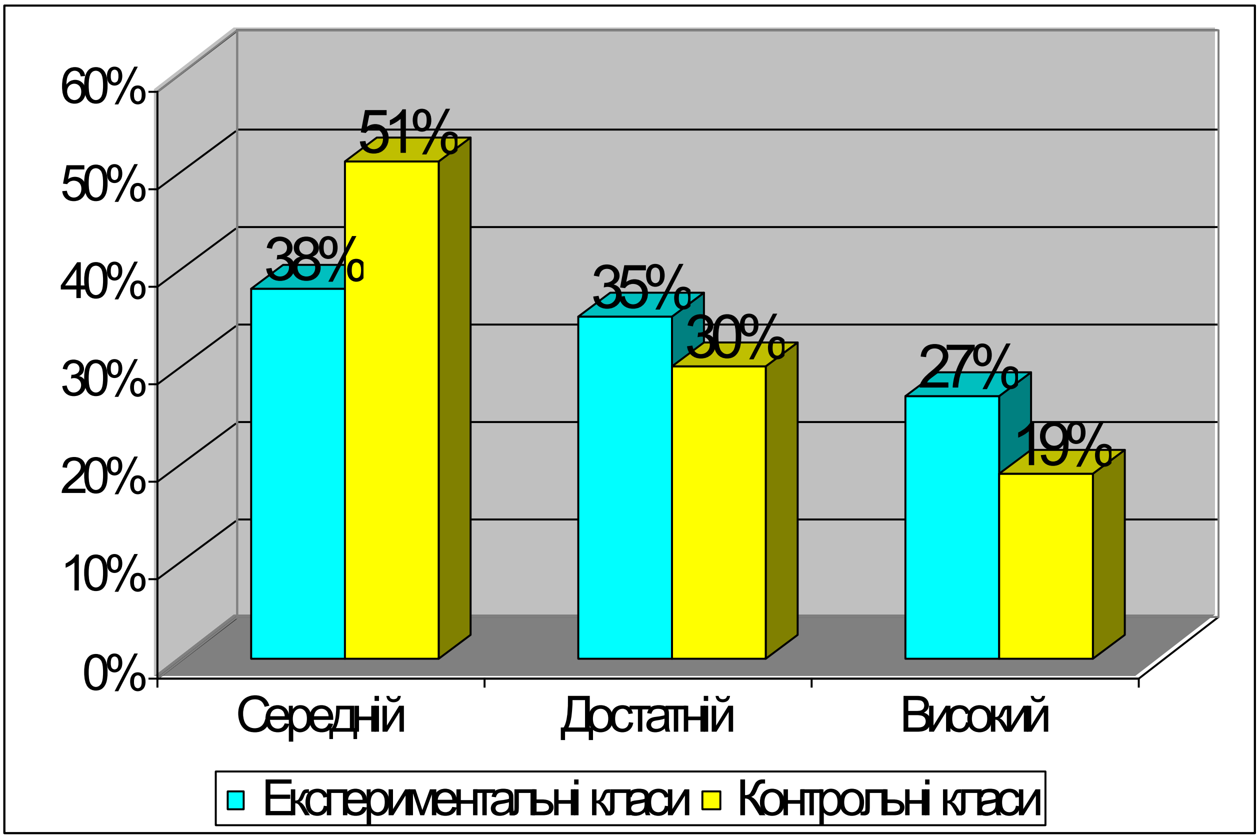
4. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з кутом α при основі і радіусом вписаного кола r. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють γ. Знайдіть об’єм піраміди. (3 бали) (Достатній рівень)

5. Кути куба зрізано так, що в утвореного многогранника *8* граней є правильними трикутниками, а *6* граней – квадратами. Знайдіть відношення об’єму цього многогранника до об’єму куба. (3 бали) (Високий рівень)

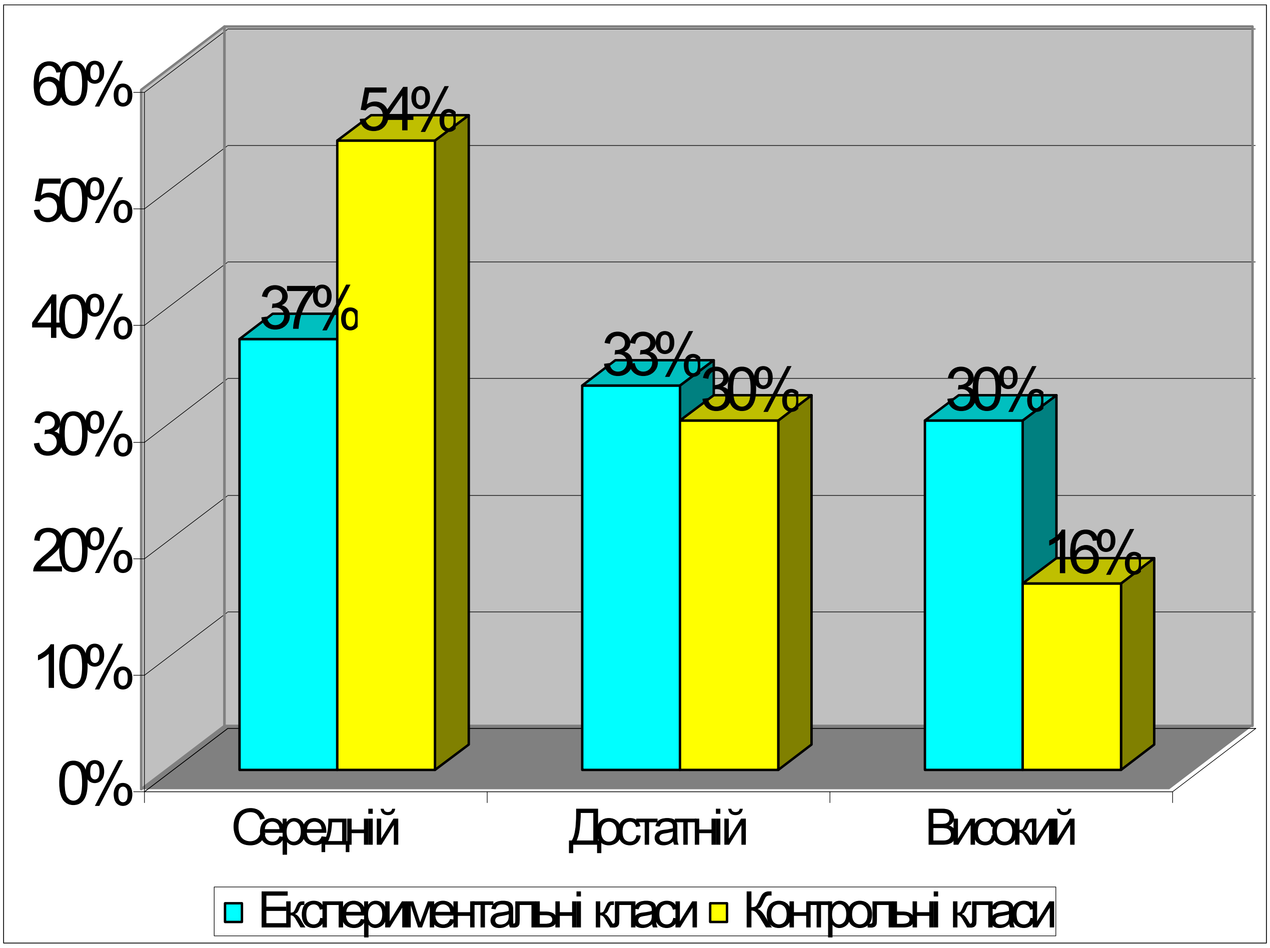
Формувальний експеримент дозволив виявити вплив запропонованої методики на формування прийомів евристичної діяльності учнів в процесі вивчення стереометрії, а також відіграв значну роль в її вдосконаленні, зокрема, виборі завдань для учнів, виборі методів, форм та засобів активного навчання під час вивчення конкретних тем курсу.

Оскільки на початковому рівні знання учнів носять фрагментарний характер і розв'язання задач цього рівня, як правило, однокрокові, то на цьому рівні неможливо сформувати прийоми евристичної діяльності учнів і їх перевірити, тому нами виділені в процесі дослідження три рівні сформованості прийомів евристичної діяльності учнів при вивченні стереометрії: середній, достатній, високий. Аналізуючи зміну кількісних показників розподілу учнів за цими рівнями, бачимо, що в процесі навчання відбувається їх перерозподіл. Результати написаних учнями двох письмових тематичних робіт (тексти робіт подані вище) показали, що рівні сформованості прийомів евристичної діяльності в експериментальних класах вищі, ніж у контрольних класах (діаграми 1 та 2).

Діаграма 1 розподілу учнів за рівнями сформованості прийомів евристичної діяльності в контрольних та експериментальних класах за результатами першої контрольної роботи



Діаграма 2 розподілу учнів за рівнями сформованості прийомів евристичної діяльності в контрольних та експериментальних класах за результатами другої контрольної роботи



В даному дослідженні вибірки є випадковими і незалежними, з однаковим розподілом учнів за рівнями навчальних досягнень на початок експерименту. Шкалою вимірювань є шкала найменувань за трьома категоріями: 0 – 5 балів – категорія 1, 6 – 9 балів – категорія 2, 10 – 12 балів – категорія 3. Тому можна застосувати статистичний критерій Пірсона χ^2 [51].

Було сформульовано нульову гіпотезу: відсутній вплив запропонованої методичної системи на рівень сформованості прийомів евристичної діяльності учнів; відмінності результатів, що спостерігаються, вважаються випадковими [72, с. 30].

Нульову гіпотезу перевіряємо за допомогою критерію Пірсона χ^2. Для цього результати письмової роботи представимо у вигляді таблиці, яка містить дві вибірки ($n_1 = 346$, $n_2 = 346$) і три категорії ($i = 3$):

Таблиця 2.2.

Результати виконання письмової роботи № 1 в контрольних та експериментальних класах

Вибірки	Категорія 1 (0 – 5 балів)	Категорія 2 (6 – 9 балів)	Категорія 3 (10 – 12 балів)
Експериментальні класи, $n_1 = 346$	$Q_{11} = 74$	$Q_{12} = 149$	$Q_{13} = 123$
Контрольні класи, $n_2 = 346$	$Q_{21} = 120$	$Q_{22} = 125$	$Q_{23} = 101$

В даній таблиці Q_{ci} – кількість учнів експериментальних (контрольних) класів, які віднесені до категорії i, де $i = 1, 2, 3$.

За даними таблиці 2.2 перевіряємо нульову гіпотезу. Обчислимо значення статистики T критерію Пірсона χ^2 [72, с. 101]:

$$T = \frac{1}{n_1 \cdot n_2} \sum_{i=1}^{3} \frac{(n_1 Q_{2i} - n_2 Q_{1i})^2}{Q_{1i} + Q_{2i}} = \frac{1}{346^2} \left(\frac{346^2 (74-120)^2}{74+120} + \frac{346^2 (149-125)^2}{149+125} + \frac{346^2 (123-101)^2}{123+101} \right) =$$

$$= \frac{2116}{194} + \frac{576}{274} + \frac{484}{224} \approx 10{,}9 + 2{,}1 + 2{,}2 = 15{,}2.$$

Використовуючи статистичні таблиці для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ та числа ступенів вільності $k = i - 1 = 2$ [72, с. 130], знаходили статистичне значення статистики критерію $T_{крит} = 5{,}99$. Одержали $T > T_{крит}$ ($15{,}2 > 5{,}99$), що є підставою для відхилення нульової гіпотези на користь альтернативної про вплив розробленої методичної системи на диференційоване формування прийомів евристичної діяльності учнів.

Поелементний аналіз виконаних письмових робіт показав, що учні експериментальних класів у порівнянні з учнями контрольних класів успішно застосовують прийоми евристичної діяльності до розв’язання задач, швидше знаходять саме ті з них, які адекватні кожній конкретній ситуації, проявляють в більшій мірі гнучкість мислення (див. діаграми на с. 178 – 179).

Після вивчення теми “Об’єми многогранників” було проведено контрольну роботу в експериментальних та контрольних класах. Результати роботи наведені в таблиці 2.3 (тексти роботи див. на с. 175 – 177).

