НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.П. ДРАГОМАНОВА

на правах рукописи

Первун Ольга Евгеньевна

УДК 378.094.016:51

ПОИСКОВО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАЧИ КАК СРЕДСТВО РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ УЧАЩИХСЯ КЛАССОВ С УГЛУБЛЕННЫМ ИЗУЧЕНИЕМ МАТЕМАТИКИ

13.00.02 – теория и методика обучения (математика)

диссертация
на соискание научной степени
кандидата педагогических наук

Научный руководитель –
ИГНАТЕНКО НИКОЛАЙ ЯКОВЛЕВИЧ
доктор педагогических наук, профессор,
Заслуженный работник образования
Украины

Киев – 2009

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Современная социокультурная ситуация характеризуется все более возрастающей ролью образования. В условиях вхождения Украины в международное и Европейское образовательное сообщество, внедрения в жизнь новой образовательной парадигмы, все более актуальным становятся вопросы улучшения качества образования, внедрения в учебный процесс личностноориентированных педагогических технологий, характерными особенностями которых являются обучение и воспитание личности с максимально возможной индивидуализацией, созданием условий ее саморазвития и самообразования, личности способной к высокой профессиональной мобильности и быстрой адаптации в новых условиях. Сегодня перед украинской школой стоит важнейшая задача формирования новой системы универсальных знаний, умений и навыков, а также опыта самостоятельной деятельности и личной ответственности школьников, то есть современных ключевых компетенций, необходимых для динамичной адаптации человека к обществу и полноценного функционирования в нем. И это не случайно.

Обществу нужна компетентная, творческая личность, способна активно участвовать в развитии производства, экономики, науки, культуры. В условиях перестройки системы образования, воссоздания и укрепления интеллектуального потенциала нации, выхода отечественной науки и техники на мировой уровень, интеграции в мировую систему образования, перехода к рыночным отношениям и конкуренции любой продукции, в том числе и интеллектуальной, особенное значение приобретает проблема обеспечения надлежащего уровня математической подготовки подрастающего поколения. Это связано с тем, что математика имеет широкие возможности для интеллектуального развития личности, в первую очередь, развития логического мышления, пространственных представлений и воображения, алгоритмической и информационной культуры, формирование умений устанавливать причинно-следственные связи, обосновывать утверждение, моделировать ситуации и др. Осознание необходимости и возможностей процесса не только математического образования, а образования с помощью математики, предполагающего общеинтеллектуальное и общекультурное развитие человека, строящегося на уважении к интересам, склонностям и способностям обучающегося, пред ставляется перспективной линией развития математического образования. Математика является основой изучения физики, химии, астрономии, биоло гии, а также технических дисциплин и экономики. Современные потребности развития Украины требуют перехода на новую, более гибкую, стратегию математического образования, чем существующая. Именно поэтому на первый план школьного математического образования сегодня выступают вопросы выявления и развития математических способностей учеников, максимального удовлетворения их интересов и потребностей, развития учебно-познавательной активности и творческой самостоятельности.

Современные психолого-педагогические и методические исследования доказывают возможность развития математических способностей ребенка при специально организованном проектировании системы педагогических воздействий на развитие общеинтеллектуальных и математических способностей.

Способности как стойкие индивидуальные психические свойства личности являются необходимым внутренним условием ее успешной деятельности. Они сказываются на том, как человеческий индивид учится, приобретает определенные знания, умения и навыки, осваивает разные отрасли деятельности, включается в творческую жизнь общества. Каждая способность, в том числе и математическая, составляет сложную систему качеств личности, в которой соединяются отдельные психические свойства (чувствительность, наблюдательность, память, воображение, мышление).

Общие аспекты теории способностей разрабатывались в трудах психологов Б.Г. Ананьева, Т.И. Артемьевой, Л.А. Венгера, Л.С. Выготского, Э.А.Голубевой, Л.А. Данилевич, В.Н. Дружинина, А.И. Кагальняк, З.И. Кал мыковой, А.Г. Ковалева, В.А. Крутецкого, Н.С. Лейтеса, А.Н. Леонтьева, В.Н . Мясищева, В.И. Панова, К.К. Платонова, С.Л. Рубинштейна, Ю.А.Самарина , Н.Ф. Талызиной, Б.М. Теплова, Г.А. Шулдик, В.Д. Шадрикова, Б.А. Якимчука и др.

Формирование современных компетенций находится в тесной взаимосвязи с развитием разносторонних способностей учащихся, в том числе и математических способностей. Под математической компетентностью понимается системное свойство личности субъекта, характеризующее его глубокую осведомленность в предметной области знаний, личностный опыт субъекта, нацеленного на перспективность в работе, открытого к динамичному обогащению, способного достигать значимых результатов и качества в математической деятельности [114].

Для решения практических задач по выявлению и развитию математических способностей учащихся необходимо знать их специфику, механизмы и источники.

Проблемам выявления и развития способностей, в целом, и математических способностей учащихся, в частности, посвящен ряд психолого-педагогических и методических исследований.

Анализ психолого-педагогической и методической литературы свидетельствует о том, что отдельные аспекты развития математических способностей (выявление математических способностей учеников, определение структуры математических способностей, возможности формирования математических способностей) освещены в роботах Б.Д. Богоявленской, О.Н. Лука, Л.С. Вигодского, А.Н. Леонтьева, Н.А. Менчинской, С.Л. Рубинштейна, О.Н.Тихомирова, Л.В. Занкова, Н.Я. Игнатенко, В.В. Давидова, В.А. Крутецкого, Н.Ф. Тализиной, А.М. Матюшкина, М.М. Фридмана, З.И.Слепкань, Е.И. Скафы, Ю.Н. Кулюткина, Б.П. Ердниева, В.М. Осинской, Ю.М. Колягина, В.А. Ясинского, О.С.

Чашечниковой, В.А. Швеца и др.

Исследованием проблемы математических способностей занимались такие зарубежные психологи, как В. Бетц, А. Бинэ, А. Блэкуелл, И. Верделин, А. Кеймерон, Г. Ревеш, А. Роджерс, Э. Торндайк, и др.

Анализу различных аспектов проблемы математических способностей посвятили диссертационные исследования А.А. Анелаускене, Э.Ж. Гингулис, З.П. Горельченко, И.В. Дубровина, И.И. Дырченко, Ю.П. Козловская, А.Г. Колинец, О.С. Куликова, Н.Я. Игнатенко, А.К. Насыбуллина, О.С. Чашечникова, С.И. Шапиро и др.

В исследовании А.А. Анелаускене [8] выделены основные типы математических способностей учащихся 9-11 классов и рассмотрены возможные пути индивидуализации обучения математике. Анализу компонентов структуры математических способностей посвящены работы О. С. Чашечниковой [210] (для основной школы), З.П. Горельченко [58], С.И. Шапиро [215] (для старшего школьного возраста). В исследованиях А.К. Насыбуллиной [158] разработаны методы диагностики математических способностей школьников 5-6 классов. В диссертационном исследовании И. И. Дырченко [78] анализируется роль математических кружков в развитии математических способностей учащихся 7-8 классов. Диссертация Э.Ж. Гингулиса [48] посвящена методике развития математических способностей учащихся 6(7)-8(9) классов в процессе решения целесообразно подобранных геометрических задач. О.С.Куликова [130] исследовала возможности развития у учащихся основной школы способностей к математике в процессе изучения конструктивной геометрии.

Основным видом математической деятельности школьников является решение задач. Именно в процессе специальным образом организованного решения задач и происходит развитие математических способностей учащихся.

Проблеме обучения математике и развития учащихся через задачи посвящены работы М.И. Бурды, В.А. Гусева, Ю.М. Колягина, В.И. Крупича, Г.И. Саранцева, Л.М. Фридмана, В.А. Швеца, П.М. Эрдниева и др.

М.И. Бурда [29], Э.Г. Готман [61], З.А. Скопец [61], А.А. Хамракулов [206] и др. рассматривают решение геометрических задач несколькими способами как важнейшее средство развития математического мышления учащихся.

Возможности использования заданий на самостоятельное составление учащимися задач для активизации процесса мыслительной деятельности учеников в начальной и средней школе рассматривались в ряде исследований . Вопросам обучения школьников составлению задач в начальной школе и в 5 -6 классах средней школы уделено внимание в работах Ю.А. Горяева [60], Е. Н.Тальяновой [193], Н.И. Чиканцевой [211], П.М. Эрдниева [227], О.П. Эрдниева [226] и др. Методическим проблемам обучения школьников составлению геометрических задач посвящены исследования М.И. Бурды [29], Н.Я. Игнатенко [92], Е.С. Канина [100], А.Я. Цукаря [209], Э.А. Ясинового [230] и др.

В работах З.И. Слепкань [187], Э.А. Страчевского [191], А.Ю. Эвнина [225], Э.А. Ясинового [230] и др. рассматривались вопросы использования творческих заданий на составление задач на уроках алгебры в старших классах.

Проблема исследовательской деятельности школьников имеет богатую историю. С момента появления в педагогике исследовательского метода основное внимание ей уделялось в естественнонаучных и гуманитарных областях (Ю.К. Бабанский, М.И. Бойцов, Б.Е. Райков, В.Ю. Ульянинский, К. П.Ягодовский, и др.)

Общие аспекты формирования различных приемов математической исследовательской работы учащихся затронуты в трудах ученых-математиков: В.И. Андреева [6], Б.В. Гнеденко [53], А.И. Маркушевича [140], А.Н. Колмогорова [113], Т.В. Кудрявцева [129], Д. Пойа [173] и др.

Немало диссертационных работ посвящено вопросам активизации исследовательской деятельности в процессе обучения математике, это работы Н.И. Антонечко [9], Е.В. Барановой [13], Н.Д. Волковой [37], К.В. Власенко [36], Ракова С.А. [178] и др.

Вопросы, касающиеся возможностей применения исследовательских математических заданий для активизации познавательной деятельности учащихся, нашли отражение в работах Ю.А. Горяева, Э.Г. Готмана, Н.Я. Игнатенко, Е.С. Канина, З.А. Скопеца, Э.А. Страчевского, Е.Н. Тальяновой, А.А.Хамракулова, А.Я. Цукаря, Н.И. Чиканцевой, А.Ю. Эвнина, П.М. Эрдниева, О.П.Эрдниева, и др.

Анализ содержания математического образования в средней школе показывает, что особое место среди всех математических знаний, которыми должны овладеть школьники, занимают поисково-исследовательские вопро сы. Их изучение оказывает положительное влияние на качественное усвоение учащимися школьных курсов алгебры и начал анализа и геометрии, способствует расширению и углублению поисково-исследовательских представлений учащихся, развитию математических способностей, воспитанию устойчивого интереса к занятиям математикой.

Невзирая на имеющиеся весомые наработки научных работников и практиков в этой сфере, по нашему мнению, нуждаются в уточнении структура математических способностей старшеклассников и обоснование их дидактической сути. Не до конца определено содержание математического материала, на основе которого целесообразно формировать и развивать математические способности. Анализ школьной практики показывает, что проблема формирования математических способностей учеников старшей школы не нашла полного решения, поскольку существующие учебники и учебные пособия лишь частично адаптированы к решению соответствующих вопросов. В существующих методических разработках лишь частично рассматриваются вопросы развития математических способностей.

Проведенное нами анкетирование учителей математики старшей общеобразовательной школы установило, что подавляющая часть учителей (75%) не владеют теоретико-методическим минимумом относительно формирования математических способностей учеников в учебном процессе, практически не учитываются индивидуальные математические способности школьников в процессе обучения их математике. Тестирование школьников, проведенное во время этого же эксперимента, выявило в классах три группы учеников, которые существенно отличаются друг от друга уровнем математических способностей. Поэтому возникает потребность в развитии математических способностей посредством поисково-исследовательских задач. Все вышесказанное определило выбор темы нашего диссертационного исследования и подтвердило ***актуальность темы.***

Связь работы с научными программами, планами, темами.

Избранное направление диссертационного исследования связано с те мой научно-исследовательской работы кафедры математики и информатики Республиканского высшего учебного заведения «Крымский гуманитарный университет» (г. Ялта)» «Активизация учебно-познавательной деятельности студентов при изучении математических дисциплин».

Тема диссертационного исследования утверждена ученым советом РВУЗ «Крымский гуманитарный университет» (г. Ялта)» (протокол № 2 от 23 февраля 2005 г.), а также решением бюро Совета по координации научных исследований в области педагогики и психологии в Украине (протокол № 6 от 14. 06. 2005 г.)

***Цель исследования* –** в соответствии с новой парадигмой образования разработать теоретически обоснованную содержательно-методическую ли нию поисково-исследовательских задач с целью развития математических способностей учащихся классов с углубленным изучением математики и экспериментально проверить ее эффективность.

Для достижения поставленной цели с учетом объекта, предмета и проблемы исследования, необходимо было решить следующие ***задачи:***

1. Проанализировать состояние разработки проблемы формирования и развития математических способностей учеников старшей школы в психолого-педагогической и методической литературе.

2. Уточнить содержание понятия «математические способности», принципы и критерии выявления уровня математических способностей учеников старшей школы; установить психолого-педагогические, дидактические предпосылки формирования и развития математических способностей учеников старшей школы посредством поисково-исследовательских задач.

3. Разработать содержательный и процессуальный компоненты методики обучения решению и составлению учащимися поисково-исследовательских задач.

4. Определить основные формы учебной работы при обучении учащихся решению поисково-исследовательским задачам, направленных на развитие математических способностей.

5. Разработать блоки заданий на решение поисково-исследовательских задач, позволяющие эффективно развивать основные компоненты математических способностей, а также методические рекомендации по их применению.

6. Экспериментально проверить результативность разработанной методики обучения решению поисково-исследовательских задач.

Объект исследования **–** процесс обучения алгебре и началам анализа и геометрии учащихся классов с углубленным изучением математики.

Предмет исследования – формирование и развитие математических способностей учащихся классов с углубленным изучением математики посредством поисково-исследовательских задач.

Методы исследования. Для достижения цели, решения поставленных задач, в процессе работы использовался комплекс методов научно-педагогического исследования, который дал возможность рассмотреть про цесс систематизации знаний как учебную систему, определить категорийно-понятийный аппарат психологии, логики, дидактики соответственно предмету исследования.

Среди теоретических методов больше всего применялись: анализ и синтез (1.1-2.4 (здесь и дальше – подразделы диссертации)); индукция и дедукция (1.1-1.4); сравнение (1.1, 1.2,); аналогия (2.2.1, 2.2.2), абстрагирование, идеализация и теоретическое моделирование (1.1-1.4, 2.3, 2. 4), классификация, систематизация и обобщение (1.1-1.4, 2.1-2.4), а также статистические и математические методы (2.4).

Основным среди эмпирических методов стал педагогический эксперимент (2.4), который проводился в три этапа: констатирующий, поисково-формирующий и контрольный. На каждом из этих этапов применялся комплекс вспомогательных методов: целенаправленные наблюдения, беседы, устные и письменные опросы, анкетирование, тестирование, анализ полученных данных и их обработка, компьютерное, в частности.

Теоретическую основу исследования составляют научные труды отечественных и зарубежных авторов, посвященные основным положениям теории познания и концепции учебной деятельности (Л.С. Вигодский, А.Н. Леонтьев, В.А. Крутецкий, С.Л. Рубинштейн и др.), положения о формировании математических способностей учащихся (В. Бетц, Н.Я. Игнатенко, А. Киймерон, В.А.Крутецкий, З.И. Слепкань, Э. Торндайк и др.), научные основы современных образовательных технологий (М.И. Бурда, Н.Я . Игнатенко, З.И.Слепкань, В.А. Швец и др.), современная концепция школьного математического образования (Г.М. Литвиненко, З.И. Слепкань, М.И. Шкиль), Закон Украины «Об образовании», Государственная национальная программа «Образование» (Украина XXI).

Научная новизна исследования заключается в таких положениях: впервые на основе психолого-педагогической литературы разработаны и теоретически обоснованы методические основы развития математических способностей учащихся классов с углубленным изучением математики посредством поисково-исследовательских задач (с помощью заданий на решение задач несколькими способами и заданий на самостоятельное составление учащимися задач), развивающих темы исходных задач; определены основные формы учебной работы при обучении учащихся решению поисково-исследовательским задачам, направленных на развитие математических способностей.

Теоретическая значимость полученных результатов:

- теоретически обоснована возможность развития математических способностей учащихся классов с углубленным изучением математики посредством поисково-исследовательских задач;
- определено влияние этапов решения поисково-исследовательских задач на развитие математических способностей учащихся классов с углубленным изучением математики.

Практическая значимость полученных результатов:

- разработана методика обучения решению поисково-исследовательских задач по алгебре и началам анализа и геометрии учащихся классов с углубленным изучением математики;
- разработаны различные приемы организации учебных исследований при решении поисково-исследовательских задач, различающихся формой работы, местом в учебном процессе, а также структурой самих исследовательских заданий;
- разработаны блоки заданий на решение поисково-исследовательских задач, позволяющие эффективно развивать основные

компоненты математических способностей.

Все вышеуказанные материалы могут быть использованы при разработке учебно-методического обеспечения по математике для старшей школы, в практической работе учителя математики. Данные материалы также будут полезны преподавателям педвузов в их практической деятельности по формированию у будущих учителей готовности к развитию математических способностей школьников.

Исследование осуществлялось поэтапно в 2004-2007 гг.

На первом этапе осуществлялись изучение и анализ психолого-педагогической и методической литературы по проблеме развития математических способностей учащихся. Целью этого изучения и анализа являлось выявление предпосылок для разработки теоретических основ проблемы исследования. Изучалось состояние исследуемой проблемы в школьной практике, были выявлены имеющиеся трудности в реализации различных путей развития математических способностей учащихся при изучении ими поисково-исследовательского материала, проводился констатирующий эксперимент.

На втором этапе исследования разрабатывалось содержание блоков заданий на решение несколькими способами поисково-исследовательских задач, а также блоков заданий на составление задач, развивающих темы исходных поисково-исследовательских задач, разрабатывались методические рекомендации для использования их в практике школьного обучения с целью развития математических способностей учащихся. На этом же этапе прово дился поисковый эксперимент и был проведен анализ его результатов.

На третьем этапе проводился обучающий эксперимент с целью проверки эффективности предлагаемой методики развития математических способностей учащихся. Обработка полученных в ходе эксперимента материалов проводилась методами одномерного статистического анализа.

Личный вклад соискателя состоит в разработке и практической проверке организации развития математических способностей посредством поисково-исследовательских задач учащихся классов с углубленным изучением математики.

Вероятность полученных научных результатов и выводов исследования обеспечивается методологическим обоснованием его теоретических положений, соответствием методов исследования его целям и задачам, репрезетивностью выбора объектов исследования, количественным и качественным анализом большого объема теоретического и эмпирического материала.

Апробация результатов диссертации. Основные положения и результаты исследования были изложены автором и обсуждались на заседаниях кафедры математики и информатики РВУЗ «Крымский гуманитарный университет» (г. Ялта), на Всеукраинской научно-методической конференции «Проблемы математического образования» (Черкассы, 2007), докладывались и получили одобрение на заседаниях Всеукраинского научно-методического семинара НПУ им. М.П. Драгоманова «Актуальные проблемы методики обучения математики» (Киев , 2007), на Международной научно-практической конференции «Математическое образование в Украине: прошлое, настоящее, будущее» (Киев, 2007).

Разработанная в диссертации методика развития математических способностей посредством поисково-исследовательских задач в классах с углубленным изучением математики была апробирована в школах №12, 15 г. Чернигова; в школах № 3, 16 г. Нежина, в Черниговском областном институте последипломного педагогического образования (справка № 01-12/407 от 18.09.2007 г.), г. Ялты № 1; 6; 7; 9 (справка № 1259 от 18.09.2007 г .).

Публикации. Результаты диссертационного исследования отображены в 7 публикациях. Среди них 1 – методическое пособие, 3 – в специальных научных изданиях, 1 статья в журнале «Математика в школе», 1 статья в материалах конференции, 1 – тезисы международной конференции.

Структура диссертации. Диссертация состоит из вступления, двух разделов, с выводами к каждому разделу, общих выводов, списка использованных источников (230 наименований) объемом 182 страниц, содержит 25 таблиц, 3 приложения, 33 рисунка. Общий объем диссертация – 224 страниц.

РАЗДЕЛ 1
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ УЧАЩИХСЯ

1.1. Проблема развития математических способностей учащихся в психолого-педагогической литературе

В условиях происходящих кардинальных социально-экономических, политических и культурных изменений в обществе предъявляются все более высокие требования к образованию подрастающего поколения. Характерной чертой всех преобразований в области образования является утверждение отношения к личности школьника как субъекту образовательного процесса, которое предполагает создание социальных, психолого-педагогических и методических условий для развития индивидуальных способностей ребенка.

В возрождении интеллектуального, творческого и духовного потенциала страны особую роль играет математическая подготовка, которая предполагает не только формирование математических знаний и умений, но и развитие математических способностей учащихся.

Усиление внимания к проблемам развития индивидуальных способностей ребенка, в том числе и математических способностей, требует дальнейшей разработки механизмов их развития.

Разработка проблемы развития способностей невозможна без глубокого и разностороннего анализа теоретических подходов к раскрытию отдельных сторон, составляющих ее сущность. Анализ психолого-педагогической литературы позволяет выделить три аспекта данной проблемы: социальный, психолого-педагогический и методический.

Социальный аспект развития способностей, в целом, и математических способностей, в частности, связан с сохранением и повышением интеллектуального потенциала подрастающего поколения, развития творческого мышления, развития индивидуальных способностей.

Психологический аспект проблемы способностей, в целом, и математических способностей, в частности, состоит в необходимости рассмотрения внутренних механизмов становления способной личности, структуры математических способностей, особенностей их диагностики и развития.

С педагогической точки зрения проблема способностей заключается в установлении условий, позволяющих развивать способности ребенка, в целом, и математические способности, в частности.

Методические аспекты разработки проблемы способностей состоят в определении конкретных путей их развития в процессе изучения того или иного предмета или раздела курса.

Анализ проблемы развития способностей, в целом, и математических, в частности, в исторической ретроспективе свидетельствует о том, что идея развития разносторонних способностей учащихся в процессе обучения неод нократно обсуждалась в истории отечественного образования. Повышенное внимание к этой проблеме стали проявлять в период становления классического образования в нашей стране в середине XIX века. Обучение математике рассматривалось как основное средство развития формальной стороны интеллекта. Все более актуальной эта идея становится в начале XX века в связи с введением специализации в старших классах школы (1911-1914 гг.). Дальнейшее развитие она получает уже в конце 50-х – начале 60-х годов в связи с внедрением в практику средней школы различных форм дифференциации обучения. В конце 80-х – начале 90-х годов двадцатого века – ориентация на дифференциацию находит свое дальнейшее развитие. В этот период массово создаются новые типы учебных заведений: гимназии, лицеи, классы с углубленным изучением отдельных предметов, профильные классы по различным направлениям. Особое место среди них занимают учебные заведения и классы, ориентированные на повышенную математическую подготовку.

Становление и развитие идей дифференциации процесса обучения способствовало усилению внимания учителей к учету индивидуальных возможностей учащихся и развитию их способностей, в целом, и математических способностей, в частности.

Прежде чем говорить о развитии способностей учащихся в психолого-педагогическом аспекте, следует внести ясность в категориальный аппарат. Требуется уточнить содержание таких понятий как «способности», «матема тические способности», «структура математических способностей», и некоторых других, имеющих существенное значение для раскрытия темы нашего исследования.

Теория способностей создавалась трудом таких ученых, как Б.Г. Ананьев, Т.И. Артемьева, Л.А. Венгер, Л.С. Выготский, Э.А. Голубева, В.Н. Дружинин, З.И. Калмыкова, А.Г. Ковалев, В.А. Крутецкий, Н.С. Лейтес, А.Н. Леонтьев, В.Н. Мясщцев, В.И. Панов, К.К. Платонов, С.Л. Рубинштейн, Ю.А. Самарин, Н.Ф. Талызина, Б.М. Теплов, В.Д. Шадриков и др.

В настоящее время в психологии сложились два основных подхода к изучению способностей: личностно-деятельностный и функционально-генетический.

Личностно-деятельностный подход к изучению способностей предпо лагает понимание способностей как определенных особенностей личности, проявляющихся и развивающихся в соответствующей деятельности. Исходя из этого положения, представителями данного научного направления и определяются способности.

С.Л. Рубинштейн под способностями понимает «свойства или качества , делающие человека пригодным к успешному выполнению какого-либо из видов общественно-полезной деятельности, сложившегося в ходе общест венно-исторического развития» [180, С. 63]. Примерно под таким же углом зрения определяет способности и Н.С. Лейтес [137].

По мнению Б.М. Теплова, понятие «способности» характеризуют три признака:

Во-первых, под способностями разумеются индивидуально-психологические особенности, отличающие одного человека от другого ...

Во-вторых, способностями называют не всякие вообще индивидуальные особенности, а лишь такие, которые имеют отношение к успешности выполнения какой-либо деятельности или многих деятельностей .

В-третьих, понятие «способность» не сводится к тем знаниям, навыкам или умениям, которые уже выработаны у данного человека» [195, С. 16].

А.Г. Ковалевым и В.Н. Мясищевым способности определяются как «... выражение соответствия между требованиями деятельности и комплексом нервно-психических свойств человека, обеспечивающим высокую количественно-качественную продуктивность и рост его деятельности, которое проявляется в высокой и быстро растущей (по сравнению со средним человеком) умелости овладевать этой деятельностью и владеть ею» [108, С. 60]. В этом определении сделан акцент на то, что способность не простое свойство, а целый комплекс свойств, который организуется и развивается в деятельности.

Некоторые психологи, к числу которых принадлежит К.К.Платонов, рассматривают способности как одну из подструктур личности, накладываемую вместе с другой подструктурой – характером – на четыре рядоположенные подструктуры: направленности и отношений, опыта или индивидуальной культуры, форм психического отражения, биопсихических качеств личности [170, С. 137-139]. При таком подходе под способностями понимают «...совокупность («структуру») достаточно стойких, хотя, конечно, и изменяющихся индивидуальных особенностей личности, которая определяет успешность обучения данной деятельности, выполнения ее и совершенствования в ней» [170, С. 41].

Представители функционально-генетического подхода к изучению способностей, например, В.Д. Шадриков и др., состав способностей рассматривают с позиции функции и функциональной системы, а возникновение способностей – с позиции врожденности.

По мнению В.Д. Шадрикова, способности – это «свойства функциональных систем, реализующих отдельные психические функции, которые имеют индивидуальную меру выраженности, проявляющуюся в успешности и качественном своеобразии освоения и реализации деятельности» [214, С.178].

При этом функция понимается как работа целостной функциональной системы. Таким образом, способности могут быть определены как «характеристики продуктивности функциональных систем, реализующих тот или иной психический процесс (восприятие, память, мышление и т.д.)» [213, С .19].

Психологами установлено, что способности – это динамическое образование. Они формируются и развиваются, а, значит, и обнаруживаются только в процессе соответствующей деятельности, то есть специальным об разом организованная соответствующая деятельность выступает в качестве одного из внешних условий развития и выявления способностей. Только наблюдая человека в некотором виде деятельности, можно судить о наличии или отсутствии у него способностей к этой деятельности.

Развитие способностей тесным образом связано с развитием эмоциональной, волевой сторон личности, а также с развитием характера [3]. Проблемы развития способностей тесным образом взаимосвязаны с проблемами развития интереса к различным видам деятельности. Именно на основе длительных, глубоких, устойчивых интересов к конкретному предмету воспитываются склонности и развиваются способности [34], [127], [170], [213] и др.

Как уже выше отмечалась, способности формируются и развиваются в той деятельности, в которой они находят себе применение. Однако не всякая деятельность, в которую включают ребенка, автоматически формирует и развивает способности к ней.

Для того чтобы деятельность положительно влияла на развитие способностей, она должна удовлетворять некоторым условиям, среди которых будем выделять следующие положения:

1. Деятельность должна вызывать у ребенка сильные и устойчивые положительные эмоции, удовольствие. Ребенок должен испытывать чувство радостного удовлетворения от деятельности, тогда у него возникает стремление по собственной инициативе, без принуждения заниматься ею.

2. Поскольку достичь успехов в деятельности можно лишь в случае наличия некоторых способностей к этой конкретной деятельности в сочетании с глубоким интересом и устойчивой склонностью к ней, учителю следует активно развивать интересы детей, стремиться к тому, чтобы эти интересы не носили поверхностного характера, а были серьезными, глубокими, устойчивыми и действительными.

3. В деятельность ребенка необходимо включать различные творческие задания.

4. Важно организовать деятельность ребенка так, чтобы он преследовал цели, всегда немного превосходящие его наличные возможности, уже достигнутый им уровень выполнения деятельности [39, С. 386]. Особенно нуждаются во все более усложняющихся и разнообразных творческих заданиях дети с уже определившимися способностями.

Однако для формирования и развития способностей недостаточно наличия только внешних условий, важны также и особые внутренние условия, то есть определенные задатки.

В качестве *задатков* рядом ученых рассматриваются следующие физиологические особенности: некоторые врожденные особенности зрительного и слухового анализаторов [203]; типологические свойства нервной системы, от которых зависит быстрота образования временных нервных связей, их прочность, сила сосредоточенного внимания, выносливость нервной системы, умственная работоспособность [139], [143]; уровень развития и соотношение первой и второй сигнальных систем [128]; индивидуальные особенности строения отдельных участков коры головного мозга, а также характеристики общей и частных конституций [56].

Следует отметить, что задатки не заключают в себе способностей и не гарантируют их развития. Задатки – это только одно из условий формирования и развития способностей [223, С. 241].

Роль задатков в развитии способностей человека оценивается психологами в зависимости от того, о каком уровне их развития идет речь: обычном или выдающемся. Так, например, В.А. Крутецкий указывал на то, что каждый нормальный человек обладает достаточными задатками для усвоения школьного курса математики, но далеко не всякий имеет задатки стать ученым-математиком [127, С. 77]. Этой же позиции придерживался и академик А.Н. Колмогоров [114].

Любая деятельность требует от человека наличия не одной способности, а ряда взаимосвязанных способностей. В психологической литературе отмечается, что недостаток, слабое развитие какой-либо одной частной способности могут быть компенсированы за счет усиленного развития других [108], [195]. Это свойство компенсации способностей дает довольно широкие возможности для овладения различными видами деятельности, выбора профессии.

