5. *Приват24* https://privat24.ua/

6. *Рейтинг самых «электронных» банков Украины* http://www.investgazeta.net/finansy/rejting-samyh-elektronnyh-bankov-ukrainy-161500/

7. *Сутність та перспективи розвитку інтернет-банкінгу* http://ebooktime.net/book_54_glava_35_5.2._%D0%A1%D1%83%D1%82%D0%BD%D1%96%D1%81%D1%82%D1%8C_%D1%82%D0%B0_%D0%BF%C3%90.html

8. *Українські банки можуть розширювати клієнтську базу через соцмережі* http://com-ua.com/%D1%83%D0%BA%D1%80%D0%B0%D1%97%D0%BD%D1%81%D1%8C%D0%BA%D1%96-%D0%B1%D0%B0%D0%BD%D0%BA%D0%B8-%D0%BC%D0%BE%D0%B6%D1%83%D1%82%D1%8C-%D1%80%D0%BE%D0%B7%D1%88%D0%B8%D1%80%D1%8E%D0%B2%D0%B0%D1%82%D0%B8/

9. *Федір Олексюк: «Якщо держава не вирішуватиме проблеми позичальників та вкладників, то вона не зможе далі розвиватися»* http://xpress.sumy.ua/article/society/3698

10. *«Clicks-and-bricks»* http://www.phrases.org.uk/meanings/bricks-and-clicks.html

УДК 511.72+517.51

Замрій І. В.

МНОЖИНА НЕПОВНИХ СУМ СИЛЬНО ЗБІЖНИХ РЯДІВ

Рассматриваются ряды, которые имеют свойство сходимости при любой степени больше нуля и свойства множества неполных сумм такого ряда.

В с т у п. Сьогодні при моделюванні різних об’єктів, процесів і явищ в якості математичних моделей часто виступають множини, функції, оператори, динамічні системи, розподіли ймовірностей, які мають фрактальні властивості. В деяких випадках фрактальний підхід є чи не єдино можливим засобом теоретичного аналізу таких об’єктів. Тому фрактальний аналіз зараз бурхливо розвивається. Існує необхідність розробки нових методів їх дослідження, а також систематизації та узагальнення набутих раніше знань. У розвитку теорії фракталів важливу роль відіграють збіжні ряди, їх підсуми, неповні суми, а також множина всіх неповних сум заданого ряду. При їх дослідженні важливу роль відіграє тополого-метричний і фрактальний аспект.

Неповні суми числових рядів є об’єктом сучасних досліджень в різних галузях математики. Наприклад, в теорії ймовірностей, де їх множини виступають спектрами (носіями) розподілів випадкових величин, зокрема, з такого «популярного» класу як згортки Бернуллі, інтерес до яких не зменшується з 30-х рр. ХХ ст., теорії динамічних систем та інших галузях математики.

Відомо кілька загальних фактів стосовно множини неповних сум збіжного знакододатного ряду. Топологічні властивості множини всіх неповних сум такого ряду вивчені, зокрема, відомі умови, коли вона є ніде не щільною. Вони виражаються в термінах членів та залишків ряду. Метричні властивості множини неповних сум вивчені недостатньо, зокрема невідомі необхідні, необхідні та достатні умови їх нуль-мірності множини за Лебегом. Деякі результати в цьому напрямку і цікаві приклади можна знайти в [3]. В сучасних дослідженнях хотілось би отримати формулу обчислення міри Лебега множини неповних сум довільного збіжного ряду. Фрактальні властивості множини неповних сум також вивчено лише частково, деякі з результатів можна знайти в [3] і [4]. В попередніх дослідженнях основна увага приділялася вивченню тополого-метричних і фрактальних властивостей збіжних знакододатних рядів з монотонно спадною послідовністю членів.

Нас цікавлять ряди, які володіють властивістю $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\alpha} < \infty$ для довільного $\alpha \in (0, 1]$.

