НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені М. П. Драгоманова

На правах рукопису

ПИХТАР Микола Петрович

УДК 375.5.016:51(043.3)

РОЗВИТОК МАТЕМАТИЧНИХ ЗДІБНОСТЕЙ ШКОЛЯРІВ У ДІЯЛЬНОСТІ МАЛОЇ АКАДЕМІЇ НАУК

13.00.02. – теорія та методика навчання (математика)

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата педагогічних наук

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук,
професор М. В. Працьовитий

Київ – 2010

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ, ОДИНИЦЬ, СКОРОЧЕНЬ І ТЕРМІНІВ

ВНЗ – вищий навчальний заклад
ГМТ – геометричне місце точок
ЕОМ – електронно-обчислювальна машина
ІКТ – інформаційно-комунікаційні технології
МАН – Мала академія наук
ММО – Міжнародна математична олімпіада
МОН – Міністерство освіти і науки
НАН – Національна академія наук
НПУ – Національний педагогічний університет
НСД – найбільший спільний дільник
НСК – найменше спільне кратне
ППЗ – педагогічний програмний засіб
ТЮМ – турнір юних математиків
УРСР – Українська Радянська Соціалістична Республіка
DGS – Dynamical Geometry System (пакети комп’ютерної геометрії)
CAS – Computer Algebra System (пакети комп’ютерної алгебри)
CMS – Computer Mathematical System (комп’ютерні математичні системи)
GIMPS – Great Internet Mersenne Prime Search (програма пошуку простих чисел Мерсена)

ВСТУП

Сучасний стан суспільно-політичного, економічного та технологічного розвитку України потребує підвищення якості підготовки кадрів, спроможних до прийняття самостійних, відповідальних рішень, покращення та впровадження технологічних прогресів. Тому сьогодні перед українською школою стоїть найважливіше завдання – виховання освіченої і творчої людини, здатної до самонавчання, наукового пошуку та знаходження нестандартних рішень. Для цього необхідна така система освіти, яка передбачає: створення передумов для розвитку здібностей молоді, формування готовності і здатності до самостійної діяльності та особистої відповідальності; широке застосування нових педагогічних, інформаційних технологій, а також дає можливості для серйозної спеціальної, у тому числі математичної, підготовки талановитих, здібних та творчих дітей з метою дослідження широкого кола нових проблем і використання теоретичних досягнень на практиці.

Проблема формування особистості учнів, розкриття їхнього творчого потенціалу, у тому числі на заняттях з математики, вимагає пошуку нових підходів до удосконалення змісту, форм, методів та засобів навчання. Відгуком на зазначену суспільну потребу є орієнтація освіти на використання принципів нової форми організації навчальної роботи та на створення позашкільного закладу – Малої академії наук (МАН) України, для забезпечення всебічного розвитку особистості та її самовдосконалення.

Засновником МАН України є Міністерство освіти і науки України, а територіальних відділень, наукових товариств учнів Малої академії є Міністерство освіти Автономної республіки Крим, управління освіти і науки обласних, Київської і Севастопольської міських державних адміністрацій. МАН України створювалась і розвивалася під керівництвом Міністерства освіти і науки (МОН) України за участю Національної академії наук (НАН) України та її науково-дослідних інститутів, вищих навчальних закладів (ВНЗ) усіх регіонів України. У 1939 р. відповідно до звернення Академії наук Союзу Радянських Соціалістичних Республік про посилення шефства над дитячими науковими організаціями Академія наук Української Радянської Соціалістичної Республіки (УРСР) прийняла постанову щодо шефства над талановитими дітьми і учнівською молоддю – членами наукових гуртків Київського Палацу піонерів. Програмою передбачалось використання науково-популярних лекцій у роботі гуртків, проведення консультацій, написання творчих рефератів тощо. У 50–60 рр. ХХ ст. розрізнені наукові гуртки і секції, що створювалися при окремих школах, позашкільних закладах, ВНЗ, стали об’єднуватись у міські, обласні й республіканські наукові товариства учнів, метою яких стало сприяння розвитку пізнавальної активності і творчих здібностей школярів у процесі поглибленого вивчення ними однієї з галузей науки, техніки і культури. Першим таким науково -технічним товариством стала Кримська Мала академія наук, створення якої відносять до 1963 р. Першим кроком цього об’єднання було створення 5 відділень: суспільних наук, літератури і мистецтва, фізико-математичних наук, хімії, біології. У Криму почали діяти філії Малої академії наук. Цей досвід став початком розвитку (протягом 60–70–80-х років) руху Малих академій наук, що створювались у різних регіонах України. У 1983 р. було прийнято постанову Ради Міністрів УРСР «Про подальший розвиток дитячої технічної творчості в республіці» і на її виконання спільну постанову вищезазначених організацій «Про спільні заходи щодо створення і розвитку Малих Академій наук школярів при наукових центрах Академії наук УРСР». Цією постановою було затверджено Типове положення про Малу академію наук школярів, створено координаційно-методичну раду, затверджено її склад, відмічено цілеспрямовану роботу Київської міської, Львівської, Кримської, Одеської МАН школярів. Зазначені документи сприяли розвиткові МАН в Україні: Донецької, Дніпропетровської, Рівненської, Харківської – з 1985 р., Житомирської, Мелітопольської – з 1986 р. Усього до 1986 р. було створено 11 Малих академій наук з їх філіями. Наприкінці 1993 р. та на початку 1994 р. МОН України починає модернізувати МАН. На колегії МОН України у грудні 1993 р. було розглянуто постанову «Про шляхи удосконалення діяльності Малої академій наук і наукових товариств учнів як центрів формування наукової еліти України» [42]. До 2004 р. територіальні відділення МАН були створені у 24 областях, Автономній республіці Крим, містах Києві та Севастополі, які включали в себе десятки районних територіальних відділень і наукових товариств учнів. У 2004 р. постала необхідність у створенні єдиного координаційного центру. За ініціативою Президії МАН та за підтримки МОН України було створено державний позашкільний навчальний заклад Мала академія наук учнівської молоді, який на сьогодні координує діяльність територіальних відділень, організовує роботу школи МАН України, всеукраїнські масові заходи, здійснює виплату президентських стипендій кращим учням МАН, переможцям Всеукраїнських конкурсів наукових робіт та олімпіад.

На сьогоднішній день МАН України об’єднує 27 територіальних відділень обласного рівня, які керують роботою близько 1000 районних територіальних відділень та наукових товариств учнів. Основною базою відбору талановитих дітей є система закладів позашкільної освіти, в яких у позаурочний час навчається понад 20 % школярів. З них, а також з учнів загальноосвітніх шкіл, в яких діють учнівські наукові товариства, щорічно відбираються діти, які виявляють здібності до наукової, експериментальної, дослідницької роботи [182].

Учні – члени МАН поділяються на слухачів, кандидатів і дійсних членів. *Слухачі* – це учні 7–11 класів шкіл, учні професійно-технічних училищ, які виявляють інтерес до наукової діяльності, бажають одержати додаткові знання в окремих галузях науки і беруть участь у роботі секції чи гуртка. *Кандидати* у члени МАН – учні гуртків, секцій, які виявляють здібності при поглибленому вивченні наукових дисциплін поза шкільною програмою; схильні до проведення наукових досліджень, технічної творчості; виступають на конференціях; є призерами олімпіад. Звання кандидата затверджується президією територіального відділення МАН за поданням наукових товариств, секцій, гуртків. *Дійсні члени* МАН – кандидати, які мають самостійні наукові праці і навчаються в наукових гуртках і секціях не менше двох років. Пройшовши кількарічну підготовку кращі учні МАН беруть участь у щорічному загальнонаціональному конкурсі-захисті науково-дослідних робіт учнів – членів МАН України, який проходить у три етапи (район, область, фінал у Києві). Окрім загальнонаціонального конкурсу учні МАН беруть участь у різноманітних інтелектуальних конкурсах, турнірах, олімпіадах, фестивалях [42].

Мала академія наук забезпечує реалізацію таких основних стратегій роботи з обдарованими дітьми як: стратегія «дослідницького навчання; стратегія «проблематизації»; стратегія «індивідуалізації».

Такі стратегії хоча і прописані у завданнях програм (таких як Державна програма роботи з обдарованою молоддю на 2006-2010 рік, Положення про Малу академію наук України, положення про Всеукраїнські учнівські олімпіади), але нажаль не виконуються в повному обсязі в системі роботи з обдарованою молоддю, особливо в структурі МАН у секції математики зокрема.

У розв'язанні сформульованих задач в області математичної підготовки учнів у позашкільному закладі – Малій академії наук – є чимало невирішених проблем.

Наукові основи методики навчання математики розкриваються в загальних законах педагогіки і принципах дидактики. Питання полягає в тому, як на базі законів педагогіки та принципів дидактики побудувати таку систему навчання математики, що зважає на специфіку організації МАН.

Проблемам виявлення й розвитку здібностей учнів, зокрема математичних, присвячено ряд психолого-педагогічних і методичних досліджень.

Питаннями розвитку розумових здібностей учнів, активізації їх творчої та пізнавальної діяльності, розкриття їхнього творчого потенціалу при застосуванні традиційних засобів навчання займались В. І. Андрєєв [3], Д. Б. Богоявленська [26 , 27], Л. С. Виготський [51, 52], І. П. Волков [50], В. В. Давидов [72], О. М. Кабанова-Меллер [98, 99], Г. С. Костюк [113], В. А. Крутецький [115, 116], О. Н. Лука [138], А. С. Обухов [159, 160], В. О. Моляко [150], С. Л. Рубінштейн [197, 198], З. І. Слєпкань [207, 208], Н. Ф. Тализіна [216], Б. М. Теплов [218], І. С. Якиманська [238] та інші.

Вагомий внесок у створення й розвиток теорії математичних здібностей зробили В. А. Крутецький [115], Н. А. Менчинська [144], В. О. Моляко [150], К. К . Платонов [177], І. С. Якиманська [238] та ін. Математичні здібності та механізми їх розвитку розглядали видатні математики Ж. Адамар [2], А. Пуанкаре [188, 189], Б. В. Гнєденко [63, 64], А. М. Колмогоров [106], Л. Д. Кудрявцев [117], О. Я. Хінчин [226], математики і методисти Г. Вейль [40], Д. Пойа [173, 174], методисти М. Б. Балк [15], Г. П. Бевз [19], В. О. Гусєв [25], Г. В. Дорофєєв [25, 81, 82], З. І. Слєпкань [208] та ін.

Аналізу різноманітних аспектів проблеми розвитку творчих, зокрема математичних або дослідницьких здібностей, присвятили дисертаційні дослідження С. Ю. Білоус [24], Є. Ф. Вінніченко [46], М. С. Головань [66], М. Я. Ігнатенко [93], Г. Г. Колинець [105], Л. С. Левченко [125], Т. О. Олійник [162], О. Є. Первун [165], С. А. Раков [191], П. І. Самовол [200], О. А. Смалько [210], І. О. Теплинський [217], О. С. Чашечникова [230] та ін.

У дослідженнях С. Ю. Білоус визначено дидактичні умови розвитку дослідницьких здібностей учнів під час навчання фізики в Малій академії наук і розроблені складові методики динамічного моделювання – дослідницькі ланцюжки, в основі яких лежить фізична задача. Аналізу компонентів структури творчих здібностей школярів засобами комп'ютерних технологій присвячені роботи Є. Ф. Вінніченка, Т. О. Олійник, О. А. Смалько, І. О. Теплинського. Проблемам формування математичних компетентностей учителя математики на основі дослідницького підходу в навчанні з використанням інформаційних технологій присвячена робота С. А. Ракова. У дослідженнях М. Я. Ігнатенка розроблені методологічні та методичні основи активної навчально-пізнавальної діяльності учнів під час вивчення математики, а питання, що стосуються можливостей застосування творчих завдань для активізації пізнавальної діяльності учнів знайшли відображення в роботі М. С. Голованя. У дисертації О. Є. Первун розглянуто можливість розвитку математичних здібностей старшокласників при розв'язанні пошуково-дослідницьких задач, а також розроблено окремі компоненти методичної системи формування та розвитку математичних здібностей учнів математичних класів при навчанні алгебри та початків аналізу і геометрії за допомогою пошуково-дослідницьких задач. Робота Л. С. Левченко присвячена творчій самореалізації старшокласників у науково-дослідницькій діяльності. У дисертаційному дослідженні П. І. Самовола аналізується та вдосконалюється методична система роботи із здібними та математично обдарованими дітьми. Дисертація Г. Г. Колинець присвячена психологічним передумовам формування математичних дослідницьких здібностей у старшокласників, а О. С. Чашечникова досліджувала можливості розвитку математичних здібностей учнів основної школи.

Аналіз наявної психолого-педагогічної та методичної літератури показує, що хоч питаннями розвитку інтелектуального потенціалу, творчих здібностей учнів на уроках математики та в позаурочний час займалася значна кількість дослідників, проте питання про форми організації позакласної роботи, розробка системи розвитку творчих здібностей учнів у діяльності МАН, що впливатимуть на розвиток математичних здібностей особистості, порівняно мало висвітлено. Досвід роботи територіальних відділень, окремих педагогів засвідчує існування ряду проблем у системі МАН, зокрема відсутність чіткої, педагогічно збалансованої розвивальної системи та навчально-методичного забезпечення. Нормативні документи положення про МАН, звіти та реальність показують суперечності між існуючою системою роботи з учнями МАН та такою, яка потрібна сучасності.

Згадані напрямки вказують на необхідність більш глибокого вивчення проблеми розвитку математичних здібностей школярів у діяльності МАН. Можна стверджувати, що існують реальні нерозв'язані суперечності, які стосуються цієї проблеми. По-перше, суперечності проявляються між тим, що, з одного боку, суспільству потрібні освічені та творчі кадри, здатні до самонавчання, наукового пошуку та знаходження нестандартних рішень, про що свідчать офіційні документи, але з іншого боку, школа й позашкільні організації ще недостатньо готують молодь до творчості (в тому числі й математичної). По-друге, займаючись вихованням обдарованих дітей, які швидко встигають, ми втрачаємо чимало талантів, які розвиваються повільно.

Враховуючи актуальність проблеми формування та розвитку математичних здібностей учнів у діяльності МАН України, її недостатню розробленість, а також необхідність у наданні цьому процесу системного та особистісно орієнтованого спрямування, було визначено тему дисертаційного дослідження «Розвиток математичних здібностей школярів у діяльності Малої академії наук».

Об'єктом дослідження є навчально-розвивальний процес з математики в рамках МАН.

Предметом дослідження є методика формування та розвитку математичних здібностей школярів – членів фізико-математичного відділення МАН.

Мета дослідження полягає в розробці, теоретичному обґрунтуванні та експериментальній перевірці цілісної системи розвитку математичних здібностей школярів – членів фізико-математичного відділення МАН, яка б забезпечила максимальну реалізацію психолого-педагогічних положень про розвиток творчих здібностей учнів і була б значно ефективнішою та результативнішою порівняно з існуючими.

В основу дослідження покладено **гіпотезу** про те, що процес розвитку математичних здібностей школярів у навчально-розвивальній системі МАН буде значно ефективніший та результативніший, якщо:

1) його організація буде більш строго нормативно прописаною (внормованою);

2) буде розроблена і впроваджена педагогічно збалансована система взаємодоповнення навчання математики в школі і в МАН, що сприятиме повноті використання дослідницьких вмінь;

3) буде наявною цілісна система дидактичних засобів у формі задач, проблем та дидактичних ситуацій (так званих поетапних завдань) з урахуванням психологічних і вікових особливостей дітей, які дозволяють посилювати мотиваційні основи, підтримувати стійкий інтерес учня до пошуково-дослідницької діяльності;

4) буде сформовано комплекс шляхів (містків) переростання навчальної діяльності в дослідницьку;

5) до організації та проведення навчальної та пошуково-дослідницької роботи будуть залучені належним чином підготовлені педагоги і науковці, забезпечені якісними інструктивними матеріалами та рекомендаціями.

Проблема, гіпотеза і мета дослідження визначили наступні **завдання**:

1. Проаналізувати сучасний стан психолого-педагогічних досліджень з проблеми розвитку творчих та математичних здібностей учнів; виявити психолого -педагогічні передумови, які сприяють розвитку математичних здібностей школярів.

2. Провести аналіз типових недоліків у керівництві науково-дослідницькими роботами школярів; наявних труднощів, які виникають у вчителів та керівників науково-дослідницькими роботами школярів; сучасних інформаційно-комунікаційних технологій, які сприяють досягненню творчих результатів школяра у діяльності МАН.

3. Виявити дієві форми і методи, що сприяють вдосконаленню навчально-виховної роботи зі школярами в Малій академії наук та розвитку математичних здібностей учнів – членів МАН.

4. Визначити основні методичні вимоги до системи роботи з учнями у навчально -розвивальному процесі з математики в рамках МАН.

5. Запропонувати комплексну програму роботи з математично обдарованою молоддю, що ґрунтується на ефективних методах і формах розвитку математичних здібностей школярів та враховує наявність сучасних інформаційно-комунікаційних технологій.

6. Експериментально перевірити й оцінити ефективність запропонованої методичної системи розвитку математичних здібностей школярів – членів МАН.

Методологічною основою дослідження є загальна теорія пізнання, концепції навчальної діяльності, розвитку пізнавальної самостійності учнів, гуманізації та демократизації шкільної освіти (О. М. Кабанова-Меллер, З. І. Слєпкань, В. Д. Степанов, Н. Ф. Тализіна та ін.); теорія проблемного та розвивального навчання, розвитку дослідницьких і математичних здібностей, поетапного формування розумових дій школярів (Л. С. Виготський, П. Я. Гальперін, В. В. Давидов, Д. Б. Ельконін, Л. В. Занкова, О. М. Леонтьєв, А. В. Леонтович, С. Л. Рубінштейн, І. С. Якиманська та ін.); положення дидактики та методики навчання математики про системний, діяльнісний та особистісно-орієнтований підходи до формування особистості (О. І. Скафа, М. І. Бурда, Г. В. Дорофєєв, Ю. М. Колягін, Д. Пойа, З. І. Слєпкань та ін.); наукові здобутки щодо побудови сучасних методичних систем та впровадження системно-методичного забезпечення навчального процесу школи та ВНЗ (А. В. Леонтович, Е. Страчар, Т. М. Хмара, В. І. Шавальова та ін.); використання інформаційно-комунікаційних технологій в навчальному процесі (А. П. Єршов, М. І. Жалдак, В. М. Монахов, С. А. Раков та ін.), Закон України «Про освіту», Державна національна програма «Освіта» (Україна XXI ст.).

Для досягнення мети і розв'язання поставлених завдань використовувалися такі науково-педагогічні **методи дослідження**:

– теоретичні: аналіз психолого-педагогічної і науково-методичної літератури з проблеми, навчальних програм і підручників, навчально-методичних посібників, дидактичних матеріалів (1.1 – 1.4, 2.1, 2.2 тут і далі – підрозділи дісертації); вивчення державних нормативних документів щодо реформування та організації навчального процесу в шкільних і позашкільних навчальних закладах (1.2 – 1.4, 2.1 – 2.3); узагальнення і систематизація отриманих теоретичних даних (1.1 – 1.4, 2.1 – 2.4);

– емпіричного характеру: діагностичні (бесіди з вчителями, викладачами та вченими, учнями та їх анкетування) (2.4); обсерваційні (спостереження й аналіз навчального процесу, узагальнення власного досвіду та досвіду вчителів шкіл та викладачів ВНЗ) (2.4); експериментальні (констатуючий, пошуковий, формуючий експерименти), опрацювання їх результатів за допомогою методів математичної статистики (2.4).

Наукова новизна і теоретичне значення дослідження:

1. На основі аналізу психолого-педагогічної літератури та теоретичних обґрунтувань визначено психолого-педагогічні передумови успішного розвитку математичних здібностей учнів – членів МАН;

2. Виявлено труднощі і недоліки у діяльності керівників науково-дослідницькими роботами з математики школярів – членів МАН та передбачено шляхи їх запобігання;

3. Теоретично обґрунтовано комплекс вимог: а) до системи задач, які передбачають посилення розвивальних функцій, б) до структури дослідницького завдання для учня, в) до оформлення науково-дослідницької роботи члена МАН;

4. Розроблено концепцію трьохетапного (рівневого) розвитку творчих математичних здібностей у процесі науково-розвивальної діяльності у МАН:

– перший етап полягає у формуванні базових математичних компетентностей учнів – слухачів МАН за наступною схемою: факти – спостереження – гіпотеза – результат – елементи теорії – застосування;

– другий полягає у створенні навчально-дослідницьких завдань, які є послідовністю задач, проблем та дидактичних ситуацій, що об'єднують різні розділи шкільного курсу математики та дозволяють формувати основні види творчої математичної діяльності учнів – кандидатів МАН: творче сприйняття математичної інформації; висунення гіпотез та їх перевірку; критичність мислення; перетворення навчальної задачі у пошуково-дослідницьку;

– третій полягає в розробці (шляхом аналогій, конкретизації, узагальнення , порівняльного аналізу тощо) та захисті власного науково-дослідницького проекту;

5. Розроблено, теоретично обґрунтовано і експериментально перевірено систему роботи з членами МАН, здатну забезпечити виконання статутних завдань МАН, суттєво покращити розвиток математичних здібностей школярів, їх математичну культуру, сформувати основи для самостійної пошукової діяльності, посилити мотиваційні основи при виборі майбутньої професії тощо;

6. Встановлено, що найбільш дієвим підходом до формуванння дослідницьких умінь учнів є гармонійне поєднання проблемного, евристичного та дослідницького методів навчання, а найбільш ефективною формою для розвитку творчих математичних здібностей школярів є практикум роботи над системою взаємопов'язаних задач.

Практичне значення даного дослідження полягає в тому, що:

– результати, висновки і методичні рекомендації розкривають зміст, ефективні методи, організаційні форми і засоби навчання математики учнів і можуть бути використані педагогами з метою розвитку математичних здібностей школярів в позакласній, позашкільній роботі та в навчально-розвивальному процесі в рамках МАН;

– розроблено та апробовано авторську навчальну програму з математики для гурткової роботи в МАН та методичні рекомендації для вчителів і керівників науково-дослідницьких робіт з метою управління процесом формування навичок математичної діяльності в ході виконання дослідницьких завдань членами МАН;

– розроблено систему проявів математичних здібностей учнів та систему виявлення математично обдарованих в школярів;

– запропоновано систему особистісно-орієнтованих, різнорівневих завдань для розвитку математичних здібностей учнів, поради та рекомендації щодо їх виконання;

– розроблено методичні рекомендації щодо складання та розв'язування дослідницьких задач, аудиторних і домашніх олімпіадних робіт;

– підготовлено вимоги щодо оформлення науково-дослідницьких робіт членів МАН та поради для керівників;

– визначено вимоги до системи роботи з учнями МАН та окреслено структуру системи мотивів навчальної діяльності учнів у рамках МАН;

– обґрунтовано доцільність створення нової форми організації – лабораторії, яка поєднує заняття основної школи з заняттями гуртка МАН та пошуково-дослідницькою діяльністю учнів, де поряд із традиційним навчанням використовуються елементи нових розвиваючих технологій;

– розроблено комплекс цілеспрямованих і поетапних дій щодо формування математичної та дослідницької культури учнів МАН, що забезпечує результативність їхньої участі в творчих конкурсах і олімпіадах.

Усі вищезгадані матеріали можуть бути використані в практичній діяльності педагогів, зокрема в їх діяльності в структурі МАН, при підготовці навчальних і навчально-методичних посібників для вчителів математики, які працюють з обдарованими учнями, а також будуть корисними викладачам педагогічних університетів, які готують майбутніх вчителів математики до роботи з обдарованою молоддю.

Обґрунтованість та достовірність результатів дослідження забезпечується: побудовою дослідження на основі теоретичних положень сучасної психології, педагогіки, теорії та методики навчання математики, філософії математики; сукупністю різноманітних методів, узгоджених з метою дослідження, узагальненням досвіду багатьох поколінь математиків, методистів і вчителів-практиків, що працювали з математично обдарованою молоддю; узгодженістю отриманих під час дослідження висновків і конкретних рекомендацій із результатами ряду психолого-педагогічних і методичних досягнень в області даної проблеми; експериментальною та статистичною перевіркою основних положень дисертації.

Апробація та впровадження результатів дослідження. Основні положення та матеріали дослідження доповідались і обговорювались:

– на міжнародній науково-практичній конференції Національного педагогічного університету (НПУ) імені М. П. Драгоманова «Математична освіта в Україні: минуле, сьогодення, майбутнє» (2005, 2007 рр.);

– на Всеукраїнському науково-методичному семінарі «Актуальні проблеми методики математики» при кафедрі математики і методики викладання математики НПУ імені М. П. Драгоманова;

– на методологічному семінарі «Математика і математична освіта» при Фізико-математичному інституті НПУ імені М. П. Драгоманова;

– на семінарах учителів математики та конференціях Київського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти та НПУ імені М. П. Драгоманова;

– на сторінках журналу «Математика в школі».

Висунуті в роботі положення, навчальні матеріали, методичні рекомендації з розвитку математичних здібностей учнів у процесі шкільного та позашкільного вивчення математики пройшли експериментальну перевірку і впроваджені в навчальний процес шкіл м.Славутича (1997–2010, довідка №161-1/1-05 від 7.09. 2010р., довідка №01-08-181 від 09.09.2010р.), м.Фастів (2007-2010, довідка №521 від 17.09.2010р.), м.Білої Церкви (2003–2009, довідка №770 від 16.11.2010р.), м. Чернігова (довідка №528 від 10.09.2010р.), м. Щасливе (довідка №334 від 09.09. 2010р.).

Публікації. Всього за результатами дослідження опубліковано 9 наукових робіт, серед яких шість статей у фахових виданнях , дві статті в збірниках наукових праць міжнародних конференцій та одна стаття у збірнику «Вісник Чернігівського державного педагогічного університету».

Структура та обсяг дисертації. Робота складається зі вступу, двох розділів , висновків, списку використаних джерел з 250 найменувань, додатків. Загальний обсяг дисертації 262 сторінок, з яких 189 сторінок основного тексту.

РОЗДІЛ І
ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГІЧНІ ОСНОВИ РОЗВИТКУ МАТЕМАТИЧНИХ ЗДІБНОСТЕЙ УЧНІВ

1.1. Здібності, математичні здібності та їх розвиток у процесі навчання

Розробка системи розвитку математичних здібностей неможлива без глибокого і всебічного аналізу теоретичних підходів до розкриття окремих сторін, які складають її сутність. Аналіз психолого-педагогічної літератури дозволяє виділити такі три аспекти даної проблеми: соціальний, психолого-педагогічний і методичний.

Соціальний аспект розвитку здібностей в цілому, і математичних здібностей зокрема, безпосередньо пов’язаний зі збереженням та підвищенням інтелектуального потенціалу підростаючого покоління, розвитку творчого мислення, індивідуальних здібностей.

Психологічний аспект проблеми розвитку здібностей в цілому, і математичних здібностей зокрема, полягає в необхідності розгляду внутрішніх механізмів встановлення здібної особи, структури математичних здібностей, особливостей їх діагностики та розвитку.

З педагогічної точки зору проблема розвитку здібностей зводиться до встановлення умов, які дозволяють розвивати здібності дитини в цілому, зокрема математичні.

Метою методичних аспектів розробки проблеми є визначення конкретних шляхів розвитку здібностей в процесі вивчення того чи іншого предмета або розділу курсу.

Аналіз проблеми розвитку здібностей в цілому, зокрема математичних, в історичній ретроспективі засвідчує те, що ця ідея в процесі навчання багаторазово обговорювалась в історії вітчизняної освіти. Підвищена увага до проблеми стала зароджуватися в період встановлення класичної освіти в нашій країні в середині XIX ст. Вивчення математики розглядалось як основний засіб розвитку формальної сторони інтелекту. Більш актуальною ця ідея стає на початку ХХ ст. у зв’язку із введенням спеціалізації в старших класах школи. Подальший розвиток вона отримала в кінці 50-х на початку 60-х років із впровадженням у практику середньої школи різноманітних форм диференціації навчання. Наприкінці 80-х – на початку 90-х років ХХ ст. орієнтація на диференціацію знаходить свій подальший розвиток. У цей період масово створюються нові типи навчальних закладів: гімназії, ліцеї, класи з поглибленим вивченням окремих предметів, профільні класи з різними напрямами, нові позакласні заклади. Особливе місце серед них займають навчальні заклади та класи, орієнтовані на підвищену математичну підготовку.

Становлення та розвиток ідей диференціації процесу навчання сприяли посиленню уваги вчителів до врахування індивідуальних можливостей учнів і розвитку їх здібностей, зокрема математичних.

Перш ніж говорити про розвиток здібностей учнів у психолого-педагогічному аспекті, слід уточнити зміст таких понять як «здібності», «математичні здібності», «структура математичних здібностей», і деяких інших, які мають важливе значення для розкриття теми нашого дослідження.

Проблемами розвитку здібностей займались Ю. З. Гільбух [62], Г. С. Костюк [113, 114], О. М. Леонтьєв [133], О. М. Матюшкін [141], Б. П. Нікітін [154] та ін. Психологічним аспектам формування та розвитку здібностей, аналізу їх структури присвячені роботи В. І. Андрєєва [3], Л. С. Виготського [51], П. Я. Гальперіна [56, 57], В. М. Костюка [112], В. А. Крутецького [115], А. В. Леонтовича [127–131], О. Н. Лука [138], А. С. Обухова [159–160], К. К. Платонова [177], С. Л. Рубінштейна [197–199], Б. М. Теплова [218] та ін.

Загальна характеристика здібностей. Взагалі, проблема розвитку здібностей є складною і багатогранною. Не маючи можливості охопити її в цілому, кожен з дослідників виділяв для вивчення лише певний аспект. У результаті такого аналітичного підходу в психології на даний час не існує навіть загальноприйнятого визначення поняття «здібності». Так, принцип розвитку психіки в діяльності є основою для розуміння здібностей як індивідуально-психологічних особливостей особистості (Б. М. Теплов, В. А. Крутецький, К. К. Платонов); психологічних властивостей (Г. С. Костюк, С. Л. Рубінштейн).

Г. С. Костюк зазначає, що здібності належать до основних властивостей, що характеризують людину як суспільну істоту, її особистість. Це істотні психічні властивості людини, що виявляються в її цілеспрямованій діяльності і зумовлюють її успіх та мають тісний, але складний зв’язок із знаннями, вміннями, потребами, інтересами, моральними якостями [114].

В. А. Крутецький під здібностями розуміє індивідуально-психологічні особливості людини, що сприяють швидкому та легкому оволодінню певною діяльністю [115]. Він відзначає, що:

–здібності – це завжди здібності до певного роду діяльності, що існують тільки у відповідності до конкретної діяльності людини;

–здібності – поняття динамічне. Вони не тільки проявляються та існують у діяльності, вони в діяльності створюються, та в діяльності розвиваються;

–успішність діяльності залежить не від окремо взятої здібності, а від їх комплексу;

–можлива компенсація одних здібностей іншими. Відносна слабкість однієї здібності компенсується іншою здібністю, що не виключає успішного виконання відповідної діяльності.

С. Л. Рубінштейн під здібністю розуміє «здатність людини до тієї чи іншої діяльності» [197].

Говорячи про здібності, слід зазначити, що вони у кожної людини різні. Кожна людина має своєрідні сполучення здібностей, а успішність її діяльності визначається наявністю того чи іншого сполучення здібностей.

Здібності діляться на *загальні* та *спеціальні*. В. А. Крутецький під загальними здібностями розуміє такі, які необхідні для виконання не якоїсь однієї діяльності, а багатьох видів діяльності [115]. До загальних розумових здібностей він відносить, наприклад, такі якості розуму як активність, критичність, високий рівень аналітико-синтетичної діяльності, сконцентрованість уваги. Спеціальні здібності розглядаються ним як такі, що необхідні для успішного виконання однієї діяльності.

Психологи виділяють наступні види спеціальних здібностей: навчальні й творчі, розумові й спеціальні, математичні, конструктивно-технічні, музикальні, літературні, художні, фізичні, екстрасенсорні. Навчальні й творчі здібності відрізняються тим, що перші визначають успішність навчання та виховання, засвоєння людиною знань, умінь, навичок, формування якостей особистості, в той час творчі здібності пов’язуються зі створенням нового, оригінального продукту, з пошуком нових засобів діяльності [27]. Творчі здібності розглядаються як ін дивідуально-психологічні здібності людини, що характеризують ступінь їх відповідності вимогам певного виду діяльності та обумовлюють рівень результативності цієї діяльності [207].

«Наявність» спеціальних здібностей у дитини часто пов’язують із стадіями рівнів здібностей: обдарованість, талант, геніальність. Б. М. Теплов зазначає, що *обдарованість* – якісно своєрідне сполучення здібностей, від якого залежить імовірність більшого чи меншого успіху під час виконання деякої діяльності; *талановитість* – вищий ступінь спеціальної обдарованості дитини; *геніальність* – найвищий ступінь обдарованості, прояву творчих сил людини [218].

Фактори, що сприяють розвитку здібностей. Здібності не є перманентними – вони формуються і розвиваються в процесі діяльності (у тому числі і навчально-пізнавальної). Постає питання, як спадковість, виховання, середовище впливають на наявність та розвиток здібностей людини? Коли їх розвиток досягає творчого рівня?

Відомо, що процес і результат людського розвитку визначаються спільним впливом таких факторів – спадковості, середовища, виховання, і жоден з них не діє самостійно, результат залежить від їх взаємовпливів.

Під *спадковістю* розуміють передавання від батьків до дітей відповідних якостей і особливостей. Спадкові програми розвитку людини містять детерміновану частину, що забезпечує видові задатки людини, як представника людського роду, і змінну частину, яка допомагає пристосовуватись до змін умов середовища, що дає можливість вдосконалювати свої здібності в процесі саморозвитку [177].

Б. М. Теплов вказує на деякі умови формування здібностей: здібності не можуть бути вродженими, вродженими можуть бути лише задатки [218]. Під *задатками* Б. М. Теплов розуміє природжені анатомо-фізіологічні особливості організму, головним чином нервової системи й органів чуття, передумова розвитку здібностей людини при певних умовах і діяльності людини в певному напрямі.

В. О. Швець у своїй статті «Формування і розвиток математичних здібностей учнів 5-6 класів під час навчання математики» [234] зазначає, що:

– «отримавши» учня, вчитель отримує і його задатки як данність, яку змінити не може, але яку має використовувати під час навчання;

– щоб навчати учня, потрібно знати його задатки, які є, очевидно, латентною величиною, заданою природою константою;

– на задатках учня можна формувати здібності до математики та інших предметів. Це той фундамент, над яким височітиме надбудова – здібності;

– задатки мають знати всі вчителі (і батьки теж), які причетні до його навчання.

Більшість провідних психологів вважає, що *розвинути здібності* – це означає озброїти дитину способом діяльності, дати їй у руки ключ, принцип виконання роботи, створити умови для виконання й розквіту її обдарованості [113 , 197].

Надалі під *здібністями* будемо розуміти індивідуально-психологічні особливісті людини, які формуються у діяльності на основі задатків, що відрізняють одну людину від іншою і роблять діяльність успішною.

Одне з найважливіших завдань правильно організованого виховання – виявлення задатків і обдарувань та розвиток у відповідності з індивідуальними особливостями людини, її можливостями і здібностями. Уміння бачити і визначати індивідуально неповторні особливості конкретної людини має важливе значення для цілого ряду професій.

Вплив діяльності на розвиток здібностей. Вплив спадковості, середовища і виховання на розвиток людини, її здібностей доповнюється ще одним важливим фактором – *діяльністю*. Але якими б феноменальними не були задатки самі по собі, поза навчанням, поза діяльністю – вони розвиватися не можуть, стверджує І. П. Волков [50]. У процесі діяльності відбувається всебічний і цілісний розвиток особистості людини, формується її ставлення до оточуючого світу. Діяльність – це активність суб’єкта, що спрямована на зміну оточення, на виробництво або породження певного виробу матеріальної або духовної культури [127].

Звісно, що не всяка активність є діяльністю. П. Я. Гальперін вважає, що дії, якими управляє суб’єкт на основі орієнтації в плані образу, є актами поведінки, а там де відсутня орієнтація дій на основі образу, відсутня й поведінка, там є тільки реакція організму (автоматизм). Коли стає неможливим автоматичне задоволення потреб через соціальний чи предметний опір, виникає необхідність в актовій орієнтації, в діяльності [56].

Розрізняють різні види діяльності: спілкування, навчальна діяльність, професійна діяльність тощо.

Основи психологічної теорії діяльності розроблялись такими відомими вченими як Л. С. Виготським [51, 52], В. В. Давидовим [72], Д. В.Ельконіним [235], О. М. Леонтьєвим [133], А. Р. Лурія [139], С. Л. Рубінштейном [197] та ін. У сучасній педагогічній психології обґрунтовано, що для кожного вікового періоду є свій найбільш характерний, провідний вид діяльності: в дошкільному – гра, у молодшому шкільному – навчання, у середньому шкільному віці – громадська діяльність [72, 121]. Однак не обов’язково в кожному віці учень займається більш провідним видом діяльності.

Навчально-творча діяльність. Одним із видів діяльності є навчально-творча діяльність, що полягає у розв’язуванні навчально-творчих задач і позитивно впливає на розвиток особистості, зокрема її творчих здібностей.

За визначенням Б. М. Теплова, «творчою діяльністю називають діяльність, що дає нові, оригінальні продукти високої суспільної цінності» [218]. Поняття творчості визначається як параметрами творчого потенціалу учня: його творчою здібністю, творчою активністю, так і особливостями особистості: темпераментом, характером, волею. Тому можна вважати, що поняття «творча діяльність» досить об’ємне та багатогранне.

Навчальна творча діяльність розглядається нами в першу чергу як діяльність, що сприяє розвиткові цілого комплексу якостей творчої особистості: розумової активності, кмітливості й винахідливості, прагнення здобувати знання, необхідні для виконання конкретної практичної роботи, самостійності у виборі та розв’язанні задачі, працьовитості, здатності бачити спільне та головне в різних та різне у схожих явищах і т. д.

Творчість, індивідуальність, мистецтво, як підкреслює Б. М. Теплов, проявляються вже при незначному відхиленні від зразка [218]. Для цього потрібно створити тільки умови для розвитку. А щоб сформувати в учнів потребу до творчої діяльності, педагоги самі повинні бути творчо активними, тобто мати домінуючу потребу в творчості в науково-навчально-виховній діяльності, відрізнятися високою кваліфікацією, мати можливість керувати самостійною дослідницькою діяльністю учнів.

Дослідницька діяльність – особливий вид діяльності, що породжується у результаті функціонування механізму пошукової активності і будується на основі її дослідницької поведінки [159, 233]. А. С. Обухов визначає її як творчий процес взаємодії вчителя і учнів у пошуку невідомого, в ході якого здійснюється трансляція між ними культурних цінностей, результатом якої є розвиток дослідницької позиції до світу [159].

В. І. Андрєєв в своїй роботі зазначає, що в навчально-творчій діяльності можна виділити наступні компоненти творчих здібностей: інтелектуально-логічні здібності; інтелектуально-евристичні та інтуїтивні здібності; комунікативні здібності; здібності до самоуправління своєю діяльністю [3]. А як відмічає З. І. Слєпкань, для формування творчої особистості в процесі вивчення математики особливо важливими є перші два компоненти, бо до інтелектуально-логічних здібностей учня відносять вміння аналізувати; виділяти істотне спільне і відволікатися від несуттєвого; здібність пояснювати, доводити, обґрунтовувати, а до інтелектуально-евристичних здібностей включають здібності генерувати ідеї, висувати гіпотези; здібність до фантазії; здібність відображати і встановлювати в свідомості нові зв’язки між компонентами задачі; здібність бачити протиріччя і проблеми; здібність до узагальнень і застосувань знань та умінь у нових ситуаціях ; незалежність мислення; критичність мислення [207].

Творче мислення. Велику роль у процесі навчання відіграє мислення, бо воно характеризується виходом особистості за межі поставленої задачі. Питання розвитку математичних здібностей дитини необхідно розглядати в тісному взаємозв’язку з розвитком творчого мислення.

Творче мислення належить до продуктивного мислення, тобто такого, що забезпечує самостійне розв’язування учнями нових для них проблем, глибоке засвоєння знань, швидкий темп оволодіння знаннями, широту їх перенесення у відносно нові умови, тобто успішність виконання навчальної діяльності [138]. Цей вид мислення характеризується створенням суб’єктивно нового продукту і новоутвореннями в самій пізнавальній діяльності щодо його створення. Продукт творчого мислення різниться неповторністю, оригінальною, а також суспільноісторичною унікальністю [175].

Проблема розвитку творчого мислення учнів у психолого-педагогічній та методичній літературі (зокрема з математики) висвітлювалась у працях Г. Вейля [40], В. В. Давидова [72], Л. В. Занкова [90], О. М. Кабанової-Меллер [98], В. А. Моляко [150], З. І. Слєпкань [207, 208] та інших. В цих працях зазначається, умовою виникнення творчого мислення є наявність проблемної ситуації, що сприяє усвідомленню потреби у відкритті нових знань і стимулює високу активність суб'єкта, який розв'язує проблему. Знаходження відповіді на проблему припускає відкриття невідомих суб'єктові ознак, суттєвих для розв'язання проблеми відношень, закономірних зв'язків між цими ознаками, тих способів, за допомогою яких вони можуть бути знайдені.

Творче мислення характеризується не тільки високою новизною свого продукту та специфічністю процесу його отримання, а й суттєвим впливом на розумовий розвиток учня. Воно є основною складовою в розумовій діяльності, оскільки забезпечує реальний рух до нових знань. У цьому плані проблема творчого мислення має тісний зв'язок із проблемою творчих здібностей [210]. Творчі здібності розглядають не як сукупність знань і розумових дій, а як те, що допомагає їх успішному засвоєнню. Досягнутий людиною рівень творчих здібностей значною мірою залежить від багатьох факторів: культурного рівня, місця проживання, умов життя, навчального закладу, методів навчання, організації навчального процесу тощо.

Доцільно зазначити, що творчі здібності та інтелект не існують окремо одне від одного. Реальні творчі досягнення в більшості галузей діяльності потребують розвиненого інтелекту, хоча його високий рівень може і не приводити до творчих проявів. Можна сказати, що в учня в якійсь мірі присутня здібність до творчої діяльності, якщо у нього проявляються такі якості як: самостійність, сміливість мислення (здатність особи до відстоювання власних поглядів на проблему), готовність до вольового напруження. Для нас важливо врахувати, що такі якості можуть яскраво виявлятися в роки юнацтва (13–15 років – вік слухачів та кандидатів МАН). Підтвердженням цього є вражаючі приклади з історії, коли відкриття в математиці світового масштабу підкорювалися зовсім юним особистостям (І. Ньютон, Е. Галуа, М. Боголюбов), а також успішні виступи на ММО 13-14 річних учнів.

У цей період дитина не просто повторює щось засвоєне або задане кимось – вона суб'єкт творчості, творчі зусилля найбільш відповідають її потребам у розумовому напруженні та розумовому рості [83]. Аналіз психолого-педагогічних джерел дав змогу встановити, що вирішальну роль у виявленні й розвитку творчих здібностей відіграють освіта й виховання.

Сьогодні про творчість говорять не як про вид, а як про стиль діяльності, необхідний у галузі суспільної практики людини. Але розвиток творчого мислення школярів відбувається не стихійно, а при відповідній організації навча льно-виховного процесу. Оволодіти цим стилем мислення учень може тільки в процесі розв'язування творчих задач за умови створення необхідної мотивації учня.

Проблемне навчання як один із засобів активізації пізнавальної діяльності учнів. Творчі здібності самі по собі не перетворюються в творчу діяльність. Рушійною силою будь-якої людської діяльності, а, отже, і будь-якого виду навчання, є *мотивація*. Мотив визначається як «стан внутрішнього напруження, від якого залежить можливість і направлення активності організму» [138]. Ефективність навчання залежить від того, чи проявляється подібна внутрішня напруга в процесі самого навчання. Чим сильніше бажання, тим кращі результати, але лише до певної межі. Оптимальний рівень мотивації не є сталим, а зростає з підвищенням складності завдань, але й тут є межа можливостей людини. Мотивація дає можливість бачити причини, що спонукають діяти так, а не інакше, допомагає знайти шляхи до розв'язання поставленої задачі [210].

Одним із засобів мотивації навчання є проблемне навчання. Ще у 50-х роках XX ст. з'явився цей новий метод навчання, який дістав назву проблемного. Ця концепція, на думку її авторів, має компенсувати недоліки традиційного або пояснювально-ілюстративного методу навчання. У колишньому Радянському Союзі цю концепцію розвивали І. Я. Лернер [135], А. М. Матюшкін [141], М. І. Махмутов [142], М. М. Скаткін [204].

Основні переваги проблемного навчання полягають у тому, що воно розвиває розумові здібності учнів; викликає в них інтерес до учіння і сприяє виробленню мотивів і мотивації навчально-пізнавальної діяльності; пробуджує їхні творчі схильності; виховує самостійність, активність і креативність учнів.

Проблемне викладання – складається з таких етапів діяльності суб'єктів дидактичного процесу:

–організації проблемної ситуації;

–формулювання проблеми;

–індивідуального або групового вирішення проблеми суб'єктами учіння;

–перевірки, тлумачення або систематизації отриманої інформації;

–використання засвоєних знань у теоретичній та практичній діяльності [135].

Зробимо декілька зауважень щодо базових понять проблемного навчання. Один із авторів цієї концепції – А. М. Матюшкін так визначає проблемну ситуацію: це особливий вид розумової взаємодії суб'єктів дидактичного процесу, що характеризується таким психічним станом учня під час вирішення цих завдань , який вимагає виявлення (відкриття або засвоєння) нових знань або способів діяльності [141]. Отже, проблемна ситуація – це така ситуація, під час розв'язання якої суб'єктові учіння не вистачає знань і тому він повинен сам їх шукати. Далі А. М. Матюшкін наводить правила створення проблемної ситуації:

1. Перед суб'єктами учіння слід поставити таке завдання, виконання якого вимагає засвоєння нових знань і опанування нових навичок і умінь.
2. Завдання має відповідати розумовим здібностям суб'єктів учіння.
3. Проблемне завдання дається до пояснення матеріалу, що вивчається.
4. Проблемними завданнями можуть бути:
   а) засвоєння навчального матеріалу;
   б) формулювання питання, гіпотези;

в) практичне завдання.

5. Одна і та сама проблема може бути створена різними типами завдань.

6. Розв’язанню дуже складної проблемної ситуації суб’єкт викладання сприяє шляхом указування суб’єктові учіння на причини невиконання заданого йому практичного завдання або неможливість пояснення ним тих чи інших фактів [141].

Під час занять можна використовувати такі рівні проблемного навчання:

–постановка проблеми та її розв’язання педагогом;

–створення проблеми педагогом та її розв’язання спільно з учнями;

–розв’язання проблемних завдань, що виникають у процесі навчання;

–учні разом з педагогом визначають проблему і самостійно її розв’язують [136].

Отже, проблемне навчання – це таке навчання, при якому учні систематично включаються в процес розв’язання проблемних задач, побудованих на змісті програмного матеріалу; це вид процесу, при якому вивчення окремих тем і складових частин будується на основі висунення певних гіпотез, які далі аналізуються і досліджуються на основі самостійної активної діяльності учнів.

Разом з тим й проблемне навчання містить ряд суттєвих недоліків: його не завжди можна використати через непідготовленість учнів чи слабку кваліфікацію вчителя; воно вимагає багато часу на вивчення навчального матеріалу; слабка ефективність при засвоєнні принципово нових розділів складного навчального матеріалу. Сьогодні це ще пов’язане і зі спадом мотивації педагогічної діяльності вчителів та викладачів, і зі зниженням рівня мотивації навчально-пізнавальної діяльності молоді, з кризою в соціально-економічній сфері в Україні взагалі і в освітній сфері зокрема. Напевно, виправдовує себе комплексне використання традиційного та проблемного навчання, які взаємно доповнюють одне одного і компенсують деякі недоліки.

Махмутов М. І. зазначав, що при традиційному навчанні всі знання, вміння і навички отримують шляхом репродуктивного засвоєння, що розвиває пам’ять і навички репродуктивного мислення. У свою чергу, навички продуктивного і творчого мислення є наслідком репродуктивного засвоєння, тобто базою будь-якої творчості є конкретні знання, навички й уміння [142]. Це є суттєвим для вирішення проблеми творчого, особливо математичного розвитку в процесі навчання, але цього ще недостатньо для розвитку пізнавальної самостійності і математичної творчості школярів.

Всебічне і системне вивчення методів в навчанні та проблем їх застосування почалося в 60-ті роки ХХст. З’явились вагомі праці: «Про методи навчання» (М. Н. Скаткін, І. Я. Лернер), де відомі російські вчені навели класифікацію методів навчання, в основу якої покладено ступінь самостійності в пізнавальній діяльності учнів. Вони виділяють такі методи навчання: репродуктивний, пояснювально–ілюстративний, проблемний, евристичний або частково-пошуковий, дослідницький [204, 135].

Ще з давніх часів у навчанні відомі евристичні методи. Їх ще пов’язують з вченням Сократа. У сократівському діалозі шляхом запитань, що допомагають активізувати мислення учня, відбувається відкриття істини, учень у сумісній діяльності з учителем приходить до розв’язання проблеми [223].

Проблемі реалізації евристичних ідей в навчанні математики приділяли увагу Г. Д. Балк, В. Г. Бевз, М. І. Бурда, М. Я. Ігнатенко, Ю. М. Колягин, Д. Пойа, О. І. Скафа, З. І. Слєпкань, Л. М. Фрідман, А.В. Хуторський та ін. Д. Пойа вважає евристикою науку про засоби та методи розв’язування задач [174]. «Задача евристичної навчальної діяльності, – пише А.В. Хуторський, – конструювання учнем своєї освіти через створення продуктів, що входять у зміст цієї освіти. Зовнішній освітній продукт учасника освіти забезпечує отримання ним внутрішнього продукту – зміну знань, досвіду, здібностей, способів діяльності, інших особистістих якостей» [229].

Евристична діяльність, як зазначає О.І. Скафа, створює нові системи дій, відкриває нові для учнів закономірності. Особливістю евристичної діяльності учнів є фактор відкриття, що, як правило, має лише суб’єктивну значимість. Евристики в більшості випадків не усвідомлюються, вони зливаються із продуктами дій, оскільки увага зосереджується на пошуку розв’язання. У зв’язку з цим, з метою підсилення потреб в евристиках доцільно застосовувати спеціально актуалізовані евристичні ситуації, в основі яких перебуває евристична задача. Розвиток евристичної діяльності є сходженням на структурні рівні, де обсяг свідомого і логічно упорядкованого знання, на основі несвідомого, зростає. У процесі розв’язання задач під час проходження евристичних ситуацій відбувається багаторазове перевтілення несвідомого у свідоме і навпаки [205].

Дидактичні витоки навчальної дослідницької діяльності започатковані в дидактичних моделях навчання та виховання Я.А. Коменського. Він вважав за потрібне навчати учнів найголовнішим чином того, щоб «вони черпали знання не із книг, а спостерігали самі, …, щоб досліджували і розуміли самі предмети, а не пам’ятали тільки чужі спостереження і пояснення»[108].

У 1975 р. В. І. Андреєв здійснив спробу визначити межі застосування дослідницького методу в навчанні. На думку вченого, вони залежать від розвитку навчально-дослідницьких умінь і здібностей учнів, змісту навчального матеріалу, його дидактичного і методичного опрацювання [3].

У 80-ті роки однією із значних робіт з дидактики стала книга А.М. Алексюка „Загальні методи навчання”, автор якої розкриває технологічні елементи конкретних методів, у тому числі й дослідницького: види й особливості діяльності викладача при їх застосуванні [9].

Таким чином, починаючи з кінця XIXст., педагоги, методисти, дидакти шукали можливостей застосування наукових досліджень у навчанні, вивчали й аналізували різноманітні аспекти використання дослідницького методу в пізнавальній діяльності учнів.

Дослідницький метод (принцип) в навчанні – метод залучення учнів до самостійних і безпосередніх спостережень, на основі яких вони встановлюють зв’язки предметів і явищ дійсності, роблять висновки, пізнають закономірності. Внесення елементу дослідження в навчальні заняття сприяє вихованню в школярів активності, ініціативності, допитливості, розвиває їхнє мислення, заохочує потребу дітей і підлітків у самостійних пошуках [205].

В.І. Андреєв визначив основні компоненти навчально-дослідницької діяльності учнів, а саме: мотиваційний, змістовий, організаційний, процесуальний , технічний, комунікаційний, результативний. Він виділив декілька рівнів мотивації. Для низького, споглядацького рівня мотивації характерно, що учня приваблюють лише яскраві факти й ефектні досліди або експерименти. Учні, які виявляють споглядально-діяльний рівень мотивації в дослідженнях, цікавляться розв'язанням нескладних дослідницьких завдань, поясненням спостережуваних явищ і фактів, встановленням причинно-наслідкових зв'язків між ними. Вищими є діяльний, діяльно-дослідницький і дослідницький рівні мотивації. Перший з них характеризується однаковим ступенем інтересу, бажанням і прагненням учнів і до дослідницької, і до репродуктивної діяльності. Для другого характерна перевага у учнів інтересу, бажання і прагнення до дослідницької діяльності. Для найвищого — дослідницького рівня мотивації — інтерес учнів до цього виду діяльності є основним [3].

Універсального методу навчання, який би гарантував учневі набуття математичних компетентностей, не існує в принципі, в силу творчого характеру компетентностей. Але разом з тим набуттю математичних компетентностей сприяє дослідницький підхід у навчанні – підхід, при якому ідеями досліджень пронизані всі форми навчальної роботи: лекції, практичні заняття, індивідуальна та самостійна роботи, курсові і наукові проекти [193]. Тому методологічною основою системи розвитку математичних здібностей учнів - членів МАН може виступати *дослідницький підхід у навчанні математики*, який включає в себе наступні складові:

- математизацію проблемної ситуації;
- постановку математичної задачі на основі аналізу проблемної ситуації;
- побудову математичної та алгоритмічної (комп'ютерної) моделі задачі;
- дослідження побудованої моделі задачі аналітичними методами та за допомогою комп'ютерних експериментів;
- формування гіпотез щодо розв'язання задачі;
- експериментальну перевірку гіпотез (або побудову контрприкладів до висунутих гіпотез) аналітичними методами або за допомогою комп'ютерних експериментів;
- дедуктивне доведення справедливості гіпотези;
- інтерпретацію отриманих результатів та їх систематизацію;
- постановку нових задач на основі отриманих результатів [191].

До дослідницьких методів можна також віднести метод проектів, в основі якого лежить розвиток пізнавальних навичок учнів, умінь самостійно конструювати свої знання, розвиток критичного мислення. Цей метод орієнтований на самостійну діяльність учнів.

Тому мета застосування дослідницької технології в навчанні — набуття учнями досвіду дослідницької роботи в пізнавальній діяльності; об'єднати розвиток їх інтелектуальних здібностей, дослідницьких умінь і творчого потенціалу й на цій основі формувати активну, компетентну, творчу особистість. Для досягнення цієї мети потрібно сформувати стійкий інтерес учнів до пізнавальної дослідницької діяльності, забезпечити високий рівень їх дослідницьких умінь, знання дослідницьких процедур, розуміння ціннісної ролі досліджень в удосконаленні знань. Дослідницький досвід учнів має відповідати науковим методам пізнання, розширювати зміст їхньої освіти й удосконалювати зміст їхньої освіти та підготовку до майбутньої професійної діяльності.

Математичні здібності. Погляди на природу і сутність математичних здібностей або математичного мислення висловлювалися багатьма математиками та методистами як зарубіжними так і вітчизняними.

Основним питанням в дослідженнях математичних здібностей було і залишається питання про сутність цього складного психологічного утворення. В цьому плані можна виділити три важливі проблеми:

1. *Проблема специфічності математичних здібностей*. Чи існують математичні здібності як специфічне утворення, відмінне від категорії загального інтелекту? Чи є математичні здібності якісною спеціалізацією психічних процесів та властивостей особистості? Інакше кажучи, чи можна стверджувати, що математична обдарованість – ні що інше як загальний інтелект плюс інтерес до математики та бажання займатися нею?

2. *Проблема структурності математичних здібностей*. Чи є математична обдарованість унітарним (єдиним нерозкладним) або інтегральним (складним) утворенням? В останньому випадку можна ставити питання про структуру математичних здібностей або про компоненти цього психічного утворення.

3. *Проблема типологічних різниць у математичних здібностях.* Чи існують різні типи математичної обдарованості, чи тільки має місце різниця в інтересах та нахилах до тих або інших розділів математики?