Таблиця 2.3

Результати виконання письмової роботи № 2 в контрольних та експериментальних класах

Вибірки	Категорія 1 (0 – 5 балів)	Категорія 2 (6 – 9 балів)	Категорія 3 (10 – 12 балів)
Експериментальні класи, $n_1 = 346$	$Q_{11} = 85$	$Q_{12} = 163$	$Q_{13} = 98$
Контрольні класи, $n_2 = 346$	$Q_{21} = 154$	$Q_{22} = 136$	$Q_{23} = 56$

Перевіримо знову нульову гіпотезу. Для цього обчислюємо значення статистики T критерію χ^2.

$$T = \frac{1}{n_1 \cdot n_2} \sum_{i=1}^{3} \frac{(n_1 Q_{2i} - n_2 Q_{1i})^2}{Q_{1i} + Q_{2i}} = \frac{1}{346^2} \left(\frac{346^2 (154-85)^2}{154+85} + \frac{346^2 (136-163)^2}{136+163} + \frac{346^2 (56-98)^2}{98+56} \right) =$$

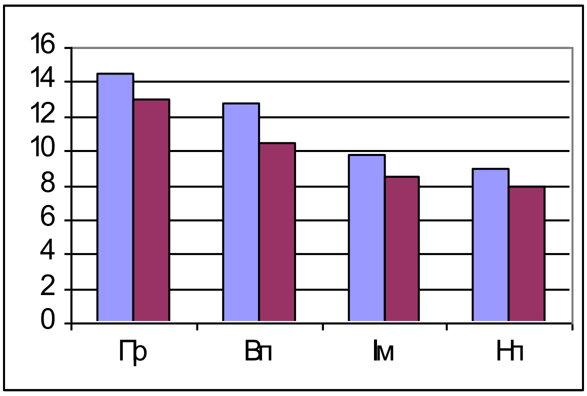
$$= \frac{4761}{239} + \frac{729}{299} + \frac{1764}{154} \approx 19{,}9 + 2{,}4 + 11{,}5 = 33{,}8.$$

При критичному значенні статистики критерію 5,99 маємо $T > T_{крит}$ (33,8 >5,99), що є основою для відхилення нульової гіпотези і прийняття запропонованої методичної системи та використання її для формування прийомів евристичної діяльності.

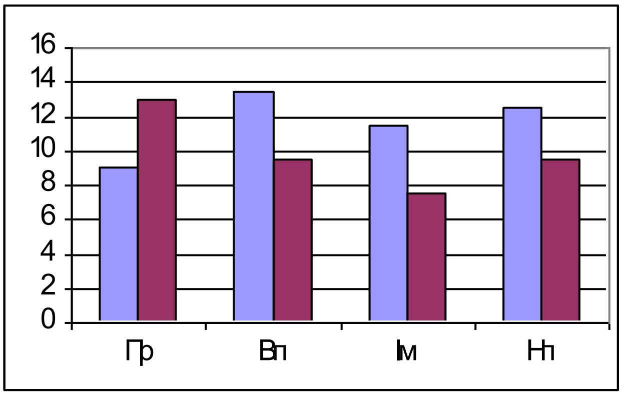
Для аналізу психологічних аспектів даного дослідження використовувалась методика Керола Ізарда [96], яка основана на використанні параметричної шкали (ПШ), розробленої ним, адаптованої нами для учнів старшої школи, що дозволила оцінити стан старшокласника під час навчання стереометрії.

За цією методикою основними інформативними параметрами емоції інтересу до діяльності, за якими можна її диференціювати, є: прихильність до об’єкта (Пр), напруженість (Нп), імпульсивність (Ім), впевненість у собі (Вп) [96]. Аналіз всіх показників відповідних параметрів на трьох рівнях функціонування учня: чуттєвому, розумовому й поведінковому дозволяє діагностувати його стан.

Результати опитування за наведеними чотирма параметрами в шестизначних шкалах з діапазоном оцінок від 0 до 18 представлені на діаграмах 3 та 4.



Діаграма 3. Складові ПШ в експериментальних класах.



Діаграма 4. Складові ПШ в контрольних класах.

■ – експериментальні дані;

■ – дані в ситуації інтересу за Керолом Ізардом.

Використовуючи дослідження Керола Ізарда [96], приходимо до висновку, що феноменологія інтересу характеризується високим ступенем почуття задоволеності і почуття впевненості в собі та помірним ступенем імпульсивності і напруженості (ефективний профіль для ситуації інтересу, представлений на діаграмах 3 та 4 світлим кольором).

Спілкування, анкетування, спостереження за учнями та вчителями, навчання старшокласників за розробленою нами методикою дозволяють зробити висновки, що учні експериментальних класів порівняно з учнями контрольних класів: активніше проводять аналіз задач, самостійно конструюють нові задачі, успішніше використовують прийоми евристичної діяльності при розв'язуванні стереометричних задач, охоче використовують набуті знання і вміння в незнайомих для них ситуаціях, виявляють варіативність мислення і раціональність у виборі способу розв'язання нестандартних задач.

Отже, результати експериментального дослідження свідчать про ефективність розробленої нами методики диференційованого формування прийомів евристичної діяльності учнів при вивченні стереометрії.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ ІІ

У другому розділі представлено експериментальну методичну систему диференційованого формування загальних і спеціальних прийомів евристичної діяльності старшокласників при розв’язуванні стереометричних задач. Одним з проявів евристичної діяльності учнів є уміння розв’язувати евристичні задачі, а також конструювати різні евристичні завдання.

Тому основним засобом формування прийомів евристичної діяльності виступає розроблена нами система евристичних задач, що відповідає дидактичним та теоретичним вимогам до побудови системи управління евристичною діяльністю, зокрема, сформульованим нами принципам відбору диференційованих завдань з стереометрії для формування прийомів евристичної діяльності учнів.

З метою формування прийомів евристичної діяльності учнів, розвитку їх творчої особистості доцільне застосування технологій диференційованого формування математичних понять на основі різних евристик. Під час диференційованого формування загальних і спеціальних прийомів враховувались особливості рівневого навчання, особистісно орієнтованого навчання, поетапна та асоціативно-рефлекторна теорії навчання.

Уміння проводити аналіз задачі допомагає учням набувати навичок самостійного конструювання нових задач та, розв’язуючи їх, отримувати нові знання, тобто стимулюють евристичну діяльність. Уміння створювати аналогії в процесі диференційованого формування понять сприяє активізації мислительної діяльності учнів та організації евристичної діяльності, допомагає запам’ятовувати головне в матеріалі, що вивчається.

В цьому розділі розроблена методика використання ППЗ GRAN-3D для розв’язування стереометричних задач, що дозволяє учням свідомо підходити до вивчення стереометрії, сприяє розвитку пам’яті, умінню виявляти свої помилки і виправляти їх, активізує їх евристичну діяльність, а вчителю – раціонально використовувати час для розв’язування цікавих, евристичних задач.

Побудована методична система диференційованого формування прийомів евристичної діяльності учнів на уроках стереометрії сприяє оволодінню знаннями, навичками і уміннями з математики та направлена на диференційоване формування прийомів евристичної діяльності учнів, творчий та інтелектуальний розвиток особистості.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

Пріоритетне місце у розвитку математичної освіти займають: особистісна орієнтація освіти, підвищення ролі самоосвіти, організація навчання на основі максимального врахування досвіду взаємодії учня з навколишнім світом, розвиток у підростаючого покоління вміння мислити евристично й творчо – відповідно до вимог сьогодення, спрямованість освіти на найповнішу реалізацію здібностей, інтелектуального, духовного і творчого потенціалу підлітка. Необхідність вирішення цих завдань підтверджує актуальність нашого дослідження.

Відповідно до поставлених у дослідженні завдань проаналізовано розвиток ідей евристики в шкільній освіті, результати психолого-педагогічних та науково-методичних досліджень з проблеми організації та управління евристичною діяльністю учнів під час навчання, стан розв'язання цієї проблеми в шкільній практиці; визначено умови, необхідні та достатні для ефективної реалізації евристичного навчання і диференційованого формування прийомів евристичної діяльності на уроках стереометрії; визначено шляхи та розроблено способи диференційованого формування прийомів евристичної діяльності старшокласників на уроках стереометрії; визначено ефективність різних організаційних форм, засобів навчання, що сприяють диференційованому формуванню прийомів евристичної діяльності; підібрано систему задач з стереометрії, яка дає можливість диференційовано формувати прийоми евристичної діяльності у старшокласників на уроках стереометрії; розроблено методику використання ППЗ GRAN-3D в процесі вивчення старшокласниками стереометрії; розроблено методичну систему диференційованого формування прийомів евристичної діяльності старшокласників на уроках стереометрії, в основу якої покладено сучасні дидактичні та психологічні концепції використання методів та форм активного навчання; проведено педагогічний експеримент для перевірки ефективності розробленої системи евристичних задач.

Результати проведеного дослідження дозволили зробити такі висновки:

1. Методика диференційованого вироблення евристичних прийомів у процесі навчання стереометрії має враховувати: операційний склад прийомів, рівні програмних вимог до їх формування, змістово-методичні лінії розміщення навчального матеріалу, психолого-методичні засади формування евристичних прийомів, методичні умови організації і управління евристичною діяльністю учнів.
2. Вироблення прийомів евристичної діяльності покращується, якщо враховувати зміст таких компонентів навчальної діяльності при вивченні стереометрії: мотиваційного (інтереси, потреби, мотиви), операційного (орієнтири і способи діяльності, формально-логічні і оперативні знання), прогностичного (прийняття рішень, складання програми діяльності, передбачення результату). Залежно від змісту цих компонентів, у дослідженні розкрито особливості двох основних рівнів навчальної діяльності: емпіричного (чуттєво-предметного) і теоретичного (раціонального).
3. Відбір організаційних форм, методів і засобів формування евристичних прийомів має відповідати розробленим методичним вимогам до рівнів навчальних досягнень (середнього, достатнього і високого) і типам орієнтовних основ діяльності (зразок виконання прийому, спеціальні вказівки, спеціально організований аналіз опорної задачі або групи дібраних задач).
4. Вироблення евристичних прийомів передбачає дотримання таких основних етапів: усвідомлення задачі, розв’язання якої потребує застосування учнем певного прийому; усвідомлення необхідності оволодіння цим прийомом; засвоєння змісту прийому, послідовності виконання відповідних операцій; виконання вправ учнем, спрямованих на відпрацювання операційного складу прийому; самоконтроль за рівнем оволодіння прийомом; застосування прийому у стандартних і нестандартних ситуаціях; поглиблення та узагальнення прийому.

5. Засобом формування евристичних прийомів є система вправ, диференційованих за складністю. Встановлено, що відбір вправ має враховувати такі принципи: відповідність вправ критеріям оцінювання навчальних досягнень учнів; відповідність вправ навчальному матеріалу; орієнтація на цілеспрямоване і систематичне використання прийомів евристичної діяльності учнів; диференційована реалізованість; повнота системи вправ; протиставлення в підборі системи завдань; відповідність вправ віковим особливостям учнів; відповідність логічній структурі навчального матеріалу; наочності; максимальної зацікавленості; поступового нарощування складності.
6. Обґрунтовано, що зміст задачного матеріалу із стереометрії має відповідати таким вимогам: 1) повнота представлення виділених загальних і спеціальних евристик; 2) дотримання раціонального співвідношення між компонентами навчальної діяльності старшокласників; 3) передбачення трьох етапів застосування навчального матеріалу: формалізація (перехід від ситуації, описаної в задачі, до математичної моделі цієї ситуації); розв'язання задачі у межах побудованої моделі; інтерпретація (застосування одержаного розв'язання до вихідної ситуації).
7. Використання педагогічного програмного засобу GRAN-3D дає змогу ефективніше опановувати евристичними прийомами, управляти евристичною діяльністю за рахунок посилення мотивації інтересу до навчання, унаочнення абстрактних понять, використання динамічної наочності для розв'язання і складання задач та організації експериментально-дослідної діяльності учнів, індивідуалізації навчального процесу, інтенсифікації спілкування учень – учитель і учень – учень.

Одержані результати дослідження відкривають перспективи для подальшого дослідження у таких напрямках: диференційоване формування прийомів евристичної діяльності учнів на уроках алгебри і початків аналізу;

використання нових інформаційних технологій у процесі формування евристичних прийомів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики / Адамар Ж. – М.: Советское радио, 1970. – 150 с.
2. Айзенштат Я.Й. Розв'язування задач з математики в середній школі / Я.Й. Айзенштат, Б.Г. Білоцерківська. – К.: Радянська школа, 1957. – 320 с.
3. Альтшуллер Г.С. Алгоритм изобретения / Альтшуллер Г.С. – М.: Московский рабочий, 1975. – 296 с.
4. Ананченко К.О., Пермин Д.Е. Осуществление методики дифференцированного подхода в обучении математики / К.О. Ананченко, Д.Е. Пермин . – Витебск, 1989. – 215 с.
5. Ананьев Б.Г. Избранные психологические труды: В 2 т. / Под ред. А.А. Бодалева и др. – М.: Педагогика, 1980. Т.2. – С. 128 – 267.
6. Андреев В.И. Эвристическое программирование учебно-исследовательской деятельности / Андреев В.И. – М.: Высшая школа, 1981. – 240 с.
7. Анохин П.К. Теория отражения и современная наука о мозге / Анохин П.К. – М.: Наука, 1970. – 435 с.
8. Артемов А.К. Состав и методика формирования геометрических умений школьников: Автореф. дис. на соискание науч. степени д-ра пед. наук спец: 13.00.02 / А.К. Артемов. – М., 1975. – 45 с.
9. Артемов А.К. Об эвристических приемах при обучении геометрии / А.К. Артемов // Математика в школе. – 1973. – № 6. – С. 25 – 29.
10. Атанасян Л.С. и др. Геометрия 10 – 11: Учебник для 10 – 11 классов средней школы. – М.: Просвещение, 1993. – 207 с.
11. Асмус В.Ф. Проблема интуиции в философии и математике / В.Ф. Асмус. – М.: Мысль, 1965. – 312 с.
12. Бабанский Ю.К. Методы обучения в современной общеобразовательной школе / Ю.К. Бабанский. – М.: Просвещение, 1985. – 208 с.
13. Бабанский Ю.К. Оптимизация учебно-воспитательного процесса: Методические основы / Ю.К. Бабанский. – М.: Просвещение, 1982. – 192 с.