Психологи Л.А. Венгер [34], А.Г. Ковалев [108], В.А. Крутецкий [127], В.Н. Мясищев [108], К.К. Платонов [170], Б.М. Теплов [195] и др. подчеркивают тесную и неразрывную связь способностей со знаниями, умениями, навыками. С одной стороны, способности зависят от знаний, умений и навыков: в процессе их приобретения и развиваются способности. С другой стороны, знания, умения и навыки зависят от способностей: процесс приобретения знаний, умений и навыков зависит наряду с другими условиями от индивидуальных психологических особенностей учащегося [108, С. 105]. Способности позволяют быстрее, легче, прочнее и глубже овладеть соответствующими знаниями, умениями и навыками. Так в процессе приобретения математических знаний, умений и навыков развиваются такие способности, как математическая память, способность к геометрическим пространственным представлениям, способность к логическому мышлению и т.д. А при хорошо развитых математических способностях овладение знаниями, умениями и навыками в области математики происходит легче, быстрее и успешнее.

В психолого-педагогической литературе выделяются способности разного уровня – учебные и творческие. При этом *учебные способности* связываются с усвоением уже известных способов выполнения деятельности, приобретением знаний, умений и навыков, а *творческие способности* - с созданием нового, оригинального продукта, с нахождением новых способов выполнения деятельности. С этой точки зрения различают, например, способности к усвоению, изучению математики, а также творческие математические способности [127].

Заметим, что нет серьезных оснований резко обособлять учебные и творческие способности, ибо учебная деятельность обычно включает в себя и элементы субъективного творчества.

Принято рассматривать также общие умственные, специальные и практические способности.

Общие *умственные способности* – это способности, которые необходимы для выполнения не какой-то одной, а многих видов деятельности. К ним относятся, например, такие качества ума, как активность, критичность, систематичность, быстрота умственной ориентации , высокий уровень аналитико-синтетической деятельности, сосредоточенное внимание.

Специальные способности – это способности, которые необходимы для успешного выполнения какой-нибудь одной определенной деятельности. К специальным способностям относятся, например, математические, литературные, музыкальные способности. Эти способности также представляют собой единство отдельных частных способностей.

К *практическим способностям* относят конструктивно-технические, организаторские, педагогические способности.

Целью изложения всего предыдущего материала была подготовка к пониманию интересующего нас конкретного вида специальных способностей – математических способностей.

В исследование математических способностей внесли свой вклад и та кие зарубежные представители психологической науки, как В. Бетц, А. Бинэ, А. Блэкуелл, К. Браун, А. Венцл, И. Верделин, Ф. Джонсон, А. Кеймерон, Д. Ли, Г. Ревеш, А. Роджерс, Э. Торндайк, В. Хаекер, Г. Хэмли, Т. Циген и др., и такие выдающиеся математики, как А. Пуанкаре и Ж. Адамар. Известный вклад в теорию математических способностей внес один из крупнейших психологов двадцатого столетия Ж. Пиаже.

Анализ психолого-педагогической литературы показал, что попытки дать определение математических способностей предпринимались неодно кратно, но установившегося, удовлетворяющего всех определения не имеется до сих пор. Единственное, в чем сходятся все исследователи, это в том, что следует различать обычные, «школьные» или учебные способности к усвое нию математических знаний, к их репродуцированию и самостоятельному применению, и творческие математические способности, связанные с самостоятельным созданием оригинального и имеющего научную или прикладную ценность продукта.

В дальнейшем, говоря о математических способностях, мы будем иметь в виду именно учебные математические способности. Но под учебны ми математическими способностями мы будем подразумевать не только и не столько способности к репродуцированию математического материала, но и способности, связанные с творческим овладением математическим материа лом в рамках школьного обучения, с самостоятельной постановкой несложных проблем и нахождением путей и методов их разрешения, с нахождением оригинальных способов решения нестандартных задач и т.д.

Обзор различных подходов к определению и структурированию математических способностей приведен в работах В.А. Крутецкого [127] и Н. В.Метельского [147]. Воспользуемся им для рассмотрения отдельных вопросов, связанных с математическими способностями, и изложенных в работах зарубежных авторов.

Характеризуя учебные способности к математике, многие психологи указывали на некоторые фундаментальные психические свойства, лежащие в их основе.

Еще в 1918 году А. Роджерс выделяет две стороны математических способностей: репродуктивную (связанную с функцией памяти) и продуктивную (связанную с функцией мышления) [127, С. 26].

В. Бетц определяет математические способности как способность ясного осознания внутренних связей математических отношений и способность точно мыслить математическими понятиями [17, С. 74]. Финский психолог Мейнандер говорит о математических способностях как о комплексном качестве, включающем интеллект, память, интересы, эмоционально-волевые факторы [127, С. 26]. Это уже новая постановка вопроса, связанная с широким личностным пониманием способностей.

Д. Ли определял «способность преуспевать в математике» как способность понимать (схватывать) основные понятия математики и манипулировать ими [127, С. 26].

Проблемами математических способностей занимался и шведский психолог Ингвар Верделин. Рассматривая «школьные» математические способности как способности к решению различного рода задач, определяемые, в общем, многими условиями, в том числе отношением, интересами, Верделин принимает как отправное следующее определение математических способностей:

«Математическая способность – это способность понимать сущность математических (и подобных им) систем, символов, методов и доказательств, заучивать, удерживать их в памяти и репродуцировать, комбинировать их с другими системами, символами, методами и доказательствами, использовать их при решении математических (и подобных им) задач» [127, С. 40].

В своем исследовании мы будем следовать определению учебных математических способностей, данному В.А. Крутецким, как наиболее полно отвечающему целям нашей работы. Таким образом, под *способностями к изучению математики* будем понимать такие индивидуально-психологические особенности умственной деятельности, которые соответствуют требованиям учебной математической деятельности и обусловливают успешность творческого овладения математикой как учебным предметом при прочих равных условиях.

Анализ литературы по проблеме математических способностей показал, что подавляющее большинство ученых, среди которых такие крупные авторитеты в области психологии, как А. Бинэ, Г. Ревеш, и в области математики, как Ж. Адамар и А. Пуанкаре, склоняются в пользу признания специфичности математического таланта.

А. Бинэ указывал на то, что «математический ум предполагает совершенно специальную способность» [18, С. 156]. А.Пуанкаре [176] и впоследствии Ж. Адамар [1] говорили о специфике мышления математика, о своеобразной, свойственной математикам «математической интуиции», о подсознательной творческой работе.

Специфичности математического таланта уделял много внимания Г. Ревеш [178]. Он высказывал убеждение в том, что математический талант есть специфическая форма таланта, которую необходимо отличать от других. Он может проявляться вместе с другими талантами, но органически не связан с ними; таланты к другим наукам возможны без математической способности и даже при ее абсолютном отсутствии. Аналогичную позицию занимали В. Бетц [17, С. 73] и Д. Мордухай-Болтовской [153, С. 492]: всех людей они условно делили на «математиков» и «нематематиков».

Противоположной точки зрения придерживался немецкий психолог К. Струнц, который выражал мнение, что математическая одаренность понятие отнюдь не специфическое. Он считал, что «об особой одаренности можно говорить в связи с развитием общих способностей, проявляющихся в разных областях по-разному» [127, С. 31].

В нашем исследовании мы придерживаемся мнения большинства психологов о специфичности математических способностей и будем разрабатывать вопросы их развития, исходя из этого положения.

Для раскрытия темы нашего исследования большое значение имеет установление структуры математических способностей. Анализ литературы показывает, что, несмотря на многочисленные попытки структурировать математические способности, ясности в этом вопросе до сих пор нет.

Так, согласно А. Кеймерона структуру математических способностей составляют:

1) способность анализа математической структуры и перекомбинирования ее элементов;

2) способность к сравнению и классификации числовых и пространственных данных;

3) способность применять общие принципы и оперировать абстрактными количествами;

4) сила воображения [127, С. 46].

В. Хаекер и Т. Циген выделяли четыре основных сложных компонента, составляющие «ядро» математических способностей, а именно: пространственный, логический, числовой и символический.

А. Пространственный компонент включает:

1) понимание пространственных фигур, образов и их комплексов (синтезов, гештальтов);

2) память на пространственные образы (пространственные представления);

3) пространственные абстракции (умение видеть у пространственных объектов общие признаки);

4) пространственное комбинирование (понимание и самостоятельное нахождение связей и отношений пространственных объектов).

В. Логический компонент включает:

1) образование понятий (типа «синус», «логарифм», «тензор» и т.д.) и понятийных абстракций;

2) понимание, запоминание и самостоятельное нахождение общих понятийных связей;

3) понимание, запоминание и самостоятельное выведение заключений и доказательств по правилам формальной логики.

C. Числовой компонент включает:

1) образование числовых представлений;

2) память на числа, числовые решения.

D. Символический компонент включает:

1) понимание символов;

2) запоминание символов;

3) операции с символами [127, С. 48].

Э. Торндайк выделял следующие общие алгебраические способности:

1) способности обращаться с символами;

2) способности обращаться с соотношениями;

3) способности к обобщению и обращению с обобщениями;

4) способности к надлежащему выбору элементов и данных;

5) способности приводить в систему идеи и навыки [197, С. 98].

Г. Хэмли также писал о математических способностях как о составной функции, в которой основную роль, наряду с общим интеллектом, играет зрительное воображение, «способность понимать числовые и пространствен ные конфигурации и понимать каждую конфигурацию в виде своеобразной умственной модели» [127, С. 49].

Ф. Митчелл выделял несколько процессов, которые, по его мнению, характеризуют математическое мышление, в частности:

1) классификация;

2) способность понимать и использовать символы;

3) дедукция;

4) манипулирование с идеями и понятиями в абстрактной форме, без опоры на конкретное [127, С. 49].

Попытки структурировать математические способности предприняты в ряде работ отечественных ученых.

Русский математик Д. Мордухай-Болтовской к компонентам математических способностей относил:

1) «сильную память», оговариваясь, что имеется в виду «математическая память», особенностью которой является память скорее не на факты, а на идеи и мысли (при этом «бытовая память» может быть посредственной) [153, С. 501];

2) «остроумие», под которым понимается «способность обнимать в одном суждении понятия из двух малосвязанных областей мысли», находить в уже известном сходное с данным, отыскивать сходное в самых отдаленных сферах, в, казалось бы, совершенно разнородных предметах [153, С. 509];

3) быстроту мысли (быстрота мысли объясняется той работой, которую совершает бессознательное мышление в помощь сознательному, бессознательное мышление, по мнению автора, протекает гораздо быстрее, чем сознательное) [153, С. 509].

Е.А. Коварская выделила структуру арифметических способностей. В нее вошли:

1) систематичность и последовательность мышления;

2) отчетливость мышления;

3) способность к обобщениям;

4) сообразительность;

5) умение к установлению связи между приобретенными математическими знаниями и явлениями жизни;

6) память на числа [110, С. 168].

Отечественные психологи А.Г. Ковалев и В.Н. Мясищев выделили некоторые «опорные пункты для определения особенностей психических процессов при математической деятельности», а именно:

1) склонность на элементарной ступени развития к операциям с числами, в дальнейшем склонность к решению математических задач и на еще более высоком уровне – склонность и интерес к математическим проблемам;

2) быстроту усвоения счетных и арифметических правил;

3) своеобразную особенность мышления, заключающуюся в том, что развитие абстрактного мышления, аналитико-синтетической деятельности, комбинационной способности особенно сильно сказывается в оперировании цифровой и знаковой символикой;

4) самостоятельность и оригинальность в решении математических проблем, все более выявляющаяся в процессе овладения математической деятельностью, и соотношение репродуктивного и творческого моментов, все более изменяющееся в сторону нарастания второго;

5) волевую активность и работоспособность в области математического труда;

6) переход склонности и интереса в увлечение, когда математическая работа становится призванием;

7) продуктивную по количеству и качеству деятельность, позволяющую обнаруживать все более опережающие сверстников показатели [108, С.151].

Н.А. Менчинская на основе наблюдений и экспериментов выделила «те свойства или особенности мыслительной работы, которые могут быть положены в основу различения учащихся и которые играют определенную роль в успеваемости в области арифметики» [146, С. 375]. К таким свойствам Н.А. Менчинская отнесла:

1) быстроту (или соответственно замедленность) усвоения арифметического учебного материала;

2) гибкость мыслительного процесса (то есть, легкость или соответственно трудность перестройки работы, приспособления к изменяющимся условиям задачи);

3) тесную связь (или соответственно разрозненность) наглядных (образных) и отвлеченных компонентов мышления [146, С. 375].

В структуре способности к изучению математики И.С. Якиманская выделяет следующие компоненты:

1. Особенности обобщения признаков математических объектов.

При выделении и обобщении признаков геометрических фигур опираются: на способность к абсолютной и относительной оценке формы, положения, величины; к установлению пространственных соотношений; способность к переосмыслению объектов (их отдельных элементов) под углом зрения разных систем знаний (различных понятий, учебных задач); способность к целенаправленному и планомерному анализу состава заданного геометрического объекта (модели, фигуры, различных комбинаций геометрических тел и т.п.).

2. Обнаружение и обобщение закономерностей, представленных в конкретном материале, умение вычленять и устанавливать зависимости между различными элементами чисел, геометрических тел и фигур.

3. Характер мыслительных операций, обеспечивающих установление соотношений, их быстрота, свернутость, обратимость.

4. Логичность, систематичность и последовательность словесных рассуждений и выводов.

5. Особенности пространственных образов, созданных на основе восприятия наглядного материала или по представлению [229, С. 132-133].

Особое значение имеют работы советских ученых – математиков, в которых трактуются те или иные аспекты математических способностей.

По мнению известных математиков Б.В. Гнеденко [53] и А.Я. Хинчина, [207] своеобразными чертами стиля математического мышления являются:

1) доминирование логической схемы рассуждения;

2) лаконизм (стремление всегда находить кратчайший путь, ведущий к цели);

3) четкая расчлененность хода рассуждений;

4) точность символики (каждый математический символ имеет строго определенное значение);

5) привычка к полноценной аргументации.

Исходя из анализа характера работы математика-исследователя и сравнения ее с математическими занятиями школьников, А.Н.Колмогоров выделяет существенные черты математических способностей, которые он сводит к следующим отдельным способностям:

1) вычислительная или «алгоритмическая способность, характеризующаяся умением производить алгебраические вычисления «в смысле умелого преобразования сложных буквенных выражений»;

2) способность логического мышления, понимаемая как «искусство последовательного, правильно расчлененного логического рассуждения»;

3) геометрическое воображение или геометрическая интуиция, стремление математические проблемы делать геометрически наглядными [113, С.9-10].

А.И. Маркушевич выделяет следующие составляющие учебных математических способностей:

1) развитые количественные и пространственные представления;

2) умение учащихся вычленять сущность вопроса, отвлекаясь от несущественного (умение абстрагировать);

3) умение переходить от конкретной постановки вопросов к схеме, умение схематизировать;

4) умение выводить логические следствия из данных предпосылок, умение анализировать данный вопрос, вычленять из него частные случаи (дедуктивное мышление);

5) умение применять выводы, полученные из теоретических рассуждений к конкретным вопросам, сопоставлять выводы, оценивать влияние условий на результат, обобщать полученные выводы и ставить новые вопросы;

6) точность, сжатость и ясность словесного выражения мысли;

7) произвольное управление своим вниманием;

8) настойчивость в достижении поставленной цели;

9) привычка работать упорядоченно [140, С. 4-5].

Методист-математик С.И. Шварцбурд в структуре «математического развития» выделяет следующие компоненты:

1) развитие пространственного представления;

2) умение отделять существенное от несущественного, умение абстрагировать, умение абстрактно мыслить;

3) умение от конкретной ситуации перейти к математической формулировке вопроса, к схеме, сжато характеризующей существо дела;

4) обладание навыками дедуктивного мышления;

5) умение анализировать, разбирать частные случаи;

6) применение научных выводов на конкретном материале;

7) умение критиковать и ставить новые вопросы;

8) владение достаточно развитой математической речью, как письменной, так и устной;

9) обладание достаточным терпением при решении математических задач [217, С. 33].

Остановимся на еще одной схеме компонентов (параметров) математических способностей. В.А. Гусев систематизировал параметры, исходя из положения, что понятие «математические способности» является составной частью общего понятия «разносторонне развитая личность» [68]. Компоненты математических способностей поделены на три основные группы в соответствии с целями обучения математике.

1. Качества личности, формирование которых связано с математическими способностями: волевая активность и трудоспособность; интеллектуальная любознательность; сообразительность; сила воображения; точность и быстрота мысли; лаконизм (стремление найти кратчайший путь к цели); высокая степень концентрации внимания; способность применять знания в новой ситуации; критичность мышления; способность приводить в систему идеи и навыки; память (сильная память, экстраординарная память); интровертированность; продуктивность по количеству и качеству деятельности, позволяющей обнаружить все более опережающие

сверстников показатели.

2. Элементы мыслительной деятельности, составляющие математиче ские способности, имеющие общий характер: доминирование логической схемы рассуждений (привычка к полноценной логической аргументации); четкая расчлененность хода рассуждений (способность к последовательному «правильно расчлененному логическому рассуждению»); способность улавливать четкость рассуждения, отсутствие необходимых звеньев доказательства; способность сокращать процесс рассуждений, мыслить свернутыми структурами; способность к обратимости мыслительных процессов; гибкость мыслительного процесса, выражающаяся в перестройке работы, приспособлении к изменяющимся условиям задач, при переходе от одной умственной операции к другой, свободы от сковывающего влияния шаблона и трафаретов; способность сохранить в памяти данные в их строгом и точном значении; манипулирование с идеями и понятиями в абстрактной форме без опоры на конкретное, умение приводить в систему идеи и мысли; манипулирование математическими схемами и отношениями; сильное проявление аналитико-синтетических комбинационных способностей в области оперирования числовой и знаковой символикой; склонность находить логический и математический смысл во всех явлениях действительности, сознавать их в плане логических и математических категорий; способность произвольно управлять собственными мыслительными процессами, то есть быстро и активно сосредоточиваться на определенном объекте, полностью отвлекаясь от всего остального; тесная связь наглядных (образных) и отвлеченных компонентов мышления; алгоритмические способности; комбинаторные способности.

3. Виды деятельности, относящиеся к параметрам математических способностей учащихся, имеющих специальный характер именно математической деятельности: способность к надлежащему выбору, сравнению и классификации существенных элементов и данных; способность обращаться (оперировать) математическими символами, точность символики; способность выбора и установления соотношений; способность составлять уравнения, выражающие данные количественные соотношения; умение использовать и преобразовывать формулы, понимать и составлять их; способность обобщать математический материал, выделять главное, отвлекаясь от несущественного, видеть общее во внешне различном; способность к формализации математического материала, к отделению формы от содержания, абстрагированию от конкретных количественных отношений и пространственных форм и оперированию формальными структурами отношений и связей; математическая память; математическая интуиция (включая геометрическую); математическое воображение (включая геометрическое); способность «быстро видеть» ответ при решении задач; быстрота усвоения учебного математического материала; развивающаяся самостоятельность и оригинальность в решении математических проблем и усиление творческого мышления; переход склонности и интереса в увлечение, когда математическая работа становится призванием [68, С. 160-

163].

Самое обширное исследование математических способностей провел В .А. Крутецкий. Способности к изучению математики, пишет В.А. Крутецкий, – это «индивидуально-психологические особенности (прежде всего особенности умственной деятельности), отвечающие требованиям учебной математической деятельности и обуславливающие при прочих равных условиях успешность творческого овладения математикой как учебным предметом, в частности относительно быстрое, легкое и глубокое овладение знаниями, умениями и навыками в области математики» [127, с. 85].

Структура математических способностей, выделенная В.А. Крутецким (рис. 1), явилась основой методики исследования математической одаренности, позволила отметить возрастную динамику развития компонентов математических способностей. По его мнению, структура учебных математических способностей выглядит следующим образом:

Рис. 1. – Структура математических способностей

Отметим, что в материалах исследования В.А.Крутецкого отмечается приобретаемость математических способностей (а не врожденность) на осно ве определенных задатков. Роль задатков различна, в зависимости от того, о каких способностях идет речь, – эта роль минимальна в случаях развития обычных способностей к математике, и эта роль исключительно велика, ко гда речь идет о случаях выдающейся математической одаренности ученых-математиков.

Не являются обязательными в структуре математических способностей следующие компоненты:

1. Быстрота мыслительных процессов как временная характеристика.
2. Индивидуальный темп работы не играет решающей роли.
3. Вычислительные способности (способности к быстрым и точным вычислениям, часто в уме).
4. Память на цифры, числа, формулы.
5. Способность к пространственным представлениям.
6. Способность наглядно представить абстрактные математические отношения и зависимости [127, С. 385-386].

Приведенная схема структуры математических способностей обладает рядом недостатков, на которые указывают исследователи психолого-педагогических основ обучения математике. Н.В. Метельский, в частности, отмечает не выдержанность принципа построения этой схемы на основе рас смотрения этапов решения задачи: «...структура этих способностей неадек ватна общей структуре процесса решения задач» [147, С. 37]. Кроме того, в этой схеме отсутствуют некоторые компоненты, которые, по мнению многих психологов и методистов, являются неотъемлемой частью математических способностей школьников. К ним относятся, в частности, способность к абстрактному мышлению, математическая интуиция.

В структуре математических способностей мыслительные операции, адекватные основным методам математики, должны выделяться в явном виде . Умение абстрагировать является одним из наиболее важных в математической деятельности, ибо «...основной метод математики – и есть абстрагирование...» [140, С. 4]. Конечно, не только математика не может обойтись без этого метода, потому что с его помощью создаются понятия, – базис любой науки. Но именно в математике абстракция достигает своего наивысшего уровня. Поэтому, вслед за рядом исследователей, среди которых К. Браун, Ф.Джонсон, А. Кеймерон, В. Хаекер, Т. Циген, а также В.А. Гусев, А.И. Маркушевич, Н.В. Метельский, С.И. Шварцбурд и др., мы включаем в структуру математических способностей способность к абстрагированию.

Среди компонентов математических способностей находятся компоненты, выражающие способность к перестройке направленности мыслительного процесса, к его гибкости и экономности. В начале мыслительного процесса и при каждом его переключении происходит оценка ситуации с тем, чтобы выбрать наиболее вероятный путь мыслительного поиска. Однако, в совершенно новых ситуациях имеющегося опыта уже недостаточно, здесь главную роль играет математическая интуиция, чутье, способность предвидеть, как-то угадывать направление поиска, ведущего к поставленной цели.

Таким образом, математическая интуиция является важнейшим фактором в математических способностях как научно-творческого характера, так и учебного. Поэтому мы находим целесообразным и необходимым ее включение в общую схему компонентов математических способностей.

Отметим, что, говоря о математической направленности ума как об одном из компонентов математических способностей, В.А. Крутецкий имеет ввиду не только стремление способных к математике учащихся к математи зации явлений окружающего мира, не только установку обращать внимание на математическую сторону явлений, подмечать в них пространственные и количественные отношения и связи, но и познавательную, эмоциональную и волевую сторону математических способностей (соответствующее отношение, склонность и интересы, потребность в математической деятельности) [127, С. 335]. Некоторые исследователи, например, В.А.Гусев [68] и др., все же предпочитают включать качества, соответствующие данным сторонам математических способностей в их структурную схему в явном виде.

В дальнейшем познавательную, эмоциональную и волевую сторону математических способностей мы будем, вслед за В.А. Крутецким, относить к стержневому их компоненту – математической направленности ума.

В психологической литературе выделяются различные типы математических способностей. Для такого типологического деления рассматриваются различные основания.

Наиболее распространенной в психологии является типология матема тических способностей, основанная на противопоставлении дискурсивного, развернутого во всех своих звеньях мыслительного процесса интуитивному мыслительному процессу, связанному с непосредственным «схватыванием» необходимых отношений.

По мнению Э.Ж. Гингулис, математические способности проявляются в том, с какой скоростью, как глубоко и насколько прочно люди усваивают ма тематический материал (детализация, предложенная Э.Ж. Гингулис [49], представлена нами в таблице 1). При этом учитывается, что в ходе решения задач могут быть измерены и проанализированы:

– *скорость:* количество заданий, решенных за определенный отрезок времени;

– *время,* необходимое разным индивидуумам для решения одной и той же задачи;

– *прочность:* по результатам отсроченных проверок (остаточные знания);

– *глубина:* умение преобразовать для собственных нужд прием учебной работы, разобранный ранее.

Таблица 1.1.

Компоненты математических способностей

Геометрический	*Алгоритмический*	*Логический*
Способность извлекать необходимую информацию из заданной конфигурации путем ее анализа или дополнения; Поиск идеи решения задачи с помощью рисунков, моделей фигур или мысленного представления; Способность к переводу на язык геометрии той или иной задачи и обращение к наглядным образам в процессе решения негеометрических задач.	Способность применять известные алгоритмы и методы к конкретной ситуации; Способность свести задачу к выполнению конечной цепи более элементарных действий; Способность довести до конца намеченный план решения, применяя аналитические методы.	Способность к вычленению (из некоторого общего положения) и исследовании всех частных случаев; Способность к созданию экономной и непротиворечивой схемы решения задачи; Способность к проведению доказательных рассуждений, использующих прием доказательства «от противного», обращение к контрпримеру, продвижение при решении задач «от конца к началу» и другие приемы.

Эти количественные, хорошо замеряемые, параметры позволяют, по мнению Э.Ж. Гингулис, делать вывод, что если хотя бы одна из приведенных характеристик представлена в достаточной мере, то можно утверждать суще ствование у индивидуума математических способностей. Однако выводы эти носят констатирующий характер, не позволяя выделить направления педагогических воздействий, обеспечивающих в итоге развитие способностей.

В работах [1], [158], [188] и др. выделяются аналитический и геометрический типы математических способностей. Заметим, что с этими терминами связываются скорее логический и интуитивный пути творчества. «Логик» характеризуется значительно меньшим удельным весом бессознательного в мышлении, более узко направленной мыслью, последовательностью и ясной расчлененностью мыслительного процесса. Мыслительный процесс «интуинтивиста» отличает больший удельный вес бессознательного, более «рассеянная» мысль, быстрота и сокращенность (свернутость) мыслительного процесса [1, С. 109].

Некоторые ученые, указывая на существование двух основных типов математических способностей, – «аналитика» и «геометра», выделяют и промежуточные типы. Так А.А. Анелаускене [8] и В.А. Крутецкий [127] выделяют гармонический тип.

Мышление представителей аналитического типа отличает явное преобладание очень хорошо развитого словесно-логического компонента над слабым наглядно-образным [127, С. 348-349].

Мышление представителей геометрического типа отличает очень хорошо развитый наглядно-образный компонент [127, С. 353].

Для представителей гармонического типа характерно относительное равновесие хорошо развитых словесно-логического и наглядно-образного компонентов при ведущей роли первого.

Гармонический тип наблюдается в двух модификациях. При равновесии хорошо развитых словесно-логического и наглядно-образного компонентов модификацию «А» отличает тяготение к мыслительным операциям без применения наглядно-образных средств, модификацию «Б» – тяготение к мыслительным операциям с применением наглядно-образных схем. В связи с этим выделяются абстрактно-гармонический и образно-гармонический подтипы [127, С. 358-359].

Итак, беря за основу схему структурных компонентов учебных математических способностей, предложенную В.А. Крутецким, и внося в нее отдельные дополнения в связи с высказанными выше замечаниями, получаем рабочую модель структуры математических способностей, которой мы при держивались в своем диссертационном исследовании.

Структура математических способностей включает в себя следующие компоненты:

1) способность к абстрагированию;
2) способность к формализованному восприятию математического материала, схватыванию формальной структуры задачи;
3) способность к логическому мышлению;
4) способность к быстрому и широкому обобщению математических объектов, отношений и действий;
5) способность к свертыванию процесса математического рассуждения и системы соответствующих действий, способность мыслить свернутыми структурами;

6) гибкость мыслительных процессов в математической деятельности;
7) стремление к ясности, простоте, экономности и рациональности решений;
8) способность к быстрой и свободной перестройке направленности мыслительного процесса, переключению с прямого на обратный ход мысли (обратимость мыслительного процесса при математическом рассуждении);
9) математическая память (обобщенная память на математические отношения, типовые характеристики, схемы рассуждений и доказательств, методы решения задач и принципы подхода к ним);
10) математическая интуиция;
11) математическая направленность ума.

При проектировании учебного процесса необходимо учитывать возрастную и индивидуальную готовность ребенка к пониманию и осознанию обучающих действий, однако, в традиционных методических пособиях фактически отсутствует упоминание таких параметров.

Исследования Н.С. Лейтеса [132] позволяют говорить о *возрастных предпосылках способностей,* имея в виду обусловленные возрастом повы шенные возможности развития в тех или иных направлениях. Так, младших школьников отличает расположенность к усвоению нового; совмещение в умственных способностях младших школьников правильности, формальной отчетливости суждений и одновременно, в некоторых отношениях, крайней односторонности и нереальности суждений, т.е. наличие того, что может быть обозначено как наивно-игровое отношение к окружающему, представляет собой как бы форму существования детского ума в сложном мире взрослых. Этот неизбежный, необходимый этап возрастного развития, который позволяет без видимых усилий овладевать все новым опытом и приобщаться к жизни взрослых, не боясь, не замечая трудностей. Для нашего исследования весьма примечательно, что рассматриваемая автором возрастная особенность – «драгоценное качество детскости» [132, с.44] – дает неограниченный простор для тренировки формальной стороны мышления, во многом обусловливает естественность, легкость усвоения всевозможных впечатлений. Отметим и высокую восприимчивость к окружающим воздействиям, расположенность к усвоению, свойственную большинству младших школьников, как очень важную сторону интеллекта, характеризующую умственные достоинства и в дальнейшем.

Школьников средних классов отличает особая активность и широта склонностей на этапе перехода от начальной ступени обучения к средней, при сохранении достоинства детской восприимчивости: любопытства, свеже сти восприятия, удовольствия, доставляемого успешностью занятия, быстроты реакции и быстроты привыкания; расположенности к импровизации, живости воображения; быстрой переключаемости, начатков собственно исследовательского отношения к источникам, сопоставлению фактов – обнаруживается некоторая независимость проявляемой энергии от мотивов поведения и понимания самими детьми своих действий. Обращает на себя внимание нетерпеливость учащихся в мыслительной работе.

Достаточно часто наблюдается забота о самостоятельности своих высказываний: стремление отделить свое от того, чему учат, как характеристика нового уровня развития личности.