Стосовно першої проблеми (хоча і неможна констатувати наявність спільної думки) більшість вчених, серед яких Ж. Адамар [2], А. Пуанкаре [189], В. А. Крутецкий [115], А. М. Колмогоров [106], схиляються на користь визнання специфічності математичного таланту. Досліджень з виявлення компонентів математичних здібностей є чимало, але вони не дають чіткого уявлення про структуру математичних здібностей. Дослідники все ж таки виділяють наступні основні компоненти: просторовий, логічний, числовий і символічний, які складають «ядро» математичного мислення. Щодо питання про типологію математичних здібностей, то найбільш розповсюдженою в психології є типологія математичних талантів, яка базується на протиставленні дискурсивного, розгорнутого в усіх своїх ланках процесу мислення, інтуїтивному процесу мислення.

Вагомий внесок в розробку проблеми про математичні здібності зробив В. А. Крутецкий. Математичні здібності він бачить у двох аспектах [115]:

– як творчі (наукові) здібності – здібності до наукової математичної діяльності, що дають нові та об’єктивно значимі для людства результати, досягнення, вартісний в суспільному розумінні продукт;

– як навчальні здібності – здібності до вивчення математики, швидкого та успішного оволодіння відповідними знаннями, вміннями, навичками.

У своєму дослідженні В. А. Крутецький ставить запитання: чи можуть (якщо так, то за яких умов) здібності до засвоєння математики вважатися в певному розумінні проявом науково-творчих здібностей і дає відповідь, що різниця між цими двома рівнями діяльності не носить абсолютного характеру. Розв'язування в рамках шкільного навчання нестандартних задач, формулювання теорем, самостійна постановка та розв'язування математичних проблем – усе це є проявами математичної творчості. Тому здібності до засвоєння математики є проявом математичних здібностей [115].

Далі В. А. Крутецький наводить таку схему структури математичних здібностей учнів шкільного віку, яка розглядається у відповідності з етапами розв'язування задач [115, с. 385]:

1) за одержанням математичних відомостей – здатність до формалізованого сприйняття математичного матеріалу;

2) за способами опрацювання математичних відомостей – здатність до логічного мислення в галузі кількісних та просторових відношень, числової та знакової символіки; здатність до швидкого та широкого узагальнення математичних об'єктів, відношень, дій; здатність мислити згорнутими структурами; гнучкість процесів мислення в математичній діяльності; прагнення до простоти, економності та раціональності розв'язання; здатність до швидкої перебудови процесу мислення, переключення ходу думки з прямого на зворотній;

3) за зберіганням математичних відомостей – математична пам'ять;

4) загальний синтетичний компонент – математична спрямованість розуму.

Виділені компоненти тісно пов'язані, впливають один на одного і утворюють в сукупності єдину систему, цілісну структуру, своєрідний синдром математичної обдарованості, математичний склад розуму. Кожен з цих компонентів математичних здібностей необхідно цілеспрямовано розвивати не лише на уроках, а й у позакласній роботі.

В. А. Крутецький так визначив математичні здібності: «Під здібностями до вивчення математики ми розуміємо індивідуально-психологічні особливості (перш за все особливості розумової діяльності), що відповідають вимогам навчальної математичної діяльності і обумовлюють за інших рівних умов успішність творчого оволодіння математикою як навчальним предметом, зокрема відносно швидке, легке і глибоке оволодіння знаннями, вміннями та навичками в області математики» [115, с. 91].

Як правило, говорячи про розвиток мислення в процесі навчання математики, це питання зводять до розвитку специфічного математичного мислення. Математичне мислення складається з ряду вмінь, рівень сформованості яких визначає певні риси особистості як стан частини її математичної культури: вміння сприймати інформацію, вміння раціонального запам'ятовування, логічного осмислення матеріалу та виділення в ньому головне, вміння працювати самостійно, вміння здійснювати самоконтроль у навчально-пізнавальній діяльності [148].

Під *математичним* способом або *стилем мислення* розуміють:

1) особливу форму роздумів, за допомогою яких математика проникає в науки про зовнішній світ і навіть в роздуми про повсякденні справи;

2) ту форму роздумів, до якої вдаються математики у своїй власній галузі.

Хоч мислення не зводиться до набору механічно застосовних правил і не може бути розділеним «перегородками» на мислення історичне, філософське, математичне і т. д., прийнято розуміти, що мислити математично – це мислити більш конкретно і спрямовано, вміти абстрагувати, узагальнювати, оперувати знаками, мислити в термінах змінних функцій [40].

Відомий радянський математик О. Я. Хінчин вказав на чотири характерні *ознаки математичного мислення*:

1. «Для математики характерне доведене до межі домінування логічної схеми роздумів».
2. «Лаконізм, свідоме прагнення завжди знаходити найкоротший логічний шлях, що веде до даної мети, нещадне відкидання всього, що не абсолютно необхідне для бездоганної аргументації».
3. «…чітке розчленування процесу аргументації». Для цього в математичних роботах широко використовується такий прийом, як нумерація понять і суджень, а перед кожним абзацом ставиться особлива позначка, яка вказує, який випадок з усіх розглядається в даному абзаці.
4. Скрупульозна точність символіки. «Кожний математичний символ має строго визначене значення: заміна його іншим символом чи переставляння на інше місце, як правило, спричиняє спотворення, а інколи і повне зникнення сенсу даного вислову» [226, с. 141–144].

Б. В. Гнеденко виділив наступні властивості математичного мислення:

1) здатність помічати нечіткість міркування, відсутність ланок у доведенні;
2) звичку до повноцінної логічної аргументації;
3) чітку розмежованість шляху міркувань;
4) лаконізм;
5) точність символіки [63].

А. М. Колмогоров у роботі «О профессии математика» [106] відмічав, що здібності до механічного запам’ятовування великої кількості фактів, формул, додавання або множення в умі многозначних чисел не мають відношення до математичних здібностей. Далі він зазначав, що ці здібності проявляються зазвичай рано та потребують подальшого неперервного розвитку. До математичних здібностей А. М. Колмогоров відносив:

1) здібність перетворення виразів, знаходження вдалих шляхів для розв’язання задач, відмінних від стандартних;
2) геометричне уявлення або «геометричну інтуїцію»;
3) мистецтво послідовного правильного логічного міркування [106].

Тобто, можна сказати, що А. М. Колмогоров відокремив три компоненти математичних здібностей: алгоритмічний, геометричний і логічний.

На основі концепції А. М. Колмогорова та аналізу математичних задач Е. Ж . Гингулис розробив наступну деталізацію [61]:

1) під геометричним компонентом здібностей розуміють: здатність вилучати необхідну інформацію з даної конфігурації шляхом її аналізу або доповнення, включаючи пошук ідей розв’язання задач за допомогою рисунків, моделей фігур або уявлення; здатність до переводу на мову геометрії тої чи іншої

задачі, звернення до наочних образів в процесі розв’язання негеометричних задач;

2) алгебраїчні здібності включають в собі: здатність використовувати відомі алгоритми і методи в конкретній ситуації; здатність звести задачу до виконання більш елементарних дій; здатність довести до кінця запланований план розв’язання, використовуючи аналітичні методи, що відносяться до алгебри, тригонометрії, векторної алгебри, аналізу;

3) логічні здібності виражаються в деталізації з деякого загального положення та у дослідженні всіх частинних випадків, у створенні економної та несуперечливої схеми розв’язання, у проведенні доказових міркувань.

У роботах А. Пуанкаре [188], Ж. Адамара [2] зустрічаються наступні ідеї. Хід процесу мислення вченого може усвідомлюватися не на всіх своїх ланках. Ученому властиво не тільки «розгорнуте» дискурсивне мислення, але й так зване інтуїтивне мислення, що протікає у скороченому, «згорнутому» вигляді. Воно відкриває істотні зв’язки раніше за дискурсивне мислення та встигає довести їх відповідність. Усе це часто сприймається як несвідома творча робота.

Психологічними принципами *формування математичного мислення* є використання навчальних задач. Кажучи про активізацію мислення, не можна забувати, що при розв’язуванні задач учні не лише виконують побудови, перетворення та запам’ятовують формулювання, але й навчаються чіткому мисленню, вмінню розмірковувати, зіставляти та протиставляти факти, знаходити в них загальне і відмінне, робити правильні висновки [206].

Правильно організоване навчання розв’язуванню задач привчає до повноцінної аргументації із посиланням у відповідних випадках на аксіоми, введені означення і раніше доведені теореми та має активізувати розумову та пошукову діяльність учнів [226]. Отже, необхідні такі задачі та вправи, які б активізували розумову та пошукову діяльність.

Задачі поділяють на наступні види: задачі, розраховані на відтворення (при їх розв’язуванні спираються на пам’ять та увагу); задачі, розв’язування яких приводить до нової, невідомої до цього думки, ідеї; творчі задачі [92].

Розглянемо деякі з них.

1. Задачі та вправи, що включають елементи дослідження. Найпростіші дослідження при розв’язуванні задач треба пропонувати, починаючи вже з перших занять, а згодом необхідно давати не лише задачі з елементами досліджень, але й ті, що включають дослідження як обов’язкову складову частину . Такі дослідження необхідно включати у розв’язування багатьох задач не тільки геометричного характеру. Задачі та вправи з виконанням деяких досліджень можуть знайти своє місце у майбутніх науково-дослідницьких роботах учня.

2. Задачі на доведення факту чи його спростування здійснюють суттєвий вплив на розвиток мислення учнів. Саме при виконанні доведень відточується логічне мислення, розроблюються логічні схеми розв’язування задач, в учнів виникає потреба обґрунтувати математичні факти.

3. Задачі та вправи на пошук помилок також відіграють суттєву роль у розвитку математичного мислення учнів. Такі задачі допомагають розрізняти дуже схожі поняття, привчають до математичної строгості, витончують математичну культуру. Перші кроки у знаходженні помилок мають бути не

складними.

Психологи встановили, що розв'язування однієї і тієї ж задачі декількома способами приносить більше користі, ніж декілька стереотипних задач підряд. Розгляд різноманітних варіантів розв'язання, уміння обрати з них найбільш раціональні, витончені свідчать про вміння учня мислити аналітично, робити правильні умовиводи. Різні варіанти розв'язання однієї задачі надають можливість учневі застосовувати весь арсенал його математичних знань. Таким чином, розгляд різних варіантів розв'язання задачі виховує ще гнучкість мислення. Пошук раціонального варіанта розв'язання лише на перших порах потребує додаткового часу, а в подальшому ці затрати себе виправдовують [92].

Ще один важливий момент – складання задач самими учнями. Свідоме вивчення математики та розвиток мислення дітей стимулюється самостійним конструюванням математичних задач. При цьому, виховується самостійність та розвивається їхня творча розумова активність [107]. Конструювання задач учнями змушує їх використовувати більший обсяг інформації, застосовувати міркування, обернені до тих, що застосовуються при звичайному розв'язуванні задач. Отже, при складанні задач учень застосовує логічні засоби, відмінні від тих, за допомогою яких розв'язуються задачі, відкриває нові зв'язки між об'єктам. Але не можна доводити конструювання задач до навички.

Як зазначає Г. С. Костюк [114] та інші дослідники, рушійними силами розвитку особистості в будь-якому віці є суперечності, що виникають між потребами та можливостями їх задоволення в реальних ситуаціях соціальної взаємодії. У зв'язку з цим, для розвитку математичних здібностей доцільно створювати такі проблемні ситуації, навчальні протиріччя, що приводять до необхідності постановки та розв'язування учнями нового типу задач.

Комплекс вправ, що складається із задач різного типу, шляхом поступового ускладнення розумових дій може сприяти вивченню конкретних понять, теорем, і разом з цим у кінцевому результаті привести до якісних та кількісних змін у рівні розвитку мислення учнів та розвитку їх здібностей.

Отже, математика як дисципліна на уроці та у рамках МАН має невичерпний виховний і розвивальний потенціал саме в задачному фонді. Тільки цілеспрямовано підібрані задачі спроможні розбудити (та підтримувати) мислення учня на мобілізаційно-діяльному рівні, якщо складність задач дозувати так, щоб у розв'язувача не створювати враження безнадійності. Розв'язавши задачу, учень переживає емоційне піднесення, в нього виникає інтерес до самостійного пошуку розв'язків. Є багато свідчень видатних математиків про те, що на хвилі саме емоційного піднесення вирішувалась їхня майбутня творча доля.

Методичні і психологічні аспекти математичних і дослідницьких здібностей висвітлювалися в дисертаційних дослідженнях Г. Г. Колінець [105], Л. Ф. Мірошниченко, Р. Н. Мойсеєнко, О. С. Чашечникової [230], зокрема у рамках проблем розвитку математичних здібностей учнів основної школи, психологічних передумов формування математичних дослідницьких здібностей у старшокласників, формування готовності вчителя до дослідницької педагогічної діяльності.

Встановлено, що математичні дослідницькі здібності є підструктурою загальної математичної наукової спрямованості особистості на науковий пошук, відкриття закономірностей, вміння знаходити нестандартні або нові методи розв' язання задач. Математично спрямована наукова діяльність людини пов'язана з розвитком аналітико-синтетичної діяльності, вмінням людини знаходити нові факти і узагальнювати їх, виявляти причинно-наслідкові залежності, робити висновки. Структурними психологічними компонентами математичних дослідницьких здібностей є креативна спрямованість особистості, дивергентний спосіб мислення, досить високий рівень інтелекту та мотиваційно-вольова забезпеченість математичної діяльності людини [105].

При плануванні процесу розвитку математичних здібностей необхідно враховувати вікові періоди, коли умови для розвитку тих або інших видів здібностей будуть найбільш оптимальними (на основі робіт В. А. Крутецького [115] та Л. С. Виготського [51]):

– *формалізоване сприйняття математичного матеріалу*. Цей компонент починає проявлятися в учнів вже у 3–4 кл. Діти починають цікавитися не просто окремими величинами, а саме відношенням величин. Виділяючи відношення, більш сильні учні починають диференціювати дані;

– *узагальнення математичного матеріалу*. В молодшому шкільному віці спостерігається відносно простий вид узагальнення – вміння підвести частинний випадок під загальне правило. Як правило, тільки на початку середнього шкільного віку формується узагальнення індуктивного характеру – від частинного до невідомого загального;

– *згорнутість мислення*. Вказаний компонент математичних здібностей властивий в основному учням середнього і старшого шкільного віку. Здібні учні 8–9 кл. та особливо учні старших класів проявляють своєрідну «далекоглядність» при розв'язуванні задач та велику швидкість переробки математичної інформації, тобто розмірковують вже згорнутими структурами;

– *гнучкість та критичність мислення*. Здібні до математики учні 5–6 кл. демонструють гнучкість процесу мислення в ході пошуку інших шляхів розв'язування задачі (частіше за проханням вчителя). У здібних до математики підлітків та старшокласників перебудова сформованих способів мислення здійснюється зазвичай швидко;

– *прагнення до раціоналізації.* Вказана тенденція починає помітно проявлятися лише в средньому шкільному віці. Якщо для учнів із середніми здібностями мета полягає в тому, щоб розв'язати дану задачу, то для здібних до математики вона полягає ще і в тому, щоб розв'язати її найбільш економним способом. Особливого розвитку відмічений компонент досягає в старшому шкільному віці. Після першого розв'язання задачі зазвичай починаються творчі пошуки, направлені на дослідження та покращення знайденого способу, з метою знайти найбільш економний і раціональний. Учні проявляють свої дослідницькі якості.

На основі результатів дослідження Г. Г. Колінець [105] виділимо такі психологічні передумови формування математичних дослідницьких здібностей учнів у процесі навчання:

1)діагностика наявного рівня математичних і дослідницьких здібностей;

2)проблемно-евристичне навчання та особлива організація навчального процесу, що сприятиме розвиткові самостійності учнів, творчому підходу до вивчення математики;

3)дотримання послідовного виконання рівнів у володінні методами досліджень – репродуктивного, репродуктивно-дослідницького, дослідницького;

4)збагачення змісту навчального матеріалу задачами творчого, зокрема дослідницького характеру; даними історії великих відкриттів та невирішених проблем в галузі математики; фактами, що розкривають наукову значимість знань і дослідницьких умінь; матеріалом, який показує раніше вивчене учнями під новим кутом зору і т. п.;

5)диференційований підхід у процесі вивчення математики, а саме використання диференційованих навчально-дослідницьких завдань з різним ступенем допомоги та різної складності, що успішно сприятиме поступовому переведенню учнів з нижчого на вищий рівень дослідницької роботи;

6)організація навчально-пізнавальної діяльності пошукового характеру на уроках та в позаурочний час, яка б включала: визначення перспектив розвитку математичних і дослідницьких умінь з урахуванням індивідуальних особливостей учнів; здійснення формування у школярів постійного прагнення до пошуку; розвиток інтересу та емоційної активності в процесі розв’язання поставлених задач, що тісно пов’язано з успіхом творчої діяльності учнів;

7)однією з найважливіших умов, яка впливає на успішне формування математичних і дослідницьких здібностей школярів, повинен стати поступовий і паралельний перехід від масово-репродуктивного до індивідуального підходу у роботі з учнями.

Таким чином, під *математичними здібностями будемо розуміти спеціальні особливі здібності, які необхідні для успішного виконання математичної діяльності*. Математичні здібності не є єдиним утворенням, а мають складну структуру. Успішність математичної діяльності залежить не від окремо взятої здібності, а від комплексу здібностей. Математична обдарованість передбачає наявність природних передумов та проявляється тільки в творчій діяльності. Однак не слід забувати, що кожен учень володіє математичними здібностями тільки в деякій мірі. Оцінити та розвити ці здібності – не легка задача педагогів. *Розвинути* математичні здібності для нас буде означати: озброїти дитину способом математичної діяльності, дати йому в руки ключ – принцип виконання роботи, створити умови для виконання і розвитку його математичної обдарованості. Відповідно до діяльнісного підходу, кожен із компонентів *математичних здібностей* має здатність до розвитку завдяки *організації математичної діяльності*, в основі якої система задач, метод навчального та наукового пізнання – *математичне моделювання.* З іншого боку, успішність і продуктивність математичної діяльності значною мірою залежать від рівня розвитку особистісних психічних новоутворень – математичних здібностей. Важливу роль у цьому складному процесі відіграють соціальні чинники, мотиваційний та ціннісний компоненти суб’єкта діяльності. А математичні здібності є багаторівневим динамічним психологічним утворенням, яке забезпечує успішність у математичній науково-дослідницькій діяльності.

1.2. Діяльність МАН – як форма роботи з обдарованими дітьми

Великі можливості для творчої самореалізації школярів відкриває позашкільна освіта як одна зі складових частин системи безперервної освіти, спрямована на розвиток здібностей, обдарувань дітей, задоволення їхніх інтересів , потреб у професійному самовизначенні. Позашкільна виховна робота – це спеціально організована педагогічна діяльність, яка має яскраво виражену власну специфіку впливу, що дає їй певні переваги перед іншими засобами виховання [215]. Це, передусім, *добровільність* участі дітей у позашкільній роботі; *диференціація* їх за інтересами і спрямованістю на певний тип діяльності; *постановка конкретних пошукових завдань* перед кожним вихованцем; оволодіння знаннями і вміннями *в індивідуальному темпі* тощо. Такий характер навчального процесу дозволяє вирішити одну з головних завдань позашкільного навчання – пошук, розвиток і підтримка здібних, обдарованих, талановитих дітей.

У системі позашкільного навчання математики слід виділити наступні форми навчання обдарованих дітей:

1) позакласна робота в школі (математичні гуртки, спецкурси, вечори);
2) очно – заочні фізико-математичні школи;
3) система творчих конкурсів:
   – математичні олімпіади;
   – міжнародний конкурс «Кенгуру»;
   – ТЮМ – турнір юних математиків;
4) канікулярні збори, табори;
5) учнівські науково-практичні конференції;
6) науково-дослідницькі роботи та проекти школярів у структурі МАН.

Індивідуально-особистісна основа діяльності організацій цього типу дозволяє задовольнити запити конкретної дитини, використовуючи потенціал їх вільного часу та очевидно націлена на розвиток математичних здібностей.

Об’єднати всі ці форми позакласної роботи в певній мірі може Мала академія наук – структурна складова системи позашкільної освіти, яка здійснює освітню і наукову діяльність у позаурочний та позашкільний час завдяки своїм цілям та завданням та напрямком діяльності, об’єднуючи за принципами добровільності й доступності учнів загальноосвітніх навчальних закладів ІІ-го та ІІІ-го ступенів, ліцеїв, гімназій, вищих навчальних закладів І-ІІ рівнів акредитації та інших типів освітніх і наукових закладів, віком до 21 року.

Соціально-педагогічна модель Малої академії наук. До позашкільних навчальних організацій, основним напрямом діяльності яких є дослідницько-експериментальний, належить МАН. Основними завданнями Малої академії наук України є:

– пошук, розвиток та підтримка здібних, обдарованих, талановитих учнів;

– виховання свідомого громадянина України;

– створення умов для творчого, інтелектуального, духовного самовдосконалення учнів та його стимулювання;

– формування в учнів умінь та навичок культури наукового дослідження;
– формування соціально-адаптованої особистості, її громадського досвіду;
– пропаганда наукових досліджень учнів та захист їх авторських прав і інтересів;
– задоволення потреб учнів у професійному самовизначенні та творчій самореалізації [42].

Керівництво здійснюється Президією Малої академії наук, на даному етапі президентом МАН являється С. О. Довгий, депутат Верховної Ради, д-р фіз.-мат. наук [182]. Президентами регіональних відділень МАН є провідні вчені, ректори університетів. Секцію математики МАН України очолює директор Інституту математики НАН, академік НАН А.М.Самійленко. У роботі МАН статутом *передбачено* активну участь *науковців*, викладачів ВНЗ в якості керівників секцій, гуртків, консультантів, членів журі конкурсів-захистів МАН.

Територіальні відділення, районні, міські наукові товариства учнів МАН функціонують, як правило, на базі позашкільних закладів, а також загальноосвітніх, вищих та інших наукових і навчальних закладів як їх структурні підрозділи або як секції, гуртки, клуби науково-дослідницького напряму діяльності [42]. Основною ланкою, наприклад, *Київського обласного територіального відділення* МАН України є наукові товариства учнів, які організовують свою діяльність у формі регулярної роботи наукових гуртків, секцій, клубів, факультативів, навчальних лабораторій, індивідуальної роботи школярів під керівництвом науковців, наукових конференцій, колоквіумів, симпозіумів.

МАН забезпечує реалізацію таких основних стратегій роботи з обдарованими дітьми, як: стратегія «дослідницького навчання» (головною метою якого є активізувати навчання, надати йому дослідницького характеру); стратегія «проблематизації» (передбачається орієнтація на постановку перед школярами проблем різного характеру); стратегія «індивідуалізації» (створення умов для повноцінного прояву й розвитку специфічних особистісних функцій суб’єктів освітнього процесу) [42].

Педагогічний процес у МАН має свої особливості, які відрізняють його від навчання в школі. Перш за все це форми проведення занять – лекторії з відповідних галузей науки, профільні гуртки, семінарські заняття з проблемних питань, індивідуальна науково-дослідна робота. Навчальні програми гуртків, секцій, лекторіїв охоплюють такі галузі знань і практичної діяльності, що виходять за межі шкільної програми, враховуючи індивідуальні інтереси та творчі можливості конкретних дітей [75]. Навчально-виховний процес у наукових секціях здійснюється за навчальними планами й програмами, затвердженими адміністраціями навчальних закладів і погодженими з відповідними органами управління освітою і наукою [42].

Особливо важливою і перспективною, на наш погляд, є індивідуальна робота учнів під керівництвом вчителів або учених. Організація науково-дослідницької діяльності школярів дає їм можливість самостійно та цілеспрямовано працювати, розвиває креативне мислення, вдосконалює систему теоретичних знань, практичних вмінь та навичок. Важливо, щоб робота відповідала інтересам учнів, їх віковим, індивідуальним та інтелектуальним можливостям. Базами для виконання дослідницької роботи старшокласників можуть бути кафедри ВНЗ, академічні установи, наукові бібліотеки, архіви [21].

Діти завжди дуже серйозно й охоче працюють в лабораторіях поруч із науковцями, пишаються тим, що зробили хоч і маленьке, але таке важливе відкриття. Вони мають перед собою приклад – як треба працювати, розуміють, що їхня праця буде використовуватись і в подальшій роботі цих лабораторій.

Головним є те, що учні вчаться ретельно проводити дослідження, оволодівають складними методами обробки результатів і переконуються: справжня наука не може бути надуманою, а результати завжди ґрунтуються на дійсно доведених фактах. Крім того, учні вчаться шукати і реферувати наукову літературу, писати звіти, захищати свої ідеї, обстоювати власну позицію, брати участь у наукових дискусіях [155]. Вони мають можливість обмінюватися досвідом своєї роботи, виступаючи на конкурсах-захистах МАН. Тобто МАН – це шлях до створення кращих можливостей для самореалізації обдарованих дітей, формування атмосфери наукового спілкування.

Важливим чинником для забезпечення ефективності роботи соціально-педагогічної моделі МАН є систематизована психолого-педагогічна підготовка науково-педагогічних кадрів до роботи з інтелектуально обдарованою молоддю. Створення ситуації успіху, атмосфери довіри й співпраці стало основними ознаками високого професіоналізму організаторів пошуково-дослідницької роботи учнів. Важливим фактором є вміння дорослих вчасно підтримати учнів, заохотити їх до активної діяльності. Вдало підібрані форми та методи навчально-виховної роботи стимулюють мислення дітей, сприяють їхньому успіху в пошуковій, експериментальній, дослідницькій діяльності. Створення умов творчої партнерської співпраці дозволяє будувати процес досліджень з максимальним рівнем самостійності учнів [10]. Діти бачать перспективу особистісного розвитку, у них формуються своєрідні ідеали, виникає необхідність у науковому пізнанні й дослідництві. Учні, які виконували дослідження в МАН, як правило, продовжуватимуть їх у ВНЗ. Це теж стає їхньою внутрішньою потребою, умовою самореалізації.

Практичний досвід роботи регіональних відділень МАН (автор також працює в Київському територіальному відділенні МАН з 1998 р.), дозволяє переконатися в тому, що *основне завдання* діяльності системи МАН полягає *в створенні умов* для розвитку та *подальшого саморозвитку* творчої особистості. Такі умови, насамперед, передбачають набуття досвіду творчої діяльності як пізнавального процесу: вміння сформулювати проблеми, скласти на їх основі творчі дослідні задачі, розв’язати їх у межах прийнятної моделі, зробити та підтвердити висновки дослідження.

Особливістю роботи в секціях МАН має бути те, що учень, окрім підготовки до предметних олімпіад і змагань, де він поглиблює знання з предмета , навчаючись розв’язувати нестандартні задачі підвищеної складності з різних роз ділів, ще вчиться створювати дослідницькі задачі та проводить *довготривале й копітке дослідження, опрацювання конкретної проблеми*. Тобто відбувається своєрідна еволюція в підході до створення та розв’язання методом спроб і помилок не тільки в моделі розв'язку, а й у запровадженні перевірки своїх результатів та їх застосуванні. Ось чому робота шкільного відділення МАН має робити основний акцент на гурткову і факультативну роботу, але із застосуванням елементів дослідження, де можна реалізувати як колективну, так і індивідуальну форми роботи зі школярами, і де математика є провідною дисципліною для досліджень юних науковців, оскільки чимало профілів дослідної діяльності у системі МАН передбачають базовим навчальним предметом математику.

Отже, узагальнюючи, підкреслимо, що навчання в секціях МАН фізико-математичного відділення і відділення обчислювальної техніки та програмування, у яких базовим навчальним предметом є математика, вимагає *поглиблення знань з математики*, що є однією з головних *дидактичних умов* розвитку математичних і дослідницьких здібностей при навчанні математики в МАН. Основою такого поглиблення виступає, як вже відмічалося, *задача*, оскільки саме задача є універсальною складовою завдань будь-якого рівня і в навчанні, і в дослідницькій діяльності в галузі математики.

Дослідницька діяльність у МАН є наближеною до науково-дослідної діяльності, є її початком і, як показує практика, найчастіше має продовження в подальшій науковій діяльності. Діяльність у секціях МАН вчить учнів не тільки методам дослідницької роботи, а й грамотному висловлюванню думок при дослідженні, оформленню роботи, підготовці до доповідей на засіданнях наукових секцій, навіть написанню наукових статей. Дискусії навколо доповідей юних науковців, що виникають при обговоренні результатів дослідження, надають учням неабиякий досвід спілкування в наукових питаннях: вчать нестандартному, критичному мисленню, вмінню відстоювати свою точку зору, аргументувати, задавати запитання щодо суті досліджень товаришів. Колективне обговорення проблем у колі учнів, а також діалог з керівниками-науковцями і вчителями природно призводить до таких ефективних форм розв'язання проблем, як «мозковий штурм» [24].

Таким чином, дослідницький метод у методичній системі «Школа – МАН» робить навчання відкритим у реальний світ та забезпечує інтелектуальний розвиток учнівської молоді, підготовку до активної діяльності у галузі науки.

Підсумовуючи, відзначимо відмінності та переваги МАН як позашкільного закладу нового типу:

1) за цілями та завданнями: виявлення, розвиток та підтримка талановитих учнів; сприяння поглибленню освіти учнів шляхом залучення до творчої діяльності; створення умов для розвитку та впровадження наукової роботи і наукових досліджень серед молоді через фахову освіту; забезпечення державної підтримки юних науковців; підготовка до активної діяльності в галузі науки та задоволення потреб учнів у професійному самовизначенні [42];

2) за організаційними та виховними функціями: високий професійний та науковий рівень керівників гуртків і секцій МАН; можливість учнів долучитися до вирішення багатьох проблем науки, технологій; створення середовища (творчих різновікових колективів) для розвитку дослідницьких здібностей та творчого мислення дітей; можливість індивідуального та фахового навчання

основам науково-дослідної роботи, що відповідає усім вимогам особистісно-орієнтованого навчання; створення атмосфери співтворчості, змагання та здорової конкуренції при участі у конкурсах-захистах МАН;

3) за домінуючими методами навчання: проблемність викладення навчального матеріалу як шлях до дослідництва учнів; дослідницький підхід при вивченні великого кола проблем; інтеграція математики з інформатикою як наслідок комплексності поставлених для розв'язання проблем; необхідність обмірковування, заглиблення у проблему, самостійного складання творчих задач, вибір моделей, оцінка, перевірка, аналіз результатів дослідження; інтеграція шкільного навчання з дослідницькою діяльністю за вибором, згідно з власним інтересом до конкретних проблем [23].

МАН – це саме той майданчик для обдарованої дитини, де вона може:

1) спробувати свої сили в науково-дослідній діяльності;

2) розкрити свій талант і раніше знайти себе;

3) отримати фахову підготовку до олімпіад, турнірів та конкурсів з математики, відвідуючи гурток з математики в МАН, де мають вчити не тільки розв'язувати нестандартні задачі, а й прикладному та дослідницькому аспектам математичної науки;

4) відвідувати консультації за індивідуальним планом, завдяки чому створюється можливість особистістно орієнтованого навчання з різних питань математики;

5) самостійно створювати дослідницькі задачі та проводити довготривале й копітке власне дослідження конкретної проблеми.

Діти, навчаючись в МАН, мають усвідомити, що їм самим доведеться вирішувати якою справою займатися: хтось вирішив присвяти себе олімпіадному руху і тоді він відвідує тільки гурток з математики і не займається дослідною роботою, а дехто бажає займатися тільки дослідною роботою. Важливо, щоб учні МАН зрозуміли просту істину: наука і практика тісно пов'язані між собою та завжди розвиваються і в майбутньому їм знадобляться набуті знання, навички дослідницької роботи, вміння самостійно проводити експерименти та перевіряти гіпотези, працювати з науковою літературою, бо декому доведеться самому прийняти безпосередню участь у вдосконаленні науки і техніки, використовувати різні методи і закони при розв'язанні задач суспільного значення.

Отже, Мала академія наук – це саме та організація для школярів з підвищеним рівнем креативності та демократичності, яка необхідна для їх творчої діяльності та виступає зв'язуючою ланкою між школою, вищими навчальними закладами (ВНЗ) і наукою, для якої має бути створена нова педагогічна технологія розвитку творчих здібностей учнів.

1.3. Аналіз стану розвитку математичних здібностей школярів – членів МАН

У Національній доктрині розвитку освіти в Україні у XXI ст. наголошується на необхідності формування інтелектуального потенціалу держави. Відтак важливим завданням освіти є підвищення ефективності освітніх систем, орієнтованих на формування творчих здібностей дітей та учнівської молоді [77]. Як вже зазначалося, чільне місце серед них займає Мала академія наук України, що історично сформувалась як складова системи позашкільної освіти. Діяльність МАН України спрямована на формування творчих здібностей школярів у процесі дослідницької роботи й має базуватися на тісній співпраці загальноосвітніх, позашкільних і вищих навчальних закладів.

Аналіз наявної психолого-педагогічної та методичної літератури показує, що хоч питаннями розвитку інтелектуального потенціалу, творчих здібностей учнів на уроках математики та поза ними займалась значна кількість дослідників, проте питання про форми організації позакласної роботи, розробка системи розвитку математичних здібностей учнів – членів МАН, що впливатимуть на розвиток творчих здібностей особистості, порівняно мало висвітлено. Хоча існують значні дидактичні напрацювання стосовно методики позашкільного навчання і виховання, на жаль відсутні методичні науково обґрунтовані рекомендації щодо цілеспрямованого формування та розвитку математичних здібностей учнів в процесі такого навчання. І на державному рівні модель МАН України не розглядається як функціональний багаторівневий комплекс педагогічних умов для формування творчих здібностей учнівської молоді. У контексті зазначеного актуальність нашого дослідження визначається необхідністю розв'язання проблеми – зміни традиційних підходів до організації навчально-виховної роботи з учнями в процесі вивчення математики у Малій академії наук, що в свою чергу вказує на необхідність у наданні цьому процесу системного і особистісно орієнтованого спрямування та підсилює актуальність проблеми розвитку математичних здібностей учнів МАН.

Для здійснення такого підходу необхідно усвідомити, що, окрім труднощів, пов'язаних із загальними проблемами шкільної та позашкільної освіти, об'єктивно існують певні перешкоди й складності при вивченні математики:

– програма загальноосвітньої середньої школи з математики в цілому постійно змінюється. Обмін думками та спілкування з учнем на рівні дискусій з деякої теми найчастіше припадають на позаурочний час, що в традиційному навчанні математики рідко пов'язується з цілеспрямованою пошуково-дослідницькою діяльністю;

– обмеженість навчальної програми та часу на вивчення математики в середній загальноосвітній школі виводить поглиблення навчання та пошуково-дослідницьку діяльність учнів за межі уроку. Справжнє дослідження потребує неабияких зусіль, довготривалого осмислення, роботи з науковою літературою, консультацій фахівців тощо;

– Мала академія наук організаційно відокремлена від навчання в школі і не розглядається як цілісна навчально-виховна система на державному рівні. Тому видається досить складним забезпечити якісне і ефективне навчання математики в МАН без узгодження і взаємодії його з навчанням у школі;

– коли визначена мета навчання в МАН, то виникає природнє питання: як її досягти? Якою повинна бути методика викладання ?

Проблема дослідження полягає в усуненні суперечності, між існуванням структури МАН та відсутністю відповідного науково-методичного забезпечення ефективного розвитку математичних здібностей учнів під час навчання математики в діяльності Малої академії наук.

Процес формування та розвитку математичних здібностей школярів у системі МАН, як свідчать результати нашого дослідження, значною мірою залежить від ефективного використання змісту навчання. Навчально-виховний процесс більшості територіальних відділень насьогодні орієнтований на надання учням поглиблених знань та формування вмінь і навичок пошуково-дослідницької діяльності переважно за програмами факультативних курсів неадаптованими до роботи в МАН, (приблизно 80% від загальної кількості програм). Характерними ознаками навчально-виховного процесу є інтенсифікація ; упровадження форм навчання, що базуються на якісно новому змісті; стимулювання навчання можливістю проводити власне дослідження, краще виступати на різних математичних конкурсах. За таких умов забезпечується глибоке опанування предметом математика, оволодіння прийомами навчально-пізнавальної та дослідницької діяльності. Проте навчально-виховний процес є недостатньо ефективним, оскільки не забезпечує повною мірою розкриття особистісного творчого потенціалу учнів.

На підставі результатів багаторазового опитування учителів математики – слухачів курсів підвищення кваліфікації (автор дослідження неодноразово проводив заняття для слухачів курсів по роботі з обдарованою молоддю в Київському обласному інституті післядипломної освіти педагогічних кадрів), відомих учителів України, які не тільки добре розуміються на підготовці учнів до олімпіад, турнірів та конкурсів МАН, а й входять до складу журі Всеукраїнських конкурсів та олімпіад, можна стверджувати, що на сьогоднішній день робота з формування та розвитку математичних здібностей школярів в Київській області, зокрема в системі Малої академії наук, на належному рівні не проводиться.

Окрім вищезгаданих проблем, більшість опитуваних вказують ще на такі проблеми, що є «найболючими» для тих хто працює в системі МАН:

– вибір теми для дослідження школярами. Окремі науковці пропонують близькі до їхньої пошукової праці теми, а вчителі – керівники учнівських робіт часто пропонують дітям теми своїх курсових або дипломних робіт, коли ще навчалися у ВНЗ;

– розробка методики досліджень, розв’язування проблеми, перевірка результатів. Робота з юними дослідниками ведеться *традиційними способами*: дослідницька діяльність учнями майже не проводиться, а якщо проводиться, то хаотично, окремі учні залучаються до гуртків і секцій МАН без визначеної системи;

– навчально-методичне забезпечення. Програми для гуртків МАН розробляються самотужки керівниками гуртків, які ще вимагають погодження з Президіями територіальних відділень та затвердження відповідними органами управління освіти і науки. За останні роки допомоги вчителю математики, який задіяний у роботі МАН, з боку координаційної ради Київського територіального відділення МАН в плані науково-методичного забезпечення майже нема;

– імідж самої організації МАН. Не секрет, що інколи власний внесок з боку учнів у дослідження невеликий (часто реферативний), а бажання виступити з доповіддю на конкурсі МАН диктується можливістю позаконкурсного вступу до вищого навчального закладу або рознарядкою освітянських управлінських структур. Але в цьому випадку дискредитується сама ідея МАН України.

Все вищезазначене: нормативні документи положення про МАН, звіти та реальність показують суперечності між існуючою системою роботи з учнями – членами МАН та такою, яка потрібна сучасності.

На підставі перевірки існуючих методик навчально-виховної роботи територіальних відділень МАН України нами зроблено такі висновки: моделі навчально-виховної роботи територіальних відділень МАН України є функціональними, але потребують подальшого науково-методичного розроблення їх діяльності; структуризація змісту математики в фізико-математичних секціях МАН, організаційні форми і методи навчальної роботи, мають бути спрямовані на формування математичних здібностей школярів у процесі їх роботи в системі МАН.

1.4. Методичні вимоги до система роботи з учнями в структурі МАН

У розвитку творчості учнів головну роль відіграє відбір вузлових питань. Такими вузловими питаннями в процесі навчання математики можуть слугувати задоволення у бажанні учнів дізнатися більше, ніж пропонується, або ж дізнатися про властивості об'єктів, що вивчаються, глибше з усіх боків; як організувати навчальну роботу зі здібними дітьми так, щоб вони не просто засвоювали та потім використовували теоретичний матеріал, а й самі брали участь у створенні теоретичних положень.

Розглянемо психолого-педагогічні та методичні вимоги до системи роботи із учнями – слухачами, кандидатами та членами МАН, до постановки цілей, відбору і структуруванню змісту навчального матеріалу, методів, організаційних форм та засобів навчання.

Постановка цілей та завдань, мотивація учня. Учіння стає навчальною діяльністю в міру того, як складаються його цілі, завдання та зміст, мотиви, напрями і способи дій та їх результати. Поставлені вчителем цілі усвідомлюються учнями, приймаються ними і стають цілями їхньої діяльності. Цілі – це передбачувані результати діяльності, найближчі й віддалені, це передусім знання, вміння і навички, яких набувають учні [114].

Відомо, що молодші учні ще не піднімаються до усвідомлення віддалених навчальних цілей, а обмежуються близькими цілями (ось чому бажано залучати до співпраці та членства в МАН учнів середньої та старшої школи). А коли учень усвідомлює й приймає цілі учіння, то він стає суб'єктом навчальної діяльності та переживає її хід, чутливо ставиться до здобутих або ще не здобутих результатів.

У дидактиці виділяються цілі віддалені й близькі, головні й додаткові, основні й супутні [13]. У навчанні математики, у тому числі в рамках МАН, застосовуються всі ці види цілей: цілі закладу, цілі предмета в цілому, цілі розділу, теми, цілі заняття. Будь-яка мета конкретизується завданнями в конкретних умовах навчально-виховного процесу. Цілі навчання, перш за все, обумовлені структурою особистості, загальними цілями освіти, концепцією предмета математики, її статусом і роллю в науці, культурі та повсякденну житті, цінностями математичної освіти, новими освітніми ідеями та технологіями. Освіта на сучасному етапі розвитку характеризується посиленою увагою до учня, до його саморозвитку й самопізнання, до виховання вміння шукати й знаходити своє місце у житті. Мета сучасної освіти – повне досягнення розвитку тих здібностей особистості, які потрібні їй та суспільству, зокрема математичних.

Повновагома освіта з математики школяра в структурі МАН можлива лише в умовах гуманітаризації предмета математики, яка передбачає не тільки озброєння учня методами наукового пошуку, серед яких евристичні прийоми і методи наукового пізнання, а й залучення учня до духовної культури, творчої діяльності, методології відкриття нового.

Одним із істотних факторів, що впливають на цілі навчання математики в школі і в рамках МАН, є розуміння самого предмета математики, його концептуальних складових.

Науковці вважають, що основною метою математичної освіти має бути виховання вміння математично досліджувати явища оточуючого середовища, і це, в свою чергу, має стати центральним у навчально-пізнавальній діяльності учня – члена МАН. Саме такі ідеї прослідковуються в роботах Д. Пойа [173], Л. Д. Кудрявцева [117], А. М. Колмогорова [106], Б. В. Гнеденко [64].

Суттєво впливає на мету навчально-пізнавальної діяльності мотивація навчання. Мотиви значно підсилюють мету, сприяють прийняттю кожним учнем поставлених цілей, дозволяють керуватися ними більш наполегливо.

У психології немає єдиної точки зору на поняття «мотив». Є. П. Ільїн розуміє під мотивом складне психологічне утворення, що спонукає людину до свідомих дій, які складають певну діяльність, і є основою цих дій [96]. Компоненти мотиву він розподіляє на такі блоки: потребний, внутрішнього фільтру, цільовий; а формування мотиву – на такі етапи: прийняття стимулу – виникнення абстрактного мотиву, пошукова активність, конкретизація мети і формування наміру. Мотивація – це важливий етап процесу навчання, якщо хочемо, щоб він був творчим [96].

Сукупність мотивів певної діяльності називають мотивацією цієї діяльності, а найбільш значущі мотиви, що визначають характер мотивації, прийнято називати домінуючими.

Загальні психолого-педагогічні проблеми мотивів навчальної діяльності дослідив О. М. Леонтьєв у своїй роботі «Лекции по общей психологии» [133]. Серед мотивів навчальної діяльності учнів виділяють мотиви вивчення окремих навчальних дисциплін. Ієрархічна структура системи мотивів навчальної діяльності учнів у рамках МАН, зокрема, домінування в ній певного мотиву залежить від:

–ставлення учнів до науково-дослідницької діяльності;

–ставлення учня до навчання взагалі та до окремих розділів дисципліни, зокрема математики;

–змісту й методів навчання у гуртковій роботі МАН.

Становлення майбутнього юного науковця в області математики – члена МАН – визначається мотивами вибору його членства в МАН, домінуючими серед яких можуть бути:

–інтерес до навчальних і наукових досліджень;

–інтерес до математики, інформатики;

–бажання одержати міцні знання з математики, задля самореалізації, вступу до ВНЗ та для подальшого саморозвитку.

У свою чергу в процесі діяльності (навчання) мотиви можуть зазнавати змін у відповідній ієрархічній структурі, можуть виникати і зміцнюватися або послаблюватися і навіть зникати. Тому процес навчання повинен бути організовано так, щоб забезпечити формування у школярів навчально-пізнавальних мотивів, сприяти їх зміцненню і переведенню в ранг домінуючих.

Одним з домінуючих навчально-пізнавальних мотивів повинен бути *пізнавальний інтерес*, який виражається у прагненні до нових знань і дій. На його формування суттєво впливають:

–зміст навчального матеріалу, який повинен бути профільно спрямований (мотиви «професійного» напрямку);

–корисність набутих знань у повсякденному житті і на майбутнє;

–методи активного навчання, використання яких сприяє зростанню пізнавального інтересу, розумінню потреб у пізнанні [32, 148, 222].

Серед *мотивів вивчення математики майбутніми членами МАН*, як показали наші дослідження, можна виділити такі групи домінуючих:

1)мотиви «професійного» напрямку (бажання оволодіти дослідницькими і математичними навичками, глибше пізнати дослідницьку та математичну культури через виконання проектної роботи, відчути себе «творцем» тощо);

2)навчально-пізнавальні мотиви (пізнавальний інтерес до математики взагалі і до олімпіадної тематики та різних конкурсів з математики зокрема);

3)мотиви зовнішнього характеру по відношенню до контролюючого процесу учіння («вивчаю тому, що буду більш озброєним на захисті чи на конкурсі», «більше шансів брати участь у різних змаганнях», «щоб мати впевненість щодо вступу до ВНЗ» тощо).

Якщо на початку навчання в рамках МАН переважна кількість учнів мала позитивні мотиви «професійного» напрямку та навчально-пізнавальні мотиви, то вже наприкінці третього року кількість таких учнів значно скоротилася і з часом продовжувала скорочуватися. Основною причиною цього є те, що на думку учнів:

–основна частина курсу математики, яка мало досліджена, є далекою від шкільного курсу математики, що вимагає більше часу і копіткої роботи (і тому для учнів, які мали на початку навчання позитивні мотиви вивчення математики, вони швидше охололи, ніж зміцніли);

–якщо навіть «майбутній науковець» і обрав тему з математики для дослідження, то він може не отримати конкретних та цінних рекомендацій щодо її виконання (у такому разі в кращому випадку робота може не отримати високої оцінки, що значно знижує самооцінку та успіх учня);

–буває, що учневі нав'язується деяка тема для дослідження, мотивуючи це тим, що це найкраща з усіх тем і успіх з нею гарантовано (в такому разі робота учня перетворюється в реферат керуючого, а сам учень думає, що так твориться вся наука і не відчуває себе «творцем»).

Ось чому практика науково-дослідницького дослідження для учнів має бути максимально диференційованою і поетапно нарощуватися, починаючи від реферативно-курсових проектів та закінчуючи науково-дослідницькими.

В ідеалі кожен, хто викладає в МАН і має відношення до керівництва науково-дослідницькими роботами, повинен глибоко усвідомити, що він навчає своєму предмету не просто учнів, а можливих майбутніх науковців, і тому від того, наскільки добре він зможе збудити і розвинути інтерес школяра до свого предмета, активізувати його пізнавальну та дослідницьку діяльність, акцентувати увагу на організаційних моментах навчання, залежить формування та зміцнення інтересу дітей не тільки до даного предмета, але й до бажання досліджувати.

Психологи і дидакти (П. І. Підкасистий, В. І. Коротяєв) виділяють чотири різновиди постановки цілей і планування діяльності в залежності від рівня сформованості, пізнавальної діяльності та змісту навчального матеріалу:

1.Постановку цілей і планування діяльності учень здійснює за допомогою вчителя.

2.Тільки постановка цілей здійснюється за допомогою вчителя, а планування наступної роботи здійснюється учнем самостійно.

3.Постановка цілей та планування наступної діяльності здійснюється учнем самостійно в межах запропонованого вчителем завдання.

4.Діяльність учнів здійснюється за власною ініціативою, він сам визначає зміст, мету, план роботи і самостійно їх виконує.

При цьому важлива не лише постановка мети, а й дотримання її – треба вміти втримати мету до її реалізації, щоб її місце не зайняли інші, які теж можуть викликати інтерес у школяра.

В основній школі (учні 5-7 класів – потенційні слухачі МАН), де в учнів починає формуватись начально-пізнавальна діяльність, постановку цілей здійснює, в основному, вчитель. В основній школі (8-9 класи – потенційні кандидати МАН) роль вчителя в постановці цілей ще залишається домінуючою, але здібні й обдаровані учні часто самі планують і здійснюють виконання навчальних завдань. У старшій школі (10-11 класи – потенційні члени МАН) роль самостійності учнів у постановці й плануванні навчально-пізнавальної діяльності зростає [83]. У нашій практиці ми натрапляли на випадки, коли окремі учні ставили собі за мету розв’язати ще не розв’язані науковцями завдання (наприклад , довести велику теорему Ферма, яку було доведено тільки у 1998році) і такі випадки слід вітати, помилковість у міркуванні треба виявити і завчасно донести до учня.

Отже, ставлення учнів до навчання залежить не тільки від усвідомлення цілей, а й від мотивів учіння, на це теж вказує Г. С. Костюк [114]. Цілі учіння, взяті в єдності з його змістом, стають не тільки завданнями, а й навчальними задачами. Зв’язок між цілями та мотивами навчання настільки тісний, що деякі психологи їх навіть поєднують терміном «ціль – мотив» [121].

Відбір та структурування змісту навчального матеріалу, засоби навчання. Провідним компонентом розумового, а, значить, математичного розвитку, є фонд дійових знань, навченість. Математичні знання включають в себе змістовну сторону (математичні поняття і їх суттєві властивості, аксіоми, теореми) і операційну (формування загальних і специфічних розумових дій розумової діяльності, оволодіння методами й прийомами доведення і розв’язування задач, технологією навчальної діяльності, алгоритмами розв'язування базових задач, вправ тощо).

У психолого-педагогічних дослідженнях останнього часу важливе значення надається новим підходам до відбору і структурування змісту основ наук з метою інтенсифікації і оптимізації процесу навчання [31, 97].

М. І. Бурда зазначає, що відбір змісту навчального матеріалу може відбуватися за такими критеріями: повноти, науковості, доступності, теоретичної й практичної значимості, що відповідає віковим та індивідуальним можливостям учнів, систематичності та послідовності, наступності, перспективний горизонт, розрахований на талановитих дітей [31]. У зв'язку з останнім повинна здійснюватися не лише профільна, а і рівнева диференціація, оскільки серед талановитих учнів є учні різного рівня розвитку і навченості. Для учнів, рівень ма тематичних здібностей яких і інтерес до математики значно відрізняється від решти учнів, необхідна організація систематичної індивідуальної роботи, а значить і відбору для них відповідного змісту навчального матеріалу, особливо задачного.

Важливо також враховувати рамки навчального часу, який відводиться на вивчення певного змісту навчального матеріалу, та матеріальну базу, що є у розпорядженні учнів.

Дослідження з методики навчання математики та шкільна практика свідчать про те, що в основній школі (7–9-й кл., для слухачів та кандидатів МАН) є можливість вивчати окремі теми блоками, а в старших (10-11-й кл., для членів МАН) такими блоками краще вивчати переважну кількість навчального матеріалу [83]. При цьому виявляється ефективною проблемно-евристична система роботи, яка максимально має бути пронизаною дослідницьким підходом. Дослідницький підхід у навчанні – це розгляд кожного курсу, кожної теми курсу, кожного питання з точки зору дослідження.

Дослідницький підхід в навчанні реалізується через навчальні дослідження та дослідницьку діяльність, через рефлексування яких набувається індивідуальна, особистісна методологія проведення досліджень [191].

У системі роботи зі слухачами, кандидатами і членами МАН основним засобом навчання і математичного розвитку є також задачі, що виступають і як ціль, і як засіб навчання. Тому надзвичайно важливо структурувати систему задач , в яких кожна повинна займати своє місце і виконувати наперед визначені вчителем функції. Така система задач повинна будуватися за такими принципами: доступності, диференційованої реалізованості, різноманітності, послідовного зростання труднощів, узагальнення, спеціалізації, пошуковості (так звані «відкриті» задачі), які формують математичні та дослідницькі уміння учня. Зрозуміло, що така система задач повинна бути широкою за обсягом, іншою за складністю у порівняні з тими задачами, що розв'язуються з усіма учнями у звичайних класах. Бажано до системи завдань включати колекцію нерозв'язних проблем і гіпотез. Учні – члени МАН мають знати такого роду задачі. Засоби навчання можуть бути якісно розширеними за рахунок комп'ютерних математичних систем для побудови і дослідження комп'ютерних моделей задач, для раціональної перевірки гіпотез у поставленій задачі предметної області.

Використанню задач у навчанні приділяється найбільша увага в методиці математики і шкільній практиці. З різних аспектів цієї проблеми захищено ряд дисертацій (Колягін Ю. М., Гусєв В. О., Саранцев Г. І., Ерднієв П. М. та ін.). Цій проблемі присвячено велику кількість посібників, створених математиками, методистами (Балк Г. Д., Балк І. Б., Бурда М. І., Дорофєєв П. В., Єсаулов О. Ф., Колягін Ю. М., Пойа Д., Слєпкань З. І., Шаригін І. Ф. та ін.), вчителями-новаторами (Шаталов В. Ф., Кушнір І. А., Габович І. Г., Нікітенко Н. П., Лейфура В. М., Полонський В. Б., Ушаков Р. П., Якір М. С., Ясінський В. А.).

У психології задача розглядається і як мета, задана в певних умовах, і як особлива характеристика діяльності суб'єкта. Задача тут тлумачиться як суб'єктивне психологічне відображення тієї зовнішньої ситуації, в якій розгортається цілеспрямована діяльність суб'єкта [206].

Виділяють чотири функції задач – *навчальна*, *розвиваюча*, *виховна* і *контролююча*. Розвиваючій функції задач останніми роками приділяється особлива увага, бо саме ці задачі спрямовані на розвиток мислення [107]. Не випадково Д. Пойа [174] зазначав, що задачі не тільки і не стільки мають сприяти закріпленню знань, тренуванню в їх застосуванні, скільки формувати дослідницький стиль розумової діяльності, метод підходу до явищ, що вивчаються. Розвивальна функція задач, як зазначає З. І. Слєпкань, спрямована на розвиток мислення учнів, на формування в них розумових дій, способів та прийомів розумової діяльності, просторових уявлень, уяви, алгоритмічного мислення, вміння моделювати ситуацію тощо [206].

У зв'язку з великою кількістю типів, видів математичних задач ми маємо розглянути деякі важливі для нас класифікації задач. Зокрема, у педагогічній літературі можна знайти такі класифікації:

Перша класифікація: за кількістю невідомих у структурі задач Ю. М. Колягін пропонує їх класифікувати на навчальні, пошукові та проблемні:

–до *навчальних* задач належать ті, структура яких має один невідомий компонент;

–задачі *пошукового* характеру – це ті, у структурі яких невідомо два компоненти;

–*проблемні* задачі – задачі з трьома і більше невідомими компонентами [107].

Такий поділ задач на навчальні, пошукові та проблемні не є строгим.

Друга класифікація: за відношенням до теорії виділяють стандартні та нестандартні задачі:

–основна ознака *стандартної* задачі – наявність таких загальних правил і положень, що однозначно визначають оператор розв'язання цих задач та виконання кожного кроку цієї програми (тобто мають свій алгоритм розв'язування);

–*нестандартні задачі* – це такі, для яких у курсі математики не існує загальних правил або положень, що визначають оператор їх розв'язання. У завданнях даного типу присутні нешаблонні ситуації, що потребують застосування пошукового досвіду, здогадки, кмітливості, проведення складних порівняно зі стандартними задачами міркувань, певних напружень розумової діяльності і творчого підходу. Найчастіше в методичній літературі нестандартні завдання називають творчими [63].

–*Третя класифікація*: евристичні задачі. Евристична задача є синонімом нестандартної задачі. Евристична задача - це задача, яка припускає самостійне формулювання способу її розв'язання, у процесі якого учень потрапляє в ситуацію, в якій має проявити власну евристичну позицію. У процесі розв' язування евристичних задач та їх систем здійснюється становлення інтелектуально-творчої та евристичної діяльності [205].

Наведені класифікації дозволяють ширше уявити собі проблеми, пов'язані з методикою навчання учнів розв'язувати задачі, спрямовуючи цей процес на розвиток мислення та математичних здібностей.

Система задач допомагає актуалізації евристичних ситуацій, яка буде сприяти розвиткові евристичної діяльності учнів, якщо вона базуватиметься на принципах максимальної зацікавленості, наочності, евристичності, поступового нарощування складності. Навчання розв'язуванню евристичних задач спрямовує на розвиток мислення та формування математичних здібностей, бо розв'язуючи системи евристичних задач учень потрапляє в ситуацію «відкриття» [205].