14. Баєв Б.Ф. Навчальна активність школяра / Б.Ф. Баєв. – К.: Знання, 1974. – 124 с.
15. Балк Г.Д. О применении эвристических приемов в школьном преподавании математики / Г.Д. Балк // Математика в школе. – 1969. – № 5. – С. 21 – 29.
16. Балл Г.А. О психологическом содержании понятия “задача” / Г.А. Балл // Вопросы психологии. – 1970. – № 6. – С. 75 – 85.
17. Барыбин К.С. Сборник геометрических задач на доказательство / К.С. Барыбин. – М.: Учпедгиз, 1954. – 152 с.
18. Бевз Г.П. Геометрія 10 – 11: Підручник для 10 – 11 класів загальноосвітніх навчальних закладів / Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г. – К.: Вежа, 2001. – 224 с.
19. Бевз Г.П. Методика розв’язування стереометричних задач: Посібник для вчителя / Г.П. Бевз. – К.: Рад. шк., 1988. – 192 с.
20. Беспалько В.П. Программированное обучение. Дидактические основы / В.П. Беспалько. – М.: Высшая школа, 1970. – 300 с.
21. Беспалько В.П. Слагаемые педагогических технологий / В.П. Беспалько. – М.: Педагогика, 1989. – 190 с.
22. Бобнева М.И. Эвристические программы, “лабиринты” и некоторые проблемы психологии / М.И. Бобнева // Вопросы психологии. – 1964. – № 5. – С. 63 – 70.
23. Богоявленская Д.Б. Психологические основы интеллектуальной активности: Дис. д-ра психологических наук: 19.00.01 / Богоявленская Диана Борисовна. – М., 1988. – 395 с.
24. Богоявленский Д.Н. Приемы умственной деятельности и их формирование у школьников / Д.Н. Богоявленский // Вопросы психологии. – 1969. – № 2. – С. 25 – 38.
25. Богоявленский Д.Н. Психологические предпосылки развивающего обучения. Тезисы докладов на II съезде общества психологов. Вып. 5. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1963. – С. 8 – 9.

26. Богоявленский Д.Н. Психология усвоения знаний в школе / Д.Н. Богоявленский, Н.А. Менчинская. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1959. – 68 с.
27. Богоявленский Д.Н. Формирование приемов умственной работы учащихся как путь развития и активизации мышления / Д.Н. Богоявленский // Вопросы психологии. – 1962. – № 4. – С. 13 – 17.
28. Божович Л.И. Этапы формирования личности в онтогенезе / Л.И. Божович // Вопросы психологии. – 1979. – № 2. – С. 47 – 49.
29. Божович Л.И. Личность и ее формирование в детском возрасте / Л.И. Божович. – М.: Просвещение, 1968. – 374 с.
30. Бондар С.П. Дидактичні основи застосування аналогії на уроці (На матеріалі предметів природничо-математичного циклу): Дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Бондар С.П. – К., 1975. – 217 с.
31. Бондар С.П. Суть аналогії та її дидактичні функції / С.П. Бондар // Радянська школа. – 1974. – № 5. – С. 26 – 29.
32. Брунер Дж. Процесс обучения: Пер. с англ. / Дж. Брунер. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1962. – 84 с.
33. Бугайов О.І. Диференціація навчання у сучасній середній школі / О.І. Бугайов // Радянська школа. – 1991. – № 8. – С. 7 – 15.
34. Бунаков Н.Ф. Избранные педагогические сочинения / Н.Ф. Бунаков. – М.: Изд-во Акад. Пед. Наук РСФСР, 1953. – 411 с.
35. Бурда М.І. Диференціація у навчанні математики: методичні рекомендації / М.І. Бурда. – К.: УОП КДПІ, 1992. – 98 с.
36. Бурда М.І. Емпіричне і теоретичне в змісті освіти // Зміст і технології шкільної освіти: Матеріали звітної наукової конференції Інституту педагогіки АПН України. 6 березня 2001 року. – К.: Пед. думка, 2001. – С. 4 – 5.
37. Бурда М.І. Методичні основи диференційованого формування геометричних умінь учнів основної школи: Дис. … док. пед. наук: 13.00.01 / Бурда Михайло Іванович. – К., 1994. – 347 с.

38. Бурда М.І. Принципи відбору змісту шкільної математичної освіти / М.І. Бурда // Педагогіка і психологія. – 1996. – № 1. – С. 40 – 45.
39. Бурда М.І. Рівні навчальної діяльності // Зміст і технології шкільної освіти: Матеріали звітної наукової конференції Інституту педагогіки АПН України. 26 – 28 березня 2002 року. – Ч. І. – К.: Пед. думка, 2002. – С. 4 – 5.
40. Бутко Д.Г. Влияние методов и приемов обучения на формирование умения доказывать у учащихся старших классов: Дисс... канд. пед. наук: 13.00.02 / Бутко Д.Г. – Ворошиловград, 1983. – 185 с.
41. Буш Г.Я. Основы эвристики для изобретателей. Ч.1. / Г.Я. Буш. – Рига: Знание, 1977. – 115 с.
42. Вайман В. Технологія проведення рівневого заліку з математики / В. Вайман // Математика в школі. – 1999. – № 3. – С. 14.
43. Васьков Ю.В. Педагогічні теорії, технології, досвід (Дидактичний аспект) / Ю.В. Васьков. – К.: Скорпіон, 2002. – 120 с.
44. Ващенко Г. Загальні методи навчання: Підручник для педагогів / Всеукраїнське Товариство ім. Г. Ващенка. – 1-ше вид. / Г. Ващенко– Київ: Українська Видавнича Спілка, 1997. – 441 с.
45. Вилькеев Д.В. Методы научного познания в школьном обучении / Д.В. Вилькеев. – Казань: Таткнигиздат, 1975. – 160 с.
46. Витума М.И. Диагностирующие и итоговые работы по математике на основе уровневой и профильной дифференциации // Тезисы Всесоюзной научно-практической конференции “Дифференциация в обучении математике” 24 – 27 октября 1989 г. – Кутаиси, 1989. – С. 30 – 34.
47. Власенко К.В. Формування прийомів евристичної діяльності на уроках геометрії в класах з поглибленим вивченням математики: Дис… канд. пед. наук: 13.00.02 / Власенко Катерина Володимирівна. – К., 2003. – 293 с.
48. Власенко К.В. Формування прийомів евристичної діяльності на уроках геометрії / К.В. Власенко // Рідна школа, 2003. – № 7. – С. 41 – 43.
49. Власенко К. Актуалізація евристичних ситуацій на уроках геометрії / К. Власенко, О. Скафа. – Донецьк: Фірма ТЕАН, 2003. – 192 с.

50. Возрастная и педагогическая психология: [Учеб. для пед. ин-тов]: Пер. со 2-го перераб. рус. изд. / [В.В. Давыдов, Т.В. Драгунова и др.]; Под ред. А.В. Петровского. – Алма-Ата: Мектеп, 1987. – 287 с.
51. Воловик П.М. Теорія ймовірностей і математична статистика в педагогіці / П.М. Воловик. – К.: Радянська школа, 1969. – 223 с.
52. Володько В. М. Індивідуалізація та диференціація навчання: понятійно-категоріальний аналіз / В. М. Володько // Педагогіка і психологія. – 1997. – № 4. – С. 9 – 18.
53. Вольтер М.И. Проблема дифференциации обучения в советской педагогике и практике общеобразовательной школы: Дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Вольтер М.И.. – Минск, 1977. – 159 с.
54. Выготский Л.С. Избранные психологические исследования / Л.С. Выготский. – М.: Издательство АПН РСФСР, 1956. – 520 с.
55. Выготский Л.С. Педагогическая психология / Л.С. Выготский. – М.: Педагогика, 1996. – 536 с.
56. Выготский Л.С. Собрание сочинений: В 6-ти т. / Под ред. Д.Б. Эльконина / Л.С. Выготский. – М.: Педагогика, 1982. Т. 4. – 432 с.
57. Гальперин Г.Я. Основные исследования по проблемам формирования умственных действий и понятий / Г.Я. Гальперин. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1965. – 51 с.
58. Гальперин Г.Я. Психология мышления и учения о поэтапном формировании умственных действий / Г.Я. Гальперин // Исследование мышления в современной психологии. – М., 1966. – С. 11 – 43.
59. Гальперин Г.Я. Методы обучения и умственное развитие ребенка / Г.Я. Гальперин. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. – 45 с.
60. Гальперин Г.Я. Формирование начальных геометрических понятий на основе организованного действия учащихся / Г.Я. Гальперин, Н.Ф. Талызина // Вопросы психологии. – 1957. – № 1. – С. 24 – 32.
61. Глейзер Г.Д. Каким быть школьному курсу геометрии / Г.Д. Глейзер // Математика в школе. – 1991. – № 4. – С. 68 – 71.

62. Гладких В.И. Роль индивидуального подхода в повышении эффективности урока / В.И. Гладких. – Краснодар, 1964. – 72 с.
63. Глузман Н.А. Формирование обобщенных приемов умственной деятельности у будущих учителей начальных классов в процессе изучения дисциплин математического цикла: Дисс… канд. пед. наук: 13.00.02 / Глузман Неля Анатольевна. – К., 2003. – 223 с.
64. Голік Л. До питання про диференційоване навчання старшокласників математики / Л. Голік // Математика в школі. – 1999. – № 2. – С. 11 – 13.
65. Голодюк Л.С. Рівнева диференціація на уроках геометрії / Л.С. Голодюк // Математика, № 39 (243), жовтень 2003. – С. 1 – 4.
66. Гольдберг Я.В. С чего начинается решение стереометрической задачи / Я.В. Гольдберг. – К.: Рад. шк., 1990. – 118 с.
67. Гонсалес Ортега А.М. Влияние методов обучения на развитие логического мышления учащихся: Дисс… канд. пед. наук: 13.00.01, 02.00.03 / Гонсалес Ортега Анна Маргарита. – К., 1988. – 100 с.
68. Гончаренко С.У. Український педагогічний словник / С.У. Гончаренко. – К.: Либідь, 1997. – 376 с.
69. Горчакова И.А. О формировании мотивации при обучении математике на основе эвристик / И.А. Горчакова // Эвристика и дидактика точных наук: Международный сборник научных работ. Вып. 10. – Донецк: ТЕАН, 1999. – С. 70 – 77.
70. Горчакова І.А. Переваги евристичного підходу до розв’язання задач / І.А. Горчакова // Дидактика математики: проблеми дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. Вип. 13. – Донецьк: ТЕАН, 2000. – С. 78 – 85.
71. Горчакова І.А. Система математичних задач як засіб формування евристичної діяльності учнів основної школи: Дис… канд. пед. наук: 13.00.02 / Горчакова Ірина Анатоліївна. – К., 2002. – 226 с.

72. Грабарь М.И. Применения математической статистики в педагогических исследованиях: Непараметрические методы / М.И. Грабарь, К.А. Краснянская. – М.: Просвещение, 1977. – 136 с.
73. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики: Кн. для учителя / Я.И. Груденов. – М.: Просвещение, 1990. – 224 с.
74. Гурова Л.Л. О соотношении формальных и эвристических компонентов в решении задач / Л.Л. Гурова // Вопросы психологии. – 1968. – № 2. – С. 13 – 15.
75. Гурова Л.Л. Структурные особенности эвристических процессов и условия их формирования как продуктивных компонентов решения задач / Л.Л. Гурова // Вопросы психологии. – 1968. – № 4. – С. 24 – 26.
76. Гусак П.М. Теорія і технологія диференційованого навчання майбутніх вчителів початкових класів: Автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра пед. наук: спец. 13.00.01 / Гусак Петро Миколайович. – Київ, 1999. – 37 с.
77. Давыдов В.В. Виды обобщений в обучении / В.В. Давыдов. – М.: Педагогика, 1972. – 423 с.
78. Давыдов В.В. Проблемы развивающего обучения. Опыт теоретического и экспериментального исследования / В.В. Давыдов. – М.: Педагогика, 1986. – 240 с.
79. Данилов М.А. Процесс обучения в советской школе / М.А. Данилов. – М.: Учпедгиз, 1960. – 299 с.
80. Данилова Е.Ф. Как помочь учащимся находить путь к решению геометрических задач / Е.Ф. Данилова. – М.: Учпедгиз, 1958. – 96 с.
81. Державний стандарт базової і повної середньої освіти // Освіта України. – 2004. – № 5 (500). – С. 8 – 11.
82. Дидактика современной школы: Пособие для учителей / Б.С. Кобзарь, Г.Ф. Кумарин, Ю.А. Кусый и др.; Под ред. В.А. Онищука. – К.: Рад. шк., 1987. – 350 с.