Возрастные особенности, по мнению Н.С. Лейтеса, имеют самое непо средственное отношение к формированию способностей и индивидуальных различий по способностям. Выработка многих качеств происходит у детей успешнее, чем у взрослых, особые возможности детской психики связаны с определенным этапом развития. Некоторые возникающие с возрастом свойства, оказываясь преходящими у одних детей, в большей или меньшей мере закрепляются и становятся достоянием личности у других.

В психолого-педагогической литературе выделяются сензитивные периоды для развития разных видов специальных способностей. По мнению ряда психологов, педагогов и методистов математические способности про являются и наиболее интенсивно начинают развиваться в 14-15 лет [65], [127], [195] и др. Это связано, прежде всего, с тем, что в подростковом возрасте (14 -15 лет) происходят существенные сдвиги в мыслительной деятельности.

Основной особенностью мыслительной деятельности подростка является нарастающая с каждым годом способность к абстрактному мышлению, способность к обобщению и сравнению. Изменяется соотношение между конкретно-образным и абстрактным мышлением в пользу последнего. В подростковом возрасте возникают устойчивые, глубокие интересы, развивается активное, самостоятельное, творческое мышление [119], [128], [167].

Однако сам факт углубленного изучения математики не является достаточным для того, чтобы говорить о развитии математических способностей школьников, обучающихся в специализированных классах.

Математические способности проявляются и развиваются в математической деятельности. Но не всякая математическая деятельность влечет за собой развитие способностей.

На основе анализа психолого-педагогической, методической литературы выделим *методические требования,* которым должен удовлетворять процесс обучения, ориентированный на развитие математических способностей учащихся 9-11 классов:

1. Учебный процесс должен быть организован так, чтобы максимальное внимание уделялось *самостоятельной математической деятельности учащихся.*

Методическими средствами реализации этого требования являются: компактность объяснений; увеличение времени, отводимого для самостоятельного решения задач; использование задач в качестве средства открытия новых фактов; подготовка тематических блоков задач и заданий творческого характера; подготовка индивидуальных, групповых заданий с учетом различий в темпе работы учащихся и их потенциальных возможностей.

2. Учебный процесс должен строиться с *учетом индивидуальных и возрастных особенностей учащихся,* а также актуального уровня развития их математических способностей.

Реализация этого требования предполагает предъявление учащимся заданий, адекватных их учебным возможностям. Здесь важно соблюсти баланс между доступностью и сложностью: важно предупредить возможность неудачи, предлагая задачи доступные, и предложить задания, требующие достаточно интенсивной мыслительной работы.

3. Учебный процесс необходимо организовать таким образом, чтобы учащиеся могли *достичь определенного уровня профессионализма*.

Указанное требование предполагает прочное овладение учащимися основным материалом школьного курса, а также уверенное владение системой базовых или опорных задач.

4. Учебный процесс должен быть направлен на *развитие различных компонентов математических способностей.*

Реализация этого требования предполагает такой подбор задач и творческих заданий, каждое из которых направлено на развитие одного из компонентов математических способностей, а все вместе они должны охватывать все компоненты структуры математических способностей.

5. Учебный процесс следует строить так, чтобы занятия были разнообразны по форме и интересны по содержанию, имели *яркую, положительную эмоциональную окраску,* были ориентированы на формирование у учащихся положительной мотивации и устойчивого интереса к математической деятельности.

Для соблюдения указанного требования учителю необходимо подбирать для решения интересные и разнообразные математические задачи, уделять особое внимание иллюстрации учебного материала яркими примерами из истории математики, создавать на занятиях «ситуации успеха» для того, чтобы каждый ученик смог почувствовать радость победы при решении нестандартной задачи.

При проектировании системы методических действий, предполагающей в качестве результата умственное развитие обучающихся, следует вести речь о возможности при обучении математике создания условий реализации педагогического взаимодействия на основе детально разработанной стратегии формирования у учащихся определенных способов деятельности с учетом:

- определения индивидуальных и возрастных особенностей обучающихся (уровень развития);
- изменения функциональной роли учителя от носителя вторичных информационных смыслов к координатору и советчику учебной деятельности обучающегося;
- демократического стиля взаимоотношений между участниками образовательного процесса, обеспечивающего педагогическую поддержку развития.

Формирование методов умственной деятельности средствами математики предполагает:

- *отбор определенного круга проблем* (задач), для которых учащиеся должны уметь находить решение;
- описание структуры действий при решении данных задач, т.е. *построение операционной модели,* соответствующей тем реальным операциям, которые:
- должны быть сформированы у учащихся и на основе которых они могут самостоятельно решать проблемы определенного класса;
- разработку *системы обучающих воздействии,* позволяющих не только регулировать деятельность ученика, но и создавать условия для ее саморегуляции.

При этом важно понимание той реальности, что все, что делается на уроке, в течение всей учебной деятельности в том случае может вызвать у ребенка активность, если содержание, формы, приемы обучения соответст вуют его природным силам, потребностям, интересам, согласуются с его жизненными планами, т.е. носят личностно-ориентированный характер.

Таким образом, анализ психолого-педагогической и методической литературы позволяет говорить о трех аспектах проблемы развития математических способностей учащихся: социальном, психолого-педагогическом и методическом. Эффективное развитие математических способностей учащихся возможно только в случае учета всего комплекса данных аспектов в практике обучения.

Наиболее важной задачей является выявление возможных путей развития математических способностей школьников, а также разработка мето дики их использования в процессе углубленного изучения курса математики в 9-11 классах. Этим вопросам посвящены следующие параграфы настоящей главы нашего диссертационного исследования.

1.2. Педагогические и научно-методические основы развития математических способностей учащихся

Как показывает опыт, создание классов с общематематическим уклоном является не только дополнением к школам общематематического профиля, но и наиболее гибкой и экономичной формой углубленной математической подготовки, а также имеет ряд следующих преимуществ:

1) для создания класса с математическим уклоном бывает достаточно иметь одного высококвалифицированного учителя;

2) относительная легкость набора учащихся в 1-2 класса;

3) возможность почти в каждой школе «вырастить» будущих учащихся математического класса из состава учащихся 4-7 классов той же школы с помощью кружков, факультативных занятий и т.д.

Основными принципами построения программы курса математики для таких классов является:

1. Изучение математики в классах соответствующего профиля должно давать учащимся глубокие математические знания и широкое математическое развитие на базе основного курса математики.

2. Учащиеся – выпускники математических классов – должны обладать такими знаниями и умениями, которые полностью отвечали бы требованиям, предъявляемым к математической подготовке учащихся обычных школ, но вместе с тем были бы более глубокими и прочными.

Учащиеся должны научиться работать самостоятельно с учебной математической литературой и обладать к концу обучения устойчивым интересом к предмету естественно-математического цикла.

3. Возможное расширение программы должно быть органически связано с основным курсом и соответствовать имеющимся (возникающим) интересам учащихся и их познавательным интересам.

В процессе преподавания математики в этих классах открываются большие возможности в осуществлении оптимальной индивидуализации обучения, в использовании проблемного обучения, т.е. широкая возможность оптимальной активизации обучения. Организуя набор в такие классы, целесообразно проводить общую для всех контрольную работу (тестовые задания) с последующим собеседованием с каждым из учащихся для выявления уровня развития и степени интереса к математике. Примерный образец такого теста мы приводим ниже.

Нередки случаи, когда уже в процессе работы в VIII классе выясняется, что у кого-то практически отсутствует элементарная логика, а кто-то, обладая одаренностью, совершенно не обучаем. Значит, необходимы формы отбора, которые позволили бы получить наиболее полное представление о том или ином школьнике.

Основным документом, определяющим работу учителя в классе с углубленным изучением математики, является «Программа школ (классов) с углубленным изучением математики» [142].

В углубленном изучении математики выделяются два этапа, отвечающие возрастным возможностям и потребностям школьников и соответственно различающиеся по целям.

Первый этап относится к основной школе, второй – к старшей школе. Учащийся может начать углубленное изучение математики как в основной школе, начиная с VIII класса, так и в старшей школе, начиная с X класса. Первый этап углубленного изучения математики является в значительной степени ориентационным. На этом этапе ученику надо помочь осознать степень своего интереса к предмету и оценить возможности овладения им, с тем чтобы по окончанию IX класса он смог сделать сознательный выбор в пользу дальнейшего углубленного либо обычного изучения математики.

Программа по математике для школ (классов) с углубленным теоретическим и практическим изучением математики охватывает весь материал, содержащийся в программе для средней общеобразовательной школы. При этом подразумевается, что учащиеся должны не только достичь результатов обучения, указанных в программе, но и овладеть соответствующими знаниями, умениями и навыками на более высоком уровне, характеризующемся в первую очередь способностью решать более сложные, нестандартные задачи.

Опираясь на «Программу школ (классов) с углубленным изучением математики» [142], нужно отметить следующее. Углубленное изучение математики в средней общеобразовательной школе призвано дать учащимся, интересующимся предметом, более высокий уровень математической подготовки, заложить основу будущей профессиональной деятельности.

Профильная дифференциация обучения математике предусматривает:

- обеспечение социального общекультурного минимума подготовки, что определяется требованиями общества и возможностями учеников определенного возраста;
- удовлетворение потребности профильной подготовки в развитии познавательных и математических видов деятельности учеников, которые характерны для определенного профиля;
- формирование средствами математики профессиональных склонностей учеников.

Обучение в старшей школе, в классе с углубленным изучением математики предусматривает наличие стойкого осознанного интереса к математике и склонности к выбору в будущем связанной с ней профессии [90].

Роль VIII-IX классов особая. У ребят этого возраста еще не вполне устойчив интерес к математике, а их способности недостаточно проверены. Поэтому основная цель углубленного изучения математики в этих классах – закрепление и развитие у школьников интереса к предмету, обеспечение прочной базы для дальнейшей математической подготовки. Как показывает опыт, при правильной организации учебного процесса это с успехом достигается.

Основной причиной перехода ребят из класса с углубленным изучением математики в обычный класс (особенно восьмых) является перегрузка. Поэтому, на наш взгляд, не следует стремиться к насыщению программы дополнительными теоретическими вопросами. Углубленное изучение предполагает прежде всего наполнение курса разнообразными, интересными и сложными задачами. Для развития интереса к учебному предмету следует периодически включать в процесс обучения занимательные задачи, фрагменты истории математики.

При подборе упражнений, предназначенных для углубления основного курса, необходимо ориентироваться на его основные содержательные линии.

При изучении преобразований числовых и алгебраических выражений школьники должны научиться выполнять достаточно длинные сложные задания, поскольку технические умения являются базовыми для решения задач практически во всех разделах школьной математики.

Учащиеся должны овладеть основными способами решения уравнений. Прежде всего имеются в виду уравнения, приводимые при помощи преобра зований к линейным или квадратным, линейные и квадратные уравнения с модулем. Отдельный вид – уравнения, решаемые способом разложения на множители.

Очень важной является функциональная линия. Учащиеся должны научиться строить графики дробно-линейной функции, графики функций, содержащих переменную под знаком модуля. Основная задача – эскизное по строение графиков, а не аналитическое исследование функции. Учащиеся должны освоить некоторые виды содержательной деятельности, связанной с графиками: определение числа корней уравнения, приближенных значений корней, решение уравнений и неравенств графическим способом, определения промежутков монотонности, экстремумов.

Таким образом, цель изучения алгебры и начал анализа заключается в развитии вычислительных и формально-оперативных умений учащихся до уровня, позволяющего уверенно их применять при решении задач курсов математики и смежных предметов (физики, химии, информатики и др.); в ус воении аппарата уравнений и неравенств как важного средства математического моделирования прикладных задач; в осуществлении функциональной подготовки школьников.

При изучении геометрии главное внимание должно быть уделено формированию деятельности с основными фигурами, в первую очередь – треугольником, четырехугольником и окружностью. При этом расширение теоретического материала происходит в результате решения содержательных задач, рассмотрения некоторых фактов теории треугольников и окружностей. Курс характеризуется рациональным сочетанием логической строгости и геометрической наглядности. Целенаправленное обращение к примерам из практики развивает умение учащихся вычленить геометрические формы и отношения в предметах и явлениях действительности, использовать язык геометрии для их описания.

В ходе изучения геометрии учащиеся приобретают систематические сведения об основных фигурах на плоскости и их свойствах, знакомятся с геометрическими величинами, характеризующими плоские фигуры, и учатся их вычислять, изучают применение аналитического аппарата (элементы тр игонометрии, алгебры, векторы и координаты) к решению геометрических задач.

Значительное место в учебном процессе должно быть отведено: самостоятельной математической деятельности учащихся – решению задач, проработке теоретического материала, подготовке докладов, рефератов, исследовательской работе. Содержание обучения школ (классов) с углубленным изучением математики включает полностью содержание курса математики соответствующих классов общеобразовательной школы и ряд дополнительных вопросов, непосредственно примыкающих к этому курсу и углубляющих его по основным идейным линиям. Включены также самостоятельные разделы (комплексные числа, элементы комбинаторики, элементы теории вероятности и статистики), которые в настоящее время в школе не изучаются, однако являются важным содержательным компонентом системы непрерывного математического образования. Включение дополнительных вопросов преследует две взаимно связанные цели. С одной стороны, это создание в совокупности с основными разделами курса базы для удовлетворения интересов и развития способностей учащихся , имеющих склонности к математике, с другой – восполнение содержательных пробелов основного курса, придающее содержанию углубленного изучения необходимую целостность.

Так как углубленное изучение математики предусматривает наполнение курса разнообразными, интересными и сложными задачами, то необходимо иметь полную информацию о задачах, в первую очередь формирующих математические способности.

Ни с чем в своей деятельности человек не сталкивается так часто и ни в чем так сильно не нуждается, как в способности ставить и решать задачи са мых разнообразных типов и различной степени сложности. Разносторонняя деятельность людей и почти вся история человечества – это постановка и решение все новых встающих перед ними задач. Однако задачи предстают перед человеком не в виде уже готового, кем-то составленного задачника или даже решебника, а в форме противоречий жизненных обстоятельств, которые надо разрешать. Иногда можно слышать, что школа или вуз не должны сеять среди учащихся и студентов зерна сомнений и что главная ее задача – препо давать уже утвердившиеся основы современной науки. Но при этом все же нельзя забывать, что любой, даже, казалось бы, теперь самый авторитетный факт науки, который в учебнике отображается как совершено бесспорная ис тина, на самом деле является результатом неустанных человеческих поисков, когда-то зарождавшихся в виде новых и чрезвычайно трудных задач. В педа гогической практике нужно учитывать, что ученик – это не сосуд, который надо наполнить, а факел, который надо зажечь. Человек, для которого «... дважды два четыре, само собой разумеется, никогда не станет великим математиком», – таково изречение Брехта. Известно также высказывание академика П.Л. Капицы: «Перед тем как решить крупную проблему, ученым надо уметь решать ее в малых формах».

Опыт средней и высшей школ показывает, что в основном роль задач в учебном процессе сводится к следующему: закреплению изложенного преподавателем теоретического материала; самостоятельному приобретению новых знаний; контролю знаний.

Что же касается задач, целью решения которых является закрепление изложенного материала и контроль знаний, то они довольно хорошо разрабо таны, обоснованы с точки зрения педагогики и психологии и представлены в довольно большом количестве в учебниках, задачниках и решебниках. Осо бенно слабо разработаны задачи, предназначенные для самостоятельного приобретения новых знаний, хотя именно этот вид задач должен обеспечить достаточно действенную стимуляцию мыслительного поиска, приводящего к активной исследовательской деятельности учащихся.

Процесс решения учащимися одной и той же системы или группы задач можно организовать по-разному.

Например:

1. Учащимся заранее сообщается метод решения какой-либо группы задач (что зачастую и происходит в традиционной методике), тогда решение этих задач будет сводиться к применению уже известных знаний, известного метода.

2. Создается ситуация, в результате которой учащиеся самостоятельно могут прийти к методу решения этих задач, т.е. к новой, неизвестной до этого мысли или идеи. Этот случай важен тем, что учащиеся оказываются в условиях проблемной ситуации.

При реализации второго подхода становится актуальным вопрос об общем принципе построения такой системы задач, чтобы в процессе решения она оказалась достаточно сильным источником и стимулятором исследова тельской деятельности, направленной на самостоятельное приобретение но вых знаний, на открытие новых приемов и способов решения задач, что, в свою очередь, способствует выработке навыков самостоятельной работы учащихся. Особенно это важно в работе с учащимися математических клас сов, где рациональная связь межу теорией и практикой, учебной деятельностью может стимулировать в процессе решения задач проявлению интуиции, находчивости и сообразительности в отыскании скрытых зависимостей, появлению неожиданно новой комбинации исходных данных задачи и т.п.

Характеризуя такие задачи, известный американский математик Д. Пойа пишет: «Задача, которую вы решаете, может быть скромной, но если она бросает вызов вашей любознательности и заставляет вас быть изобретательным и если вы решаете ее собственными силами, то вы сможете испытать ведущее к открытию напряжение ума и насладиться радостью победы» [172, с.34].

В подавляющем большинстве исследований подчеркивается, что при решении задач большое значение имеют ранее накопленные знания и опыт человека. В этом отношении весьма справедлива гипотеза А.В. Брушлинского о том, что «...в мышлении не только прошлое (предыдущие этапы мыслительного процесса), но и наоборот, настоящее оказывает затем какое-то обратное влияние на прошлое» [30, с.8], т.е. только с появлением настоящего и начинается бытие прошлого. Уже свершившийся в прошлом мыслительный акт существует не как «вещь» абсолютно неизменная, а как динамически изменяющийся процесс, избирательно используемый по мере его включения в дальнейший ход мышления, что позволяет наметить пути понимания того, как осуществляется мысленное предвосхищение будущего, т.е. как строится и раскрывается замысел какой-то новой идеи.

Решение любой задачи представляет собой производное двух факто ров: особенностей самой задачи (имеется в виду прежде всего ее структурная характеристика: соотношение частей или компонентов) и индивидуально-типологической характеристики тех, кто ее решает. Вот почему составителям задач нужно уметь строить такие задачи, в плане усложнения, которые бы удовлетворяли запросам каждого учащегося (т.е. задачи могут выступать в роли индикаторов скрытых возможностей учащихся).

И.Я. Лернер [138] считает, что деятельность преподавателя состоит, прежде всего, в построении такой совокупности заданий, которая бы обеспечивала творческое применение обучающимися основных знаний (идей , понятий, методов познания) при решении главных, доступных им проблем курса, овладение чертами творческой деятельности, постепенное усложнение проблем, решаемых обучающимися.

Очень часто усложнение задач проявляется в применении излишне большого вычислительного аппарата, который нередко создает видимость мыслительных усилий учащихся, а на самом деле искусственно сдерживает стремление к более активным формам умственного труда. Нет сомнений в том, что для начальных упражнений необходимы и такие весьма простые задачи, требующие возрастающей умственной нагрузки.

При усложнении исходных данных и требований к задаче желательно учитывать те моменты, которые лежат в основе ее постепенного усложнения, осуществляемого путем включения какого-либо компонента этой задачи в новые системы связей.

Влияние неоднократного включения какого-то одного исходного дан ного задачи в новые системы связей особенно наглядно можно обнаружить в тех задачах, которые решаются с помощью преобразования исходных данных путем их соподчинения, т.е. включения каждого позже обнаруживаемого данного в систему уже ранее известных данных.

В соответствии с проблематикой сосредоточим внимание на том, с какими характеристиками решаемых субъектом задач сопряжено творчество. Одним из важнейших средств развития математических способностей явля ется эффективная организация и управление поисковой деятельностью школьников в процессе решения математических задач. Умение решать ма тематические задачи проявляется в настоящее время недостаточно, хотя именно это умение наиболее ярко характеризует состояние математических знаний учащихся и уровень их математического развития. Во многом это происходит потому, что школьные математические задачи, которые предлагаются учебниками, как правило, ограничены одной темой, не предусматривают широких связей между разделами курса математики.

1.3. Структура и содержание исследовательской деятельности школьников в процессе обучения алгебре и началам анализа и геометрии

Разработка способов активизации мыслительной деятельности учащихся в процессе обучения получила свое развитие в конце XIX-начале XX века и ознаменовалась внедрением в преподавание отдельных учебных предметов эвристического, опытно-эвристического методов и лабораторных уроков. Эти методы в силу общности их существа Б.Е. Райков [177] заменил термином «исследовательский метод».

Русский методист А.Я. Герд [46] сформулировал важные положения развивающего обучения: «Все реальные знания приобретены человеком путем наблюдения, сравнения и опытов, при помощи постепенно расширяю щихся выводов и обобщений. Только таким путем, а никак не чтением статей могут быть переданы эти знания детям. Ученики должны под руководством преподавателя наблюдать, описывать и обсуждать наблюдаемые факты и яв ления, делать выводы и обобщения и проверять их простыми доступными опытами» [46, с. 156]. Следует отметить, что в исследованиях А.Я. Герда довольно полно выражена суть процесса самостоятельного приобретения новых знаний: «если ученик сам наблюдает и сам сравнивает, то знание его отчетливее, определеннее и составляет его собственность, приобретенную им самим» [46, с. 3-4]. Однако методические приемы и способы организации такой самостоятельной деятельности школьника при обучении предметов А. Я.Герд не указывает.

Поскольку к началу 20-х годов XX века в практике советской школы основным методом обучения учащихся считался «исследовательский метод», то к этому времени были сформулированы тезисы, выражающие его суть. Использование исследовательского метода в обучении:

1) способствует формированию навыков умственного труда и развитию логического мышления в области конкретных фактов;

2) соответствует законам интеллектуального и психического развития ребенка, природным свойством которого является любознательность [160].

Однако отсутствие достаточного методологического обоснования исследовательского метода привело к одностороннему развитию дидактики. Так, например, принижалась роль объяснений учителем сущности сложных научных понятий; не учитывались возрастные возможности учащихся и уро вень их подготовки (переоценка их исследовательских способностей); недооценивалась роль систематического изложения основ наук и обучающей деятельности учителя; нарушалась система знаний. В работах исследователей истории педагогики (Е.Н. Медынский, М.Ф. Шабаева и др.) отмечается, что, увлекаясь внешней активностью учащихся, педагоги упускали из виду активность их мысли; в истории и практике преувеличивали роль индукции в усвоении знаний и преуменьшали значение дедукции; не уделяли внимания усвоению теории, формированию системы обобщенных понятий как базы самостоятельной деятельности учащихся.

В зарубежной педагогике идеи исследовательского метода связывают с именами Э. де Боно [25], В. Оконь [159] и др.

Э. де Боно [25] предлагал механический перенос выводов психологии на процесс обучения, не учитывая влияния на развитие мышления ученика среды и условий воспитания. Идеи структурирования учебного материала, доминирующей роли интуитивного мышления в процессе усвоения новых знаний развивали американские ученые под руководством психолога Дж. Брунера [26]. Так, например: значение структуры знаний в организации обучения; готовность ученика учиться как фактор учения (автор считает, что в определенной форме основам любого предмета можно обучить ребенка любого возраста на любой стадии развития); интуитивное мышление как основа развития умственной деятельности; мотивация учения в условиях современного общества [160]. Однако теория, выстроенная автором, отличается большой степенью психологизации.

Современные теории обучения, излагаемые в зарубежной литературе, имеют свои особенности, которые уже включают такие виды деятельности ученика по усвоению новых знаний, как слушание и усвоение изложения материала учителем; повторение и запоминание того, что излагает учитель; у своение знаний в процессе собственной деятельности, организованной и руко водимой учителем. Следует отметить и тот факт, что усиление внимания к развитию мыслительных способностей учащихся и поиски путей развития этих способностей привели американских педагогов к распространению школьных исследовательских работ, внеурочных форм занятий.

Наибольших успехов в исследовании возникновения проблемных ситуаций на материале различных предметов добились Ч. Куписевич и В.Оконь [159].

Теоретический анализ литературы показал, что элементы исследовательского подхода в обучении учащихся наибольшее освещение получили в 60-х годах XX века в связи с поиском способов активизации и стимулирования самостоятельной деятельности учащихся на основе положения, выдвинутого известным психологом Л.С. Выготским [38] о том, что обучение ведет за собой развитие. А.В. Брушлинский [30], Т.В. Кудрявцев [129], А.М. Матюшкин [143], С.Л. Рубинштейн [181] и др. интенсивно занялись исследованием общего умственного развития, общего интеллекта; выявлением условий активизации мыслительной деятельности школьников в процессе учения, условий овладения учащимися эффективными методами самостоятельной умственной деятельности; выяснением того, как соотносятся в процессе учения усвоение «готовых» знаний и самостоятельные «открытия», сделанные учащимися. З.И. Калмыкова [98], Т.В. Кудрявцев [129], А.М. Матюшкин [143] и др. разрабатывают психологические основы проблемного обучения в его разных модификациях. Суть его заключается в том, что перед учениками ставится проблема, познавательная задача, и ученики (при непосредственном участии учителя или самостоятельно) исследуют пути и способы ее решения. В ходе такой деятельности школьники строят гипотезу, намечают и обсуждают способы проверки ее истинности, аргументируют, проводят эксперименты, рассуждают, доказывают. При этом, как показали исследования психологов, основное значение имеет не только факт объективного «открытия» истины, но и процесс ее поисков, вводящий школьников в лабораторию творческой мысли.

Новая волна изысканий в теории и методике обучения и воспитания учащихся связана с именами В.И. Андреева [6], В.И. Крупича [124], М.И. Махмутова [144], В.В. Успенского[199], А.Я. Цукаря [209] и др. Как отмечает М.И. Махмутов, «заметные успехи дидактики в последние годы связаны с тем, что она стала опираться не на отдельные положения психологической науки, а на добытые в результате экспериментальных исследований психологов закономерности процесса познания» [144, с.83].

Психологами установлено, что условием и источником психической активности индивида является сложная система потребностей, мотивов, ин тересов, стремлений, которые формируются и развиваются под влиянием среды на основе имеющихся у субъекта деятельности врожденных задатков (Д.Н. Богоявленская [22], В.А. Крутецкий [127], З.И. Калмыкова [98] и др.). Но раньше, чем потребность вызовет действие, субъект переживает сложный психический процесс мотивации, результатом которого является мотив – побудительная причина деятельности человека, направленный на удовлетворение возникшей потребности. «Потребность, – отмечает С.Л. Рубинштейн, – возникает тогда, когда человек не знает, как осуществить действие (решение задачи), при условии, что он вообще хочет его осуществить» [181, с.127]. Для нас последнее замечание особенно важно, поскольку мотивом научного исследования может стать затруднение, неопределенность, проблема, содержащая знания, неизвестные человечеству и имеющие общественную значимость, что часто является одним из тех факторов, которые оказывают влияние на интерес ученого к рассматриваемой проблеме. Кроме того, исследуемая неопределенность вызывает внутреннее противоречие, которое становится побудительной причиной интереса, а затем и мотива деятельности.

На первичность потребности в разрешении внутреннего противоречия в научном познания указывают и исследования Ж. Адамара [1], А. Пуанкаре [176] и др.

Однако для учащегося – субъекта исследовательской деятельности – категория «потребность» по отношению к категории «интерес» вторична, поскольку затруднение, неопределенность, проблема, содержащая знания, не известные только школьнику, не всегда являются причиной внутренних противоречий, которые бы вызывали его действия. Неопределенность, предлагаемая учителем, прежде всего, должна вызывать интерес учащегося к предложенной проблеме, а затем уже – потребность, желание и стремление познать явление или объект исследования. Потребность в этом случае есть следствие интереса (мотива). «Мотивом ... считается интерес индивида к объекту действий, его желание и стремление узнать новое об объекте или сделать что-то по-новому» [121, с. 123].

На наш взгляд, важным для нас является положение о том, что наличие познавательных потребностей субъекта деятельности выражается в любознательности, любопытстве. В западной психологии этот термин обозначает мотивационную направленность на изучение, познание, выявление и физического, и социального окружения, символических структур. Отечественная наука любознательность связывает с познавательным интересом, мотивацией (Б.Г. Ананьев [5], Г.И. Щукин [224] и др.). Опираясь на труды психологов, дидактов и методистов, в той или иной мере исследовавших проблему познавательных интересов, мы выявили важное для нашей работы положение о том, что развитие интереса на определенном этапе может оказать влияние на формирование потребностей [8]. На более высоком уровне интерес, будучи достаточно прочным, устойчивым , занимающим доминирующее положение в кругу мотивов, становится свойством личности, которое называют любознательностью, пытливостью, а Анатоль Франс определял как «жажду знаний» [24].

Таким образом, наличие такого свойства личности, как любознательность, является одним из показателей направленности субъекта на исследовательскую деятельность.

В контексте рассматриваемого вопроса весьма полезными для нашего анализа являются исследования педагогов и психологов по проблеме форми рования мотивов учения (В.В. Давыдов [69], С.Л. Рубинштейн [181], Г.И. Щукин [224], и др.). Так, например, авторы выделяют внутренние и внешние мотивы учения. К внешним мотивам можно отнести социальные мотивы – получить хорошую оценку за выполненную работу, получить достаточный уровень знаний, умений и навыков для поступления в вуз. К внутренним мотивам можно отнести желание и потребность учащихся заниматься исследовательской деятельностью, как на уроках математики, так и во вне урочное время. Исходя из особенностей мотивов учения, мы будем считать одним из показателей направленности личности на исследовательскую дея тельность желание и потребность заниматься изысканиями во внеурочное время, решать проблемные задачи. Кроме того, детермированныи переход внешних мотивов учения во внутренний план мы будем считать показателем роста потребности и интереса к исследовательской деятельности у учащихся профильных классов.

Придерживаясь схемы, выражающей структуру деятельности, рассмотрим целеполагание – важнейшее и существенное свойство любой деятельности и в то же время – исходный компонент ее структуры. Целеполагание в научном исследовании является «движущей силой», а разрешение противоречий составляет содержание творчества, удовлетворение потребностей – цель его. В научном и учебном исследовании целеполагание есть ориентировочная основа действий, которые исследователь выбирает для реализации цели. Однако в научном исследовании, являясь движущей силой разрешения противоречий, целеполагание включает цель, которая вызывает внутреннее противоречие и потребность ученого разрешить исследуемую неопределенность. В учебном исследовании целеполагание становится движущей силой только тогда, когда цель субъективно важна и значительна для участника этого процесса [34].

«Значимые цели пробуждают, мобилизуют, направляют волю и повеление людей... в целеполагании важную роль играют мышление, воображение, эмоции, чувства, мотивы», – отмечает М.И.Дьяченко. Однако, как замечает С.Л. Рубинштейн [181], цель исследования должна быть посильна учащемуся, поскольку проблемы, решаемые ученым и учащимися в процессе познания, различны генетически (источнику возникновения) и, следовательно, мотивы деятельности – различны. Итак, субъект учения ставит перед собой цели на основе потребностей, интересов или осознания и принятия задач, которые перед ним ставит учитель. Потребности формируются в процессе обучения учащихся действиям, которые направлены на достижение целей.