Використовуючи на заняттях особливі типи пізнавальних і практичних задач, вчителі можуть навчити учнів здатності *самостійно здобувати і застосовувати знання*, *творчо мислити і діяти*. І оволодіння вміннями *самостійно мислити*, *здобувати знання*, оволодівати методикою і технікою розумової праці для школярів стає першочерговим завданням. В цьому учням може сприяти використання комп'ютера, що привчає користувачів до самостійної роботи, самонавчання, самовдосконалення.

Однією з головних частин математичної культури школяра є його вміння розв'язувати математичні задачі. На думку видатного математика і педагога Д. Пойа головна мета навчання математики – навчити учня думати, а цієї мети можна досягнути шляхом формування вміння розв'язувати задачі [174, с. 287–288]. Формування цього вміння має здійснюватись у процесі всього навчання майбутніх «науковців». Г. О. Михалін зауважує, що процес розв'язування математичної задачі може бути таким [148, с. 173–175]:

1*. Вивчення і аналіз тексту задачі та схематичний запис задачі.

2*. Пошук способу розв'язання задачі.

3*. Реалізація знайденого способу (якщо спосіб не дозволяє знайти розв'язок задачі, перейти до пункту 1).

4*. Перевірка знайденого розв'язку та всіх кроків розв'язування (якщо знайдено помилку, перейти до пункту 1).

5. Дослідження розв'язку (коли він існує і чи єдиний).

6*. Формулювання відповіді.

7. Критичний аналіз розв'язування (можливі висновки, узагальнення, інші способи розв'язування тощо).

Етапи розв'язування, помічені знаком «*», властиві процесу розв'язування кожної математичної задачі. На кожному етапі розв'язування задачі застосовують ті чи інші прийоми і методи, які за ступенем детермінованості поділяються на алгоритмічні, напівалгоритмічні і евристичні.

Так, на *етапі вивчення й аналізу тексту задачі* доцільно використовувати евристичну схему, що є упорядкованою сукупністю таких *прийомів*:

–читання та усвідомлення тексту задачі;

–виділення умов і вимог задачі та короткий їх запис;

–при необхідності виконання рисунка за текстом задачі;

–виділення понять, що містяться в умовах і вимогах задачі та згадування їхніх означень і властивостей;

–встановлення зв’язків між умовами та вимогами задачі;

–аналіз встановлених зв’язків і виділення серед них істотних;

–формування здогадок про можливий план розв’язування задачі.

Учитель математики має бути переконаним, що нехтування етапом вивчення і аналізу тексту задачі неприпустиме, і треба обов’язково прививати це переконання своїм учням.

Серед найпоширеніших *прийомів пошуку способу розв’язання задач* Г. О. Михалін виділяє такі:

–*неповної індукції* (висування гіпотези щодо способу розв’язання ґрунтується на окремих випадках, пов’язаних з умовами задачі);

–*розгортання умови задачі* (з того, що дано, намагаються дістати якомога більше висновків, за допомогою яких дістають нові висновки, і т. д.);

–*встановлення достатніх умов* (виявлення умов, достатніх для умов задачі, для цих умов встановлюються інші, що є достатніми для них, і т. д.);

–*послідовного аналізу умов та вимог задачі* (почергове застосування двох попередніх прийомів);

–*незавершеної задачі* (розв’язування даної задачі поділяється на розв’язування ряду проміжних (простіших) задач) [148].

У процесі пошуку способу розв’язання задачі Г. О. Михалін радить використовувати наочність та інтуїтивні міркування, які на етапі реалізації знайденого способу розв’язання бажано строго обґрунтувати. На цьому етапі уже визначено, до якого класу належить розв’язувана задача:

–до класу алгоритмічних або стандартних;

–до напівалгоритмічних;

–до евристичних або нестандартних [148].

Тоді застосовують знайдений метод (сукупність прийомів) розв’язання цієї задачі.

На етапі критичного аналізу проведеного розв’язування задачі повинна здійснюватись основна робота щодо формування вмінь розв’язувати задачі. Цей етап можна поділити на чотири основні складові:

1)обговорення пошуку способів розв’язання задачі;

2)пошук нових способів розв’язання даної задачі і порівняння різних способів розв’язання;

3)узагальнення і спеціалізація даної задачі та формулювання інших задач, породжених даною;

4)висновки щодо проведеної роботи – тип задачі, основні прийоми і методи її розв’язання, специфіка тощо [148, 224].

Усі вищезазначені Г. О. Михаліним етапи розв’язання, особливо етап критичного аналізу, мають формуватися в учнів – гуртківців МАН при розв’язуванні математичних задач, підібраних відповідно до вікових та індивідуальних особливостей учнів, до рівнів розвитку різних складових математичних здібностей.

Наступна операційна складова математичних знань, що відповідає змісту навчального матеріалу в рамках МАН, вимагає від учителя систематичного формування в учнів розумових дій і прийомів інтелектуальної та організаційної діяльності, забезпечення оволодіння методами доведень і розв’язання задач, формування прийомів навчальної роботи, прийомів самоконтролю і корекції своєї діяльності тощо.

Формування розумових дій і прийомів інтелектуальної діяльності. Особливої уваги в роботі зі слухачами, кандидатами і членами МАН заслуговує навчання методам, способам і прийомам доведення теорем і розв’язання задач різного характеру.

При вивченні методів, способів і прийомів доведень і розв’язання задач важливо давати учням орієнтири ефективного їх використання. Наприклад, доцільно звернути увагу учнів, що не існує єдиного методу розв’язання олімпіадних задач. Навпаки, кількість методів постійно поповнюється. Деякі задачі можна розв’язати кількома різними способами або комбінацією методів. Характерна особливість олімпіадних задач полягає в тому, що розв’язок з вигляду нескладної проблеми може потребувати застосування методів, що використовуються у важливих математичних дослідженнях. Ось неповний список методів розв’язання таких задач: доведення від супротивного; принцип Діріхле; розв’язування методами іншої науки (заміна алгебраїчної задачі геометричною або фізичною і навпаки); правило крайнього; розв’язування з кінця; пошук інваріанта; побудова контрприкладу; математична індукція; рекурсія; метод ітерацій; підрахунок двома способами; метод аналогій; провокаційний метод; допоміжні побудови; перехід у простір більшої кількості вимірів; розфарбування.

Значний внесок у популяризацію методів розв’язування олімпіадних задач здійснили публікації журналу «У світі математики», «Математика в школі», «Квант», книжки серії «Популярні лекції з математики», «Бібліотека математич ного гуртка», а також розробки численних веб-сайтів, присвячених олімпіадним задачам.

Важливо систематизувати методи, засоби і прийоми доведення і розв’язування задач, ідеї, пов’язані з ними. Наприклад, при розгляді:

1). Деякого класу логічних задач бажано серед таких методів (доведення від супротивного, принцип Діріхле, правило крайнього, розв’язування з кінця, пошук інваріанта) виділити провокаційний метод в математиці – спосіб розв’язання «олімпіадних» задач за припущення, що умов задачі достатньо для її розв’язання. Метод вперше був запропонований А. Попелюхіним у 1978 р. для розв’язання широкого класу задач математичних олімпіад.

Прикладом може бути відома *задача про знаходження суми відстаней від точки, взятої довільно всередині правильного трикутника, до його сторін*. Провокаційний метод спрощує розв’язування цієї задачі. Дійсно, оскільки умов задачі достатньо для її розв’язання, в якості довільної точки виберемо вершину трикутника: сума відстаней до сторін очевидно рівна висоті трикутника. Довести ж, що сума відстаней не залежить від вибору точки – справа техніки. Хоча тут використовуються по суті дві евристики: принцип крайнього і принцип інваріанта , а реалізація цих ідей виконується за методом площ.

Провокаційний метод є різновидом широко поширеного в математиці гіпотетичного методу, тобто отримання результатів за припущення, що деякий недоведений факт є правильним. Однак, на відміну від гіпотетичного методу, предметом гіпотези провокаційного методу є не властивості математичного об’єкта, а властивості самої проблеми. В основі провокаційного методу лежить мета-гіпотеза, яка апелює до фактів зовні математики (наприклад, припущення, що формулювання задачі, запропонованої на екзамені або олімпіаді, має бути коректним). У такому аспекті провокаційний метод є одним із способів прояву математичної індукції, необхідної при розв’язанні нестандартних задач.

2). Методу *математичної індукції* – як одного із методів доведення. Для цього доводиться «перше твердження» – база індукції, і потім доводячи, що якщо будь-яке твердження в нескінченній послідовності тверджень правільне, то правільне і наступне – крок індукції. Правильність цього методу доведення слідує з так званої *аксіоми індукції*, п’ятої з аксіом Пеано, які визначають натуральні числа. Правильність цього методу доведення еквівалентна тому, що в будь-якій підмножині натуральних чисел існує мінімальний елемент.

Бажано розглянути такі варіації та узагальнення:

– так званий принцип *повної математичної індукції*, а саме:

нехай є послідовність тверджень P_1, P_2, P_3,.... Припустимо, що

1) встановлено, що P_1 істине;

2) для будь-якого n доведено, що якщо правильні всі P_1, P_2, P_3,…, P_n, то правильне і P_{n+1}. (Це твердження називається *індукційним переходом*).

Тоді всі твердження в цій послідовності правильні.

Принцип повної еквівалентності також слідує з аксіоми індукції і він їй еквівалентний.

– *трансфінітна індукція* – метод доведення, який узагальнює математичну індукцію на випадок незліченої кількості значень параметра.

Трансфінітна індукція базується на наступному твердженні:

Нехай M – цілком упорядкована множина, $P(x)$ при x M – деяке твердження. Нехай для будь-якого x   M з того, що P(y) істинно для всіх y < x слідує, що істинне P(x), і нехай істинне твердження P(x), якщо x – мінімальний елемент M. Тоді твердження P(x) вірне для будь-якого x.

Математична індукція є частинним випадком трансфінітної індукції. Дійсно, нехай M – множина натуральних чисел. Тоді твердження трансфінітної індукції перетворюється в наступне: якщо істине P(1) і з тверджень P(1), P(2),…, P(n–1) слідує P(n), то правильні всі твердження P(n).

Таке розширення знань про індукцію дозволить учням членам МАН бути більш компетентними в питаннях теорії множин, де досі існує багато таємниць.

Не секрет, що з методами геометричних перетворень пов’язаний розвиток функціонального мислення, оперування образами фігур на площині і в просторі. Тому з цими методами, як і з векторно-координатним, необхідно познайомити в більш широкому обсязі учнів – членів гуртка МАН. Безперечно, це є ефективним засобом розвитку математичного мислення, формування дослідницьких умінь. Останньому сприяє не тільки узагальнення учнями певного класу задач, а й складання нових задач.

Такі ідеї разом з методами і способами учні – члени МАН повинні не лише систематизувати і виписувати разом з ілюстративними задачами в спеціальний зошит, але й самостійно добирати оригінальні задачі, в яких ці методи «працюють» особливо яскраво, наочно для повного розкриття тієї чи іншої теми.

Необхідно вчити учнів здогадуватись при пошуку розв’язання нестандартних задач, розвивати їхню інтуїцію, прогнозувати результати. Для цього учні спочатку перебирають ідеї і методи, фіксують їх, моделюють, перевіряють шляхи розв’язання і вибирають найбільш раціональний з них [224]. Навчання на інтуїтивному рівні передбачати результати сприяє не лише оволодінню способами розв’язання, певною стратегією мислення, а й формуванню дослідницьких навичок.

Особливої уваги в роботі зі слухачами та кандидатами МАН слід приділяти навчанню висувати гіпотези (слово «гіпотеза» походить від давньогрецького – hypothesis – припущення, судження про закономірний зв’язок явищ). Висунення гіпотез, припущень і нетрадиційних ідей – важливі міркувальні навички, які забезпечують значний прогрес у будь-якій сфері. Перше, що примушує з’явитися на світ гіпотезу, це проблема. А звідки береться проблема? У професійній дослідницькій роботі зазвичай діє відносно нескладна послідовність. Спочатку збирають і аналізують окремі факти, джерелом їх є невідомі твердження, попередні розрахунки, роздуми і багато іншого. Після чого ці факти і роздуми дозволяють побачити щось незвичайне, несподіване: неясності, невідповідності, порушення в ланцюзі попередніх доведених фактів та інше.

Існує багато методів для побудови гіпотез (по суті пошук нових ідей). Згадаємо лише деякі з них:

Мозкова атака – колективний метод пошуку нових ідей та рішень.

Аналогія символічна – аналогія, за допомогою якої проблема описується словами узагальнено.

Метод асоціації базується на здібностях людини так перетворювати отримані раніше знання, щоб їх можна було використовувати для нових умов.

Метод інверсії передбачає розгляд задачі з інших, зокрема протилежних, позицій по відношенню до загальноприйнятих [102].

Гіпотези найчастіше виникають як можливі варіанти розв’язання задачі. Після чого ці гіпотези підлягають перевірці в ході дослідження. Побудова гіпотез – основа процесу творчого мислення, у тому числі математичного. Гіпотези дозволяють відкривати нові можливості, знаходити нові варіанти розв’язування задач і потім, у ході міркувань і практичних розрахунків , оцінити їх вірогідність.

Таким чином, гіпотези дають нам можливість побачити проблему в іншому світлі, поглянути на ситуацію з іншого боку. Цінність пропозицій, навіть безглуздих, полягає у тому, що вони змушують нас вийти за межі буденних уявлень. Важливо зануритися в стихію уяви, ризику, всього того, без чого рух до нового неможливий.

При формулюванні гіпотези необхідно враховувати таку важливу її характеристику як можливість її доведення або спростування, яка передбачає наявність адекватних способів або прийомів перевірки даної гіпотези. Побудова контрприкладу – класичний спосіб спростування гіпотез.

Якщо є твердження типу «Для будь-якого X з множини M виконується властивість A», то контрприкладом для цього твердження буде будь-який об’єкт X0 з множини M, для якого властивість A не виконується.

Часто знайти контрприклад дуже складно. В таких випадках можна скористатися комп’ютером. Програма для знаходження контрприкладу може просто перебирати елементи множини M і перевіряти виконання властивості A. Більш складний, але більш ефективний, підхід полягає у побудові контрприкладу «частинами». У такому разі при виборі наступної «частини» відразу відкидають варіанти, які завідомо не ведуть до заперечення твердження, яке розглядається. Це дозволяє на порядок прискорити роботу.

Необхідно пам'ятати, що відсутність контрприкладу не є доведенням гіпотези. Доведення такого роду можна будувати, тільки якщо множина, яка розглядається, скінченна. У цьому випадку достатньо перебрати всі його елементи, і, якщо контрприкладу серед них немає, то твердження буде доведено.

Таким чином, приступити до розв'язання проблемної ситуації можна висунувши гіпотезу, спираючись на знання, досвід, використовуючи при цьому методи пошуку нових ідей та способи їх перевірки.

Формування в учнів навичок і умінь навчальної праці. Дидакти пропонують чимало класифікацій умінь і навичок за різними ознаками і в умовах безперервної освіти. Наприклад, виділяють серед навчальних умінь пізнавальні, практичні, організаційні, уміння проводити самоконтроль і дослідницькі уміння. Першочергову роль відіграють пізнавальні уміння – уміння самостійно набувати знання (іншими словами: уміння самостійно вчитися). Від того, наскільки успішно формується уміння навчальної праці, залежить безперервне оволодіння новими знаннями в майбутній професійній діяльності, оперативність і дієвість таких знань.

До основних пізнавальних умінь з акцентом на математичні й дослідницькі доцільно віднести:

–уміння працювати з навчальною і науково-популярною літературою, базами даних в системі комп'ютерного забезпечення, довідниками, каталогами;

–уміння спостерігати і на основі цього формулювати висновки;

–уміння математизувати ситуації, самостійно моделювати і висувати гіпотези;

–уміння обґрунтувати математичні факти на основі теоретичних знань, виводити наслідки з теорії;

–уміння узагальнювати факти та проводити пошуки нових [193].

Такі уміння бажано, щоб сформувалися у слухачів МАН, вони необхідні для подальшої їх діяльності в рамках МАН.

Деякі чинники, або складові дослідницької компетентності (вони одночасно є і напрямами їх набуття кандидатами МАН) не тільки активізують навчально-пізнавальну, а ще й формують дослідницьку діяльність. Це такі уміння як:

–формулювати (ставити) математичні задачі на основі аналізу суспільно та індивідуально значущих задач (ідеалізація, узагальнення, спеціалізація);

–будувати аналітичні та алгоритмічні (комп'ютерні) моделі задач;

–висувати та емпірично перевіряти справедливість гіпотез, спираючись на відомі методи (індукція, аналогія, узагальнення, спеціалізація і т. п.), а також на власний досвід досліджень;

–інтерпретувати результати, отримані за формальними методами, у термінах вихідної предметної області та інших предметних областях;

–систематизувати отримані результати: досліджувати межі застосувань отриманих результатів, встановлювати зв'язки з попередніми результатами, модифікувати вихідну задачу, шукати аналогії в інших розділах математики [191].

До практичних умінь доцільно віднести: 1) вимірювальні, 2) обчислювальні, 3) графічні (побудова і аналіз графіків функціональних залежностей, планіметричних і стереометричних рисунків, геометричних побудов при розв'язування задач на побудову, у тому числі і за допомогою комп'ютера), 4) уміння складати опорні конспекти при роботі з навчальною та науково-популярною літературою, конспектувати лекцію [200].

До організаційних умінь відносяться уміння планувати свою роботу, правильно її організовувати як на занятті, так і в домашніх умовах.

Уміння проводити самоконтроль, контроль, оцінювання своєї роботи і роботи товаришів передбачають здійснення контролю одержаного результату, уміння знайти помилку і провести корекцію виконаної роботи, оцінити оптимальність виконаної роботи і знайти можливі інші шляхи знаходження результату.

Для неперервного навчання і самоосвіти важливе значення мають розвиток самостійності і творчої активності учнів та виховання навичок самоосвіти з математики. В психолого-педагогічній літературі самостійність, зазвичай, розуміється як здатність особистості до діяльності, яка здійснюється без стороннього втручання [12, 13, 49, 156, 213].

Самостійність особистості не виступає як ізольована риса, вона тісно пов'язана з незалежністю, ініціативністю, активністю, наполегливістю, самокритичністю і самоконтролем, впевненістю в собі. Важливою складовою частиною самостійності як риси особистості школяра є пізнавальна самостійність, яка означає його готовність (здатність і прагнення) своїми силами вести цілеспрямовану пізнавально-пошукову діяльність. Самостійна пізнавальна діяльність учнів може мати як характер простого відтворення, так і перетворювальний, творчий. При цьому у застосуванні до учнів під творчою мається на увазі така діяльність, в результаті якої самостійно відкривається дещо нове, оригінальне, що відображає індивідуальні схильності та індивідуальний досвід школяра. Філософське тлумачення творчої діяльності як такої, результатом якої є відкриття нового оригінального продукту, що має суспільну цінність, по відношенню до учня неприйнятне. Хоча, бувають випадки, коли діяльність учнів виходить за рамки звичайних навчальних завдань і носить творчий характер, а її результатом стає продукт, що має суспільну цінність. У навчальній діяльності творчість проявляється у відкритті нового для себе, нового в своєму розумовому розвитку, що має лише суб'єктивну новизну, але не завжди має суспільну цінність [213].

Творчий (продуктивний) і відтворюючий (репродуктивний) характер самостійної діяльності пов'язані між собою. Відтворююча самостійна діяльність слугує початковим етапом розвитку самостійності, етапом накопичення фактів і дій за зразком, і має тенденцію до переростання в творчу діяльність. У межах відтворюючої діяльності вже мають місце елементи творчості. У свою чергу, в творчій діяльності також містяться елементи дій за зразком [204, 213].

Організація самостійної роботи учнів має відповідати таким основним методичним та дидактичним вимогам:

– посильність самостійної роботи для учнів;
– дотримання принципу свідомості при її виконанні;
– організація самостійної роботи за визначеною схемою;
– підготовка учнів до виконання самостійної роботи:
    а) чітке інструктування учнів щодо цілей та завдань роботи;
    б) надання учням теоретичної бази, необхідної для початку самостійної роботи (для цього застосовується лекційна форма навчання);
    в) озброєння їх необхідними навичками для її виконання;
    г) постановка перед учнями завдань, розв'язання яких потребує розумових зусиль;
– безпосереднє спостереження вчителем за виконанням самостійної роботи, надання дітям допомоги у разі потреби;
– прищеплення учням навичок самоконтролю під час роботи;
– здійснення індивідуального підходу до учнів у процесі організації самостійної роботи [213].

Оскільки в роботі з учнями МАН значне місце має займати самостійна пізнавальна діяльність, особливої уваги слід надати навчанню самостійно працювати з математичними текстами за посібниками, науково-популярною літературою (зокрема збірниками «У світі математики», журналом «Квант», «Математика в школі», науковими статтями та іншими джерелами математичних знань). Головна мета – навчити виділяти головне, складати опорний план-конспект та раціонально використовувати здобуті самостійно знання.

Вибір методів і організаційних форм навчання. У дидактиці і методиці навчання математики загальноприйнятим є твердження про те, що вибір методів і організаційних форм навчання визначається, в першу чергу, поставленою метою і завданнями, в залежності від змісту навчального матеріалу. Разом з тим особливості учнів з високим рівнем навченості зобов’язують вчителя віддавати перевагу тим методам, що не тільки активізують пізнавальну і самостійну діяльність учнів, а й поступово залучають учнів до науково-дослідницької діяльності. Такими методами, як це вже відмічалося раніше (за класифікацією М. Н. Сказкіна [204]) є методи проблемного навчання (проблемний виклад, евристична бесіда, дослідницький метод), сутність яких висвітлена раніше. Тому тут ми зупинимося на ряді вимог, виконуючи які , вчитель може провести проблемну бесіду на достатньо високому рівні.

На підставі теорії проблемних ситуацій, яку було розроблено О.М. Матюшкиним [141] та на основі власного досвіду, перерахуємо ці вимоги:

1.Вивчення нового матеріалу краще починати з цікавої практичної чи історичної задачі, що дозволяє створити вихідну проблемну ситуацію. В результаті аналізу проблемної ситуації формується проблема.

2.Проблема повинна бути ясною, чіткою, доступною.

3.Проблема повинна мати певну складність для учнів. Викладач має спрямувати учнів на подолання цієї складності, поступово ускладнюючи завдання.

4.Основна проблема часто розбивається на ряд підпроблем, кожна з яких породжує свою проблемну ситуацію. Проблемна бесіда, як правило, містить від двох до п’яти проблем. Останні пов’язані з пошуком розв’язку основної проблеми, способу досягнення поставленої мети.

5.Реальний процес виходу з проблемної ситуації має, як правило, декілька напрямів. Тому на уроці слід передбачити декілька способів і шляхів вирішення кожної підпроблеми.

6.Розв’язання проблемних ситуацій імітує реальний процес мислення – відкриття нового . У ньому мають місце безвихідні ситуації, коли чергова гіпотеза призводить:

- або до очевидного протиріччя;
- або до неможливості продовжити вирішення проблеми у даному напрямку через відсутність необхідної бази.

Такі ситуації повинні мати місце і в процесі навчання, коли хибні уявлення учнів не відкидаються одразу, а піддаються розгляду. Якщо діти потрапили у безвихідну ситуацію першого виду, то необхідно дати їм можливість самостійно знайти допущену помилку. Безвихідні ситуації змушують учнів повернутися на вихідну позицію і продовжити пошук, висуваючи нові гіпотези. Якщо учні, хоча й не роблять помилкових кроків, але й не бачать шляху розв’язання, то вчитель ініціює дії, які не дозволяють отримати результат або приводять до помилки.

7.У процесі навчання можливі два способи подачі матеріалу, які створюють проблемну ситуацію, чи дві схеми – історична і логічна. Логічна – більш стисла, що відображає результат дослідження; історична – більш природна, що відображає реальний процес вирішення проблеми. Залучення історичного матеріалу для пошуків розв’язку проблеми при організації проблемної бесіди дає учневі знання реальних шляхів виходу з проблемної ситуації, сприяє підвищенню пізнавального інтересу і дозволяє підсилити її проблемність.

Виконання перерахованих вимог до проблемної бесіди дозволяє внести у творчий процес її підготовки та проведення елементи алгоритмізації. Елементи проблемності у навчанні повинні поєднуватися з іншими формами і методами, що застосовуються при вивченні нового матеріалу.

Для розвитку математичних здібностей особистості учня у рамках МАН найкраще застосовувати в основному евристичний та дослідницький методи навчання, а також елементи проблемного навчання. Однак це в жодному разі не відкидає застосування інших методів, оскільки не кожну тему, її окремі розділи, чи навіть окремі задачі навчального матеріалу можна , а іноді й не доцільно, розглядати із застосуванням вищезгаданих методів навчання.

Також важливим завданням вчителя при організації навчального процесу з учнями у діяльності МАН є організація такої навчальної роботи, яка б давала можливість поєднувати заняття основної школи із заняттями гуртка МАН та пошуково-дослідницькою діяльністю учнів. Ефективність навчання, як і всякої роботи, значною мірою залежить від організації, тому нами запропонована така форма організації у діяльності МАН, як лабораторія.

Лабораторія – це форма організації навчальної роботи, якій мають бути притаманні:

–відносно постійний склад учнів;

–різні форми організації пізнавальної діяльності;

–відсутність жорстких часових рамок;

–дослідницькі методи та спрямованість процесу;

–широка можливість диференціації дослідницької діяльності та систематичність її здійснення.

Мета діяльності: здійснення дослідницької, експериментальної діяльності учнів з урахуванням їх вікових психологічних особливостей, подальший розвиток і укріплення їхньої суб'єктивності, трансформація і надалі розвиток навчальної діяльності як здійснення рубежу їхнього дорослішання.

Декомпозиція мети:

–поглибити і розвинути сформовані раніше вміння дітей самостійно здобувати знання, визначити способи дій під час розв'язання навчальних задач;

–продовжити роботу по формуванню вміння вести індивідуальну, групову і колективну дослідницьку експериментальну роботу;

–поглибити процес навчального співробітництва за допомогою подальшого розвитку рефлективності;

–розвивати творче мислення учнів, їхні індивідуальні творчі здібності;

–реалізовувати оптимальні можливості даної форми роботи для прояву інтелектуальної ініціативи, самостійності та гнучкості мислення;

–розвивати вміння спостерігати, аналізувати, пояснювати дані спостережень, відокремлювати відомі факти від невідомих;

–поступово сформувати вміння проводити експеримент: постановка – пояснення – оформлення результатів;

–сформувати наприкінці навчання усвідомлення гносеологічного циклу: факти – модель – гіпотеза – наслідки – експериментальна перевірка наслідків. Вміння здійснювати активний пошук на його окремих етапах;

–навчати відокремлювати головне у складних явищах, розвити вміння абстрагувати, аналізувати та узагальнювати матеріал.

Методичний механізм вирішення задач. Вводити учнів до дослідницької та експериментальної діяльності необхідно поступово, відпрацювавши насамперед простіші навички такої роботи. Доцільно поширювати уявлення про постановку мети, планування дослідження, спостереження, роботу з першоджерелами.

1) Колективна робота. Заняття проводяться на підставі колективного дослідження проблеми і спрямовані на перевірку достовірності визначених закономірностей, положень, величин. Такого роду творчі задачі частіше всього розраховані на тривалий час, який охоплює декілька занять.

2) Парна і групова робота. Більш прості проблеми вирішуються протягом одного заняття. Використовується парна та групова робота учнів по дослідженню тих чи інших проблем. Для найбільш обдарованих дітей розробляється система індивідуальних дослідницьких завдань.

3) Реалізація ідей диференціації. Групова та парна дослідницька робота, при яких кожна група чи пара виконують роботу, яка відрізняється від інших дослідницьких задач, дозволяє

реалізовувати ідеї диференціального підходу. З цією метою на початковому етапі роботи в МАН більш складні дослідницькі задачі доручаються більш підготовленим учням, а менш підготовлені розпочинають дослідження з розв'язання простіших проблем. Усе це надає можливість створити умови для внутрішньої диференціації дослідницької навчально-пізнавальної діяльності учнів, розподілити їхні обов'язки.

4)Необхідні умови успішної діяльності. Умовами успішного здійснення занять безумовно є наявність глибоких знань, міцних навичок і вмінь учнів за тими розділами навчальних курсів, які складають теоретичну і практичну основу дослідження. Тому заняттям в рамках МАН повинні передувати повторення, узагальнення і систематизація матеріалу. Крім цього, у ході здійснення занять будуємо спільну дослідницьку діяльність таким чином, щоб учні змогли аналізувати свої опорні теоретичні знання та навчальні дії, що були отримані раніше. Важливим є дотримання визначеної послідовності та зв'язку тем досліджень, вони не нав'язуються учням, їх зміст органічно відповідає формі знань.

5)Про колективний стиль управління. Дуже корисно в основу занять покласти колективний стиль управління, що значно розвиває колективно-розподільчу форму організації навчальної діяльності. З цією метою слід намагатись заохочувати учнів до вибору тем дослідження на альтернативній основі, до формування теми майбутнього дослідження, до планування занять гуртка в МАН.

6)Умова проектування занять. Надзвичайно важливо проектувати і здійснювати заняття на альтернативній основі. Пропонувати до усвідомлення учнями різних версій того, що необхідно буде вивчити, дослідити, засвоїти. У дитини повинен бути вільний вибір, вона повинна не тільки засвоювати навчальний матеріал, але й пізнавати саму себе, виробляти свою точку зору з приводу фактів і явищ. Усі заняття націлено на звернення учнів до своєї особистої діяльності, на процес досягнення мети. Без цього ніякого самовизначення особистості, підвищення відповідальності учня просто не відбувається.

7)Про самооцінку та успіх. Надзвичайно корисним є розвиток у дітей прагнення до диференційованої самооцінки, яка повинна відображати: а) вміння ставити задачу; б) використовувати різні способи її розв'язання; в) контролювати себе; г) рефлектувати свої дії; д) знаходити засоби дослідження. Уся організація роботи лабораторії в рамках МАН повинна вести учня до успіху, тобто вселяти надію. Тому при виборі теми дослідження слід ретельного враховувати можливості кожного «дослідника», детально розробляти варіанти індивідуальної допомоги з боку викладача, а також створювати обстановку довіри та співробітництва.

Формування мислення. Робота дитини в рамках МАН (завдяки лабораторії) сприяє формуванню наступних засобів творчого мислення:

– Група 1. Варіанти розмірковувань. Припускати – зіставляти – порівнювати – екстраполювати – пропонувати.

– Група 2. Варіанти стратегій. Продовжити в тому ж напрямку – продовжити і поширити – змінити напрямок – зіставити з попереднім – зіставити з наступним.

– Група 3. Варіанти тактики. Перевірити наслідки – розвинути думку – розподілити дії – розподілити на компоненти – перевірити можливу причину.

– Група 4. Варіанти відносин. Виявити залежність – перевірити невідповідність – порівняти з раніше відомим.

– Група 5. Варіанти перешкод. Обійти перешкоду – перевірити перешкоду – діяти в одному, двох чи кількох напрямках [72].

Усі ці форми протягом навчання, як зазначають Давидов В. В. та Ельконін Д. Б., широко використовуються для формування в учнів (та у юних дослідників) таких якостей мислення як:

– проблемність – здатність на початковому етапі виявити труднощі і визначити шляхи їх подолання. У зв'язку з цим бажано проводити більше занять у формі здійснення деякого відкриття, а не тільки через просту передачу ідей, давно відомих фактів. У першу чергу треба поставити учня перед фактом незнання – для цього на першому етапі слід створити проблемну ситуацію, а потім поступово переформулювати її в деяку загальну проблему, щоб наступні заняття вже починалися з готової проблеми, бажано не однієї. Це дозволяє розвинути новий етап навчальної діяльності – дослідницький, тобто роботу над цими проблемами;

–безінерційність – уміння приймати оригінальні рішення при розгляді нових нетрадиційних проблем, не обмежуючи себе тільки попереднім досвідом і знанням, не спираючись на них;

–оперативність – уміння швидко реагувати на зміни психолого-педагогічних обставин, навчальну ситуацію тощо;

–методологічність – уміння послідовно, не відхиляючись від мети, осмислювати навчальні, життєві, організаційні ситуації;

–утилітарність – орієнтація на пошук шляхів практичного використання знань, умінь, навичок;

–відкритість – уміння приймати різні припущення та ідеї, пристосовувати їх для розв'язання нових практичних завдань;

–домінантність – здатність відокремлювати головне і не зав'язнути у дрібницях. Необхідно вимагати від учнів уміння не тільки висловлювати свої думки, а й відстоювати їх аргументовано – це виробляє вміння аналізувати, виділяти головне та узагальнювати матеріал;

–самокритичність – схильність і здатність до вдосконалення засобів логічного мислення у зв'язку зі змінами характеру проблеми та умов їх вирішення;

–рефлективність – здатність аналізувати свою діяльність, здатність самовизнавати внутрішні психологічні стани [72, 235].

Знання учнів з математики краще узагальнюються та поглиблюються, коли заняття гуртка в МАН проводяться у тісному зв'язку з курсом основної школи, коли в кожній його темі проводиться повторення та систематизація важких питань основного курсу. Тому ефективнішими виглядають ті заняття основного та спеціального курсу в МАН, вчитель яких один і той же.

Виходячи з вищесказаного, коротко можна сказати так: лабораторія – це така форма організації навчання учнів, яка поєднує заняття основної школи із заняттями гуртка МАН та дослідницькою діяльністю учнів – членів МАН, де поряд із традиційним навчанням використовуються нові розвиваючі технології.

Раціональне використання засобів навчання. Основними засобами навчання математики і тепер є підручники, збірники задач і вправ, навчальні методичні посібники, дидактичні матеріали, засоби унаочнення, обчислювальні засоби. Особливої ролі набули в наш час персональні комп'ютери, які стали виконувати багато функцій, у тому числі як засоби унаочнення, обчислення і контролю, програмування, моделювання ситуацій (допомога дослідження узагальненої чи проблемної задачі) тощо. Безумовно вони мають переваги перед традиційними засобами, особливо в науково-дослідницькій діяльності учнів у МАН. Перелічені засоби навчання використовуються, звісно, і в роботі з учнями МАН. Тут проблему ми вбачаємо в тому, як забезпечити досконале, доведене до автоматизації уміння користуватися ними. Йдеться про ґрунтовне оволодіння засобами і способами пізнання, тими практичними та інтелектуальними можливостями особистості, що зумовлюють успішні дії у цій царині.

Щодо дітей – учнів МАН, то необхідно добиватись аби вони не лише оволодівали необхідними математичними знаннями, але й діяли економно, вивільняючи час для творчої діяльності, зокрема для дослідження поставленої проблеми. Разом з тим для цієї категорії учнів надзвичайно важлива наявність у шкільній бібліотеці та кабінеті математики різноманітних збірників олімпіадних та конкурсних задач, науково-популярної літератури, зокрема таких збірників як: «У світі математики», журналів «Квант», «Математика в школі», кращих науково-дослідницьких робіт учнів – членів МАН.

В бібліографії, якою завершується наше дослідження, наведено джерела, якими вчитель може активно оперувати у процесі навчання математики учнів – слухачів, кандидатів та членів

МАН такі науково-популярні видання (їх ми умовно розбили за рівнями).

Початковий рівень: [60], [44], [211].

Середній рівень: [100], [190], [35], [219], [178], [104], [59].

Просунутий рівень: [41], [119], [7], [237], [55], [179].

Значною допомогою в організації роботи з учнями МАН виявляються завдання різноманітних олімпіад: очних та заочних, завдання ТЮМу [14, 36, 37, 38, 43, 53, 122, 169, 220, 239].

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1

1.Аналіз стану психологічних досліджень щодо проблеми здібностей свідчить про її багатогранність, складність і невизначеність. Більшість дослідників вважають, що здібності – це такі індивідуально-психологічні особливості людини, які сприяють успішному виконанню нею тієї чи іншої діяльності, вони поєднують в собі біологічно скеровані задатки, розвиток яких залежить від конкретного середовища. Творчі здібності пов'язуються зі створенням нового, з пошуком нових засобів діяльності. Математичні здібності – це здатність утворити на математичному матеріалі узагальнені, згорнуті, гнучкі і обернені асоціації та їх системи. Відповідно до діяльнісного підходу, кожен із компонентів математичних здібностей має здатність до розвитку завдяки організації математичної діяльності, в основі якої система задач, метод навчального та наукового пізнання – математичне моделювання та дослідження.

2.Вікові особливості прояву математичних здібностей учнів – членів МАН полягають в індивідуальних розмежуваннях загального напрямку репродуктивного, творчого і наукового мислення та їх поєднання. У школярів з віком посилюється інтерес до проблемних математичних завдань, прагнення пізнати нове. Для розвитку математичних здібностей учнів при вивченні математики рекомендується використовувати евристичний і дослідницький методи навчання, а також елементи проблемного навчання, що не позбавляє від необхідності застосування інших методів.

3.Виявлено особливості і переваги МАН як структурної складової системи позашкільної освіти за цілями та завданнями; за організаційними та виховними функціями.

4.До основних вимог щодо системи роботи зі слухачами, кандидатами та членами МАН слід віднести постановку цілей і завдань, структуру мотивів навчальної діяльності учнів у рамках МАН, формування в учнів навичок і умінь навчальної праці. Доцільним є створення нової форми організації – лабораторії, яка поєднує заняття основної школи з заняттями гуртка МАН та пошуково-дослідницькою діяльністю учнів, де поряд із традиційним навчанням використовуються елементи нових розвивальних технологій.

Виходячи зі встановлених дидактичних умов і принципів особистісно орієнтованого навчання, доцільно створювати методику розвитку математичних здібностей школярів у діяльності МАН на різних етапах їх дорослішання.

Пункти першого розділу автором висвітлено у: [166], [167], [168], [169], [171].

РОЗДІЛ 2
МЕТОДИКА РОЗВИТКУ МАТЕМАТИЧНИХ ЗДІБНОСТЕЙ УЧНІВ У НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ В РАМКАХ МАЛОЇ АКАДЕМІЇ НАУК

2.1. Система розвитку математичних здібностей учнів – членів МАН

Виявлення і розвиток математичних здібностей учнів – одна з відповідальних та важких задач педагогічної школи, адже, математика в сучасному суспільстві, у першу чергу, є вагомою зброєю для майбутньої роботи кожної людини. Тобто, математика перетворилася в специфічну виробничу силу і тому ми не маємо права загубити природні творчі здібності дитини [63].

Запропонована система розвитку математичних здібностей учнів – членів МАН базується на теорії поетапного формування розумових дій П. Я. Гальперіна [56, 57] й Н. Ф. Тализіної [216] та на дослідницькій технології. В основі теорії поетапного формування розумових дій лежить психологічне вчення про перетворення зовнішньої предметної діяльності на внутрішню психічну діяльність. Формування внутрішніх розумових структур психіки відбувається за освоєння зовнішньої соціальної дійсності. У навчальній діяльності автори концепції виокремили три складові: орієнтовну, виконавчу і контрольну. Орієнтовна – базується на використанні учнями об'єктивних умов, необхідних для цієї діяльності. Виконавча – забезпечує послідовне подолання основних етапів навчання. Контрольна – вимагає від учня спостереження за перебігом навчальної діяльності та порівняння її результатів із відповідними зразками, а в разі виявлення розбіжностей – відповідного коригування орієнтовної та виконавчої її складових. Інша особливість цієї теорії полягає в цілеспрямованому формуванні мотивації навчання. Власне, відсутність такого елемента знецінює низку дидактичних концепцій. Остання особливість цієї концепції стосується її практичної спрямованості, що безпосередньо позитивно впливає на прискорення підготовки конкретних спеціалістів, а також від організації навчання. Тому нами запропонована така форма організації у діяльності МАН, як лабораторія. Уся організація роботи лабораторії в рамках МАН повинна бути націлена на здійснення дослідницької діяльності учнів з урахуванням їх вікових психологічних особливостей, подальший математичний розвиток.

Ведучи мову про дослідницьку діяльність учнів, слід розмежовувати поняття навчально-дослідницької діяльності та науково-дослідної діяльності.

Навчально-дослідницька діяльність – це діяльність, головною метою якої є освітній результат, вона спрямована на навчання учнів, розвиток у них дослідницького типу мислення. Науково-дослідна діяльність – це вид діяльності, спрямований на отримання нових об'єктивних наукових знань [159].

Залучаючись до дослідницької роботи, учням слід рухатися своєрідними сходинками: від простого до складного, від визначення і фіксації конкретної проблеми до створення наукових робіт, від навчально-дослідницької до науково-дослідної діяльності.

Практичне застосування методики розвитку математичних здібностей учнів – членів МАН, її апробація та коригування, яка відбувалась протягом багатьох років, дозволяє стверджувати, що ефективність методики виявляється в повній мірі тоді, коли відбувається постійна системна взаємодія та взаємодоповнення навчання математики в МАН з навчальним процесом у школі. Більш того, орієнтація на обов'язкове продовження шкільної навчальної діяльності учнів у МАН (від слухачів до членства), робить розвиток математичних здібностей учнів цілісним процесом згідно з дидактичними принципами наступності й неперервності в навчанні математики. При побудові моделі системи розвитку математичних здібностей учнів ми виходимо з моделі А.А.Столяра, що виділяє три основні аспекти математичної діяльності:

1) математичний опис конкретних ситуацій;

2) логічна організація математичного матеріалу, отриманого в результаті першого аспекту діяльності;

3) застосування математичної теорії, отриманої в результаті другого аспекту діяльності [212]. Усі сторони єдиного процесу пізнання можуть відбуватися в трьох взаємопов'язаних

аспектах математичної діяльності та є методологічною основою описуваної концепції розвитку математичних здібностей.

У моделі А.А.Столяра відображено і деякі особливості досліджень в математиці і в галузях науки, де застосовується математика. Подібні дослідження часто починаються з пошуку математичної мови і апарату для опису об'єкта та побудови його математичної моделі. Потім побудована модель досліджується і вдосконалюється за допомогою відповідної математичної теорії. І нарешті побудована теорія за допомогою різних інтерпретацій застосовується до нових об'єктів. Такий підхід наближає процес навчання до процесу дослідження і може вважатися дослідницькою діяльністю школяра, бо зберігає логіку дослідження вченого [212]. Навчання математики в рамках МАН, будучи продовженням і конкретизацією шкільної програми, повинне базуватися на певній загальнодидактичній системі . Як такою ми приймаємо систему проблемного навчання, згідно з якою процес навчання протікає у вигляді заняття, побудованого на послідовно створюваних проблемних ситуацій.

Коротку характеристику основних типів проблемних ситуацій подано в табл. 2.1 [212].

Таблиця 2.1

Характеристика основних типів проблемних ситуацій

Основні аспекти математичної діяльності	Основні типи проблемних ситуацій			
	Мета	відоме	невідоме	результат
Математичний опис деяких ситуацій чи задач	Впровадження нових понять	Ситуація, що підлягає математичному опису	Математичний апарат, необхідний для опису задачі	Нові математичні знання
Логічна організація математичного матеріалу	Система-тизація знань	Сукупність математичних пропозицій, що описують модель	Спосіб логічної організації математичної теорії	Система математич-них знань
Застосування математичної теорії	Розкриття можливості застосування знань в новій ситуації	Конкретна задача і необхідна математична теорія	Застосування теорії до нового матеріалу в новій ситуації	Перенесення математи-чних знань, застосування

Головним при такому навчанні є те, що учні самі стають співучасниками побудови деякої маленької теорії. Після вивчення теми учень має можливість порівняти результат власного дослідження (проведеного, зрозуміло, під керівництвом і за допомогою вчителя чи керівника) з викладеною у математичній літературі теорією.

Тепер, узагальнюючи особливості розвинутої методики та результати її впровадження, покажемо, якою є послідовність її застосування і які етапи при цьому доцільно виявити, створивши модель розвитку математичних здібностей учнів у системі, починаючи від школи і закінчуючи МАН (рис. 2.1).

Рис. 2.1. Модель розвитку математичних та дослідницьких здібностей учнів у рамках МАН

Схема організації навчальної діяльності в МАН (рис. 2.2) дозволяє представити послідовність та характер діяльності як учня, так і вчителя за розробленою методикою. З переходом на наступний, більш високий етап на вчання, роль МАН значно збільшується. Це символічно відображено на наступній схемі. Перехід до етапу III означає, що учень може виходити на захист власної дослідницької роботи на конкурсі МАН через етап II завдяки власному науково-дослідному проекту. Цьому відповідає завершення циклу діяльності в МАН, що відтворює завершеність системи.

Рис. 2.2. Схема організації навчальної діяльності у рамках МАН

Таким чином, все це вказує педагогові на те, як необхідно організовувати навчально-пізнавальну діяльність учнів, щоб ефективно керувати процесом їхньо го навчання та як швидше досягти позитивних результатів з математичної культури учня в складному процесі виконання дослідницьких робіт.

Методика розвитку математичних здібностей учнів – слухачів МАН. Підготовка учнів до виконання дослідницьких робіт починається з уроку та здійснюється у рамках МАН при систематичному застосуванні дослідницького підходу в навчанні. Дуже важливо враховувати, що процес навчання початкам наукового дослідження, з урахуванням вікових особливостей, є поетапне цілеспрямоване формування всіх компонентів математичної та дослідницької культури школяра:

–розумових дій (аналіз і виділення головного; порівняння; узагальнення та систематизація; визначення й пояснення понять; конкретизація, доведення і спростування; вміння бачити суперечності);

–умінь і навичок роботи з книгою та іншими джерелами інформації;

–умінь і навичок, пов'язаних з культурою усної та письмової мови;

–спеціальних дослідницьких умінь і навичок [146].

Учні 7–8-х *класів* спеціально запрошуються з різних шкіл до гуртка з математики в рамках МАН, де вони мають можливість ознайомитися з додатковою інформацією з математики та набути необхідних дослідницьких умінь. Відвідуючи такий гурток, учні стають слухачами МАН. На цьому етапі пропонуємо дітям заповнити анкету з приводу виявлення у них загальних творчих здібностей (див. Додаток А).

В організації навчальної діяльності слухачів МАН ми звертаємо увагу на те, що саме цей вік (7-8 класи) за висновками психологів і дидактів (Крутецький В. А . [115], Костюк Г. С. [113]) є сприятливим для оволодіння абстрактними алгебраїчними поняттями та геометричними формами, для розвитку дедуктивного мислення, розумової активності. Б. В. Гнеденко вказує, що причина невдач учнів при вивченні курсу математики лежить зовсім не у вродженій нездатності частини дітей до математичного пізнання. Вона криється у:

1) непослідовності в отриманні математичних знань; 2) відсутності звички вникати в суть означень, формул, понять; 3) відсутності звички уважно слідкувати за ланцюжком логічних виводів, критично їх осмислювати, помічати відсутність необхідних для повноти висновків ланок міркувань [64]. Далі він зазначає, що систематичне тренування логічно міркувати на простих ситуаціях і

задачах може принести неоціненну користь, а поряд із звичкою до логічного висновку важливо виховувати математичну інтуїцію, яка дозволяє намічати остаточний результат і приблизний шлях міркувань. Тому на заняттях математики необхідно більш активно займатися розвитком умінь у використанні загальних форм математичної діяльності, таких як: використання відомих процедур; кодування; класифікація та систематизація; ставити та перевіряти гіпотези, доведення і спростування; розробка алгоритмів.

З метою розвитку структурних компонентів математичних здібностей слухачів пропонуємо такі три серії математичних задач:

І серія: аналітико-синтетичні задачі, які спрямовані на розвиток інтелектуального компоненту, а саме на вдосконалення аналітико-синтетичної діяльності школярів, на встановлення та обґрунтування закономірностей між величинами.

ІІ серія: математичні задачі з різним ступенем допомоги (підказкою), спрямовані на розвиток гнучкості мислення та мотиваційно-особистісного компоненту математичних здібностей учнів (наполегливості, впевненості в своїх силах) та інше.

ІІІ серія: задачі самостійно-дослідницької спрямованості, які сприяють розвитку в учнів умінь встановлювати нові факти, виявляти причинно-наслідкові залежності, робити узагальнення, самостійно та наполегливо розв’язувати завдання, тобто проводити власне монодослідження.

Розглянемо задачі, різного рівня складності, розв’язання яких сприятиме розвитку в учнів логічного мислення, алгоритмічної та геометричної культур.

Задача 1. Порівняти: 1) і (– параметр).

Яка б не була простою задача, але якщо її розв’язання передбачає використання двох або більше алгоритмів, або ж, якщо в ньому міститься деяке дослідження (скажімо по параметру), то помилки неминучі. Ясно, що для: при при EMBED Equation.3 при Цікаво, який відсоток слухачів семикласників зразу дадуть правильну відповідь.

Задача 2. Чи є тотожними вирази і (– параметри).

Реакція слухачів восьмикласників на цю задачу демонструє використання стандартної формули = ( ), забуваючи часто при цьому вказану умову в дужках. Підказка розглянути умову дасть змогу по новому осмислити згадану формулу.

Задача 3. Чи є правильною рівність ? Знайдіть ще декілька подібних прикладів.

Перевірити задану рівність не представляє для дітей труднощів, якщо вони знають властивості арифметичного квадратного кореня. А знайти ще декілька подібних рівностей значно ускладнює цю задачу. Тут треба вміти створювати і користуватися різними моделями або конструкціями. А тому важливо навчити дітей переводити умову та результат з однієї мови на іншу, тобто кодувати інформацію. Багато шкільних задач містять в собі елементи кодування – це позиційний запис деякого числа, текстові задачі, заміна змінних, перехід від алгебраїчної задачі до геометричної і навпаки. Кодування сприяє виявленню прихованих властивостей об’єкту (вагомих для заданої задачі) шляхом їх в іншу систему зв’язків. Переформулюємо

останню задачу на мову такого рівняння з двома натуральними змінними. В результаті ми створили модель, дослідження якої полягає у знаходженні співвідношень між і , при виконанні яких є справедливим наша узагальнена рівність. Для цього достатньо

провести елементарні перетворення, в результаті яких

Подібні задачі дають змогу учневі навчитися узагальнювати деякі математичні факти, що сприяє розвитку формалізації математичного матеріалу та здатності до узагальнення матеріалу.

Задача 4. Барон Мюнхаузен стверджує, що в одній компанії з 5 людей кожен знайомий з двома і тільки двома іншими. Чи правий барон на цей раз?

Якщо зобразити людей точками, а точки, що відповідають двом знайомим людям з’єднати відрізком, то існування п’ятикутника означатиме, що на цей раз барон правий. Розв’язання цієї задачі звертає на себе увагу геометрична інтерпретація задачі далекої від геометрії. Тим самим вказується шлях розвитку одного з геометричних компонентів математичних здібностей.

В роботі зі слухачами МАН слід приділяти навчанню висувати гіпотези. В умінні продукувати гіпотези можна і треба спеціально тренуватися. Ось проста вправа: «Давайте разом поміркуємо: Якою може бути найбільша кількість гострих кутів в опуклому 7-кутнику?». Якими можуть бути гіпотези: гострих кутів у довільному n-кутнику може бути не більше ніж n, а оскільки сума всіх зовнішніх кутів опуклого n-кутника дорівнює 360 °, то в 7-кутнику не може бути більше 3 гострих кутів, для кожного цілого n > 3 існує опуклий n-кутник, що має 3 гострі внутрішні кути.

Бувають неправдоподібні гіпотези, їх зазвичай називають «провокаційними ідеями». У нашому випадку це може бути, наприклад, така: «У довільному n-кутнику всі кути гострі».

Гіпотези, припущення, а також різні провокаційні ідеї дозволяють ставити реальні та уявні експерименти. Для того, щоб навчитися їх виробляти, треба навчитися ставити запитання: «за яких умов це може бути застосовано?», «чи можливо…?», «чи не припустити…?», «можливо, що якщо…?».

Особливої уваги заслуговує побудова провокаційних гіпотез з боку вчителя з метою залучення більшого кола слухачів МАН до пошуково-дослідницької діяльності. Підтвердженням цього може бути приклад з практики. Вчитель розбирає нестандартний

прийом розв’язування діофантового рівняння і висловлює сміливу гіпотезу, що подібне рівняння використовувалось при будівництві старовинної турецької фортеці «Золотий пагорб». Наступного заняття слухачі МАН розгорнули професійну дискусію з цього приводу.

На I етапі в процесі навчання математики учнів – слухачів у структурі МАН на різних заняттях використовуємо як традиційні підходи, так і навчально-дослідницькі технології завдяки монодослідженню. Під монодослідженням школярів будемо розуміти дослідження з конкретної теми деякої задачі, що передбачає використання знань для розв’язання, які не виходять за рамки теми цього питання.

Форми завдань при такій технології навчання можуть бути різноманітними, а саме – це завдання для швидкого розв’язання в аудиторії, вдома, і завдання, що вимагають тривалого часу. Це залежить від об’єму елемента пошуку в завданнях для учнів. Такі завдання можуть бути індивідуальними, може відбуватися евристична бесіда, проблемний виклад теми тощо. Найчастіше на цьому етапі використовуються методи фронтальної роботи з учнями на заняттях гуртка.

Заняття передбачають роботу в макро- і мікро-групах та презентацію результатів роботи школярів. Плануються нетрадиційні заняття – доповіді про свої пошуки при розв’язанні однієї задачі-проблеми, заняття – дослідження поставленої керівником задачі, заняття – творчий звіт.

Процес виконання монодослідження можна зобразити схематично (рис. 2.3).

Рис. 2.3. Процес дослідження з конкретної теми

Наведемо конкретні приклади монодослідження для слухачів МАН, причому перший прилад продемонструє монодослідження конкретної навчальної задачі, а другий – моно дослідження конкретної теми.

Приклад 1. Знайдіть усі прості числа p і q, для яких .

1. Проаналізувавши умову задачі, учні визначають, що корисно буде розкладати дані в умові вирази на множники, а далі дати можливість самостійно аналізувати отримані результати. Спробуємо так діяти і в нашій ситуації:

; ; .

Проаналізуємо останню рівність. Права частина ділиться на 2, тому і ліва частина ділиться на 2. Але множники і однієї парності, тобто якщо один з них парний, то і другий також парний. (Дійсно, нехай , тоді р – непарне, тоді — парне.) Отже, маємо ланцюжок міркувань: ⇒ ⇒ одне з чисел або ділиться на 2 ⇒ обидва числа і діляться на 2 ⇒ ліва частина ⇒ , ⇒ ⇒ . Оскільки q – просте число і , то (єдине парне просте число – це двійка). Далі легко знаходимо, що . Відповідь: , .

2. Учнів спонукаємо до формулювання узагальненої задачі. Для цього пропонуємо в рівнянні замінити число 2 на 3, 4, 5, 6, 7, (– натуральне), причому рівняння із заміненим числом надаємо проаналізувати кожному слухачеві індивідуально, диференціюючи за складністю.

3. Збір фактичного матеріалу. Учні, розв’язавши «частинні» рівняння, виступають перед аудиторією з ідеєю та основними етапами їх розв’язання.

4. Систематизація, аналіз фактичного матеріалу. Учні, аналізуючи розв’язання «частинних» рівнянь, знаходять залежність між параметром і змінними даного рівняння, висувають гіпотезу.

5. Доведення істинності гіпотези. Діти доводять або перевіряють гіпотезу на основі відомих їм властивостей простих чисел.

6. Висновок. Учні записують результати монодослідження і роблять деякі узагальнення щодо ідеї розв’язання в залежності від параметра .

У процесі розв’язання таким чином задач можна створити умови для формування компонентів математичних здібностей: гнучкості мислення, самостійності, перенесення знань, оперування структурами відношень і зв’язків, здатності до аналізу, узагальнення, здатності висувати гіпотези.

Зауважимо, що коли в учня на деякому етапі монодослідження з’явилися труднощі, то вчителю необхідно задати питання, що наштовхують до основної ідеї, або запропонувати розв’язання допоміжної задачі.

Приклад 2, що взято із [220, Т. 4. – Вип. 1, 1998. – С. 11–14], може бути запропонований вчителем після вивчення теми «Числові множини». Розглянемо множину чисел А авання, яка полягає в тому, що парі чисел (a, b) з множини А ставиться у відповідність остача від ділення суми a + b на число 7, і операцію множення, яка означає, що впорядкованій парі чисел (a, b) ставиться у відповідність остача від ділення добутку $a \cdot b$ на 7. Оскільки ці операції відрізняються від звичайного арифметичного додавання та множення, будемо їх позначати відповідно $\oplus$ та $\odot$.

Арифметику, побудовану таким чином, будемо називати арифметикою за модулем 7 або 7-арифметикою, бо в ній тільки 7 чисел.

Результати виконання арифметичних дій у звичайній арифметиці зручно подавати у вигляді таблиць. Далі слід запропонувати учням самостійно скласти таблиці додавання та множення в 7-арифметиці.