83. Дорофеев Г.В., Кузнецова Л.В., Суворова С.Б., Фирсов В.В. Дифференциация в обучении математике // Математика в школе. – 1990. – № 4. – С. 15 – 21.

84. Дубинчук Е.С. Активизация познавательной деятельности учащихся средних профтехучилищ в процессе обучения математике / Е.С. Дубинчук. – К.: Вища школа, 1987. – 104 с.

85. Дубнов Я.С. Беседы о преподавании математики / Я.С. Дубнов. – М.: Просвещение, 1965. – 236 с.

86. Епишева О.Б. Учить школьников учиться математике: Формирование приемов учебной деятельности: Кн. для учителя / О.Б. Епишева, В.И. Крупич. – М.: Просвещение, 1990. – 128 с.

87. Есаулов А.Ф. Психология решения задач / А.Ф. Есаулов. – М.: Высшая школа, 1972. – 216 с.

88. Жалдак М.І. Комп’ютер на уроках геометрії: Посібник для вчителів / М.І. Жалдак, О.В. Вітюк. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2000. – 168 с.

89. Забранський В. Організація письмових контрольних та самостійних робіт при диференційованому навчанні математики / В. Забранський, Н. Забранська // Математика в школі. – 2000. – № 5. – С. 30 – 32.

90. Загвязинский В.И. Измерения уровня проблемности в обучении / В.И. Загвязинский // Объективные характеристики, критерии, оценки и измерения педагогических явлений и процессов. – М., 1973. – С. 233 – 237.

91. Занков Л.В. Дидактика и жизнь / Л.В. Занков. – М.: Просвещение, 1968. – 175 с.

92. Зверев И.Д. Теория и практика методов обучения в современных условиях общеобразовательной школы / И.Д. Зверев. – М.: Просвещение, 1975. – 272с.

93. Зорина Л.Я. Дидактические основы формирования системности знаний старшеклассников / Л.Я. Зорина. – М.: Педагогика, 1978. – 128 с.

94. Иванов Й.Н. Развитие продуктивного мышления учащихся при обучении геометрии в 6 – 7 классах средней школы: Дисс. …канд. пед. наук: 13.00.02 / Иванов Йордан Николов. – К., 1990. – 201 с.

95. Игнатьев Е.М. В царстве смекалки / Под ред. М.К. Потапова. Текстол. обработка Ю.В. Нестеренко. – 2-е изд. – М.: Наука, 1979. – 208 с.
96. Изард К. Эмоции человека / К. Изард. – М.: Издательство МГУ, 1980. – 439с.
97. Из опыта преподавания математики в средней школе: Пособие для учителей / Сост.: А.В. Соколова, В.В. Пикан, В.А. Оганесян. – М.: Просвещение, 1979. – 192 с.
98. Ильина Т.А. Программированное обучение / Педагогика: Учебное пособие для студентов пед. ин-тов / Т.А. Ильина.– М.: Просвещение, 1984. – С. 301 – 316.
99. Ильясов А.И. Система эвристических приемов решения задач / А.И. Ильясов. – М.: Изд-во РОУ, 1992. – 182 с.
100. Ильясов А.И. Структура процесса учения / А.И. Ильясов. – М.: Изд-во МГУ, 1986. – 198 с.
101. Ипполитов Ф.В. Память школьника / Ф.В. Ипполитов. – М.: Знание, 1978. – 48 с.
102. Ительсон Л.Б. Психологические теории научения и модели процесса обучения / Л.Б. Ительсон // Советская педагогика. – 1973. – № 3. – С. 89.
103. Кабанова-Меллер Е.Н. Приемы учебной работы и овладение ими (в условиях развивающего обучения) / Е.Н. Кабанова-Меллер // Вопросы психологии, 1980. – № 4. – С. 145 – 150.
104. Кабанова-Меллер Е.Н. Формирование приемов умственной деятельности и умственное развитие учащихся / Е.Н. Кабанова-Меллер. – М.: Просвещение, 1968. – 288 с.
105. Кагельняк Г.И. Розвиток операції порівняння у школярів / Г.И. Кагельняк // Радянська школа, 1969. – № 7. – С. 11.
106. Калмыкова З.И. Продуктивное мышление как основа обучаемости / З.И. Калмыкова. – М.: Педагогика, 1981. – 200 с.
107. Калмыкова З.И. Психологические принципы развивающего обучения / З.И. Калмыкова. – М.: Знание, 1979. – 48 с.

108. Карелін Л.З. Задачі на дослідження в шкільному курсі геометрії: Автореф. дис. На здобуття наук. ступеня канд. пед. наук: 13.00.02 / Карелін Леонід Зіновійович. – К., 1998. – 15 с.
109. Карлащук А.Ю. Формування дослідницьких умінь школярів у процесі розв'язування математичних задач з параметрами: Дис… канд. пед. наук: 13.00.02 / Карлащук Анжеліка Юріївна. – К., 2001. – 242 с.
110. Кирсанов А.А. Индивидуализация учебной деятельности как педагогическая проблема / А.А. Кирсанов. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1982. – 223 с.
111. Кисельов А.П. Геометрія. Частина друга. Стереометрія: Підручник для 9 – 10 класів / А.П. Кисельов. – К.: Рад. шк., 1951. – 103 с.
112. Колесов Д.В. Учителю о психологии и физиологии подростка / Д.В. Колесов, И.Ф. Мягков. – М.: Просвещение, 1986. – 86 с.
113. Колмогоров А.Н. О профессии математика. 3-е изд., доп. / А.Н. Колмогоров. – М.: Изд-во МГУ, 1960. – 120 с.
114. Колягин Ю.М. и др. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика. – М.: Просвещение, 1975. – 480 с.
115. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике. В 2-х ч. – М.: Просвещение, 1977. – Ч. 1.: Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. – 110 с., Ч. 2.: Обучение математике через задачи и обучение решению задач. – 144 с.
116. Колягин Ю.М. Учись решать задачи: Пособие для учащихся VII – VIII кл. / Ю.М. Колягин, В.А. Оганесян. – М.: Просвещение, 1980. – 96 с.
117. Коменский Я.А. Педагогическое наследие / Я.А. Коменский, Д. Локк и др. – М.: Педагогика, 1988. – 409 с.
118. Концепція базової математичної освіти в Україні / Ін-т системних досліджень освіти. – К., 1993. – 31 с.
119. Концепція математичної освіти 12-річної школи. Проект // Математика в школі. – 2002. – № 2. – С. 12 – 17.

120. Концепція профільного навчання в старшій школі // Друга Всеукраїнська педагогічна школа. Підручник для вчителя. Випуск другий. – К., 2003. – С. 1 – 11.

121. Концепція 12-річної середньої загальноосвітньої школи: Проект // http: // www.ime.edu-ua.net.

122. Коротяев Б.И. Вооружать учащихся методами познания учебного предмета / Б.И. Коротяев // Советская педагогика. – 1965. – № 7. – С. 22.

123. Костюк Г.С. Принципы развития в психологии (методические и теоретические проблемы в психологии) / Под редакцией Е.В. Шороховой. – М., 1969. – С. 34.

124. Кривошапова Р.Ф. Требования к знаниям, умениям и навыкам учащихся / Р.Ф. Кривошапова, Э.А. Красновский, В.З. Резникова // Советская педагогика. – 1978. – № 2. – С. 21 – 27.

125. Критерії оцінювання навчальних досягнень учнів у системі загальної середньої освіти // Математика в школі. –К., 2000, № 10. – с. 2.

126. Крутецкий В.А. Основы педагогической психологии / В.А. Крутецкий. – М.: Просвещение, 1972. – 255 с.

127. Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьников / В.А. Крутецкий. – М.: Просвещение, 1968. – 432 с.

128. Крутецкий В.А. Психология обучения и воспитания школьников / В.А. Крутецкий. – М.: Просвещение, 1976. – 303 с.

129. Кулюткин Ю.Н. Эвристические методы в структуре решений / Ю.Н. Кулюткин. – М.: Педагогика, 1970. – 231 с.

130. Кушнір І.А. Методи розв’язування задач з геометрії: Кн. для вчителя / І.А. Кушнір. – К.: Абрис, 1994. – 464 с.

131. Кыверялг А.А. Методы исследования в профессиональной педагогике / А.А. Кыверялг. – Таллинн: “Валгус”, 1980. – 334 с.

132. Лакатос И. Доказательства и опровержения: Пер. с англ. / И. Лакатос. – М.: Наука, 1967. – 152 с.

133. Лейтес Н.С. Умственные способности и возраст / Н.С. Лейтес. – М.: Педагогика, 1971. – 279 с.

134. Лейфура В.М. Математичні задачі евристичного характеру / В.М. Лейфура. – К.: Вища школа, 1992. – 91 с.

135. Леонтьев А.Н. Деятельность, сознание, личность / А.Н. Леонтьев. – М., 1975. – 54 с.

136. Лернер И.Я. Дидактические основы методов обучения / И.Я. Лернер. – М.: Педагогика, 1981. – 185 с.

137. Лернер И.Я. Проблема методов обучения и пути ее исследования // Вопросы методов педагогических исследований / И.Я. Лернер. – М., 1973. – С. 45.

138. Лернер И.Я. Развивающее обучение с дидактических позиций / И.Я. Лернер // Педагогика, 1996. – № 2. – С. 7 – 11.

139. Лисов В.І., Тимченко І.А. Система задач з геометрії в математичних класах // Проблеми навчання в вузі та школі. Тези доповідей науково-методичної конференції професорсько-викладацького складу університету та вчителів шкіл Донецької області. – Донецьк: ДонДУ. – 1992. – С. 70.

140. Лук А. Н. Психология творчества / А. Н. Лук. – М.: Наука, 1978. – 127 с.

141. Магомедов Н.М. Дифференцированный подход к обучению и воспитанию школьников: Проблемы, перспективы / Н.М. Магомедов. – Самара, Издательство: Самарский ГУ, 1993. – 174 с.

142. Макоев А.З. Первое приближение к индивидуализации процесса обучения / А.З. Макоев. – Орджоникидзе: Изд-во “Ирт”, 1974. – 120 с.

143. Максимович О.М. Розвиток логічного мислення учнів на уроках математики: Наук.-метод. посіб. / О.М. Максимович. – Івано-Франківськ: Лілея – НВ, 2001. – 56 с.

144. Маркова А.К. Формирование мотивации учения в школьном возрасте / А.К. Маркова. – М.: Просвещение, 1983. – 96 с.

145. Математика. Державний освітній стандарт. Проект // Математика в школі. – 1998. – № 1. – С. 6 – 19.

146. Матюшкин А.М. Проблемные ситуации в мышлении и обучении / А.М. Матюшкин. – М.: Педагогика, 1972. – 208 с.
147. Матюшкин А.М. Психологические основы проблемного и программированного обучения / Проблемное и программированное обучение / А.М. Матюшкин. – М., 1973. – С. 45 – 57.
148. Махмутов М.И. Проблемное обучение / М.И. Махмутов. – М.: Педагогика, 1975. – 368 с.
149. Менчинская Н.А. Мышление в процессе обучения / Н.А. Менчинская // Исследование мышления в советской психологии. – М.: Просвещение, 1966. – С. 349 – 357.
150. Менчинская Н.А. Психологические проблемы активности личности в обучении / Н.А. Менчинская // Народное образование. – М., 1974. – № 4. – С. 65.
151. Метельский Н.В. Психолого-педагогические основы дидактики математики / Н.В. Метельский. – Минск: Вышейшая школа, 1977. – 256 с.
152. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика. Учебное пособие для студентов пед. ин-тов по специальности 2104 “математика” и 2105 “физика” / А.Л. Блох, Е.С. Канин, Н.Г. Килина и др.; Сост. Р.С. Черкасов, А.А. Столяр. – М.: Просвещение, 1985. – 336 с.
153. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика. Учебное пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / В.А. Оганесян, Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканин, В.Я. Саннинский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1980. – 368 с.
154. Минский М. На пути к искусственному мышлению / М. Минский // Труды института радиоинженеров. – 1961. – №1. – С. 14 – 18.
155. Минский М. Проблемы в области искусственного интелекта. – В кн.: Математические проблемы в биологии / Под ред. Р. Беллмана / М. Минский. – М.: Мир, 1966. – С. 79 – 80.

156. Міжнародний математичний конкурс “Кенгуру – 99” / Інформаційно-методичний вісник для учнів і вчителів. – Львів: “Інтелект – Захід”, 1999. – 160 с.

157. Мірошниченко М.В. Формування прийомів навчально-пізнавальної діяльності в учнів загальноосвітньої школи (На матеріалі вивчення української мови): Дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Мірошниченко М.В. – К., 1975. – 166 с.