Отриманий опис властивостей множини неповних сум таких рядів допоможе розв’язати ряд задач з метричної теорії чисел, фрактальної геометрії та фрактального аналізу функцій і розподілів ймовірностей.

1. **Сильно збіжні знакододатні ряди**

Означення 1. *Збіжний знакододатний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *із спадною послідовністю членів, що володіє властивістю* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\alpha} < \infty \ \forall \alpha > 0$ *будемо називати сильно збіжним рядом.*

Теорема 1. *Для того, щоб збіжний знакододатний ряд був сильно збіжним, необхідно і достатньо, щоб збігався ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\frac{1}{k}} < \infty \ \ \forall k \in \mathrm{N}.$$

Прикладами сильно збіжних рядів є: 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+5^n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}q^n, q\in(0,1)$. Прикладом збіжного знакододатного ряду, який не є сильно збіжним, є ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, оскільки при піднесенні до степеня $\alpha=\frac{1}{2}$ він стає розбіжним.

Сім'я сильно збіжних рядів утворює напівгрупу. При чому виконується наступна властивість: *якщо* $\sum_{n=1}^{\infty}p_n^{\alpha}<\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}q_n^{\alpha}<\infty$, *то* $\sum_{n=1}^{\infty}(p_n+q_n)^{\alpha}<\infty$, $\forall\alpha>0$.

Д о в е де н н я. Нехай маємо два сильно збіжні знакододатні ряди. Тоді $\sum_{n=1}^{\infty}p_n^{\alpha}$ і $\sum_{n=1}^{\infty}q_n^{\alpha}$ - збіжні. Коли $\alpha\geq 1$, то за нерівністю Мінковського для рядів, $\left(\sum_{n=1}^{\infty}(p_n+q_n)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\leq\left(\sum_{n=1}^{\infty}p_n^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}q_n^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ отримаємо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(p_n+q_n)^{\alpha}$ – збіжний. Якщо $\alpha\in(0,1)$, то для числових рядів буде виконуватись нерівність $\sum_{n=1}^{\infty}(p_n+q_n)^{\alpha}\leq\sum_{n=1}^{\infty}p_n^{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}q_n^{\alpha}$, тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(p_n+q_n)^{\alpha}$ – збіжний.

Лема 1. *Сильно збіжними рядами є:*

- *геометричні ряди:* $\sum_{n=1}^{\infty}q^n, q\in(0,1)$;
- *квазігеометричні ряди:* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n:\exists b\in(0,1),\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b^n}=const>0$
- *гіпергеометричні ряди:* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n:\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{c^n}=0,\forall c>0$.

2. **Неповні суми рядів та множина неповних сум**

Нехай для збіжного знакододатного ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S_n+\sum_{m=n+1}^{\infty}a_m=S_n+r_n$$

Вираз $\sum_{n\in M}a_n$, де *M* – скінченна або нескінченна підмножина множини натуральних чисел *N*, називається *підрядом ряду*. Сума кожного підряду ряду називається *неповною сумою ряду*. Іншими словами, сума кожного ряду виду $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n a_n$, де $\{\varepsilon_n\}\in A^{\infty}$, називається *неповною сумою ряду*. Множину всіх неповних сум ряду позначатимемо через $W(a_n)$.

Отже, множиною неповних сум називається множина

$$W(a_n)=\left\{x\,\middle|\,x=\sum_{k\in M\subset N}a_k, M\subseteq 2^N\right\}.$$

Відомо, що множина $W(a_n)$ має наступні властивості. Вона є:

1) досконалою (є замкненою множиною, яка не містить ізольованих точок);

2) ніде не щільною множиною, якщо безліч разів виконується умова $a_i>r_i$;

3) об'єднанням відрізків, якщо нерівність $a_i>r_i$ виконується лише скінченну кількість разів.