Аналогічно можна побудувати арифметику лишків за будь-яким натуральним модулем m, або m-арифметику. Елементами m-арифметики є числа 0; 1; 2; ...; m – 1. Додавання та множення в m-арифметиці визначається такими правилами: сумою (або добутком) двох чисел буде остача від ділення на m їх звичайної арифметичної суми (або добутку). Віднімання та ділення в m-арифметиці подібно до звичайної арифметики вводяться як обернені додаванню та множенню відповідно. Число x будемо називати різницею чисел b і a ($xb \ominus a$), якщо $a \oplus xb$. Наприклад, в 7-арифметиці $1 \ominus 2 = 6$, бо $2 \oplus 6 = 1$. Число x будемо називати часткою від ділення b на a ($xb \odot a$), якщо $a \odot x = b$. Можна довести, що віднімання в m-арифметиці завжди можливе і приводить до єдиної відповіді (це потрібно зробити в аудиторії разом з учнями). Ділення в m-арифметиці не завжди можливе, а якщо можливе, то не завжди приводить до єдиної відповіді. Однак, якщо модуль арифметики – число просте, то ділення в такій арифметиці на будь-яке число не завжди можливе та однозначне (запропонувати учням самостійно це довести).

Після розгляду такої теорії доцільно перейти до практичних завдань теми.

1. Перевірте, чи виконується розподільний закон множення стосовно додавання в 7-арифметиці?

2. Чи буде виконуватися в цій арифметиці розподільний закон множення стосовно віднімання?

3. Перевірте виконання формул скороченого множення в 7-арифметиці:

1) $a2 \ominus b2(a \ominus b) \odot (a \oplus b)$;
2) $(a \oplus b)22 \oplus 2 \odot a \odot b \oplus b2$;
3) $(a \ominus b)22 \ominus 2 \odot a \odot b \oplus b2$.

Розв'язуючи ці завдання, учні мають переконатися, що в 7-арифметиці виконується багато правил звичайної арифметики, а також мають збагнути, що 7-арифметика є звичайною скінченною арифметикою на днях тижня.

Далі в учнів виникає природне запитання: «Чи можна стверджувати, що ці твердження виконуються для довільної m-арифметики?». Такі дії спонукають учнів до узагальнення щойно побудованої нової для них маленької теорії.

Наступним кроком у продовженні побудови такої нової теорії є її переваги і недоліки та застосування.

Зокрема, в т-арифметиках відсутні дробові та від'ємні числа, ділення виконується без остачі, будь-які числа мають обернені (якщо модуль – просте число). Застосування m-арифметик дозволяє спростити обчислення, які в звичайній арифметиці досить громіздкі.

Зобразимо числа 0; 1; 2; 3 і 4 з 5-арифметики у вигляді точок на рисунку і покажемо стрілками, у що переходить кожне число при множенні на 3. Маємо таку схему (рис. 2.4):

Рис. 2.4. Схема множення на 3 у 5-арифметиці

Нею можна користуватися як таблицею множення на 3 в 5-арифметиці. Тому її називають граф-схемою, або просто схемою множення на 3 в 5-арифметиці. Аналогічно можна побудувати граф-схеми множення на будь-яке натуральне число в довільній *m*-арифметиці. Змінивши напрям стрілок на зворотний, одержимо схеми ділення.

Так само будуються схеми піднесення до квадрата. Наприклад, для 7-арифметики схема піднесення до квадрата має вигляд (рис. 2.5):

Рис. 2.5. Схема піднесення до квадрата для 7-арифметики

Схеми добування квадратного кореня можна побудувати, якщо змінити напрям стрілок на зворотний.

Домашнє завдання

1.Складіть таблиці додавання та множення в 5-арифметиці.

2.Визначте, чи виконується в цій арифметиці переставний та сполучний закони додавання? Чи виконуються вони в будь-якій *m*-арифметиці?

3.Чи існує в 3-арифметиці (5-арифметиці) нейтральний елемент (елемент, що не змінює результату операції) відносно операції $\oplus$?

4. Для кожного елемента 3-арифметики (5-арифметики) вкажіть йому протилежний. Чи визначається він однозначно?

5.Складіть таблицю додавання та таблицю множення у 12-арифметиці А = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12}. Запишіть усі способи, якими можна розкласти числа 12 та 1 на 2 множники в цих арифметиках і знайдіть практичну назву цій арифметики (наприклад – скінченна арифметика на годинниках).

Такого роду завдання можна і доцільно запроваджувати після вивчення кожної запланованої теми. Орієнтовний перелік таких задач можна знайти у додатку В.

Учні на І етапі повинні не тільки збагатити математичні знання, а й навчитися основним прийомам моделювання, тому вчителю доцільно коментувати всі його етапи. Згодом дослідницькі уміння будуть накопичуватися в спільній пізнавальній діяльності учнів.

Таким чином, слухачі МАН одночасно на заняттях гуртка з математики:

1)отримують новий додатковий математичний матеріал, що відповідає їх віковим особливостям (здебільшого використовується індуктивний підхід разом з методами аналізу й синтезу при вивченні теоретичного матеріалу за допомогою узагальнення результатів теоретичного розв’язання часткових проблем або конкретної задачі);

2)формують дослідницькі уміння завдяки розв’язуванню задач пошукового характеру на основі отриманих знань з даної тематики.

Реалізація І-го етапу навчання слухачів МАН пред’являє спеціальні вимоги до керівників гуртка, а саме:

1) розробити програму з математики для гуртківців МАН, яка передбачає не тільки поглиблене вивчення предмета, що дає більші можливості для організації навчально-дослідницької діяльності учнів, а й розгляд конкретних задач-проблем з кожної теми як колективного характеру так і індивідуального;

2) складати теми для дослідження в рамках монодослідження;

3) виконувати функції співучасника дослідницької роботи в рамках монодослідження;

4) створювати педагогічні й організаційні умови для вивчення учнями різних джерел інформації з метою збагачення знань з теми, що вивчається;

5) залучати слухачів МАН до участі в олімпіадах, конкурсах, до відвідування конференцій, захистів учнівських проектів.

Отже, діяльність на І етапі здебільшого планується вчителем як монодослідження на ґрунті шкільних навчальних задач для колективної або індивідуальної діяльності учнів у гуртках МАН.

Методика розвитку математичних здібностей учнів – кандидатів МАН. Учні 9–10-х класів, які розвивають свої інтереси та нахили до наукових досліджень або виконують дослідницькі завдання творчого характеру, стають кандидатами Малої академії, а дехто і її членами. На цьому етапі ускладнюються форми пошукової та дослідницької роботи, збільшується їх об'єм, систематично проводиться робота з підготовки до олімпіад. А також:

1) удосконалюються вміння аналізувати навчальну інформацію вербального, практичного і аудіовізуального характеру в аудиторній та домашній роботах;

2) удосконалюються вміння виділяти головне в аудиторній і домашній роботах вербального, практичного та пізнавального характеру.

3) удосконалюються вміння: узагальнювати різну інформацію вербального характеру; застосовувати різні узагальнення для осмислення і систематизації знань; вчитися використовувати різні засоби для узагальнення інформації, отриманої в роботі пізнавального характеру; узагальнювати інформацію складнішого характеру і широкого обсягу: двох параграфів, теми, нескладних міжпредметних зв'язків; складати складніші узагальнюючі характеристики, плани, таблиці, модельні схеми; ознайомлюватися з видами проблемного узагальнення;

4) удосконалюються вміння: конкретизувати різну інформацію; використовувати різні прийоми і види конкретизації для закріплення та застосування знань, умінь і навичок. На основі планів, характеристик, схем, моделей реконструювати конкретну інформацію. Удосконалювати вміння спостерігати, вчитися чітко висловлювати думки у вигляді розповіді та звіту (як письмового, так і усного);

5) удосконалюються досвід індуктивно-дедуктивного і аналітичного доведення;

6) формується досвід розуміння й оцінки запропонованих проблемних ситуацій, вчаться розглядати проблему з різних точок зору, бачити нові функції та цілісну структуру об'єкта, самостійно будувати гіпотези і план розв'язання задач, формулювати аналогічні завдання;

7) удосконалюються уміння і навички роботи з книгою та іншими джерелами інформації: самостійно виконувати завдання відтворюючо-творчого характеру, освоювати вирішення окремих видів пошукових завдань, виконувати проблемні завдання порівняльно-узагальнюючого типу на нескладному навчальному матеріалі; виявляти міжпредметні зв'язки в окремих завданнях, у процесі підготовки домашніх робіт, вміти узагальнювати, систематизувати матеріал у межах теми; слухати лекцію вчителя, доповідь учня з опорою на план і без нього; сполучати сприйняття змісту лекції, доповіді із записами основних положень у вигляді плану або конспекту, відтворювати основні думки прослуханого у вигляді рецензії [163].

На другому етапі – організаційно-підготовчому – виявляються учні, які бажають і можуть проводити дослідження з деякої обраної теми. Тут роль керівника гуртка є вагомою, бо в процесі роботи з учнями він має не тільки виявити «іскринку» дослідницького таланту, а й допомогти усім бажаючим у виборі теми навчального дослідження, визначити коло питань, які потребують розв'язання, підібрати необхідну літературу. Вчитель, як організатор навчального процесу в рамках МАН, має проявляти управлінські здібності та творчий підхід, оскільки керівництво навчально-дослідницькою роботою школяра – це той вид діяльності, де максимально мають розкриватися можливості співпраці, співавторства, співтворчості.

Цей етап збагачується навчально-дослідницькою практикою, основними цілями якої є:

– поглиблення знань з обраної теми;

– удосконалення дослідницьких навичок;

– формування математичних здібностей;

– формування інформаційної культури;

– задоволення потреб у професійному самовизначенні та творчій самореалізації.

Реалізація такої дослідницької практики учня пред'являє до вчителя або керівника ряд додаткових вимог:

– виконувати функції співучасника навчально-дослідницької роботи (якщо не може сам, то має залучити інших фахівців);

– чітко планувати етапи залучення учнів до складання дослідницьких проблем, які безпосередньо випливають зі шкільних навчальних задач (користуючись або додатковими питаннями пошукового характеру, або конкретизацією чи узагальненням, або зміною параметрів чи об’єктів);

– проводити пошук різних можливостей проектування основних етапів дослідження (що слід робити? як можна зробити? що для цього потрібно? яка послідовність дій? який можливий результат? які можливі ускладнення?) [11, 21, 65].

Тепер для кандидатів МАН стають звичними такі дії:

1) слухати лекції з математики, відвідуючи гурток з математики;
2) перетворювати навчальні задачі на дослідницькі шляхом узагальнення, постановкою додаткових запитань, зміною параметрів тощо;
3) виконувати домашні завдання пошукового характеру;
4) брати участь в олімпіадах, конкурсах;
5) відвідувати передзахист робіт членів МАН;
6) проектувати і проводити роботу з теми оглядового характеру або з навчально-дослідницької теми;
7) проводити звіти або доповіді за власним проектом.

На цьому етапі учням – кандидатам МАН пропонуються або навчально-дослідницької задачі, або теми для рефератів проблемного характеру (оглядові доповіді). Ось перелік деяких таких доповідей:

– розподіл простих чисел;
– трансцендентні числа;
– комплексні числа та їх використання;
– числові конструкції;
– сумування послідовностей;
– функціональні рівняння;
– методи доведення нерівностей;
– метод мас в геометрії;
– екзотичні формули знаходження параметрів трикутників;
– характеристика вершин та ребер графа;
– фрактальна геометрія.

До цих тем додається література, яка рекомендована для початкового ознайомлення з темою, для підготовки до оглядової доповіді. Орієнтовний перелік таких тем можна знайти у додатку В.

Одночасно на цьому етапі доцільно ввести спеціальний курс «Основи наукової діяльності» для підготовки учнів – кандидатів МАН до самостійної дослідницької діяльності, розрахований на 17 або на 34 години. На цьому спецкурсі учні знайомляться з методами дослі дження, видами науково-дослідницьких робот, вимогами до оформлення роботи тощо (Додаток Б).

Покажемо більш детально, як з відомих задач для учня – кандидата МАН можна сконструювати проблему для дослідження:

Учням відомі наступні теореми.

Теорема 1. Серединний перпендикуляр відрізка є геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців цього відрізка.

Теорема 2. Геометричним місцем точок, які рівновіддалені від сторін даного кута є бісектриса цього кута.

На заняттях гуртка МАН ці дві теореми можна розглянути в контексті спільної проблеми:

Нехай і є геометричними фігурами, а – відстань від точки до фігури . Знайти множину точок, які задовольняють рівності .

Дійсно, якщо ми розв'яжемо цю проблему у випадку, коли фігури та є точками, то одержимо теорему 1; а якщо розв'яжемо у випадку, коли фігури та є променями із спільним початком, то отримаємо теорему 2.

Описана ситуація має породити у кандидатів МАН багато запитань. Перш за все, чому перелік фігур є таким бідним? Чи не можна замість точок і променів розглянути інші геометричні фігури відомі учневі, скажемо – прямі, кола, еліпси, гіперболи? Крім того, чому ми маємо розглядати спеціальне розташування променів, а саме співпадання їх вершин? Які зміни будуть у розв'язанні задачі та відповіді, якщо промені будуть або паралельні, або не матимуть спільного початку. Розгляд цих питань паралельно породжує нову проблему для учня – що розуміти під відстанню між двома фігурами та , зокрема, під відстанню від точки до променя, відрізка, кола, еліпса, параболи, гіперболи?

Попередні міркування дозволять керівникові гуртка поставити перед дітьми наступну проблему:

Знайдіть множину точок, рівновіддалених від двох геометричних фігур, якщо кожну з цих фігур вибрано з таких: точка, пряма, промінь, коло, еліпс, парабола, гіпербола.

Особливість цієї проблеми в тому, що учень повинен побудувати непросту розгалужену програму дій:

1)слід зрозуміти поняття відстані між двома фігурами (звернення до понять, які виходять за рамки шкільної програми, але доступні учням);

2)розв'язання задачі буде розвиватися по 21 різному напрямку, бо з наведеного списку можна утворити 21 пару фігур;

3)навіть коли пара фігур буде відомою, то ці фігури можуть розташовуватися різними способами, так що кожен з 21 напрямків, у свою чергу, розбивається на декілька підвипадків;

4)якщо програма розв'язання задачі складена, то ще не зрозуміло, якою має бути послідовність виконання.

Наведемо фрагмент розв'язання задачі для випадку, коли одна з фігур є точкою, а друга – колом. Нехай є колом з центром і радіусом , а є точкою . Якщо лежить зовні кола, то очевидно, що (– відрізок,), а . Оскільки , то

.

Виходячи з фокального означення гіперболи, маємо, що шуканою множиною точок є одна вітка гіперболи з фокусами та . Далі слід розглянути випадки, коли точка лежить на колі (шукана множина точок тоді буде променем) і всередині кола (шукана множина – еліпс).

Звісно, ця проблема має ще логічне продовження – розгляд подібної задачі в тривимірному просторі.

Результати виконання такої навчально-дослідницької задачі, як правило, виходять за рамки окремої теми, тобто за рамки монодослідження, вони націлені на залучення принципово нових для учнів математичних питань. Таке дослідження не може бути завершеним без попереднього вивчення цих питань.

Планувати заздалегідь строки завершення і результати таких досліджень можна не завжди. Тому вчитель повинен пропонувати завдання учням, виходячи з особливостей психіки та рівня здібностей і тоді дитина йтиме в навчально-пошуковій діяльності своїм шляхом та в індивідуальному темпі [21, 24].

Характеристику формування основних компонентів математичних здібностей у кандидатів МАН на етапах дослідження навчально-дослідницьких задач подано в табл. 2.2 (складено на основі [27], [51], [72], [112], [115], [235]).

Таблиця 2.2

Формування компонентів математичних здібностей у кандидатів МАН на етапах дослідження навчально-дослідницьких задач

Етапи дослідження	Формування деяких компонентів математичних здібностей
Мотиваційна діяльність	Бачення суперечностей, оперування структурами відношень і зв’язків
Постановка проблеми	Здатність до формалізації математичного матеріалу, до абстрагування від реальних ситуацій
Збір матеріалу, інформації	Здатність генерувати ідеї, гнучкість мислення
Обробка інформації	Критичність мислення, здатність до аналізу, класифікації, узагальнення
Висунення гіпотези	Здатність висувати гіпотези, дивергентний спосіб мислення
Перевірка гіпотези	Здатність до логічних міркувань з потребою доводити, робити висновки
Висновок	Здатність до оціночних міркувань, аналізу, класифікації, узагальнення

Кожен учень обирає свій темп досліджень навчальних задач, і, якщо заглибленість у проблему приведе його до постановки задач, які підвищать рівень навчально-дослідницької роботи, то можна говорити про продовження діяльності вже на III етапі.

Методика розвитку математичних здібностей учнів – членів МАН. У 10–11-х класах відбувається поглиблення знань з методики дослідження та обробки результатів. Учні вибирають цікаву для них тему і працюють над нею. Все це здійснюється в процесі довготривалої самостійної роботи за індивідуальною програмою. На підготовку доповіді учні – члени МАН витрачають багато часу. Більшість школярів працюють над темою протягом усього навчального року, а іноді дослідження з обраної теми продовжується декілька років – не тільки у шкільні роки, а й у студентські. Робота над доповіддю – це не тільки вивчення раніше отриманих результатів, які надруковані в різних джерелах, а й проведення математичних експериментів з аналізом та осмисленням отриманих результатів, відпрацювання гіпотез тощо, а найголовніше – безперервна робота і консультації учня з керівником, бесіди з ним, його допомога та доброзичливі робочі відносини, які обов’язково складаються в процесі такої спільної діяльності.

На третьому етапі починається безпосередня робота учня – члена МАН над проектом під керівництвом не тільки вчителя. Учень працює над певною проблемою, розв’язує творчу задачу , вчиться самостійно виходити на моделі вищого рівня в своїй дослідницькій діяльності, яка поступово набуває ознак цілісної наукової діяльності. Буває, що в ході розв'язання дослідницької проблеми учень натрапляє на ряд питань, що вимагають консультативної допомоги представників вищої школи. Така співпраця тільки підвищує рівень дослідницької роботи учня, і, як правило, закінчується підготовкою та виступом на конкурсі-захисті робіт МАН. Діяльність учня – члена МАН на цьому етапі вимагає вмінь самостійно обирати алгоритм дослідницької діяльності, критично оцінювати результати своїх досліджень, формулювати проблеми, намічати шляхи їх розв'язання.

Далі наведено перелік деяких можливих дослідницьких тем для учнів:

1. Про одну задачу з теорії множин. Множина A складається із натуральних чисел, причому:

1) ; 2) якщо то ; 3) якщо то .

Чи співпадає множина A з множиною натуральних чисел?

Відповіді на це запитання у нас немає, хоча деякі дослідження цього питання були проведені за допомогою обчислювальної техніки. Вдалося з'ясувати деякі закономірності, характерні для даної множини, однак повного доведення не було знайдено; але є впевненість у тому, що множина A співпадає з множиною N.

Цю проблему поставив Р. П. Ушаков, хоча подібне питання під назвою «проблема » було поставлено ще перед другою світовою війною Л. Каллацем – зараз професор Гамбурзького університету.

2. Цікаві властивості прогресій. Однією з найважливіших теорем, пов'язаною з прогресіями, є наступна теорема.

Теорема Діріхле. Кожна арифметична прогресія, перший член і різниця якої є взаємно простими натуральними числами, містить нескінченно багато простих чисел.

Відомими є такі властивості:

– не існує такої арифметичної прогресії де у якої кожний член є k-им степенем раціонального числа

– якщо кожен член геометричної прогресії є k-им степенем раціонального числа, то знаменник цієї прогресії є k-им степенем раціонального числа.

Дослідіть цю проблему глибше: Скільки послідовних членів прогресії можуть бути k-ими степенями? Для квадратів – 3, а саме 1, 24, 49. Чи досягається 4? Розгляньте це питання для кубів.

3. Нетипові трійки гравців у турнірах. Назвемо трійку гравців нетиповими, якщо гравець переміг гравця гравець переміг гравця а гравець переміг гравця Відносно підсумкової турнірної таблиці вважається, що якщо гравець переміг гравця то де кількість партій, які переміг гравець в цьому турнірі.

Знайдіть можливі формули для кількості нетипових трійок гравців у тенісних турнірах.

4. Монотонність функції суми цифр. Позначимо через суму цифр числа в десятковому запису. Пропонуємо розглянути питання про монотонність послідовності де фіксоване непарне число. Дослідить підходи до розгляду питання про монотонність послідовностей де довільна функція натурального аргументу.

5. Про чудові точки трикутника. Дослідіть можливі траєкторії руху чудових точок трикутника, вершини якого рухаються по двом колам, що перетинаються (конструкція однозначно визначається колами та вибором однієї з вершин). Отримані траєкторії наочно продемонструйте на комп'ютері.

6. Правильні многокутники на мозаїках. Цю тему було вперше розглянуто на одному з гуртків під керівництвом А. М. Колмогорова у 1972 р. Вивчалося питання про кількість паркетів з правильних многокутників. Існує рівно 11 таких паркетів. Питання, яким можна

зацікавитися, полягає в тому, щоб з'ясувати, які з правильних многокутників можна розташувати на паркеті так, щоб усі вершини многокутника знаходились у вузлах паркету.

Узагальніть поставлену проблему на випадок правильні паркети на сферах – питання про кількість футбольних м'ячів.

7. Нетрадиційне доведення числових нерівностей. Запропонуйте свою теорію одномонотонних послідовностей, в якій є означення, позначення, дії та властивості одномонотонних послідовностей. Використайте запропоновану теорію до доведення класичних числових нерівностей.

Стисло розділимо останнє питання на декілька пунктів, де кожен наступний є узагальненням попереднього, і в кожному з яких будемо виділяти особливий вид одномонотонних послідовностей.

1. Спочатку введемо основні поняття. Розглянемо послідовності з двома числами:

та Запишемо їх у вигляді таблиці Вони називаються одномонотонними, коли найбільше з чисел знаходиться над найбільшим з чисел .

Для наступних роздумів нам знадобиться деяка операція. Позначимо її так:

Тепер, згідно з попередніми міркуваннями, легко доводиться наступна теорема.

Теорема 1. Нехай та одномонотонні послідовності. Тоді:

Вправи: Доведіть нерівності:

1) якщо відмінні від нуля дійсні числа.

2) якщо додатні дійсні числа.

2. У попередньому пункті ми розглянули послідовності з двома числами. Тепер розглянемо послідовності з трьома числами: та Запишемо їх у вигляді таблиці: Такі послідовності називаються одномонотонними, якщо найбільше з чисел знаходиться над найбільшим з чисел а друге за величиною серед чисел знаходиться над другим за величиною серед чисел

Наприклад, послідовність одномонотонна, а послідовність неодномонотонна.

Введемо позначення

Теорема2. Нехай одномонотонні послідовності та

перестановка чисел Тоді

3. Розглянемо дві послідовності, що складаються з чисел: і

Запишемо їх у вигляді таблиці: Ці послідовності називаються одномонотонним, якщо найбільше з чисел знаходиться над найбільшим з чисел а друге за величиною серед чисел знаходиться над другим за величиною серед чисел і т. д. Наприклад,

послідовність не є одномонотонною, а послідовність

одномонотонна.

Введемо позначення:

Теорема 3. Якщо та одномонотонні послідовності та перестановка чисел то

Теорема 4. Якщо дано декілька одномонотонних послідовностей додатних чисел то

Вправи. Доведіть нерівності:

1) , якщо послідовності та одномонотонні. Ця нерівність належить відомому російському математику П. Л. Чебишеву.

2) якщо додатні дійсні числа.

3) якщо додатні дійсні числа, натуральне число.

Особливість цієї проблеми в побудові такої програми дій:

1) введено в нові позначення для одномонотонних послідовностей та визначено операцію над ними;

2) доведено теорему про зв'язок одномонотонної послідовності та неодномонотонної;

3) зроблено узагальнення та використано їх для доведення числових нерівностей.

Отже, при такому підході учень виконує дії, які є типовими для роботи математика-професіонала: формулює проблему, складає програму дій щодо її розв'язання та реалізує її, отримавши при цьому результати, які були неочевидними на початку роботи.

Додамо до вищезазначеного, що в процесі роботи над подібною проблемою учень продовжує набувати досвіду дослідницької діяльності: він відвідує заняття гуртка, читає спеціальну літературу, розв'язує тренувальні вправи, узагальнює або конкретизує їх, ставить гіпотези та доводить або спростовує їх, розв'язує поставлені міні-проблеми, формулює текст розв'язання, готує доповідь до виступу з нею. В процесі такої роботи учень одночасно є: студентом, аспірантом і вченим-науковцем.

Що стосується наукового керівника, то головна роль його полягає в тому, що він має направити свого молодшого колегу тією стежиною невідомого, де максимально зумів би розкритися сам учень в процесі дослідження поставленої проблеми.

Як знайти задачу для дослідження? Дослідницькі задачі або завдання мають бути одночасно зрозумілими, цікавими і доступними, математично змістовними. Найкращою задачею або найкращим завданням для дослідження є та проблема, яка чітко і просто формулюється, але не просто розв'язується.

При цьому задача може бути вже розв'язаною в науці, тоді учень про це має знати і зробити на цьому акцент при виступі та запропонувати свій шлях розв'язання та порівняти обидва шляхи. Найчастіше тему для дослідження учневі ставить людина, яка має уявлення про деяку актуальну область математики, досвід наукової роботи, хист до формулювання такого роду задач чи завдань. Краще, щоб учень сам ставив собі таку задачу, однак, у такому випадку найчастіше вона не завжди має серйозний математичний зміст.

Дослідницькі теми та нові постановки задач в основному з'являються під час участі в роботі одного зі спеціальних курсів гуртка при МАН. Іноді вони виникають з природного бажання більш глибоко розібратися в темах, що вивчаються безпосередньо на уроках.

Найкращими темами для учня в нашому досвіді (в плані реалізації дослідження) є ті теми, які виникли несподівано з деякої задачі на самому занятті гуртка або на уроці, бо вони пронизані атмосферою допитливості про невідоме. Тема дослідницької роботи – це завдання з перспективою, з продовженням, іншими словами – це серія такого роду задач, які природно виходять з деякої задачі шляхом узагальнення або зміни параметрів тощо. Багато яскравих задач для дослідження можна знайти у матеріалах: ТЮМу, турнірів міст, журналів «У світі математики», «Квант», «Математика в школі».

Слід зазначити, що наші вищенаведені дослідницькі задачі будуть зрозумілими учням – членам МАН без попередньої підготовки – ми намагаємося відштовхуватися від відомого з поступовим нарощуванням невідомого.

Правила вибору теми. Робота над дослідницьким проектом починається з вибору теми, хоча, як показує практика, її формулювання виникає не одразу. Вибір теми для дослідження – це складний не тільки для учня етап. Тут усе визначається спеціалізацією, кругозором та компетенцією керівника наукової роботи. Основні вимоги – новизна, практична значимість очікуваних результатів та логічна завершеність майбутньої роботи. Іноді тема обирається за порадою вчителя або старшого наставника, а іноді учні самі обирають теми, які їм не по силі. Буває, що тема дуже цікава, але не має достатнього матеріалу для дослідження. Тому учневі при виборі теми необхідно проконсультуватися з педагогом. Таким чином, обираючи тему, необхідно враховувати:

–можливий рівень розв'язання проблеми. Зрозуміло, що поставлена проблема має відповідати віковим особливостям дітей. Така позиція стосується рівня подання теми, мається на увазі її формулювання, відбір та наявність необхідного матеріалу для розв'язання. Одна і та ж проблема може розв'язуватися дітьми різного віку на різних етапах навчання з різною глибиною дослідження;

–бажання і можливості. Відсутність літератури, необхідної для дослідницької бази, неможливість зібрати необхідні дані, як правило, приводять до поверхневого розгляду питання. А це істотно заважає розвиткові творчого мислення, що базується на чіткому дослідженні та ґрунтовних знаннях.

Наведемо ще декілька зауважень з приводу вибору теми дослідження. Назвемо їх умовно правилами вибору теми для дослідження:

Правило 1. Тема має бути цікавою для учня, має захоплювати його.

Бажання досліджувати деякий об'єкт виникає тоді, коли він приваблює, дивує, викликає інтерес. Тема, що нав'язана дитині, відповідного ефекту, як правило, не дає. Звісно, для того, щоб вибрати цікаву для учня тему, слід знати його вподобання – це важка, але реальна педагогічна задача.

Правило 2. Тема має бути виконуваною, її дослідження має принести реальну користь.

Підвести дитину до тієї теми, в якій вона максимально реалізується як дослідник, розкриє найкращі сторони свого потенціалу, отримає нові знання, вміння та навички – це теж важка педагогічна задача, але без її розв'язання ця робота втрачає сенс. Мистецтво дорослого при проведенні подібної роботи полягає в тому, щоб допомогти учневі зробити такий вибір, який він би вважав своїм вибором.

Правило 3. Тема має бути оригінальною, у неї має бути елемент незвичайності.

Оригінальність у даному випадку слід розуміти не тільки як можливість знайти дещо незвичайне, а й як схильність мати нестандартний погляд на традиційні моменти. Це правило скоріше орієнтоване на розвиток важливої характеристики творчої людини – надчуття до проблем.

Вимоги до науково – дослідницької роботи учня. Розв'язання поставленої проблеми має бути здійснено самим учнем, а текст роботи – написаним самостійно і повинен містити чіткі формулювання та повні доведення, тобто робота має бути орієнтованою на публікацію (це зовсім не виключає можливих і необхідних консультацій наукового керівника).

Самостійна дослідницька діяльність дозволяє виявити «власних Платонів і Ньютонів», а також максимально індивідуалізувати навчання. Але як сказав Скаткин М., що самостійна дослідницька діяльність можлива лише тоді, коли «…умственное развитие учащихся достигает такого уровня, что они в состоянии осуществлять все этапы поисковой деятельности» [204, с. 129]. Щоб робота відповідала вищезазначеним вимогам, автор повинен мати гарну загальноматематичну підготовку, а це є ще одним приводом для систематичного відвідування математичного гуртка при МАН. Виконавши роботу, слід написати тези (приблизно 1–2 сторінки), де має бути чітко і ясно відображено таке:

–постановка задачі та мета виконання роботи;

–обсяг відомостей з даної теми на момент початку досліджень;

–метод дослідження та використані підходи;

–перелік головних отриманих результатів;

–висновки до роботи, її перспективи.

Написавши по абзацу до кожного пункту, учень отримає тези своєї роботи і може готуватися до конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів–членів МАН України.

Виконуючи свою дослідну роботу учень має знати ті норми і вимоги, які будуть висуватися до роботи експертами при оцінюванні його праці.

Перше і найважливіше при оцінюванні письмової роботи – це її зміст. Дуже важливо, щоб темі роботи відповідали цілі і завдання дослідження; методика роботи була направлена на збір матеріалу для вирішення завдань і була досить детально описана; матеріали наводилися відповідно до методики і відповідали меті і завданням дослідження і викладалися повністю; виводи і висновки були коректними, відповідали і підтверджувалися зібраними матеріалами [76].

Друге і теж важливе при оцінці письмової роботи – це її відповідність формальним вимогам конкурсу, викладеним у Положенні про Малу академію наук України (це стосується й інших етапів експертної оцінки) [42].

Як підготувати роботу та доповідь до захисту. Природнім є те, що дитина, відкривши щось для себе нове, часто прагне розповісти про це іншим. Тому без доповіді деяке дослідження не може вважатися завершеним. Захист – «вінець» дослідницької роботи і вважається одним із головних етапів навчання юного дослідника. Дехто вважає, що достатньо вивчити підготовлений текст доповіді і успіх на захисті забезпечено. Іноді практика свідчить, що серйозні за змістом роботи не потрапляють у список призерів через те, що не були представлені належним чином. Головною причиною цього є психологічна неготовність дитини до боротьби і перемоги [126]. Вважаємо за доцільне поетапне представлення дослідницької роботи – виступи на заняттях та подання матеріалу на засіданнях секції математики МАН, куди запрошуються вчителі та керівники дослідницьких робіт. Подібні засідання краще проводити один раз на місяць, це дозволяє не лише проконтролювати процес роботи дослідника, а й оперативно вирішувати проблеми, що виникають (брак джерел, обробка наявної літератури, корекція експериментальної частини дослідження, тощо). У ході реалізації одного з етапів дослідження учень – член МАН має можливість виступити зі своїми повідомленнями в класі, на занятті гуртка МАН, де залучено широке коло слухачів. Одночасно автори проектів отримують гарну підготовку спілкування з аудиторією, мають можливість відстоювати свою точу зору.

Своєрідним у роботі з учнями МАН є залучення їх до проведення занять гуртка при МАН (як правило, для слухачів та кандидатів МАН) з тем, близьких до теми дослідження. У такому разі учні готують оглядові доповіді узагальнюючого характеру. Ось перелік деяких з них:

1) Різновиди простих чисел та відкриті питання. Приклади комп'ютерних програм для знаходження простого числа.

Орієнтовний план:

1. Вступ.

2. Деякі властивості та відомості з історії.

3. Основна частина.

3.1. Види простих чисел (прості числа Мерсена, Маркова, Ферма, Софі Жермен, Вільсона, Вольстенхольма, Креола, Ньюмана – Шенкса – Вільямса; близнюки; факторіальні прості числа; кубічні прості числа; прості числа з одиниць; унікальні прості числа).

3.2. Тести простоти (решето Ератосфена, решето Сундарама, решето Аткіна, тест Люка – Лемера, тест Міллера – Рабіна, інші поліноміальні тести).

3.3. Застосування простих чисел.

3.4. Гіпотези, які відносяться до простих чисел.

3.5. Приклади програм для знаходження простих чисел.

4. Література.

2) Цікаві факти та незвичайні задачі, пов'язані з системами числення.

3) Застосування принципів крайнього та інваріанта.

4) Характеристика і типи математичних ігор та підходи до їх розв'язання.

5) Нетрадиційні доведення числових нерівностей.

6) Коло допомагає розв'язувати задачі.

7) Аналіз векторно-координатного методу.

У ролі вчителя учень сягає глибинного усвідомлення математичної діяльності, витончує математичну мову та вивіряє професійне спрямування. Такі учні – члени МАН у нашому досвіді, окрім дослідної діяльності, ще й:

а) консультують учнів свого класу;

б) організовують інтелектуальні змагання молодших учнів;

в) входять до складу журі в різних математичних змаганнях;

г) замінюють учителя або керівника гуртка МАН за його дорученням;

д) консультують учнів – кандидатів МАН;

е) допомагають складати банк можливих тем для дослідження.

Усі ці заходи допомагають учневі зрозуміти конкретну значимість свого дослідження, можливість його використання на практиці: виступ на уроках, на заняттях гуртка, участь в наукових конференціях різного рангу. Така багатогранна підготовка до доповіді – кінцевого результату свого дослідницького проекту, – дає можливість молодому досліднику:

– по-перше, не «охолонути» достатньо швидко до поставленої проблеми;

– по-друге, зрозуміти, що в своїй доповіді важливо сумістити дві різні речі: захоплюючу слухачів розповідь про власні пошуки, дослідження та строге системне викладення отриманих результатів з доведеннями та застосуваннями;

– по-третє, підвищити критерії вимогливості і відповідальності до рівня виконуваної дослідницької роботи.

Під керівництвом учителя складається індивідуальний план-графік виконання дослідження: визначаються часові рамки, об’єм роботи та етапи її виконання. В ході роботи важкими для учнів є наступні моменти:

– виявити проблему дослідження;

– постановка цілей і задач;

– правильний вибір методів дослідження;

– відбір і структурування матеріалу;

– відповідність зібраного матеріалу темі та цілям дослідження;

– відповідність формату дослідницького проекту формальним вимогам.

Педагогічне керівництво навчальними або науковими дослідженнями здійснюється на всіх етапах виконання роботи, але найбільш значиме воно на етапі формулювання теми, цілей, вихідних положень, а також при аналізі виконання проекту (попередньому, уточнюючому, завершальному).

Якою може бути дослідницька практика учнів. У сучасній педагогіці за ступенем самостійності дитини виділяється три рівні реалізації «дослідницького навчання»:

– перший і найпростіший – коли дорослий ставить завдання, сам намічає стратегію і тактику його вирішення. Розв’язок у цьому випадку дитина повинна знайти самостійно;

– другий рівень – дорослий ставить завдання, але метод його вирішення дитина шукає самостійно. На цьому рівні можливий колективний пошук;

– на третьому – вищому рівні – постановка завдання, пошук методів його дослідження і здійснення розв’язку проводяться самостійно дитиною [136].

Як показали наші дослідження, навіть діти молодшого віку здатні працювати на будь-якому з цих рівнів. Великі можливості в цьому плані мають майже всі види діяльності.

Якщо розглядати будову навчального або наукового дослідження учня, то неважко помітити, що вона схожа на дослідження, яке проводить дорослий вчений і включає наступні основні етапи:

– виділення і постановка проблеми (вибір теми дослідження);

– висунення гіпотез та пошук і пропозиція можливих варіантів розв’язання;

– накопичення матеріалу;

– узагальнення отриманих даних та підготовка проекту;

– оформлення проекту;

– захист проекту [42, 127, 233].

Детальніше конкретні дії учня за цими етапами виглядають так:

Етап 1 а. Учень обирає тему. При виборі задачі для дослідження учень і керівник керуються правилами вибору теми.

Етап 1 б. Учень вибирає керівника. За деякими темами керівник закріплений одразу, за іншими темам керівника учні вибирають самостійно. Часто керівниками робіт стають викладачі , які залучені до викладання тем гуртка при МАН.

Етап 2. Учень розбирає поставлену задачу. Задачу майже завжди сформульовано так, щоб її можна було розглядати самостійно з простіших випадків або при малих значеннях параметра. При цьому частинні розв'язання проблеми та деякі гіпотези обговорюються з керівником. Гіпотези виникають як можливі варіанти розв'язання задачі. Далі ці гіпотези підлягають перевірці в ході дослідження, вони дозволяють відкривати нові можливості, знаходити нові варіанти розв'язування задачі і потім, в ході міркувань і практичних розрахунків, оцінити їх вірогідність. Таким чином, гіпотези дають можливість побачити проблему в новому світлі, поглянути на ситуацію з іншого боку. Цінність пропозицій, навіть безглуздих та провокаційних, полягає у тому, що вони змушують нас вийти за межі буденних уявлень. Важливо зануритися в стихію уявної гри, ризику, всього того, без чого рух до нового неможливий.

Етап 3. Учень вивчає літературу стосовно поставленої задачі. Тут все залежить від поставленої задачі та від компетентності керівника. Часто керівник радить вивчати таку літературу за його послідовним баченням. Рідше учень сам знаходить потрібну йому базу. Головне – він має звертатися до літератури тоді, коли всі власні резерви вичерпано. Одне з найважливіших питань цієї частини роботи – де здобути потрібну інформацію; які джерела для цього можуть бути використані. Для того, щоб допомогти учневі вибрати потрібне інформаційне джерело, корисно заготовити такі прості запитання:

–подумаємо, що нам відомо взагалі про дану проблему;

–запитаємо у старших товаришів, або дорослих. Вони в нашому випадку будуть експертами (в цій ролі може виступити будь-який дорослий, який має базу середньої школи);

–розглянемо довідники і методичні посібники з відповідного розділу математики та проглянемо спеціальні матеріали;

–можна звернутися до комп'ютера, Інтернету.

Пошук джерел нової інформації викликаний потребою проведення власного дослідження. Це створює чудову базу для залучення дитини на основі її власних дослідницьких , пізнавальних потреб до роботи з різноманітними джерелами.

У наш час видається (але нажаль у невеликій кількості) журнали, методичні посібники, присвячені різним розділам математики, олімпіадним задачам, науковим відкриттям тощо. Ці матеріали, як правило, повною мірою підходять на роль такої допомоги. Для їх накопичення вдома можна виділити куточок, який міг би бути чимось на зразок бібліотеки і водночас лабораторією, де б накопичувався найрізноманітніший матеріал, придатний для проведення дослідницької роботи. Окрім книг і довідкової літератури, там можуть зберігатися завершені проекти, «наукові звіти», рукописні книги, а також матеріали в електронному варіанті. Але слід враховувати, що в підручнику, інформаційному огляді ми зустрічаємося з інформацією, вже здобутою кимось. Головний сенс справжнього дослідження – добути знання самостійно.

Етап 4. Учень розв'язує поставлену задачу (частину задачі). Вибирати тему і навіть збирати матеріал при правильній організації справи – весело і приємно. Так і повинно бути. А ось завдання з узагальнення отриманих результатів часто викликає ускладнення. Воно дійсно значно складніше. Як проаналізувати отримане. Як потім узагальнити матеріал. Виділити головне і виключити другорядне. Тут ніяк не обійтися без делікатної допомоги керівника. Багато в чому спрощує це завдання попереднє вирішення питання представлення результатів дослідження, реалізації дослідницького проекту. Подумати над цим треба обов'язково.

Етап 5. Учень оформлює роботу. Чудово, коли текст пишеться по ходу роботи і одразу обговорюється з керівником. Найчастіше текст пишеться в останні тижні, тоді керівник читає і критикує роботу поспіхом та виправляє текст разом з учнем – що є теж своєрідним навчанням.

Етап 6. Учень готується до захисту. Про виконану роботу треба не просто розповісти, її, як і будь-яке справжнє дослідження, треба захистити. Цілком природно, що захист проекту повинен бути «публічним». Тут роль керівника є значною. Як правило, створення плану виступу та його репетиція – спільна творчість учня і керівника. Керівники рекомендують учням виступити зі своєю доповіддю на заняттях гуртка або перед учнями – членами МАН, які мають теж виступати чи мають досвід захисту. Корисно вивісити в кабінеті пам'ятку про захист результатів дослідження у вигляді підготовки доповіді:

–перша частина коротко повторює вступ дослідницької роботи, де обґрунтовується актуальність обраної теми, описується наукова проблема, формулюються задачі дослідження та вказуються його основні методи;

–друга частина – найбільша за об'ємом, вміщує зміст розділів. Особливу увагу звернено на підсумки проведеного дослідження, на особистий внесок автора;

–третя частина має містити основні висновки результатів дослідження, які не повторюють висновків попередньої частини.

При цьому конкретні дії керівника роботи полягають у тому, що він:

–не розкриває прямого ходу розв'язання поставленої задачі (якщо такий хід йому відомий);

–не заважає учневі рухатися в самостійному напрямку, якщо навіть цей напрямок хибний, тобто намагається формувати навички самостійного вирішення проблем дослідження;

–не ставить жорстких часових рамок при виконанні багатьох етапів дослідницького проекту;

–працює з учнем як з молодшим колегою і на рівних обговорює проблеми, що виникають в учня в ході роботи;

–допомагає учневі у підготовці до написання контрольної роботи, що є однією зі складових конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів – членів МАН України;

–дає обґрунтовану оцінку зробленої роботи та подає роботу на рецензію фаховому спеціалісту з даної тематики;

–планує попередній виступ учня з його доповіддю на заняттях гуртка або перед учнями – членами МАН, які мають теж виступати чи мають досвід захисту.

Зміст технології такого дослідження полягає в тому, щоб допомогти учневі пройти шляхом наукового пізнання, засвоїти його алгоритм. На всіх етапах роботи головним серед очікуваних результатів має бути розвиток творчих здібностей, набуття дитиною нових знань, вмінь і навичок [28, 127].

Для нас головним результатом є не просто детально опрацьована схема, підготовлена дитиною доповідь, а педагогічний результат – це, перш за все, безцінний у виховному відношенні досвід самостійності, творчої, дослідницької праці, нові знання і вміння, які складають цілий спектр психологічних новоутворень, що відрізняють дійсного творця від простого виконавця.

2.2. Специфіка підготовки та проведення гурткових занять у Малій академії наук

Специфіка гурткових занять з математики у діяльності МАН полягає в тому, що вони проводяться за програмами з урахуванням інтелектуальних можливостей школярів, їх пізнавальних інтересів, розвивальних потреб, комп'ютерних та дослідницьких компетентностей . Такі програми розроблені нами, опрацьовані на практиці та представлені у додатку В.

В основу викладання математики слід покласти навчання наявним у відповідній області завершеним алгоритмам розв'язання задач. Нерідко для успішного використання математики при розв'язанні нових задач треба проявити певну фантазію, мистецтво в аналітичних перетвореннях, винахідливість, тобто проявити ті риси, що входять у поняття математичної культури. В процесі навчання дуже корисно показати, як користуватися не тільки довідковою літературою, а й науковою. При цьому не слід забувати, що використання довідників чи наукових джерел вимагає певного рівня знань: треба знати, що треба шукати і де це можна знайти. Розвиток самостійності, кмітливості і винахідливості, виховання творчого відношення до предмета математики, що вивчається учнем у секції МАН, є дуже важливою частиною всього процесу такого навчання, особливо при сучасних вимогах до майбутніх фахівців.

Таким чином, при підготовці до заняття гуртка з будь-якої теми вчитель має враховувати такі аспекти:

- історизм – коли і як виникла тема або задача в процесі розвитку математики;
- узагальнення – як змінюється задача при переході до більш загальної постановки;
- конкретизацію – як змінюється задача при введені додаткових умов;
- динамізм – як змінюються ідеї розв'язання при зміні параметрів задачі;
- застосування – де і як можна використати тему або задачу;
- проблеми і гіпотези – які нерозв'язані проблеми та гіпотези існують в даній темі;
- вибір.

Тому відбір змісту навчання математики в МАН, його систематизація мають бути максимально орієнтованими на формування умінь спрощувати, узагальнювати, конкретизувати, передбачати, досліджувати.

З огляду на це, слід ввести деякі корективи щодо підготовки і проведення гурткових занять з математики у МАН.

Звернемо увагу на деякі особливі моменти, які не можна упускати, якщо вчитель хоче, щоб заняття гуртка проходили не тільки цікаво, а й корисно задля досягнення мети.

Відносно підготовки та проведення гурткових занять будемо керуватися окремими зауваженнями М. Б. Балка і Г. Д. Балка [15] та нашим досвідом роботи у МАН.

Чим дана тема цікава і чим важка? Опанувавши матеріал до даного заняття, вчителю ще раз доцільно проаналізувати: які моменти в даній темі є особливо важливими для школяра на даний час, при подальшому вивченні предмета; чому? Які моменти можуть або повинні заці кавити його? Які запитання можуть (або повинні) виникнути?

Так, наприклад, при розгляді теми «Множини» може бути такий орієнтовний зміст занять:

1)Історичні відомості про засновника теорії множин. Різні приклади множин, запропоновані викладачем і учнями. Елементи множини, підмножини, знаки включення. Операції над множинами (об'єднання, перетин, різниця, додавання, декартів прямий добуток множин), приклади.

2)Порівняння множин, еквівалентність нескінченних множин, поняття потужності, приклади.

3)Потужність множини раціональних чисел. Потужність континуума. Проблема континуума.

4)Множина Кантора та її властивості.

Особливо важливими моментами є введення понять «множина», «елемент множини» та «відкриття» того, що нескінченні кількості елементів бувають різними. Встановлення взаємно однозначної відповідності між множинами N та Q, (0, 1) і викликає здивування учнів , і відповідні позитивні емоції допомагають їм легко засвоїти поняття зліченної множини та континуальної множини, а також зрозуміти, що зліченна кількість «менша» за континуальну. Якщо введення найбільш загальних понять є зрозумілим для учнів (щоб називати одним ім'ям найрізноманітніші об'єкти, а також для означення менш загальних понять – простору елементарних подій, найважливішого математичного поняття – функції), то побудова множини Кантора поставить перед учнями немало запитань, щодо її застосування. Такого роду приклади можуть бути доброю пропедевтикою теорії міри, а за допомогою Канторової множини вдається розглядати у подальшому дивовижні приклади, один з яких – Канторові сходи, які є функцією, неперервною на [0; 1], сталою майже в усіх її точках, але   такою, що не є сталою [44].

Як сприймає учень дану тему і задану задачу? При підготовці деякої теми вчитель має постійно думати про те, як дана тема буде сприйнята аудиторією. Чи всім присутнім учням будуть зрозумілими теоретичні викладки поставленої проблеми? Часто буває, що важкі на думку вчителя теми учні сприймають якнайкраще, у такому разі вихід один – нагородити дітей цікавими задачами, які не тільки розкривають суть даної теми, а й допомагають поставити нові, передбачувані вчителем проблеми.

Зрозуміло тепер, що вчитель обов'язково повинен мати у запасі таку серію задач. Трапляється і так, що тема проста, знов таки на думку вчителя, а дітьми сприймається важко. Причиною цього можуть бути різні ситуації, зокрема:

– слабка математична база попередніх фактів, на яких ґрунтується поставлена проблема;

– погано вмотивована проблема.

У зв'язку з цим майже кожна тема має завершуватися задачами, які є підготовчими до наступного заняття, а кожна нова тема має розпочинатися з мініпроблем, сутність яких містить усі важливі питання, необхідні для побудови нової проблеми.

Слід зауважити, що підбір декількох корисних задач до заняття не завершує підготовки до цього заняття. Бажано подумати над такими запитаннями:

– Чи не буде дана задача нецікавою учням?

– Чи буде вона їм посильною?

– Які труднощі можуть виникнути перед учнями при її розв'язанні?

– Чи зможуть учні їх подолати?

– Як допомогти учням впоратися з задачею при мінімальній допомозі?

– Чи зможуть учні дану задачу узагальнити або конкретизувати і які її узагальнення можливі?

– Чи зможуть учні дану задачу перетворити у дослідницьку?

Важким задачам мають передувати більш легкі, що підготують учнів до розв'язання важких. На засіданнях гуртка краще використовувати не громіздкі задачі, тобто ті, що не вимагають довгих викладок, але базуються на цікавій ідеї. Бажано розглядати задачі, які колись були представлені на конкурсі МАН або на олімпіаді, про що учням має бути оголошено. Увага й зацікавленість до такої задачі в учня істотно зростає.

Мистецтво запропонувати задачу. Вміння подати умову задачі – це справжнє мистецтво. Часто для цієї мети слід перефразувати текст задачі, почати з простих прикладів, частинних випадків, придумати для задачі нову фабулу і т. д.

Наведемо приклади. Керівник гуртка збирається запропонувати задачу:

Задача1. Доведіть, що існує досить великий проміжок послідовних чисел, який не містить жодного простого числа.

В такому вигляді задача не зацікавить усіх учнів. Значно зріс інтерес до неї, коли вона була сформульована так: послідовність натуральних чисел: $7! + 2$, $7! + 3$, …, $7! + 7$ не містить жодного простого числа. Чи можна збільшити цей проміжок? Який вигляд він буде мати? Чи існує достатньо великий проміжок послідовних натуральних чисел, який не містить жодного простого числа? Побудуйте подібний проміжок довжиною а) 2008; б)

Зрозуміло, що подібна постановка задачі зацікавить усіх членів гуртка; у кожного учня буде можливість показати свій приклад – «проміжок» певної довжини. На основі їхніх відповідей можна буде сформулювати такий опорний факт: існує як завгодно великий проміжок послідовних натуральних чисел, який не містить жодного простого числа.

Задача 2. Чи існують періодичні функції   , які визначенні   та

відмінні від константи, з періодами   такими, що   , але функція періодична?

Це надзвичайно важка задача, яка потребує творчого підходу до її розв'язання, хоча більшість учнів, базуючись на відомій теоремі: якщо – основний період функції , – основний період функції , причому – сумірні, то існують значення х, що функція – періодична з періодом , поспішають дати негативну відповідь до такої задачі.

Тому доцільно підготувати учня до розв'язання даної задачі, розглянувши попередньо простіші задачі, що спонукатимуть до розв'язання заданої. Такими задачами можуть бути такі:

1) Чи існують функції, періодами яких є як раціональні, так і ірраціональні числа?

Відповідь: так, існують, наприклад .

Вирішення такого питання, як правило, не викликає труднощів у членів гуртка МАН.

2) Спробуйте побудувати функцію з такою ж властивістю, але відмінну від константи.

Перед обговоренням цієї задачі можна підвести учнів до необхідності конструкції функції, подібної функції Діріхле.

Відповідь: , бо при

, а при

Ясно, що такого роду функцій можна створити безліч, але всі вони подібні до константи.

Лише після обговорення таких задач пропонуємо сформульовану вище задачу, яка є своєрідним міні узагальненням попередньої.

Наведемо приклад функцій , що задовольняють умову задачі і сума яких є періодичною функцією. Нехай М – множина виду і зрозуміло, що будь-яке число визначається однозначно при , тоді функції

, та

– періодичні.

Покажемо це:

1)якщо , то

EMBED Equation.3

2)якщо , то не належать М і

.

Таким чином, для даних періодичних функцій , у яких ,

– також періодична.

Зауважимо, що цю задачу можна узагальнити до наступної:

Задача 3. Побудувати відмінну від константи функцію, періодами якої є будь-які n наперед задані числа.

Для того, щоб цікаво провести заняття гуртка, слід обов'язково навчитися замінювати одну складну задачу на декілька більш простих, самостійно складати задачі і запитання перед розв'язанням складної задачі, навчитися цікаво і захоплююче подавати умову задачі.

На перших етапах навчання слід віддавати перевагу індуктивному методу, поступово готуючи до використання дедуктивного методу [117]. Індуктивні методи викладу матеріалу, при яких відбувається послідовне узагальнення понять, є більш сприятливими для активного засвоєння матеріалу. Саме в цьому сенсі і відбувається перевага індуктивного методу перед дедуктивним. Тут згадаємо одну важливу пораду Гільберта, яку він давав Вейлю: «Починай з найпростіших прикладів».

Уявіть собі, що необхідно розповісти про фундаментальну теорему алгебри. Її можна подати сухо та дозволити учням дещо обміркувати, але слід пам'ятати, що це учні, а не математики. Не забуваймо про один з основних моментів діяльності педагога – створити мотивацію і надати дітям необхідну допомогу! Отож, пропонуємо алгебраїчне рівняння

, розглядаємо питання його коренів. Потім – рівняння (доповнюючи до повного квадрату – імітуючи доведення формул коренів квадратного рівняння

). Можна навести аргументи, що рівняння буде розв'язуваним, якщо

використати додаткові перетворення для знищення величини при Можна спробувати

більше, доводячи, що рівняння також буде розв'язуваним. Потім можна здивувати дітей стверджуванням факту, що не існує формули для розв'язання алгебраїчного рівняння п'ятого і вищих степенів. Доцільно розповісти про Галуа – як він записав свою ключову ідею розв'язуваності алгебраїчних рівнянь у радикалах вночі перед дуеллю, про теорему Руффіні – Абеля. Очевидно, як глибоко та структурно така проста дискусія приводить до формулювання фундаментальної теореми. Для математика найлегшою справою є сформулювати теорему і довести її, а найскладнішою – знайти такий стиль у викладанні, завдяки якому діти відчули хоча б частково шлях дослідника.

Мистецтво підбирати задачі. Відібрати задачі для занять гуртка в МАН – це зовсім не означає виписати з посібників або зі збірників декілька задач окремої теми. Відомо, що при одному варіанті підбору тренувальних вправ матеріал, що вивчається, може бути зрозумілий краще, ніж при іншому варіанті підбору задач. Тому виникає важливе запитання не тільки в методиці викладання математики середньої школи, а й в методиці викладання математики по зашкільних занять: яким оптимальним підбором вправ можна досягнути цілісного та міцного засвоєння знань? Тобто: як досягнути вміння створення необхідної повноти системи вправ при вивченні математики на заняттях гуртка МАН або як створити систему задач з кожної теми, яка б відповідала сучасним вимогам позашкільного навчання такої організації?

Система задач повинна давати приклади отримання одного й того ж результату різноманітними шляхами й спонукати учня до подібних самостійних дій, до самостійного розв'язання задач прикладного характеру, розвитку творчих здібностей, гнучкості і критичності мислення.

Проводячи аналіз відповідної психологічної, педагогічної й методичної літератури [15, 31, 97, 107, 212, 236], а також з досвіду роботи з учнями – членами МАН, виділимо наступні принципи або вимоги, за якими може здійснюватися добір задач до системи.

Принцип доступності. Новий матеріал буде опановано учнями краще й швидше, якщо вдасться знайти зв'язки або аналогії з уже відомим матеріалом, який може слугувати підґрунтям для нового. У цьому випадку учні можуть засвоювати нові відомості частково самостійно, що приводить до більш міцного й свідомого оволодіння новим матеріалом. Поняття й терміни задач повинні бути відомими або інтуїтивно зрозумілими учням.

Принцип диференціації навчання. Добір задач повинен базуватися на двовимірній моделі диференціації навчання, основними вимірами якої є навчальний матеріал і рівень вимог до опанування цим навчальним матеріалом. Необхідно враховувати, що різним дітям потрібен різний час для засвоєння того самого матеріалу, враховуючи їхні індивідуальні особливості. При доборі навчального матеріалу для членів гуртка МАН бажано користуватися: критерієм наукової й практичної значимості та критерієм відповідності змісту навчання.