158. Моляко В.А. Психология решения школьниками творческих задач / В.А. Моляко. – К.: Рад. школа, 1983. – 95 с.

159. Моляко В.А. Психология творческой деятельности / В.А. Моляко. – К.: И-во “Знание”, УССР, 1978. – 47 с.

160. Моляко В.О. Психологічна готовність до творчої праці / В.О. Моляко. – К.: Т-во “Знання” УРСР, 1989. – 43 с.

161. Момот Л.Л. Проблемно-пошукові методи навчання в школі / Л.Л. Момот. – К.: Радянська школа, 1984. – 63 с.

162. Мочалова Н.М. Основные дидактические условия реализации методов проблемного обучения. Автореф. дис. ... канд. пед. наук. – Л., 1978. – 16 с.

163. Немытова М.И. Дифференцированный подход к учащимся при обучении началам анализа: Дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Немытова Мария Ивановна. – М., 1984. – 128 с.

164. Нерсесянц В.С. Сократ / В.С. Нерсесянц. – М.: Инфра-М, 1996. – 312 с.

165. Ньюэлл А., Шоу Д., Саймон Г. Процессы творческого мышления: Пер. с англ. – В сб.: Психология мышления / Под ред. А.М. Матюшкина. – М.: Прогресс, 1965. – С. 507 – 532.

166. Оганесян В.А., Колягин Ю.М., Луканкин Г.Л., Санинский В.Я. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика. Учеб. Пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. – М.: Просвещение, 1998. – 246 с.

167. Окунев А.А. Спасибо за урок, дети: Кн. для учителя: Из опыта работы / А.А. Окунев. – М.: Просвещение, 1988. – 128 с.

168. Освітні технології: Навч.-метод. посіб. / О.М. Пєхота, А.З. Кіктенко, О.М. Любарська та ін.; За заг. ред. О.М. Пєхоти. – К.: А.С.К., 2001. – 256 с.

169. Осинская В.Н. Активизация познавательной деятельности учащихся на уроках математики в 9 – 10 классах / В.Н. Осинская. – К.: Рад. школа, 1980. – 143 с.

170. Осинская В.Н. Формирование у старшеклассников приемов умственной деятельности в процессе обучения математике: Дис. … канд. пед. наук 13.00.02 / Осинская Вера Никитична. – К., 1978. – 172 с.

171. Осинская В.Н. Формирование умственной культуры учащихся в процессе обучения математике: Кн. для учителя / В.Н. Осинская. – К.: Рад. шк., 1989. – 192 с.

172. Павлов И.П. Полное собрание сочинений. Т. III. / И.П. Павлов. – М.: Изд-во АН СССР, 1951. – 220 с.

173. Павская Л.М. Дидактические основы построения системы учебных задач (на материале преподавания предметов естественно-математического цикла в старших классах): Автореф. дис. на соискание науч. степени канд. пед. наук: спец. 13.00.01 / Л.М. Павская. – К., 1985. – 22 с.

174. Панюшкин В.П., Андреенков А.И. Динамика “зоны ближайшего развития” в процессе освоения учениками новой деятельности в сотрудничестве с учителем // Психологическая наука: проблемы и перспективы: Тез. докл. Всезоюз. конф., посвященной 90-летию Г.С. Костюка: Часть II. – Киев, 1990. – С. 63 – 64.

175. Пермякова С.Л. Уровневый подход при изучении параллельности плоскостей / С.Л. Пермякова, О.В. Каштанкина // Математика в школе. – 1992. – № 2 – 3. – С. 20.

176. Перельман Р.Г. Цели и пути покорения космоса / Р.Г. Перельман. – М.: Наука, 1967. – 212 с.

177. Песталоцци И.Г. Статьи и отрывки из педагогических сочинений / И.Г. Песталоцци. – М., Учпедгиз, 1939. – 110 с.

178. Пиаже Ж. Избранные психологические труды: Перевод с французского / Ж. Пиаже. – М.: Просвещение, 1969. – 24 с.

179. Планирование обязательных результатов обучения математике / Л.О. Денищева, Л.В. Кузнецова, И.А. Лурье и др.; Сост. В.В. Фирсов. – М.: Просвещение, 1989. – 237 с.

180. Платон. Диалоги. (Пер. с древне греч.: А.Ф. Лосев). – М.: Мысль, 1986. – 607 с.

181. Погорєлов О.В. Геометрія: Стереометрія: Підруч. для 10 – 11 кл. серед. шк. – 5-те вид. / О.В. Погорєлов. – К.: Освіта, 2001. – 128 с.

182. Пойа Д. Как решать задачу: Пер. с англ. / Под ред. Ю.М. Гайдука. – М.: Учпедгиз, 1959. – 207 с.

183. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения: Пер. с англ. / Под ред. С.А. Яновской. – М.: Наука, 1975. – 462 с.

184. Пойа Д. Математическое открытие: Пер. с англ. / Под ред. И.М. Яглома. – М.: Наука, 1976. – 448 с.

185. Пономарев Я.А. Психика и интуиция / Я.А. Пономарев. – М.: Политиздат, 1967. – 256 с.

186. Пономарев Я.А. Психология творчества / Я.А. Пономарев. – М.: Наука, 1990. – 222 с.

187. Пономарев Я.А. Психология творчества и педагогика / Я.А. Пономарев. – М.: Педагогика, 1976. – 280 с.

188. Поспелов Д.А. Эвристическое программирование и эвристика как наука / Д.А. Поспелов, В.Н. Пушкин, В.Н. Садовский // Вопросы философии. – 1967. – № 7. – С. 47 – 54.

189. Поспелов Н.Н. Формирование мыслительных операций у старшеклассников / Н.Н. Поспелов, И.Н. Поспелов. – М.: Педагогика, 1989. – 151 с.

190. Практикум по дидактике и методикам обучения / А.В. Хуторской. – СПб.: Питер, 2004. – 541 с.

191. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика. 5 – 11-і класи (авт. В.Г. Бевз, А.Г. Мерзляк, З.І. Слєпкань). – К.: Навчальна книга, 2003. – С. 4 – 53.

192. Психология решения учащимися производственно-практических задач / Под ред. Н.А. Менчинской. – М.: Просвещение, 1965. – 255 с.

193. Психология современного подростка / Д.И. Фельдштейн, Т.Н. Бостанжнева, И.М. Вереникина и др.; Под ред. Д.И. Фельдштейна. – М.: Педагогика, 1987. – 236 с.

194. Пуанкаре А. Математическое творчество. – В кн.: Формирование мировоззрения учащихся в процессе обучения математике / Авт. В.В. Гнеденко. – М.: Просвещение, 1982. – С. 134 – 143.

195. Пушкин В.Н. Эвристика – наука о творческом мышлении / В.Н. Пушкин. – М.: Политиздат, 1967. – 207 с.

196. Пушкин В.Н. Эвристика и кібернетика / В.Н. Пушкин. – М.: Знание, 1965. – 48 с.

197. Рабунский Е.С. Индивидуальный подход в процессе обучения школьников: На основе анализа их самостоятельной учебной деятельности / Е.С. Рабунский. – М.: Педагогика, 1975. – 184 с.

198. Раев А.И. Психологические основы управления умственной деятельностью учащихся в процессе обучения / А.И. Раев. – Л., 1971. – 236 с.

199. Райленц А.И. Из опыта организации дифференцированного обучения математике в школах Молдавии // Дифференциация в обучении математике: Тез. докл. Всесоюз. научно-практ. конф. 24 – 27 октября 1989. – Кутаиси, 1989. – С. 34 – 37.

200. Раухман А.С. Формирование методических умений и навыков у студентов математической специальности педагогического института: Дисс. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Раухман А.С. – К., 1974. – 194 с.

201. Реп’єв В.В. Загальна методика викладання математики / В.В. Реп’єв. – К.: Рад. школа, 1960. – 260 с.

202. Решетников Н.Н. Об одной системе задания требований к уровню обучения / Н.Н. Решетников // Теоретические основы определения требований к математической подготовке учащихся. Сб. науч. трудов НИИ СиМО АПН СССР / Под ред. В.В. Фирсова. – М., 1982. – С. 86 – 98.

203. Рубинштейн С.Л. Бытие и сознание / С.Л. Рубинштейн. – М.: Изд-во АН СССР, 1957. – 328 с.

204. Рубинштейн С.Л. О мышлении и путях его исследования / С.Л. Рубинштейн. – М.: Изд-во АН СССР, 1958. – 148 с.

205. Рубинштейн С.Л. Основы общей психологи / С.Л. Рубинштейн. – М.: Учпедгиз, 1946. – 416 с.

206. Рубинштейн С.Л. Принцип детерминизма и психологическая теория мышления // Психологическая наука в СССР / Под ред. Б.Г. Ананьева, Г.С. Костюка, А.Н. Леонтьева и др. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1959. Т. 1. – С. 315 – 356.

207. Самарин Ю.А. Очерки психологии ума. Особенности умственной деятельности школьника / Ю.А. Самарин. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1962. – 188 с.

208. Саранцев Г.И. Эвристики в обучении доказательству / Г.И. Саранцев // Міжнародна дистанційна конференція “Евристичні методи у навчанні математики”. – Труди. – Донецьк, ТЕАН, 1997. – 68 с.

209. Семенець С.П. Розвиток продуктивного мислення учнів при вивченні алгебри і початків аналізу: Дис… канд. пед. наук: 13.00.02 / Семенець Сергій Петрович. – К., 1998. – 220 с.

210. Семушин А.Д. Методика обучения решению задач на построение по стереометри / А.Д. Семушин. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1959. – 160 с.

211. Семушин А.Д. Активизация мыслительной деятельности учащихся при изучении математики. Обучение обобщению и конкретизации. Пособие для учителей / А.Д. Семушин, О.С. Кретинин, Е.Е. Семенов. – М.: Просвещение, 1978. – 64 с.

212. Скафа О. Задача як форма і засіб формування евристичної діяльності / О. Скафа // Рідна школа, 2003. – № 7. – С. 43 – 46.

213. Скафа Е.И. Теоретико-методологические основы формирования приемов эвристической деятельности при изучении математики в условиях внедрения современных технологий обучения: Автореф. дис. на соискание науч. степени докт. педагог. наук: спец. 13.00.01 / Е.И. Скафа. – К., 2005. – 34 с.

214. Скафа О. Методичні вимоги щодо організації евристичного навчання математики / О. Скафа // Рідна школа, 2004. – № 1. – С. 32 – 35.

215. Слепкань З.И. Психолого-педагогические основы обучения математике: Метод. пособие / З.И. Слепкань. – К.: Радянська школа, 1983. – 192 с.

216. Слепкань З.И. Психолого-педагогические основы уровневой дифференциации при обучении математике в основной школе // Дифференциация в обучении математике: Тез. докл. Всесоюзной научно-практической конференции 24 – 27 октября 1989 г. – Кутаиси, 1989. – С. 24 – 27.

217. Слєпкань З. Ще раз про диференціацію навчання математики і роль в ній освітнього стандарту / З. Слєпкань // Математика в школі. – 2002, № 2. – С. 29 – 30.

218. Словарь иностранных слов. – 18-е изд., стер. – М.: Рус. яз., 1989. – 624 с.

219. Смаглий Е.И. Проявление и формирование психического состояния уверенности: Автореф. дис. на соискание науч. степени канд. псих. наук: спец. . – К., 1989. – 15 с.

220. Сморжевський Л.О. Один з аспектів диференціації навчання математики в середній школі / Л.О. Сморжевський // Збірник наукових праць Кам’янець-Подільського державного педагогічного університету. Серія фізико-математична. Вип. 3. – Кам’янець-Подільський педагогічний університет, 1993. – С. 155 – 164.

221. Сморжевський Ю.Л. Диференційоване формування прийому введення допоміжного відрізка в старшокласників на уроках стереометрії / Ю.Л. Сморжевський // Збірник наукових праць Кам’янець-Подільського

державного педагогічного університету. Серія педагогічна. – Кам.-Подільський, 2004. – С. 94 – 96.

222. Сморжевський Л.О. Стереометрія. Дидактичні матеріали та тематичні перевірочні роботи для рівневого навчання / Л.О. Сморжевський, Ю.Л. Сморжевський. – Кам’янець-Подільський: “Абетка – НОВА”, 2002. – 68 с.

223. Сморжевський Ю.Л. Дослідження евристичної діяльності старшокласників на уроках стереометрії / Ю.Л. Сморжевський // Тези доповідей аспірантів і наукових співробітників Інституту педагогіки АПН України. – К.: Педагогічна думка, – 2004. – С. 28 – 29.

224. Сморжевський Ю.Л. Про формування спеціальних прийомів евристичної діяльності учнів на уроках стереометрії / Ю.Л. Сморжевський // Тези доповідей Х-ої міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука. КПІ. – 2004. – С. 734.

225. Сморжевський Ю.Л. Використання порівняння і аналогії на уроках стереометрії / Ю.Л. Сморжевський // Математика в школі. – № 5. – 2004. – С. 36 – 40.