Особенностями исследовательской деятельности учащихся в процессе обучения являются следующие:

– направленность на овладение знаниями и умениями в процессе исследования;

– направленность на усвоение приемов и способов научных методов познания (аналогия, индукция, дедукция и пр.);

– влияние на изменение личности самого ученика, его развитие (целеустремленность, любознательность, развитие творческого потенциала).

Основным содержанием исследовательской деятельности являются как теоретические знания, так и приемы, способы деятельности, а также соответ ствующие им умения и навыки: наблюдение, анализ, сравнение, аналогия, обобщение, классификация и пр. При этом эмпирическим знаниям соответствуют эмпирические (формальные) действия, теоретическим знаниям – теоретические (или содержательные) действия в процессе исследования.

Потребностью в исследовательской деятельности является стремление учащихся к исследованию неопределенностей, проблем, задач, содержащих знания, неизвестные школьнику.

Специфика учебного исследования состоит в том, что при его осуществлении учащийся открывает новые знания и овладевает ими и новыми способами действий. Предназначение исследовательской деятельности учащихся состоит в том, что, будучи формой активности индивида, она является условием и средством его психического развития. Психическое же развитие обеспечивает школьнику усвоение теоретических знаний и способствует формированию у него специфических способностей и качеств личности: любознательности, целеустремленности, научной фантазии.

Эффективное использование учебных исследований при обучении математике предполагает знание их структуры и назначение основных ее компонентов. Для этого обратимся к анализу точек зрения психологов, педагогов, математиков и методистов, относящихся к исследуемой нами проблеме.

В.Ю. Ульянинский [177], характеризуя исследовательскую работу в ее школьном применении как самостоятельное решение различного рода вопросов, выделял этапы:

1) непосредственного активного наблюдения,

2) самостоятельного экспериментирования исходного и проверочного;

3) самодеятельного творческого воспроизведения.

В работах известного отечественного педагога Б.Е. Райкова [177] определен исследовательский метод как «метод умозаключений от конкретных фактов, самостоятельно наблюдаемых и изучаемых школьниками», и выделены следующие стадии этого процесса:

1) наблюдение и постановка вопроса;

2) построение предположительных решений;

3) исследование предположительных решений и выбор одного из них как наиболее вероятного;

4) проверка гипотезы и окончательное ее утверждение.

И.Я. Лернер [137], определив сущность исследовательского метода, выделяет следующие этапы учебного исследования:

1) наблюдение фактов и явлений;

2) выявление непонятных явлений, подлежащих исследованию;

3) изучение фактов, связанных с такими явлениями;

4) объяснение этих фактов;

5) фактические выводы, требующие приложений знаний о данном факте или явлении.

Г.К. Муравин [155] представляет самостоятельные исследования учащихся по математике в виде следующего относительно завершенного исследовательского цикла: наблюдение – гипотеза – проверка гипотезы.

Последовательное использование исследовательского подхода в обучении является очень трудоемким, следствием чего есть его ограниченное использование на практике. Современные информационные и коммуникационные технологии (ИКТ) и, прежде всего современные компьютерные математические системы (КМС) образуют информационную инфраструктуру, которая позволяет эффективно использовать на практике исследовательский подход. Исследовательский подход с использованием информационно-коммуникационных технологий (ИКТ) влияет на все компоненты методической системы обучения математики: цели, содержание, формы, методы, средства обучения. Раковым С.А. [178] были разработаны теоретические основы компьютерно-ориентированной методической системы подготовки учителей математики, ориентированной на формирование их математических компетентности на базе внедрения исследовательских подходов в обучении с использованием информационных технологий.

На сегодня разработано значительное количество программных средств , ориентированных на использование при изучении математики. В частности, в Украине создана компьютерная программа GRAN-1, разработанная М.И. Жалдаком и Ю.В. Горошко [84], которая используется при изучении курсов алгебры и начал анализа и некоторых разделов геометрии. Позднее М.И. Жалдак и О.В. Витюк [85] разработали компьютерную программу GRAN-2D, которая относится к разряду программ динамической геометрии и предназначена для исследования систем геометрических объектов на плоскости и компьютерная программа GRAN-3D, которая дает возможность учащимся оперировать моделями пространственных объектов, что изучаются в курсе стереометрии и обеспечивает получение соответствующих числовых характеристик разных объектов в трехмерном пространстве. Компьютерная поддержка изучения математики посредством названных выше компьютерных программ дает значительный педагогический эффект, облегчая, расширяя и углубляя изучение и понимание математических методов. Такой подход к изучению математики дает наглядные представления о понятиях, что изучаются, что в свою очередь значительно содействует развитию гибкости мыслительных процессов как одного из компонентов математических способностей.

Таким образом, различия в выделенных разными авторами этапах учебного исследования и их количестве объясняются существованием раз личных видов математических исследований. Рассматривая исследования определенного вида, каждый автор выделяет этапы, наиболее характерные именно для него. Однако можно заметить, что многие из них отражают одну и ту же суть.

1.4. Функции поисково-исследовательских задач в процессе обучения алгебре и началам анализа и геометрии

Поисковая задача – это любая нестандартная задача, при предъявлении которой учащиеся не знают заранее ни способа ее решения, ни того на какой учебный материал опирается решение [115]. Учащиеся в ходе решения таких (поисковых) задач должны провести поиск плана решения задачи, установить , какой теоретический материал дает ключ к тому или иному решению.

Ю.М. Колягин [115] отмечает, что поисковые задачи могут использоваться для введения изучения новой темы, для самостоятельного установления школьниками какого-либо факта, подлежащего изучению, для иллюстрации этого факта, для более глубокого усвоения теоретического материала, для выработки некоторых необходимых умений и навыков в целях контроля и самоконтроля, для возбуждения и развития интереса к математике, для приобщения учащихся к деятельности творческого характера, для развития у школьников математического мышления, а также в целях воспитания.

Информация различного рода, получаемая учащимися в процессе решения задач, должна быть критически оценена не только учителем, но и учащимися. Из нее следует выделить наиболее важное и полезное. Такие (

особые) умения формируются при решении поисково-исследовательских задач.

Поисково-исследовательская задача – это, как правило, серия частных задач (первая из которых поисковая) и одна или две общего вида (исследова тельского характера). Процесс решения поисково-исследовательской задачи как и любой исследовательской задачи состоит из нескольких этапов.

Е.В. Баранова [13] считает, что основную структуру исследований должны образовать этапы:

1. Постановка проблемы.
2. Выдвижение гипотезы.
3. Доказательство (опровержение) гипотезы.

Применительно к процессу обучения математике в средней школе, А.Е. Захарова и Г.Б. Лудина [131] к основным компонентам учебного исследования относят:

– постановку проблемы исследования;

– осознание его целей;

– предварительный анализ имеющейся информации по рассматриваемому вопросу;

– условия и методы решения задач, близких к проблеме исследования;

– выдвижение и формулировка исходной гипотезы;

– анализ и обобщение полученных в ходе исследования результатов;

– проверка исходной гипотезы на основе полученных фактов;

– окончательная формулировка новых результатов, свойств, закономерностей;

– определение места найденного решения поставленной проблемы в системе имеющихся знаний.

Авторы В.А. Далингер, К.В. Толпекина в работе «Организация и содержание поисково-исследовательской деятельности учащихся по математике» отмечают, что в процессе обучения целесообразно поставить учащегося в такую ситуацию, чтобы он не только решал, но и сам как бы порождал решаемую им задачу, самостоятельно выявляя ее особенности в процессе многообразных переформулировок. Такая работа является поисково -исследовательской и способствует развитию математических способностей учащихся.

В процессе решения поисково-исследовательской задачи ключевое значение придается переформулированию мотивационной задачи (формулировке более общей задачи); мотивационная задача понимается нами как задача, на основании которой строится обобщение.

Как показал теоретический анализ и эксперимент при решении поисково-исследовательской задачи, наиболее приемлемыми являются следующие этапы исследования:

1. Мотивационная деятельность.
2. Постановка проблемы.
3. Сбор фактического материала.
4. Анализ полученных материалов (результатов).

5. Выдвижение гипотезы.
6. Проверка гипотезы.
7. Доказательство истинности гипотезы.
8. Вывод.

В данном диссертационном исследовании показано, каким образом на каждом из этапов исследования можно организовать формирование компонентов математических способностей (табл. 1.1.).

Построение содержательно-методической линии поисково-исследовательских задач связано с основными принципами построения любой содержательно-методической линии: научности, доступности, систематичности, последовательности. Как отмечает А.Я. Блох «понятие содержательно-методической линии возникло в итоге длительного поиска, направленного на выделение специфической категории, при помощи которой можно было бы проводить изучение методических особенностей учебных материалов и конструировать их» [21, с.34].

Таблица 1.1.

Формирование компонентов математических способностей на этапах исследования поисково-исследовательских задач

Этапы исследования	Формирование компонентов математических способностей
Мотивационная деятельность	Видение противоречий.
Постановка проблемы	Способность формулировать проблему. Обобщение.
Сбор фактического материала	Находить нужную информацию и переносить ее, применять в условиях задачи, гибкость мышления. Способность генерировать идеи.
Систематизация и анализ полученных результатов	Критичность мышления, способность оценочных суждений, анализ, классификация, обобщение.
Выдвижение гипотезы	Способность выдвигать гипотезы.
Проверка гипотезы	Интеллектуально-логические способности.
Доказательство истинности гипотезы	Находить нужную информацию и переносить ее, применять в условиях задачи, гибкость мышления. Способность генерировать идеи.
Вывод	Способность оценочных суждений, анализ, классификация, обобщение.

Построение содержательно-методической линии поисково-исследовательских задач связано с основными принципами построения любой содержательно-методической линии: научности, доступности, систематичности, последовательности. Как отмечает А.Я. Блох, «понятие содержательно-методической линии возникло в итоге длительного поиска, направленного на выделение специфической категории, при помощи которой можно было бы проводить изучение методических особенностей учебных материалов и конструировать их» [21, с.34].

Содержательно-методические линии, развиваемые в школьных курсах математики, должны отражать идейную сторону математики-науки и являться важнейшим средством обеспечения преемственности всего материала этих курсов.

Перечислим основные содержательно-методические линии современного школьного курса алгебры и начал анализа: числовая, функциональная, уравнений и неравенств, тождественных преобразований. М.А. Родионов отмечает, что курс и начал анализа по отношению к каждой содержательной линии построен в основном линейно, постоянно осуществляется переход к новому содержанию.

В геометрии выделяют такие содержательно-методические линии: аксиоматическая, функциональная, конструктивная, аналитическая, метрическая.

Наблюдаемое отсутствие достаточно прочных связей между отдельны ми темами современного школьного курса математики возможно устранить с помощью планомерного и целенаправленного развития содержательно-методических линий. При этом обогащение содержания курса, усиление в нем внутрипредметных связей достигается не за счет учебного материала, а за счет внутренних резервов, в частности, посредством трансформации линейного построения содержательно-методических линий в линейно-концентрическое.

При обучении учащихся решению поисково-исследовательских задач по алгебре и началам анализа и геометрии развитие внутрипредметных свя зей можно реализовать (при решении частных задач несколькими способами, используя метод аналогии и др.) посредством трансформации линейного построения содержательно-методических линий в линейно-концентрическое.

В.А. Далингер отмечает, что преподавание математики будет эффективным лишь тогда, когда содержательно-методические линии не смешиваются между собой, а чередуются друг с другом, тщательно различаясь одна от другой. Большую роль в такой работе играют аналогии и решение поисково-исследовательских задач, позволяющих приобщить учащихся к исследовательской деятельности [71, с.84].

Достижение цели развития математических способностей в процессе обучения требует тщательного отбора вопросов курса математики, подлежа щих обязательному усвоению с целью высвобождения учебного времени на сознательное, глубокое и прочное их усвоение в процессе решения разнообразных задач.

В число критериев отбора содержания обучения математике должен быть включен критерий, определяющий ценность учебного материала для решения задач математического развития учащихся как в явном виде (структура, номенклатура, научные трактовки основные понятия и т.п.), так и в неявном виде (например, возможность постановки познавательных задач, решение которых формирует творческое и математическое мышление). Ясно, что потенциальные возможности математического развития учащихся через содержание обучения, если они реализуются в учебных пособиях, должны быть заложены не только в теоретическом, но и в задачном материале.

Учитывая сказанное выше, при построении содержательно-методической линии поисково-исследовательских задач необходимо отобрать и составить достаточное количество поисково-исследовательских задач такого типа, чтобы на этапах исследования можно было организовать развитие математических способностей учащихся.

Анализ учебников и задачников показывает, что такие задачи предлагаются очень редко. Анализ посещенных занятий учителей школ показывает, что обычно методика обучения учащихся алгебре и началам анализа и геометрии строится на основе использования традиционных методов и очень редко используется исследовательский метод и решение различных творческих задач.

Для воспитания у учащихся устойчивого интереса к изучению математики, творческого отношения к учебной деятельности (математического характера) необходима постановка учебных математических задач проблемного (поискового) математического характера. Задачи указанной целевой направленности могут быть весьма разнообразными (по форме, в которой они поставлены; по той дидактической цели, которой они служат; по месту в процессе обучения).

Выводы к разделу 1

Решение проблемы развития математических способностей учащихся связано с учетом трех аспектов: социального, психолого-педагогического и методического. Социальный аспект проблемы связан с сохранением и нара щиванием интеллектуального потенциала подрастающего поколения, смещением акцента на максимальное развитие индивидуальных способностей личности, в том числе и математических способностей, с усилением внимания к обучению способных и одаренных детей. Психолого-педагогический аспект проблемы позволяет рассматривать внутренние механизмы развития математических способностей, их структуру, особенности диагностики, а также выявлять пути развития математических способностей и педагогические условия их реализации.

Анализ психолого-педагогической и методической литературы позволил выделить следующие методические требования к организации математической деятельности учащихся, направленной на развитие их математических способностей:

1) создание условий для формирования у учащихся положительной мотивации и устойчивого интереса к математической деятельности;

2) приоритет самостоятельной математической деятельности школьников;

3) учет индивидуальных и возрастных особенностей учащихся, а также актуального и потенциального уровней развития их математических способностей;

4) достижение учащимися определенного уровня «профессионализма» в овладении базовым теоретическим материалом и навыками решения базовых задач;

5) создание условий для развития различных компонентов математических способностей.

Методические возможности формирования и развития культуры мышления в процессе обучения математике; творческий характер учебной математической деятельности овладения математическим материалом; связь компонентов структуры математических способностей с показателями умственного развития; приобретаемость математических способностей позволяют сформулировать проблему педагогической поддержки развития математических способностей.

Выявлены методические особенности поисково-исследовательских задач, позволяющие использовать их для эффективного развития большинства компонентов математических способностей.

РАЗДЕЛ 2
МЕТОДИКА РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ УЧАЩИХСЯ В ПРОЦЕССЕ ИЗУЧЕНИЯ ПОИСКОВО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ ЗАДАЧ В КЛАССАХ С УГЛУБЛЕННЫМ ИЗУЧЕНИЕМ МАТЕМАТИКИ

2.1. Составление поисково-исследовательских задач как средство развития математических способностей учащихся

Для развития математических способностей необходимо включать школьников в творческую математическую деятельность. В качестве такой деятельности может выступать составление учащимися математических задач.

Составление учащимися математических задач имеет и важное воспитательное значение, ибо в практической деятельности каждому человеку приходится сталкиваться не только с разрешением кем-то поставленных перед ним проблем и задач, но и самому их вычленять, ставить и решать. В связи с этим вопросы, касающиеся составления учащимися задач , неоднократно поднимались в психолого-педагогической и методической литературе.

В работах виднейших методистов конца XIX и начала XX вв. В.А. Евтушевского [80], Ф.И. Егорова [81], Ф.А. Эрна [228] и др. рассматривались вопросы самостоятельного составления школьниками задач в связи с реали зацией выдвинутого методистами принципа активности обучения. Ф.А.Эрн отмечал, что «придумывание учащимися своих собственных задач еще по лезнее, чем решение готовых задач, предложенных учителем или взятых из сборника. ...Составление задач самими учениками, начиная с самых простых и кончая довольно сложными, могло бы внести в преподавание арифметики живительную струю, возбуждая в учащихся интерес к предмету и давая им возможность проявлять и в области арифметики свои способности к творчеству» [225, С. 120].

Упражнения на составление учащимися задач были предложены В.А. Евтушевским, который впервые стал рассматривать их как способ обучения решению готовых задач [80].

Составление задач как один из методов обучения решению готовых задач и развития матемтаических способностей учащихся рассматривался в работах В.А. Крутецкого [127], Н.А. Менчинской [147], Н.Н. Поспелова и Н. И. Поспелова [175], Л.М. Фридмана [203], П.М. Эрдниева и Б.П. Эрдниева [227] и др., а также в диссертационных исследованиях Буй Ван Хуэ [31], Н.Д. Волковой [37], Ю.А. Горяева [60], Э.Э. Жумаева [87], Т.В. Певчевой [164], Ф. Ф.Семьи [185], Э.А. Страчевского [191], Е.Н. Тальяновой [193], А.Я.Цукаря [209], Н.И. Чиканцевой [211], А.Ю. Эвнина [225], Э.А. Ясинового [230] и др.

В ряде психолого-педагогических и методических работ указывается на важность самостоятельного составления учащимися основной школы математических задач. Так А.В.Шатилова отмечает, что «конструирование за дач – это важнейшая составляющая общего умения решать математические задачи» [216, С. 3]. Е.С. Канин замечает, что составление учащимися задач приучает их к переконструированию задачной ситуации, что является одним из наиболее важных приемов поиска решения задач [100, С. 8]. О.П. Эрдниев отмечает, что составлять «фокусы», задачи, теоремы, числа, уравнения, неравенства под силу любому школьнику, начиная с первого класса. Составление задач рассматривается как условие активного обучения. Им вводится «формула активного обучения: не решать чужие задачи, а составлять свои» [226, С. 40]. Д. Пойа отмечает, что нельзя считать полным математический опыт учащегося, «если он не имел случая решить задачу, изобретенную им самим» [172, С. 110].

Самостоятельное составление учащимися задач позволяет в большей степени, чем решение готовых задач, проявлять им самостоятельность мышления, исследовательские умения. Это обусловлено тем, что составление задач часто требует от школьников применения рассуждений, которые не в ыполняются ими при решении готовых задач, а это в свою очередь создает предпосылки для развития интереса учащихся к занятиям математикой и для развития у них всех компонентов математических способностей.

Процесс составления учениками задач связан с формированием и развитием у них определенной гибкости мышления, способности к обратимости мыслительных процессов, способности к обобщению математического материала, умения и готовности рассматривать возникающие нестандартные и проблемные ситуации, находить наиболее рациональные способы их разрешения.

При проведении работы по решению и составлению задач школьники учатся анализировать структуру задачи, выделять свойства объектов, являющихся участниками задачной ситуации, различать среди них свойства, являющиеся общими, отличительными, существенными или несущественными. Становится возможным развитие способности к схватыванию формальной структуры задачи, способности к обобщению математических объектов, отношений и действий. Данные способности являются важными компонентами в структуре математических способностей учащихся.

Указанные развивающие возможности составления задач направлены и на формирование у учащихся умения получать новые знания, ориентироваться не только в школьном обучении, но и в других сферах теоретической и практической деятельности человека. Как уже отмечалось нами выше, умение выдвигать проблемы и ставить задачи является в деятельности человека не менее важным, чем их решение. Поэтому перед современной школой стоит задача учить своих учеников не только отвечать на вопросы, но и ставить их, в частности в виде составления математических задач.

Все вышесказанное позволяет сформулировать следующие *цели использования заданий на составление задач при обучении математике:*

1) повышение уровня сформированности у учащихся умений решать задачи;
2) повышение у учащихся уровня осознанности знаний;
3) обучение учащихся анализу исходных задачных данных;
4) формирование у учащихся четких представлений о сущности и структуре задач, развитие способности к схватыванию формальной структуры задачи;
5) развитие у учащихся способности к логическому мышлению в сфере количественных отношений числовой и знаковой символики;
6) развитие у учащихся способности к обобщению математического материала;
7) развитие у учащихся гибкости мыслительных процессов, способности к их обратимости;
8) воспитание устойчивого интереса к математической деятельности.

Несмотря на признание педагогической ценности упражнений на само стоятельное составление учащимися задач, как показывает практика, этому виду деятельности в процессе обучения учащихся основной школы уделяется недостаточно внимания. Причины этого кроются, главным образом, в сло жившейся методике обучения математике, предполагающей в основном решение целесообразно подобранных учителем задач. В связи с этим в существующих учебных пособиях по математике для основной школы практически отсутствуют задания на составление задач. Довольно часто и сами учителя не владеют методикой составления учебных математических задач.

В настоящее время в методической литературе существуют различные подходы к выделению видов составления задач и к определению педагогической ценности их различных видов.

Ряд авторов (Е.С. Канин, Н.П. Тучнин, А.Я. Цукарь, О.П. Эрдниев, Э.А. Ясиновый и др.) придают большое значение составлению задач в той или иной степени подобных задачам уже решенным учащимися (так называемое «связанное» составление задач). Это позволяет, с их точки зрения, полнее и глубже осознавать учащимся структуру задачи, понимать зависимости между величинами, замечать общее в явлениях, внешне отличных друг от друга.

Другой подход состоит в придании определяющего образовательного значения свободному составлению задач (В.Т. Снигирев, Я.Ф. Чекмарев и др .). Составлению же задач, подобных решенным, нужно уделять лишь небольшое количество учебного времени.

Для нашего исследования интерес представляет именно «связанное» составление задач, т.е. составление задач, развивающих тему ранее решенной задачи.

Всякое задание на «связанное» составление математической задачи должно содержать какое-то основание для составляемой задачи. В роли такого основания может выступать любое указание о том, какой должна быть составляемая задача, что она должна содержать, какими свойствами должна обладать и т.д.

Л.М. Фридман выделяет пять видов таких оснований:

1. Какой должна быть составляемая задача: она должна быть чисто математической или прикладной; должна соответствовать какому-то определенному разделу (теме) изучаемого курса; должна содержать описание какого-то процесса (например, задача на совместную работу, на движение, на концентрацию и т.д.); должна быть простой или сложной, занимательной, оригинальной, иметь несколько способов решения и т.д.
2. Что должна содержать составляемая задача: составляемая задача должна содержать определенный компонент (например, сюжет), те или иные условия, их количество, то или иное требование, те или иные числовые данные и т.д.
3. Какими свойствами (признаками) должна характеризоваться состав ляемая задача: задача должна иметь определенное решение, причем решение может быть и приведено, или может быть дано указание о том, как оно должно выглядеть; она должна быть аналогичной данной задаче по сюжету, по характеру описываемого процесса, по характеру решения и т.д.; задача должна быть обратной данной; она должна быть обобщением заданной задачи или ее специализацией и т.д.
4. В результате какого вида деятельности должна быть составлена задача: составляемая задача может появиться в результате наблюдений, опыта, экскурсии и т.д.
5. Какова база для составления задачи: базой для составления математической задачи может выступать какой-то предмет, явление, график, рисунок, запись решения, формула, теорема и т.д. [204, С. 112].

В качестве оснований в нашем исследовании будут рассматриваться содержание составляемой задачи и ее свойства (признаки), остальные основа ния будут зафиксированы: составляемые задачи будут носить поисково-исследовательский характер, процесс составления должен осуществляться в процессе наблюдений над решением исходной задачи, которая и является базой для составляемой задачи.

В научно-методической литературе, посвященной составлению математических задач, уделяется особое внимание выделению видов составления задач.

Э.А. Страчевский [191] рассматривает структурно-логические схемы математических задач. Большинство задач школьного курса математики имеет структурно-логическую схему вида: A $\Rightarrow$ B, где A – посылки (основание), B – заключение (следствие), $\Rightarrow$ – «логическая цепочка», ведущая от заданных посылок к следствию. Автор вводит понятие математической ситуации, под которой понимается любой отдельно взятый компонент структуры задачи [191, С. 7]. Составление задачи начинается с выбора математической ситуации. В соответствии с возможными ситуациями выделяются типы задач на составление, а именно: ситуации типа A (т.е. ситуации, в которых известны посылки) позволяют составлять задачи вида: A $\Rightarrow$?, A ? ?, A ? B; ситуации типа B (т.е. ситуации, в которых в качестве исходного материала выбирается требование) порождают задачи вида: ? $\Rightarrow$ B , ? ? B, A ? B; ситуации типа $\Rightarrow$ (т.е. ситуации, в которых известна логическая цепочка, соединяющая посылки и требование) порождают задачи вида: $A \Rightarrow$?, ? $\Rightarrow$ B, ? $\Rightarrow$?.

Н.И. Чиканцева выделяет следующие виды составления задач:
1) составление задачи путем постановки вопроса;
2) составление задачи по заданным числовым данным;
3) составление задачи по картинке, по заданному графику, диаграмме;
4) составление задачи по указанной зависимости между величинами;
5) составление задачи по заданному вопросу;
6) составление задачи, обратной данной [211, С. 79].

С.Г. Губа рекомендует составлять задачи на доказательство с помощью таких приемов как:

1) рассмотрение обратного утверждения;
2) использование одной и той же математической закономерности в различных ситуациях;
3) получение частных и предельных случаев;
4) обобщение задачи;
5) составление из нескольких простых задач одной более сложной;
6) совмещение условий двух исходных задач;
7) применение приема аналогии [66, С. 9-11].

Е.С. Канин рассматривает виды составления задач, порожденных некоторой исходной задачей, или развивающих тему данной задачи. К основным видам составления таких задач им отнесены:

1) составление задачи путем замены части данных в исходной задаче другими данными без замены заключения задачи;
2) составление задачи при помощи обобщения данных или искомых;
3) составление задачи путем специализации данных или искомых;
4) составление задачи добавлением новых заключений без изменения имеющихся данных;
5) составление задачи путем замены части данных ее искомыми (т.е. путем обращения задачи) [100, С. 8].

Анализ научно-методической литературы позволил нам из предлагаемых разными авторами видов составления математических задач выбрать те, которые позволяют учащимся самостоятельно составлять поисково-исследовательские задачи, порожденные исходной задачей. К этим видам составления задач мы относим:

1) составление задач, аналогичных исходным;
2) составление задач, обратных заданным;
3) составление задач, являющихся обобщениями исходных задач;
4) составление задач, являющихся специализациями решенных задач.

Охарактеризуем каждый из предложенных выше видов заданий на составление задач.

1. *Составление задач, аналогичных исходным.*

Под *аналогичными задачами* будем понимать такие задачи, которые сходны в определенном смысле, хотя в целом они выражают различные содержания. В частности, будем считать аналогичными задачи, которые имеют одинаковую логическую цепочку решения или большую ее часть.

Составление задач, аналогичных решенной учащимися задаче, следует проводить на заключительном этапе работы над исходной задачей. С этой целью учащимся необходимо произвести анализ посылки, требования и по лученного решения (или одного из способов решения) исходной задачи. На основе проведенного анализа следует определить возможность варьирования: а) данных в посылке; б) данных в требовании; в) данных в посылке и требовании одновременно.

Выделение варьируемых данных и позволяет учащимся конструировать новые задачи, аналогичные исходной.

Приведем пример задания на составление задач, аналогичных исходной.

Задача. При каких натуральных значениях *n* сумма

кратна 10? Составьте задачи, аналогичные данной.

В результате анализа структуры и решения исходной задачи учащимися может быть составлена, например, такая задача:

Задача. При каких натуральных значениях n сумма кратна 3?

При составлении данной задачи была учтена возможность варьирования данных и в посылке и в требовании задачи.

2. Составление задач, обратных заданным.

Прием обращения задачи состоит в следующем: после решения исходной задачи надо составить и решить задачу, обратную по отношению к исходной. С этой целью в посылку исходной задачи вводится ее требование, а некоторые данные из посылки переводятся в разряд требований.

Прием обращения задачи можно представить с помощью следующей логическо-структурной схемы:

Прямая задача.	Обратная задача.
А, А1 В	А, В А1

Продемонстрируем сказанное на следующем примере:

Задача. Докажите, что если сумма трех последовательных целых чисел есть число нечетное, то их произведение кратно 24. Составьте обратное утверждение. Верно ли оно?

Применяя прием обращения, учащиеся могут сформулировать следующее утверждение: «Если произведение трех последовательных чисел кратно 24, то их сумма есть нечетное число».

Ложность сформулированного утверждения доказывается посредством приведения контрпримера. Например, произведение 7*8*9 кратно 24, но 7+8+9=24 – четное число.

Составление задач, обратных данным, помогает учащимся лучше понимать структуру математических задач, приучает формулировать и доказывать утверждения, обратные изучаемым на уроках, т.е. происходит существенное углубление и расширение представлений и знаний учащихся. Кроме того, методы решения обратных задач нередко отличаются от решения исходных, а знакомство с новыми методами решения задач существенно обогащает математический кругозор учащихся.

3. Составление задач, являющихся обобщениями исходных задач.

Составление задач, аналогичных решенным, позволяет получать задачи, подобные , однопорядковые с исходной. От него существенным образом отличается составление задачи с помощью приема обобщения. Это отличие выражается, прежде всего, в том, что новая задача оказывается при обобщении в той или иной степени сложнее исходной. Отметим, что процесс обобщения основывается на применении аналогии, но, тем не менее, не сводится к ней целиком.

Обобщение решенной задачи может иметь различный характер: оно может быть более широким или более узким. Результат обобщения зависит не только от суммы имеющихся знаний у учащихся, но и от умения комбинировать и связывать эти знания и полученные результаты по-новому, от уровня развития способности к формализованному восприятию математического материала, способности к быстрому и широкому обобщению математических объектов и отношений, от уровня развития у учащихся гибкости мыслительных процессов. И если предварительная сумма знаний у учащихся одного класса примерно одинаковая, то индивидуальные математические способности могут находиться на разных уровнях развития.

В процессе обучения учитель должен показать учащимся неисчерпаемость связей между математическими задачами. После решения исходной задачи почти всегда учащиеся могут найти в ней предмет для дальнейших наблюдений и размышлений. Повсеместно можно найти несколько направлений для развития и обобщения решенной задачи. Это позволяет учащимся составлять и затем решать задачи-обобщения разных уровней сложности.