Принцип однотипності та використання задач – «двійників». Для формування міцних навичок та умінь, вироблення стійких асоціацій необхідні однотипні задачі в розумній кількості . Треба відзначити, що послідовність міркувань, що повторюються при розв'язуванні задач, може згортатися до асоціації, яка при потребі в подальшому повинна легко розгорнутися в первинний ланцюг міркувань. Згортання міркувань – природний процес, однак не у всіх зворотний процес – розгортання – проходить без втрат яких-небудь істотних елементів міркувань; саме тому до системи задач включаються різні за змістом задачі, розв'язування яких зводиться до побудови однієї й тієї ж моделі.

Враховуючи різну підготовленість членів гуртка, керівник не повинен допускати, щоб учні, які розв'язали запропоновану задачу швидше, заважали іншим. Тому бажано, щоб учитель мав одне або декілька додаткових запитань або задач – «двійників», які він може запропонувати учням, які розв'язали задачу раніше за інших. Питання такого роду можуть носити характер додаткового дослідження.

Розглянемо приклади задач – «двійників», взятих з різних областей математики шкільного курсу.

Задача1. Дане натуральне число розкладається на суму декількох послідовних цілих чисел. Знайти кількість усіх таких розкладів.

Для більш підготовлених учнів можна запропонувати задачу – «двійник»:

1). Дане натуральне число де – натуральні числа розкладається на суму декількох послідовних цілих чисел. Знайти кількість усіх таких розкладів. Які з цих розкладів містять тільки натуральні числа?

2). Дане довільне натуральне число розкладається на суму декількох послідовних цілих чисел. Знайти кількість усіх таких розкладів. Які з цих розкладів містять тільки натуральні числа?

Досить корисними є задачі – «двійники» з недетермінованими відповідями, в яких учневі самому пропонується з'ясувати або довести, яке саме твердження насправді є правильним. Розв'язування задач такого типу може послужити першою сходинкою науково-дослідницької діяльності учня.

Наступний приклад показує, як задача – «двійник» може залучити учнів до пошуково-дослідницької діяльності.

Задача 2. Множина А складається з натуральних чисел, причому:

1) , 2) якщо то , 3) якщо то .

Чи правильно, що ?

Розв'язання. Побудуємо ланцюг натуральних чисел, що входять до множини А:

Отже, .

Задача – «двійник»: множина A складається з натуральних чисел, причому:

1) , 2) якщо то , 3) якщо то . Чи співпадає множина A з множиною натуральних чисел?

Відповіді на це запитання у нас поки що немає, хоча деякі дослідження цієї задачі були проведені за допомогою обчислювальної техніки. Вдалося з'ясувати деякі закономірності, характерні для даної множини, однак повного доведення не було знайдено, але є впевненість у тому, що множина A співпадає з множиною N.

Такого роду відповідь обов'язково спонукає більшість учнів-гуртківців до бажання вирішити поставлену проблему.

Задача 3. Два гравці по черзі записують на дошці натуральні числа, що не перевищують 10. Правилами гри забороняється записувати на дошці дільники вже написаних чисел. Програє той, хто не може зробити наступний хід. З'ясуйте, який з гравців має виграшну стратегію і вкажіть її.

Додаткове запитання: Хто з гравців має виграшну стратегію, якщо на дошці записують натуральні числа, що не перевищують числа n? (правила гри ті ж самі).

Розширення кола задач – «двійників» при вивченні математики в МАН позитивно впливає на ставлення учнів до математики, бо розв'язання цих задач:

– підвищує мотивацію навчання;

– виховує потребу в розширенні математичних знань;

– підводить до узагальнення, а може й до «математичного відкриття»;

– сприяє раціональному вибору теми для майбутнього дослідження, якщо навіть ця тема досліджувалася чи досліджується кимось із членів МАН.

Принцип різноманітності. Однотипні задачі, незважаючи на важливість, приводять до зниження інтересу, уваги, активності. Для нейтралізації негативних наслідків однотипності, треба одночасно використовувати в достатній кількості задачі, різноманітні за формою і змістом, а також і за способом розв'язування. Важливим є систематичне використання «провокуючих» вправ, які сприяють розвитку уваги й самостійності; досить цінною в методичному відношенні є група задач, які розвинулися з якоїсь однієї задачі.

Істотну роль, як вже відмічалося, відіграють задачі, самостійно складені учнями. Місце цієї діяльності не обмежується часом, рівнем підготовки, але особливу увагу їй потрібно приділити на завершальному, узагальнюючому етапі вивчення методу або теми. Не варто вводити системи спеціальних уроків або позакласних занять для цих цілей. Краще систематично, час від часу, звертатися до складання задач, споріднених даним, при вивченні тем на заняттях гуртка.

Так, наприклад, після розкриття ідеї методу підстановок при вивченні теми «Функціональні рівняння», пропонується декілька задач, розв'язання яких потребує однієї або двох нескладних підстановок [166].

1. Розв'язати функціональні рівняння .

1) Відповідь:

2) Відповідь:

3) при Відповідь:

4) при Відповідь: .

2. Чи існує така функція , що для всіх таких, що і

виконується рівність: .

3. Відомо, що функція є розв’язком такого функціонального

рівняння при деякому значенні параметра а. Знайдіть а та всі інші розв’язки.

4. Складіть яке-небудь функціональне рівняння, розв’язком якого є функція: а) , б) .

Наведена вище система вправ задовольняє наступним принципам:

– принципу доступності – поняття і терміни задачі відомі або інтуїтивно зрозумілі учням ; розв’язання таких задач містять одну або дві нескладні підстановки, а перевірка не веде до громіздких обчислень;

– принципу диференціації – більш складні задачі (№ 1 (3, 4), № 3, № 4) доручаються сильнішим учням, а менш підготовлені учні розпочинають розв’язання простіших задач;

– принципу різноманітності – хоча до системи включено однакові за змістом і методом розв’язання задачі, але кожна з них має своєрідний набір підстановок, це робить таку групу задач цінною в методичному відношенні (№ 1, № 3, № 4) [166].

Принцип повторення та послідовного зростання труднощів. Включення задач на вивчені раніше теми дозволяє не тільки актуалізувати знання, підкреслити особливості досліджуваного матеріалу, але й показати його зв’язок з раніше вивченими темами, допомагає підтримувати увагу учнів на високому рівні, сприяє нейтралізації негативних наслідків принципу однотипності. Ще один клас задач, які допомагають зробити роботу різноманітнішою й зацікавити учнів – це задачі на використання однієї теми в іншій, зокрема алгебри в геометрії, геометрії в алгебрі, тригонометрії в розв’язанні алгебраїчних рівнянь, доведенні числових нерівностей. Ці вправи корисні й для учнів з не досить високим рівнем математичної підготовки і для школярів, які цікавляться математикою, оскільки вони змушують уявити ту модель, якою описується той чи інший процес. Своє місце повинні посідати при цьому нестандартні, цікаві задачі та задачі пошукового характеру.

Принципи внутрішніх зв’язків – при плануванні занять, особливо узагальнюючих, слід пам’ятати, що жодний метод сам по собі не дає оптимальних результатів і тільки в поєднанні з іншими чи в певному взаємозв’язку, коли один з методів є провідним, інші – допоміжними, можна розраховувати на високу результативність навчання та розуміння внутрішньої логіки математики.

Так, наприклад, при вивченні теми «Функціональні рівняння» не варто обмежуватись одним методом розв’язання – методом підстановок, слід до системи вправ включити такі задачі , розв’язання яких ґрунтується на використанні класичних методів тем олімпіадного рівня, зокрема на методі скінченних різниць, методі математичної індукції, принципі крайнього тощо. Таке поєднання методів при розгляді однієї теми є принципово важливим, – це є необхідною умовою для більшого розуміння матеріалу, засвоєння та для вміння правильного його застосування [166].

Принцип прикладної спрямованості, міжпредметних, міжнаукових зв’язків. Задачі, пов’язані з практикою, допомагають формувати в школярів уміння застосовувати отримані знання в житті. Вони підвищують інтерес до досліджуваного предмета й усвідомлене його вивчення, розвивають математичне мислення й практичну кмітливість [221]. Крім того, розгляд таких задач дає можливість ознайомити учнів з поняттям математичної моделі й роллю математичного моделювання в різних науках і на практиці. При розв'язуванні задач прикладного характеру учні одержують уявлення про необхідність і універсальність математики та її методів.

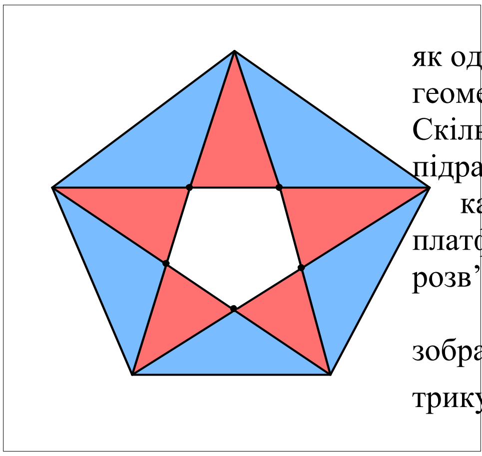
Ілюстрація міжпредметних і міжнаукових зв'язків при розв'язуванні задач на заняттях гуртка сприяє більш міцному засвоєнню курсу математики, розкриває його практичну й наукову значимість, розширює кругозір школярів, підвищує їхню активність і зацікавленість у навчанні, певною мірою допомагає у виборі майбутньої теми для дослідження.

Підготовка вправ до наступних занять. Для того, щоб важкі теми для учнів гуртка стали більш доступними і цікавими, учнів слід готувати до таких тем.

По-перше, цього можна досягти детально продуманою послідовністю тем. Так, наприклад, якщо планується на занятті гуртка МАН розглянути таку тему: «Функціональні рівняння», то доцільно спочатку розглянути: «Функціональні співвідношення для парних, непарних, періодичних, складених, оборотних функцій», оскільки остання не тільки полегшить учням зрозуміти дану, а й дозволить пригадати важливі характеристики числової функції [166].

По-друге, на заняттях гуртка, та й до завдань для домашнього розв'язування бажано включати задачі, що підготують учня до наступної теми. Зрозуміло, що майже кожну задачу попередньої теми, що є логічним продовженням наступної, можна розглядати як підготовчу. Тобто задачі на функціональне співвідношення про парність, складеність, періодичність, оборотність, дозволяють логічно підійти до вивчення теми «Функціональні рівняння та основні методи їх розв'язання».

Зовсім інша картина відбувається в тому випадку, коли наступне заняття гуртка за планом з іншого розділу математики. В такому разі керівникові гуртка часто доводиться самотужки складати потрібні задачі.



Так, наприклад, якщо запланована тема «Розфарбування як один з методів розв'язання логічних задач» після вивчення геометричної теми, то перед цим можна запропонувати таку задачу. Скільки трикутників зображено на рисунку? Опишіть свій принцип підрахунку.

Така надзвичайно проста задача може слугувати гарною платформою для розкриття переваг методу розфарбування при розв'язуванні деякого класу логічних задач.

Один із способів підрахунку всіх трикутників, зображених на малюнку, може бути таким: розфарбуємо маленькі трикутники, які рівні у червоний колір, а трикутники, що рівні – у синій, тоді:

1)кількість тільки червоних трикутників – 5, а тільки синіх – теж 5;

2)кількість трикутників, що складаються з одного червоного та з одного синього, дорівнює 10, по два у кожній вершині правильного даного п'ятикутника;

3)кількість трикутників, що складається з трьох трикутників – двох синіх і одного червоного, дорівнює 5, по одному у кожній вершині даного п'ятикутника;

4)порахуємо кількість трикутників, до яких входить п'ятикутник :

а) трикутники, що складаються з п'ятикутника і двох червоних трикутників, – їх 5, по одному у кожній вершині малого п'ятикутника;

б) трикутники, що складаються з п'ятикутника, трьох червоних і одного синього трикутника, – їх 5, знову за числом вершин даного п'ятикутника.

Таким чином, усіх трикутників буде 35.

Принцип використання задач творчого характеру. Значна кількість дослідників поділяє думку, що для формування та розвитку творчих

здібностей в учнів необхідне використання «творчих задач» [150, 208, 210]. Зокрема, В. А. Моляко творчою називає таку задачу, яка або вся в цілому є новою, незнайомою для суб'єкта, або містить значну новизну, що й зумовлює розумові зусилля, спеціальний пошук, знаходження нового способу її розв'язання [150].

Вимоги до творчих задач, що можуть використовуватись на заняттях математики можна знайти в роботах різних дослідників [208, 210]. Однак необхідно визначити типи завдань, що пропонуються учням з метою розвитку їхніх творчих здібностей, зокрема математичних.

У даному дослідженні за основу було взято типологію творчих математичних задач, розроблену В. А. Крутецьким, яку він пропонує для дослідження творчих здібностей учнів [115]. За цією типологією задачі поділяють наступним чином:

1.Задачі, спрямовані на одержання математичних даних – з не сформульованим питанням; з неповним складом умови; з надлишковим складом умови; з взаємно проникаючими елементами.

2.Задачі, спрямовані на опрацювання даних – системи різнотипних задач; системи задач з поступовою трансформацією від конкретного до абстрактного; складання задач певного типу; задачі на доведення; складання рівнянь за умовою задачі; нереальні задачі; задачі на створення штучних понять; задачі з кількома розв'язками; задачі із змінним змістом; на перебудову дій; задачі, що наштовху ються на «самообмеження»; прямі та обернені задачі; евристичні завдання; задачі на логічні судження; математичні софізми.

3.Задачі зі складною для запам'ятовування умовою.

4.Задачі на дослідження типів математичних здібностей.

Серед цих типів задач було відібрано ті, які можуть бути ефективно використані для формування математичних здібностей учнів, зокрема:

– задачі підвищеного рівня складності;

– відкриті задачі, або задачі пошуково-дослідницького спрямування;

– задачі наукового характеру (сюди віднесемо клас нерозв'язаних задач і гіпотез елементарної математики).

Зауважимо, що процес розв'язання такої математичної задачі для учнів – кандидатів та членів МАН (з урахуванням етапів, зазначених Г. О. Михаліним [148]) може відбуватися за схемою: 1) аналіз структури задачі; 2) перетворення або переформулювання задачі; 3) підхід до дослідження; 4) розв'язання задачі; 5) відповідь до задачі; 6) узагальнення; 7) висновок.

Задачі підвищеного рівня складності навмисно спрямовані на формування змістовного аналізу й узагальнення та на розвиток відповідних умінь і навичок. Задачі такого типу традиційно розбиваємо на три рівня складності, переважна більшість яких – олімпіадного рівня.

Задачі І рівня складності зорієнтовані на формування теоретичних знань (фактів, понять, теорем, алгоритмів, методів доведення математичних тверджень).

Задачі ІІ рівня складності – це комбіновані задачі, розв'язання яких потребує знань різних розділів курсу математики гуртка МАН (принцип неперервного повторення матеріалу).

Задачі ІІІ рівня складності – задачі, спрямовані на формування вміння застосування знань в новій, нестандартній ситуації.

Зрозуміло, що така градація рівнів складності є умовною і тому зосередимо увагу лише на основних якостях, які повинні бути притаманні задачам олімпіадного рівня, оскільки не кожна задача, яка пропонувалася на якій-небудь олімпіаді, може вважатися олімпіадною. І. Рубанов [196] виділяє такі важливі функції олімпіадної задачі:

1) Нестандартність. Олімпіадні задачі, в переважній більшості, мають бути нестандартними, тобто вимагати для свого розв'язання не тільки шкільних знань, а й нешаблонного підходу, логіки.

Нестандартність – це не синонім складності, навпаки, обдарованій дитині «однокрокові» нестандартні задачі (коли розв’язання зводиться до знаходження однієї ідеї), легші за стандартні, які вимагають великої технічної роботи [196]. Нестандартність задачі – відносне поняття: задача, стандартна для одних учнів, для інших, які знають менше, може бути нестандартною. Так, наприклад:

Задача 1. Площа квадрата дорівнює 32 см2. Яка довжина його діагоналі?

Стандартною ця задача стає для тих, хто знає теорему Піфагора. Для учнів, які не знайомі з нею, задача стає нестандартною, бо мають здогадатися: якщо розрізати даний квадрат діагоналями на чотири трикутники, то з них можна буде скласти два рівних квадрата, площа кожного з яких 16 см2, а тому сторона, яка рівна половині діагоналі даного квадрата – 4 см.

Задача 2. Перевірити чи ділиться дане число на: а) 4; б) 6; в) 7?

Зрозуміло, що це цілком стандартна задача для учнів середньої ланки. Зовсім інша картина стає, якщо ідею – перевірити ознаки подільності чисел, приховати, тобто сформулювати задачу так:

Задача 3. Чи існують такі натуральні числа n, для яких виконуються рівність:

, де – добуток усіх цифр десяткового запису натурального числа n.

Такого роду задача вже може вважатися нестандартною для учнів.

2) Ідейність. Ще один важливий компонент математичних здібностей – кмітливість. Тобто при розв’язанні задачі необхідно придумати хоча б одну неочевидну ключову ідею. Такого роду якість задачі будемо називати ідейністю. Така якість є дуже важливою ще й в іншому: якщо математичні факти порівнювати з цеглинами, з яких складено будинок, то математичні ідеї подібні арматурі, що скріпляє цей будинок. Тому важливо, щоб олімпіадні задачі були засновані на таких ідеях, які працюють і в «великій» математиці. Ідейність і нестандартність тісно пов’язані, бо нестандартна задача найчастіше всього випливає з її ідейного конструювання [123, 196]. Та бувають задачі нестандартні, але зовсім безідейні. З іншого боку, деякі нестандартні раніше ідеї або методи можуть стати для багатьох учнів-гуртківців МАН певною мірою стандартними.

Звернемося до розглянутих задач. Розв’язування задачі 1 базується на ідеї розрізання та складання, яка являється головною при виведенні формул площ фігур, при доведенні теореми Піфагора. При розв’язуванні задачі 3 можна використати метод перебору цифр числа

.

3) Краса задачі. Пригадаємо одну з відомих російських приказок: «Зустрічають по одежині, а проводжають по розуму», тобто красу та вишуканість формулювання задачі називатимемо тут «одежиною», а якщо цю красу наповнити красою дизайну – «розумом», то така математична задача і буде «товаром» найвищої якості.

Наповнити математичну задачу зовнішньою та внутрішньою красою є також мистецтвом . Найпростіший спосіб оживити формулювання задачі – це обіграти в ній яку-небудь життєву або казкову ситуацію (особливо доречно для молодших слухачів МАН). Практика показує, що один і той же учень розв’язує з захопленням задачу з таким формулюванням (їх позначатимемо з індексами «к» або «ж»), і розв’язує без особливої зацікавленості, якщо вона подана сухою математичною мовою (позначатимемо такі задачі з індексом «м»). Справа тут, мабуть, в особливостях дитячої психології.

Розглянемо декілька конкретних прикладів (без розв’язання) з суто математичним формулюванням і казковим або життєвим.

Задача 5 м. Є три цифри a, b і c. Придумайте три таких цілих числа x, y і z, що, знаючи суму можна визначити дані цифри.

Задача 5 к. Незнайко просить Гвинтика та Шпунтика задумати три цифри a, b і c та за названими цілими числами x, y і z назвати йому суму За цією сумою він одразу відгадує задумані цифри. У чому ж суть фокуса Незнайка?

Краса математичної задачі не вичерпується її формулюванням, її збагачує ідея розв’язання. Вона має свою внутрішню логіку розвитку, завдяки їй і складаються методи або підходи багатьох розділів математики [240].

Так, наприклад, для задачі:

Задача 6. Чи існують два ірраціональних числа і такі, що число є раціональним ?,

яка має таке розв’язання (воно ще потребує доведення ірраціональності числа), можна знайти таку яскраву ідею: візьмемо два ірраціональних числа; якщо число – раціональне, то такі числа і знайдено, а якщо воно ірраціональне, то візьмемо , і число є раціональним. Така надзвичайно яскрава ідея розв’язання буде корисною і при розв’язанні інших задач, особливо логічного спрямування.

Відкриті задачі – задачі, головна вимога яких містить деяку невизначеність: чи існує об’єкт , що задовольняє умові ?; чи можна побудувати об’єкт , що задовольняє властивостям і ?; об’єкт має властивість , а які ще властивості має даний об’єкт? Скласти задачу обернену даній; скласти задачу на застосування методу; узагальнити дану задачу.

Розв’язання відкритої навчальної задачі полягає у тому, щоб спочатку її довизначити і тільки після цього знайти розв’язок або деякі суттєві кроки розв’язання в разі узагальнення. Довизначення відкритої задачі можна здійснити різними способами. Це залежить від освіченості, досвідченості, особистих уподобань учнів, і цей процес довизначення є складовою етапу постановки задачі, що у дослідницькій роботі складає суттєву частину успішності дослідження [191].

Задача називається задачею з відкритою умовою, якщо невизначеність наявна в умові задачі (наприклад: В опуклому чотирикутнику сума квадратів довжин діагоналей дорівнює сумі квадратів довжин сторін. Чи є такий чотирикутник паралелограмом?).

Задача називається задачею з відкритим твердженням, якщо невизначеність наявна в її твердженні, наприклад:

1) Дослідити властивості параболічного чотирикутника.

2) Дослідити властивість функції , що задовольняє умові

.

3) Які властивості має послідовність: .

Зрозуміло, що існують задачі, в яких невизначеність присутня і в умові і в твердженні – так звана вища форма відкритості (наприклад: За яких умов параболічний чотирикутник має певну кількість осей симетрії?). Найвищою формою «відкритості» задачі є предметна область задачі, в якій немає ні умови, ні твердження [191]. Наприклад:

1) Дослідити властивості – найменшого цілого числа, яке не менше за x.

2) Побудуйте арифметику лишків за натуральним модулем .

Результативні просування у розв’язуванні таких задач можуть послужити домінуючим фактором при виборі теми та її дослідженні у рамках МАН. Починати складати відкриті задачі можна і треба на будь-якому етапі навчання на заняттях гуртка МАН, але краще цьому навчати з узагальнення.

Після розв’язання цікавої задачі майже завжди можна розвинути і узагальнити її, а потім намагатися знайти розв’язок цієї нової проблеми. Узагальнення означає перехід знання на більш високий рівень на основі встановлених для даних об’єктів загальних властивостей. Узагальнення пов’язане з аналогією. Умовиводи за аналогією є складовою творчого мислення, оскільки цим шляхом думка людини виходить за межі відомого, прокладаючи шлях до невідомого, а тому використання узагальнення пов’язане з перетворенням думок, з розумовим експериментуванням [235].

Узагальнення задачі або цілого класу задач та пошук її розв’язання формують в учнів – сухачів, кандидатів і членів МАН дослідницькі вміння, а тому до домашнього завдання доцільно включати завдання, які вимагатимуть від учня не тільки узагальнення деякої задачі, а й пошук її розв’язання.

Роботу з навчання прийомам узагальнення корисно починати ще при розгляді теоретичної бази теми.

Розглянемо приклади узагальнення задач з різних розділів математики.

Задача 1. Розглядаються всі трикутники, в яких всі висоти менші за 1. Чи існує серед них трикутник, у якого площа більша за 2008?

Узагальнення:

1) Чи існує серед тетраедрів, у яких всі висоти менші за 1, такий, об’єм якого більший за

?

2) Якою великою може бути площа n-кутника діаметра 1 при даному n?

Задача2. Якщо учнів знайомлять з деякими еквівалентними нерівностями Коші,

наприклад, для , то доцільно запропонувати одразу узагальнити таку нерівність хоча б до наступної:

1) , для та .

Задача 3. Згадаємо ряд Фібоначчі: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …

.

Геометрична інтерпретація чисел цього ряду дозволяє побудувати софізм зі «зникненням» або «появою» квадратика (рис. 2.6):

Рис. 2.6

Ця задача Кассіні викликає щире здивування у дітей, адже аксіоми площі многокутника виконуються (щоправда, на перший погляд). І все ж таки, звідки з’являється зайвий квадратик?

Задача узагальнюється на наступні члени ряду Фібоначчі (рис. 2.7):

Рис. 2. 7

Куди подівся один квадратик? Які ще наступні члени послідовності чисел Фібоначчі дозволяють побудувати такого роду софізм? Запропонуйте розрізання на чотири частини для чисел для EMBED Equation.3 і дайте геометричну інтерпретацію.

Задача 4. Нехай при вивченні теми «Функціональні співвідношення» були включені для колективного розв’язання такі задачі:

1) Функція задовольняє умові , де . Довести, що – періодична та навести приклад такої, відмінної від сталої, функції при .

2) Функція задовольняє умові , де . Які властивості має така функція?

Одне з можливих узагальнень цих задач може бути таким:

3) а) Якими повинні бути дійсні числа , щоб функція , яка задовольняє умові була періодичною з періодом ?

б) Чи не можна сформулювати подібну задачу при , замінивши вираз на вираз ?

в) Наведіть приклад функції , множина значень якої містить не менше двох чисел (тобто) і яка задовольняла б умовам а) і б).

Діапазон задач, які узагальнюються, їх тематика, характер і складність можуть бути самими різними. Головне, щоб кожна така задача знайшла свого дослідника. Найкращим помічником – посібником задач, що узагальнюються, – для керівників гуртків МАН можуть стати задачі з ТЮМу, а також задачі з журналів «Квант», «У світі математики», «Математика у школі». Приклад завдань восьмого Всеукраїнського турніру юних математиків наведено у додатку Д.

Зауважимо, що формулювання й результати багатьох задач, особливо більш простих, можуть бути значно узагальнені – це завжди високо оцінюється, а розв’язання або часткове розв’язання більш узагальнених задач часто потребує розгляду спеціальних випадків.

Спеціалізація задачі є оберненою дією до її узагальнення. Доцільніше спеціалізацію задачі проводити на основі спеціалізації даних або невідомих. Особливо корисно розглядати спеціальні випадки для задач олімпіадного характеру, оскільки окремі (частинні) спеціальні випадки дозволяють знайти головну (більш загальну) ідею розв’язання.

Розглянемо приклади таких задач, взятих з різних областей математики.

Задача 1. Відновити трикутник, якщо відомо основи трьох його висот.

Складність її розв’язання полягає в тому, що треба здогадатися про співпадіння прямих, на яких лежать висоти шуканого трикутника і бісектриси трикутника з вершинами в основах висот шуканого (бісектрис двох зовнішніх кутів у випадку тупокутного трикутника), та довести це твердження.

Спеціальними випадками цієї задачі можуть бути такі:

1а) Відновити рівносторонній трикутник за основами трьох його висот.

1б) Відновити рівнобедрений трикутник за основами трьох його висот.

Розв’язання цих задач не повинно викликати ускладнень, до того ж вони підштовхують до знаходження основної ідеї (загальної).

Задача 2. Дано точку А і три промені, які виходять з цієї точки і не лежать в одній площині. Потрібно провести через т. В, відмінну від т. А, площину так, щоб кути між променями та площиною були однаковими.

Для даної задачі ключ до її розв’язання може дати подібна задача в :

2а) Через т. В провести пряму під одним кутом до сторін кута . (рис. 2.8).

А ця задача, в свою чергу, містить такий спеціальний випадок: коли т. або т. . Якщо т. , то відкладемо на промені і буде рівнобедреним, а отже, $\angle AB'C'$. Далі, побудувавши пряму , ми тим самим знайшли головну ідею розв’язання задачі 2а.

Рис. 2.8

Тепер у випадку R3 спрацьовує аналогія:

1) будуємо рівні відрізки на променях відповідно;

2) через т. В будуємо площину (.

Задача 3. Порівняти числа: 1) і ; 2) і ,

Розв’язання задач на порівняння чисел виду і потребує знання

спеціалізованої задачі на дослідження монотонності функції , яка є узагальненням задачі про порівняння чисел $\frac{lna}{a}$ і $\frac{lnb}{b}$ і .

Під дослідницькою задачею для учня будемо розуміти задачу, в якій досліджуваний об'єкт залежить від факторів, що вимагають аналізу, посильного для учня. При дослідженні проблеми дуже важливим є не тільки результат, відповідь до задачі, а й знайдений при розв' язанні метод, завдяки якому часто вдається розв'язати багато інших задач. При правильному підході накопичені результати та методи об'єднуються в єдине ціле – нову математичну теорію. Отримуємо, таким чином, ланцюг розвитку реального дослідження: задача – розв'язання – метод – теорія – ЗАСТОСУВАННЯ.

Традиційно перед учнями рідко одразу ставлять нову задачу з невідомим методом розв' язання, а ще рідше просять учня самого ставити нову задачу. Вивчати матеріал можна в двох протилежних напрямках: від теорії та від задач, кожен з яких має свої переваги і недоліки. Відокремленим є підхід – «листків», при якому керівник гуртка не пояснює теоретичного матеріалу (або пояснює певній частині), а учень (або інша частина) вивчає тему, самостійно розв'язуючи дану послідовність задач, спеціально сформульованих і упорядкованих керівником . Листок із завданнями при цьому має обов'язково містити наступні положення:

–основні мінімальні теоретичні питання, яких достатньо буде для розв'язання циклу запропонованих задач, або достатньо, щоб здобути нові невідомі факти самостійно завдяки поставленим задачам;

–завдання для колективного розв'язування;

–завдання пошукового і дослідницького характеру;

–нерозв'язані задачі і відкриті проблеми та гіпотези даної теми;

–література, за допомогою якої можна збагатити знання з розглядуваної теми (див. Додаток Е).

Вивчаючи «від теорії», ми виховуємо користувача науки, який успішно може використовувати відомі методи в різних ситуаціях. Вивчаючи «від задач» – виховуємо творця науки, здатного знаходити нові методи та ставити нові задачі. Отже, для дітей, обдарованих в математиці, з'являється нова можливість – поглиблюватися не за рахунок пасивного вивчення більш складної теорії, а за рахунок активної самостійної роботи при вивченні того ж матеріалу. Зрозуміло, що навчання «від задач» має більш індивідуальний підхід, у порівнянні з навчанням «від теорії», а тому на заняттях гуртка МАН можливі тільки деякі елементи такого навчання. Такого роду різні форми організації пізнавальної діяльності дають широку можливість диференціації навчально-дослідницької діяльності та систематичності її здійснення.

Постає питання: як побудувати для учнів дослідницькі задачі, при поступовому розв'язанні яких відбувалося б збагачення математичною теорією та народжувалися нові методи? Здавалося б, є проста відповідь на таке запитання – взяти готові відкриті математичні проблеми й гіпотези, що існують майже в усіх розділах елементарної математики (такого роду задачі мають знати учні – члени та кандидати МАН). Але тут слушні зауваження П. Л. Капіци, що перед тим як розв'язувати наукову проблему, слід вміти її розв'язувати в малих формах [101].

Виходячи з досвіду роботи, виділимо положення щодо дослідницької задачі та її побудови:

1) дослідження учня має починатися або з підручника, або з заняття;
2) формулювання дослідницької задачі не повинно вимагати від учня значної додаткової підготовки;
3) побудувати дослідницьку задачу для учня важче, ніж для студента;
4) матеріал, необхідний для початкової роботи над проблемою, є цілком доступним для учнів;

5) правильна постановка задачі і керування нею дозволяє учневі досягти високих для нього результатів.

В якості прикладу наведемо декілька задач-досліджень, які легко будуються завдяки додатковим запитанням:

Приклад 1. Назвемо натуральне число n зручним, якщо будь-яке менше за n натуральне число є сумою одного чи кількох попарно різних дільників числа n. Наприклад, дільниками числа 6 є числа: 1, 2, 3, 6. Оскільки , , , , , то число 6 є зручним. Знайдіть ще хоча б одне зручне число.

Цю задачу можна перетворити в пошуково-дослідницьку завдяки таким запитанням:

1)Чи правильно, що зручних натуральних чисел безліч?

2)Які властивості мають зручні числа?

Приклад 2. Якщо – арифметична прогресія, то знаючи тільки , можна знайти ; знаючи третій член, можна знайти суму перших п'яти і т. д. Виявляється, що для послідовності Фібоначчі також виконуються подібні властивості, а саме:

. (*)

Запитання:

1)Чи не можна знайти інші рівності типу (*) (тобто з іншими числами замість 1, 10, 7, 11); якщо можна, то як пов'язані ці параметри?

2)Чи можна побудувати подібні рівності для інших рекурентних послідовностей (хоча б виду); якщо можна, то як?

Приклад 3. Розгляньте питання про монотонність послідовності , де – фіксоване непарне число, – сума цифр в десятковому запису.

Додаткове запитання: Дослідіть підходи до розв'язання питання про монотонність послідовностей , де – довільна функція натурального аргументу.

Приклад 4. Деяка лінія розділяє квадрат на дві рівні частини. Чи обов'язково вона проходить через центр квадрата? Дослідіть таке ж саме питання для куба і деякої поверхні.

Спеціальної уваги заслуговує вивчення геометрії в рамках МАН, оскільки геометрія є складним бар'єром для багатьох учнів середньої школи. Учнів – слухачів та кандидатів МАН потрібно для початку зацікавити цією унікальною наукою – геометрією.

Для початку не зайвим було б запропонувати спростити деякі розв'язані або доведені «яскраві» твердження, що входять до шкільного курсу математики.

Так, наприклад, знайти раціональне доведення задачі Архімеда: «нехай трикутник ABC вписаний в коло, причому AB<BC, M – середина дуги AC, яка розташована по одну сторону від прямої AC, що і точка B. Доведіть, що основа P перпендикуляра, опущеного на відрізок BC з точки M, ділить ламану ABC навпіл, тобто AB + BP = PC».

Коротким та яскравим може бути таке доведення: за теоремою про вписаний кут, маємо, що BAM = BCM, бо вони спираються на дугу BM. Тому, при повороті ΔABM навколо точки M, при якому точка A переходить в точку C, ΔABM переходить в деякий ΔCDM, де точка D лежить на відрізку MC, при цьому MB = MD. Оскільки висота рівнобедреного трикутника є і його медіаною, то BP = PD, що і треба було довести.

На другому етапі, після того як основні факти шкільної програми з геометрії розглянуто, можна перейти до питань аналітичної геометрії, які не ввійшли до шкільного курсу.

Так, наприклад,

1) При розгляді теми: «Криві другого порядку» корисно було б розглянути оптичні властивості кривих та їх використання при розв'язуванні задач.

Задача. Через фокус F еліпса проведемо довільну хорду AB та побудуємо дотичні на кінцях цієї хорди. Нехай I – точка перетину дотичних. Доведіть, що .

Доведення базується на використанні оптичної властивості еліпса: якщо G – другий фокус еліпса, то AI і BI – бісектриси зовнішніх кутів A і B ΔABG, тому I – центр зовні вписаного кола ΔABG. Основа P перпендикуляра, опущеного з центра зовні вписаного кола на відрізок AB, ділить периметр ΔABG навпіл, тобто PA + AG = PB + BG. Залишилося зазначити, що FA + AG = 2a = FB + BG, де a – велика піввісь еліпса.

Зауваження. Аналогічне твердження є вірним і для параболи, і для гіперболи (тільки для гіперболи роль центра зовні вписаного кола грає центр вписаного кола).

2) Деякі заняття корисно присвятити таким питанням:

– що являє собою множина слідів вершин (ребер, граней) опуклого многогранника, якщо розглядати всі можливі перекочування по площині через ребра з деякого початкового положення?

– що таке нескінченно продовжена розгортка опуклого многогранника?

– для яких многогранників множина слідів його вершин дискретна, а для яких вона заповнює площину всюди щільно?

Бажано відповіді на такі запитання супроводжувати комп'ютерними ілюстраціями.

На третьому етапі разом з учнями – членами МАН слід намагатися будувати дещо нові «фігури» або геометричні твердження, на основі яких досліджувати їхні властивості та їх використання.

Так, наприклад, запропонувати розглянути многокутники, складені з дуг парабол.

Можливі такі основні означення:

Означення1. Параболічним 2n-кутником будемо називати об'єднання 2n точок та дуг n парабол, що їх сполучають. Його криволінійні сторони – це дуги парабол. Для будь-якої з цих парабол існує рівно дві протилежні криволінійні сторони, що належать цій параболі. Такі пара боли назвемо твірними.

Означення2. Повним параболічним 2n-кутником будемо називати параболічний 2n-кутник, будь-які дві твірні параболи якого перетинаються в чотирьох точках.

Означення3. Параболічний многокутник будемо називати описаним, якщо існує коло, що дотикається до його криволінійних сторін у 2n точках.

Означення4. Параболічний многокутник будемо називати вписаним, якщо існує коло, що проходить через всі його вершини.

Пропонується дослідити такі властивості:

– якщо парабола і коло дотикаються в точках A і B, а точка P лежить на параболі, то відстань від точки P до прямої AB дорівнює довжині дотичної, проведеної з точки P до кола;

– параболічний чотирикутник є описаним тоді і тільки тоді, коли його діагоналі перпендикулярні;

– параболічний чотирикутник є вписаним тоді і тільки тоді, коли осі парабол перпендикулярні;

– якщо дві параболи перетинаються в двох точках A і B, то коло, що дотикається до цих парабол в чотирьох точках, існує тоді і тільки тоді, коли осі парабол утворюють рівні кути з прямою AB.

Далі можливі дослідження таких тверджень:

– чи будь-який параболічний чотирикутник можна перевести за допомогою афінного перетворення у вписаний та описаний параболічний чотирикутник?

– якщо на параболі лежать чотири точки A, B, C і D, то чи буде осьова пряма, яка пов'язана з BC і AD, паралельна осі параболи?

– чи обов'язково діагоналі описаного навколо параболічного шестикутника перетинаються в одній точці?

Зауважимо, що учням – членам МАН можна узагальнити поняття параболічного многокутника на поняття параболоїдного многогранника і провести деякі його дослідження, зокрема, таке: якщо в два параболоїда вписати сферу, то точки перетину цих параболоїдів лежать у двох взаємно перпендикулярних площинах.

Під науковою задачею будемо розуміти задачу з певною кількістю фактів, вплив яких на досліджувані величини є досить складним. Аналіз таких задач вимагає широкого кругозору і наукової інтуїції та рідко використовується в навчальному процесі.

При підготовці до занять гуртка з математики в МАН при розгляді кожної нової теми керівник особливу уваги має приділяти відкритим проблемам та гіпотезам. Перелік деяких з них наведено у додатку Ж.

Доцільно на заключне заняття теми систематизувати всі відкриті проблеми та гіпотези і занести їх до «листка» з завданнями у рубрику нерозв'язаних проблем теми. Ось як може виглядати така рубрика з теми: «Різновиди простих чисел» у листку з завданнями.

Деякі нерозв'язані проблеми:

1.Досі невідомо, чи простих чисел Мерсена нескінченна кількість. Відповідно невідомо, чи є нескінченно багато досконалих чисел.

2.Чи існує нескінченна кількість простих n, для яких – складене?

3.Досі невідомо, чи є непарні досконалі числа. Якщо такі числа є, то доведено, що вони будуть мати не менше ніж 8 простих дільників і в десятковому записі буде не менше ніж 300 цифр.

4.Нехай n – просте. Чи завжди число не ділиться на квадрат жодного простого числа?

5.Чи існує нескінченна множина чисел Мерсена, які не діляться на квадрат простого числа?

6.Нехай , . Чи є всі числа послідовності ( ) простими? Для кількох перших чисел це твердження правильне: , , , . Але далі ці числа зростають так швидко, що навіть за допомогою сучасних комп'ютерів перевірити на простоту неможливо.

7.Нехай n – непарне натуральне число. Тоді із будь-яких двох умов з чи , є простим числом, є простим числом, випливає третя. Відомо, що ця гіпотеза виконується для всіх .

8.Якщо простих чисел Мерсена дійсно нескінченно багато, то кількість таких чисел, які менші ніж асимптотично дорівнює [220].

Учні – кандидати та члени МАН також можуть взяти участь у пошуку нових простих «чисел-гігантів». GIMPS безкоштовно надає програмне забезпечення та іншу інформацію для пошуку простих чисел на комп'ютерах.

Про підготовку до контрольної роботи школярів – членів МАН. Контрольна робота з математики є однією зі складових конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів – членів МАН України, оскільки програма конкурсу передбачає:

– конкурс науково-дослідницьких робіт;

– виконання контрольних завдань із базових дисциплін;

–захист науково-дослідницьких робіт [181].

Контрольні завдання з математики містять 9 завдань трьох рівнів складності і виконуються протягом 3 астрономічних годин:

–перший рівень – 3 завдання – максимальна кількість балів – 6;

–другий рівень – 3 завдання – максимальна кількість балів – 12;

–третій рівень – 3 завдання – максимальна кількість балів – 21 [182].

Варіанти завдань, які пропонувались на контрольних роботах з математики в квітні 2001 р. для членів МАН наведено у додатку Ж.

В організації підготовки до контрольної роботи членів МАН необхідно врахувати такі важливі аспекти:

–контрольна робота з математики для учнів має бути не тільки однією зі складових конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт, а й однією зі складових у системі розвитку їх математичних здібностей;

–найкраща підготовка до будь-якого конкурсу (контрольної роботи, олімпіади, турніру тощо) – це систематичні серйозні заняття математикою. Разом з тим корисним буде розв'язання задач з матеріалів конкурсів попередніх років за декілька тижнів до змагання з метою перевірки рівня і якості підготовки учнів.

Тому при такому підході має бути вироблена певна стратегія. Суть її полягає у наступному:

1. Конкретно для кожного учня, який готується до написання контрольної роботи з математики в рамках МАН, складається індивідуальний план, що охоплює оптимальний набір тем, які необхідно повторити або вивчити; надається література.

2. При підготовці основна увага приділяється не запам'ятовуванню розв'язань опорних задач, а формуванню вміння класифікувати задачі, засвоєнню загального підходу до їх розв'язання. Основою для «розкрутки» задачі може бути як її результат, так і ідея розв'язання. У першому випадку розглядаються аналогічні задачі, узагальнення, наслідки, факти, конкретні випадки, що використані при розв'язанні. У другому – інші застосування тієї ж ідеї, різноманітні її варіації, або суміжні ідеї. Останнє краще пояснити на прикладі.

Задача 1. Побудувати у якого медіана хоча б в 10 разів довша за бісектрису а бісектриса принаймні в 10 разів довша за висоту

Розв'язання. Візьмемо рівнобедрений прямокутний в якому закріпимо точку і будемо рухати протилежну сторону вздовж променя Оскільки обидві сторони трикутника, які виходять з вершини а з ними й бісектриса буде при цьому необмежено збільшуватися, то настане момент, коли бісектриса рухомого трикутника виявиться мінімум в 10 разів довша за його фіксовану висоту Закріпимо вершину а вершину будемо рухати в тому ж напрямку. При цьому кут між бісектрисою рухомого трикутника і перпендикуляром завжди буде менше ніж

Отже, бісектриса рухомого трикутника, збільшуючись, завжди буде меншою за гіпотенузу прямокутного трикутника з гострим кутом, а медіана його буде так само необмежено збільшуватися. Врешті, настане момент, коли відношення медіани до бісектриси стане більше 10.

Основна ідея розглянутого розв'язання – метод послідовних наближень. Наближенням тут є рівнобедрений прямокутний трикутник, який послідовно перетворювався доти, поки не отримав усі необхідні властивості.

Задача 2. Коник-стрибунець, який сидить у початку координат, починає стрибати по числовій осі. Перший його стрибок – на 1 м, а кожний наступний – в 2 рази довший за попередній. Напрям кожного стрибка коник-стрибунець обирає сам. Знайдіть координати всіх точок, в які він може потрапити за скінченне число стрибків.

Відповідь тут очевидна – це всі точки з непарними цілочисельними координатами.

Розв’язання. Зрозуміло, що довжина n-го стрибка коника-стрибунця складатиме бо після першого стрибка він з’явиться в точці або , а довжини всіх інших наступних стрибків – парні цілі числа, а тому після кожного стрибка він потраплятиме в точку з непарною координатою. Покажемо тепер, що він зможе потрапити в будь-яку таку точку. При цьому до статньо розглянути випадок, коли її координата додатна: щоб потрапити в точку з рівною їй за модулем від’ємною координатою, достатньо змінити напрям всіх стрибків. Нехай – непарне число, а n – найменше з цілих чисел, для яких Покажемо, що коник-стрибунець зможе потрапити в точку за n стрибків. Якщо кожен стрибок розглядати як вектор, то вектор, що з’єднує початкову і кінцеві точки будуть дорівнювати сумі векторів всіх здійснених стрибків. Сума векторів не змінюється від перестановки доданків, а тому точка, в яку потрапить коник-стрибунець залежить лише від довжин і напрямків стрибків, але не залежить від порядку, в якому вони здійснюються. Тепер змусимо коника-стрибунця здійснювати стрибки в зворотному порядку: спочатку – на потім на і т. д., до причому стрибати кожного разу він буде в той бік, де знаходиться точка (в саму точку коник-стрибунець не зможе потрапити, доки не стрибне на 1, бо до цього його координата буде завжди парною). Далі, за індукцією доводиться, що при цьому відстань від коника-стрибунця до точки буде завжди меншою за довжину останнього стрибка.

Ця задача відноситься до задач, при розв’язуванні яких використовується декілька прийомів: метод послідовних наближень, ідея «оберненого ходу» (стрибки в зворотному порядку) і математичної індукції.

У цих двох задачах озвучено і геометричні, і алгебраїчні, і комбінаторні мотиви: метод послідовних наближень має застосування майже в усіх областях математики. Наприклад, його різновидом є «метод подібності» в задачах на побудову, коли спочатку будують фігуру, подібну даній, а потім за допомогою гомотетії будують шукану.

Іншим різновидом є метод ітерації необмеженого знаходження коренів рівнянь. Метод математичної індукції теж можна вважати різновидом методу послідовних обмежень. Таким чином, одна олімпіадна задача приводить до розгляду цілого ряду важливих методів.

3. Спеціальна увага приділяється Всеукраїнським учнівським олімпіадам усіх етапів, а також репетиційним як домашнім, так і аудиторним контрольним роботам, оскільки такі роботи є яскравим індикатором рівня математичної культури учня. У першому семестрі бажано провести дві домашні та дві аудиторні контрольні олімпіади (аудиторні можна суміщати із Всеукраїнськими учнівськими олімпіадами І та ІІ етапів), учасниками яких мають бути всі члени гуртка МАН. У другому семестрі – дві такі аудиторні роботи: одна перед захистом науково-дослідницької роботи (для членів МАН), а друга – в кінці занять гуртка МАН по точного навчального року. У другому семестрі домашніх репетиційних олімпіад не передбачається, адже їх можуть замінити заочні математичні олімпіади, які проводять окремі факультети ВНЗ, журнали «У світі математики», «Математика в школі». До таких олімпіад діти долучаються з бажанням і ентузіазмом.

При складанні варіантів контрольної роботи слід дотримуватися наступних простих правил.

Правило 1. Даючи задачу, ми повинні бути впевнені в тому, що учасники такої роботи мають володіти або володіють необхідними знаннями для її розв’язання.

Правило 2. Задачі варіанта мають бути різноманітними за тематикою: арифметико-алгебраїчні задачі, геометричні задачі, бажаною є наявність комбінаторних і логічних задач.

Правило 3. Задачі варіанта мають бути різними за складністю. В олімпіадному варіанті обов'язково має бути задача «що втішає» для більш слабких учасників і складна задача для найсильніших учнів.

Правило 4. Матеріали, розібрані на заняттях гуртка, є основою при складанні та доборі текстів задач [196].

Варіант можна вважати якісно складеним, якщо він добре диференціює (розділяє за рівнем підготовленості) учасників.

Наведені варіанти завдань контрольної роботи з математики для учнів – членів МАН 9–11-х класів (див. Додаток З) повністю задовольняють вимогам вказаних правил.

Про домашні завдання. До числа основних і стабільних видів позашкільних занять належить домашня самостійна робота учнів. Вона розглядається як складова частина процесу навчання протягом всієї роботи учня в рамках МАН. Головною метою її є: розширення і поглиблення знань, умінь, одержаних на заняттях гуртка; попередження їх забування; розвиток індивідуальних нахилів, талантів та здібностей учнів.

При визначенні домашніх завдань учитель повинен дотримуватися таких дидактичних правил:

1)осмислення і самостійне виконання домашнього завдання можливе лише після ґрунтовного засвоєння учнями нової теми на занятті (коли учні осмислили основні питання нового матеріалу і засвоїли основні прийоми його застосування на практиці, навчилися розв' язувати задачі, приклади, виконувати вправи дослідницького характеру);

2)домашні завдання повинні бути диференційованими. Поряд з завданнями для всієї групи керівник дає окремо складніші завдання для учнів, які виявляють неабиякі здібності до оволодіння знаннями з предмета;

3)визначаючи домашнє завдання, необхідно звернути увагу на порядок і прийоми, які будуть використані при розв'язуванні задач, а також на ті особливості, якими відрізняються домашні вправи і задачі від виконаних на занятті гуртка;

4)учитель повинен діагностувати, прогнозувати і планувати домашнє навантаження учнів, дотримуватися нормативів максимального навантаження школярів, з цією метою мають бути передбачені як завдання для наступних занять так і довгострокові домашні завдання [135, 161].

У процесі визначення завдань для домашньої роботи з математики вчитель має передбачати особливості змісту курсу математики в МАН. Математика на заняттях гуртка МАН – це інтегрований курс, в якому окремо й у тісному взаємозв'язку використовуються різні математичні поняття, орієнтовані на збагачення математичної культури. Отже, у системі домашніх завдань мають бути відображені всі змістові лінії, визначені Державною програмою роботи з обдарованою молоддю, зокрема:

–формування в учнів умінь і навичок математичної культури;

–формування в учнів умінь і навичок культури наукового дослідження;

–пропаганда наукових досліджень учнів;

–задоволення потреб учнів у творчій самореалізації [42].

Систематичними мають бути домашні завдання типу: «Знайдіть помилку у міркуваннях…», «Сформулюйте більш загальну задачу чи поняття...», «Зробіть висновок…», «Складіть...» «Узагальніть...», «Дослідіть...», «Придумайте...». Лише за умов послідовності та цілеспрямованості в доборі завдань, спрямованих на формування пізнавальних та пошуково-дослідницьких умінь, можна досягти реалізації однієї з найважливіших функцій домашньої роботи в гуртку МАН – розвинути в дітей уміння й навички самостійної культури наукового дослідження.

Домашня робота – це самостійна робота учня. У самостійній роботі учень має навчитися долати всі основні етапи виконання завдання без сторонньої допомоги (ставити мету, планувати, контролювати, досліджувати, оцінювати). Отже, самостійна робота учнів – багатогранна педагогічна категорія, яка підлягає відповідній класифікації.

Назвемо основні підходи до класифікації самостійної роботи учнів – слухачів, кандидатів та членів МАН, що стосуються також і домашніх робіт. В залежності від тієї педагогічної мети, яка передбачається при проведенні самостійних робіт, вони можуть бути розділені на такі основні групи: роботи навчальні, перевірочні роботи та пошуково-дослідницькі, а саме:

–роботи, пов’язані з підготовкою дітей до сприйняття нового навчального матеріалу та пов’язані з отриманням нових знань;

–роботи, спрямовані на розширення й поглиблення набутих знань;

–роботи порівняльного характеру, метою яких є не тільки закріплення набутих раніше знань, а й узагальнення тієї чи іншої теми;

–роботи, спрямовані на набуття дослідницьких умінь, зокрема: «Складіть план…», «Зробіть узагальнення…», «Перевірте гіпотезу…», «Знайдіть помилку у міркуваннях…», «Дослідіть…», «Спробуйте побудувати нову теорію…», «Для чого?», «Як це можна використати на практиці?» тощо;

–роботи, пов’язані з виконанням домашніх репетиційних олімпіад;

–роботи, пов’язані з обробкою літератури та підготовкою доповідей.

Особливо актуальною проблемою в системі організації домашньої роботи учнів є індивідуалізація та диференціація домашніх завдань. Принцип систематичності під час організації диференційованого підходу до домашніх робіт має реалізуватися на всебічному уявленні педагогів про способи диференціювання домашніх робіт, а саме:

–за формою: вільний вибір домашнього завдання; індивідуальні завдання; фронтальні завдання, групові;

–за тривалістю: короткочасні, довготривалі, періодичне звільнення від домашніх завдань ;

–за змістом: за рівнем самостійності учнів (репродуктивні та творчі), за рівнем труднощів (збільшення чи зменшення обсягу, ускладнення або спрощення способів діяльності);

–за джерелами: періодичні математичні журнали, дидактичний матеріал, окремі наукові статті, довідкова література, життєвий досвід [163].

Спостерігаючи за виконанням учнями домашніх завдань і перевіряючи результат цього виконання, можна отримати картину успіхів учнів. Враховуючи демократичний підхід при проектуванні занять на гуртках МАН та дослідницький підхід при навчанні, ми пропонуємо внести корективи щодо перевірки домашніх завдань на початку занять гуртка з математики або наприкінці. Звісно, сам процес перевірки домашнього завдання залежить від форми домашнього завдання для учнів МАН, і тому, природно, виникають різні підходи до його перевірки. Але головним об’єднуючим компонентом різних підходів перевірки домашніх завдань у МАН має бути їх просоченість ідеями дослідження. Так, наприклад:

1)Якщо перевіряється розв’язування навчальної задачі, а учні не знайшли яскравого розв’язання, то навіть, якщо вчитель і вирішив продемонструвати розв’язання задачі учням, йому в цьому разі слід проявити неабияку педагогічну майстерність – надати демонстрації готового розв’язання дослідницького смаку, а саме: можна сказати дітям: «Чи можна вважати правильним таке розв’язання?», і продемонструвати готове розв’язання та його повний аналіз.

Такий простий методичний прийом дозволяє не тільки залучати постійно дітей до пошуково-дослідницької діяльності, а й підвищити їх самооцінку – з ними радяться з приводу правильності розв’язання задачі.

Зазначимо, що демонструвати бажано тільки витончені ідеї розв’язання.

Продемонструємо вищесказане на конкретному прикладі: учні отримали завдання – спробувати знайти хоча б два таких ірраціональних числа і , що є раціональним числом. На початку наступного заняття гуртка з’ясувалося, що деяким з них вдалося знайти такі числа (скажімо

), а деяким – ні. Але ніхто не знайшов яскравої ідеї розв’язання, на основі якої можна було б разом вивести більш загальний метод – «провокаційний», який необхідний для даного заняття. Тому пропонуємо готову ідею, зауваживши про невпевненість у її правильності: візьмемо два ірраціональних числа і якщо раціональне, то такі числа і знайдено, а якщо ні, тоді візьмемо і отримаємо, що – раціональне число. Далі протягом декількох хвилин дискусії з учнями врешті робимо висновок, що така ідея є правильною і може бути узагальнена на окремий метод розв’язання – «виключення третього» або «провокуючого» методу на окремий вид задач.

Безумовно, такий методичний хід є цінним для аудиторії: по-перше, вчитель показує свою скромність, оголошуючи про «невпевненість», по-друге, ілюструючи нову ідею, він залучає учнів до дискусії, яка приводить до відкриття нового для них методу.

2)Якщо перевіряються задачі пошукового-дослідницького характеру – «встановити нові властивості...»; «перевірте, чи володіють такими властивостями…», то обізнаність учнів у таких питаннях краще виявляти на задачах-софізмах, які містять логічну помилку саме у питаннях, які треба було встановити чи перевірити дома самостійно.

Продемонструємо це на такому прикладі: учні отримали завдання – встановити властивості наступної послідовності: для . Перевірити, чи справилися учні з цим завданням можна, запропонувавши софізм: . Розглянемо два рівняння:

1) для , яке за теоремою Вейєрштрасса рівносильне такому:

, . Отже, . (1)

2) для , яке за теоремою Вейєрштрасса рівносильне такому:

, . Отже, . (2)

Порівнюючи рівності (1) і (2), робимо висновок, що . Де ж помилка в міркуваннях?

Зазначимо, що помилка успішно буде знайдена тими учнями, які встановлять, для яких є збіжною послідовність .

Вказівка. Існує таке критичне значення , що при послідовність розбіжна, а при – збіжна. Знайти це значення можна з умови дотику графіків функцій і .

2.3. Застосування комп’ютерних технологій у діяльності Малої академії наук

Активне застосування комп’ютерних технологій в діяльності МАН при системному підході може відбуватися на всіх етапах навчання – від шкільного уроку до завершення написання науково-дослідницької роботи. Традиційні вимоги до знань (запам’ятати, вміти відновити) поступово трансформуються у вимоги до базових інформаційних умінь виду пошуку знань (вміти знайти та використати при розв’язанні окремого класу задач). В такому процесі дуже важливо визначити збалансовану грань між традиційним «знати» та інформаційним «уміти знайти необхідні знання».

Питаннями впровадження інформаційних технологій у навчальний процес при вивченні математики в школі займалися В. Г. Болтянський [30], Є. Ф. Вінніченко [46], М. С. Головань [66], Ю. В. Горошко [68], М. І. Жалдак [85], Г. О. Михалін [149], В. М. Монахов [151], А. В. Пеньков [164], Ю. С. Рамський [194], І. О. Теплицький [217] та ін.