226. Сморжевський Ю.Л. Прийоми евристичної діяльності учнів при вивченні геометрії. Диференційовані завдання / Ю.Л. Сморжевський. – Кам’янець-Подільський: Абетка, 2004. – 100 с.

227. Сморжевський Ю.Л. Про диференційоване формування прийому введення допоміжних величин як спеціального прийому евристичної діяльності старшокласників на уроках стереометрії / Ю.Л. Сморжевський // Тези доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції. НПУ ім. М.П. Драгоманова. – 2004. – С. 165 – 166.

228. Сморжевський Ю.Л. Про принципи відбору диференційованих завдань з стереометрії для формування прийомів евристичної діяльності старшокласників / Ю.Л. Сморжевський // Тези доповідей на Інтернет-конференції. Педагогіка, сучасні методи викладання. – К.: ТОВ „ТК „МЕГАНОМ”. – 2005. – С. 19.

229. Сморжевський Ю.Л. Про диференційоване формування аналізу і синтезу як прийомів евристичної діяльності старшокласників на уроках стереометрії / Ю.Л. Сморжевський // Математика в школі. – № 1. – 2006. – С. 36 – 40.

230. Советский энциклопедический словарь / Научно-редакционный совет: А.М. Прохоров. – М.: “Советская Энциклопедия”, 1981. – 1600 с.

231. Сократ, Платон, Аристотель, Сенека: Биогр. очерки / Е. Орлова (сост.). – М.: Республика, 1995. – 267 с.

232. Современные проблемы методики преподавания математики: Сб. статей. Учеб. пособие для студентов мат. и физ.-мат. спец. пед. ин-тов / Сост. Н.С. Антонов, В.А. Гусев. – М.: Просвещение, 1985. – 304 с.

233. Сойер У.У. Прелюдия к математике. Перев. с англ. Изд. 2-е / У.У. Сойер. – М.: Просвещение, 1972. – 258 с.

234. Столяр А.А. Логические проблемы преподования математики / А.А. Столяр. – Минск: Высшая школа, 1965. – 254 с.

235. Столяр А.А. Методы обучения математики / А.А. Столяр. – Минск: Высшая школа, 1966. – 188 с.

236. Стоюнин В.Я. Избранные педагогические сочинения. Под ред. И.Я.Константинова / В.Я. Стоюнин. – М., 1954. – 397 с.

237. Талызина Н.Ф. Деятельностный подход к построению модели специалиста / Н.Ф. Талызина // Вестник высшей школы. – 1986. – № 3. – С. 10 – 14.

238. Талызина Н.Ф. Управление процессом усвоения знаний (психологические основы) / Н.Ф. Талызина. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 345 с.

239. Талызина Н.Ф. Управление процессом усвоения знаний / Н.Ф. Талызина. – М.: Педагогика, 1975. – 343 с.

240. Талызина Н.Ф. Формирование познавательной деятельности учащихся / Новое в жизни, науке и технике. Сер. педагогика и психология. – № 3. / Н.Ф. Талызина. – М.: Знание, 1983. – 96 с.

241. Таточенко В.И. Методика формирования у учащихся 6 – 8 классов приемов умственной деятельности при обучении математике: Дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Таточенко В.И. – К., 1989. – 212 с.
242. Тымощук М.Е. О дифференцированной помощи при решении задач / М.Е. Тымощук // Математика в школе. – 1993. – № 2. – С. 16 – 20.
243. Тихомиров О.К. Структура мыслительной деятельности человека / О.К. Тихомиров. – М.: Изд-во МГУ, 1969. – 304 с.
244. Тихомиров О.К. Эвристики человека / О.К. Тихомиров, В.А. Терехов // Вопросы психологии, 1967, № 2. – С. 31 – 36.
245. Травинский В.И. Уровни знаний и критерии их усвоения (исследование на материале физики средней школы): Автореф. дис. на соискание науч. степени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 / В.И. Травинский. – М., 1971. – 22 с.
246. Тягур Р.С. Ефективність системи диференційованого навчання / Р.С. Тягур // Початкова школа. – 1992. – № 11 – 12. – С. 25 – 26.
247. Унт И.Э. Индивидуализация и дифференциация обучения / И.Э. Унт. – М.: Педагогика, 1990. – 192 с.
248. Ушинський К.Д. Вибрані педагогічні твори: у 2-х т. / К.Д. Ушинський. – К., 1983. – Т.1. Теоретичні проблеми педагогіки. – К., 1983. – 488 с.
249. Фарков А.В. К проблеме профильной дифференциации в школе / А.В. Фарков // Математика в школе. – 1991. – № 5. – С. 8.
250. Федоров В. Психологічні аспекти диференціації: теорія і практика / В. Федоров. – Хмельницький, 1990. – С. 30.
251. Философская энциклопедия / Гл. ред. Ф.В. Константинов. – М.: Сов. Энциклопедия, 1970. – 740 с.
252. Фридман Л.М. Логико-психологический анализ школьных учебных задач / Л.М. Фридман. – М.: Педагогика, 1977. – 208 с.
253. Фридман Л.М. Педагогический опыт глазами психолога: Кн. для учителя / Л.М. Фридман. – М.: Просвещение, 1987. – 207 с.
254. Фридман Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе / Л.М. Фридман. – М.: Просвещение, 1983. – 160 с.

255. Фридман Л.М. Учитесь учиться математике. Кн. для учащихся / Л.М. Фридман. – М.: Просвещение, 1985. – 112 с.

256. Фридман Л.М. Изучение личности учащегося и ученических коллективов: Кн. для учителя / Л.М. Фридман, Т.А. Пушкина, И.Я. Каплунович. – М.: Просвещение, 1988. – 207 с.

257. Фурман А.В. Модульно-розвивальне навчання: принципи, умови, забезпечення / Державна академія керівних кадрів освіти МО України / А.В. Фурман. – К.: Правда Ярославичів, 1997. – 339 с.

258. Хмель В.П. Формирование у старшеклассников обобщенных приемов решения математических задач: Автореф. дис. на соискание науч. степени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 / В.П. Хмель. – К., 1983. – 23 с.

259. Хуторской А.В. Дидактические основы эвристического обучения: Автореф. дис. на соискание науч. степени д-ра пед. наук: спец. 13.00.01 / А.В. Хуторской. – М., 1998. – 33 с.

260. Хуторской А.В. Современная дидактика / А.В. Хуторской. – М.: Международная педагогическая академия, 2002. – 502 с.

261. Хуторской А.В. Эвристический тип образования: результаты научно-практического исследования / А.В. Хуторской // Педагогика. 1999. – № 7. – С. 15 – 22.

262. Хуторской А.В. Эвристическое обучение // Педагогика. Основы общей педагогики. Дидактика / Учебное пособие / А.В. Хуторской. – Минск: ТетраСистемс, 2002. – 468 с.

263. Хуторской А.В. Эвристическое обучение: Теория, методология, практика / А.В. Хуторской. – М.: Международная педагогическая академия, 1998. – 266 с.

264. Чернега Н. Особистісно-орієнтоване навчання: сучасні підходи / Н. Чернега // Рідна школа. – № 9 (860), вересень 2001. – С. 13 – 14.

265. Чередов И.М. О дифференцированном обучении на уроках / И.М. Чередов. – Омск: Зап.-Сиб. кн. изд-во, 1973. – 154 с.

266. Шапиро С.И. Исследование индивидуальних способностей учащихся в процессе переработки математической информации / С.И. Шапиро // Вопросы психологии. – М., 1965. – С. 18 – 24.

267. Шапиро С.И. Психологический анализ структуры математических способностей в старшем школьном возрасте / С.И. Шапиро // Вопросы психологических способностей. – М.: Педагогика. – 1973. – С. 90 – 129.

268. Шардаков М.Н. Мышление школьника / М.Н. Шардаков. – М.: Учпедгиз, 1963. – 256 с.

269. Шахмаев Н.М. Дифференциация обучения в средней общеобразовательной школе // Дидактика средней школы / Под. ред. М.Н. Скаткина. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1982. – Гл. 8. – С. 269 – 296.

270. Швец В.А. Реализация функций тематического контроля результатов обучения учащихся математике в старших классах средней школы: Дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Швец Василий Александрович – К., 1988. – 209 с.

271. Шеварев П.А. Обобщение асоциации в учебной работе школьника / П.А. Шеварев. – М.: АПН РСФСР, 1959. – 302 с.

272. Шохор-Троцкий С.И. Геометрия на задачах (Основной курс): Книга для учителей. – 2-е изд. / С.И. Шохор-Троцкий – М.: Издание т-ва И.Д. Сытина, 1913. – 340 с.

273. Щукина Г.И. Проблема познавательного интереса в педагогике / Г.И. Щукина. – М.: Педагогика, 1971. – 351 с.

274. Эльконин Д.Б. Концепция формирования умственных действий и ее критика Ю.А. Самариным / Д.Б. Эльконин // Вопросы психологии. – 1959. – № 6. – С. 25 – 34.

275. Эрдниев П.М. Сравнение и обобщение при обучении математике / П.М. Эрдниев. – М.: Учпедгиз, 1960. – 152 с.

276. Эрдниев П.М. Обучение математике в школе / Укрупнение дидактических единиц. Книга для учителя. – 2 изд. испр. и доп. / П.М. Эрдниев, Б.П. Эрдниев. – М.: АО “Столетие”, 1996. – 320 с.

277. Эрдниев П.М. Методика упражнений по математике. Изд. 2-е, доп. и перераб. Пособие для учителя / П.М. Эрдниев. – М.: Просвещение, 1970. – 319 с.

278. Юркина С.Н. О дифференцированном обучении математике / С.Н. Юркина // Математика в школе. – 1990. – № 3. – С. 11.

279. Якиманская И.С. Личностно-ориентированное обучение в современной школе / И.С. Якиманская. – М.: Сентябрь, 1996. – 96 с.

280. Якиманская И.С. Развивающее обучение / И.С. Якиманская. – М.: Педагогика, 1979. – 144 с.

281. Яценко С. Рівнева диференціація в класах з поглибленим вивченням математики в основній школі / С. Яценко С.// Математика в школі. – 1999. – № 2. – С. 13.

282. Яцкова Т. Про розвиток евристичного мислення у школярів / Т. Яцкова // Математика в школі. – 2001, № 4, – С. 53 – 54.

283. Fliegler L.A. Levels of creativity // Education theory, 1959. – Vol. 9, № 2. – P. 105 – 108.

284. Gelernter H., Rochester N. Intelligent behavior in problem – solving machines, “IBM – Journal”, October, 1958, P. 336 – 345.

285. Jonson T. Inclusive education. – Geneva: UN, 1994. – 158 p.

286. Osborn A.F. How to become more creative. – New York, 1964. – 85 p.

287. Webster’s Encyclopedic Unabridged Dictionary of the English Language. – Изд-во “Random House”, 1996. – 1696 p.

ДОДАТКИ

Додаток А.

Диференційовані завдання для формування

прийомів порівняння і аналогія

Середній рівень

1. Чи завжди правильна піраміда є правильним многогранником? Відповідь поясніть.

2. Порівняйте такі означення і вкажіть, яке з них правильне:

Призмою називається многогранник, який складається з двох многокутників, які лежать у різних площинах, та всіх відрізків, що сполучають відповідні точки цих многокутників.

Призмою називається многогранник, який складається з двох плоских многокутників, які лежать у різних площинах і суміщаються паралельним перенесенням, та всіх відрізків, що сполучають відповідні точки цих многокутників.

3. Сформулюйте і порівняйте означення піраміди і зрізаної піраміди. Чи мають вони схожі властивості? (Спільні).

4. Сформулюйте і порівняйте означення призми і піраміди. Чи мають вони схожі властивості?

5. Пригадайте властивість діагоналей паралелограма. Сформулюйте аналогічну властивість для паралелепіпеда.

6. В основі призми лежить трикутник зі сторонами *7* см, *5* см і *6* см. Висота призми *4* см. Знайдіть об’єм цієї призми.

7. Доведіть, що відрізок, який сполучає центри основ паралелепіпеда, паралельний бічним ребрам.

8. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Січна площина проходить через точки A, C і D_1. Обчисліть площу перерізу.

Достатній рівень

1. Використовуючи аналогію між властивостями діагоналей паралелограма та паралелепіпеда і доведенням першої властивості, доведіть, що діагоналі паралелепіпеда перетинаються і в точці перетину діляться пополам.

2. В правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині 60°. Доведіть, що один з двогранних кутів її вдвоє менший за другий.

3. У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α. Відрізок, що сполучає центр кола, описаного навколо бічної грані, з серединою бічного ребра цієї грані, дорівнює d. Знайдіть апофему піраміди.

4. У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює β. Знайдіть апофему піраміди, якщо радіус кола, вписаного в бічну грань, дорівнює r.

5. Висота правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнює *4* см, сторони основ *2* см і *8* см. Знайдіть площу діагонального перерізу.