В методической литературе выделяются следующие способы получения обобщений учащимися при составлении задач, развивающих тему исходной задачи:

1) отбрасывание некоторого ограничения;
2) замена конкретного значения параметра произвольным;
3) изменение количества параметров;
4) два различных обобщения в одном и том же направлении;
5) два различных обобщения в разных направлениях [216, С. 47-48].
6) обобщение задачи может осуществляться путем: а) обобщения посылки; б) обобщения требования; в) обобщения и посылки и требования одновременно.

Приведем пример задания на составление задачи с помощью приема обобщения.

Задача. Докажите, что значение выражения кратно 12 при любом целом n, а значение выражения кратно 101 при любом целом значении n. Составьте и решите задачу, которая носила бы более общий характер по отношению к исходной.

Обобщив посылку в исходной задаче, можно получить, например, такую задачу:

Задача. Докажите, что значение выражения кратно a при любом целом значении n и при любом целом a, $a \in Z$.

Обобщение и посылки и требования позволяют сформулировать следующую задачу:

Задача. Докажите, что значение выражения кратно 2a при любом целом значении n и при любом целом a, $a \in Z$.

4. Составление задач, являющихся специализациями решенных задач.

Специализация задачи – это прием, обратный приему обобщения задачи. Ее можно осуществлять посредством: а) специализации условия; б) специализации требования; в) специализации условия и требования.

Задача. Докажите, что значение выражения кратно 12 при любом целом n, а значение выражения кратно 101 при любом целом значении n. Составьте и решите задачу, которая носила бы более общий характер по отношению к исходной.

Обобщив посылку в исходной задаче, можно получить, например, такую задачу:

Задача. Докажите, что значение выражения кратно a при любом целом значении n и при любом целом a, $a \in Z$.

Обобщение и посылки и требования позволяют сформулировать следующую задачу:

Задача. Докажите, что значение выражения кратно 2a при любом целом значении n и при любом целом a, $a \in Z$.

Составление задач, являющихся специализациями решенных учащимися задач, позволяет школьникам лучше и глубже понять рассмотренные свойства математических объектов, выявленные закономерности, осуществлять переход от общего к частному, видеть в решении общих проблем решение некоторых частных проблем и т.д.

Составление учащимися задач на основе приема специализации служит средством развития у них способности к формализованному восприятию математического материала, к гибкости мыслительных процессов, а также способности к перестройке направленности мыслительного процесса.

К отбору заданий, направленных на самостоятельное составление учащимися поисково-исследовательских задач, будем предъявлять следующие методические требования:

1. Исходная задача, а также задачи, которые могут быть получены из нее путем обобщения, специализации, обращения, аналогии должны быть адекватны учебным возможностям учащихся.
2. Исходная задача должна иметь (по возможности) различные способы решения, так как разные подходы к решению могут обнаруживать специфические свойства и взаимосвязи объектов в базовой задаче, позволяющие составлять на их основе различные новые задачи.
3. В качестве исходной целесообразно выбирать такую поисково-исследовательскую задачу, на основе которой могут быть реализованы несколько видов (или даже все) составления задач.
4. Рассматриваемые задачи (исходная и составляемые) должны способствовать росту у учащихся уровня сформированности умений решать поисково-исследовательские задачи школьного курса математики.
5. Рассматриваемые задачи должны содействовать развитию всех компонентов математических способностей учащихся 9-11 классов.

В процессе конструирования задачи, порожденной некоторой исходной задачей, можно выделить несколько этапов:

1) решение исходной задачи (желательно несколькими способами);

2) принятие цели на составление задачи;

3) создание в воображении математической ситуации, соответствующей поставленному заданию на составление новой задачи;

4) установление вида или структуры задачи, соответствующей заданной математической ситуации;

5) постановка посылки и требования, соответствующих виду или структуре задачи и выбранной математической ситуации;

6) подбор числовых данных;

7) формулировка посылки и требования задачи;

8) решение сформулированной задачи.

Соблюдение такой последовательности в процессе составления поисково-исследовательских задач позволяет именно обучать школьников конструированию математических задач, ликвидируя в учебной работе возможный элемент стихийности.

Рассмотрим возможные формы работы по обучению учащихся составлению задач.

Обучение школьников 9-11 классов составлению задач можно проводить в форме фронтальной работы, протекающей в виде эвристической беседы, в форме самостоятельной работы (в классе или дома) по карточкам, содержащим необходимые указания к выполнению заданий, а также в форме индивидуальных заданий. Важную часть работы составляет коллективное обсуждение в классе полученных индивидуальных результатов, чем достигается органическое соединение индивидуальной работы каждого ученика с коллективной работой всего класса. Нельзя добиться развития математических способностей учащихся, не развивая самостоятельности их мышления, но и нельзя также ограничивать умственное развитие учащихся одной лишь индивидуальной познавательной деятельностью.

Одним из вариантов проведения фронтальной и самостоятельной работы по составлению поисково-исследовательских задач может быть использование многокомпонентных заданий [227, С. 14]. Такие многокомпонентные задания образуются из нескольких логически разнородных, но психологически состыкованных в некую целостность частей.

Урок, построенный на основе многокомпонентного задания, может состоять из следующих этапов:

1) решение готовой задачи по тематике урока;

2) нахождение различных способов решения исходной задачи;

3) составление и решение новых задач, аналогичных исходной, на основе анализа найденных способов решения базовой задачи;

4) составление обратной задачи и ее решение;

5) составление и решение задач, являющихся обобщениями (специализациями) того или иного уровня.

Приведем пример многокомпонентного задания.

Задача. Решить уравнение .

Выполните следующие задания:

1. Решите задачу несколькими способами. Выберите из них более рациональный.

2. Составьте и решите задачи, аналогичные данной:

а) изменив посылку и оставив требование без изменений;

б) изменив требование и оставив посылку без изменения;

в) изменив и посылку и требование;

г) изменив сюжет задачи.

3. Составьте и решите задачу, являющуюся обобщением данной.

Отметим, что не всегда многокомпонентное задание может содержать задания на все рассмотренные виды составления задач. Именно так обстояло дело в приведенном выше примере многокомпонентного задания. Тем не менее, учителю целесообразно так подбирать исходную задачу, чтобы реализовать если не все, то, хотя бы, большинство из видов составления новых задач.

Составление новых поисково-исследовательских задач у разных учащихся проходит не с одинаковым успехом, что объясняется их индивидуальными особенностями и уровнем развития их математических способностей.

В процессе выполнения школьниками самостоятельной работы по составлению задач, порожденных готовой задачей, учителю следует оказывать им дифференцированную помощь. С этой целью полезно иметь специально заготовленные

карточки с наводящими вопросами или вспомогательными заданиями, нацеливающими ученика на выполнение исходного задания.

Степень подробности предлагаемых для учеников указаний должна определяться уровнем их математической подготовки, а также уровнем развития их способностей.

Отметим, что использование карточек несколько уменьшает долю самостоятельности учащихся в составлении задач, однако и оставшаяся часть работы требует от учеников определенных творческих усилий.

В целях лучшей индивидуализации и дифференциации процесса обучения целесообразно практиковать индивидуальные задания по составлению поисково-исследовательских задач. Учителю необходимо подобрать для каждого учащегося с учетом его индивидуальных возможностей задачу для решения и составить к ней задания и указания на составление задач, ею порождаемых. Такие индивидуальные задания лучше предлагать для домашней работы на длительный срок, например на 1-2 недели. Лучшие задачи, составленные учащимися, рекомендуем включать в процесс обучения на соответст вующих тематике уроках. При решении таких задач на уроке следует сообщать классу фамилию автора. Этот прием имеет несколько положительных аспектов. Во-первых, у других учащихся появляется желание решить задачу, составленную товарищем. Во-вторых, задача изначально не вызывает «страха» у ученика («если мой товарищ, обладающий тем же или примерно таким же запасом исходных знаний, справился с составлением ее, то я должен справиться с ее решением»). В-третьих, у учащихся активизируется желание составить свои задачи с тем, чтобы и они впоследствии были продемонстрированы на уроке.

Работа по самостоятельному составлению учащимися поисково-исследовательских задач должна иметь четкую мотивацию. Учителю необходимо убедить учащихся в ценности этого вида работы. Одним из возможных мотивов может быть желание школьников почувствовать себя учеными-математиками, открывающими новые математические факты. И хотя новизна получаемых учениками результатов носит субъективный характер, это не лишает ребят того удовлетворения, которым обычно сопровождается всякая творческая деятельность. По мере продвижения к старшим классам, учащиеся должны все более ясно понимать, что в математике, в целом, и в теории чисел, в частности, получение существенно нового результата является делом весьма нелегким.

Итак, все вышеизложенное позволяет нам говорить о том, что работа по составлению учащимися задач, порожденных исходной задачей, может быть эффективной если:

1) **работа по составлению задач ведется систематически во взаимосвязи с решением готовых задач, в том числе и несколькими способами;**
2) **исходная задача, а также задачи, которые могут быть получены из нее путем аналогии, обращения, обобщения, специализации, адекватны учебным возможностям учащихся;**
3) **в качестве исходной выбрана такая задача, на основе которой могут быть реализованы несколько видов (или даже все) составления задач;**
4) **учащиеся четко представляют структуру той задачи, которая выбрана в качестве исходной, и тех задач, которые должны быть составлены на ее основе;**
5) **учителем созданы предпосылки (мотивы), побуждающие учащихся к самостоятельному составлению задач;**
6) **работа учащихся по составлению задач не только поощряется, но и оценивается учителем.**

Таким образом, эффективное использование заданий на самостоятельное составление учащимися задач, развивающих тему исходной задачи, является одним из возможных путей развития у школьников их математических способностей.

Проблема поиска эффективных методов организации обучения, позволяющих учитывать основные индивидуально-психические особенности мыслительной деятельности школьников и тем самым создающих определенные условия для их умственного развития, остается актуальной задачей педагогической теории и практики.

2.2. Содержательный и процессуальный компоненты методики обучения учащихся решению поисково-исследовательских задач

2.2.1. Основные приемы обучения учащихся решению поисково-исследовательских задач

Анализ положений, выдвинутых в главе 1, показывает, что математические способности характеризуются сложной структурой и множеством компонентов. Основной особенностью математического мышления является создание субъективно нового продукта, выходящего за пределы сложившейся системы знаний человека.

В связи с этим при подборе и составлении поисково-исследовательских задач необходимо учитывать, что в процессе решения этих задач можно создать условия для формирования свойств математических способностей: гибкости, оригинальности, самостоятельности, переноса знаний, беглости др.

Рассмотрим основные приемы обучения учащихся решению поисково-исследовательских задач.

Высшим уровнем проблемного обучения является творческое обучение, при котором учащиеся активно участвуют в поиске и формулировании проблем, а затем и в их решении. Примером такого обучения может служить руководство творческим поиском учащегося, когда решение какой-либо проблемы разбивается учителем на ряд проблем-ступеней, решение которых учащийся находит самостоятельно. Такой характер носит процесс обучения решению поисково-исследовательских задач.

Поисково-исследовательские задачи предполагают различные приемы решения. Поэтому их условно можно классифицировать следующим образом:

1. Поисково-исследовательские задачи, в основе решения (поиска решения) которых лежит индуктивный метод.

2. Поисково-исследовательские задачи, в основе решения (поиска решения) которых лежит дедуктивный метод.

3. Поисково-исследовательские задачи, в основе решения (поиска решения) которых лежит сочетание индуктивного и дедуктивного методов.

4. Поисково-исследовательские задач, в основе решения (поиска решения) которых лежат аналитико-синтетический метод или же комбинация различных методов.

Учитывая тот факт, что для поиска решения поисково-исследовательских задач существуют различные методы, можно выделить различные приемы поэтапного обучения учащихся решению поисково-исследовательских задач.

Рассмотрим прием обучения решению поисково-исследовательских задач, в основе решения которых лежит индуктивный метод.

Введем понятие мотивационной задачи. Мотивационная задача – это задача, на основе которой строится обобщение.

Прием 1. Обучение решению поисково-исследовательских задач, в основе решения которых лежит индуктивный метод.

1. Проанализировать условие мотивационной задачи:

а) выполнить чертеж, рисунок;

б) выделить данные и искомые;

в) проанализировать данные, выявить связи между ними и всевозможные расположения фигур.

Определить метод (или способ) решения мотивационной задачи.

Поочередно двигаясь от искомых к данным и от данных к искомым, искать связи между ними, а затем, используя связи между искомыми и данными, определить метод решения.

2. Сформулировать задачу более общего вида (постановка проблемы), при формулировке задачи учитывать возможность использования метода полной математической индукции.

а) Изменить условие задачи так, чтобы мотивационная задача являлась бы частным случаем.

б) Переформулировать задачу так, чтобы задачу более общего вида в процессе исследования (или истинность результатов исследования) можно было доказать методом полной математической индукции, кроме этого должна быть возможность нахождения зависимости между параметрами.

Определить, можно ли разрешить проблему тем же методом, что и мотивационную задачу, если нет, то разрешить проблему по следующей схеме:

а) Решить несколько «частных» задач.

б) Проанализировать полученные результаты.

в) Выдвинуть гипотезу.

г) Доказать гипотезу методом полной математической индукции. Проиллюстрируем использование данного приема на примере.

Пример 1.

1. Мотивационная деятельность. Доказать неравенство:

(1)

если x+y+z=k, kє N, а затем доказать неравенство более общего вида.

1. Проанализировав условие мотивационной задачи, учащиеся определяют, что неравенство (1) можно доказать, используя синтетический метод.

2. Учащиеся формулируют условие задачи более общего вида.

2. Постановка проблемы.

«Найти зависимость между параметрами c, b и d , при которой неравенство:

.3

(2)

справедливо, если $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=k,\ k\in N$.

Формулируя задачу более общего вида, учащиеся изменяют формулировку мотивационной задачи, числовые коэффициенты заменяют параметрами, количество слагаемых увеличивают до *n*, где $n\in N$. Учитывая эти изменения, учащиеся должны при исследовании в итоге выразить параметры *c*, *b* и *d*, через *n* и *k* и доказать неравенство (2) методом полной математической индукции (так как любой другой метод не позволит доказать истинность неравенства (2) для всех натуральных чисел).

3. Сбор фактического материала. Учащиеся решают «частные» задачи , используя синтетический метод доказательства неравенства.

Доказать неравенство **(3)**

если x+y+z=k, kє N.

Доказательство: x+y+z=k, следовательно x = k–y–z.

EMBED Equation.3

EMBED Equation.3 **EMBED Equation.3** **EMBED Equation.3** **.**

Следовательно, неравенство (1) истинно.

4. Систематизация, анализ фактического материала. Выдвижение гипотезы. Учащиеся анализируют решение «частных» задач, находят зависимость между параметрами *c, b и d.* Выдвигают гипотезу.

Количество слагаемых	Значение суммы	Количество попарных произведений	Параметр ***c***	Параметр ***d***	Параметр ***b***
3	k	3			
n	**k**				

5. Доказательство истинности гипотезы. Учащиеся доказывают истинность гипотезы методом полной математической индукции.

Неравенство .3

истинно, если ,

, , x1+x2+x3+... + xn=k, .
6. Доказательство истинности гипотезы.
Докажем неравенство:

.3

(4),

если $x_1+x_2+x_3+\ldots + x_n=k$.

Выполним равносильные преобразования:

.3

.

Пусть $x_1+x_2+x_3+\ldots + x_n=y$. Тогда:

.3

,

,

,

.

Проверим при n=3.

,

,

.

7. Вывод. Учащиеся записывают результаты исследования и делают некоторые обобщения:

Неравенство .3

истинно, если ,

, , x1+x2+x3+... + xn=k, .

Нетрудно увидеть зависимость между параметрами c, b u d:

, , .

Если у учащихся на этапах исследования появлялись трудности, то учитель задает наводящие вопросы, или предлогает решение вспомогательной задачи. Это поможет разрешить проблемы. Исследование показывает, что при обучении учащихся решению поисково-исследовательских задач, наибольшие трудности у учащихся появляются при формулировке более общей задачи (постановке проблемы). Учитывая, что постановка проблемы – это «ключ» ко всему исследованию, необходимо на первых уроках-исследованиях (на занятиях-исследованиях по элективным курсам) предлагать уже сформулированную, более общую задачу и подробно объяснять, что постановка проблемы непосредственно связана с основным методом решения поисково-исследовательской задачи. Необходимо формировать у учащихся навыки прогнозирования; начать следует с простых заданий, постепенно переходя к более сложным задачам. В самом начале исследования следует учить учащихся думать о том, каким методом (способом) будет решаться более общая задача.

Прием 2. Обучение решению поисково-исследовательских задач, в основе решения которых лежит дедуктивный метод.

1. Проанализировать условие мотивационной задачи:

а) выполнить чертеж, рисунок;

б) выделить данные и искомые;

в) проанализировать данные, выявить связи между ними и всевозможные расположения фигур.

Определить метод (или способ) решения мотивационной задачи.

Поочередно двигаясь от искомых к данным и от данных к искомым, искать связи между ними, а затем, используя связи между искомыми и данными, определить способ решения.

2. Сформулировать задачу более общего вида. Если решение мотивационной задачи вызывает большие трудности, то разрешить проблему по следующей схеме:

а) проанализировать и определить наиболее оптимальный метод для решения общей задачи;

б) выдвинуть предположения о результатах решения задачи общего вида;

в) решить задачу в общем виде;

г) найти решение мотивационной задачи, используя результаты решения общей задачи.

Проиллюстрируем использование данного приема на примере.

Пример 2.

1. Мотивационная деятельность. Найти y(100), если .
Найти производную более сложной функции.

1. Проанализировав условие мотивационной задачи, учащиеся определяют, что ее можно решить поэтапно, но это вызывает некоторые вычислительные трудности.

2. Учащиеся формулируют условие задачи более общего вида, числовые коэффициенты заменяют параметрами.

2. Постановка проблемы. Найти y(n), если y = cos(kx+b).

Нетрудно заметить, что процесс решения задачи в общем виде проще, чем решение самой мотивационной задачи.

Поэтому учащиеся решают задачу в общем виде. И получают следующие результаты:

.3 ,

.3

.3 ,

.3 .

Используя эти результаты, учащиеся находят решение мотивационной задачи (применяют дедуктивный метод).

Применение приема обобщения, который является основным для всех поисково-исследовательских задач, как и других эвристических приемов, за висит от специфических особенностей решаемой задачи, и поэтому трудно сначала очертить круг задач, к которому он применим. При поиске решения целесообразно поставить себе и такой вопрос: нельзя ли обобщить предло женную задачу так, чтобы из решения обобщенной задачи вытекало бы решение данной?

Так как составление поисково-исследовательских задач связано с обобщением, то здесь уместно ввести понятие уровневого обобщения.

Операция обобщения не является однозначно определенной. Например, при обобщении понятия квадрата можно перейти как к понятию ромба, так и к понятию прямоугольника. На следующем этапе возникает понятие параллелограмма. Обобщающим является как понятие ромба, так и понятие прямоугольника. Дальнейшая линия обобщений дает понятия четырехугольника, многоугольника, геометрической фигуры, множества. На каждом шагу обобщения понятия происходит абстрагирование от некоторых свойств исходного понятия (например, отказ сначала от равенства длин сторон, потом от равенства углов, затем от параллельности сторон, далее от числа сторон, наконец от того, что граница состоит из отрезков).

Введем обобщение первого уровня и обобщение второго уровня.

Если числовые коэффициенты любого уравнения, неравенства, тождества, функции и т.д. (а также числовые значения компонентов алгебраических задач, значение элементов геометрических задач) заменить на параметры, то такое обобщение является обобщением первого уровня.

Если после обобщения первого уровня изменить вид уравнения, неравенства, тождества, функции и т.д. на более сложный (а также если увеличить число компонентов (элементов) задачи), то такое обобщение является обобщением второго уровня.

Прием 3. Обучение решению поисково-исследовательских задач, в основе решения которых лежит сочетание индуктивного и дедуктивного методов.

1. Проанализировать условие мотивационной задачи. Определить метод (или способ) решения мотивационной задачи:

а) выполнить чертеж, рисунок;

б) выделить данные и искомые;

в) проанализировать данные, выявить связи между ними и всевозможные расположения фигур.

Определить метод (или способ) решения мотивационной задачи.

Поочередно двигаясь от искомых к данным и от данных к искомым, искать связи между ними, а затем, используя связи между искомыми и данными определить способ решения.

2. Сформулировать задачу более общего вида.

Изменить условие задачи так, чтобы мотивационная задача являлась частным случаем (числовые коэффициенты или числовые данные заменить параметрами).

Определить, можно ли разрешить проблему тем же методом, что и мотивационную задачу. Если нельзя или этот метод вызывает большие трудности при решении, то разрешить проблему по следующей схеме:

а) решить несколько частных задач различными способами;

б) проанализировать полученные результаты и определить рациональный способ для решения более общей задачи;

в) выдвинуть гипотезу;

г) доказать гипотезу или решить более общую задачу рациональным способом.

Проиллюстрируем использование данного приема на примере такой задачи.

Пример 3.

1. Мотивационная деятельность. Найти неопределенный интеграл

. Найти неопределенный интеграл более общего вида.

1. Проанализировав условие мотивационной задачи, учащиеся определяют, что ее можно решить методом подстановки и методом интегрирования по частям.

2. Учащиеся формулируют условие задачи более общего вида, числовые коэффициенты заменяют параметрами, а также вместо линейного множителя берут квадратный трехчлен. В результате получают две проблемы.

2. Постановка проблемы.

Проблема 1. Найти неопределенный интеграл вида наиболее рациональным способом.

Проблема 2. Найти неопределенный интеграл вида наиболее рациональным способом.

3. Сбор фактического материала. Учащиеся решают «частные» задачи тремя способами (методом подстановки, методом интегрирования по частям и используя «искусственные» преобразования).

Найдем неопределенный интеграл .

1 способ «Искусственный прием».

Выполним тождественные преобразования:

При интегрировании используем формулу .

,

.

Таким образом,

.

2 способ «Метод подстановки».

Положим , , , .

Выполнив подстановку, получим: .

Полученный интеграл найдем, используя табличный интеграл .

.

Учитывая, что , получим:

.

3 способ «Метод интегрирования по частям».

При интегрировании используем формулу .

Положим , , .
Тогда:

4. Систематизация, анализ, выдвижение гипотезы. Учащиеся анализируют решение каждого способа и отмечают, что метод подстановки наиболее рациональный, а также находят некоторые закономерности и делают небольшое обобщение

, используя их, выдвигают гипотезу.

5. Выдвижение гипотезы. Используя полученные закономерности, учащиеся выдвигают гипотезы.

Гипотеза 1. Если подынтегральная функция имеет вид:

, то , где

.

Гипотеза 2. Если подынтегральная функция имеет вид:

, то , где

.

6. Доказательство истинности гипотезы. Решение более общей задачи. Учитывая, что найден рациональный способ решения, учащиеся находят этим способом решение более общей задачи, выполняют проверку и записывают полученные результаты исследования.

Доказательство гипотезы 1.

Найдем неопределенный интеграл , используя метод подстановки.

Положим , если n – четное число. , , .

Учитывая, что , получаем:

(1)

Проверка истинности гипотезы 2.

Найдем производную.

EMBED

Equation.3

Таким образом, гипотеза 1 получила подтверждение.

Доказательство гипотезы 2.

Найдем неопределенный интеграл методом подстановки.

Учитывая, что и используя

формулу (1), получим: .

Найдем неопределенный интеграл .

Положим , если n – четное число. , , .

Так как , получаем:

.

Следовательно,

7. Вывод. Приведем полученные в ходе эксперимента результаты учащихся.

где .

где .

Как показал эксперимент, решением подобных задач можно активизировать познавательную деятельность обучающихся, расширить круг учащихся, проявляющих интерес к математике. Это актуальная проблема и для ее решения недостаточно просто предлагать учащимся поисково-исследовательские задачи. У большинства учащихся возникают непреодолимые трудности, которые приводят их к мысли об отсутствии у них необходимых способностей.

Прием 4. Обучение решению поисково-исследовательских задач, в основе решения которых лежит аналитико-синтетический метод.

1. Проанализировать условие мотивационной задачи:

а) выделить данные и искомые;

б) проанализировать данные, выявить связи между ними и всевозможные расположения фигур.

2. Определить метод (или способ) решения мотивационной задачи. Поочередно двигаясь от искомых к данным и от данных к искомым, искать связи между ними, а затем, используя связи между искомыми и данными, определить способ решения.

3. Найти решение мотивационной задачи. (Решение мотивационной задачи – это цепочка логических умозаключений.)

4. Сформулировать задачу более общего вида.

Изменить условие задачи так, чтобы мотивационная задача являлась частным случаем (числовые коэффициенты или числовые данные заменить на параметры, но не более двух).

5. Найти решение обобщенной задачи.

При решении обобщенной задачи можно использовать тот же метод, что и при решении мотивационной задачи.

Проиллюстрируем использование данного приема на примере.

Пример 4.

1. Мотивационная деятельность. Решить уравнение:

, $x, y \in Z$

1. Учащиеся, анализируя условие мотивационной задачи, замечают, что при решении можно построить логическую цепочку умозаключений.

2. Учащиеся находят решение мотивационной задачи, построив логическую цепочку умозаключений и получают, что x=2, y=0 (аналитико-синтетический метод).

3. Проанализировав решение мотивационной задачи, учащиеся формулируют более общую задачу.

2. Постановка проблемы. При каких значениях a и b уравнение:

имеет единственное решение?

4. Обобщенную задачу следует решать тем же способом, что и мотивационную.

Учить учащихся догадываться необходимо также, как мы учим их доказывать. Разрабатывая методику обучения поэтапного поиска решения поисково-исследовательской задачи, нужно учитывать эвристическую информацию, заложенную в условие каждой поисково-исследовательской задачи, т.е. информацию, которая способствует нахождению пути к открытию решения.

В процессе решения поисково-исследовательских задач можно реализовать некоторые дидактические функции.

Решение задач должно стать важным средством интенсификации процесса обучения математике. Именно задачи могут обеспечить органическое единство изучения всех тем курса математики.

Заданный материал по каждой теме должен быть подобран таким образом, чтобы его решение способствовало уяснению учащимися данной темы и новых математических идей, заложенных в ней; помогало осуществить повторение предыдущего материала на основе нового, решить старые задачи новыми методами; содержало бы в себе пропедевтику последующих тем курса.

При обучении решению поисково-исследовательских задач следует реализовать принцип тесной взаимосвязи различных тем математики.

Роль внутрипредметных связей в учебном процессе велика; они непосредственно влияют на достижение обучающей, развивающей и воспитывающей целей обучения. При этом внутрипредметные связи формируют у учащихся научное мировоззрение, помогают видеть мир в движении и развитии, способствуют установлению логических связей между понятиями, тем самым развивают логическое мышление учащихся, выступают средством предупреждения и ликвидации формализма в знаниях школьников, позволяют

сформировать такую систему знаний, которая предстает перед учащимися не как застывшая, а как динамичная, качественно изменяющаяся, сокращают затраты учебного времени, способствуют устранению перегрузки школьников.

Возможность осуществления этого принципа мы рассмотрим на примере решения проблемной поисково-исследовательской задачи (на этапе сбора фактического материала).

Пример 5.

Проблема. Остатки от деления многочлена P(x) на x2n–a, x2n–b, x2n–c равны соответственно x–a, x–b, x–c. Найти остаток от деления многочлена P(x) на многочлен R(x), если R(x)=(x2n–a)*(x2n–b)*(x2n–c).

Частные задачи.

Задача 1. Остатки от деления многочлена P(x) на x2–1, x2–4 равны соответственно x–1, x–4. Найти остаток от деления многочлена P(x) на x4–5x2+4.

При решении задачи 1 учащиеся используют теорему о делении многочленов с

остатком. **.3**

P(2)=-2, P(-2) =-6, P(1)=0, P(-1)=-2.

Следовательно, остаток от деления многочленов P(x) и x4–5x2+4 равен –x2 +x.

Задача 2. Остатки от деления многочлена P(x) на x2+1, x2+9 равны соответственно x+ 1, x+9. Найти остаток от деления многочлена P(x) на x4+10x2+9.

При решении этой задачи учащиеся используют тот же способ, что и для решения задачи 1, находят комплексные корни i, -i, 3i, -3i квадратных уравнений; x2+1=0, x2+9=0 и выполняют действия с комплексными числами (понятие комплексных чисел и выполнение действий с ними учащиеся рассматривали в IX классе на занятиях элективных курсов).

P(i)=i+1, P(-i)=-i+1, P(-3i)=-3i+9, P(3i)=3i+9,

Следовательно, остаток от деления многочленов P(x) и x4+10x2+9 равен –x2+x.

Пример 6.

Проблема. Остатки от деления многочлена P(x) на x2–a, x2–b, x2–c равны соответственно x-a, x-b, x-c. Найти остаток отделения многочлена P(x) на многочлен K(x), если K(x)=(x2-a)(x2-b)(x2-c).

Перед учащимися возникает проблема найти другой способ решения, так как параметры a, b и c могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, и, следовательно, нужно рассматривать очень много вариантов, что существенно усложняет процесс решения этой задачи.

Для решения этой задачи учащиеся находят более рациональный способ («искусственный» способ).

Учитывая условие задачи и то, что N(x), F(x), L(x) не являются нулевыми многочленами, учащиеся записывают три равенства:

P(x)=(x2–a)N(x)+x–a, P(x)=(x2–b)F(x)+x–b, P(x)=(x2–c)L(x)+x–c,

а затем, выполнив ряд равносильных преобразований, они получают равенство

, из которого следует, что остатком от деления многочлена P(x) на многочлен K(x) является многочлен –x2+x.

При решении этих «частных» задач учащиеся используют теорему о делении многочленов с остатком, метод Гаусса для решения систем линейных уравнений, действия с комплексными числами и нахождение комплексных корней квадратных уравнений, а также алгебраические преобразования. Таким образом, тема «многочлены» изучается учащимися не сама по себе, а в комплексе с другими. Кроме того, для учащихся в эксперименте были созданы условия, при которых необходимо находить различные способы решения однотипных задач.

Проиллюстрируем реализацию внурипредметных связей на примере решения геометрической поисково-исследовательской задачи (на этапе: сбор фактического материала).

Пример 7.

Проблема. Дан треугольник ABC.

;

BD и AF пересекаются в точке O, BD и AF пересекаются в точке Q.

Найти .

Частные задачи:

Задача 1. Дан треугольник ABC: , D є AC; ; FєDC; BD и AF пересекаются в точке O, BD и AE пересекаются в точке Q. Найти: .