У зазначених роботах вбачаються не тільки широкі можливості для інтенсифікації та оптимізації навчально-виховного процесу, активізації пізнавальної діяльності і розвитку творчого мислення, а й вважається доцільною організація проблемно-наукової (дослідницької) діяльності учнів на позакласних заняттях з математики . Питанню формування математичних компетентностей на основі дослідницького підходу в навчанні з використанням інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) великої уваги приділяє в своїх дослідженнях С. А. Раков. Зокрема, він вважає, що дослідницький підхід з використанням ІКТ впливає на всі компоненти методичної системи навчання математики: цілі, зміст, форми, методи, засоби навчання. Ці питання тільки починають активно досліджуватися в усьому світі, але вже зрозуміло, що саме дослідницький підхід з використанням ІКТ є одним з найпотужніших напрямів удосконалення математичної освіти [191].

Дослідницька діяльність учнів отримує новий рівень розвитку при її супроводженні програмною підтримкою, що надає можливість здійснення не тільки комп’ютерного моделювання геометричних об’єктів, траєкторії переміщення фігур, забезпечення графічного контролю, громіздких чисельних підрахунків, оцінювання величин, маніпулювання віртуальними об’єктами, а й дослідження різноманітних нерозв’язних задач і проблем [46].

На сьогодні розроблено значну кількість програмних засобів, орієнтованих на використання при вивченні математики, зокрема такі, як: DERIVE, EUREKA, GRAN-1, GRAN-2D, GRAN-3D, Maple, MathCAD, Mathematika, MatLab, Maxima, Numeri, Reduce. Одним з найпоширеніших програмних засобів для навчання математики є програмний засіб «Mathematica notebook». Він дозволяє розв’язувати досить складні математичні проблеми.

При вивченні шкільного курсу алгебри та початків аналізу, а також деяких розділів геометрії, для аналізу функціональних залежностей та статистичних закономірностей доцільно використовувати такі програмні педагогічні засоби (ППЗ), як GRAN1, GRAN-2D, GRAN-3D, DERIVE, можливості використання яких розглянуто в посібниках [86], [192]. При вивченні шкільного курсу планіметрії доцільно використати пакет динамічної геометрії DG, розроблений Харківським національним педагогічним університетом ім. Г. Сковороди. Цей пакет підтримує різні види навчальної діяльності і має такі можливості:

– організація комп’ютерних експериментів і досліджень, висування гіпотез та їх візуальна перевірка;
– моделювання геометричних побудов;
– дослідження результатів при зміні параметрів задачі;
– ілюстрування досліджуваних об’єктів.

Програмні засоби, орієнтовані на розв’язування математичних задач, які розроблено на сьогодні, досить розвинуті і умовно їх можна класифікувати за такими групами:

– вмонтовані засоби систем програмування;
– спеціальні мови програмування та спеціалізовані пакети;
– пакети комп’ютерної алгебри (CAS – Computer Algebra System);
– пакети комп’ютерної геометрії (DGS – Dynamical Geometry System);
– комп’ютерні математичні системи (CMS – Computer Mathematical System) [191].

Зрозумілі можливості цих програмних засобів: провести необхідний чисельний експеримент, швидко виконати потрібні обчислення чи графічні побудови, перевірити ту чи іншу гіпотезу, випробувати різні методі розв’язання задачі. В той же час вони не вимагають від учня великого обсягу знань і вмінь стосовно роботи з комп’ютером та глибокого розуміння того чи іншого використаного методу. Тому вчителю – керівнику гуртка МАН при виборі ППЗ перевагу слід надавати тим навчальним програмам, що спонукають учня творчо підходити до поставленої задачі.

Питання ефективності застосування ППЗ у процесі викладання математики, особливо в рамках МАН, ще не достатньо досліджені і тому потребують подальшого вивчення та апробації

. Проте, існує багато напрацювань щодо використання новітніх інноваційних технологій під час вивчення окремих, важких для учнів тем в області математики.

Формування та розвиток особистості дитини, особливо її творчих здібностей, у тому числі математичних, є однією з найважливіших цілей виховання школярів. Застосування комп'ютера може певним чином допомогти розв'язати цю проблему. По-перше, використання комп'ютера з набором відповідних програмних засобів може замінити використання відео та аудіо матеріалів. По-друге, як демонстраційний засіб, комп'ютер можна використовувати: проектуючи зображення на екран за допомогою мультимедійного проектора; висвітлюючи зображення на моніторах учнівських комп'ютерів за допомогою відповідного мережевого програмного забезпечення (NetMeeting, NetOpSchool тощо). По-третє, використання засобів комп'ютерного моделювання реалізує підхід «практика через дію», коли учень за допомогою математичної моделі (складеної самостійно чи за допомогою вчителя) досліджує властивості, знаходить співвідношення, узагальнює певні факти при зміні параметрів [46]. По-четверте, використання засобів комп'ютерного моделювання іноді дозволяє перевірити поставлені на заняттях гуртка гіпотези чи проблеми.

Навчання розв'язуванню деякого класу математичних задач пошукового характеру із застосуванням інформаційних технологій змушує використовувати нові форми навчальної роботи. Проведення таких занять досить тісно пов'язується з формами організації занять з інформатики, оскільки саме на заняттях з інформатики комп'ютер використовується і як об'єкт, і як засіб навчання. На подібних заняттях слід ілюструвати більш швидкі методи розв'язування вже розглянутих задач на попередніх заняттях гуртка МАН, узагальнювати ці методи, порівнювати знайдені учнями способи розв'язування, стимулювати пошук нестандартних розв'язань.

Тому визначимо лише основні види діяльності учнів і вчителя, що передбачають використання комп'ютерних технологій на застосуванні їх у діяльності МАН.

Навчальні комп'ютерні програми. Одним із напрямів використання комп'ютерних ППЗ для розвитку творчих здібностей є розв'язування олімпіадних задач з математики пошукового характеру. Використання комп'ютера дозволяє підвищити шанси учнів на відшукання раціональних шляхів розв'язування окремих задач, згладити невідповідності між їхніми здібностями і наявними фактичними знаннями, розкрити їхній творчий потенціал. Прикладами такого роду задач можуть бути:

Приклад 1.

1) Скільки дійсних коренів має рівняння ?

Комп'ютерна підтримка в плані побудови графіків функцій

послідовно при дає змогу учневі висунути гіпотезу про кількість розв'язків даного рівняння для кожного фіксованого Ясна річ, що гіпотеза має бути доведена строго математично.

2) Нехай . Визначте, скільки різних дійсних розв'язків мають рівняння: а) б) ?

Будуємо графіки функцій EMBED Equation.3 , наприклад, за допомогою програми GRAN, і за допомогою теореми Больцано – Коші строго доводимо наявність усіх коренів вихідного рівняння.

Система таких вправ дозволяє більш глибоко оволодіти навичками використання відповідних програмних засобів і розв'язування задач, що зводяться до побудови графіків функцій, це може стати пропедевтичним кроком до введення загального поняття комп'ютерної графіки, векторних зображень.

Приклад 2. Що є геометричним місцем точок перетину медіан трикутників, які мають спільну сторону, а множина протилежних їй вершин утворює довільну фігуру F?

Побудуємо модель задачі в програмі GRAN-2D. Позначимо спільну сторону трикутників AB і розглянемо точку X довільної фігури F. ΔABX є таким, що задовольняє умові задачі. Нехай точка C – основа медіани, що виходить з вершини X, точка M – точка перетину медіан.

У програмі GRAN-2D скористаємося послугою «Зображення/ГМТ» для точки M. Будемо переміщувати точку X вздовж фігури F, при цьому на моделі можна побачити, що точка M описує фігуру, подібну до даної фігури F, що стає поштовхом для формулювання відповідної гіпотези. Але будь-яка гіпотеза, що була сформульована за допомогою комп'ютерної моделі обов'язково потребує доведення або спростування.

Як бачимо, в цій задачі процес розв'язання поділяється на кілька етапів: побудова комп'ютерної моделі, проведення на її основі аналізу, висування припущень, безпосередня перевірка або доведення цих припущень. Наголосимо, що останній крок повинен бути обов'язковим, оскільки побудова комп'ютерної моделі не може вважатись повноцінним доведенням.

Приклад 3. Дослідити, які фігури утворяться внаслідок перерізу куба площиною, що проходить через середини двох суміжних ребер однієї з його граней і через вершину кута, яка належить протилежній грані. Скільки площин можуть утворити такий перетин? В якому відношенні ділиться об'єм куба кожною з цих площин?

Користуючись реалізованими в програмі GRAN-3D можливостями відображення моделей фігур, що утворюються внаслідок перерізу площинами побудованих многогранників, учні матимуть змогу простежити будову кожного з тіл, що утворилися внаслідок перерізів, дослідити форми та взаємне розташування граней, а отримавши значення об'ємів, проаналізувати їх відношення. Взагалі, під час розв'язування подібних задач використання ППЗ значно прискорює процеси розуміння й усвідомлення учнями навчального матеріалу, а зекономленим часом вчителі можуть розпорядитись на свій розсуд. Зокрема, для розвитку творчих здібностей учнів корисно запропонувати відтворити ситуації, в яких застосовуються дії, описані в умовах задач [210]. Також доцільно запропонувати учневі провести дослідження, щодо зміни деяких умов (заміна параметрів, формулювання та розв'язання оберненої задачі, можливі узагальнення) у поставленій задачі.

Комп'ютерні демонстрації та мультимедійні презентації. Демонстрації запроваджуються, як правило, вчителем для ілюстрації навчального матеріалу. Найчастіше це короткі анімації різноманітних цікавих математичних процесів, наочні схеми, рисунки. Інструментами для створення таких демонстрацій є: Maple , MathCAD, Mathematika, MatLab, Maxima, Numeri, Reduce. Доцільно спонукати учнів до самостійної розробки подібних матеріалів і навіть до створення фрагментів електронних підручників. Дуже важливо мати бібліотеку готових динамічних креслень для використання на заняттях, але використовувати їх доцільно швидше як зразки. Найбільш продуктивним, як показує світова практика , є побудова динамічних креслень самими учнями – це є творча задача сама по собі і крім того, сприяє більш активному засвоєнню як самої математики, так і методології використання математичних пакетів для розв'язування та дослідження математичних задач [191].

Комп'ютерні презентації представляють собою набір сторінок (слайдів), що вміщують, як і гіпертекстові документи, текст, формули, рисунки, анімації, звуко ві та відео фрагменти. Простота застосування програми Power Point, що входить до стандартного пакету Microsoft Office, при наявності потрібної інформації дозволяє швидко створити презентацію. Такий підхід зручний для проведення за нять, але з найбільшим інтересом учні готують презентації до виступів на конкурсах-захистах МАН.

Робота з Інтернет. Інтернет – це дивовижний інструмент для доступної подачі інформації великій кількості людей, а також є чудовим інструментом для навчання. В мережі Інтернет у вільному доступі з'являється все більше документів на різних сайтах про науково-популярні фізико-математичні журнали, матеріали для математичних гуртків, про нові відкриття в математиці, які можуть використовуватися при підготовці дослідних робіт МАН з метою обізнаності у певній галузі. За допомогою цієї мережі учні повинні з'ясувати стан справ у розв' язанні проблем, якими вони цікавляться. Тому пошук інформації в мережі Інтернет є обов'язковим.

За допомогою Інтернету здійснюється спілкування членів гуртка між собою та з керівником, використовуючи різноманітні його можливості. Бажано зробити веб-сторінку для групи, де можна викласти: програму курсу, інформацію щодо необхідних знань для вивчення курсу, посилання на додаткову літературу, поради для учнів щодо підготовки до різних змагань, домашнє завдання. Якщо керівникові негайно потрібно вказати на помилку у тексті (книзі), надати вказівки до розв'язання попередніх домашніх завдань, дати нові домашні завдання, зробити оцінку важливої інформації учня, то Інтернет – це те, що нам потрібно. Тобто Інтернет має найшвидші можливості ознайомлення всіх бажаючих щодо будь-якої інформації з вашого курсу. Безумовно, повна картина цінності Інтернету як інструмента для навчання ще не досліджена.

Підготовка дослідницьких робіт до конкурсів-захистів МАН. Підготовка роботи до конкурсу МАН передбачає використання комп'ютера на всіх її етапах.

Написання та оформлення роботи здійснюється за допомогою комп'ютера. Учні оволодівають технікою роботи користувача персонального комп'ютера, при цьому вони можуть використовувати програми, такі як, Mathcad, Matlab для побудови графіків або обчислень.

Комп'ютерне моделювання як наступний етап при формуванні дослідницької культури на основі творчої задачі, є найбільш типовим для дослідницької діяльності в МАН.

Таким чином, застосування інформаційно-комунікаційних технологій у діяльності МАН неодмінно має привести до:

–розробки методів самостійної дослідницької роботи учнів у ході виконання навчальних проектів;

–навчання учнів методам колективного вирішення проблем;

–поєднання методів групової та індивідуальної роботи учнів;

–використання комп'ютера при написанні дослідної роботи учнів;

–підготовки керівників гуртка до роботи з новими методами організованих форм навчання та інтенсивного використання засобів обчислювальної техніки в навчальному процесі з математики в рамках МАН;

–залучення більшого кола учнів щодо вибору теми для дослідження;

–організації спільної безперервної дистанційної роботи керівника з учнем – членом МАН завдяки мережі Інтернет.

Тісний взаємозв'язок «чистої» математики та ІКТ має проявлятися ще і в тому, що сучасна обчислювальна техніка повинна надавати для учня – члена МАН принципово нові можливості не тільки для отримання чисельних розв'язків задач, а й для вивчення та дослідження теоретичних проблем. Чудовими прикладами використання комп'ютерів у дослідженнях з математики є:

1)розв'язання відомої проблеми чотирьох фарб. Проблема полягала у знаходженні мінімальної кількості кольорів, якими можна розфарбувати будь-яку мапу таким чином, щоб кожні дві сусідні країни були пофарбовані в різні кольори . В кінці ХІХ ст. було встановлено, що достатньо п'яти різних фарб. А чи можна обійтися чотирма фарбами? – питання, яке переросло у проблему чотирьох фарб, залишалося довго відкритим. Лише у 1976 р. була отримана позитивна відповідь щодо можливості такого розфарбування американськими математиками К. Аппелом і В. Хакеном завдяки використанню сучасних комп'ютерів;

2)відкриття нових простих чисел-гігантів, наприклад, чисел Ліндона або Мерсена. У мережі Інтернет можна стати членом Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS). GIMPS об'єднує більше тисячі любителів теорії чисел, які за до помогою тесту Люка – Лемера шукають нові прості числа Мерсена. Відкривач 35-го простого числа Мерсена Арменгауд є якраз одним із членів GIMPS.

Можливо, що наступне просте число Мерсена відкриє хтось із членів МАН.

Підсумовуючи, слід зазначити, що питання застосування комп'ютерної техніки в пошуково-дослідницькій діяльності учнів є цікавою і важливою темою, що потребує ґрунтовного і ретельного дослідження та узагальнення. Але зрозуміло й те, що правильно та вдало поставлений на комп'ютері експеримент неодмінно має привести до виникнення плідних гіпотез, вивчення яких дозволить зрозуміти сутність явища, і як результат, – до створення потрібної теорії.

2.4. Організація та результати педагогічного експерименту

Для визначення ефективності запропонованої системи розвитку математичних здібностей школярів у діяльності МАН було проведено 3-етапний педагогічний експеримент.

На першому – констатувальному етапі (1998–1999 рр.):

–проводився аналіз шкільних навчальних програм та стан їх виконання в умовах школи;

–проводився аналіз теоретичного та задачного матеріалу шкільного курсу математики та різних методик навчання розв'язуванню математичних задач;

–проводився аналіз різних методів та форм організації навчальної роботи учнів у шкільній і позашкільній діяльності;

–визначалися індивідуально-особистісні, мотиваційні, адаптивні та інші фактори впливу на процес розвитку математичних здібностей школяра у діяльності МАН;

–досліджувалися критерії та способи визначення творчих здібностей школяра, зокрема здатність до постановки нових задач та проблем, до аналізу та узагальнення, до передбачення, проникливості у пошуках проблем та ін.;

–оцінювалися творчі, зокрема математичні, можливості дітей на основі аналізу анкетного матеріалу, даних спостережень і тестування.

Аналіз результатів проведення констатувального етапу педагогічного експерименту дозволив:

1) зробити такі висновки:

–у школярів на основі інтересу до цікавих математичних задач проявляється потяг до їх розв'язування;

–на підставі попереднього пункту проявляється потяг до творчої роботи та досліджень у більшості дітей при розгляді недетермінованих завдань;

–в учнів не сформовані вміння ставити завдання для дослідження;

–учні практично не володіють алгоритмами, навиками математичної діяльності та прийомами дослідницької діяльності;

–системний підхід до розвитку математичних здібностей учнів неможливий тільки у межах класно-урочної системи навчання – обов'язково потрібне нерегламентоване позаурочне спілкування з учнем;

2) з'ясувати основні напрямки формування системи для розвитку математичних здібностей учнів у процесі їхньої діяльності в рамках МАН, визначити критерії щодо роботи з учнями МАН та системи завдань, які доцільно застосувати в подальшому для підтримки такої методики;

3) зробити висновки про рівень сформованості у школярів творчих рис, зокрема математичних, про наявність у учнів певних проблем під час їхньої діяльності в рамках МАН.

Під час пошукового етапу педагогічного експерименту (2000–2001 рр.):

–аналізувалися шляхи та напрямки вдосконалення процесу розвитку математичних здібностей учнів у рамках МАН;

–вивчався досвід вітчизняних та зарубіжних дослідницьких технологій;

–проводився аналіз на придатність і адаптованість до навчального процесу в МАН різних методів та форм організації навчальної роботи та різноманітних комп'ютерно-орієнтованих засобів, призначених для активізації пошуково-дослідницької діяльності учнів, а також прогнозувався їх вплив на розвиток математичних здібностей школярів;

–добирався матеріал для проведення гурткових занять, контрольних робіт і олімпіад, дослідних робіт учнів та створювались конкретні компоненти методичної системи розвитку математичних здібностей школярів МАН – ці компоненти включають певні зміни у способі подання навчального матеріалу з деяких тем математики, урізноманітнення методів та прийомів навчання у зв'язку зі специфікою такого позашкільного закладу як МАН, а також впроваджувалися комп'ютеризовані дослідження відомих з історії математики цікавих фактів, тверджень, гіпотез, парадоксів.

Ці роки були відзначені пошуком адекватної форми для цілей, змісту, засобів, методів і форм навчання на основі традиційного та дослідницького підходу в курсах шкільного та позашкільного навчання математики.

На третьому етапі – формувальному (2002–2009 рр.):

–перевірялася на практиці ефективність розроблених компонентів методичної системи навчання в МАН, спрямованої на розвиток математичних здібностей школярів;

–уточнювались окремі компоненти методичної системи запропонованої системи розвитку математичних здібностей особистості;

–порівнювалися результати і наслідки навчально-пізнавальної діяльності учнів, що навчалися за традиційною методикою та учнів, задіяних в експериментальному навчанні.

Для вимірювання впливу запропонованої системи на рівень сформованості математичних здібностей учнів використовувались різні інструменти: спосте реження, тестування, анкетування, аналіз результатів екзаменів та олімпіадних робіт, виконання контрольних робіт, дослідницьких проектів. Для оцінки рівнів набуття різних математичних здібностей використовувались відповідні статистичні методи, більшість яких базуються на ідеї використання випадкової сукупності характеристик розвитку математичних здібностей досліджуваних із загального числа тих, на які можна поширити висновки, отримані під час дослідження згідно з [71].

Для проведення формувального експерименту було обрано два восьмих математичних класи, набір учнів до яких здійснювався у 1999/2000 н. р.:

–12-та група ліцею м. Славутича, Київської області;

–8-Г клас школи № 1 м. Славутич, Київської області.

–У кожному класі навчалося по 24 учні.

Для конструювання репрезентативної вибірки відповідна популяція має бути умовно розділена на групи за певними параметрами. Роль таких параметрів у дослідженнях з дидактики звичайно відіграють вік учня або клас, в якому він навчається; рівень навчальної успішності (високий, середній, низький); розташування школи (міська, сільська) та рівень вивчення предмета. Для того, щоб вибірка могла вважатися репрезентативною, відносні частки представників кожної групи повинні бути однаковими або досить близькими у вибірці.

Восьмі класи формувалися з учнів різних шкіл міста, при цьому проводилися вступні контрольні роботи з математики за програмою загальноосвітньої школи. Якщо рівень знань учнів дозволяв виконати ці контрольні роботи не менше ніж на 70 %, то такі учні зараховувалися до математичного класу. Отже, рівень успішності учнів цих сформованих класів можна вважати таким, що забезпечує репрезентативність.

З метою підтвердження репрезентативності вибірок при формуванні класів автором було запропоновано текст вступної контрольної роботи з математики, а потім проведено тестування учнів цих класів за допомогою тесту для визначення загальних творчих здібностей школярів (додаток А). Вступна контрольна робота з математики виявила, що учні цих класів мають практично однакові результати. Результати тестування показали, що учні обох класів мають у середньому однаковий рівень розвитку.

За згодою батьків учнів клас 8-Г було визначено як експериментальний (експериментальний клас-1) для навчання за пропонованою методикою, а клас – 12-та група – як контрольний. Класи навчалися за однаковими програмами.

Зауважимо, що за експериментальною методикою навчалися також учні ще одного класу (експериментальний клас-2), який було сформовано як профільний (8-В) школи № 1 у 1997/1998 н. р.

В експериментальних і в контрольному класах математика викладалася одним вчителем (здобувачем), за однаковою програмою. Але викладання в експериментальних класах велося із застосуванням запропонованої нами методики, а в контрольному класі – за традиційною методикою і гурток при МАН діти цього класу не відвідували. Результати формувального експерименту наводяться на час, коли учні контрольного та експериментального класу-1 закінчили 9-й клас, а учні експериментального класу-2 – 11-й клас, тобто на кінець 2000/2001 навчального року.

Результати експериментального навчання перевірялися за наслідками проведення Всеукраїнських учнівських математичних олімпіад, контрольних робіт, в яких передбачалося розв’язування і творчих завдань з певної математичної теми, як однієї зі складових конкурсу МАН та результатами участі в конкурсах-захистах МАН на різних етапах. Результати участі в конкурсах-захистах МАН на різних етапах учнів експериментальних та контрольного класів у 2000/2001 навчальному році наведено в табл. 2.3.

Таблиця 2.3

Результати участі учнів у конкурсі МАН науково-дослідних робіт

№	Клас	Кількість дослідних робіт на І етапі	Кількість дослідних робіт (призерів) на ІІ етапі	Кількість дослідних робіт (призерів) на ІІІ етапі
1.	Експериментальний-1 (9-Г) – 24 учні	14	5 (4)	1 (1)
2.	Експериментальний-2 (11) – 23 учні	9	5 (5)	1 (1)
3.	Контрольний (22гр) – 24 учні	5	-	-

З таблиці видно, що не тільки активність, а й результативність учнів щодо участі в конкурсах-захистах МАН, починаючи вже з першого етапу є більшою в експериментальних класах. Навіть розпочавши пошукову діяльність, учні контро льного класу практично всі припинили її, бо результати контрольної роботи з математики були гіршими, а доповіді бажали бути кращими. Члени журі не відчули у дітей контрольного класу палкого інтересу й потягу до дослідництва.

Для статистичної обробки результатів формувального експерименту застосовувалися непараметричні методи математичної статистики [71]. Ми користувалися оцінкою за допомогою двостороннього критерію , що використовується для порівняння об'єктів двох сукупностей зі стану деякої властивості на основі вимірювання за шкалою найменувань цієї властивості у двох незалежних вибірках з обраних сукупностей учнів, які навчалися (або не навчалися) за пропонованою методикою і підготували (або не підготували) дослідження для участі у І (міському) етапі конкурсу-захисту робіт МАН [71, с. 96]. При цьому ми вважаємо, що показником розвитку математичних здібностей учнів є їх бажання через пошукову роботу дізнатися більше та спроможність втілити отримані нові знання у дослідження з виконанням усіх вимог до конкурсних змагань МАН.

У зв'язку з тим, що шкала найменувань має лише дві категорії, було складено дві вибірки, які зведено у табл. 2.4.

Таблиця 2.4

До обчислення критерію **для І етапу конкурсу МАН**

	Кількість учнів, які приймали участь у І етапі конкурсу МАН	Кількість учнів, які не приймали участь у І етапі конкурсу МАН	Загальна кількість учнів
Вибірка №1	$O_{11} = 14$	$O_{12} = 10$	$n_1 = O_{11} + O_{12} = 24$
Вибірка №2	$O_{21} = 5$	$O_{22} = 19$	$n_2 = O_{21} + O_{22} = 24$
	$O_{11} + O_{21} = 19$	$O_{12} + O_{22} = 29$	$N = n_1 + n_2 = 48$

Вибірка № 1 складається з $n_1 = 24$ учнів експериментального класу-1, вибірка № 2 – з $n_2 = 24$ учнів контрольного класу. Відношення до участі у конкурсі-захисті МАН вимірюється за шкалою найменувань, яка має дві категорії: 1) підготував роботу з математики до І етапу конкурсу МАН; 2) не підготував роботу до І етапу конкурсу МАН. Обидві вибірки учнів випадкові (оскільки розподіл при формуванні класів був випадковим) та незалежні, тобто в умовах даного експерименту виконуються всі умови застосування критерію . Оскільки шкала вимірювань має тільки дві категорії, тому використаємо варіант двостороннього критерію.

Для цього позначимо p_1 – вірогідність того, що учень узяв участь у І етапі конкурсу-захисту МАН, p_2 – вірогідність того, що він не брав участі в конкурсі. На основі даних попередньої таблиці можна перевірити нульову гіпотезу H_0: $p_1 = p_2$ – при альтернативній гіпотезі H_1: p_1 p_2. Оскільки всі значення абсолютних частот в таблиці 2.3 не менше 5, але одне з них менше 10, то підрахунок критерію здійснювався за формулою [71, с. 104]:

Згідно з умовами застосування двостороннього критерію за таблицею [71, с. 130] для одного степеня свободи ( ) та рівня значущості знаходимо

$T_{критич}$ = 5,024. Отже, $T > T_{критич}$, тому за правилом прийняття рішення для критерію отриманий результат призводить до відхилення нульової гіпотези і дозволяє стверджувати, що при навчанні за пропонованою методикою в експериментальних класах на рівні значущості (або у відсотках , тобто достовірність результатів складає 97,5 %) розвиток математичних здібностей через пошуково-дослідну роботу при підготовці учнів до конкурсу МАН є значно вищим, ніж при навчанні за традиційною методикою. При цьому слід зауважити, що, *по-перше*, загальноприйнятним у педагогічних дослідженнях є рівень значущості (достовірність 95 % < 97,5 %); *по-друге*, формуючий експеримент проводився у даних класах два роки, тому у вибірку ввійшли результати діяльності учнів дев'ятого класу, які за положенням про МАН є наймолодшими учасниками конкурсів-захистів, а учні старших класів (10-й, 11-й) зазвичай показують вищі результати на конкурсах-захистах МАН. Тому вважаємо результати формуючого експерименту досить переконливими.

Показником ефективності впровадження методики розвитку математичних здібностей учнів в рамках МАН ми вважаємо ще й ту частину робіт-доповідей, автори яких отримали призове місце на II (обласному) та III (заключному) етапах конкурсу захисту МАН. Оскільки оцінка журі відображає цілий спектр компетентностей, потрібних майбутньому науковцю (знання фактичного матеріалу, здатність до дослідницької діяльності, вміння викласти одержані результати), то таку оцінку можна вважати *об'єктивним показником* рівня сформованості умінь та способів розумової діяльності, потрібних для подальшої дослідницької діяльності в математиці, рівня розвиненості математичного стилю мислення. Отже, одержання учнем призового місця за результатами захисту роботи можна вважати показником розвиненості у нього відповідних якостей.

Вважатимемо ймовірність одержання учнем – учасником обласної конференції МАН призового місці такою, що дорівнює 0,5, оскільки за положенням про проведення II (обласного) етапу конкурсу-захисту МАН половина учасників можуть стати призерами, якщо наберуть відповідну кількість балів. Перевіримо гіпотезу про те, що ймовірність одержання школярем призового місця за умови виконання роботи з використанням запропонованої методики відрізняється від 0,5. Розглянемо біноміальний розподіл результатів. Будемо вважати випробуванням участь школяра у конференції МАН, сприятливим результатом – одержання призового місця, несприятливим результатом – неодержання призового місця. Перевіримо нульову гіпотезу ( ): ймовірність сприятливого результату за умови використання запропонованої методики дорівнює 0,5 по відношенню до альтернативної гіпотези: така ймовірність перевищує 0,5. Перевіримо цю нульову гіпотезу для учнів експериментального класу-1 (клас 9-Г школи № 1 м. Славутича), скориставшись даними табл. 2.3. За таких умов для перевірки гіпотези використовується критерій Макнамари [71, с. 45], бо (при 5 випробуваннях 4 сприятливих результати). У нашому випадку , а ймовірність появи значення при дорівнює 0,188 за таблицею А з [71, с. 127]. Отже, на рівні значущості можна стверджувати, що ймовірність сприятливого результату вища за 0,5. Аналогічно перевіряємо нульову гіпотезу для учнів експериментального класу-2 (11-й клас школи № 1 м. Славутича) за даними табл. 2.2. За умови підтвердження нульової гіпотези p-значення при 5 випробуваннях та 5 сприятливих результатах дорівнює 0,031. Отже, на рівні значущості можна стверджувати, що ймовірність сприятливого результату теж вища за 0,5.

Таким чином, в обох випадках можна стверджувати, що ймовірність одержання призового місця учнями, які готувалися за допомогою запропонованої методики, вища за середню ймовірність отримання призового місця за інших умов, та такий рівень вірогідності перевищує той, що є загальноприйнятим у дослідженнях з психології та дидактики – 95 %.

Аналіз результатів таблиці дає підстави стверджувати, що на III (заключному) етапі конкурсу-захисту МАН наші вихованці показують стабільно високі результати, але їх кількість суттєво не зростає, оскільки на кожній секції від області виступає лише один представник незалежно від рейтингу, а кількість переможців не може перевищувати половини кількості всіх учасників III етапу конкурсу-захисту. Тому більш цікавим та ґрунтовним підтвердженням слушності запропонованої нами методики в системі є переконливе зростання кількості та якості робіт, підготовлених учнями на II (обласний) етап конкурсу-захисту МАН.

Якщо заняття в секції математики МАН стають потребою, викликаною інтересами учнів та їх внутрішньою мотивацією, то кількість бажаючих займатися математикою та дослідною роботою збільшується, і тоді можна стверджувати, що така система спрацьовує. Ефективним виявилося поетапне залучення учнів до дослідної роботи зі спеціальною системою вправ та специфікою організаційних форм: від монодослідження до власного науково-дослідного проекту, як це було виконано автором в експериментальних класах. Як наслідок цього, тільки за один 2000/2001 н. р. автором було зафіксовано більше 30 тем для досліджень, які сформувалися у процесі навчання за пропонованою системою на заняттях в секції МАН та досягли такого рівня, що відповідав вимогам дослідної роботи МАН.

Результати експериментального навчання ще перевірялися за наслідками проведення контрольних робіт, в яких передбачалося розв'язування дев'ятьох завдань з математики трьох рівнів складності. Варіанти завдань було взято ті, які пропонувались на контрольній роботі з математики в квітні 2001 р. для учнів 9-го класу – членів МАН (див. Додаток З) з додатковим творчим завданням – уза гальнити або перетворити у дослідницьку будь-яку задачу із запропонованих. Така контрольна робота дозволить порівняти математичну підготовку цих математичних класів за станом деяких знань, умінь і навичок після дворічного терміну навчання з різною методикою викладання.

Оцінювання результатів виконання завдань проводилось за такими критеріями. Оскільки добиралися задачі різної складності (I, II, III рівнів), то за кожну з трьох задач I рівня учень міг отримати 2 бали, за кожну з трьох задач II рівня – 4 бали, і за кожну з трьох задач III рівня – 7 балів. За окремими шкалами оцінювалися також оригінальні методи розв'язування та умови творчих завдань, які діти узагальнили самі або перетворили в дослідницьку задачу з переліку запропонованих (також ставилося на меті перевірити рівень розвиненості в учнів проникливості у пошуках проблем, здатності легко формулювати дещо нові поняття, швидко генерувати свої ідеї). Найбільша кількість балів, яку учні могли отримати за письмову частину контрольної роботи – 39 балів, за узагальнення – 10 балів, за створення дослідницької задачі – 15 балів.

Таким чином, остаточний підсумковий бал учнів за виконану контрольну роботу знаходився в межах від 0 до 64 балів. Результати проведення контрольної роботи подано у табл. 2.5, в якій у першому стовпці міститься інтервальний ряд отриманих учнями балів, у другому та третьому стовпцях відповідно сумарна кількість учнів з експериментальних та контрольних груп, які отримали суму балів з відповідного інтервалу.

Таблиця 2.5

Результати контрольної роботи учнів

Кількість балів	Кількість учнів з експериментальних груп	Кількість учнів з контрольних груп
0–8	1	3
9–16	3	4
17–24	3	5
25–32	2	7
33–40	5	3
41–48	5	2
49–56	3	0
57–64	2	0

Для аналізу отриманих статистичних даних застосуємо критерій Колмогорова – Смірнова, оскільки всі вимоги, необхідні для його використання, виконуються [71, с. 106].

Висунемо нульову гіпотезу H_0: результативність учнів у творчому засвоєнні знань в експериментальній групі не більша за результативність у контрольній групі, а альтернативна гіпотеза прийматиме протилежне твердження. Гіпотеза H_0 буде справедливою, якщо значення другого стовпця табл. 2.5 виявляться статистично більшими за значення третього стовпця. Заповнимо табл. 2.6, до якої занесемо значення абсолютних частот кожної з вибірок (число спостережень з розглядуваних вибірок, що потрапили у відповідний інтервал), значення накопичених частот (число спостережень, які мають значення, що не перевищують значення з даного інтервалу), при цьому маємо, що $n_1 = 24$, $n_2 = 24$.

Таблиця 2.6

До обчислення критерію Колмогорова – Смірнова

Інтервали балів, отриманих учнями, x	Абсолютна частота, f_1	Абсолютна частота, F_2	Накопичена частота, $\sum f_1$	Накопичена частота, $\sum f_2$		EMBED Equation.3
0–8	1	3	24	24	1,00	1,00
9–16	3	4	23	21	0,96	0,86
17–24	3	5	20	17	0,83	0,71

25–32	2	7	17	12	0,71	0,50
33–40	5	3	15	5	0,63	0,21
41–48	5	2	10	2	0,42	0,08
49–56	3	0	5	0	0,21	0
57–64	2	0	2	0	0,08	0

Для подальшого використання критерію визначимо значення статистик T_1, T_2, T_3 за допомогою наступних формул: , , , а саме: $T_1 = 0{,}42$; $T_2 = 0{,}42$; $T_3 = 0$. Для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ та проведених вибірок об'ємом $n_1 = 24$, $n_2 = 24$

критичні значення статистик визначимо за наближеною формулою: [71, с. 115], де λ_α – квантіль функції Колмогорова $K(\lambda)$, що відповідає вибраному рівню значущості α. Знаючи, що $\lambda_{0,05} = 1{,}36$, знаходимо $W_{1-\alpha} \approx 0{,}3926$. Оскільки $T_1 > W_{1-\alpha}$, то згідно з правилом прийняття рішень це свідчить про те, що результативність учнів у творчому засвоєнні знань в експериментальних та контрольних групах неоднакова. Оскільки $T_2 > W_{1-\alpha}$, то висунута гіпотеза H_0 відхиляється на рівні значущості α і приймається альтернативна гіпотеза про те, що результативність учнів в експериментальних групах більша за результативність у контрольних.

Таким чином, результати опрацювання статистичних даних, зібраних наприкінці проведення експериментального навчання, переконливо свідчить про його ефективність щодо формування в учнів багатьох компонентів математичних здібностей.

Дослідження рівня розвитку в учнів математичних здібностей проводилось не лише під час контрольних робіт. Ефективність системи перевірялась за результатами виконання учнями спеціальних домашніх завдань, що добиралися з урахуванням рівневої диференціації учнів та орієнтувалися на розвиток у них креативних здібностей. Аналізувався також вплив використання в навчальному процесі запропонованої системи на результативність учнів у різних математичних змаганнях, зокрема в олімпіадному русі. Результати участі в олімпіадах з математики наведено в табл. 2.7.

Таблиця 2.7

Результати участі учнів в олімпіадах

№ з/п	Клас	Кількість учасників (призерів) на I етапі	Кількість учасників (призерів) на II етапі	Кількість учасників (призерів) на III етапі	Кількість учасників (призерів) на IV етапі
1	Клас-1 (9-Г), 24 учня, експериментальний	11 (9)	9 (7)	7 (6)	1 (1)
2	Клас-2 (11-й), 22 учня, експериментальний	7 (5)	5 (5)	5 (4)	1 (1)
3	Група 22, 24 учня, контрольний клас	9 (3)	3 (1)	–	–

З таблиці видно, що не тільки активність, а навіть результативність учнів щодо участі в олімпіадах, починаючи з першого етапу більша в експериментальних класах. Розпочавши математичне змагання на II етапі, учні контрольного класу практично всі припинили його, оскільки кожен наступний етап в олімпіадному русі вимагатиме від учня більшої наполегливості та творчого підходу щодо підготовки.

Результати участі учнів цих експериментальних класів за період з 1998 по 2001 рр. у ІІІ (обласному) та IV (заключному) етапах Всеукраїнської олімпіади з математики відображено у вигляді діаграми (рис. 2.9).

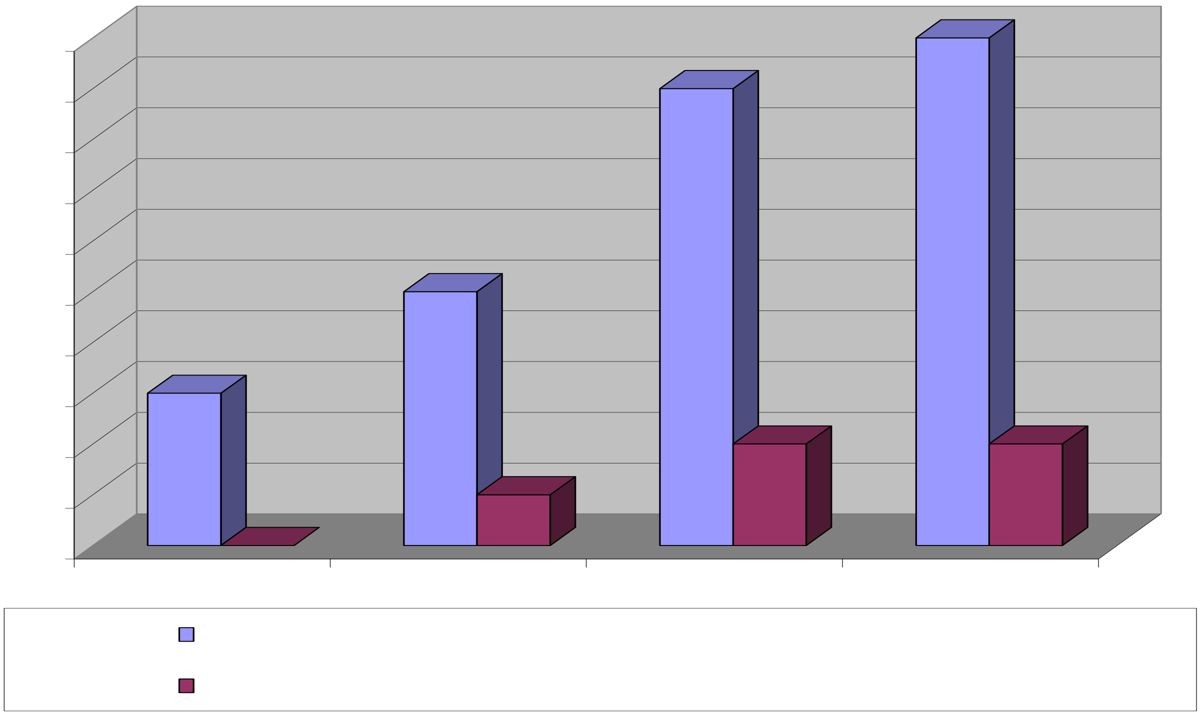


Рис. 2.9. Результати участі учнів експериментальних класів у ІІІ та IV етапах Всеукраїнської олімпіади з математики

Для того, щоб переконатись в тому, що експериментальне навчання сприяло підвищенню рівня математичних

здібностей учнів, використаємо знову критерій для даних попередньої таблиці на основі результатів ІІІ етапу Всеукраїнських учнівських олімпіад з математики. Висунемо гіпотезу H_0 про те, що рівень математичних здібностей учнів за першою сукупністю значень не перевищує рівня за другою сукупністю показників, тоді альтернативна гіпотеза H_1 буде містити протилежне твердження.

Щоб спростувати нульову гіпотезу, скористаємося двостороннім критерієм з рівнем значущості $\alpha = 0{,}025$, а також обчислимо значення статистики

та

порівняємо його з критичним значенням статистики за таблицею [71, с. 130] для одного степеня свободи ( ) Ткритич = 5,024. Отже, Т > Ткритич, тому в такому разі маємо всі підстави стверджувати, що нульова гіпотеза суперечить статистичним даним, а не суперечить гіпотеза Н1.

Таким чином, висновки нашого дослідження, отримані експериментальним шляхом, підтверджують сформульовану на початку дослідження робочу гіпотезу, а розроблені компоненти методичної системи розвитку математичних здібностей учнів можна вважати ефективними.

Починаючи з 2003 року за планом роботи Київського обласного інституту післядипломної освіти педагогічних кадрів в м. Біла Церква неодноразово проводилися авторські курси по роботі з обдарованими з математики учнями, де автор мав змогу представити розроблену систему. Слухачі курсів – вчителі математики Київської області ознайомлювалися зі запропонованою системою та приймали участь у практичній роботі із конструювання дослідницьких завдань, тем для школярів та перспектив їх перетворення на науково-дослідницькі. З метою визначення слушності запропонованої системи серед слухачів таких курсів проводилися анкетування. Анкета передбачала оцінювання розробленої моделі цілеспрямованого і послідовного розвитку математичних здібностей учня, передбачає I, II, III етапи діяльності учня та керівника (вчителя) від уроку до виступу на конкурсі-захисті МАН за п'ятибальною шкалою, де 5 та 4 означали схвальну оцінку, 3 – посередню, 1 та 2 – негативну. Результати аналізу відповідей на анкету (в оцінці брали участь понад 250 вчителів математики Київської області) показали, що запропонована модель та її застосування одержали високу оцінку фахівців-педагогів.

Практика впровадження в навчання запропонованої системи свідчить про те, що побудована технологія обов'язково почне працювати інтенсивніше з урахуванням рівня розумового розвитку кожного учня окремо, з тенденцією до ускладнення завдань, збільшення вимог, вдосконалення механізмів і шляхів розкриття творчих здібностей, збагачення математичної діяльності учнів.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2

1.Ефективність розвитку математичних здібностей учнів можна підвищити на основі впровадження системного та поетапного дослідницького підходу до навчання математики в МАН. Провідним у системі МАН є концептуальне положення про поступове переростання навчання в дослідницьку діяльність. Долучаючись до дослідницької роботи, учням слід рухатися своєрідними сходинками: від простого до складного, від визначення і фіксації конкретної проблеми до створення наукових робіт, від монодослідження до навчально-дослідницької та науково-дослідної діяльності.

2.Навчання математики в МАН повинно відбуватися з урахуванням особливостей дослідницької технології, зміст якої полягає в тому, щоб допомогти учневі пройти шляхом наукового пізнання, засвоїти його алгоритм. Мета такої технології – «викликати» у розумі учня той самий розумовий процес, який переживає творець і винахідник даного відкриття. На всіх етапах роботи ми повинні мати на увазі, що головний з очікуваних нами результатів – це розвиток математичних здібностей, набуття дитиною нових знань, вмінь і навичок. Це дозволить створити в учнів правильні уявлення про основні принципи побудови такої науки як математика.

3.Спеціально організований і керований процес діяльності учнів МАН та дидактичні умови щодо поглиблення змісту навчання математики та побудови дослідницького завдання для учня на основі задачі сприятливо вплинули на розвиток структурних компонентів математичних здібностей – мотиваційно-емоційного, інтелектуального, вольового. Вивчення математики на основі добору системи задач спеціальним чином дозволяє не тільки глибоко та ефективно оволодівати математичною культурою, але й основними принципами дослідницької роботи.

4.Впровадження комп'ютерних технологій у діяльності МАН дало можливість: залучити більше учнів щодо вибору теми для дослідження та роботи над нею; організувати спільну безперервну дистанційну роботу керівника з учнем – членом МАН завдяки мережі Інтернет. Тісний взаємозв'язок математики та комп'ютерних технологій має проявлятися ще і в тому, що сучасна обчислювальна техніка повинна надавати учневі – члену МАН принципово нові можливості для дослідження теоретичних проблем.

Пункти другого розділу автором висвітлено у: [166], [169 - 172].

ВИСНОВКИ

У ході проведеного дисертаційного дослідження були вирішені поставлені на початку дослідження завдання, а саме:

–проаналізовано стан дослідженості проблеми розвитку творчих здібностей особистості в психолого-педагогічній, науковій і методичній літературі, виявлено особливості математичних здібностей учнів, зокрема математичного мислення (гнучкості, здатності до постановки нових проблем, до аналізу, до передбачення, проникливості в пошуках проблем, здатності мислити нетривіально, з готовністю до сприйняття нового);

–встановлено, що, відповідно до діяльнісного підходу, кожен із компонентів математичних здібностей має здатність до розвитку завдяки організації математичної діяльності, в основі якої лежить система задач, метод навчального та наукового пізнання – математичне моделювання;

–виявлено, що найбільше труднощів у керівників виникає: при підборі тем для дослідження школярам, при розробці методики учнівських досліджень, при перевірці результатів, а поширеними недоліками в керівництві науково-дослідницькими роботами школярів є такі: теми для дослідження часто нав'язують учням, керівники розкривають учням прямий хід розв'язання поставленої проблеми, встановлюють жорсткі часові рамки при виконанні етапів дослідницького проекту;

–проаналізовано специфіку, особливості й переваги МАН як закладу нового типу за цілями та завданнями; за організаційними та виховними функціями;

–обґрунтовано доцільність створення нової форми організації – лабораторії, яка поєднує заняття основної школи з заняттями гуртка МАН та пошуково-дослідницькою діяльністю учнів, де поряд із традиційним навчанням використовуються елементи нових розвивальних технологій;

–розроблено комплекс цілеспрямованих і поетапних дій щодо формування та розвитку математичної та дослідницької культури учнів МАН, що забезпечує результативність їхньої участі в творчих конкурсах і олімпіадах;

–проаналізовано специфіку підготовки та проведення гурткових занять у МАН; виділено принципи або вимоги, за якими може здійснюватися добір задач до системи вправ на заняттях гуртка МАН з метою ефективного розвитку математичних здібностей учнів у процесі навчання;

–розглянуто застосування комп'ютерних технологій у МАН, які повинні надати учневі – члену МАН принципово нові можливості не тільки для отримання чисельних розв'язків задач, а й для дослідження теоретичних проблем;

–проведено педагогічний експеримент, у ході якого перевірено ефективність розробленої системи розвитку математичних здібностей школярів у діяльності МАН, яка ґрунтується на цілеспрямованому і поетапному використанні відповідного науково-методичного матеріалу та експериментально перевірено на практиці навчання її ефективність.

В результаті дослідження та проведення педагогічного експерименту було підтверджено висунуту на початку роботи гіпотезу про те, що ефективність розвитку математичних здібностей школяра можна підвищити на основі впровадження у навчання дослідницьких підходів з урахуванням психологічних і вікових особливостей учнів та дотриманням дидактичних вимог до навчання через спеціальним чином підібрану систему задач і завдань. Такі підходи значно підвищують ефективність засвоєння знань, сприяють диференціації навчання, надають творчого, дослідницького характеру навчальній діяльності, виховують стійкі навички планування

своєї діяльності, самостійності в роботі та відповідальності у прийнятті рішень.

Результати аналізу проведеного дослідження дають підстави зробити такі висновки.

1. Математичні здібності є багаторівневим динамічним психологічним утворенням. Структурними компонентами їх є креативна спрямованість особистості, нестандартний спосіб мислення, досить високий рівень інтелекту, мотиваційно-вольова забезпеченість математичної та дослідницької діяльності індивіда, і все це забезпечує успішність у науково-дослідницькій діяльності. Розвитку математичних здібностей школярів сприяє використання під час навчання математики у МАН дослідницьких, евристичних, проблемних методів навчання, які корисно супроводжувати комп'ютеризованою підтримкою з метою забезпечення пошукових та дослідницьких аспектів пізнавальної діяльності.

2. Практична діяльність, узагальнення та науково-методичний аналіз проблеми дозволили визначити такі дидактичні умови розвитку математичних здібностей учнів при навчанні математики в МАН:

– необхідними умовами для підвищення рівня творчості та якості учнівських досліджень можуть бути узагальнення й поглиблення навчального матеріалу з математики;

– диференційований підхід у процесі вивчення математики, а саме використання диференційованих навчально-дослідницьких завдань із різним ступенем допомоги та різної складності, що успішно сприятиме поступовому переведенню учнів з нижчого (монодослідження) на вищий рівень (власний науково-дослідницький проект) дослідницької роботи;

– для засвоєння учнями досвіду творчої діяльності в умовах особистісно-орієнтованого навчання математики необхідне системне поєднання навчального процесу школи й МАН, а також відповідне навчально-методичне забезпечення та особлива форма організації навчального процесу, що зумовлює послідовне виконання рівнів у володінні методами досліджень – репродуктивного, репродуктивно-дослідницького, дослідницького;

– методика розвитку математичних здібностей учнів – членів МАН повинна розроблятися на засадах відповідної програми та спеціально дібраної системи задач, виходячи з того, що задача в математиці є універсальним складовим елементом завдання будь-якого рівня;

– **одним зі шляхів формування та розвитку математичних здібностей учнів може бути використання в навчальному процесі МАН таких комп'ютерно-орієнтованих систем навчання, які б забезпечували активну підтримку пошуково-дослідницької діяльності учнів, створення учнями комп'ютерних моделей математичних об'єктів та проведення експериментів з ними, дослідження на основі сучасних інформаційних технологій різноманітних математичних проблем.**

3. У процесі пошуку шляхів розвитку математичних здібностей учнів, на основі вивчення психолого-педагогічної, науково-методичної літератури, а також керуючись здобутками передового педагогічного досвіду та власною багаторічною практикою роботи в рамках МАН, було встановлено, що одним із ефективних чинників формування математичних здібностей при вивченні математики в МАН є поступова реалізація дослідницького підходу від монодослідження до наукової роботи учня завдяки поетапному

перетворенню типової навчальної задачі на дослідницьку.

4. На основі розробок дидактики загальноосвітньої школи та аналізу особливостей розвитку особистості учня, його діяльності у рамках МАН було визначено й розроблено складові методики розвитку математичних здібностей, які, по-перше, розкривають логічний аспект навчання математики в рамках МАН; по-друге, передбачають навчальну діяльність як перехід від одного етапу до іншого, а саме – від слухача до кандидата, від кандидата до члена МАН; по-третє, забезпечують своєрідний підхід до математичних задач, що призводить до осмислення, співставлення, аналізу, узагальнення математичних знань та до побудови дослідницької задачі, її дослідження. Розроблена модель цілеспрямованого й послідовного розвитку математичних здібностей учня передбачає І, ІІ, ІІІ етапи діяльності учня та керівника (вчителя) від заняття гуртка до виступу на конкурсі-захисті МАН.

І етап діяльності:

– для учня – слухача МАН відповідає формуванню базових математичних компетентностей завдяки монодослідженню;

– для керівника (вчителя) відповідає складанню базової програми з математики для занять гурткової роботи в МАН, що передбачає поетапне залучення дітей до дослідницької роботи та системну підготовку їх до різних конкурсів та змагань.

ІІ етап діяльності:

– для учня передбачає опанування методів дослідження в роботі через навчально-дослідницьку технологію завдяки системі навчальних задач. На другому етапі вже відбувається залучення учнів-кандидатів до пошукової діяльності в рамках МАН;

– для керівника (вчителя) передбачає складання тем оглядового характеру, керівництво навчально-дослідницькою роботою учня – кандидата МАН.

На ІІІ етапі учень працює над певною проблемою, розв'язує творчу задачу, вчиться самостійно виходити на моделі вищого рівня у своїй дослідницькій діяльності, що поступово набуває ознак наукової. Така діяльність, як правило, закінчується підготовкою та виступом на конкурсі – захисті робіт МАН.

5. Використання в процесі навчання математики в МАН комп'ютерного супроводу сприяє створенню комфортних умов для розвитку механізмів творчої математичної діяльності учнів, для розкриття талантів і творчого потенціалу. Органічне поєднання традиційних та комп' ютерно-орієнтованих методик навчання дає значний ефект та забезпечує раціональну організацію навчальної діяльності учнів у рамках МАН.

6. Проведений науково-педагогічний експеримент підтверджує доцільність та ефективність підходів, розроблених для вирішення поставленої проблеми. На всіх етапах констатуючого, перевірочного та формувального педагогічного експерименту, зокрема експертної оцінки результатів формувального експерименту (результати участі учнів у конкурсах МАН та олімпіадах різного рівня), за допомогою методів математичної статистики доведено ефективність методики розвитку математичних здібностей учнів у навчанні математики в МАН. Отримані результати дослідження підтверджують висунуту гіпотезу.

7. Проведене дослідження не претендує на остаточне розв'язання проблеми розвитку математичних здібностей учнів МАН і разом з тим дозволяє визначити деякі напрямки проведення подальших досліджень:

– створення навчальних посібників для вчителів, на базі яких можна було б будувати процес навчання математики в рамках МАН;

– створення системного комп'ютерного забезпечення методики розвитку деяких компонентів математичних здібностей учнів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Аверин Н. А. Как научить учиться / Н. А. Аверин, Е. С. Львов. – К.: Знание, 1988. – 48 с.
2. Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики / Ж. Адамар. – М.: Сов. Радио, 1970. – 152 с.
3. Андреев В. И. Эвристическое программирование учебно-исследовательской деятельности / В. И. Андреев. – М: Высшая шк., 1981. –240 с.
4. Апатова Н. В. Информационные технологии в школьном образовании / Н. В. Апатова.– М.: Школа-Пресс, 1994. – 254 с.
5. Ашутов П. Р. Технология и современное образование / П. Р. Ашутов // Педагогика. – 1996. – № 2. – С. 51–57.
6. Александров П. С. Мир ученого / П. С. Александров // Наука и жизнь. – 1974. – № 8. – С. 2–9.
7. Алексеев В. Б. Теорема Абеля в задачах и решениях / Алексеев В. Б. – М.: МЦНМО, 2001. – 192 с.
8. Алексеев Н. Г. Критерии эффективности обучения учащихся исследовательской деятельности / Н. Г. Алексеев, А. В. Леонтович // Развитие исследовательской деятельности учащихся: Методический сборник. – М.: Народное образование, 2001. – С. 64–68.
9. Алексюк А. М. Загальні методи навчання в школі / Алексюк А. М. – К.: Радянська школа, 1981. – 206 с.
10. Алфимов В. Н. Развиваем умственные творческие способности старшеклассников / В . Н. Алфимов // Одарённый ребёнок. – 2003. – № 5. – С. 30–41.
11. Афиногенов А. М. Научно-исследовательская и проектная работа московских школьников / А. М. Афиногенов, О. П. Сахарова // Исследовательская работа школьников. – 2003. – № 1. – С. 48–51.
12. Бабанский Ю. К. Оптимизация учебно-воспитательного процесса: Метод. основы / Бабанский Ю. К. – М.: Просвещение, 1982. – 192 с.
13. Бабанский Ю. К. Оптимизация процесса обучения / Бабанский Ю. К. – М.: Педагогика, 1977. – 256 с.
14. Бабинская И. Л. Задачи математических олимпиад / Бабинская И. Л. – М.: Наука, 1975. – 112 с.
15. Балк М. Б. Математика после уроков. Пособие для учителей / М. Б. Балк, Г. Д. Балк. – М.: Просвещение, 1971. – 462 с.
16. Балл Г. А. Теория учебных задач: Психолого-педагогический аспект / Балл Г. А. – М. : Педагогика, 1990. – 184 с.
17. Баранов С. П. Сущность процесса обучения / Баранов С. П. – М.: Просвещение, 1981. – 143 с.
18. Бевз Г. П. Методика викладання математики: Навч. посібник. – 3-тє вид., перероб. і доп. – К.: Вища шк., 1989. – 367 с.
19. **Бевз В. Г. Що таке математика?/ В. Г. Бевз // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. – Донецьк : Фірма ТЕАН, 2002. – Вип. 18. – С. 3–10.**
20. Белых С. Л. Мотивация исследовательской деятельности учащихся / С. Л. Белых // Исследовательская работа школьников.–2006.– № 3. – С. 68–74.
21. Белых С. Л. Управление исследовательской активностью ученика: Методическое пособие для педагогов средних школ, гимназий, лицеев / С. Л. Белых // Исследовательская работа школьников. – М., 2007. – 56 с.