6. Нехай дані точки *A* та *B* лежать на суміжних гранях прямої чотирикутної призми (напрям проектуючих прямих паралельний ребру призми). Побудуйте точку перетину прямої *AB* з площиною нижньої основи.

Високий рівень

1. У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α. Відрізок, що сполучає центр кола, описаного навколо бічної грані, з серединою бічного ребра цієї грані, дорівнює d. Знайдіть відношення апофеми піраміди до її сторони основи.

2. Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через середини двох суміжних ребер і найбільш віддалену від прямої, що їх з’єднує, вершину куба.

3. У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює β. Знайдіть відношення апофеми піраміди до сторони основи, якщо радіус кола, вписаного в бічну грань, дорівнює r.

Додаток Б.

Диференційовані завдання для формування

прийомів узагальнення і конкретизації

Середній рівень

1. Виділіть властивості паралелепіпеда, виходячи з його означення. Сформулюйте наслідки з цих властивостей.

2. Для якого поняття паралелепіпед є узагальненням, а для якого – конкретизацією?

3. Основою прямої призми є прямокутний трикутник з катетом 5 см і гіпотенузою 13 см. Висота призми 8 см. Знайдіть бічну поверхню призми.

4. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник з бічною стороною 6 см і кутом при вершині 60°. Висота призми 8 см. Знайдіть бічну поверхню призми.

5. Основою прямої призми є трикутник з сторонами 4 см, 5 см і 6 см. Висота призми 8 см. Знайдіть бічну поверхню призми.

6. Основою прямої призми є трикутник з сторонами a, b і c. Висота призми h. Знайдіть бічну поверхню призми.

7. Доведіть, що у прямій а) трикутній, б) чотирикутній, в) n-кутній призмі всі бічні грані – прямокутники.

8. Побудуйте переріз трикутної піраміди площиною, яка проходить через дві вершини основи і точку на бічному ребрі.

9. Побудуйте переріз трикутної піраміди площиною, яка проходить через дві точки основи і вершину піраміди.

10. Побудуйте переріз трикутної піраміди площиною, яка проходить через бічне ребро і точку перетину медіан основи.

11. Побудуйте переріз трикутної піраміди площиною, яка проходить через три точки на її поверхні.

Достатній рівень

1. Сформулюйте означення прямокутного паралелепіпеда, використовуючи поняття призми. Виділіть основні властивості і наслідки з них.

2. Доведіть, що точка перетину діагоналей а) прямокутного паралелепіпеда, б) прямого паралелепіпеда, в) довільного паралелепіпеда є центром його симетрії.

3. Доведіть, що відрізки, які з'єднують середини протилежних ребер а) правильного тетраедра, б) правильної трикутної піраміди, в) довільної трикутної піраміди, перетинаються в одній точці.

4. Основою піраміди є прямокутник з сторонами *16* см і *6* см. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи і дорівнює *12* см. Знайдіть бічну поверхню піраміди.

5. Основою піраміди є прямокутник з сторонами a і b. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи і дорівнює h. Знайдіть бічну поверхню піраміди.

6. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, що проходить: а) через кінці трьох ребер, які виходять з однієї вершини, б) через дві вершини нижньої основи і точку перетину діагоналей верхньої основи, в) через дві точки протилежних сторін нижньої основи і точку верхньої основи, г) через три точки на бічних ребрах, д) через три точки на його поверхні.

Високий рівень

1. Основою похилої трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ є прямокутний трикутник ABC, в якого $\angle C = 90^\circ$ і $BC = 10$ см. Вершина B_1 проектується на середину сторони BC. Двогранний кут з ребром BB_1 рівний 60°, бічні ребра утворюють з площиною основи кут 45°. Знайдіть бічну поверхню призми.

2. Основою похилої трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ є прямокутний трикутник ABC, в якого $\angle C = 90^\circ$ і $BC = a$. Вершина B_1 проектується на середину сторони BC. Двогранний кут з ребром BB_1 рівний φ, бічні ребра утворюють з площиною основи кут α. Знайдіть бічну поверхню призми.

3. У тетраедра $SABC$ всі плоскі кути при вершині S прямі, бічні ребра рівні. Доведіть, що квадрат площі трикутника ABC дорівнює сумі квадратів площ решти граней.

4. Всі плоскі кути тетраедра *SABC* при вершині *S* прямі. Доведіть, що квадрат площі трикутника *ABC* дорівнює сумі квадратів площ решти граней.

5. Побудуйте переріз п’ятикутної піраміди *SABCDE* площиною, що проходить через сторону основи піраміди *AB* і точку *N* на ребрі *SD*.

6. Побудуйте переріз шестикутної піраміди *SABCDEF* площиною, що проходить через сторону основи піраміди *AB* і точку *N* на ребрі *SD*.

Додаток В.

Диференційовані завдання для формування

прийомів аналізу і синтезу

Середній рівень

1. Одне бічне ребро призми перпендикулярне до площини основи. Доведіть, що решта бічних ребер теж перпендикулярні до площини основи.

2. Площина, що проходить через сторону основи правильної трикутної призми і середину протилежного ребра, утворює з площиною основи кут $45°$. Сторона основи дорівнює a. Знайдіть бічну поверхню призми.

3. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через ребро AB і точку перетину діагоналей грані $A_1B_1C_1D_1$.

4. Основою прямої трикутної призми є прямокутний трикутник з катетом *5* см і гіпотенузою *13* см. Висота призми *8* см. Знайдіть повну поверхню призми.

5. Знайдіть повну поверхню правильної шестикутної призми з стороною основи a і висотою b.

6. Бічна поверхня правильної чотирикутної призми дорівнює *32* см^2, а повна поверхня – *40* см^2. Знайдіть висоту призми.

7. Площа основи та бічна поверхня правильної чотирикутної піраміди відповідно рівні *36* см^2 і *60* см^2. Знайдіть апофему цієї піраміди.

8. Основою піраміди є прямокутник зі сторонами *6* см і *16* см. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи і дорівнює *4* см. Знайдіть бічну поверхню піраміди.

Достатній рівень

1. В похилій трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ основою служить прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$). Площина бічної грані AA_1C_1C перпендикулярна площині основи. Доведіть, що CC_1B_1B – прямокутник.

2. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює *6* см, а радіус кола, вписаного в основу, – $\sqrt{3}$ см. Знайдіть повну поверхню піраміди.

3. Побудуйте переріз піраміди *DABC* площиною, що проходить через точки *M*, *N* і *P*, де *M* і *N* належать граням *DAC* і *ADB* відповідно, точка *P* належить ребру *CB*, причому *MN* не паралельна площині *ABC*.

4. В основі прямої призми лежить паралелограм зі сторонами $3\sqrt{2}$ см, $\sqrt{2}$ см і кутом між ними $45°$. Площа бічної поверхні призми в *4* рази більша від площі основи. Знайдіть висоту призми.

5. Дві бічні грані похилої трикутної призми взаємно перпендикулярні, а їх спільне ребро дорівнює *24* см і віддалене від інших бічних ребер на *12* см і *35* см. Знайдіть бічну поверхню цієї призми.

Високий рівень

1. Всі грані паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – рівні ромби; кути між ребрами, які мають спільну точку *A*, рівні. Доведіть, що пряма AC_1 перпендикулярна прямій B_1D_1.

2. В правильній чотирикутній піраміді бічне ребро рівне *b*, а двогранний кут при основі – α. Знайдіть бічну поверхню піраміди.

3. Побудуйте переріз п’ятикутної піраміди *SABCDE* площиною, що проходить через сторону основи піраміди *AB* і точку *N* на ребрі *SD*.

Додаток Д.

Диференційовані завдання для формування прийому

введення допоміжного відрізка

Середній рівень

1. Обчисліть кут, під яким діагональ куба нахилена до його грані.

2. В трикутній піраміді *SABC* бічні грані *SAB* і *SBC* перпендикулярні до площини основи, $\angle BCA = 90^\circ$, $\angle BAC = \beta$, $\angle SAB = \alpha$, $\angle SAB = \gamma$. Знайдіть залежність між кутами α, β і γ.

3. У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α. Знайдіть двогранний кут при основі піраміди.

4. Діагональ куба дорівнює *6* см. Знайдіть площу його однієї грані.

5. Площа повної поверхні куба дорівнює *3* см^2. Знайдіть довжину діагоналі грані куба.

6. В основі призми лежить рівносторонній трикутник, площа якого $9\sqrt{3}$ см^2. Знайдіть об'єм призми, якщо її висота в $\sqrt{3}$ раз більша, ніж сторона основи.

7. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює *6* см, а радіус кола, вписаного в її основу, дорівнює $\sqrt{3}$ см. Знайдіть бічну поверхню піраміди.

8. Об'єм правильної чотирикутної піраміди – *48* см^3, а висота – *4* см. Знайдіть сторону основи піраміди.

Достатній рівень

1. Знайдіть відношення об'єму куба до об'єму правильного тетраедра, ребро якого дорівнює діагоналі куба.

2. Основою прямого паралелепіпеда є ромб, площі діагональних перерізів якого дорівнюють *S* і *Q*. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

3. Розміри прямокутного паралелепіпеда відносяться як *1*:*2*:*3*. Повна поверхня паралелепіпеда дорівнює *352* см^2. Знайдіть його розміри.

4. Основою піраміди є правильний трикутник, площа якого дорівнює *S*. Одна бічна грань піраміди перпендикулярна до площини основи, а дві інші нахилені до неї під кутом α. Знайдіть об'єм піраміди.

5. Сторони основ правильної зрізаної трикутної піраміди відносяться як *1:2*, висота піраміди дорівнює *3* см, бічне ребро утворює з більшою основою кут 45°. Знайдіть площі основ піраміди.

Високий рівень

1. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро рівне *b*, а двогранний кут при основі – α. Знайдіть бічну поверхню піраміди.

2. Площа бічної поверхні правильної шестикутної призми дорівнює *Q*. Знайдіть площу перерізу призми площиною, що перпендикулярна до більшої діагоналі основи і ділить її у відношенні *1:1*.

3. Довжини сторін основ і висота правильної чотирикутної зрізаної піраміди відносяться як *4,5:3:1*. Площа бічної поверхні – *3* $дм^2$. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

Додаток Ж.

Диференційовані завдання для формування прийому введення допоміжного кута

Середній рівень

1. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди утворює з площиною основи кут α. Знайдіть відношення висоти піраміди до сторони основи.

2. Кут між бічними гранями правильної трикутної піраміди рівний α. Знайдіть відношення апофеми бічної грані піраміди до її бічного ребра.

3. Двогранний кут між суміжними бічними гранями правильної чотирикутної піраміди рівний β. Знайдіть відношення висоти піраміди до її бічного ребра.

4. Плоский кут при вершині правильної чотирикутної піраміди дорівнює α. Знайдіть відношення сторони основи до апофеми піраміди.

5. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро нахилене до сторони основи під кутом α. Знайдіть апофему, якщо висота піраміди дорівнює h.

Достатній рівень

1. В правильній трикутній піраміді сторона основи рівна *8* см, а плоский кут при вершині рівний φ. Знайдіть висоту піраміди.

2. У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α. Висота піраміди дорівнює h. Знайдіть бічну поверхню піраміди.

3. Основою похилого паралелепіпеда є квадрат, сторона якого дорівнює a. Одне з бічних ребер дорівнює b і утворює з кожною з прилеглих сторін основи кут 60^o. Знайдіть об’єм паралелепіпеда.

4. Знайдіть об’єм правильної чотирикутної піраміди, бічне ребро якої l, а двогранний кут між суміжними бічними гранями β.

Високий рівень

1. У правильній трикутній піраміді з висотою h через сторону основи a проведено площину, яка перетинає протилежне ребро під прямим кутом. Знайдіть площу перерізу.

2. Грані паралелепіпеда – рівні ромби із стороною a і гострим кутом α. Знайдіть об’єм паралелепіпеда.

3. В основі похилої призми лежить прямокутник із сторонами a і b. Дві суміжні бічні грані утворюють з основою гострі кути α і β. Бічне ребро дорівнює c. Знайдіть об’єм призми.

Додаток З.

Диференційовані завдання для формування прийому введення допоміжних побудов

Середній рівень

1. У правильній чотирикутній призмі площа основи *144* см^2, а висота *14* см. Знайдіть діагональ призми.

2. У прямокутному паралелепіпеді сторони основи *7* дм і *24* дм, а висота паралелепіпеда *8* дм. Знайдіть площу діагонального перерізу.

3. Основа піраміди – прямокутник із сторонами *6* см і *8* см. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює *13* см. Знайдіть висоту піраміди.

4. У правильній чотирикутній зрізаній піраміді сторони основ *8* м і *2* м. Висота дорівнює *4* м. Знайдіть повну поверхню піраміди.

5. В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція з основами *4* см і *10* см і бічною стороною *5* см. Бічне ребро призми – *10* см. Знайдіть повну поверхню призми.

6. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з катетом *6* см і гіпотенузою *12* см. Знайдіть об’єм піраміди, якщо всі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 30^o.