1 способ решения.

Рисунок 2.

При решении задачи 1 учащиеся выполняют дополнительные построения (BN||AC, FN є AN), затем, используя подобие треугольников BFN и CFA, а также подобие треугольников BON и DOA находят отношение .

2 способ решения.

Рисунок 3.

При решении задача 1 учащиеся выполняют дополнительные построения (DK||AF,K є AC), затем, используя теорему о пропорциональности отрезков (если DK||AF, то и), находят отношение .

3 способ решения.

Рисунок 4

При решении задачи 1 учащиеся используя метод «центра масс» (с этим методом учащиеся ознакомились на занятиях элективного курса «Методы решения геометрических задач»). ; ; находят отношение .

4 способ решения.

Рисунок 5

При решении задачи 1 учащиеся, используя метод «отношения площадей» (; ; находят отношение .

Задача 2.

Дан треугольник ABC: , D є AC; ; , (F, E) є BC; BD и AF пересекаются в точке O; BD и AE пересекаются в точке Q. Найти: .

Рисунок 6

Проанализировав все способы решения задачи 1, учащиеся решают задачу 2 наиболее рациональным способом – методом «центра масс».

Педагогический эксперимент показал, что все это способствует развитию математических способностей, экономии времени, интенсификации учебного процесса, лучшему усвоению материала, закреплению максимального числа навыков и умений.

2.2.2. Решение поисково-исследовательских задач несколькими способами как средство развития математических способностей учащихся

Для школьников, проявляющих математические способности, характерно стремление к наиболее рациональным решениям задач. Они стараются найти наиболее простой, кратчайший, а, следовательно, и наиболее «изящный» путь к цели. Это проявляется как своеобразная тенденция к экономии мысли, выражающаяся в поиске наиболее оптимальных путей решения математических задач.

Психологами установлено, что чем способнее ученик к математике, тем сильнее выражено у него стремление к поискам рациональных, красивых решений. Исследуя особенности решения учащимися задач на доказательство, Е.П. Иваницына отмечает, одни ученики стремятся идти наиболее коротким и экономным путем, в то время как другие идут более длинным и неэкономным путем с большим числом действий, который часто уводит учеников в сторону от рационального пути решения [91, С. 11].

Рядом исследователей отмечается, что только при нахождении рациональных и «изящных» способов решения математической задачи, способные учащиеся испытывают своеобразное эстетическое чувство. Так А.В. Зосимовский пишет о том, что способные учащиеся «особенное удовлетворение испытывают тогда, когда найденное ими решение «изящно, красиво, оригинально» [89, С. 51]. В свою очередь в исследовании В.А. Крутецкого отмечено наличие чувства неудовлетворения, досады в связи с найденным решением, в том случае если последнее было, по мнению способных школьников, «грубым», громоздким, сложным [127, С. 315].

В психолого-педагогической литературе отмечается, что сензитивным периодом для развития способностей школьников к нахождению рациональных и красивых решений является возраст 14-15 лет (8-9 класс) [76], [127], [217]. В младшем школьном возрасте указанные способности еще не проявляются, а в старшем – достигают пика своего развития . Связано это с тем, что рассматриваемый возраст представляет собой период глубоких качественных изменений в структуре личности в направлении повышения уровня ее кри тичности, самостоятельности, развития тенденции к применению творческих подходов и решений.

Под активностью мышления мы понимаем постоянство усилий, направленных на решение некоторой проблемы, желание не только решить эту проблему, но и изучить различные подходы к ее решению, исследовать различные варианты постановки рассматриваемой проблемы в зависимости от изменяющихся условий.

Стремление осуществлять разумный выбор действий при решении рассматриваемой проблемы при постоянной ориентации на поставленную данной проблемой цель, поиск кратчайшего пути решения характеризуют такое качество математического мышления как целенаправленность.

Значимость нахождения различных способов решения одной математической задачи неоднократно отмечалась в методической литературе. В работе Е.С. Канина и Ф.Ф. Нагибина со всей определенностью указывается на то, что нет «более эффективного пути воспитания гибкости математического мышления и находчивости, чем путь, пролегающий через поиски различных решений задач» [100, С. 135].

Однако в большинстве методических работ речь идет о решении несколькими способами геометрических задач [66], [104], [179], [206], [209] и др. Возможности решения алгебраических задач несколькими способами не нашли в методической литературе должного отражения. В ней можно найти лишь отдельные рекомендации по решению различными способами арифметических и алгебраических задач.

Практика показывает, что учителя довольно редко применяют для развития математических способностей учащихся возможность решения тех или иных поисково-исследовательских задач несколькими способами, аргументируя это отсутствием достаточного количества времени на уроке. Для математического развития учащихся, несомненно, больше пользы принесет решение одной задачи несколькими способами, если это конечно возможно, чем решение ряда однотипных задач одним способом. Преимущества такой работы проявляются в следующем:

- при нахождении различных способов решения учащиеся актуализируют знания из различных разделов математики, что способствует более прочному и осознанному усвоению материала учащимися;
- учащиеся сопоставляют, обобщают найденные решения;

– учащиеся наглядно могут видеть преимущества того или иного способа решения, обучаются выбирать среди них наиболее рациональные, красивые пути решения;

– каждый найденный способ решения задачи увеличивает объем примененного учащимися материала, открывает новые исходные посылки решения, выявляет зависимости, в том числе и внешне скрытые, между задачными данными.

Отметим, что решение, например, поисково-исследовательских задач несколькими способами имеет и другие положительные аспекты, а именно:

– экономия учебного времени на изучение условия задачи и ознакомление с заданной поисково-исследовательской ситуацией;

– более глубокое и всестороннее изучение поисково-исследовательской конструкции, соответствующей условию решаемой задачи;

– развитие у учащихся приемов логического поиска решения поисково-исследовательских задач;

– развитие у учащихся самостоятельности в поиске путей решения задачи;

– формирование и развитие у школьников умения осуществлять самоконтроль в процессе поиска пути решения задачи и его непосредственного осуществления;

– большие возможности для успешного развития интереса учащихся к изучению математики, в целом, и поисково-исследовательского материала, в частности;

– широкие возможности индивидуализации учебной работы с учащимися и дифференциации учебного процесса с учетом актуальных и потенциальных математических способностей школьников.

Указанные выше аспекты как раз и содействуют развитию у школьников их математических способностей.

Поэтому перед учителем стоит задача обучения учащихся поиску различных вариантов решения одной задачи, отбору среди них наиболее рациональных, «изящных».

Умение решать задачи относится к числу наиболее сложных умений. При его формировании необходимо учитывать все этапы работы над задачей. Такими этапами выступают: анализ условия задачи, поиск плана ее решения, осуществление выработанного плана решения, заключительный анализ (обсуждение полученного результата).

С тем, чтобы решение задач стало наиболее действенным средством развития математических способностей школьников, целесообразно уделять особое внимание именно последнему этапу – заключительному анализу. Заключительный анализ как последний этап в решении задач предполагает:

1) обсуждение выполненного решения с точки зрения его рациональности, поиск других способов решения, сопоставление и обсуждение достоинств и недостатков каждого из предлагаемых способов;

2) обсуждение поиска плана или способа решения задачи, установление и закрепление в памяти учащихся тех подходов, которые использовались при данном поиске, выявление возможностей применения этих подходов к другим задачам;

3) обсуждение возможности обобщения данной задачи, выявление в ее условии лишних данных или других особенностей, сопоставление решенной задачи с решенными ранее, выявление общих закономерностей;

4) выполнение различного рода преобразований с целью изменения количества способов решения.

При систематической работе по проведению заключительного анализа в процессе решения задач у учащихся формируется и развивается умение проводить самостоятельный анализ решения задачи, умение проводить рефлексию, умение планировать свои действия, умение выполнять самоконтроль. Указанные умения содействуют целенаправленному развитию как общих способностей школьников, так и специальных математических способностей.

Каждый новый найденный способ решения задачи позволяет яснее осознать процесс ее решения, глубже и полнее понять связи и отношения между данными и искомыми величинами, так как основной целью учащихся становится уже не нахождение ответа у решаемой ими задачи, а отыскание других подходов к ее решению. Кроме того, каждый новый способ становится средством проверки правильности решения исходной задачи.

Рассуждения о том, какой способ решения лучше, будут беспредметными, если вести их в общем плане, без ориентации на конкретную задачу. Один и тот же способ может

Рисунок 1

оказаться эффективным для решения одной и оказаться более слабым (или даже малопригодным) при решении другой задачи.

Работа по обучению школьников решению задач несколькими способами должна вестись систематически и целенаправленно. Она может проводиться:

- **на одном уроке;**
- **в пределах изучения одной темы;**
- **в пределах одного учебного года;**
- **в пределах одного курса.**

Среди поисково-исследовательских задач, решение которых входит в программу углубленного изучения математики, встречается немало таких, которые могут быть решены несколькими способами. Продемонстрируем такую возможность на примере.

Пример 8. Основания трапеции равны 4см и 9 см. Определить длину отрезка, параллельного основаниям и делящего площадь трапеции пополам. Решить несколькими способами.

2. Постановка проблемы. Найти решение более общей задачи.

1) Длины параллельных сторон трапеции равны соответственно a и b. Отрезки, параллельные основаниям трапеции, делят трапецию на n равновеликих частей. Определить длину max отрезка и длину min отрезка.

2) Усеченную пирамиду поделили на n равновеликих частей секущими плоскостями, параллельными основаниям. Найти наименьшую площадь сечения, если площади оснований равны соответственно S1, и S2 (S1, < S2).

3. Сбор фактического материала (решение частных задач).

1 способ решения (частная задача №1)

Основания трапеции равны 4 см и 9 см. Определить длину отрезка, параллельного основаниям и делящего площадь трапеции пополам.

Решение. Пусть ABCD (рис. 1) данная трапеция, у которой NM||BC||AD. BC=4 см, AD=9см.

Докажите, что .

Пусть NM=x, CF=H, CO=y, тогда FO=H-y.

1) Используя формулу и учитывая, что .

Составим систему уравнений: EMBED Equation.3

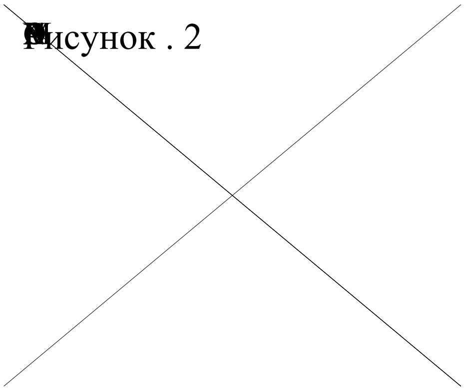
EMBED Equation.3 EMBED Equation.3

.

Складывая (1) и (2) уравнения, получим:

EMBED Equation.3 EMBED Equation.3 .

Рисунок . 2



Полученные выражения подставим в уравнение (3) уравнение и получим:

.

, .

Следовательно, длина отрезка NM, который делит трапецию на две равновеликие

части, равна .

2 способ решения (частная задача № 2). Длины параллельных сторон трапеции равны соответственно a и b. Определить длину отрезка, параллельного этим сторонам и делящего площадь трапеции пополам.

Выполним дополнительные построения. Достроим трапецию ABCD до треугольника APD (рис.2). Треугольники BPC и APD подобны (по двум углам), так как угол APD – общий, а угол PBC равен углу PAD, как соответственные углы при параллельных сторон BC, AD и секущей AP.

Из подобия треугольников следует, что .

Пусть SABCD=S, SBPC=y, тогда получим: отсюда .
Треугольники NPM и APD подобны (по двум углам).

Так как угол APD – общий. Угол PNM равен углу PAD, как соответственные углы при параллельных сторон NM, AD и секущей AP.
Из подобия треугольников следует, что:

, , .3 .

Если трапецию поделить на четыре равновеликие части, то

наименьший из отрезков равен: .

Если трапецию поделить на восемь равновеликие части, то наименьший из отрезков

равен: .

Если трапецию поделить на 16 равновеликие части, то наименьший из отрезков

равен: .

Нетрудно увидеть закономерность. Следовательно, если трапецию поделить на 2n равновеликие части, то наименьший из отрезков равен:

.

Аналогично можно найти наибольший из отрезков при делении трапеции на 2n равновеликих частей отрезками, параллельными основаниям трапеции. Он равен:

.

4. Систематизация и анализ полученных результатов.

Если проанализировать решение каждым способом, то можно отметить, что наибольшее количество операций было выполнено при решении I способом, а наименьшее количество операций было выполнено при решении II способом. Нетрудно также увидеть некоторую закономерность и сделать небольшое обобщение.

	Длина наименьшего отрезка	Длина наибольшего отрезка
Если трапецию поделили на 4 равновеликие части		
Если трапецию поделили на 8 равновеликих частей		
Если трапецию поделили на 2n равновеликих частей		
Если трапецию поделили на n равновеликих частей	предположение	предположение

Если усеченную пирамиду поделить (секущими плоскостями, параллельными основаниям) на n равновеликих частей, то наименьшая площадь сечения равна (

предположение): .

Если использовать аналогию и свойство подобных фигур ; , где k –

коэффициент подобия, то будем иметь .

5. Выдвижение гипотез.

Гипотеза 1. Если трапецию поделили (отрезками, параллельными основаниям) на n

равновеликих частей, то длина наименьшего из отрезков равна , а длина

наибольшего из отрезков равна , где n∈N, n≥2, b>a>0.

Гипотеза 2. Если усеченную пирамиду поделили секущими плоскостями, параллельными основаниям, на n равновеликих частей, то наименьшая площадь сечения

равна: , n∈N, n≥2, S2>S1>0.

6. Доказательство истинности гипотезы 1

Выполним дополнительные построения. … CD до треугольника APD (рис. 3).

Треугольники BPC и APD подобны (по д… …PD – общий, а угол PBC равен углу PAD, как соответственные углы … он BC, AD и секущей AP.

Из подобия треугольников следует, что

Пусть SABCD=S, SBPC=y, тогда получим: .
NM – наименьший из параллельных отрезков, K… …ллельных отрезков.
Треугольники NPM и APD подобны (по д… …APD – общий. Угол PNM равен углу PAD, как соответственные углы … …ых NM и AD, и

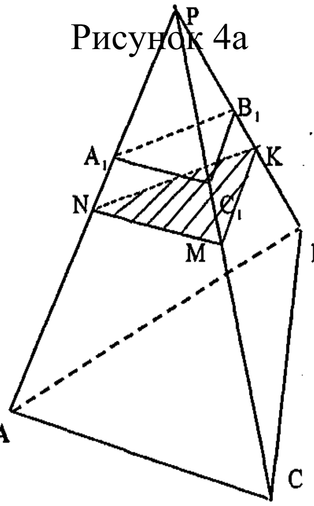


Рисунок 4а

секущей AP. Из подобия треугольников следует, что , ,

.3 .

Аналогично находим наибольший отрезок **.3**

.

Доказательство истинности гипотезы 2.

Пусть дана усеченная пирамида ABC (рис. 4а). Усеченную пирамиду $ABCA_1B_1C_1$ поделили секущими плоскостями, параллельными основаниям, на *n* равновеликих частей, то наименьшей площадью сечения является площадь треугольника NMK. Усеченную пирамиду $ABCA_1B_1C_1$ достроим до пирамиды PABC (рис. 4а).

На рисунке 4б показано как можно построить усеченную пирамиду, используя компьютерную программу Gran-3D.

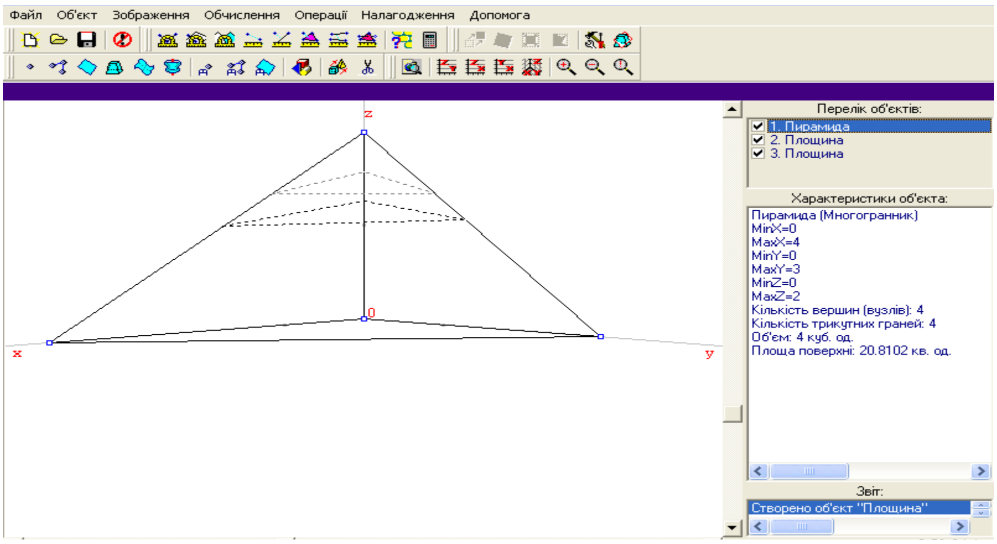


Рисунок 4б

Учитывая, что плоскость треугольника ABC параллельна плоскости треугольника A1B1C1, то пирамиды PABC, $PA_1B_1C_1$ подобны, тогда из свойств подобия фигур следует, что . **Положим, что** ,

, тогда получим: **.3** , **.3**

.

Учитывая, что плоскость треугольника NKM параллельна плоскости треугольника $A_1B_1C_1$, то пирамиды PNKM, $PA_1B_1C_1$, подобны, тогда из

свойств подобия фигур следует, что .

Так как **.3** – это следует из условия задачи, получаем:

.3 , **.3**

, **.3**

,

где *nєN, n≥2,* $S_2>S_1>0$.

Используя метод полной математической индукции, нетрудно доказать справедливость полученной формулы для всех *nєN, n≥2.*

8. Вывод.

1. Если трапецию поделить на *n* равновеликих частей отрезками,

параллельными основаниям, то наименьший отрезок равен **, а**

наибольший отрезок равен **при nєN, n≥2, b>a>0.**

2. Если усеченную пирамиду поделили секущими плоскостями, параллельными основаниям, на n равновеликих частей, то наименьшая площадь сечения равна:

.3 , при *n є N, n≥2,* $S_2>S_1>0$.

Заметим, что возможно рассмотрение и комбинированных приемов, которые получаются из приведенных выше путем одновременного применения двух или нескольких приемов. Это было продемонстрировано нами на примере поиска различных способов решения рассмотренной выше задачи.

Пример 8.

Задача 1. Составить уравнение общей касательной к графикам функций и несколькими способами (при решении нельзя использовать дифференцирование функции). Составить уравнение общей касательной к графикам функции более общего вида, используя рациональный способ.

2. Постановка проблемы.

Проблема 1. Составить уравнение общей касательной к графикам функций

и .

Проблема 2. Составить уравнение общей касательной к графикам функций

и .

3. Сбор фактического материала.

1. Составить уравнение общей касательной к графикам функций , если абсцисса точки касания .

Найдем ординату точки касания .

Пусть уравнение касательной имеет вид: ; – точка касания. Тогда получаем: , откуда .

Учитывая, что графики квадратичной и линейной функции имеют одну общую точку, то уравнение имеет один корень. Квадратное уравнение

имеет один корень, если дискриминант равен нулю. Получаем:

. Так как , то получаем уравнение относительно k:

, ,

, , откуда . Далее,

, .

Следовательно, уравнение касательной к графику функции , имеет вид: (1)

Заметим, что а ≠ 0.

2. Составить уравнение общей касательной к графикам функций и .

1 способ решения.

Пусть x1 – абсцисса точки касания касательной к графику функции . Тогда учитывая уравнение касательной (1), полученное в пункте 3.1, получим:

(2)

Аналогично, x2 – абсцисса точки касания касательной к графику функции , тогда (3)

Так как графиком уравнения (2) и (3) является одна и та же прямая, то получим систему уравнений . Решая систему уравнений, получаем, что

Таким образом получаем, если , то уравнение общей касательной имеет вид:

(4)

Если , то уравнение общей касательной имеет вид:

(4)

2 способ решения.

Пусть уравнение общей касательной имеет вид , тогда уравнение и имеют по одному корню.

Уравнение имеет один корень, если

(5)

Уравнение имеет один корень, если:

(6)

Из равенств (5) и (6) следует, что .

Тогда, .

Следовательно, – уравнение общей касательной к графикам функций и .

Аналогично решая 2 способом, находим уравнения общей касательной для графиков функций и . Получим – общее уравнение касательной к графику функций и .

4. Систематизация и анализ полученных результатов.

Если проанализировать решение каждым способом, то можно отметить, что наибольшее количество операций было выполнено при решении I способом, а наименьшее количество операций было выполнено при решении II способом. Нетрудно также увидеть некоторую закономерность и сделать небольшое обобщение.

Функции	Нахождение уравнения общей касательной	Уравнение общей касательной

	Предположение	
	Предположение	

5. Выдвижение гипотез.

Гипотеза 1. Если даны две квадратичные функции и ,

то их общее уравнение касательной имеет вид , ,

.

Гипотеза 2. Если даны две квадратичные функции и ,

то их общее уравнение касательной имеет вид, ,

, .

6. Доказательство истинности гипотез.

1) Составим уравнение общей касательной к графикам функций и

. Как наиболее рациональный используем 2 способ.

Пусть уравнение общей касательной имеет вид , тогда уравнение

и имеют по одному корню.

Уравнение имеет один корень, если

(7)

Уравнение имеет один корень, если:

(8)

Из равенств (7) и (8) следует, что .

Тогда .

Следовательно, – уравнение общей касательной к графикам функций и .

Проверка истинности гипотезы 1.

Проверку полученного уравнения проверим 1 способом.

Составим уравнение общей касательной к графикам функций и

.

Пусть x1 – абсцисса точки касания касательной к графику функции . Тогда, учитывая результаты решения пункта 2, а именно получение уравнения касательной (1).

Получим: (9) – уравнение касательной к графику функции

, .

Аналогично, x2 – абсцисса точки касания касательной к графику функции

.

Тогда, получим: (10) –

уравнение касательной к графику функции , .

Так как графиком уравнения (9) и (10) является одна и та же прямая, то получим систему

уравнений . Решая систему уравнений, получаем, что

, .

Таким образом получаем, если , то уравнение общей касательной имеет

вид: (11)

Если , то уравнение общей касательной имеет вид:

(11)

Таким образом, гипотеза 1 получила подтверждение.

2). Составим уравнение общей касательной к графикам функций и

. Как наиболее рациональный используем 2 способ.

Пусть уравнение общей касательной имеет вид , тогда уравнение

и имеют по одному корню.

Уравнение имеет один корень, если

(12)

Уравнение имеет один корень, если

(13)

Из равенств (12) и (13) следует, что

.

Тогда .

Следовательно, – уравнение общей касательной к

графикам функций и .

Проверка истинности гипотезы 1.

Проверку полученного уравнения проверим 1 способом.

Составим уравнение общей касательной к графикам функций и

.

Пусть x1 – абсцисса точки касания касательной к графику функции .
Тогда, учитывая результаты решения пункта 2, а именно получение уравнения касательной (1).

Получим: (14) – уравнение касательной к графику функции

, .

Аналогично, x2 – абсцисса точки касания касательной к графику функции

.

Тогда, получим: (15) – уравнение касательной к графику функции , .

Так как графиком уравнения (14) и (15) является одна и та же прямая, то получим систему уравнений . Решая систему уравнений, получаем, что

, .

Таким образом получаем, если , то уравнение общей касательной имеет вид:

Если , то уравнение общей касательной имеет вид:

Таким образом, гипотеза 2 получила подтверждение.

8. Вывод.

1. Уравнение касательной к графику квадратичной функции имеет вид: , .

2. Уравнение общей касательной к графикам квадратичных функций и

имеет вид , , .

3. Уравнение общей касательной к графикам квадратичных функций и

, имеет вид, , , .

Заметим так же, что совсем не обязательно каждую из предлагаемых ученикам на уроках задач решать всеми возможными способами. Достаточно рассмотреть несколько примеров решения задач несколькими способами.

Таким образом, данная задача решается несколькими способами в пределах одной темы с использованием большого объема теоретического материала, изученного в ее рамках. Именно это и позволяет развивать у учащихся не только гибкость мышления, но и другие компоненты математических способностей, например, способность к обобщению математического материала, способность к логическому мышлению и т.д.

У учителя имеется возможность определить место той или иной задачи, решаемой несколькими способами, с тем, чтобы более полно реализовать ее дидактические функции и конкретные цели применения в процессе обучения.

Параллельно с процессом обучения школьников решению задач несколькими способами вполне возможно вести работу по развитию умения составлять задачи. Возможностям этого вида работы в развитии математических способностей учащихся будет посвящен следующий параграф.

Таким образом, на основе анализа психолого-педагогической и методической литературы, а также практики обучения установлено, что одним из наиболее эффективных путей развития гибкости мыслительных процессов, а также ряда других компонентов математических способностей является систематическое и целенаправленное использование в практике обучения заданий, направленных на решение задач несколькими способами и применение в процессе обучения компьютерных технологий.

Рекомендации по составлению поисково-исследовательских задач

Как было отмечено выше, поисково-исследовательские задачи можно условно классифицировать по «основному» методу решения, отсюда следует вывод о том, что составление поисково-исследовательских задач непосредственно связано с методом решения. Кроме этого, при составлении поисково-исследовательских задач необходимо учитывать дидактические, развивающие и воспитывающие функции этих задач.

Рассмотрим требования, которые нужно учитывать при составлении поисково-исследовательских задач, если в основе решения лежит индуктивный метод.

1. Мотивационная задача должна быть поисковой.

2. При формулировке задачи более общего вида (постановка проблемы) мотивационная задача должна являться частным случаем.

3. При формулировке задачи более общего вида (постановка проблемы) нужно числовые коэффициенты заменить на параметры (не более двух), компоненты (элементы одного вида), входящие в условие задачи, увеличить до числа n ($n \in N$) или один из компонентов связать числом n ($n \in N$), т.е. выполнить обобщение на втором уровне.

4. Изменить формулировку мотивационной задачи так, чтобы задачу более общего вида в процессе исследования (или истинность результатов исследования) можно было доказать методом полной математической индукции, кроме этого должна быть возможность нахождения зависимости между параметрами.

5. Зависимости между параметрами, компонентами можно определить при решении «частных» задач.

Проиллюстрируем выполнение требований при составлении поисково-исследовательской задачи, если в основе поиска решения лежит индуктивный метод.

Пример 8. Рассмотрим одну из поисковых задач: Доказать неравенство

для всех x є R (мотивационная задача).

1. Для данной задачи можно выполнить обобщение на втором уровне.

а) Вместо числа — введем параметр а;

б) Вместо многочлена четвертой степени запишем многочлен 2n-ой степени.

2. При решении «частных» задач можно найти зависимость между параметром а и показателем степени.

Переформулируем мотивационную задачу: При каких значениях а неравенство

справедливо при всех n є N и x є R.

Таким образом, получили неравенство более общего вида. Зависимость между параметром а и показателем степени можно определить при решении «частных» задач (

используется индуктивный метод) , n є N (n > 1).

Неравенство общего вида можно доказать методом полной математической индукции.

Заметим, что для данной мотивационной задачи можно выполнить обобщение еще на более высоком уровне, введением двух параметров.

Отметим, что все перечисленные выше пять требований для данной задачи выполняются. Если хотя бы одно требование не будет выполняться, то составить такую поисково-исследовательскую задачу будет проблематично. Кроме этого, необходимо выделить одно из основных требований – требование 4: изменить формулировку мотивационной задачи так, чтобы задачу более общего вида в процессе исследования (или истинность результатов исследования) можно было доказать методом полной математической индукции, кроме этого должна быть возможность нахождения зависимости между параметрами. Для выполнения этого требования нужно научиться прогнозировать, предвидеть результат всего исследования. Формирование умения прогнозировать играет положительную роль в развитии математического мышления.

Рассмотрим требования, которые нужно учитывать при составлении поисково-исследовательских задач, если в основе решения лежит сочетание индуктивного и дедуктивного методов.

1. Мотивационная задача должна быть поисковой.

2. Мотивационную задачу можно решить различными способами.

3. При формулировке задачи более общего вида (постановка проблемы) мотивационная задача должна являться частным случаем.

4. При формулировке задачи более общего вида (постановка проблемы) нужно числовые коэффициенты (числовые значения элементов) заменить на параметры (обобщение первого уровня)

5. Зависимость между параметрами, компонентами можно определить при решении «частных» задач (используя индуктивный метод).

6. Задачу более общего вида можно решить теми же способами, что и мотивационную, но решить нужно рациональным способом, т.е. решить задачу в общем виде (используя дедуктивный метод).

Проиллюстрируем составление поисково-исследовательской задачи, если в «основе» решения лежит сочетание индуктивного и дедуктивного методов.

Пример 9. Рассмотрим одну из поисковых задач: Составить уравнение общей касательной к графикам функций y = 3x2 + 4x +1 и y = 3x2 + 2x +1

1. Данная мотивационная задача поддается обобщению первого уровня. Если заменить числовые коэффициенты на параметры, то можно сформулировать проблему: «Составить уравнение общей касательной к графикам функций y = ax2+bx + c и y = ax2 + dx + p».

2. Данную мотивационную задачу можно решить различными способами, этими же способами можно решить и задачу более общего вида.

Если решить несколько «частных» задач различными способами, то можно найти некоторую зависимость между параметрами, а также выбрать наиболее рациональный

способ для решения задачи более общего вида (индуктивный метод)

При решении задачи общего вида (используя дедуктивный метод) получим, что: «Квадратичные функции y = ax2+bx+c, yax2+dx+p имеют общую касательную, уравнение которой имеет вид:

.3

, при условии *a є R, a≠0, d є R, b є R, d≠b, c є R*».

Таким образом, на данном примере проверяется выполнимость всех шести требований. Нужно отметить, что все требования должны выполняться . Одним из основных требований является то, что мотивационную задачу можно решить несколькими способами. Решение задачи различными спосо бами и нахождение рационального способа играют существенную роль в совершенствовании знаний, для реализации внутрипредметных связей и для развития математических способностей.

Рассмотрим требования, которые нужно учитывать при составлении поисково-исследовательских задач, если в основе поиска решения лежит дедуктивный метод.

1. Мотивационная задача должна быть поисковой.

2. Процесс решения мотивационной задачи (вычислительные преобразования) намного сложнее процесса решения задачи общего вида.

3. При формулировке задачи более общего вида (постановка проблемы) мотивационная задача должна являться частным случаем.