Повернемося до леми 1 і з'ясуємо якою є множина неповних сум геометричних, квазігеометричних та гіпергеометричних рядів.

Теорема 2.1. *Множина неповних сум* $W(a_n)$ *геометричного ряду є:*

1) ніде не щільною множиною нульової міри Лебега при $0 < a < \frac{1}{2}$ *;*

2) відрізком довжиною $\frac{a}{1-a}$ *при* $\frac{1}{2} \le a < 1$.

Теорема 2.2. *Множина неповних сум* $W(a_n)$ *квазігеометричного ряду є:*

1) ніде не щільна множина нульової міри Лебега при $0 < a < \frac{1}{2}$;

2) відрізок або скінченна кількість відрізків при $\frac{1}{2} \le a < 1$.

Теорема 2.3. *Множина неповних сум* $W(a_n)$ *гіпергеометричного ряду є ніде не щільна множина нульової міри Лебега.*

Д о в е д е н н я. Згідно означення гіпергеометричного ряду

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 \rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} < \varepsilon, \forall n > n_0.$$

Розглянемо $\varepsilon = \frac{1}{3}$. Для нього існує відповідне $n_0\left(\frac{1}{3}\right)$. Рахуємо залишок r_n: $a_{n_0+1} \le \frac{1}{3} a_{n_0}$; $a_{n_0+2} \le \frac{1}{3} a_{n_0+1}$; ... і т.д.

Отже, $r_{n_0} = a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \ldots \le \frac{1}{3} a_{n_0} + \frac{1}{9} a_{n_0} + \frac{1}{27} a_{n_0} + \ldots = \frac{1}{2} a_{n_0}$. Маємо $r_{n_0} \le \frac{1}{2} a_{n_0}$. З цього випливає, що $\lambda(W_{n_0}) \le \frac{1}{2} \lambda(W_{n_0-1})$. Отже, $\lambda(W_{n_0}) = 0 \rightarrow \lambda(W_1) = 0$. Тоді множина неповних сум $W(a_n)$ гіпергеометричного ряду є нуль-мірною за Лебегом.

А з властивостей циліндричних множин випливає ніде не щільність гіпергеометричного ряду. Теорема доведена.

Але в залежності від того до якого степеня α ми будемо підносити ряд він буде змінюватися і відповідно буде змінюватися множина неповних сум такого ряду.

Теорема 3.1. Якщо сильно збіжний ряд піднести до степеня $\alpha \in (0,1)$, то існує таке $\alpha_0 \in (0,1)$, що при $\alpha \le \alpha_0$ множина неповних сум нового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\alpha}$ буде відрізком.

Теорема 3.2. Якщо сильно збіжний ряд піднести до степеня $\alpha > 1$, то існує таке $\alpha_0 > 1$, що при $\alpha_0 \le \alpha$ множина неповних сум нового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\alpha}$ є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Вид-во НПУ імені Драгоманова, 1998. – 296с.*
2. *Гончаренко Я. В., Працьовитий М. В., Торбін Г. М. Тополого-метричні і фрактальні властивості множини неповних сум знакододатного ряду та розподілів на ній//Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Фізико-математичні науки. — 2005, №6. — С.210-224.*
3. *Гончаренко Я.В. Згортки розподілів сум випадкових рядів спеціального виду // Наукові записки НПУ імені М.П.Драгоманова. Фізико-математичні науки. - №4, 2003.- 216-232.*
4. *Працьовитий М.В., Торбін Г.М. Один клас випадкових величин типу Джессена-Вінтнера //Доп. НАН України. – 1998. -№4. – С.48-54.*
5. *H. Hornich. Uber beliebige Teilsummen absolute konvergenter Reihen // Monatsh. Math. Phys. 49 (1941), P. 316-320.*
6. *P. Mendes and F. Oliveira. On the topological structure of the arithmetic sum of two Cantor sets // Nonlinearity 7 (1994), P. 329-343.*