Достатній рівень

1. Основа похилого паралелепіпеда – квадрат з стороною a, одна з вершин другої основи проектується в центр цього квадрата. Висота паралелепіпеда дорівнює H. Знайдіть бічну поверхню паралелепіпеда.

2. Основа прямої призми – трапеція, в якій паралельні сторони *9* см і *39* см. три бічні грані призми – квадрати. Знайдіть повну поверхню призми.

3. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро утворює з висотою кут α. Відстань від середини висоти піраміди до бічного ребра дорівнює d. Знайдіть об’єм піраміди.

4. Сторони основ правильної зрізаної трикутної піраміди дорівнюють *2* см і *6* см. Бічна грань утворює з більшою основою кут 60^o. Знайдіть висоту піраміди.

Високий рівень

1. Основою похилої трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ є прямокутний трикутник ABC, в якого $\angle C = 90^\circ$ і $BC = a$. Вершина B_1 проектується на середину сторони BC. Двогранний кут з ребром BB_1 рівний φ, бічні ребра утворюють з площиною основи кут α. Знайдіть бічну поверхню призми.

2. Основою піраміди є правильний трикутник; з трьох бічних граней піраміди одна перпендикулярна до площини основи, а дві інші нахилені до неї під кутом α. Під яким кутом нахилені до площини основи бічні ребра?

3. Основами зрізаної піраміди є квадрати зі сторонами *8* см і *4* см. Одна з бічних граней – рівнобічна трапеція, що перпендикулярна до площин основ, а протилежна до неї грань утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть бічну поверхню зрізаної піраміди.

Додаток К.

Диференційовані завдання для формування прийому

використання допоміжних задач

Середній рівень

1. Знайдіть повну поверхню правильної шестикутної призми з стороною a і висотою b.

2. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо сторони основи *2* см і *3* см, а діагональ паралелепіпеда $\sqrt{38}$см.

3. Основою прямої трикутної призми є прямокутний трикутник з катетом *5* см і гіпотенузою *13* см. Висота призми *8* см. Знайдіть площу повної поверхні призми.

4. В основі призми лежить трикутник зі сторонами *7* см, *5* см і *6* см. Висота призми *4* см. Знайдіть об'єм призми.

5. В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція з основами *4* см і *10* см і бічною стороною *5* см. Бічне ребро призми рівне *10* см. Знайдіть повну поверхню призми.

6. Основою піраміди є ромб з діагоналями *6* см і *9* см. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює *11* см.

Достатній рівень

1. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині і радіусом описаного кола R. Діагональ бічної грані, що містить бічну сторону цього трикутника, утворює з площиною основи кут β. Знайдіть об'єм призми.

2. В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція з бічною стороною c і гострим кутом α. Діагоналі цієї трапеції взаємно перпендикулярні. Діагональ призми утворює з площиною основи кут γ. Знайдіть об'єм призми.

3. В основі піраміди лежить рівнобічна трапеція з бічною стороною c і гострим кутом α. Діагональ трапеції є бісектрисою гострого кута. Усі бічні

ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом γ. Знайдіть об'єм піраміди.

4. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної зрізаної піраміди, сторони основи якої дорівнюють *4* дм і *8* дм, а діагональ – *11* дм.

Високий рівень

1. Основою прямого паралелепіпеда є паралелограм, у якого одна з діагоналей дорівнює *17* см, а сторони рівні *9* см і *10* см. Площа повної поверхні паралелепіпеда рівна *334* см^2. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

2. В основі прямої призми лежить прямокутна трапеція з гострим кутом α. Більша діагональ трапеції дорівнює l і є бісектрисою гострого кута. Більша діагональ призми утворює з площиною основи кут β. Знайдіть об'єм призми.

3. Правильна п'ятикутна піраміда *SABCDE* перетинається площиною, що проходить через вершини *A* і *C* основи і середини ребер *SD* і *SE*. Знайдіть площу перерізу, якщо ребро основи піраміди дорівнює q, а бічне ребро – b.

Додаток Л.

Диференційовані завдання для формування прийому переформулювання задач

Середній рівень

1. Бічні ребра трикутної піраміди взаємно перпендикулярні і кожне дорівнює l. Знайдіть об'єм піраміди.

2. Знайдіть об'єм правильної трикутної піраміди, сторона основи якої a, а бічні ребра взаємно перпендикулярні.

3. Площина, що проходить через сторону нижньої основи куба і середини двох бічних ребер, розбиває його на два многогранники. Знайдіть об'єм нижнього многогранника, якщо ребра куба рівні 6 см.

4. Площина, що проходить через сторону нижньої основи куба і середини двох протилежних сторін верхньої основи, розбиває його на два многогранники. Знайдіть об'єм нижнього многогранника, якщо ребро куба рівне a.

5. Площина, що проходить через більшу сторону нижньої основи і середини двох бічних ребер прямокутного паралелепіпеда, розбиває його на два многогранники. Знайдіть об'єм верхнього многогранника, якщо сторони основи паралелепіпеда рівні 8 см і 6 см, а висота – 10 см.

6. Площина, що проходить через більшу сторону нижньої основи і середини протилежних менших сторін верхньої основи прямокутного паралелепіпеда, розбиває його на два многогранники. Знайдіть об'єм меншого многогранника, якщо сторони основи паралелепіпеда рівні a і b, а висота – c.

Достатній рівень

1. Бічні ребра трикутної піраміди взаємно перпендикулярні і кожне дорівнює l. Знайдіть об'єм зрізаної піраміди, яку відтинає від даної піраміди площина, що проходить через середини бічних ребер.

2. У правильній трикутній піраміді сторона основи рівна a, а бічні ребра взаємно перпендикулярні. Знайдіть об’єм зрізаної піраміди, яку відтинає від даної піраміди площина, що проходить через середини бічних ребер.

3. Одне ребро трикутної піраміди дорівнює *4* см, а кожне з інших дорівнює *3* см. Знайдіть об’єм піраміди.

4. У паралелепіпеді довжини трьох ребер, що виходять із спільної вершини, a, b і c; ребра a і b взаємно перпендикулярні, а ребро c утворює з кожним з них кут γ. Знайдіть об’єм паралелепіпеда.

Високий рівень

1. У зрізаному паралелепіпеді три бічні ребра мають довжини *15* см, *23* см, *18* см відповідно. Знайдіть четверте бічне ребро.

2. Бічні ребра трикутної піраміди рівні і дорівнюють l. З трьох плоских кутів, утворених при вершині піраміди цими ребрами, два дорівнюють γ, а третій дорівнює β. Знайдіть об’єм піраміди.

Додаток М.

Анкета учня

Дякуємо тим, хто розв'яже запропоновані нами евристичні завдання та дасть відповідь на наступні запитання.

1. Дані про учня

Прізвище, ім'я ____

Учбовий заклад ____

Підкресліть далі потрібну відповідь

2. Чи змінилося Ваше відношення до стереометрії після ознайомлення з евристичними прийомами?

–Інтерес сильно зріс.

–Інтерес підвищився незначно.

–Інтерес залишився незмінним.

–Інтерес дещо знизився.

–Інтерес помітно знизився.

3. Які прийоми евристичної діяльності дозволили Вам відкрити для себе щось нове в стереометрії?

4. Які задачі для Вас найбільш цікаві?

–На обчислення.

–На побудову.

–На доведення.

–На дослідження.

5. Які задачі зовсім нецікаві для Вас?

–На обчислення.

–На побудову.

–На доведення.

–На дослідження.

Додаток Н.

Анкета для вчителя

Дякуємо Вам, що дасте відповідь на поставлені нами запитання. Гадаємо, що це допоможе покращити навчання стереометрії.

1. Чи варто витрачати час на самостійне відкриття учнями знань, ознайомлювати їх з прийомами евристичної діяльності? Що це додає в їхньому навчанні?

2. Чи вірне припущення про те, що орієнтація школярів на евристичну діяльність не зіпсує навчальних результатів учнів, які традиційно перевіряються?

3. Чи знайомий Вам процес навчання за допомогою евристичної діяльності? Якщо так, то скільки учнів можуть займатися з одним учителем?

4. Чи все можна вивчати за допомогою евристик? Чи можна це сказати про навчальний матеріал?

5. В евристичному навчанні передбачається висока творчість учнів, чи всі школярі до цього готові? Чи для всіх учнів підходить евристична діяльність?

6. Що, на вашу думку, з теорії евристичного навчання підходить для школи? Чи може методика евристичного навчання задовольнити вчителя?

Додаток П.

Контрольна робота № 1 на тему “Многогранники”

В – 1

1. Основою прямої трикутної призми є прямокутний трикутник з катетом *5* см і гіпотенузою *13* см. Висота призми *8* см. Знайдіть повну поверхню призми. (Середній рівень – 2 бали)

2. Побудуйте переріз тетраедра *ABCD* площиною, що проходить через ребро *DC* і точку перетину медіан грані *ABC*. (Середній рівень – 2 бали)

3. Основою піраміди є прямокутник зі сторонами *6* см і *16* см. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи і дорівнює *4* см. Знайдіть бічну поверхню піраміди. (Достатній рівень – 2 бали)

4. В основі прямої призми лежить паралелограм зі сторонами $3\sqrt{2}$ см, $\sqrt{2}$ см і кутом між ними 45°. Площа бічної поверхні призми в *4* рази більша від площі основи. Знайдіть висоту призми. (Достатній рівень – 3 бали)

5. Основами зрізаної піраміди є квадрати зі сторонами *8* см і *4* см. Одна з бічних граней – рівнобічна трапеція, що перпендикулярна до площин основ, а протилежна до неї грань утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть повну поверхню зрізаної піраміди. (Високий рівень – 3 бали)

В – 2

1. Основою прямої трикутної призми є прямокутний трикутник з катетами *3* см і *4* см. Висота призми рівна *10* см. Знайдіть повну поверхню призми. (Середній рівень – 2 бали)

2. Дано тетраедр *ABCD* і точки *M* і *N*, що належать відповідно ребрам *DC* і *AB*. Побудуйте лінію перетину площин *AMB* і *DCN*. (Середній рівень – 2 бали)

3. Висота правильної чотирикутної піраміди *7* см, а сторона основи *8* см. Знайдіть бічне ребро піраміди. (Достатній рівень – 2 бали)

4. Основою прямого паралелепіпеда є ромб з гострим кутом 60° і більшою діагоналлю $6\sqrt{3}$ см. Менша діагональ паралелепіпеда утворює з

площиною основи кут 45°. Знайдіть бічну поверхню паралелепіпеда. (Достатній рівень – 3 бали)

5. Площі основ зрізаної піраміди відносяться як *1:4*. Більша основа – ромб з діагоналями *6* дм і *8* дм. Одне з бічних ребер перпендикулярне до основи і дорівнює *7* дм. Знайдіть площу поверхні цієї піраміди. (Високий рівень – 3 бали)

Додаток Р.

Контрольна робота № 2 на тему “Об’єми многогранників”

В – 1

1. Основою прямокутного паралелепіпеда є квадрат. Знайдіть об’єм цього паралелепіпеда, якщо висота його рівна *6* см, а діагональ утворює з площиною основи кут 45°. (Середній рівень – 2 бали)

2. Знайдіть об’єм похилої призми, у якої основою є прямокутний трикутник з катетами *5* см і *6* см, а бічне ребро, рівне *10* см, утворює з площиною основи кут 45°. (Середній рівень – 2 бали)

3. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює *6* см, а бічне ребро утворює з площиною основи кут 30°. Знайдіть об’єм піраміди. (Достатній рівень – 2 бали)

4. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині і радіусом описаного кола R. Діагональ бічної грані, що містить бічну сторону цього трикутника, утворює з площиною основи кут β. Знайдіть об’єм призми. (Достатній рівень – 3 бали)

5. Кути правильного тетраедра зрізані так, що утворився многогранник, у якого *4* грані правильні трикутники і *4* – правильні шестикутники. Знайдіть відношення об’єму одержаного многогранника до об’єму тетраедра. (Високий рівень – 3 бали)

В – 2

1. В основі прямокутного паралелепіпеда лежить квадрат зі стороною *1* дм. Довжина діагоналі паралелепіпеда дорівнює $\sqrt{6}$ дм. Знайдіть об’єм паралелепіпеда. (Середній рівень – 2 бали)

2. Знайдіть об’єм похилої призми, у якої основою є прямокутник зі сторонами *6* см і *8* см, а бічне ребро, рівне *8* см, утворює з площиною основи кут 30°. (Середній рівень – 2 бали)

3. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює *4* см і утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть об’єм піраміди. (Достатній рівень – 2 бали)

4. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з кутом α при основі і радіусом вписаного кола r. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють γ. Знайдіть об'єм піраміди. (Достатній рівень – 3 бали)

5. Кути куба зрізано так, що в утвореного многогранника *8* граней є правильними трикутниками, а *6* граней – квадратами. Знайдіть відношення об'єму цього многогранника до об'єму куба. (Високий рівень – 3 бали)