4. При формулировке задачи более общего вида (постановка проблемы) нужно числовые коэффициенты (числовые значения элементов) заменить параметрами (обобщение первого уровня).

Проиллюстрируем выполнение требований при составлении поисково-исследовательской задачи, если в основе решения лежит дедуктивный метод.

Пример 10. Чтобы составить поисково-исследовательскую задачу, в основе решения которой лежал бы дедуктивный метод, учителю необходимо:

1. Подобрать такую задачу которую можно легко решить в общем виде и двигаться в обратном порядке.

Проблема. При какой зависимости параметров *a, b* и *c* уравнение:

$a\sin x + b\cos x = c$ имеет решение?

2. Создать вычислительные трудности для решения «частной» задачи:

При каких значениях параметра с уравнение

имеет решение? (мотивационная задача).

Рассмотрим требования, которые нужно учитывать при составлении поисково-исследовательских задач, в основе решения которых, лежит аналитико-синтетический метод.

1. Мотивационная задача должна быть поисковой.

2. Процесс решения мотивационной задачи выстраивается как логическая цепочка умозаключений.

3. При формулировке задачи более общего вида (постановка проблемы) мотивационная задача должна являться частным случаем.

4. При формулировке задачи более общего вида (постановка проблемы) нужно числовые коэффициенты (числовые значения элементов) заменить на параметры (обобщение первого уровня).

5. Процесс решения обобщенной задачи выстраивается как логическая цепочка умозаключений.

Проиллюстрируем выполнение требований при составлении поисково-исследовательской задачи, если в основе решения лежит аналитико-синтетический метод.

Ярким примером поисково-исследовательских задач, при решении которых используется аналитико-синтетический метод, являются нестандартные уравнения, системы уравнений и нестандартные неравенства.

Как показывает практика, составление таких заданий для учителя не является большой проблемой.

При составлении необходимо использовать определения, аксиомы, теоремы,

следствия, основные свойства (например: ; если a>0, b>0; если функции f и g монотонно возрастающие, то и функция f + g также является монотонно возрастающей и т.д.)

Пример 11. Решить уравнение (мотивационная задача)

1. При решении этой задачи можно построить логическую цепочку умозаключений.

2. Решение обобщенной задачи осуществляется тем же способом, что и частная задача.

Уравнение можно условно назвать заданием «открытого» вида: его решение лежит на «поверхности». Для его решения достаточно построить логическую цепочку умозаключений. Это же уравнение учитель может предложить учащимся в «закрытом» виде

.

Для решения необходимо найти эвристические приемы, искусственные преобразования, а затем построить логическую цепочку умозаключений.

Используя уровень «открытости» заданий, учитель может осуществлять идею дифференцированного обучения как при групповой, так и при индивидуализированной формах организации учебной работы.

Отметим, что составление и решение таких задач развивают математические способности учащихся, которые приобретают опыт творческой работы.

Процедура отбора математических задач является элементом планирования процесса обучения, которое включает следующие операции:

- **отбор наиболее рационального содержания обучения на данном уроке и вне урока, выделение в нем главного;**
- **выбор оптимального сочетания методов и средств обучения для реализации намеченных учебно-воспитательных задач;**
- **определение оптимального темпа обучения;**
- **определение содержания и методов домашней работы учащихся и др.**

При отборе и составлении поисково-исследовательских задач необходимо принимать во внимание следующие требования:

- **при отборе и составлении поисково-исследовательских задач учитывать, что в процессе их решения будут использоваться все возможные обобщения;**
- **решение поисково-исследовательских задач будет направлено на нахождение определенных зависимостей между величинами, вывод определенных формул, которые можно использовать в дальнейшем обучении;**
- **в процессе решения «частных» задач возможность нахождения рационального способа решения;**
- **в процессе решения поисково-исследовательских задач можно создать условия для формирования математических способностей.**

Основные принципы построения содержательно-методической линии поисково-исследовательских задач

При построении содержательно-методической линии поисково-исследовательских задач нужно учитывать принцип научности обучения, предполагающий строгое соблюдение в ходе обучения всего объема теоретических и практических требований учебных программ .

С принципом научности органично сочетается принцип доступности обучения. Доступность обучения обеспечивается прежде всего соответствием с реальными учебными возможностями школьников и достигается соответствующей методикой обучения решению поисково-исследовательских задач.

Навыки логических рассуждений формируются у учащихся посредством решения различных задач, которые отличаются как содержанием, так и методом их решения, а также в процессе решения поучительных проблемных ситуаций.

Принцип систематичности и последовательности в обучении реализуется полностью, и это обеспечивается систематическим включением в процесс обучения алгебре и началам анализа и геометрии решения поисково-исследовательских задач по каждой ключевой теме, учитывая целеполагание, отвечающее программе обучения. Как показал эксперимент, резко повышается эффективность учебного процесса.

Как известно, в педагогике важной задачей издавна считается актуализация у учащихся потребности в знаниях, формирование у них познавательного интереса, и должны быть созданы благоприятные условия для реализации принципа стимулирования положительного отношения школьников к учению. Решающим стимулом при этом является сам процесс исследования и получение результатов исследования.

Принцип оптимального сочетания всех методов и форм обучения также может быть успешно реализован. Следует только указать на необходимость последовательного осуществления дифференцированного подхода к учащимся и подчеркнуть недопустимость возведения того или иного метода обучения в абсолют.

Успешное обучение при наличии содержательно-методической линии поисково-исследовательских задач предполагает, конечно, взаимное объединение усилий учителя и ученика.

2.3. Организация решения поисково-исследовательской задачи с использованием сочетания коллективной и частично-индивидуальной форм обучения

Организовать на уроке коллективное решение поисково-исследовательской задачи – дело не простое. Трудность заключается в том, что не все учащиеся класса (даже математического) могут полностью решить поисково-исследовательскую задачу. Учитывая тот факт, что решение поисково-исследовательской задачи состоит из нескольких этапов (мотивация, исследовательская деятельность, постановка проблемы, сбор фактического материала, систематизация и анализ полученного материала, выдвижение гипотез и т.д.), решение подразделяется на следующие задания (они могут видоизменяться): усвоение и анализ условия задачи; постановка проблемы (или проблем, если их несколько); сбор фактического материала (решение частных задач); продумывание плана, идеи решения «частных» задач; коллективное обсуждение идеи решения; оформление решения; систематизация и анализ полученных результатов; выдвижение гипотезы; проверка и доказательство истинности гипотезы. Эти задания поочередно у доски выполняет не один, а несколько учащихся.

1. Мотивация исследовательской деятельности. «Потребность, – отмечает С.Л. Рубинштейн, – возникает тогда, когда человек не знает, как осуществить действие (решение задачи), при условии, что он вообще хочет его осуществить» [181, с.48.] Для нас последнее замечание особенно важно, поскольку мотивом научного исследования может стать затруднение, неопределенность, проблема, имеющая общественную значимость и содержащая знания, неизвестные человечеству, что часто является одним из тех факторов, которые оказывают влияние на интерес ученого к рассматриваемой проблеме.

Учитель кратко обозначает актуальность, проводит обоснование (значимость) данного исследования. Это он может сделать различными вариантами; все зависит от конкретной мотивационной задачи (проблемная задача; одна из самых сложных задач вступительного экзамена и т.д.)

Усвоение и анализ условия задачи. Один из учащихся (иногда сам учитель) кратко записывает условие задачи, анализирует его и пытается составить условие более общей задачи. Затем вызванный учащийся садится на место. Ему ставится за это задание оценка в тех случаях, когда оно представляет определенную трудность для класса.

2. Постановка проблемы. После коллективного обсуждения, уточнения, корректировки условия общей задачи под руководством учителя один из учащихся (или несколько, все зависит от количества проблем) выходит к доске и записывает проблему. А учитель контролирует, чтобы учащиеся записывали проблему на строгом математическом языке, что придает высказываниям точность и лаконичность.

3. Сбор фактического материала.

1) Обдумывание идей решения («частной» задачи). Классу дается задание: наметить, продумать идею решения задачи. Выдерживается необходимая пауза, во время которой учащимся рекомендуется делать наброски решения на черновике, разрешается советоваться друг с другом. Решение задачи не рекомендуется записывать, учащиеся наблюдают за ходом решения и определяют: верное или неверное, рациональное или нерациональное. После определения (нахождения) необходимого способа решения учащихся записывают его в тетради.

Во время обдумывания способа решения учащиеся должны быть готовы к тому, что преподаватель может прибегнуть к их помощи. Тем самым в классе создается необходимая психологическая ситуация, которая заставляет активно работать весь класс. Конечно, не каждый ученик находит способ решения задачи, но все думают над ее решением.

Во время паузы обычно наступает либо напряженная тишина, либо «рабочий шум». Чтобы не мешать работе класса, учитель беседует с отдельными учащимися только шепотом или вполголоса, отвечает на их вопросы, выслушивает предложения, помогает.

2) Обсуждение идеи решения. Классу предлагается обсудить идею решения задачи. Иногда рассматривают несколько способов решения, выбирают из них наиболее рациональный. Обсуждение часто приобретает форму дискуссии, что способствует повышению интереса к предмету. Учитель постепенно приучает учащихся высказывать идею решения в виде краткого плана, без подробных обоснований. Учащемуся, высказывающему идею решения задачи, он ставит положительную оценку, несмотря на то, что ответ ученика очень краток по времени. От него не стоит добиваться объяснений. Если он изложил идею, то почти всегда знает и детали решения, а их могут объяснить и другие учащиеся, например те, которые во время дискуссии руки не поднимают. В конце дискуссии

объявляются оценки тем учащимся, которые объяснили идею решения задачи перед всем классом или высказывали ее учителю во время паузы.

Если учащимися было предложено несколько идей (несколько способов решения), то каждая идея должна быть реализована. План решения каждой идеи показывается на доске. Учащимися анализируется каждый план решения и выбирается более оптимальный. Но иногда план решения не дает полного представления о способе решения или способ решения нерационален только для данной задачи, но он тоже имеет право на существование и желательно его показать на доске. Учитель акцентирует внимание на то, что данный способ (или способы) решения может быть более рациональным для других задач и его (или их) нужно запомнить.

Если учащиеся не смогли найти идею решения, то учитель наводящими вопросами подводит их к идее решения задачи.

После определения рационального способа решения, можно перейти к решению сразу нескольких «частных» задач. Если все «частные» задачи решаются одним способом, но отличаются числовыми значениями, то можно класс поделить на звенья, соответственно количеству «частных» задач и каждому звену предложить решить по одной «частной» задаче.

3) Оформление решения «частной» задачи.

Существуют несколько вариантов выполнения этого задания:

а) Один учащийся из каждого звена должен записать решение своей «частной» задачи на доске, за что ему также выставляются оценки. Причем, поскольку идея решения задачи уже обсуждалась и неясных вопросов не осталось, учитель вызывает к доске тех учащихся, которые в обсуждении плана решения активного участия не принимали. Остальные учащиеся записывают решение задачи в тетрадях. Они работают более самостоятельно, в отличие от того случая, когда решение задачи не разбивается на отдельные задания. Действительно, после паузы и обсуждения большинство учащихся представляют себе весь ход решения и им незачем списывать с доски.

б) Решение задачи предлагается записать самостоятельно. Затем предлагается одному из учащихся каждого звена устно изложить решение своей «частной» задачи с подробными объяснениями, а учитель основные выкладки показывает на доске. За это нескольким учащимся также выставляются оценки.

в) Решение задачи предлагается записать самостоятельно, затем учитель фронтально проводит пошаговый контроль, и если есть такие учащиеся, которые допустили ошибки, то дается небольшое время на устранение этих ошибок.

4. Систематизация и анализ полученного (результата) материала.

Используя результаты решения «частных» задач, один из учащихся (иногда сам учитель) на доске заполняет таблицу (строит диаграмму, схему или график). Все остальные также заполняют таблицу (строят диаграмму, схему или график) в тетрадях. Затем дается время для самостоятельного анализа результатов и нахождения закономерности (определенной зависимости между величинами). Чтобы не мешать работе класса, учитель беседует с отдельными учащимися только вполголоса, отвечает на их вопросы, выслуши вает предложения, помогает наводящими вопросами. После коллективного обсуждения, уточнения, корректировки делается «предположение», что является основой выдвижения гипотезы (или гипотез).

5. Выдвижение гипотезы. По одному учащемуся из каждого звена записывает гипотезу на доске. Причем, поскольку «предположение» (основа гипотезы) обсуждалось и неясных вопросов не осталось, учитель вызывает к доске тех учащихся, которые в процессе выдвижения гипотез активного участия не принимали. А учитель контролирует, чтобы учащиеся записывали гипотезы на строгом математическом языке, что придает высказываниям точность и лаконичность. Тем учащимся, которые запишут гипотезу на доске верно (более точно), выставляется оценка. Все остальные учащиеся записывают гипотезу в тетрадях и начинают думать над проверкой гипотезы и доказательством ее истинности.

6. Проверка гипотез. Обдумывание способа осуществления проверки гипотезы и способа проведения доказательства истинности гипотезы. Классу дается задание: наметить , продумать, каким способом выполняется проверка и доказательство истинности гипотезы . Выдерживается необходимая пауза, во время которой учащимся рекомендуется делать наброски решения в черновике, разрешается советоваться друг с другом. Записывать решение в тетради в это время учитель не рекомендуется, так как решение может оказаться нерациональным или неверным. После коллективного обсуждения на доске записывается план проверки гипотезы и план доказательства истинности гипотезы – это могут выполнить учащиеся, которые в дискуссии участия не принимали.

Проверку гипотезы учащиеся выполняют самостоятельно, затем фронтально выполняется пошаговый контроль. Если некоторые учащиеся допустили ошибки, то дается небольшое время на устранение этих ошибок.

Если проверка гипотезы (согласно плану проверки гипотезы и плану доказательства истинности гипотезы) сложнее доказательства истинности гипотезы (т.к. связана со сложными вычислениями и алгебраическими преобразованиями), то можно сразу перейти к доказательству истинности гипотезы.

7. Доказательство истинности гипотез. Оформление доказательства истинности гипотезы. Нескольким учащимся предлагается записать доказательства истинности гипотезы на доске, за что им выставляются оценки. Причем, поскольку план доказательства истинности гипотезы уже обсуждался и неясных вопросов не осталось, учитель вызывает к доске тех учащихся, которые в обсуждении плана доказательства активного участия не принимали. Остальные учащиеся самостоятельно записывают доказательство истинности в тетрадях.

8. Вывод. Обдумывание и записи итогов всего исследования, определение пути дальнейшего исследования.

Классу дается задание: наметить, продумать запись итогов всего исследования, определиться в том, как можно использовать полученные результаты исследования и решить, каковы при этом могут быть пути дальнейшего исследования. Выдерживается необходимая пауза, во время которой учащимся рекомендуется делать наброски в черновике, разрешается советоваться друг с другом.

Оформление вывода. После коллективного обсуждения трое учащихся приглашаются к доске. На доске один из учащихся записывает итоги всего исследования, второй записывает примеры, где можно использовать результаты исследования, а третий записывает проблему дальнейшего исследования (если такую смогли определить при обсуждении). Все остальные учащиеся работают самостоятельно, а учитель контролирует, чтобы все записи были выполнены аккуратно и математически грамотно.

Приведем пример поисково-исследовательских задач, в каждой из которых в процессе обсуждения с учащимися была установлена проблема.

1. Задача. Найти количество корней уравнения в зависимости от значений параметра а. Найти количество корней общего уравнения.

а) , если ;

б) , если ;

2. Постановка проблемы.

1). При каких значениях параметра а уравнение имеет k корней, если .

2). При каких значениях параметра а уравнение имеет 2k+1 корней, если .

3. Сбор фактического материала (решение частных задач).

1. Нахождение количества корней уравнения

, если .

Для того, чтобы исследовать уравнение , воспользуемся графическим методом и найдем решения на отрезке . Для этого введем функцию

и .

Исследуем функцию (Рис. 1а, 1б):

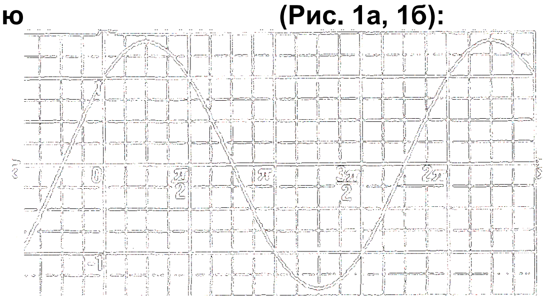


Рисунок 1а

На рисунке 1б график функции построен при помощи компьютерной программу GRAN-2D.

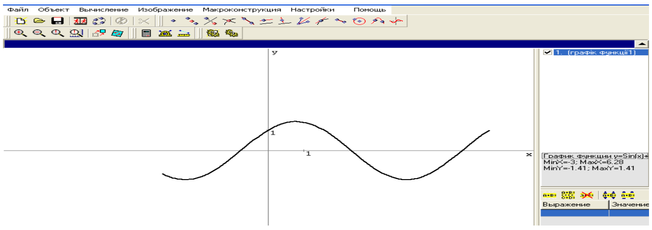


Рисунок 1б

1. Найдем область определения функции D(y) є R.

2. Найдем первую производную функции: .

Далее найдем точки экстремума на отрезке :

при и .

Находим промежутки знакопостоянства производной функции на отрезке :

x					
	+	0	–	0	+
		max		min	

.3 , **.3**

.3 – графиком функции будет являться прямая параллельная оси абсцисс, смещенная на единиц вверх, если **или вниз, если .**

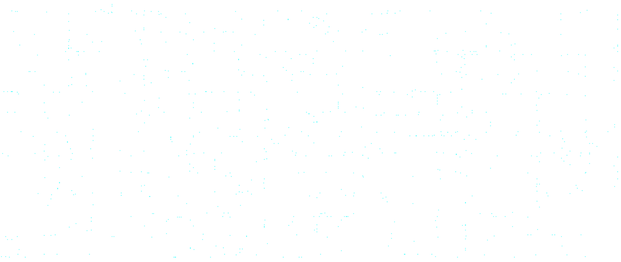
Решим уравнение: .

По графику (рис. 1) заполним таблицу количества корней:

а					
Количество корней	**1**	**2**	**3**	**2**	**1**

2. Нахождение количества корней уравнения , где .

Аналогично строим график функции (Рис. 2а, 2б).



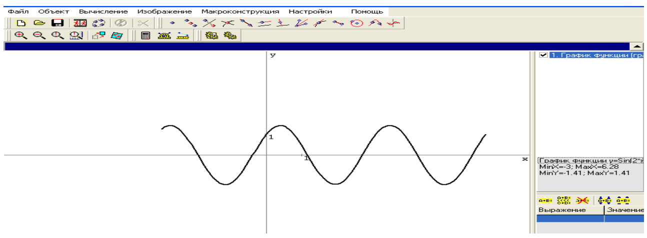
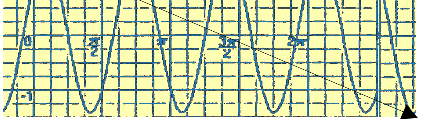


Рисунок 2б



По графику (рис. 2а) заполним таблицу количества корней:

а					
Количество корней	2	4	5	4	2

Далее рассмотрим уравнение , где .

Аналогично строим график функции (Рис. 3а, 3б).

Рисунок 3а

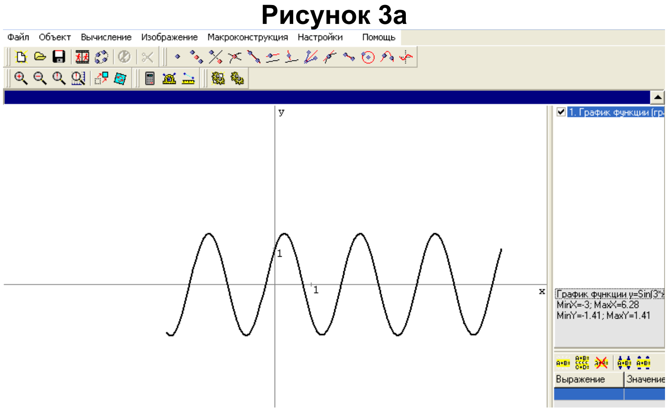


Рисунок 3б

По графику (рис. 3а) заполним таблицу количества корней:

а					
Количество корней	3	6	7	6	3

4. Систематизация и анализ полученных результатов.
Заполним общую таблицу:

k					
1	1	2	3	2	1
2	2	4	5	4	2
3	3	6	7	6	3
…	…	…	…	…	…
k	k	2k	2k+1	2k	k

Последняя строка таблицы определяет закономерность количества корней уравнения при .

5. Выдвижение гипотезы.

1) Если , то уравнение имеет k, при .
Проверка гипотезы 1.

Покажем, что уравнение имеет 5 корней, если .

Решение:

, ;

, . Учитывая, что , получим

, n=1, n=2, n=3, n=4, n=5.

Следовательно, ; ; ; ; .

Проверка показала, что уравнение имеет 5 корней, если

.

Доказательство истинности гипотезы 1.

Докажем, что уравнение имеет k корней, если .

, ; , .

Учитывая, что , получим , , ,

. n=0, n=1, n=2, n=3, …n=k-1.

Следовательно, серия , , содержит k корней.

Аналогично доказывается, что уравнение имеет k корней.

6. Сбор фактического материала (решение частных задач для разрешения проблемы 2).

1). Нахождение количества корней уравнения , , если .

При n=2 графиком функции является прямая y=1, параллельная оси абсцисс, при любом k, так как выполняется основное тригонометрическое тождество . Поэтому решением уравнения является: множество решений при a=1; нет решений при a≠1.

2) Нахождение количества корней уравнения при n=2n+1, где m є N.

Сначала рассмотрим графики функций и (Рис. 4а, 4б и Рис. 5а, 5б).

мму GRAN-2D.

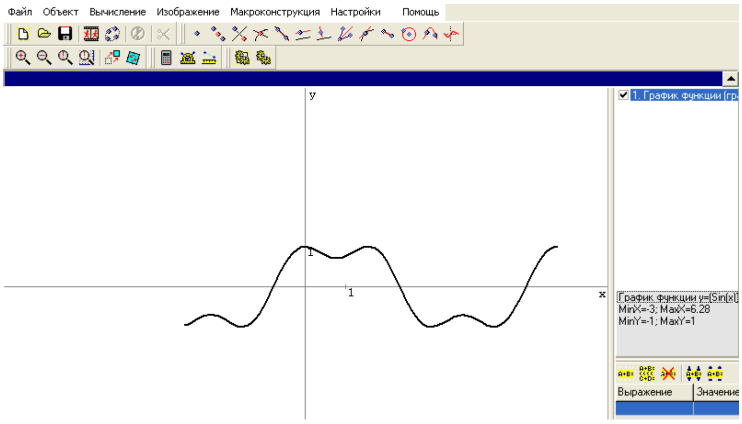


Рисунок 4б

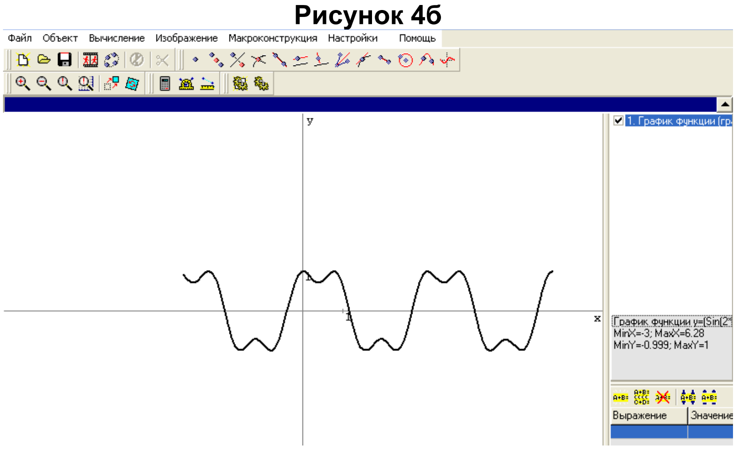
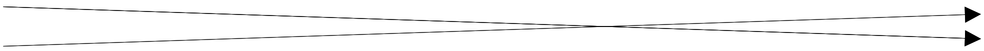


Рисунок 5б

Исследуем график функции на отрезке .
Найдем производную и стационарные точки.

при

и



, , , ,

x										
	+	0	–	0	+					
		min		max		min		max		min

, , , , .

Вернемся к уравнению и заполним таблицу количества корней:

k							
1	2	4	3	2	3	4	3
2	4	8	6	4	6	8	5
3	6	12	9	6	9	12	7
…	…	…	…	…	…		
k	2k	4k	3k	2k	3k	4k	2k+1

Далее рассмотрим уравнения и (Рис.6, Рис. 7).

, .

Рисунок 6а **Рисунок 7а**

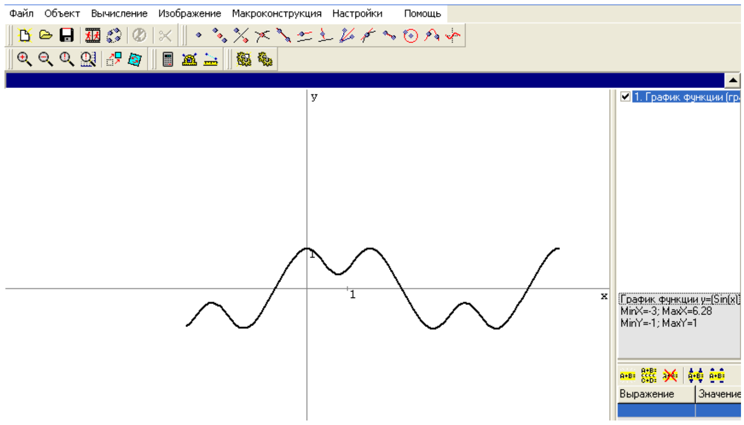


Рисунок 6б

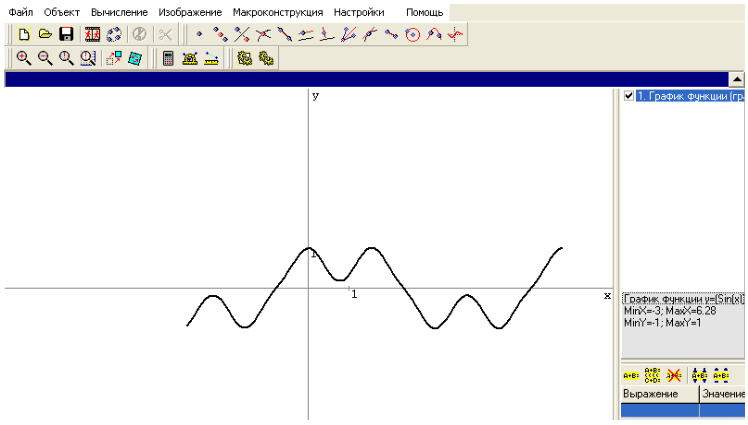


Рисунок 7б

7. Систематизация и анализ полученных результатов. Заполним таблицы количества корней уравнений и .

:

a=-1						**a=1**
Количество корней	**4k**	**3k**	**2k**	**3k**	**4k**	**2k+1**

:

a=-1						**a=1**
Количество корней	**4k**	**3k**	**2k**	**3k**	**4k**	**2k+1**

Можно увидеть закономерность: в уравнении , при , где n є N, количество корней будет:

a=-1						**a=1**
Количес[illegible] корне[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	**3k**	**4k**	**2k+1**

Рисунок 10а

3 (n≥2, nєN).

Рассмот ,

, ,

, 9аб, 10аб соответственно.

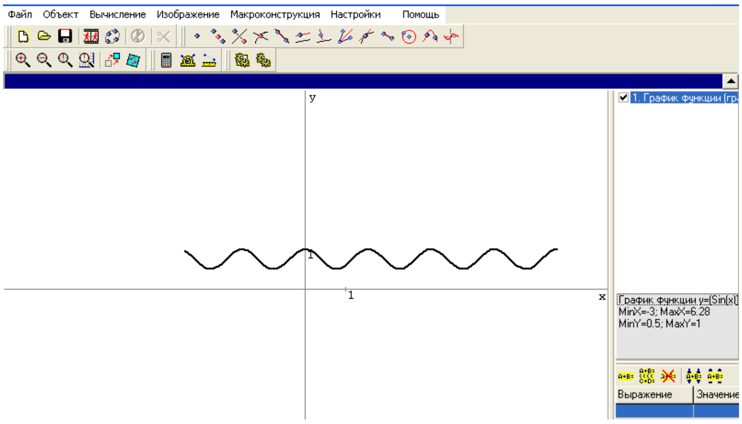


Рисунок 8б

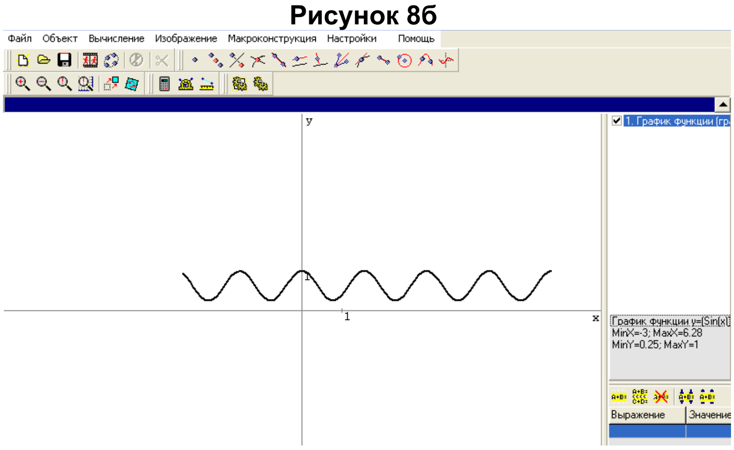


Рисунок 9б

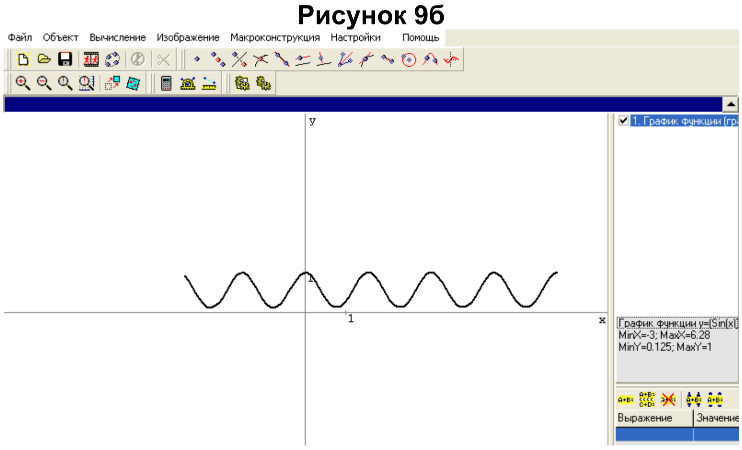


Рисунок 10б

Заполним таблицы количества корней уравнений:

:

4k	**8k**	**4k**

:

4k	**8k**	**4k**

:

4k	**8k**	**4k**

Можно увидеть закономерность. В уравнении , при n=2m+2, где m є N количество корней будет:

4k	**8k**	**4k**

8. Выдвижение гипотезы 2.