22. Белоус С. Ю. Развитие исследовательских способностей учащихся в системе «Школа – Малая Академия наук» методами физики / С. Ю. Белоус // Преподавание физики в высшей школе: Научно-методический журнал. – М., 2002. – № 23. – С. 30–37.

23. Білоус С. Ю. Засвоєння досвіду творчої діяльності в педагогічній системі «Школа – Мала академія наук» на матеріалі фізики / С. Ю. Білоус // Наукові записки. (Серія: Педагогічні науки). – Кіровоград: РВЦ КДПУ ім. В. Винниченка. – 2002. – Випуск 46. – 232 с.

24. Білоус С. Ю. Розвиток дослідницьких здібностей старшокласників у процесі діяльності Малої академії наук (на матеріалі фізики): дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Білоус С . Ю. – Запоріжжя, 2005. – 323 с.

25. Методика преподавания математики в средней школе, частная методика / [Блох А. Я ., Гусев В. А., Дорофеев Г. В. и др.]; составитель В. И. Мишин. – М.: Просвещение, 1991. – 144 с.

26. Богоявленская Д. Б. Пути к творчеству / Богоявленская Д. Б. – М.: Знание, 1981. – 96 с.

27. Богоявленская Д. Б. Психология творческих способностей / Богоявленская Д. Б. – М.: Академия, 2002. – 320 с.

28. Богоявленская Д. Б. Исследовательская деятельность как путь развития творческих способностей / Д. Б. Богоявленская // Исследовательская деятельность учащихся в современном образовательном пространстве: Сборник статей. – М.: НИИ школьных технологий, 2006. – С. 44–50.

29. Богоявленский Д. Н. Психология усвоения знаний в школе /Д. Н. Богоявленский, Н. А. Менчинская. – М.: Изд-во АН РСФСР, 1959. – 347 с.

30. **Болтянский В. Г. Информатика и преподавание математики / В. Г. Болтянский // Математика в школе. – 1989. – № 4. – С. 86–90.**

31. Бурда М. І. Принципи відбору змісту шкільної математичної освіти / М. І. Бурда // Педагогіка і психологія. – 1996. – № 1. – С. 4–9.

32. Борзенко В. И. Насильно мил не будешь. Подходы к проблеме мотивации в школе и учебно-исследовательской деятельности / В. И. Борзенко, А. С. Обухов // Развитие исследовательской деятельности учащихся: Методический сборник. – М.: Народное образование, 2001. – С. 80–87.

33. Брушлинский А. В. Психология мышления и кибернетика / Брушлинский А. В. – М.: Мысль, 1970. – 191 с.

34. Бурсиан Э. В. Задачи для компьютера: уч. пособие [для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов] / Бурсиан Э. В. – М.: Просвещение, 1991. – 256 с.

35. Васильев Н. Б. Прямые и кривые / Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер. – [3-е изд.]. – М. : МЦНМО, 2000. – 128 с.

36. Васильев Н. Б. Заочные математические олимпиады / [Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л., Раббот Ж. М., Тоом А. Л.]. – М.: Наука, 1987. – 176 с.

37. Васильев Н. Б. Сборник подготовительных задач к Всероссийской олимпиаде юных математиков / И. Б. Васильев, А.А. Егоров. – М.: Учпедгиз, 1963. – 53 с.

38. Васильев Н. Б. Избранные задачи математических олимпиад / Н. Б. Васильев, А. П. Савин. – М.: Изд-во МГУ, 1968. – 93 с.

39. Валльє О. В. Деякі підходи до методики оцінювання складності задач в курсах природничо-математичних дисциплін / Валльє О. В., Страхов В. Г., Анісімов А. Ю. // Наша школа. – 1997. – № 2. – С. 75.

40. Вейль Г. Математическое мышление / Вейль Г. – М.: Наука, 1989. – 400 с.

41. Верещагин Н. К. Начала теории множеств / Н. К. Верещагин, А. Шень. – М.: МЦНМО, 1999. – 128 с.

42. Вісник Малої академії наук України. – К., 1998. – № 1. – 70 с.

43. Вибрані матеріали турнірів юних математиків України: Навч. посібник / [укладач та загальний редактор К. В. Рабець]. – Суми: СумДПУ ім. А. С. Макаренка, 2007. – 296 с.

44. Виленкин Н. Я. Рассказы о множествах / Виленкин Н. Я. – М.: Наука, 1969. – 160 с.

45. Введение в научное исследование по педагогике / [под ред. В. И. Журавского]. – М.: Просвещение, 1988. – 239 с.

46. Вінниченко Є. Ф. Розвиток творчих здібностей старшокласників у процесі навчання інформаційних технологій розв'язання математичних задач: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Вінниченко Є. Ф. – К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2006. – 234 с.

47. Вінниченко Є. Ф. Розв'язування олімпіадних задач з математики за допомогою комп'ютера / Є. Ф. Вінниченко // Математика в школі. – 2001. – № 6 – С. 5–7.

48. Вітюк О. В. Розвиток образного мислення учнів при вивченні стереометрії з використанням комп'ютера: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Вітюк О. В. – К., 2001. – 181 с.

49. Воровщиков С. Г. Развитие учебно-познавательной компетентности старшеклассников: управленческий аспект. Монография / Воровщиков С. Г. – М.: АПК и ППРО , 2006. – 232 с.

50. Волков И. П. Учим творчеству / Волков И. П. – М.: Педагогика, 1982. – 86 с.

51. Выготский Л. С. Избранные психологические исследования: Мышление и речь. Проблемы психологического развития ребенка / Выготский Л. С. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1956. – 519 с.

52. Выготский Л. С. Собрание сочинений: в 6 т. / Выготский Л. С. – М.: Педагогика, 1982. – Т. 1. – 487 с.

53. Вешенский В. А. Сборник задач Киевских математических олимпиад / В. А. Вышенский, Н. В. Карташов, В. И. Михайловский, М. И. Ядренко. – К.: Вища школа, 1984. – 240с.

54. Гальперин Г. А. Московские математические олимпиады: Книга для учащихся / [Г. А . Гальперин, А. К. Толпыго]; под редакцией А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 1986. – 303 с.

55. Гальперин Г. А. Математические бильярды / Г. А. Гальперин, А. Н. Земляков. – М.: Наука, 1990. – 288 с.

56. Гальперин П. Я. Психология мышления и учение о поэтапном формировании умственных действий / П. Я. Гальперин // Исследование мышления в советской психологии. – М.: Наука, 1966. – С. 236–277.

57. Гальперин П. Я. Развитие исследований по формированию умственных действий / П. Я. Гальперин // Психологическая наука в СССР, т. 1. – М., 1959. – С. 441–469.

58. Гальперин П. Я. Формирование перецептивных образов и действий / П. Я. Гальперин , Г. И. Лернер, Л. В. Шибаева // Психологические исследования. – М., 1976. – Вып. 6. – С. 56–62 .

59. Гарднер М. От мозаик Пенроуза к надёжным шифрам / Гарднер М. – М.: Мир, 1993. – 416 с.

60. Генкин С. А. Ленинградские математические кружки / Генкин С. А., Фомин Д. В., Итенберг И. В.: Киров: Аса, 1994. – 272 с.

61. Гингулис Е. Ж.. Развитие математических способностей / Е. Ж. Гингулис // Математика в школе. – 1990. – № 1. – С. 14–17.

62. Гільбух Ю. З. Розумово обдарована дитина. Психологія, діагностика, педагогіка / Гільбух Ю. – К.: Вид-во АПН, 1993. – 75 с.

63. Гнеденко Б. В. Развитие мышления и речи при изучении математики // Математика в школе. – 1991. – № 4. – С. 3-9.

64. Гнеденко Б. В. Математика и математическое образование в современном мире / Гнеденко Б. В. – М.: Просвещение, 1985. – 192 с.

65. Голобородько В. В. Програма організації науково-дослідницької діяльності учнів / В. В. Голобородько, В. М. Гнєдашев. // Наукова робота учнів: – Х.: Видав. група «Основа», 2005. – 208 с.

66. Головань М. С. Розвиток пізнавальної активності учнів у процесі навчання алгебри і початків аналізу на основі НІТ: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Головань М. С. – К., 1997. – 177 с.

67. Гончаров С. М. Науково-методичне забезпечення кредитно-модульної системи організації навчального процесу / Гончаров С. М. // Монографія. – Рівне: НУВГП, 2005. – 266 с.

68. Горошко Ю. В. Вплив нової інформаційної технології на практичну значимість результатів навчання математики в старших класах середньої школи: дис. … канд. пед. наук: 13 .00.02 / Горошко Ю. В. – К.: КДПУ ім. М. П. Драгоманова, 1993. – 103 с.

69. **Горошко Ю. В. Використання комп'ютерних програм для створення динамічних моделей при вивченні математики / Ю. В. Горошко, Є. Ф. Вінниченко // Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. (Серія № 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць). – К., 2006. – № 4(11). – С. 56–62.**

70. **Гороховатский Ю. А. Новые информационные технологии как способ включения учащихся в учебно-исследовательскую деятельность / Ю. А. Гороховатский // Применение новых информационно-коммуникационных технологий в преподавании. – СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2001.– С. 52–72.**

71. **Грабарь М.И., Краснянская К.А. Применение математической статистики в педагогических исследованиях: Непараметрические методики / М.И.Грабарь, К.А.Краснянская – НИИ СиМО АПН СССР. – М.: Педагогика, 1977. – 136 с.**

72. Давыдов В. В. Теория развивающего обучения / Давыдов В. В. – М.: Интор, 1996. – 544 с.

73. Давиденко А. А. Експериментальні дослідження в секції фізики Малої академії наук України / А. А. Давиденко // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету. – Чернігів: ЧДПУ, 2000. – № 3. – С. 210–213. (Серія: педагогічні науки: Збірник).

74. Давиденко А. А. Винахідницькі задачі як засіб розвитку творчих здібностей учнів / А . А. Давиденко // Фізика та астрономія в школі. – 1998. – № 2. – С. 35–39.

75. Давиденко А. А. Науково-дослідницька діяльність учнів – членів Малої академії наук України: Посібник для вчителів та учнів / Давиденко А. А. – Чернігів, РВВ ЧОІППО, 2001. – 38 с.

76. Данильцев Г. Л. Что нравится и что не нравится экспертам при оценке учебно-исследовательских работ учащихся / Г. Л. Данильцев // Развитие исследовательской деятельности учащихся: Методический сборник. – М.: Народное образование, 2001. – С. 127–134.

77. Державна національна програма «Освіта» («Україна XXI століття»), Заходи щодо реалізації Державної національної програми «Освіта» («Україна XXI століття»): Затв. Постановою Кабінету Міністрів України від 03.11.93. № 896 // Освіта. – К., 1993. – № 44–46.

78. Державний стандарт базової і повної середньої освіти // Математика в школі. – 2004. – № 2. – С. 3–7.

79. Дидактика современной школы: Пособие для учителей / НИИ педагогики УССР; Под ред. В. А. Онищука. – К.: Рад. шк., 1987. – 350 с.

80. Дидык Г. В. Содержание и формы углубленного изучения математики в старших классах: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / НИИ Педагогики УССР. – К., 1989. – 175 с.

81. Дорофеев Г. В. Непрерывный курс математики в школе и проблемы преемственности / Г. В. Дорофеев // Математика в школе. – 1998. – № 5. – С. 10–27.

82. Дорофеев Г. В. Дифференциация в обучении математике / Г. В. Дорофеев, Л. В. Кузнецова, С. Б. Суворова, В. В. Фирсов // Математика в школе. – 1990. – № 4. – С. 15–21.

83. **Дубровина И. В. Особенности обучения и психического развития школьников 13–17 лет / Дубровина И. В. – М.: Педагогика, 1988. – 192 с.**

84. **Епишева О. Б. Учить школьника учиться математике. Формирование приемов учебной деятельности: Книга для учителей / О. Б. Епишева, В. И. Крупич. – М.: Педагогика, 1990. – 128 с.**

85. **Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках математики: Посібник для вчителів / Жалдак М. І. – К.: Техніка, 1997. – 304 с.**

86. **Жалдак М. І. Математика з комп'ютером: Посібник для вчителів / Жалдак М. І., Горошко Ю. В., Вінниченко Є. Ф. – К.: РННЦ «ДІНІТ», 2004. – 255 с.**

87. **Жалдак М. І. Педагогічний програмний засіб GRAN1: методичні рекомендації / М. І. Жалдак, А. В. Пеньков. – К.: КДПІ, 1991. – 48 с.**

88. **Жумаев Э. Э. Развитие творческого мышления учащихся в процессе решения геометрических задач: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Жумаев Э. Э . – К., 1997. – 163 с.**

89. Закон України «Про освіту» // Освіта. – Закон від 23.05.1991. – № 1060-XII, із змінами від 11 червня 2008.

90. Занков Л. В. Обучение и развитие / Занков Л. В. – М.: Педагогика, 1975. – 440 с.

91. Збірник задач республіканських математичних олімпіад / [за редакцією В. І. Михайловського]. – К. : Вища шк., 1979. – 263 с.

92. Зимняя И. А. Педагогическая психология: Учебник для вузов. [Изд. второе, доп., испр. и перераб.] / Зимняя И. А. – М.: Логос, 2004. – 384 с.

93. Ігнатенко М. Я. Методологічні та методичні основи активної навчально-пізнавальної діяльності учнів старших класів при вивченні математики: дис. … д-ра пед. наук 13.00.02 / Ігнатенко М. Я. – К., 1997. – 412 с.

94. Ігнатенко М. Я. Реалізація прикладного спрямування шкільного курсу математики як засіб активного навчального пізнання учнів / М. Я. Ігнатенко, Н. О. Соколенко. – К.: ВМН, 1997 . – 84 с.

95. **Ігнатенко М. Я. НІТН математики і активізація навчально-пізнавальної діяльності учнів / М. Я. Ігнатенко, А. В. Пеньков, Ю. В. Горошко, Є. Ф. Вінниченко // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць. – К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова. – 2002. – Вип. 5. – С. 11–20.**

96. **Ильин Е. П. Сущность и структура мотива / Е. П. Ильин // Психологический журнал. – 1995. – № 2. – С. 15–22.**

97. **Ільченко В. Р. Інтеграція змісту освіти / В. Р. Ільченко // Рідна школа – 1993. – №7. – С. 49–50.**

98. **Кабанова-Меллер Е. Н. Учебная деятельность и развивающее обучение / Кабанова-Меллер Е. Н. – М.: Знание, 1981. – 91 с. – ил.**

99. Кабанова-Меллер Е. Н. Формирование приемов умственной деятельности и умственное развитие учащихся / Кабанова-Меллер Е. Н. – М.: Просвещение, 1968. – 288 с.

100. Канель-Белов А. Я. Как решают нестандартные задачи / А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи; под редакцией В. О. Бугаенко. – М.: МЦНМО, 2001. – 96 с.

101. Капица П.Л. Эксперимент. Теория. Практика / П.Л. Капица. – М.: Наука, 1987. – 99 с.

102. Клименюк А. В. Методология и методика педагогического исследования. Постановка цели и задач исследования / А. В. Клименюк, А. А. Калита, Э. П. Бережная. – К., 1988. – 100 с.

103. Клименко В. В. Как воспитать вундеркинда / Клименко В. В. – СПб.: Кристалл, 1996. – 464 с.

104. Коксетер С. М. Новые встречи с геометрией / С. М. Коксетер, С. Л. Грейтцер. – М.: Наука, 1978. – 224 с.

105. Колінець Г. Г. Психологічні передумови формування математичних дослідницьких здібностей старшокласників / Колінець Г. Г. – К.: Інститут психології ім. Г. С. Костюка АПН України, 1999. – 172 с.

106. Колмогоров А. Н. Математика – наука и профессия. – М.: Наука, 1988. – 288 с.

107. Колягин Ю. М. Задачи в обучении математике: в 2 ч. Математические задачи как средство обучения и развития / Колягин Ю. М. – М.: Просвещение, 1977. – Ч. 1 – 107 с. – Ч. 2 – 143 с.

108. Коменский Я. А. Избранные педагогические сочинения. Великая дидактика / Коменский Я. А. – М., 1939. – 136 с.

109. Концепція загальної середньої освіти (12-річна школа) // Інформаційний збірник Міністерства освіти і науки України. – 2002. – № 2.

110. Концепція загальної середньої освіти як базової в єдиній системі неперервної освіти. – К.: МО України, 1992. – 177 с.

111. Концепція профільного навчання в старшій школі // Інформаційний збірник Міністерства освіти і науки України. – 2003. – № 24. – С. 3–15.

112. Костюк В. М. Методологія наукового дослідження / Костюк В. М. – К.: Вища школа, 1978. – 179 с.

113. Костюк Г. С. Здібності та їх розвиток у дітей / Костюк Г. С. – К.: Знання, 1963. – 80 с.

114. Костюк Г. С. Навчально-виховний процес і психічний розвиток особистості / Костюк Г. С. – К.: Радянська школа, 1989. – 118 с.

115. Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников / Крутецкий В. А. – М.: Просвещение, 1968. – 481 с.

116. Крутецкий В. А. Психология обучения и воспитания школьников: Книга для учителей и классных руководителей / Крутецкий В. А. – М.: Просвещение, 1976. – 303 с.

117. Кудрявцев Л. Д. Современная математика и ее преподавание / Кудрявцев Л. Д. – М.: Наука, 1980. – 144 с.

118. Кузнецов И. Н. Научные работы: методика подготовки и оформления / Кузнецов И. Н. – Минск: Амалфея, 2000. – 544 с.

119. Курант Р. Что такое математика? / Р. Курант, Г. Роббинс – [3-е изд.] – М. : МЦНМО, 2001. – 586 с.

120. Кушнир И. А. Воспитание творческой активности учащихся на уроках повторения геометрии / И. А. Кушнир // Математика в школе. – 1991. – № 1. – С. 12–16.

121. Лейтес Н. С. Способности и одаренность в детские годы / Лейтес Н. С. – М.: Знание, 1984. – 70 с.

122. Лейфура В. М. Математичні олімпіади школярів України 1991–2000 рр. / В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, В. А. Ясінський. – К.: Техніка, 2003. – 542 с.

123. Лейфура В. М. Математичні задачі евристичного характеру / Лейфура В. М. – К.: Вища шк., 1992. – 91 с.

124. Левитес Д. Г. Практика обучения: современные образовательные технологии / Левитас Д. Г. – М.: Воронеж, 1998. – 337 с.

125. Левченко Л. С. Творча самореалізація старшокласників у науково-дослідницькій діяльності: автореферат дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Левченко Л. С. – К. : 1999. – 16 с.

126. Левчук С. Психологічна підготовка учнів – членів МАН до конкурсу-захисту наукових робіт / С. Левчук, І. Хронюк // Обдарована дитина. – 2007. – № 3. – С. 24–32.

127. Леонтович А. В. Исследовательская деятельность учащихся. Сборник статей / А. В. Леонтович // Библиотека журнала «Исследовательская работа школьников»; серия «Сборники и монографии». – М., 2006. – 114 с.

128. Леонтович А. В. Модель научной школы и практика организации исследовательской деятельности учащихся / А. В. Леонтович // Развитие исследовательской деятельности учащихся: Методический сборник. – М.: Народное образование, 2001. – С. 38–48.

129. Леонтович А. В. О направленности дополнительного образования / А. В. Леонтович // Внешкольник. – 2007. – № 2. – С. 45–47.

130. Леонтович А. В. Об основных понятиях концепции развития исследовательской и проектной деятельности учащихся / А. В. Леонтович // Исследовательская работа школьников. – 2003. – № 4. – С. 12–17.

131. Леонтович А. В. Моделирование исследовательской деятельности учащихся: практические аспекты / А. В. Леонтович // Школьные технологии. – 2006. – № 6. – С. 89–98.

132. Леонтьев А. Н. Проблемы развития психики / Леонтьев А. Н. – [2-е изд., доп.]. – М.: Мысль. – 1965. – 572 с.

133. Леонтьев А. Н. Лекции по общей психологии / Леонтьев А. Н. – М.: Смысл, 1999. – 560 с.

134. Леонтьев А. Н. Психологические вопросы сознательного учения / А. Н. Леонтьев // Известия АПН РСФСР. – 1947. – Вып. 7. – С. 3–18.

135. Лернер И. Я. Современная дидактика: теория – практика / Лернер И. Я. – М., 1994. – 283 с.

136. Лернер И. Я. Проблемное обучение / Лернер И. Я. – М.: Знание, 1974. – 64 с.

137. Ломакина А. Н. Найди свою звезду: Рассказ о Крымской Малой академии наук «Искатель» / Ломакина А. Н. – К.: Молодь, 1982. – 200 с.

138. Лук А. Н. Мышление и творчество / Лук А. Н. – М.: Политиздат, 1976. – 144 с.

139. Лурия А. Р. Лекции по общей психологии / Лурия А. Р. – СПб.: Питер, 2004. – 320 с.

140. МАН: підготовка науково-дослідницьких проектів: методичний матеріал / [упоряд. М. Голубченко]. – К.: Ред. загальнопед. газет, 2005. – 128 с.

141. Матюшкин А. М. Проблемные ситуации в мышлении и обучении / Матюшкин А. М. – М.: Педагогика, 1972. – 208 с.

142. Махмутов М. И. Организация проблемного обучения в школе / Махмутов М. И. – М.: Просвещение, 1977. – 239 с.

143. Международные математические олимпиады / [сост. А. А. Фомин, Г. М. Кузнецова]. – М.: Дрофа, 1998. – 160 с.

144. Менчинская Н. А. Проблемы учения и умственного развития школьника: Избранные психологические труды / Менчинская Н. А. – М. : Педагогика, 1989. – 219 с.

145. Мемельський Н. В. Пути совершенствования обучения математике: Проблемы современной методики математики / Метельський Н. В. – М.: Университетское, 1989. – 160 с.

146. Методика исследовательской деятельности учащихся в области естественных наук / [ред.-сост. А. С. Обухов] // журнал «Исследовательская работа школьников». – М.: МИОО, 2006. – 128 с.

147. Методы педагогических исследований / [под ред. А. И. Пискунова, Г. В. Воробьева]. – М., 1979. – 265 с.

148. Михалін Г. О. Професійна підготовка вчителя математики у процесі навчання математичного аналізу / Михалін Г. О. – К.: РННЦ «ДІНІТ», 2003. – 320 с .

149. Михалін Г. О. Використання комп'ютера при формуванні основних понять стохастики в середній школі / Г. О. Михалін, О. В. Слука // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Збірник наукових праць. – К.: Комп'ютер в школі та сім'ї. – 2000. – Вип. 2. – С. 312–315.

150. Моляко В. А. Психология решения школьниками творческих задач / Моляко В. А. – К.: Радянська школа, 1983. – 96 с.

151. Монахов В. М. Перспективы разработки и внедрения новых информационных технологий обучения на уроках математики / В. М. Монахов // Математика в школе. – 1991. – № 3. – С. 58–62.

152. Національна доктрина розвитку освіти України у XXI столітті // Освіта. – 2001. – № 60–62. – 24–31 жовтня.

153. Неуймин Я. Г. Модели в науке и технике. История, теория, практика / Неуймин Я. Г. – Л.: Наука, 1984. – 189 с.

154. Нікітін Б. П. Ми та наші діти / Б. П. Нікітін, Л. Б. Нікітіна. Пер. А. М. Лук'янець. – К.: Молодь, 1989. – 240 с.

155. Нікітіна І. П. Науково-дослідницька діяльність учнів. 5–11 класи: методичні матеріали / І. П. Нікітіна, Ю. О. Нікітін, В. В. Шліхова, О. Л. Кожем'яка. – Х.: Видав. група «Основа», 2006. – 144 с.

156. Одарённые дети: Пер. с англ. / Под ред. Г. В. Бурменской и В. М. Слуцкого. – М.: Прогресс, 1991. – 376 с.

157. Організація та проведення Всеукраїнських учнівських олімпіад і турнірів: Методичні рекомендації / Б. Г. Кремінський. – К., 2001. – 68 с.

158. Осинская В.Н. Формирование умственной культуры учащихся в процессе обучения математике. Книга для учителя / В.Н. Осинская – К.: Радянська школа, 1989. – 192 с.

159. Обухов А. С. Исследовательская деятельность как возможный путь вхождения подростка в пространство культуры / А. С. Обухов // Школьные технологии. – 2001. – № 5. – С. 26–35.

160. Обухов А. С. Исследовательская позиция и исследовательская деятельность: что и как развивать? / А. С. Обухов // Исследовательская работа школьников. – 2003. – № 4. – С. 18–24.

161. Оконь В. Введение в общую дидактику: Пер. с польск. Л. Г. Кашкуревича, Н. Г. Горина. – М.: Высш. шк., 1990. – 382 с.

162. Олійник Т. О. Навчально-дослідницька діяльність на основі НІТН як засіб формування математичних уявлень учнів (на прикладі курсу «Алгебра і початки аналізу»): автореф. дис. … канд. пед. наук 13.00.02/ Олійник Т. О. – К., 1992. – 24 с.

163. Паламарчук В. Ф. Як виростити інтелектуала: Посібник для вчителів. / Паламарчук В. Ф. – Тернопіль: Богдан, 2000. – 152 с.

164. Пеньков А. В. Использование новой информационной технологии при преподавании математики в старших классах средней школы: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Пеньков А. В. – К.: КДПУ ім. М. П. Драгоманова, 1992. – 172 с.

165. Первун О. Є. Пошуково-дослідницькі задачі як засіб розвитку математичних здібностей учнів класів з поглибленим вивченням математики: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Первун О. Є. – К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2009. – 224 с.

166. Пихтар М. П. Методика роботи та система задач з теми «Функціональні рівняння» / М. П. Пихтар // Математика в школі. – 2008. – № 7–8. – С. 48–56.

167. Пихтар М. П. Лабораторія як нова форма організації навчально-дослідницької роботи з математики у діяльності Малої академії наук / М. П. Пихтар // Дидактика математики: проблеми і дослідження: міжнародний збірник наукових робіт. – Донецьк : Вид-во ДонНУ, 2007. – Вип. 28. – С. 212–217.

168. Пихтар М. П. Формування навчально-пізнавальної та пошуково-дослідницької діяльності учнів – членів Малої академії наук / М. П. Пихтар // Тези Міжнародної науково-практичної конференції «Математична освіта в Україні: минуле, сьогодення, майбутнє». – К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2007. – С. 24–25.

169. Пихтар М. П. Поетапні дії з формування математичної та дослідницької школярів у рамках Малої академії наук / М. П. Пихтар // Математика в школі. – 2009. – № 9. – С. 30–33.

170. Пихтар М. П. Застосування комп’ютерних технологій у діяльності Малої академії наук / М. П. Пихтар // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету імені Т.Г.Шевченка. Випуск 60. Серія: педагогічні науки: Збірник. –

Чернігів: ЧДПУ, 2009. – № 60. – С. 109–114.
171. Пихтар М. П. Розвиток математичних та дослідницьких здібностей учнів у рамках Малої академії наук / М. П. Пихтар // Математика в школі. – 2009. – № 10. – С. 24–28.
172. Пихтар М. П. Деякі прийоми побудови проблемних задач для учнів – членів Малої академії наук / М. П. Пихтар // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Фізика і математика у вищій і середній школі: Зб. Наукових праць – К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2010. – № 6. – С. 108–115.
173. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения / Пойа Д.: [пер. с англ.]. – [2-е изд., испр.]. – М.: Наука, 1975. – 463 с.
174. Пойа Д. Математическое открытие / Пойа Д.: [пер. с англ.]. – М.: Наука, 1976. – 448 с.
175. Пономарев Я. А. Психология творческого мышления / Пономарев Я. А. – М.: Изд. АПН РСФСР, 1960.
176. Постников А. Г. Культура занятий математикой / Постников А. Г. – М.: Знание, 1975. – 38 с.
177. Платонов К. К. Структура и развитие личности / Платонов К. К.; Отв. ред. А. Д. Глоточкин: АН СССР. Институт психологии. – М.: Наука, 1986. – 254 с.
178. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии / Прасолов В. В. – [4-е изд., дополн.]. – М.: МЦНМО, 2000. – 584 с.
179. Прасолов В. В. Рассказы о числах, многочленах и фигурах / Прасолов В. В. – М.: ФАЗИС, 1997. – 104 с.
180. Працьовитий М. В. Через МАН у велику науку / М. В. Працьовитий, В. О. Швець // Математика. – 1999. – № 39(51). – С. 1.
181. Працьовитий М. В. Мала академія діє / М. В. Працьовитий, В. О. Швець // Математика. – 1999. – № 17(29). – С. 1–2.
182. Працьовитий М. В. Контрольна робота з математики як складова конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів – членів Малої академії наук України / М. В. Працьовитий, В. О. Швець // У світі математики. Том 7. – 2001. – Вип. 3. – С. 60–73.
183. Преемственность в обучении математике: сборник статей / [сост. А. М. Пышкало]. – М.: Просвещение, 1978. – 239 с.
184. Програма GRAN1 для вивчення математики в школі і вузі / [укладачі: М. І. Жалдак, Ю. В. Горошко]. – К.: КДПУ, 1992. – 49 с.
185. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5–11 класи. Затверджено Міністерством освіти і науки України (Лист МОН України № 1/11-3580 від 22.08.2001 р.).
186. Програма для класів з поглибленим вивченням математики; 8–11 класи / [укл. М. Бурда, М. Жалдак, Т. Колесник та ін.]. // Математика, 2001, № 37(145). – 48 с.
187. Психология мышления / [под ред. А. М. Матюшкина]. – М.: Прогресс, 1965. – 532 с.
188. Пуанкаре А. Математическое творчество / Пуанкаре А. – М.: Сов. Радио, 1970. – 398 с.
189. Пуанкаре А. Наука и метод / Пуанкаре А. – СПб., 1910.

190. Радемахер Г. Числа и фигуры / Г. Радемахер, О. Теплиц. – М.: Физматгиз , 1962. – 264 с.

191. Раков С. А. Формування математичних компетентностей учителя математики на основі дослідницького підходу в навчанні з використанням інформаційних технологій: автореф. дис. … д-ра пед. наук: 13.00.02 / Раков С. А. – Х.: ХНПУ, 2005. – 44 с.

192. Раков С. А. Использование пакета Derive в курсе математики: Учебное пособие. / Раков С. А., Олейник Т. А., Скляр Е. В. – Х.: РЦНИТ, 1996. – 160 с.

193. Раков С. А. Формування математичних компетентностей випускника школи як місія математичної освіти / С. А. Раков // Математика в школі.–2005.– № 5. – С. 2–7.

194. Рамський Ю. С. Принципи формування учбових задач для навчальних програм / Ю. С. Рамський, Н. О. Клочко // Використання новітньої інформаційної технології у навчальному процесі: зб. наук. праць / [редкол.: М. І. Шкіль та ін.]. – К.: РНМК, 1990. – С. 28–37.

195. Рогановский Н. М. Методика преподавания математики в средней школе: Учеб. пособие для пед. ин-тов / Рогановский Н. М. – Минск: Вышэйш. шк ., 1990. – 266 с.

196. Рубанов И. Лекции по олимпиадным задачам / И. Рубанов // Газета Математика, приложение 1 сентября. – 2001. – № 1, 2, 3.

197. Рубинштейн С. Л. Основы общей психологии: В 2 т. / АПН СССР. – М.: Педагогика, 1989. – (тр. д. чл. и чл.-кор. АПН СССР) Т. 1., 1989. – 485 с.

198. Рубинштейн С. Л. Бытие и сознание. Человек и мир / Рубинштейн С. Л. – СПб.: Питер, 2003. – 512 с.

199. Рубинштейн С. Л. О мышлении и путях его исследования / Рубинштейн С. Л. – М.: АН СССР, 1958. – 148 с.

200. Самовол П. І. Методична система роботи із здібними учнями та обдарованими з математики учнями у середній школі: дис. … канд. пед. наук 13. 00.02 / Самовол П. І. – К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 1995. – 221 с.

201. Санина С. П. Компьютерное моделирование в исследовательской деятельности учащихся / С. П. Санина // Педагогические технологии. – 2005. – № 4. – С. 36–45 .

202. Селье Г. От мечты к открытию / Селье Г. – М.: Прогресс, 1987. – 366 с.

203. Скаткин М. Н. О методах обучения / М. Н. Скаткин, И. Я. Лернер // Советская педагогика. – 1965. – № 3. С. 21–26.

204. Скаткин М. Н. Совершенствование процесса обучения / Скаткин М. Н. – М.: Педагогика, 1971. – 208 с.

205. Скафа Е. И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология. Монография / Скафа Е. И. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2004.– 439 с.

206. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: [підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів] / Слєпкань З. І. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.

207. Слєпкань З. І. Психолого-педагогічні основи розвивального навчання математики / Слєпкань З. І.–Тернопіль: Підручники і посібники, 2006.–240 с.

208. Слєпкань З. І. Формування творчої особистості учня в процесі навчання математики / З. І. Слєпкань // Математика в школі. – 2003. – № 1. – С. 6–9; № 3.

– С. 7–13.

209. Соколенко Л. О. Методика реалізації прикладної спрямованості шкільної алгебри і початків аналізу: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Соколенко Л. О. – К.: УДП Університет ім. М. П. Драгоманова, 1997. – 245 с.

210. Смалько О. А. Розвиток творчого мислення старшокласників на уроках математики з використанням інформаційних технологій навчання: дис. … к-та пед. наук: 13.00.02 / Смалько О. А. – К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова. – 2003. – 252 с.

211. Смаллиан Р. М. Как же называется эта книга? «Принцесса или тигр?» / Смаллиан Р. М. – М.: Мир, 1985. Смаллиан Р. М. Как же называется эта книга? / Пер. с англ. ... Смаллиан Р. М. Принцесса или тигр? / [Пер. с англ. И. Е. Зино]. – М.: Мир, 1985. – 221 с.

212. Столяр А. А. Педагогика математики / Столяр А. А. – Мн: Выш. шк., 1986. – 414 с.

213. Степанов В. Д. Активизация внеурочной работы по математике в средней школе / Степанов В. Д. – М.: Просвещение, 1991. – 80 с.

214. Страчар Е. Система і методи керівництва навчальним процесом / Страчар Е. [пер. зі словацької]. – К.: Рад. школа, 1982. – 295 с.

215. Сущенко Т. І. Позашкільна педагогіка: Навчальний посібник / Сущенко Т. І. – К.: ІСДО, 1996. – 144 с.

216. Талызина Н. Ф. Управление процессом усвоения знаний (психологические основы)/ Талызина Н. Ф. – М.: Изд-во Моск. ун-та. 1984.–345 с.

217. Теплицький І. О. Розвиток творчих здібностей школярів засобами комп’ютерного моделювання: автореф. дис. … канд. пед. наук 13.00.02 / Теплицький І. О. – К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2001. – 20 с.

218. Теплов Б. М. Избранные труды: в 2 т. / Теплов Б. М. – М.: Педагогика, 1985. – 328 с.

219. Уфнаровский В. А. Математический аквариум. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». – Ижевск, 2000. – 216 с.

220. Український математичний журнал «У світі математики». Київ:«ТВіМС» – Т. 7. – Вип. 1, 2001. – С. 12; – Т. 1. – Вип. 2, 1995. – С. 43; – Т. 7. – Вип. 4, 2001. – С. 25–26; – Т. 1. – Вип. 1, 1995. – С. 61; – Т. 4. – Вип. 1, 1998. – С. 11–14.

221. Федорова В. Н. Межпредметные связи естественно-математических дисциплин / Федорова В. Н. – М.: Просвещение, 1980. – 205 с.

222. Федоровская Е. О. Мотивы и ценностные ориентации подростков, увлеченных исследовательской деятельностью / Федоровская Е. О. // Дополнительное образование. – 2005. – № 9. – С. 49–53 .

223. Фройденталь Г. Математика как педагогическая задача: в 2 ч. / Фройденталь Г.; [пер. с нем.]. – М.: Просвещение, 1982–1983. – Ч. 1. – 208 с.; Ч. 2. – 204 с.

224. Фридман Л. М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе / Фридман Л. М. – М.: Педагогика, 1983. – 160 с.

225. Харитонов Н. П. Принципы и формы представления ученических исследовательских работ / Харитонов Н. П. // Исследовательская деятельность учащихся в современном образовательном пространстве: Сборник статей; [под общ. ред. А. С. Обухова]. – М.: НИИ школьных технологий, 2006. – С. 280–283.

226. Хинчин А. Я. Педагогические статьи / Хинчин А. Я. – М.: АПН РСФСР, 1963. – 204 с.

227. Хмара Т. Створюємо особистісно орієнтовану систему навчання математики / Хмара Т. // Математика в школі. – 2001. – № 5. – С. 4.

228. Хрестоматия по общей психологии. Психология мышления / [под ред. Ю . Б. Гиппенрейтера, В. В. Петухова]. – М., 1981. – 400 с.

229. Хуторской А. В. Современная дидактика: Учебник для вузов / Хуторской А. В. – СПб.: Питер, 2001. – 544 с.

230. Чашечникова О. С. Розвиток математичних здібностей учнів в основній школі: дис. … к-та пед. наук 13.00.02 / Чашечникова О. С. – К.: Інститут педагогіки АПН України, 1997. – 208 с.

231. Шавалева В. И. Преемственность в построении методических систем обучения математике в школе и педагогическом вузе: дис. ... канд. пед. наук: 13. 00.02 / Шавалева В. И. – К.: АПН Украины, Институт педагогики 1997. – 180 с.

232. Шапиро И. М. Использование задач с практическим содержанием в преподавании математики. Книга для учителя / Шапиро И. М. – М.: Просвещение , 1986. – 96 с.

233. Шейко В. М. Організація та методика науково-дослідницької діяльності: підручник для ВНЗ / Шейко В. М. – К.: Знання, 2006. – 307 с.

234. Швець В. О. Формування і розвиток математичних здібностей учнів 5-6 класів під час навчання математики / В. О. Швець // Математика в школі. – 2010. – № 5. – С. 19–23.

235. Эльконин Д. Б. Избранные психологические труды / Эльконин Д. Б.; [под ред. В. В. Давыдова]. – АПН СССР. – М.: Педагогика, 1989. – 554 с.

236. Эрдниев П. М. Укрупнение дидактических единиц в обучении математике / П. М. Эрдниев, Б. П. Эрдниев. – М.: Просвещение, 1986. – 255 с.

237. Юркевич В. С. Исследовательская работа школьников: противоречия, ограничения, перспективы / В. С. Юркевич // Исследовательская деятельность учащихся в современном образовательном пространстве: Сборник статей; [под общей редакцией к-та психолог. наук А. С. Обухова]. – М.: НИИ школьных технологий, 2006. – С. 78–80.

238. Яглом И. М. Выпуклые фигуры / И. М. Яглом, В. Г. Болтянский. – М.: ГИТТЛ, 1951. – 344 с.

239. Якиманская И. С. Развивающее обучение / Якиманская И. С. – М.: Педагогика, 1979. – 144 с.

240. Якир М. С. Что же такое красивая задача? (Урок-диспут) / М. С. Якир // Математика в школе. – 1989. – № 6. – С. 41–46.

241. Anne Price. Creative Maths Activities for Able Students: Ideas for Working with Children Aged 11 to 14. Publisher: Sage Publications Ltd; 1 edition, 2006 – 128p.

242. Gwen Goodhew. Meeting the Needs of Gifted and Talented Students. Publisher: Network Continuum Education, 2009 – 160p.

243. James R. Delisle, Barbara A. Lewis. “The Survival Guide for Teachers of Gifted Kids: How to Plan, Manage, and Evaluate Programs for Gifted Youth K-12” Publisher: Free Spirit Publishing, 2003.

244. Feldhusen, J. F. (1994). Learning and cognition in talented youth. In J. VanTassel-Baska (Ed.), *Comprehensive curriculum for gifted learners* (2nd ed., pp. 17–28). Boston: Allyn & Bacon.

245. Kolitch, E. R., & Brody, L. E. (1992). Mathematics acceleration of highly talented students: An evaluation. *Gifted Child Quarterly, 36,* pp 78–86.

246. Malaty J. Eastern and Western mathematical education: unity, diversity, and problems. – International Jornal of mathematical Edcation in Science and Technology. – 1998, vol. 29, No.3, pp 421 – 436.

247. Mills, C. J., Ablard, K. E., & Lynch, S. J. (1992). Academically talented students' preparation for advanced-level coursework after individually-paced precalculus class. *Journal for the Education of the Gifted, 16*, pp 2–17.

248. Susan Assouline, Ann Lupkowski-Shoplik. Developing Math Talent: A Guide for Educating Gifted And Advanced Learners in Math [Paperback]. Publisher: Prufrock Press, 2005 – 387p.

249. VanTassel-Baska, J., & Brown, E. F. (2005). An analysis of gifted education curriculum models. In F. A. Karnes & S. M. Bean (Eds.), *Methods and materials for teaching the gifted* (2nd ed., pp. 75–106). Waco, TX: Prufrock Press.

250. Wallach M.A. Test tell us little about talent // Am Scie. 64. P 57 – 63.

ДОДАТКИ

Додаток А.

МЕТОДИКА ВИЗНАЧЕННЯ ЗАГАЛЬНИХ ТВОРЧИХ ЗДІБНОСТЕЙ ШКОЛЯРІВ

Інструкція: «Уважно прочитайте наведені нижче пункти анкети та напроти кожного з них поставте слово «так», якщо твердження співпадає з вашою думкою про себе, або «ні», якщо не співпадає».

№		Твердження	так, ні
1		Як правило, я легко пристосовуюсь до людей, умов, ідей	
2		Мені подобається розв'язувати типові, стандартні задачі	
3		Мені здається, я з більшим бажанням створював би або конструював нове, ніж вдосконалював, покращував старе	
4		Зазвичай я корисливий, коли маю справу з колективом	
5		У більшості випадків я дію самостійно, без допомоги і підказок друзів та старших	
6		Ніколи не намагався змінювати відношення між собою й товаришами	
7		Нерідко я утримувався від висування ідей, пропозицій, хоча й мав їх	
8		Мені часто вдається знайти нестандартні, оригінальні розв'язки задач	
9		Мені подобається, коли відбувається швидка зміна різних видів діяльності	
10		Для мене є характерним прагнення реалізовувати одночасно декілька ідей, вирішувати декілька проблем	
11		Нерідко я один вступаю до дискусії з ровесниками, старшими	
12		Як правило, я легко погоджуюсь і підкоряюсь колективній думці	
13		У мене часто виникають оригінальні ідеї.	
14		Мені подобається виконувати завдання за розробленим планом	
15		Я завжди з задоволенням розповсюджую, пропагую нові ідеї.	
16		Я надаю перевагу виконанню роботи по-новому, знаючи, що це пов'язано з ризиком бути незрозумілим товаришами, старшими	
17		Зазвичай я працюю без суттєвих відхилень від тих рекомендацій, які дають вчителі, старші	
18		Мені нерідко доводилося виправдовувати свої дії інструкціями, рекомендаціями, авторитетами	
19		Мені подобається виконувати завдання дослідницького характеру	
20		Я завжди до кінця відстоюю свою точку зору	

Обробка анкети

Номери анкети записують у вигляді двох стовбців, в першому − за кожну відповідь «так» ставиться 2 бали, у другому − 2 бали за відповідь «ні». Результати сумуються. Рівень сформованості загальних творчих здібностей визначається так:

− якщо набрано від 33 до 40 балів, то цей рівень можна оцінювати як найвищий;

− якщо набрано 26–32 балів, то цей рівень можна оцінювати як високий;

− якщо набрано 13–25 балів − середній;

− 6–12 − низький;

− 0–5 − дуже низький.

Додаток Б.

ОСНОВИ НАУКОВОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Програма спецкурсу «Основи наукової діяльності» пропонується для учнів 9–10-х класів закладів освіти нового типу (гімназій, коледжів, ліцеїв) та класів з поглибленим вивченням окремих предметів. Його можна використати і як факультатив у загальноосвітній школі.

Спецкурс розрахований на 17–34 години і може бути запропонований учням протягом одного півріччя (1–2 год./тиждень) або протягом року (0,5–1 год. /тиждень) у 9-му чи 10-му класі. Найдоцільніше даний спецкурс проводити в 9-му класі (протягом року) чи в 10-му (протягом першого півріччя). За цей період учні зможуть отримати уявлення та виробити первинні навички проведення наукового дослідження. Протягом наступного року старшокласники під керівництвом учителя чи наукового консультанта зможуть безпосередньо зайнятися дослідженням тієї чи іншої теми та написанням науково-дослідницької роботи.

Завдання спецкурсу:

формування в учнів глибоких теоретичних знань про суть науково-дослідницької діяльності;

оволодіння методологією наукового пізнання;

вироблення вміння написання рефератів, статей, підготовки та представлення наукових доповідей перед аудиторією;

навчання старшокласників знаходити необхідну інформацію, працювати з науковою літературою, довідниками, складати бібліографію;

вироблення навичок самостійної, теоретичної та експериментальної роботи, ознайомлення з сучасними методами наукових досліджень.

У програмі подано орієнтовний розподіл годин на вивчення теми. Учитель може, у разі потреби, вносити свої зміни до програми.

Програма спецкурсу «Основи наукової діяльності»

Вступ (1 год.)

Предмет, зміст, головні завдання та структура курсу. З історії діяльності Малої академії наук України. Діяльність наукового товариства учнів.

Що таке наука. Розвиток науки в Україні (1–2 год.)

Наука – елемент цивілізації. Наука як інформаційний процес. Поняття про наукознавство. Наукові принципи оцінки подій і явищ. Комплексний підхід до організації наукової діяльності. Основні етапи та тенденції розвитку науки в Україні. Видатні українські науковці. Поняття про інтелектуальну власність.

Організація праці. Гігієна розумової праці (1–2 год.)

Раціональне розміщення і планування робочого місця. Технічне оснащення. Гігієна розумової праці (гігієна зорової, слухової та розумової діяльності). Поняття про період інтенсивного розумового процесу. Послідовність і систематичність у роботі. Ритмічність праці. Правильне поєднання праці й відпочинку та зміна одних форм діяльності іншими. Стимулятори розумової діяльності (позитивні емоції, температура, світлові подразники).

Джерельна основа досліджень. Система наукової інформації (1–3 год.)

Первинні й другорядні джерела інформації. Бібліотечні фонди. Національний архівний фонд. Бібліографічні покажчики. Робота з довідниковою літературою. Методика пошуку літератури. Послідовність пошуку джерел інформації. Складання власної картотеки. Класифікація та оформлення зібраного матеріалу. Методи роботи над архівними матеріалами. Складання бібліографії.

Науковий стиль мовлення. Науковий реферат.
Наукова стаття (4–8 год.)

Стилі мовлення. Науковий стиль мовлення. Характерні особливості наукового стилю: точність, логічність, стислість, доказовість, широке використання наукових термінів. Структура наукового тексту. Наукові мовленнєві кліше. Рецензування наукової статті. Науковий реферат, його особливості та структура. Наукова стаття. Вимоги до написання наукової статті.

Форми та види записів опрацьованої інформації (1–2 год.)

Практичні рекомендації та культура ведення записів потрібної наукової інформації (ретельність і уважність). Записки. Тези. Цитування. Простий і складний план. Конспект як короткий, послідовний, логічно зв’язаний виклад змісту тексту. Конспекти планові, текстуальні, вільні, тематичні. Поради щодо оформлення конспекту. Прийоми виділення й розмежування тексту. Складання термінологічного словника. Систематизація та класифікація зібраного матеріалу.

Мистецтво виголошення наукової доповіді (2–4 год.)

Доповідь як одна з найпоширеніших форм публічних виступів. Послідовність підготовки доповіді. Структура наукової доповіді (вступ – окреслення проблеми, розкриття теми, мети, методів проведення дослідження; основна частина – виклад змісту питання; закінчення – теоретичні висновки, практичні пропозиції). Критерії оцінювання захисту науково-дослідницької роботи, наукової доповіді.

Методи наукових досліджень (2–4 год.)

Метод – як шлях дослідження, сукупність прийомів та операцій практичного або теоретичного пізнання дійсності. Методика проведення експерименту чи постановки досліду. Загальні наукові галузеві методи. Методи історичних досліджень. Методи порівняння, аналогії та моделювання. Математичні методи обробки та подання отриманих даних.

Науково-дослідницька робота (4–8 год.)

Складові частини наукової праці: дослідження (вибір теми, складання календарного плану, знайомство з літературою, збір, систематизація та класифікація матеріалу тощо) і виклад (написання тексту науково-дослідницької роботи, редагування). Особливість вибору теми дослідження, об’єкт та предмет наукового дослідження, актуальність теми дослідження, мета і завдання дослідження. Аргументація висновків. Новизна роботи. Основні етапи наукового дослідження. Методичні рекомендації та вимоги щодо оформлення науково-дослідницької роботи. Структура наукової роботи.

Учні повинні знати:

– основні ознаки наукового стилю мовлення;
– відомості про гігієну розумової праці;
– методи проведення наукових досліджень;
– етапи проведення наукових досліджень.

Учні повинні вміти:

– виголошувати наукові доповіді, брати участь у веденні наукових дискусій;
– писати наукові реферати, статті, тези, конспекти наукових статей;
– працювати з довідниковою літературою, складати бібліографію, користуватися каталогами і картотеками;
– оформляти науково-дослідницьку роботу відповідно до існуючих вимог, формулювати тему, мету, визначати завдання дослідження.

Література

1.Акінфієв О. Реферат як приклад дослідницької роботи учнів // Історія в школі. – 1997. – № 8. – С. 22–23.

2.Артемчук Г. та ін. Методика організації науково-дослідницької роботи. – К.: Фортуна. – 2000. – 272 с.

3.Кнор Н. Розвиток природних здібностей і обдарувань ліцеїстів // Обдарована дитина. – 2000. – № 4. – С. 7–9.

4.Коваль А. Культура ділового мовлення. – К.: Освіта. – 1975. – 98 с.

5.Ковальчук В. та ін. Основи наукових досліджень. – Одеса, 2001. – 217 с.

6.Ковбасенко Л. Мала академія наук України як пріоритетна форма позашкільної освіти // Обдарована дитина. – № 5. – С. 30–34.

7.Умови проведення Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів – членів МАН України // Інформаційний збірник МОН України. – 2001. – № 24. – С. 12–22.

Додаток В.

ПРОГРАМА З МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ГУРТКОВИХ ЗАНЯТЬ
У МАЛІЙ АКАДЕМІЇ НАУК

Пояснювальна записка

У гуртках природничого профілю Малої академії наук діти навчаються вмінню ставити і розв'язувати проблеми, які пов'язані з різноманітними явищами ; вмінню досліджувати ці явища, моделювати їх; перевіряти за допомогою експерименту слушність отриманих результатів. Найчастіше явище, що вивчається на основі обраної моделі, при розв'язуванні потребує неабияких знань з математики, які виходять далеко за межі шкільної програми. Тому вважаємо за доцільне створення спеціального курсу математики з метою поглибити знання учнів, отримані при вивченні основного курсу, а також розвинути їх інтерес до предмета, кмітливість, допитливість, логічне мислення, що дає гарну платформу для участі в олімпіадах, турнірах, математичних боях та в дослідницькій діяльності.

Основними цілями курсу є розвиток у слухачів правильних уявлень про природу математики і тенденції її розвитку, місце математики в системі наук та ролі математичного моделювання в науковому пізнанні.

Запропонований курс для кожного класу складається з двох розділів.

Теми першого розділу безпосередньо примикають до основного курсу, поглиблюючи найбільш важливі питання, систематизуючи матеріал, що вивчається на уроках в різний час, доповнюючи основний курс важливими відомостями загальноосвітнього, прикладного і дослідницького характеру.

Особлива увага приділяється не тільки розв'язуванню задач підвищеної складності (здебільшого «олімпіадних») з кожної теми основного курсу, а й складанню задач пошукового характеру з акцентом на створення нової проблеми та її розв'язання.

Теми другого розділу не мають безпосереднє відношення до основного курсу і носять характер олімпіадного спрямування, це, наприклад, такі як:

- математичні ігри;
- принцип Діріхле;
- задачі на оптимізацію: принцип крайнього, інваріант;
- комбінаторна геометрія;
- конгруентність;
- задачі на конструкції;
- антьє і мантиса;
- діофантові рівняння;
- функціональні рівняння та нерівності.

Матеріали цих тем рекомендується, по можливості, на кожному занятті поєднувати з вивченням питань першого розділу.

Теми цього курсу не залежать одна від одної, а об'єм матеріалу в кожній з них допускає регулювання учителем.

Цілі та завдання даного курсу полягають у наступному:

– підвищення рівня якості знань учнів, розширення кругозору в області математики;

– прищеплення інтересу до математики та її застосувань;

– виявлення найбільш обдарованих учнів та розвиток їх творчих здібностей, зокрема математичних та дослідницьких;

– навчання культурі самоосвіти та саморозвитку школярів;

– удосконалення умінь та навичок з самостійної роботи учнів зі спеціальною літературою;

– організація діяльності учнів з метою підготовки їх до участі в різних олімпіадах та конкурсах, зокрема написання контрольної роботи в рамках МАН;

– профорієнтація учнів та підготовка їх до отримання подальшої освіти.

Основні *напрямки роботи*:

– підготовка учнів до оволодіння знаннями, що виходять за межі шкільної програми;

– навчання учнів роботі з додатковою та спеціальною літературою;

– організація групових та індивідуальних консультацій;

– підготовка, організація та проведення турнірів, олімпіад;

– підготовка учнів до участі в дослідженнях, олімпіадах та конкурсах.

Після вивчення даного курсу учні *повинні знати*:

– алгоритми розв'язання базових та опорних задач з кожної теми;

– означення та властивості понять вивченого матеріалу.

Учні *повинні вміти*:

– виявляти та усувати двозначності з умов;

– формулювати умови для розв'язання задач олімпіадного характеру;

– тестувати розв'язання базових та опорних задач;

– використовувати стандартні прийоми та методи при розв'язанні нестандартних задач;

– узагальнювати математичний матеріал та перетворювати навчальну задачу в пошуково-дослідницьку.

Особливістю і критерієм доцільності та ефективності пропонованої програми є те, що:

1) вона не передбачає послідовного вивчення математики в школі і може використовуватись як програма пропедевтичного курсу, або програма спецкурсу, факультативного курсу тощо;

2) курс має на меті сприяти досягненню учнями високого рівня математичної підготовки, що характеризується вмінням розв'язувати задачі олімпіадного рівня з достатнім евристичним навантаженням, які розвивають стійкий пізнавальний і дослідницький математичний інтерес;

3) курс має на меті інтеграцію шкільного навчання з дослідницькою діяльністю за вибором, згідно з власним інтересом до конкретних проблем і тому може бути використаний керівниками гуртка з математики в рамках МАН.

У зв'язку з цим деякі розділи математики в пропонованій програмі поглиблюються та розширюються в порівнянні з їх викладенням згідно зі стандартною шкільною програмою.

Навчальний час може бути визначено відповідно до *рівня* вивчення матеріалу програми.

На І рівні навчальний матеріал вивчається за 4 роки у 8-му, 9-му, 10-му і 11-му класах загальноосвітньої школи в гуртках МАН, або на факультативних заняттях. Заняття проводяться протягом навчального року з розрахунку 2 навчальні години на тиждень (одне заняття секції МАН на тиждень). У цьому разі загальний час навчання складає 68 навчальних годин.

На ІІ рівні матеріал вивчається в цих же класах протягом кожного навчального року з розрахунку 4 навчальні години на тиждень (два заняття секції МАН на тиждень). У цьому разі загальний час навчання складає 136 навчальних годин на рік і передбачає детальніше опрацювання кожної теми, розв'язування більшої кількості задач. ІІ рівень навчання може бути досягнутий і при 2 навчальних години на тиждень, якщо гуртки сформовані з учнів класів, де поглиблено вивчаються математика або з урахуванням занять під час літньої навчальної практики, літніх фізико-математичних шкіл тощо, тоді щотижня може відбуватися більше занять, але загальний навчальний час складає 68 або 136 годин на рік (в залежності від рівня вивчення).

З того, що до навчання у гуртках МАН запрошуються учні шкіл 8–11-х класів, випливає, що вік учнів становить від 13 до 17 років.

Більш конкретною метою курсу є обов'язкове вивчення або дослідження учнями деяких тем, що мають важливе значення для підвищення математичної культури учнів гуртка МАН з математики, які ми умовно розділили на три етапи:

- І етап – слухачі МАН виконують, як правило, *монодослідження* – дослідження деяких властивостей конкретного об'єкту в рамках однієї теми;
- ІІ етап – кандидати МАН виконують навчально-дослідницької задачі, які як правило, виходять за рамки однієї окремої теми, тобто за рамки монопредметного дослідження і набувають оглядового характеру; вони націлені на поступове залучення нових для учнів математичних питань;
- ІІІ етап – для членів МАН починається безпосередня дослідна робота учня над проектом під керівництвом вчителя, яка вимагає обізнаності у багатьох тонких питаннях не тільки з області досліджуваної проблеми і надалі поступово набуває ознак цілісної наукової діяльності та закінчується підготовкою та виступом на конкурсі-захисті робіт МАН.

Прикладами тем для монопредметного дослідження можуть бути такі:

1)Нехай – найменше ціле число, яке не менше за x. Дослідити, якими властивостями володіє число .

2)Чи існують два ірраціональних числа і такі, що число є раціональним? Що можна сказати про числа та .

3)Позначимо через суму добутків по k чисел від 1 до n. Наприклад, Необхідно:

а) знайти формули для і ;

б) доведіть, що є многочленом від n степеня 2k;

в) знайдіть метод знаходження многочленів при k = 2, 3, 4, … та застосуйте його для знаходження многочленів і .

4)Дослідіть можливі траєкторії руху чудових точок трикутника, вершини якого рухаються по двом колам, що перетинаються (конструкція однозначно визначається колами та вибором однієї з вершин). Отримані траєкторії наочно продемонструйте на комп'ютері.

Прикладами тем оглядового характеру, що, як правило, утворюються узагальненням монопредметного дослідження та перетворюються в науково-дослідну роботу із вагомим внеском власного дослідження, можуть бути:

1)Числові конструкції.

2)Відомі та несподівані властивості деяких важливих трансцендентних чисел.

3)Гратки на площині та їх властивості. Площі многокутників на гратках. Основи геометричної теорії чисел.

4)Незвітні многочлени. Многокутник Ньютона і критерій Дарбу про незвітність.

5)Ітерації та фрактали. Побудова фрактальних множин та їх аналіз.

Апробація програми відбувалась на заняттях секцій Київського територіального відділення Малої академії наук фізико-математичного профілю на базі міст Славутич та Біла Церква, а також на факультативних заняттях у ліцеї м. Славутича. Ефективність програми підтверджується рівнем підготовки учнів на Всеукраїнських учнівських олімпіад з математики всіх етапів, а також рівнем дослідницьких робіт, що були представлені на конкурсах-захистах МАН усіх етапів і відзначені нагородами, а також результатами навчання колишніх випускників ліцею у вищих навчальних закладах.

8-й клас (2 або 4 години на тиждень)

ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН

№	Теми	І рівень, кількість годин	ІІ рівень, кількість годин
1	Поняття про множину, операції над ними	4	8
2	Множина натуральних і цілих чисел	6	12
3	Системи числення	4	8
4	Множина раціональних чисел	4	8
5	Множина ірраціональних чисел	2	6
6	Злічені та незлічені множини	2	4
7	Розгляд гіпотез та нерозв'язаних проблем з теорії множин	2	4
8	Логічна будова геометрії	2	2
9	Геометричні побудови	6	12
10	Чудові точки і лінії в трикутнику	8	16
11	Ціла та дробова частини числа	6	12
12	Принцип Діріхле	4	8
13	Математичні ігри	6	12
14	Розрізання та покриття	6	12
15	Числові конструкції	4	12
	ВСЬОГО (за 1 рік навчання)	68	136

І частина

1 Числові множини.

1.1 Поняття про множину, операції над множинами.

Історичні відомості про засновника теорії множин. Різні приклади множин, що запропоновані викладачем і учнями. Елементи множини, підмножини, знаки включення. Операції над множинами (об'єднання, перетин, різниця, доповнення, декартів прямий добуток множин), приклади. Порівняння множин, еквівалентність нескінченних множин, поняття потужності, приклади. Потужність континуума, проблема континуума. Множина Кантора та її властивості.

Поставити задачу: Із точки 0 в точку 1 по числовій прямій рухаються заєць та черепаха. Вони одночасно виходять із пункту 0, ніколи не стоять на місті і не повертаються назад. Чи може так статися, щоб для кожної точки , швидкість зайця в момент проходження цієї точки була не меншою ніж швидкість черепахи в момент проходження цієї точки, але черепаха прибуде у пункт 1 раніше ніж заєць.

1.2 Числові множини (множина натуральних і цілих чисел).

Натуральні і цілі числа, дії над ними, властивості. Визначення і властивості подільності, основні теореми про ділення націло та з остачею. Дільник і кратне, прості і складені числа, НСД і НСК, взаємно прості числа. Алгоритм Евкліда. Ознаки подільності на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 25, 37. Нескінченість множини простих чисел (теорема Евкліда, постулат Бертрана). Теореми про взаємопрості числа (Ферма, Ейлера, Вільсона). Прості числа Мерсена, Ферма, Вільсона, Маркова, близнюки, прості числа з одиниць. Тести простоти. Досконалі числа . Розкладання на множники. Теорема Лежандра. Основна теорема арифметики. Сума і кількість дільників числа. Лінійні діофантові рівняння. Теорія порівнянь, застосування до розв'язування задач на подільність і до розв'язання діофантових рівнянь. Китайська теорема про остачі. Огляд досліджень математиків Діріхле і Кумера про велику теорему Ферма. Доведення Ейлера про неможливість розв'язання рівняння для n = 3, 4 в N; Розгляд проблем, пов'язаних з простими та досконалими числами, зокрема: проблеми Гольдбаха – Ейлера, про числа Мерсена, Каллена, Софі Жермен, Ферма. Використання комп'ютерних технологій при розгляді проблем даної теми.

Поставити задачу: Множина *A* складається з натуральних чисел, причому:

1) ; 2) якщо то ; 3) якщо то .

Чи співпадає множина А з множиною натуральних чисел?

1.3 Системи числення.

Непозиційні і позиційні системи числення. Відомості з історії. d-ічна система числення. Перехід з d-ічної в десяткову і навпаки, арифметичні дії в цих системах. Застосування до розв'язування деяких олімпіадних задач. Урівноважена система числення. Застосування до розв'язування задач на зважування. Системи числення і множина Кантора.

1.4 Множина раціональних чисел.

Раціональні числа і вимірювання. Сумірні та несумірні відрізки. Раціональне число як десятковий періодичний дріб. Щільність множини раціональних чисел.

1.5 Множина ірраціональних чисел.

Необхідність введення ірраціонального числа. Ірраціональні числа, властивості множини раціональних чисел, арифметичні дії над ірраціональними числами.

1.6 Множина дійсних чисел.

Поняття та властивості множини дійсних чисел. Теореми Кантора і Архімеда.

1.7 Зліченні та незліченні множини.

Зліченність множини раціональних чисел. Незліченність множини дійсних чисел. Повнота та категоричність множини дійсних чисел (описовий огляд).

1.8 Розгляд гіпотез та нерозв'язаних проблем з теорії множин.

2 Геометрія.

2.1 Логічна будова геометрії.

Розвиток геометрії, «Начала» Евкліда і V постулат. Необхідні й достатні умови. Помилки в геометричних доведеннях.

2.2 Геометричні побудови.

Побудова за допомогою циркуля і лінійки (аксіоми лінійки та циркуля). Загальна схема розв’язування задач на побудову. Загальні методи розв’язування задач на побудову: 1) метод базисних трикутників; 2) метод геометричного місця точок; 3) метод перетворення площини (симетрія, паралельне перенесення, гомотетія); 4) алгебраїчний метод. Про можливість розв’язування геометричних задач за допомогою циркуля та лінійки. Задачі на побудову трикутників, кіл, незвичайні побудови.

2.3 Чудові точки і лінії в трикутнику (чотирикутнику).

Центр вписаного і описаного кіл в трикутнику, чотирикутнику. Центр тяжіння. Ортоцентр (точка перетину висот). Центри зовнівписаних кіл. Пряма Ейлера, коло дев’яти точок. Опорні задачі про чудові лінії. Основні теореми (Ейлера, Птоломея, Менелая, Чеви, Стюарта, Штейнера – Лемуса).

Поставити задачу: Дослідіть можливі траєкторії руху чудових точок трикутника, вершини якого рухаються по двом перетинаючим колам (конструкція однозначно визначається колами та вибором однієї з вершин). Отримані траєкторії наочно продемонструйте на комп’ютері.

II частина

1 Ціла та дробова частини числа.

Означення, властивості, приклади. Знаходження цілої та дробової частини числових виразів. Рівняння та нерівності, що містять цілу та дробову частини. Застосування цілої та дробової частини при розв’язуванні задач на подільність.

2. Принцип Діріхле.

Дискретний принцип Діріхле. Комбінаторний принцип Діріхле. Застосування до розв’язування задач.

3. Математичні ігри.

Основні підходи до розв’язування логічних задач (за допомогою таблиць, аналіз з кінця). Ігри-жарти. Виграшні стратегії (парність, симетричність, розв’язування з кінця, розбиття на пари, стратегія безперервної загрози).

Задачі на переслідування. Графи, застосування до розв’язування логічних задач. Розфарбовування як метод розв’язування логічних задач. Відкриті проблеми з теорії розфарбовувань.

4.Розрізання та покриття.

Покриття та упаковки. Розрізання та замощення.

5. Числові конструкції.

Конструкції сум цифр числа. Адитивне конструювання. Двійкова система числення та конструювання, множина та конструювання.

9-й клас (2 або 4 години на тиждень)

ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН

№	Теми	I рівень, кількість годин	II рівень, кількість годин
1	Виникнення та розвиток поняття «функція». Різні означення та способи задання	4	4
2	Основні характеристики функції	4	8
3	Елементарні перетворення графіків	4	8
4	Різні прийоми розв’язування рівнянь	4	10
5	Узагальнення методів доведення числових нерівностей	6	14
6	Числові послідовності числові ряди	4	8
7	Границя числової послідовності	4	6
8	Вектори геометричні образи на площині	6	12
9	Геометричні перетворення площини	6	12

10	Антьє і мантиса в задачах на подільність	4	8
11	Порівняння в кільці цілих чисел	4	10
12	Задачі на оптимізацію, принцип крайнього, інваріант	4	8
13	Математичні ігри	4	8
14	Рівняння в цілих числах	4	8
15	Конструкції, процеси та операції	6	12
	ВСЬОГО (за 1 рік навчання)	68	136

I частина

1 Функції та їх графіки.

1.1 Виникнення та розвиток поняття «функція». Різні означення та способи задання.

1.2 Основні характеристики функції.

Область визначення та область значень. Парні та непарні функції. Композиція функцій, оборотність функції. Найпростіші функціональні співвідношення та функціональні рівняння.

1.3 Елементарні перетворення графіків.

Паралельне перенесення, стиск, розтяг. Побудова графіків, що містять модуль. Побудова графіків функцій, що містять цілу та дробову частини (, , ,). Побудова ГМТ, що містять модуль, антьє і мантису. Арифметичні дії з графіками.

2 Рівняння та нерівності.

2.1 Стандартні та нестандартні прийоми розв'язування рівнянь.

Основні методи розв'язування рівнянь вищих степенів (розкладання на множники, введення нової змінної, симетричні рівняння, виділення повного квадрату, метод Кордано та Феррарі). Розв'язування рівнянь та нерівностей, що містять цілу та дробову частини. Метод нерухомої точки та розв'язування рівнянь відносно коефіцієнтів. Рівняння і нерівності з параметрами, основні підходи до їх розв'язування. Огляд досліджень, пов'язаних з рівняннями 3-го, 4-го степенів (Тарталля, Кардано, Вієт). Огляд досліджень Е. Галуа.

2.2 Узагальнення методів доведення числових нерівностей.

Традиційний підхід до доведення нерівностей (за означенням та використовуючи класичні нерівності Коші, Бернуллі, Коші – Буняковського, Чебишева, вагова нерівність Коші). Нетрадиційні методи доведення нерівностей (метод підсилення, використання векторів, використання властивостей функцій, геометричний підхід, використання одномонотонних послідовностей).

3 Числові послідовності.

3.1 Числові послідовності та методи їх задання.

Обчислення сум числових послідовностей (метод «туди-назад», метод скінченних різниць). Дедукція та індукція. Різновиди індукцій та їх використання. Рекурентні послідовності. Перехід від рекурентно заданої послідовності до аналітично заданої. Послідовність Фібоначчі. Золотий переріз як граничне співвідношення двох послідовних чисел Фібоначчі. Розгляд гіпотези, що стосується чисел Фібоначчі: кількість простих чисел Фібоначчі нескінченна.

3.2 Границя числової послідовності.

Означення границі числової послідовності, властивості послідовностей, які мають границі. Теореми Вейєрштрасса, застосування до розв'язування рівнянь.

Числовий ряд, необхідна й достатня умови його збіжності, підсумування числових рядів.

Поставити задачу: Розгляньте питання про монотонність послідовності

, де – фіксоване непарне число, – сума цифр в десятковому запису.

Додаткове запитання: Дослідіть підходи до розв'язання питання про монотонність послідовностей , де – довільна функція натурального аргументу.

4 Геометрія.

4.1 Вектори та геометричні образи на площині.

Використання векторів для розв'язування задач і доведення теорем. Скалярний та векторний добутки, їх застосування до розв'язування задач. Метод координат на площині (основні задачі в координатах). Рівняння прямої, кола, еліпса, гіперболи.

4.2 Геометричні перетворення площини.

Рух, симетрія, поворот, паралельне перенесення. Поняття про орієнтацію площини, теорема Шаля, теореми про композиції двох симетрій, поворотів.

Перетворення подібності, гомотетія та її властивості. Інверсія та її використання. Радикальна вісь. Використання для розв'язання деяких задач.

Поставити проблему: Чи при будь-якому розфарбуванні площини в три кольори знайдуться дві однокольорові точки на одиничній відстані одна від одної.

II частина

1. Антьє і мантиса в задачах на подільність.
2. Порівняння в кільці цілих чисел.

Теореми Ейлера і Ферма, функція Ейлера і Мебіуса. Лінійні порівняння. Порівняння вищих степенів з однією змінною, застосування до розв'язування діофантових рівнянь.

3. Задачі на оптимізацію.

Принцип крайнього. Інваріант. Напівінваріант.

4. Рівняння в цілих числах.

Лінійні діофантові рівняння та основні методи їх розв'язування (метод підбору, ланцюгового дробу, використання функції Ейлера, використання матриць). Нелінійні діофантові рівняння та основні методи їх розв'язування (зведення до систем, метод стиску та нескінченного спуску, використання теорії подільності, геометричний метод).

5. Конструкції, процеси та операції.

Конструкції сум цифр числа. Адитивне конструювання та конструювання за індукцією. Двійкова система числення та конструювання, множина та конструювання. Процеси та операції . Розгляд гіпотез та нерозв'язаних проблем з даної тематики, зокрема:

– чи існує многокутник, копіями якого площину можна покрити, але тільки неперіодичним чином?

– яка фігура мінімальної площі, якою можна покрити будь-який многокутник діаметром 1?

10–11-й класи (2 або 4 години на тиждень)

Порядок вивчення тем 10-го та 11-го класів, їх розподіл між класами визначається викладачем у відповідності з тематикою планування основного курсу в цих класах.

ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН

№	Теми	I рівень, кількість годин	II рівень, кількість годин

1	Натуральні та цілі числа	4	8
2	Раціональні та ірраціональні числа	4	8
3	Числові послідовності та ряди	6	12
4	Різні теорії дійсного числа	4	10
5	Комплексні числа та їх використання	6	12
6	Многочлени від однієї змінної	6	12
7	Многочлени від кількох змінних	4	8
8	Функціональні співвідношення для многочленів	4	8
9	Побудова графіків функцій без застосування похідної	4	8
10	Основні характеристики функцій, функціональні співвідношення	4	8
11	Функціональні рівняння	6	12
12	Границя функції та її неперервність	4	8
13	Похідна та її використання	6	12
14	Тригонометричні , показникові та логарифмічні функції	8	16
15	Узагальнення методів доведення числових нерівностей	8	16
16	Методи розв’язання планіметричних задач	8	16
17	Вибрані задачі та теореми планіметрії	6	12
18	Стереометричні задачі та методи їх розв’язання	8	12
19	Принцип крайнього	4	8
20	Принцип Діріхле	4	8
21	Подільність, інваріантність, розфарбування	8	16
22	Системи точок і відрізків, індукція і комбінаторика	8	16
23	Графи	6	12
24	Початки теорії ігор	6	12
	ВСЬОГО (за 2 роки навчання)	136	272

Алгебра та елементи математичного аналізу

I частина

1 Числа та числові послідовності.

1.1 Натуральні та цілі числа.

Розкладання на множники, найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне (основні теореми). Подільність та ділення з остачею (теореми Евкліда, Ферма, Лагранжа, Вільсона, китайська теорема про остачі). Теорія порівнянь в задачах на подільність. Рівняння в цілих числах. Розгляд нерозв’язаних проблем:

1) чи існує елементарне доведення формули де пробігає множину простих чисел? (Вальстафф);

2) відомо, що рівняння має лише два розв’язки в натуральних числах та , але доведення важке. Знайдіть елементарне доведення. (Морделл);

3) чи має ще цілочисельні розв’язки рівняння крім ? (Морделл).

1.2 Раціональні та ірраціональні числа.

Множина раціональних чисел, щільність множини раціональних чисел. Задачі, що приводять до введення нового числа. Ірраціональні числа (означення, властивості). Способи доведення ірраціональності числа. Алгебраїчні та трансцендентні числа, їх властивості. Доведення ірраціональності числа e. Розгляд нерозв’язаної проблеми про те, що числа e + π і eπ – ірраціональні.

Поставити проблему: Чи можна множину точок прямої з раціональними координатами розфарбувати трьома кольорами так, щоб не було нескінченних однокольорових підмножин, симетричних відносно деякої точки прямої? Таке розфарбування в чотири кольори існує.

1.3 Числові послідовності та ряди.

Рекурентні послідовності (послідовність чисел Фібоначчі). Методи сумування числових послідовностей та рядів: метод скінченних різниць, підсумовування частинами; сумування факторіальних послідовностей; сумування степенів натуральних чисел за допомогою таблиць та застосуванням похідної або інтеграла; застосування інтеграла для знаходження наближеної суми послідовності. Рекурентні послідовності та функціональні рівняння.

1.4 Різні теорії дійсного числа.

Аксіоматична теорія. Теорія Вейєрштрасса. Теорія Кантора. Теорія Дедекінда. Теорія Колмогорова. Доведення теореми Цермело про передбачуваність шахової гри.

1.5 Комплексні числа та їх використання.

2 Многочлени від однієї та двох змінних.

2.1 Многочлени від однієї змінної.

Степінь многочлена, коефіцієнти. Дії над многочленами, звітні та незвітні многочлени. Критерій Ейзенштейна. Корені многочлена (теореми Безу, Вієта, схема Горнера). Різні методи розкладання на множники. Раціональні рівняння вищих степенів та основні методи їх розв’язування (метод Кордано та Феррарі). Границі дійсних коренів та їх кількість у рівнянні (правило Декарта, метод Штурма). Розв’язування алгебраїчних рівнянь у квадратних радикалах (задачі, які розв’язуються в радикалах – задача на подвоєння куба, задача про трисекцію кута та квадратуру круга).

Поставити задачу про обчислення довжин основ прямокутної трапеції, в якій відомі довжини діагоналей, їх відстань від точки та перетину до сторони, перпендикулярної основам.

2.2 Многочлени від двох змінних.

Стандартний вигляд многочлена від декількох змінних; симетричні й однорідні многочлени. Застосування властивостей симетричних і однорідних многочленів до доведення нерівностей та розв’язування деяких алгебраїчних рівнянь. Геометричний зміст рівняння з двома та трьома змінними, розв’язування нерівностей з двома змінними. Системи рівнянь та основні методи їх розв’язування, у тому числі такі, як: метод Гауса, Крамера, оберненої матриці . Рівняння спіралі ДНК.

2.3 Функціональні співвідношення для многочленів.

3 Функції та їх графіки.

3.1 Побудова графіків функцій без застосування похідної.

Побудова графіків функцій елементарними перетвореннями. Побудова складених функцій. Арифметичні дії над графіками функцій.

3.2 Основні характеристики функцій.

Періодичні функції, основні теореми про періодичність. Оборотність функції; взаємообернені функції.

3.3 Функціональні рівняння.

Функціональні співвідношення і функціональні рівняння. Метод підстановок як основний метод розв’язування функціональних рівнянь. Адитивні функції та функціональні рівняння для лінійної, показникової та логарифмічної функцій. Принцип крайнього та методи скінченних різниць і математичної індукції у функціональних рівняннях.

3.4 Границя функції та її неперервність.

Класифікація точок множини. Границя функції за Коші, за Гейне. Основні теореми про границі. Нескінченно малі та великі функції в точці, їх зв’язок.

Чудові границі. Неперервність функції в точці і на множині. Класифікація точок розриву . Теореми Больцано – Коші, використання.

3.5 Похідна та її використання.

Похідна і розкладання на множники многочлена. Похідна при побудові графіків.

Похідна у доведенні нерівностей та тотожностей. Похідна та сумування послідовностей. Похідна та порівняння чисел. Доведення економічності трійкової системи числення.

3.6 Тригонометричні, показникові та логарифмічні функції.

Обчислення та порівняння значень тригонометричних функцій. Основні методи розв'язування тригонометричних рівнянь. Розв'язування трансцендентних рівнянь та нерівностей. Обчислення та порівняння значень показникових та логарифмічних функцій. Основні прийоми й методи розв'язування показникових, логарифмічних рівнянь і нерівностей та їх систем. Показниково-степеневі рівняння. Нестандартні рівняння й нерівності.

Задачі з параметрами.

4Узагальнення методів доведення числових нерівностей.

4.1 Традиційний підхід до доведення нерівностей.

За означенням та використовуючи класичні нерівності Коші, Бернуллі, Коші – Буняковського, Чебишева, Юнга, Карамати. Вагова нерівність Коші та інші різновиди. Метод математичної індукції та її різновидів. Трансфінітна індукція.

4.2 Нетрадиційні методи доведення нерівностей.

Використання векторів. Використання властивостей функцій (лінійної, опуклої). Використання тригонометрії. Геометричний підхід. Використання одномонотонних послідовностей.

5. Геометрія.

5.1 Методи розв'язання планіметричних задач.

Основні геометричні факти і теореми. Опорні планіметричні задачі. Основні геометричні прийоми і методи розв'язування задач: додаткові побудови, геометричні перетворення, метод подібності, метод площ, метод допоміжного кола, метод перерізу. Різновиди аналітичних методів розв'язування геометричних задач: 1) метод поетапного розв'язування; 2) метод складання рівнянь; 3) метод координат; 4) векторний метод.

5.2 Вибрані задачі та теореми планіметрії.

Теореми Стюарта, Чеви і Менелая. Афінні задачі. Геометричне місце точок. Трикутники і коло. Чотирикутники і коло. Коло і дотична до нього. Теорема Фейєрбаха. Геометричні нерівності, задачі на доведення, на максимум і мінімум.

Поставити проблеми:

1) Дано коло і точки та зовні нього. Знайти на колі точку таку, що трикутник має найменший периметр.

2) Дано два кола, які не перетинаються, і точка , що лежить зовні цих кіл. Знайти на колах точки і , такі, коли периметр трикутника має найменше значення.

3) Дано три кола, кожне з яких лежить зовні інших кіл. Знайти на колах точки , та (по одній на кожному колі), такі, коли трикутник має найменший периметр.

Дослідити, чи можна виконати відповідні побудови за допомогою тільки циркуля та лінійки? Якщо, відповідь позитивна, то описати побудову.

5.3 Стереометричні задачі та методи їх розв'язування.

Задачі на взаємне розташування прямих і площин у просторі. Побудова перерізів. Спеціальні методи розв'язування стереометричних задач: метод перерізів, метод проекції, добудова, розгортка. Вектори у просторі, застосування до розв'язування задач. Різні задачі про многогранники, вписані та описані кулі, круглі тіла, комбінації тіл.

Зокрема, приділити увагу наступним питанням (дослідницькі задачі):

1) Що являє собою множина слідів вершин (ребер, граней) опуклого многогранника при всіх можливих його перекочуваннях на площині через ребра (з деякого початкового положення)?

2) Що таке нескінченна продовжувана розгортка опуклого многогранника?

3) З'ясувати, для яких многогранників множина слідів його вершин дискретна, а для яких вона заповнює площину всюди щільно.

Поставити проблему: Чи може опуклий многогранник, яким можна заповнити весь простір, мати більше 38 граней?

II частина

1 Принцип крайнього.

Найменший чи найбільший кут. Найменша та найбільша відстані та площа.

Опукла оболонка й опорні прямі.

2 Принцип Діріхле.

Скінченна кількість точок, прямих, площин. Кути та довжини. Неперервний та комбінаторний принципи.

3 Подільність, інваріантність, розфарбовування.

Парність та непарність в задачах геометрії. Подільність в задачах геометрії. Інваріант. Допоміжні розфарбування як метод розв'язування геометричних задач на конструкцію та ігри. Цілочисельні гратки. Розгляд гіпотез та нерозв'язаних проблем з теорії розфарбувань, зокрема:

Проблема Овінгса. Чи можна множину натуральних чисел розфарбувати двома кольорами так, що для довільної нескінченної підмножини А серед чисел , де (можливість не виключається) знайдуться різнокольорові? Таке розфарбування трьома кольорами існує.

Проблема 2. Чи можна множину цілочисельних точок простору розфарбувати трьома кольорами так, щоб не було нескінченних однокольорових підмножин, симетричних відносно деякої точки простору? Таке розфарбування у чотири кольори існує.

4 Системи точок і відрізків, індукція і комбінаторика.

Системи точок. Системи відрізків. Індукція. Комбінаторна геометрія.

5 Графи.

Поняття графа. Степені вершин та підрахунок числа ребер. Ейлерові графи.

Розгляд гіпотез та нерозв'язаних проблем з теорії графів, зокрема:

Гіпотеза Каццетті – Хаггвіста. Орієнтований граф из n вершин, з кожної вершини якого выходить не меньше m стрілок, має замкнений контур довжиною не меньше .

6 Початки теорії ігор.

Основні поняття, матриця виграшів. Ігри з сідловими точками та без сідловин точок. Теорія ігор і лінійне програмування.

Поставити проблему: Покер – це цікава гра, що являє собою задачу конфліктного прийняття рішень в умовах невизначеності. Для моделювання різних ігрових умов, з якими доводиться зустрічатись гравцям, використовується колода гральних карт. Мета, до якої прагнуть гравці в покер, – це максимізація виграшу в довгостроковій перспективі. Зважаючи на це все, спробуйте дослідити деякі аспекти цієї гри за допомогою апарату математичної теорії прийняття рішень, або ж, більш конкретно, теорії ігор.

Список рекомендованої літератури до програми

1. Про загальну середню освіту: Закон України від 13 травня 1999 р. № 561 -XIV // Інф. зб. Міносвіти України. – 1999. – № 15. – С. 6–31.

2. Про позашкільну освіту: Закон України від 22 червня 2002 р. № 1841-III // Освіта України. – 2.12.2003.

3. Александров А. Д. Основы геометрии. – М.: Наука, 1987.

4. Березин В. Н. Сборник задач для факультативных и внеклассных занятий по математике / Березин В. Н., Березина Л. Ю., Никольская И. Л. – М.: Просвещение, 1985. – 175 с.

5. Бродский Я. С., Слипенко А. К. Функциональные уравнения. – К.: Вища школа, 1983. – 96 с.

6. Борель Э. Как согласовать преподавание в средней школе с прогрессом науки / Борель Э. – М.: Просвещение, 1958.
7. Заочные математические олимпиады / [Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л., Раббот Ж. М., Тоом А. Л.]. – М.: Наука, 1986.
8. Васильев И. Б. Сборник подготовительных задач к Всероссийской олимпиаде юных математиков / И. Б. Васильев, А. А. Егоров. – М.: Учпедгиз, 1963.
9. Вишенський В. А., Перестюк М. О., Самойленко А. М. Збірник задач з математики. – К.: Либідь, 1990. – 328 с.
10. Генкин С. А. Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы / Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. – Киров: АСА, 1994. – 272 с.
11. Гнеденко Б. В. Формирование мировоззрения учащихся в процессе обучения математике / Гнеденко Б. В. – М.: Просвещение, 1982.
12. История математики / Под ред. А. П. Юшкевича. Т. 1–3. – М.: Наука, 1970.
13. Кокстер Г. С., Грейтцер С. Л. Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1978. – 223 с.
14. Курант Р. Что такое математика? / Р. Курант, Г. Роббинс – [3-е изд.] – М. : МЦНМО, 2001. – 586 с.
15. Кужель О. В. Елементи теорії множин і математичної логіки. – К.: Рад, шк., 1977. – 159 с.
16. Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. А. Змагання юних математиків України. – Львів: Каменяр, 2006.
17. Морозова Е. А., Петраков И. С. Международные математические олимпиады. – М.: Просвещение, 1976.
18. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. Ч. I, II. – М.: Наука, 1986.
19. Пойа Д. Математическое открытие / Пойа Д.: [пер. с англ.]. – М.: Наука, 1976.
20. Рубльов Б. В. та ін. Математичні олімпіадні змагання школярів України. – К.: Літера, 2008.
21. Скобелев Г. М. Елементи дискретної математики: Спеціальний курс факульт. занять у 9-му кл. – К.: Рад. шк., 1970. – 180 с.
22. Фридман Л. М., Турецкий Е. Н. Как научиться решать задачи. – М.: Просвещение, 1984. – 175 с.
23. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии. – М.: Наука, 1974.

Додаток Д.
ЗАВДАННЯ ВОСЬМОГО ВСЕУКРАЇНСЬКОГО ТУРНІРУ ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ

1. «Послідовність остач». Для позначимо через таке ціле число, що

, причому . Дослідіть утворену послідовність .

2. «Тетраедр». Дослідіть властивості тетраедра , для якого має місце рівність

, де – величини двогранних кутів при ребрах та відповідно.

3. «Геометрична нерівність». Знайдіть найбільше значення виразу , де – є відповідно, півпериметром, радіусом описаного кола і радіусом вписаного кола деякого трикутника.

4. «Многочлени». Нехай . Розглянемо множину усіх многочленів виду з дійсними коефіцієнтами. Яку підмножину множини

ви зможете визначити (охарактеризувати), щоб ?

5. «Раціональність X». Які ви зможете знайти (охарактеризувати) четвірки натуральних чисел , щоб з раціональності чисел і випливала раціональність числа X?

6. «Цілі значення виразу». Нехай задано натуральні числа і , причому добуток не є точним квадратом. Дослідіть питання щодо кількості різних цілих значень, яких може

набувати вираз за умови, що .

7. «Збіжні послідовності». Які ви зможете знайти (охарактеризувати) пари дійсних чисел і , що з існування скінченної границі випливатиме збіжність послідовності .

8. «Чарівні фігури на координатній площині». Назвемо фігуру на координатній площині чарівною, якщо для будь-яких двох точок , справджується нерівність . Дослідіть властивості чарівних фігур.

9. «Функціональне рівняння з параметром». Знайдіть усі такі дійсні числа , для яких існує тільки одна функція така, що при всіх має місце рівність:

.

10. «Композиція функцій». Нехай . Знайдіть усі такі функції

, що для будь-якого справджується рівність

.

11. «Незвичайна нерівність». Нехай .

Знайдіть усі такі набори додатних дійсних чисел , що нерівність

справджується для всіх наборів додатних чисел

, які задовольняють умову .

12. «Ілюмінований граф». Нехай . Дано зв'язний n-вершинний граф. У кожній його вершині міститься лампочка, що має два стани: «вимкнено» та «увімкнено», причому спочатку всі лампочки вимкнено. За один крок дозволяється обирати якусь вершину й змінювати на протилежний і стан лампочки, що знаходиться в цій вершині, і стан лампочок, що знаходяться в суміжних з нею вершинах.

а) Доведіть, що довільний зв'язний n-вершинний граф за декілька кроків можна «ілюмінувати» – досягти, щоб усі лампочки виявилися увімкненими.

б) Нехай – найменше таке число, що довільний зв'язний n-вершинний граф, щонайбільше за кроків можна «ілюмінувати». Для кожного натурального числа визначити .

13. «Комбінаторна алгебра». Для множини через позначимо сукупність усіх відображень .

а) Чи для будь-якого відображення існує таке відображення , що для всіх справджується рівність ?

б) Які необхідні та достатні умови має задовольняти множина , щоб для відображення при всіх справджувалася рівність ?

в) Для яких відображень існуватиме таке відображення , що для всіх справджується рівність ?

14. «Фішки на просторовій шахівниці». На просторовій «шахівниці» розміром розставлено фішки так, що кожна клітинка, що не містить фішки, має спільну грань принаймні з однією такою клітинкою, яка містить фішку, а будь-яку пару клітинок, що містять фішки, можна сполучити таким «ланцюжком» клітинок, що всі вони також містять фішки, причому кожні дві послідовні клітинки цього «ланцюжка» мають спільну грань. Оцініть знизу кількість фішок, які можна розставити на просторовій «шахівниці» згідно наведеної вище умови.

15. «Перестановки». Для натурального числа через будемо позначати кількість таких перестановок перших натуральних чисел, що

при всіх . Знайдіть інтервал якомога меншої довжини такий, що при всіх .

Додаток Е.
ЛИСТОК З ТЕМИ «МНОГОЧЛЕН ТА ЙОГО КОРЕНІ»

Означення. Многочленом степеня від змінної будемо називати вираз виду

де –
будь-які числа.

Многочлен нульового степеня є многочленом-константою, тобто . Будемо також вважати многочленом константу, яка рівна нулю, такий многочлен будемо називати нуль -многочленом (нуль-многочлен не має степеня, на відміну від інших многочленів).

Терміни і позначення:

1)Многочлени від змінної будемо позначати символами і т. д.

2)Степінь многочлена позначимо так: .

3)Числа будемо називати коефіцієнтами многочлена

EMBED Equation.3 – старшим коефіцієнтом, – вільним членом.

4)Нехай – даний многочлен і –деяке число, тоді називається значенням многочлена при .

Означення. Число називається коренем многочлена , якщо при значення .

5) Многочлени , вважаються рівними тоді і тільки тоді, коли і коефіцієнти многочленів відповідно рівні, тобто .

Зауважимо, що коли і рівні многочлени, то для довільного числа їхні значення при збігаються. Має місце і обернене твердження: якщо для довільного числа виконується рівність , то .

Вправи для колективного обговорення. (Цикл опорних задач)

Теорема Безу. Остача від ділення будь-якого многочлена на двочлен дорівнює значенню многочлена при .

Доведення. Нехай – многочлен-ділене, а – дільник, тоді остача або многочлен нульового степеня або нуль, тобто і тоді

, звідси , .

Наслідки:

1. , тобто – корінь .

2. Якщо – різні корені многочлена , то

.

Доведення. Доведемо методом математичної індукції:

1) при – твердження вірне.

2) нехай воно вірне для різних коренів, доведемо його для різних коренів. Нехай – різні корені многочлена , тоді за припущенням: , тобто існує такий, що . Підставимо , отримаємо: , бо .

І оскільки , то , звідси , тобто

і .

3. Число різних коренів многочлена, відмінного від нуля, не більше, ніж його степінь.

Доведення. Нехай і . Припустимо, що має різних коренів , тоді за наслідком 2 отримаємо , що неможливо, оскільки степінь дільника не може бути більшим за степінь діленого.

Теорема (критерій Ейзенштейна): Якщо для даного многочлена з цілими коефіцієнтами виконуються умови:

1) діляться на деяке просте число p;

2) не ділиться на ;

3) не ділиться на p, то даний многочлен P(x) є незвітним над полем Q.

Наприклад, многочлен є незвітним над Q, бо при p = 2, – діляться на 2, не ділиться на , не ділиться на 2.

Складіть доповідь про доведення цієї теореми і вкажіть джерело прочитаного.

Теорема: Якщо кубічний многочлен степеня P(x) з раціональними коефіцієнтами не має раціональних коренів, то P(x) – незвітний над полем Q.

Теорема (Вієта): Якщо – корені многочлена , то

1. Доведіть, що якщо – корінь многочлена , то ділиться на .

2. Доведіть теорему Безу: остача від ділення многочлена на двочлен рівна значенню многочлена при .

3. Доведіть, що якщо многочлен ділиться на многочлен , то всі корені є коренями . Чи вірне обернене твердження?

4. Доведіть, що многочлен степеня має не більше коренів.

5. а) Доведіть, що для будь-яких існує таке число , що при всіх вірна нерівність .

б) Доведіть, що будь-яких многочлен непарного степеня має дійсний корінь .

6. (теорема Вієта)

а) Нехай квадратний тричлен розкладається на лінійні множники: . Доведіть формули Вієта: , .

б) Нехай кубічний чотиричлен розкладається на лінійні множники: . Доведіть, що .

в*) Виведіть аналогічні формули для многочлена довільного степеня, що розкладається на лінійні множники.

7. Нехай многочлен такий, що для всіх . Чи може містити непарні степені ?

8. Нехай значення многочленів і співпадають при різних значеннях змінної, і степені цих многочленів менші . Доведіть, що тоді .

9. Доведіть, що для будь-яких різних чисел і для будь-яких чисел існує єдиний многочлен степеня менше такий, що (цей многочлен називається інтерполяційним многочленом Лагранжа).

10. 1). Знайдіть суми всіх коефіцієнтів многочлена: а) , б) , в) .

2). Доведіть, що:

а) сума всіх коефіцієнтів многочлена обчислюється за формулою ;

б) сума коефіцієнтів многочлена , що стоять при парних (непарних) степенях x обчислюється за формулою: .

11. Якщо многочлен з цілими коефіцієнтами і , то

. Доведіть це.

12. При діленні многочлена P(x) на (x – 1), (x – 2), (x + 1) остачі відповідно рівні 3, 15, 0. Яку остачу отримаємо при діленні цього многочлена на ?

13. а) Нехай . Розв'язати рівняння .

б) Нехай . Розв'язати рівняння .

в) Чи існує такий многочлен другого степеня, що для будь-якого рівняння

, має рівно розв'язки?

14. Нехай – многочлен такий, що для кожного многочленна має місце функціональне співвідношення: . Знайти .

15. Знайдіть усі многочлени такі, щоб рівність

виконувалася для всіх x, y.

16. Знайдіть усі пари многочленів EMBED Equation.3 такі, щоб для всіх виконувалась рівність: .

17. Знайдіть усі многочлени , для яких справедлива тотожність:

Узагальніть цю задачу.

18. Знайдіть усі многочлени з дійсними коефіцієнтами, відмінними від константи, такі, що для довільного виконується рівність: .

19. Знайдіть усі многочлени з дійсними коефіцієнтами, для яких при всіх одночасно виконуються дві нерівності: ,

.

20. Знайти всі ненульові многочлени , які задовольняють тотожність

, .

21. Нехай – а) квадратний тричлен; б) многочлен парного степеня з невід'ємними коефіцієнтами. Доведіть нерівність: .

Запрошуємо до розгляду пошуково-дослідницьких задач

Нехай є . Розглянемо множини усіх многочленів виду

з дійсними коефіцієнтами. Яку підмножину множини

ви зможете визначити (охарактеризувати), щоб ?

Пропонуємо таку схему:

1). Аналіз структури задачі. Вираз, який потрібно отримати, складається, щонайменше, з суми квадратів коефіцієнтів заданого многочленна. Найбільш логічно його порівняти із сумою коефіцієнтів цього многочлена, оскільки така сума дорівнює .

2). Перетворення виразу. Для подальших досліджень представимо даний вираз у вигляді

.

3). Підхід до дослідження. Скористаємося відомою нерівністю між середнім квадратичним та середнім арифметичним для невід'ємних величин, а також особливостями абсолютних величин.

4). Розв'язання задачі.

Оскільки , то

. Отже, якщо або , то ,

причому рівність досягається тоді і тільки тоді, коли всі рівні між собою і дорівнюють

.

5). Відповідь. Шуканою підмножиною є, наприклад, множина всіх вказаних многочленів, для яких або .

6). Узагальнення. Міркуючи аналогічно, отримаємо нерівність

. Звідси при парному n

будемо мати , причому рівність досягається тоді і тільки тоді,

коли всі рівні між собою і дорівнюють , а знаки коефіцієнтів чергуються. Таким чином, до знайденої вище підмножини можна додати ще й многочлени, для яких

або . Якщо ж n парне, то при тих самих умовах отримуємо нерівність

. У такому випадку до додаються многочлени, для яких

.

Відзначимо ще й такий можливий напрям узагальнення даної задачі як виділення

підмножини , для якої , де , довільне дійсне число, більше одиниці. Скориставшись нерівністю

між середнім степеневим і середнім

арифметичним, легко отримати, міркуючи аналогічно, що у ролі S можна взяти множину заданих многочленів, для яких . Зокрема, при одержуємо дану задачу.

Зауважимо, що окремо для парних та непарних множину легко розширити за рахунок многочленів, для яких відповідно чи .

7). Висновок. Запропонований нами підхід до дослідження виявився вдалим, оскільки ми змогли виділити достатньо об'ємну підмножину Більше того, цією ж ідеєю ми змогли скористатися для розв'язування більш загальної задачі. Цікаво відзначити, що при цьому значення виявилися незалежними від числа Крім того, маючи додаткову інформацію про n, виділену підмножину ми змогли суттєво розширити. Цікаво, що і тут вибір значень також не залежить від

22.Дано многочлен з а) натуральними; б) цілими коефіцієнтами. Для кожного натурального числа позначимо суму цифр десяткового запису числа через . Доведіть існування числа, яке зустрічається в послідовності нескінченно багато разів.

23.Розглянемо послідовність многочленів , заданих формулами і для будь-якого натурального .

Доведіть рівності:

а) , де в лівій частині букв ;

б) , якщо не ціле;

в) , якщо ;

г) ;

д) ;

е) ;

є) Придумайте аналогічну рівність для послідовності многочленів, яка визначена таким же рекурентним співвідношенням, але яка починається не з многочленів і , а з многочленів і .

24.Нехай дано многочлен . Доведіть, що числа попарно взаємно прості.

25.Чи існує натуральне число і такий відмінний від константи многочлен з цілими коефіцієнтами, що кожні два з чисел взаємно прості?

26.Нехай – а) квадратний тричлен; б) многочлен парного степеня з невід'ємними коефіцієнтами. Доведіть нерівність: .

27.Побудуйте многочлен з раціональними коефіцієнтами, мінімальне значення якого дорівнює: а) ; б) ; в) доведіть, що не існує многочлена 4-го степеня, який задовольняв би умові пункту б); г) чи існують многочлени з цілими коефіцієнтами, один з яких задовольняє умові пункту а), а інший – умові пункту б)?

28.Знайдіть многочлен з цілими коефіцієнтами а) 4-го степеня, серед коренів якого є число ; б) 5-го степеня, серед коренів якого є число ; в) доведіть існування многочлена з цілими коефіцієнтами n-го степеня, серед коренів якого є число ; г) доведіть або спростуйте твердження: число є коренем деякого многочлена з цілими коефіцієнтами.

29.а) Всі коефіцієнти многочлена цілі, причому для будь-якого додатного числа x. Розглянемо послідовність, задану формулами . Доведіть рівність: .

б) Доведіть аналогічну рівність для послідовності Фібоначчі, що задається рівностями і .

30.Нехай , де . Доведіть, що многочлен не можна представити у вигляді добутку многочленів степеня більше 1 з цілими коефіцієнтами.

31.Чи існує такий квадратний тричлен з цілими коефіцієнтами, що десятковий запис числа складається тільки з одиниць, число записується теж тільки одиницями?

32. – многочлени, причому степені многочленів і різні і додатні.

а) Доведіть, що існує не більше одного многочлена степеня зі старшим коефіцієнтом 1 такого, що .

б) Знайдіть хоча б один відмінний від константи многочлен такий, що .

в) Знайдіть усі такі многочлени.

33.Позначимо через суму добутків по чисел від 1 до n. Наприклад, .

а) Знайдіть формули для і .

б) Доведіть, що є многочленом від степеня .

в) Вкажіть метод знаходження многочленів при та використайте його для знаходження многочленів і .

Запрошуємо до розгляду відкритих проблем. Цікаву проблему про значення многочленів запропанували О. Г. Кукуш та Р. П. Ушаков: Зафіксуємо натуральне число .

Означення. Многочлен з цілими коефіцієнтами називається m-подільним, якщо при будь-якому цілому k число ділиться на m без остачі.

Приклад. , , . Многочлен є також 6-подільним, а многочлен є m-подільним при та Легко бачити, що при будь-якому многочлен є m-подільним.

Теорема. Нехай є m – просте число, тоді є m-подільним.

Доведення. Якщо , , то , ділиться на m. Якщо ж , , то числа k та m взаємно прості і згідно з малою теоремою Ферма ділиться на m. Тут – це функція Ейлера, вона дорівнює кількості натуральних чисел, менших за m та взаємно простих з ним. Для простого m . Тому при

.

Пропонується проблема: для довільного натурального якомога точніше оцінити зверху та знизу найменший степінь m-подільного многочленна з взаємно простими коефіцієнтами (цілі числа називаються взаємно простими, якщо їх найбільший спільний дільник дорівнює 1).

Зокрема можна довести, що для простого числа m цей степінь рівний m.

Проблема С. Конягіна та деякі задачі. Розглянемо цикл задач, який містить одну нерозв’язану проблему, поставлену С. Конягіним. Цей цикл було запропоновано на шостій літній конференції Турніру міст, яка відбулась у 1994 р. в м. Білорєцькому.

Загальна задача (розв’язання невідоме). Нехай – довілъний многочлен з цілими коефіцієнтами. Розглянемо таку умову , яка залежить від : ділить

Гіпотеза. Для будь-якого многочлена існує нескінченно багато таких , що виконується.

Розгляньте такі задачі:

- Розв’язати задачу для таких частинних випадків

  а) ; б) ; в) ; г) .

- Якщо просте число ділить і , то ділить також .
- Якщо розкладається на прості множники, які менші , то

ділить

- Довести, що ділить .
- Довести гіпотезу для многочленів:

  1) ;

2) ;

3) .

Для яких ще многочленів Ви можете встановити справедливість гіпотези?

– («Обернена задача») Довести, що існує нескінченно багато таких натуральних , що умова не виконується.

Література для початкового ознайомлення з темою:

1.Энциклопедический словарь юного математика / Сост. А.П Савин. – М.: Педагогика, 1985. – 352с.

2.Курант Р. Что такое математика? / Р. Курант, Г. Роббинс – [3-е изд.] – М.: МЦНМО, 2001. – 586 с.

3.Вибрані питання елементарної математики / За редакцією А. В. Скорохода. «Вища школа», 1982. – 456с.

4.Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения / Пойа Д.: [пер. с англ.]. – [2-е изд., испр.]. – М.: Наука, 1975. – 463 с.

5.Введение в современную математику. Шиханович Ю.А. Начальные сведения. М., «Наука», 1965.

Література, рекомендована для фахової підготовки:

1. Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв’язання / В.М.Лейфура, І.М. Мітельман, В. М. Радченко, В. А. Ясінський. – Львів: Євросвіт, 1999. – 128 с.

2. В.М.Лейфура, І.М.Мітельман, В. А. Ясінський. Системи лінійних конгруенцій та китайська теорема про остачі в задачах математичних олімпіад / В.М.Лейфура та ін. // Наша школа. – 20093. – № 6. – С. 17–32.

3. Завало С. Т., Костарчук В. Н., Хацет Б. И. Алгебра і теорія чисел. – Ч. 2. – К.: Вища школа, 1980. – 408 с.

4. Проскуряков И. В. Числа и многочлены. – М.: АПН РСФСР, 1949.

5. Пойа Г. Задачи и теоремы из анализа. Т. 1, 2 / Г. Пойа, Г. Сеге. – М.: Наука, 1978. – 392с., 432с.

Додаток Ж.
ВІДКРИТІ ПРОБЛЕМИ ТА ГІПОТЕЗИ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Гіпотези, що стосуються **чисел:**

–чи існує елементарне доведення формули де пробігає множину простих чисел? (Вальстафф);

–відомо, що рівняння має лише два розв'язки в натуральних числах та , але доведення важке. Знайдіть елементарне доведення. (Морделл);

–чи має ще цілочисельні розв'язки рівняння крім ? (Морделл).

– Проблема Гольдбаха:

1). Кожне парне число, що більше 2, можна представити у вигляді суми двох простих чисел.

2). Кожне непарне число, що більше 5, можна представити у вигляді суми трьох простих чисел (доведена для всіх достатньо великих непарних чисел).

– Кількість простих чисел виду $n^2 + 1$ нескінченна.

– Кількість простих чисел виду (чисел Каллена) нескінченна.

– Кількість пар простих чисел виду $(p, 2p + 1)$ (прості числа Софі Жермен) нескінченна.

– Кількість простих чисел виду (чисел Ферма) скінченна.

– Кількість простих чисел Фібоначчі нескінченна.

– Не існує непарних досконалих чисел.

– Кількість досконалих чисел нескінченна.

– Не існує взаємно простих дружніх чисел.

– Будь-яка пара дружніх чисел має однакову парність.

– Числа $e + \pi$ і $e\pi$ – ірраціональні.

Геометрія (гіпотези та невирішені проблеми):

– Задача про 9 кругів. Не існує 9 кругів, таких, що кожні два перетинаються, і центр кожного круга лежить зовні інших кругів. (Є алгоритм перевірки, проте час його виконання занадто великий).

– Скільки точок загального положення повинно бути відмічено на площині, щоб серед них обов'язково знайшлись вершини опуклого шестикутника ?

– Чи в будь-якому многокутнику з дзеркальними всередині сторонами можна так розмістити лампочку, щоб він був освітлений увесь?

– Чи можна декількома кругами, дзеркальними зовні, які не перетинають один одного і навіть не дотикаються, загородити лампочку, що горить?

– Чи в будь-якому многокутнику з дзеркальними сторонами існує хоча б один замкнений шлях світлового променя?

– Чи існує многокутник, копіями якого можна покрити площину, але тільки неперіодичним чином?

– Чи може опуклий многогранник, яким можна заповнити весь простір, мати більше 38 граней?

– Якої мінімальної площі має бути фігура, якою можна покрити будь-який многокутник діаметром 1?

– Яка фігура мінімальної площі, якою можна покрити будь-яку фігуру периметром 1?

– Наскільки великою може бути площа *n*-кутника діаметром 1 при заданому *n*?

– Чи у будь-якого опуклого многогранника існує розгортка без самоперетинань?

– Розглянемо *n* точок, що не лежать на одній прямій. Чи обов'язково серед них знайдеться точка, через яку проходить не менше прямих, що з'єднують її з іншими n – 1 точками?

З області геометричних побудов: Добре відомо, що не кожна геометрична побудова може бути виконана з допомогою лінійки та циркуля. Класичними прикладами є задача про квадратуру круга (побудувати квадрат, рівновеликий даному кругу) та трисекцію кута (поділити даний кут на три рівні частини). Менш відомо, наприклад, що з допомогою лише циркуля та лінійки неможливо побудувати трикутник за трьома бісектрисами.

Проблема 1. Дано коло і точки та зовні нього. Знайти на колі точку таку, що трикутник має найменший периметр.

Проблема 2. Дано два кола, які не перетинаються, і точка , яка лежить зовні цих кіл. Знайти на колах точки і , такі, що периметр трикутника має найменше значення.

Проблема 3. Дано три кола, кожне з яких лежить зовні інших кіл. Знайти на колах точки , та (по одній на кожному колі), такі, що трикутник має найменший периметр. Дослідити, чи можна виконати відповідні побудови з допомогою тільки циркуля та лінійки? Якщо відповідь позитивна, то описати побудову.

З теорії розфарбувань:

–Яким є мінімальне число кольорів, у які можна так розфарбувати площину, щоб кінці будь-якого відрізка довжиною 1 були пофарбовані в різні кольори?

–Чи існує розфарбування точок простору в 14 кольорів, при якому кінці будь-якого відрізка довжиною 1 – одного кольору?

Задача 1. Множину цілочисельних точок площини розфарбовано двома кольорами. Довести, що знайдеться нескінченна однокольорова підмножина, симетрична відносно деякої точки площини. Множину цілочисельних точок площини легко розфарбувати трьома кольорами так, щоб не було нескінченних однокольорових підмножин, симетричних відносно точок площини.

Проблема 1. Чи можна множину цілочисельних точок простору розфарбувати трьома кольорами так, щоб не було нескінченних однокольорових підмножин, симетричних відносно деякої точки простору? Таке розфарбування у чотири кольори існує .

Проблема 2. Чи можна множину точок прямої з раціональними координатами розфарбувати трьома кольорами так, щоб не було нескінченних однокольорових підмножин, симетричних відносно деякої точки прямої? Таке розфарбування в чотири кольори існує.

Проблема 3. Нехай множину точок прямої розфарбовано в n кольорів. Чи існує однокольорова нескінченна підмножина, симетрична відносно деякої точки прямої? Це так для п $\leq$ 3.

Задача 2. Множину натуральних чисел розфарбовано скінченним числом кольорів. Довести, що знайдеться така нескінченна підмножина A, що всі точки a + b, де

– однокольорові.

Проблема Овінгса. Чи можна множину натуральних чисел розфарбувати двома кольорами так, що для довільної нескінченної підмножини A серед чисел a + b, де

(можливість a = b не виключається) знайдуться різнокольорові? Таке розфарбування трьома кольорами існує.

Додаток 3.
ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ, ЯКІ ПРОПОНУВАЛИСЬ НА КОНТРОЛЬНИХ РОБОТАХ З МАТЕМАТИКИ У КВІТНІ 2001 р. ДЛЯ ЧЛЕНІВ МАЛОЇ АКАДЕМІЇ НАУК

9-й клас

Перший рівень

1. Чи існують різні цифри, такі, що всі трицифрові числа, складені з них без повторень, є простими?

2. Кути трикутника утворюють арифметичну прогресію, – величина середнього з них. Знайти всі цілі розв'язки рівняння

3. Доведіть, що числа де – натуральне число, не є послідовними членами арифметичної прогресії.

Другий рівень

4. Довести нерівність: якщо

5. Відомо, що площа прямокутного трикутника дорівнює радіус вписаного кола – радіус описаного кола – Довести, що

6. В лабораторії є розчин кухонної солі чотирьох різних концентрацій. Якщо змішати перший, другий і третій розчини у відношенні то утвориться 15-ти процентний розчин. Другий, третій і четвертий розчини, які взято в рівній пропорції, дають при змішуванні 24-ох процентний розчин і, нарешті, розчин, утворений із рівних частин першого і другого розчинів, має концентрацію 10 %. Якою буде концентрація при змішуванні другого і четвертого розчинів у пропорції ?

Третій рівень

7. Знайти найбільше і найменше значення функції

8. Початок координат і точки перетину прямої визначають трикутник Знайти точку, для якої сума відстаней до вершин цього трикутника була б найменшою.

9. Знайти всі дійсні значення параметра при яких з нерівності випливає нерівність

10-й клас

Перший рівень

1. За допомогою циркуля та лінійки побудувати ГМТ, з яких даний відрізок видно під даним кутом

2. Які числа виду 222 … 22 можна подати у вигляді або суми, або різниці квадратів натуральних чисел?

3. Розв'язати нерівність для всіх дійсних значень

Другий рівень

4. Обчислити суму де

5. У площині трикутника знайти точку, суму квадратів відстаней якої до вершин трикутника є найменшою.

Третій рівень

7. Знайти найбільше значення функції

8. При якому дійсному значенні розв’язком нерівності є відрізок довжиною ?

9. У даному трикутнику заштрихувати ГМТ таких, щоб площа трикутника була більшою від площі трикутника Відповідь обґрунтувати.

11-й клас

Перший рівень

1. Довести, що куб гіпотенузи прямокутного трикутника більший від суми кубів його катетів.
2. Знайти всі значення параметра при яких обидва корені квадратного рівняння дійсні і належать проміжку
3. Спростити вираз при

Другий рівень

4. Куб вписано в піраміду, утворену координатними площинами і площиною EMBED Equation.3 так, що одна з вершин куба належить площині а три його суміжні грані – координатним площинам. Знайти площу поверхні куба .
5. Розв’язати рівняння:
6. Основа піраміди – паралелограм, сторони якого 16 см і 22 см. Відстань від вершини піраміди до центра основи 4 см. Знайдіть довжини бічних ребер піраміди, знаючи, що вони виражаються послідовними непарними числами.

Третій рівень

7. У сферу радіуса вписано конус найбільшого з можливих об’єму. Визначте площу поверхні цього конуса.
8. Знайти найбільше і найменше значення виразу
9. Відомо, що функція задовольняє умові: при будь-якому дійсному де – фіксоване дійсне число. Доведіть, що функція – періодична.