Если a=1 уравнение при n=2m+1, где m є N имеет 2k+1 корней, если .

9. Проверка гипотезы 2.

Покажем, уравнение , имеет 5 корней, если .

Уравнение имеет решение, если:

или .

Решение первой системы уравнений:

Решение второй системы уравнений:

.

Учитывая, что получим:

,

, .

10. Доказательство истинности гипотезы 2.

Уравнение , при n=2m+1, где m є N имеет решение, если

или

Решение первой системы уравнений:

Решение второй системы уравнений:

.

Учитывая, что получим:

1. ,

серия , содержит k корней.

2. , .

серия , содержит k+1 корней.

Таким образом, уравнение при n=2m+1, где m є N имеет 2k+1 корней, если . Истинность гипотезы 2 доказана.

Кроме того, истинность гипотезы 2 можно доказать методом полной математической индукции.

Как показал эксперимент, групповая форма обучения является наиболее оптимальной, если поисково-исследовательскую задачу можно решить несколькими способами, поскольку нахождение нескольких способов решения задачи формирует одно из основных свойств математических способностей – гибкость.

2.4. Дифференцированно-групповая работа при обучении учащихся решению поисково-исследовательских задач

Дифференцированно-групповое обучение предлагает такое планирование учебной деятельности разных типологических групп, при которых задания для учащихся разных групп отличаются не только объемом, но и типом конструкции. Это обязывает учителя тщательно подбирать учебные задачи и планировать работу учеников в соответствующем темпе.

Учебный процесс должен строиться с учетом реальных учебных возможностей учащихся, предоставляя каждому свой оптимальный темп продвижения в усвоении знаний. Материалы исследований говорят о том, что ученики одного класса отличаются друг от друга способностями.

Самостоятельность в учебной деятельность прямо связана с самостоятельностью мышления, которая проявляется в осознанном выборе вариантов решения учебной задачи, критической самооценке всего воспринимаемого, перерабатываемого материала. Познавательная самостоятельность школьника выступает как условие его творческой деятельности и как следствие развития математических способностей. Самостоятельность проявляется в качестве условия для продуктивных мыслительных процессов. Педагоги правильно отмечают, что самостоятельность нужно считать показателем активности личности и ее высоких способностей к познавательной деятельности. Самостоятельность ученика определяется умением увидеть новый вопрос, новую проблему и решить ее своими силами. Проявляя самостоятельность, ученики решают разнообразные учебные задачи.

Организация учебной работы с учетом учебных возможностей способствует интеллектуальному развитию учащихся. При этой работе все испытывают моральное удовлетворение от сделанного. Это создает высокий эмоциональный настрой, вызывая у учеников радость переживания за свои успехи. Перед каждым учащимся раскрывается возможность проявить себя при выполнении сложных заданий. Это превращается в своеобразный стимул в учебной деятельности. Данная форма учебной работы усложняет руководство деятельностью учащихся. Она требует от учителя тщательного изучения индивидуальных особенностей учеников, правильного определения их учебных возможностей.

Психолог В.А. Крутецкий [127] заметил, что школьники, справляющиеся с оригинальными задачами, при решении большой серии простейших задач чаще допускают ошибки. Это объясняется тем, что решение задач превращается в механическую работу, не стимулирующую развитие мышления.

Эксперимент показал, что дифференцированно-групповая форма обучения является наиболее оптимальной, если мотивационную задачу можно решить несколькими способами . Нахождение нескольких способов решения задачи формирует одно из основных свойств математического мышления – гибкость.

Большинство методов дифференциации помощи со стороны учителя могут быть объединены в следующие основные группы:

1) указания типа задач, правила, на которые опирается данное упражнение;
2) дополнение к заданию в виде чертежа, схемы (и тут возможна дифференциация помощи: рисунок, чертеж без обозначений, чертеж с обозначениями и т.п.);
3) запись условия в виде таблицы, матрицы, графика;
4) указание алгоритма решения;
5) приведения аналогичной задачи, решенной ранее;
6) объяснение хода выполнения подобного задания;
7) предложение выполнить вспомогательное задание, наводящее на решение основной задачи;
8) наведение на поиск решения с помощью ассоциации;
9) указание причинно-следственных связей, необходимых для выполнения задания ;
10) указания ответа, результата заранее;
11) расчленение сложной задачи на ряд элементарных;
12) постановка наводящих вопросов;
13) указание теорем, формул, на основании которых выполняется задание;
14) предупреждение о наиболее типичных ошибках, неправильных подходах и т.д.;
15) указание ошибки в чертеже, в вычислениях, в постановке алгоритма работы, в установлении зависимости т.п.;
16) использование вспомогательных дифференцированных карт (блоков информации по темам) различной степени помощи;
17) использование опорных конспектов;
18) использование рабочих тетрадей с печатной основой.

Рассмотрим пример организации решения поисково-исследовательской задачи (случай, когда мотивационную задачу можно решить несколькими способами) в условиях дифференцированно-групповой формы обучения.

Тема: «Площади фигур» (IX математический класс).

Организация решения поисково-исследовательской задачи.

Задача. Дан треугольник ABC, внутри которого построен треугольник MNP так, что

, M є AP; , N є BM; , P є CN.

Найти площадь треугольника ABC, если площадь треугольника MNP равна S. Найти решение более общей задачи.

Опишем дифференцированно-групповую форму работы.

1. Мотивационная деятельность.

Учитель рассказывает о пользе данного исследования (с позиции приобретения новых знаний, методики, практики). Учитель сообщает, что очень важно знать методы решения геометрических задач. Ставится вопрос: какие методы решения геометрических задач вам известны? Слушает ответы учащихся, дополняет их, уточняет. Учитель дает инструктаж, выдает каждой группе карточку с мотивационной задачей и карточку предписаний.

Учитель делит учащихся на 3 группы. Учащиеся слушают учителя, некоторые отвечают на вопросы, записывают основные методы: алгебраический метод; метод параллельных проекций; метод «Дополнительных построений»; координатный метод и др.

Таблица 2.4.1

Деятельность учащихся 1 группы	Деятельность учащихся 2 группы	Деятельность учащихся 3 группы
Записывают задачу	Записывают задачу. Решают задачу несколькими способами.	Записывают задачу. Решают задачу несколькими способами. Находят решение более общей задачи рациональным способом.

I группу составляют учащиеся с низкими учебными возможностями, поэтому решение поисково-исследовательской задачи они выполняют частично самостоятельно, но в любое время могут обращаться за консультацией к учителю. В карточке-предписании записаны не только этапы исследовательской деятельности и указания, но и план решений методом «параллельных проекций», образец решений аналогичной задачи координатным методом.

План решения методом параллельных проекций.

1. Предположить, что проекцией треугольника MNP является равносторонний треугольник M1N1P1.

2. Обозначить сторону треугольника M1N1P1 и найти площадь этого треугольника.

3. Найти площади треугольников A1M1B1, BINIC1 и A1P1C1.

4. Найти площадь треугольника A1B1C1.

5. Учитывая, что при параллельной проекции выполняется равенство

. Найти площадь треугольника ABC.

II группу составляют учащиеся с вышесредними учебными возможностями. В карточке предписаний для II группы, кроме этапов исследования, дан план одного способа решения частной задачи. Данную задачу можно решить четырьмя способами, один из этих способов – «Метод координат». Предлагается план решения этим методом.

1. Ввести координаты точек M, N, и P.

2. Записать площадь треугольника MNP, используя формулу:

3. Найти координаты точек A, B и C, используя формулы деления отрезка в данном

отношении (k): .3 , .3 .

4. Найти площадь треугольника ABC.

III группу составляют учащиеся с высокими учебными возможностями. В карточке-предписании для III группы записаны только этапы исследовательской деятельности.

1. Задача.

2. Постановка проблемы.

3. Сбор фактического материала (решение частных задач).

4. Систематизация и анализ полученных (результатов) материалов.
5. Выдвижение гипотезы.
6. Доказательство истинности гипотезы.
7. Вывод.

2. Постановка проблемы. Учитель вполголоса беседует с некоторыми учащимися III группы, отвечает на их вопросы, наводящими вопросами помогает им в постановке проблемы. А также просматривает в каждой группе поставленную проблему, делает некоторые уточнения и дополнения, особенно в III группе.

Проблема 1. Дан треугольник ABC, внутри которого построен

треугольник MNP, так что , **M AP; , N BM; , P CN.**

Найти площадь треугольника ABC, если площадь треугольника MNP равна S. Решить наиболее рациональным способом

Проблема 2. Дан выпуклый многоугольник A1A2...An, внутри которого построен

выпуклый многоугольник B1B2...Bn так, что ; ; …

; B1B2B2B3BnBn-1BnB1. Найти площадь выпуклого многоугольника A1A2...An, если площадь выпуклого многоугольника B1B2...Bn равна S.

Проблема 3. Дан выпуклый многоугольник A1A2A3...A2n+1, внутри которого

построен выпуклый многоугольник B1B2B3...B2n+1 так, что ;

; ;… .

Таблица 2.4.2.

Деятельность учащихся I группы	**Деятельность учащихся II группы**	**Деятельность учащихся III группы**
Некоторые учащиеся беседуют с учителем, делают предположения, отвечают на вопросы и с помощью учителя устанавливают проблему.	**Учащиеся, дискуссируя в рамках своей группы, самостоятельно устанавливают проблему.**	**Учащиеся, дискуссируя в рамках своей группы, самостоятельно устанавливают проблему.**

3. Сбор фактических материалов (решение частных задач).

Учитель дает время учащимся подумать, а так же, используя предписания, найти решение хотя бы одним способом. Затем вполголоса беседует с некоторыми учащимися III группы, отвечает на их вопросы, наводящими вопросами помогает им в процессе решения задачи. Учитель просматривает решения задач в каждой группе, делает некоторые уточнения и дополнения, особенно в III в группе.

Таблица 2.4.3.

Деятельность учащихся I группы	**Деятельность учащихся II группы**	**Деятельность учащихся III группы**

Рисунок 1

Учащиеся думают, советуются друг с другом, беседуют с учителем, отвечают на вопросы , а также, используя предписания и контролируя друг друга, самостоятельно решают мотивационную задачу двумя способами. Затем, используя указания учителя, учащиеся частично самостоятельно находят решение данной задачи третьим и четвертым способом.	**Учащиеся думают, советуются друг с другом, затем находят решение мотивационной задачи двумя способами, после того как учитель сообщил, что существует еще два способа решения, учащиеся думают и хотя с трудом, но самостоятельно находят тре тий способ решения. Затем после небольшой консультации учителя учащиеся находят решение данной задачи четвертым способом.**	**Учащиеся думают, советуются друг с другом, а также, используя предписания и контролируя друг друга, самостоятельно решают мотивационную задачу тремя способами. Затем после небольшой консультации учителя учащиеся самостоятельно находят решение данной за дачи четвертым способом.**

1 способ решения.

Пусть: AM = x, тогда MP=2x, AP=3x, BN=3y, тогда NM=2y, BM=5y; CP=4z, тогда PN=3z, CN=7z. .

1)

.

2)

.

3)

Рисунок 3

.

.

2 способ решения «Метод параллельных проекций».

Выполним параллельную проекцию так, чтобы проекция треугольника MNP являлся равносторонний треугольник M1N1P1 (рис. 2). Учитывая условие задачи и свойства параллельных проекций получим:

, , .

Пусть N1M1 a, тогда .

.

Из свойств параллельных проекций следует, что:

, , , .

3 способ решения «Метод дополнительных построений».

Выполним дополнительные построения. Построим отрезки AN, BP и MC (рис. 3).

1) (так как треугольники MNP, MAN имеют общую высоту, проведенную из общей вершины N к прямой AP, AM ∈ AP, MP ∈ AP).

, .

2) , , .

3) , , .

4) , , .

5) , , .

6) , , .

.

4 способ решения «Координатный метод».
Пусть вершины треугольника MNP имеют координаты: M1(x1;y1), N(x2;y2), P(x3;y3).

Используя формулу , получаем:

.

Найдем координаты точек A, B и C.
Используем формулы координат точки деления отрезка в данном отношении k:

.3 , .3 .

1) .3 , .3 , .3 .

.3 , .3 , .3

, .3 .

2) .3 , .3 , .3

.3 , .3 ,

.3 , .3 .

3) .3 , .3 , .3

.3 , .3 , .

3 , .3 .

EMBED Equation.3 .

, .

4. Систематизация и анализ полученных результатов.

Учитель дает время подумать, затем вполголоса беседует с некоторыми учащимися III группы, отвечает на их вопросы. Наводящими вопросами помогает им найти некоторые закономерности и сделать предположения.

Таблица 2.4.4

Деятельность учащихся I группы	Деятельность учащихся II группы	Деятельность учащихся III группы
Учащиеся систематизируют и анализируют полученные результаты. Дискуссируя в рамках своей группы, самостоятельно делают вывод о том, что наибольшее количество операций было выполнено при решении IV способом (координатный метод), наименьшее количество операций было выполнено при решении II способом (метод параллельных проекций), и хотя наименьшее количество операций было выполнено при решении II способом (метод параллельных проекций), но более понятным является I способ («алгебраический» метод).	Учащиеся систематизируют и анализируют полученные результаты. Дискуссируя в рамках своей группы, самостоятельно делают вывод о том, что наибольшее количество операций было выполнено при решении IV способом (координатный метод), наименьшее количество операций было выполнено при решении II способом (метод параллельных проекций). Учащиеся самостоятельно делают предположения, что является основой гипотезы.	Учащиеся систематизируют и анализируют получение результаты. Дискуссируя в рамках своей группы, самостоятельно делают вывод о том, что наибольшее количество операций было выполнено при решении IV способом (координатный метод), наименьшее количество операций было выполнено при решении II способом (метод параллельных проекций). Учащиеся самостоятельно делают предположения, что является основой гипотезы.

1. Если проанализировать решение каждым способом, то можно отметить, что наибольшее количество операций было выполнено при решении 4 способом («Координатный метод»), а наименьшее количество операций было выполнено при решении 2 способом («Метод параллельных проекций»).

2. Нетрудно увидеть некоторую закономерность и сделать соответствующее обобщение.

Если площадь треугольника MNP равна S, то площадь треугольника ABC, внутри

которого построен треугольник MNP так, что , M AP; , N BM; , P CN, можно найти:

;

;

.

5. Выдвижение гипотезы.

Учитель просматривает оформление выдвижения гипотезы в каждой группе. Наводящими вопросами, а так же используя контпримеры, помогает учащимся III группы записать гипотезу более точно.

Таблица 2.4.5

Деятельность учащихся I группы	Деятельность учащихся II группы	Деятельность учащихся III группы
На основании сделанных предположений, а также учитывая дополнение, сделанное учителем, учащиеся выдвигают гипотезу.	На основании сделанных предположений учащиеся самостоятельно выдвигают гипотезу.	На основании сделанных предположений учащиеся самостоятельно выдвигают гипотезу.

Если площадь треугольника MNP равна S, то площадь треугольника ABC, внутри которого построен треугольник MNP, так что:

, M AP; , N BM , P CN

равна .

Учитывая, что учащиеся определили наиболее рациональный способ решения мотивационной задачи в каждой группе, и то, что проверка гипотезы осуществляется тем же способом, что и доказательство истинности гипотезы, только в общем виде, учитель предлагает учащимся в следующем этапе исследования доказать истинность гипотезы.

6. Доказательство истинности гипотезы.

Учитель дает время подумать, а также, используя предписания, определить этапы решения. Затем в полголоса беседует с некоторыми учащимися III группы, отвечает на их вопросы. Наводящими вопросами помогает им, если возникают затруднения при решении задачи.

Дан треугольник ABC, внутри которого построен треугольник MNP, так что:

, M AP; , N BM , P CN.

Доказать, что площадь треугольника ABC равна

, если площадь треугольника MNP равна S.

Таблица 2.4.6.

Деятельность учащихся I группы	Деятельность учащихся II группы	Деятельность учащихся III группы
Учащиеся думают, советуются друг с другом, беседуют с учителем, отвечают на вопросы, а так же , используя предписания и указания учителя, выполняя пошаговый взаимоконтроль, самостоятельно доказывают истинность гипотезы «алгебраическим» методом.	Учащиеся думают, советуются друг с другом, а так же, используя предписания и указания учителя, выполняя пошаговый взаимоконтроль, самостоятельно доказывают истинность гипотезы методом «параллельных проекций».	Учащиеся думают, советуются друг с другом, выполняя пошаговый взаимоконтроль и проверку, самостоятельно доказывают истинность гипотезы методом «параллельных проекций».

Доказательство: Выполним параллельную проекцию так, чтобы проекцией треугольника MNP являлся равносторонний треугольник M1N1P1. Учитывая условие задачи и свойства параллельных проекций, получим:

, , .

Пусть N1M1a, тогда .

,

;

,

;

,

;

.

.

Из свойств параллельных проекций следует, что:

, ,

.

7. Вывод. Учитель дает время подумать, затем в полголоса беседует с некоторыми учащимися III группы, отвечает на их вопросы. Если возникают затруднения в постановке проблемы дальнейшего исследования, наводящими вопросами помогает им. Затем просматривает итоги исследования в каждой группе, делает некоторые уточнения и дополнения, предлагает индивидуальное домашнее задание, оценивает работу каждой группы.

Учащиеся I группы думают, анализируют полученные результаты, беседуют с учителем, отвечают на вопросы, а затем записывают результаты обсуждения.

1. Если площадь треугольника MNP равна S, то площадь треугольника ABC, внутри которого построен треугольник MNP так, что .3 $, M \in AP,$ **, N $\in$ BM .3** $, P \in CN$ равна **EMBED Equation.3**

.

2. Данную задачу можно решить четырьмя способами. Наиболее рациональным способом является алгебраический метод.

3. Постановка проблемы дальнейшего исследования: дан выпуклый восьмиугольник $A_1A_2A_3...A_8$, внутри которого построен выпуклый восьмиугольник $B_1B_2B_3...B_8$ так, что ; ; ;... **. Найти площадь многоугольника A1A2A3...A8, если площадь многоугольника B1B2B3...B8 равна S и B1B2 =B2B3 7B81B8.**

Учащиеся II группы думают, анализируют процесс решения и полученные результаты, а затем записывают:

1. Если площадь треугольника MNP равна S, то площадь треугольник ABC, внутри которого построен треугольник MNP так, что .3 $, M \in AP,$ **, N$\in$ BM; .3** $, P \in CN$ равна:

EMBED Equation.3 .

2. Данную задачу можно решить четырьмя способами. Наиболее рациональным способом является метод «параллельных проекций».

3. Постановка проблемы дальнейшего исследования: дан выпуклый многоугольник $A_1A_2A_3...A_{2n+1}$, внутри которого построен выпуклый многоугольник $B_1B_2B_3...B_{2n+1}$ так, что ; ;

;... .

Найти площадь многоугольника A1A2A3...A2n+1, если площадь многоугольника B1B2B3...B2n+1 равна S и B1B22B32nB2n+1.

Учащиеся III группы думают, советуются друг с другом, а затем записывают результаты обсуждения:

1. Если площадь треугольника MNP равна S, то площадь треугольника

ABC, внутри которого построен треугольник MNP так, что .3 ; $M \in AP$,

, N ∈ BM; .3 , $P \in CN$ равна:

EMBED Equation.3 .

2. Данную задачу можно решить четырьмя способами. Наиболее рациональным способом является метод «параллельных проекций».

3. Постановка проблемы дальнейшего исследования: дан выпуклый многоугольник $A_1A_2...A_n$, внутри которого построен выпуклый

многоугольник $B_1B_2...B_n$ так, что ; ; ...

; B1B2B2B3BnBn-1BnB1. Найти площадь выпуклого многоугольника A1A2...An, если площадь выпуклого многоугольника B1B2...Bn равна S.

2.5. Организация и результаты педагогического эксперимента

Учащиеся приобщаются к исследовательской деятельности, главным образом, в процессе решения специально подобранных или составленных задач и упражнений. Основную цель такой работы педагоги-математики видят в том, чтобы сформировать исследовательские умения, развить мышление и математические способности учащихся. Специальных методических пособий по организации учебных исследований по математике, а тем более при обучении учащихся решению поисково-исследовательских задач, как правило, не существует. В педагогической деятельности учителя руководствуются, главным образом, личным опытом и собственной интуицией.

Целью педагогического эксперимента являлась проверка эффективности предложенных путей развития математических способностей учащихся в процессе решения поисково-исследовательских, а также проверка разработанного методического обеспечения , включающего блоки заданий на решение и составление задач на основе приемов аналогии , обращения, обобщения и специализации.

В результате освоения курса учащиеся должны овладеть следующими умениями, представляющими обязательный минимум:

–производить моделирование учебной задачи;

–применять различные эвристики при решении задач; понимать и уметь применять приемы классификации, аналогии, контрпримера и подтверждающего примера, доказательство от «противного»;

–доказательно обосновывать решение задач;

–составлять словесные алгоритмы для решения простейших задач.

Эксперимент проводился в три этапа (констатирующий, поисковый, обучающий) в период с 2004 г. по 2007 г.

Экспериментальная работа велась одновременно в IX-XI математических классах. Для демонстрации ее результатов в диссертации в качестве основных были выбраны математические классы: контрольные (КК) и экспериментальные (ЭК). Цель эксперимента заключалась в проверке выдвинутой гипотезы. Исследовался вопрос о влиянии учебных

исследований при обучении учащихся решению поисково-исследовательских задач на качество знаний и развитие математических способностей учащихся математических классов.

Традиционно сущность педагогического эксперимента заключается в изменении одних условий осуществления учебного процесса и сохранение других. В нашем эксперименте к неварьируемым условиям мы отнесли: объем учебного материала, соответствующий учебной программе по математике; одни и те же тексты контрольных работ. Различной же была методическая работа по обучению учебному материалу. В частности, в экспериментальных классах использовались аналитические и графические учебные исследования для обучения учащихся решению поисково-исследовательских задач.

Для осуществления сравнительной эффективности выбирались классы, совпадающие по следующим характеристикам: успеваемость учащихся, результаты контрольных и текущие оценки проверочных работ, проведенных по завершению первой учебной четверти 2005-2006 учебного года.

Констатирующий эксперимент.

Констатирующий эксперимент проходил с 2004г. по 2005г. и включал:

— изучение и анализ специальной, психолого-педагогической и методической литературы по проблеме исследования;

— изучение и анализ существующих в современной школьной практике путей развития математических способностей учащихся в условиях дифференциации обучения;

— изучение и анализ учебных программ, альтернативных учебников и учебных пособий по алгебре и началам анализа и геометрии для углубленного изучения предмета в 9-11 классах;

— изучение методических особенностей изучения материала алгебры и начал анализа и геометрии в школьном курсе математики, его возможностей для развития математических способностей учащихся;

— педагогическое наблюдение за учебным процессом;

— изучение школьной документации (журналов успеваемости, тематических и поурочных планов, отчетов учителей и т.д.);

— анализ письменных контрольных работ учащихся;

— интервьюирование и анкетирование учителей и учащихся.

Констатирующий эксперимент позволил выявить трудности организации процесса изучения материала алгебры и начал анализа и геометрии в старшей школе, направленного на развитие математических способностей школьников, тем самым подтвердилась актуальность проблемы исследования.

Для выявления актуальности исследуемой проблемы было проведено анкетирование среди учителей математики ряда школ г. Ялты, г. Чернигова, г. Нежина. С этой целью была разработана соответствующая анкета, которая представлена в приложении 1.

Проведенное анкетирование показало, что практически в каждом классе есть ученики, проявляющие интерес и определенные способности к углубленному изучению математики. Однако, в большинстве случаев, опрашиваемые учителя отмечали, что дальнейшее развитие математических способностей таких учащихся происходит эпизодически. В качестве причин, объясняющих такое положение вещей, ими назывались:

- **отсутствие теоретических разработок соответствующего направления;**
- **недостаточное владение учителями основами теории развития математических способностей школьников подросткового возраста;**
- **отсутствие в распоряжении учителя необходимых конкретных методических разработок;**
- **отсутствие учебных пособий для учителей и учащихся, содержащих не только нестандартные задачи, но и творческие задания к ним и т.д.**

В одном из вопросов анкеты учителям предлагалось указать пути развития математических способностей школьников. Среди таких путей были названы: углубленное изучение математики в специализированных математических классах и школах; занятия учащихся в школьных математических кружках и на факультативах; подготовка к математическим олимпиадам и участие в них; самостоятельная работа учащихся; работа над рефератами и докладами; использование в обучении проектной деятельности; решение занимательных задач и задач на сообразительность; решение задач несколькими способами; самостоятельное составление учащимися математических задач и др.

Некоторые учителя отмечали, что само содержание углубленного курса математики является достаточным условием развития математических способностей школьников и применение никаких специальных приемов для их развития вовсе не требуется.

Несколько учителей затруднились дать какой-либо ответ на данный вопрос (3%).

Большинство учителей отметили, что используют в своей практике решение задач несколькими способами, но преимущественно при изучении геометрического материала в домашних работах и на факультативных занятиях, 4% учителей не прибегают к практике решения задач несколькими способами.

Составление задач учащимися в учебном процессе применяют лишь 12% учителей в качестве творческих домашних заданий. Среди причин невнимания к данному виду творческой математической деятельности учителя называли нехватку учебного времени, а также отсутствие в учебных пособиях заданий на составление учащимися новых задач и отсутствие соответствующих методических разработок для учителей.

Более 50% учителей отметили, что в существующих учебных пособиях для углубленного изучения математики практически отсутствуют творческие задания по решению задач, направленных на развитие математических способностей учащихся 9-11 классов.

Таким образом, результаты анкетирования подтвердили актуальность выбранной нами темы исследования. Большинство учителей в своих анкетах отмечали важность развития математических способностей учащихся, а также указывали на существующие трудности в реализации этого развития на практике. В связи с этим было указано на необходимость в разработке методического обеспечения для углубленного изучения материала алгебры и начал анализа и геометрии, реализующего идею развития математических способностей учащихся на основе решения задач несколькими способами и самостоятельного составления новых задач.

В результате проведенной на этом этапе работы была сформулирована проблема исследования и выдвинута гипотеза: если в процессе обучения алгебре и началам анализа и геометрии учащихся классов с углубленным изучением математики органично включать содержательно-методическую линию поисково-исследовательских задач, то это будет способствовать развитию математических способностей учащихся, повышению качества знаний, развитию устойчивого интереса школьников к изучению математики, расширению их кругозора.

Это позволило наметить методику исследования, направленную на установление истинности гипотезы.

Поисковый эксперимент.

Поисковый эксперимент осуществлялся в период с 2005 г. по 2006 г. Поисковый эксперимент состоял в определении основных путей развития математических способностей учащихся и в разработке блоков заданий, направленных на их реализацию.

На этом этапе педагогического эксперимента нами решались следующие задачи:

1) **разработка блоков заданий по алгебре и началам анализа и геометрии, направленных на развитие математических способностей учащихся;**
2) **составление методических указаний по решению задач несколькими способами;**
3) **выявление особенностей методики обучения старшеклассников составлению задач, порождаемых решенными ранее задачами;**
4) **проверка доступности отобранного задачного материала и качества его усвоения;**
5) **установление влияния использования разработанных блоков заданий на развитие компонентов математических способностей;**
6) **отбор методов статистического анализа для проверки выдвинутой в ходе педагогического эксперимента гипотезы;**
7) **подготовка материалов для проведения обучающего эксперимента.**

На всем протяжении поискового этапа педагогического эксперимента особое внимание уделялось изучению влияния предложенных методических разработок на уровень развития математических способностей учащихся. С этой целью нами систематически проводились диагностические самостоятельные и контрольные работы, анализ результатов которых позволял вносить оперативные изменения в разрабатываемые методические материалы с учетом возникающих на практике трудностей.

В это же время проводилась работа по выявлению приемов и способов работы учителя и учащихся, соответствующих развивающим целям обучения, определение их роли в развитии математических способностей учеников 9-11 классов.

В ходе экспериментальной проверки особое внимание обращалось:

а) на развитие и поддержание постоянного интереса учащихся к изучаемому материалу, в целом, и к конкретному содержанию текущего материала;

б) на создание творческой обстановки на занятиях;

в) на проявление учащимися максимальной степени активности и самостоятельности в урочной и внеурочной математической деятельности;

г) на учет индивидуальных особенностей учащихся, а также актуального и потенциального уровней развития их математических способностей.

Результаты, полученные в ходе поискового этапа педагогического эксперимента, позволили перейти к следующему его этапу – к обучающему эксперименту.

Обучающий эксперимент.

Обучающий эксперимент проводился в 2006-2007 гг. На этом этапе экспериментом было охвачено около 371 учеников. Экспериментальное обучение проходило в школах г. Ялты АР Крым, г. Чернигова, г. Нежина.

Основной целью обучающего эксперимента являлась проверка и оценка эффективности предложенных путей развития математических способностей учащихся в процессе изучения материала алгебры и начал анализа и геометрии: развитие математических способностей учащихся путем обучения решению задач несколькими способами и составлению новых задач, порождаемых решенными задачами.

Обучающий эксперимент предусматривал организацию обучения учащихся на материале поисково-исследовательских задач на основе реализации намеченных в исследовании путей развития математических способностей учащихся с использованием разработанного методического обеспечения. На данном этапе педагогического эксперимента были получены результаты, подтверждающие эффективность как предложенных путей развития математических способностей учащихся при изучении поисково-исследовательских задач, так и разработанного методического обеспечения.

Для демонстрации результатов экспериментальной работы в диссертации в качестве основных были выбраны два математических класса: контрольный IX (КК) и экспериментальный IX (ЭК). Исследовался вопрос о влиянии учебных исследований при обучении учащихся решению поисково-исследовательских задач на качество знаний и развитие математических способностей учащихся математических классов.

Традиционно сущность педагогического эксперимента заключается в изменении одних условий осуществления учебного процесса и сохранение других. В нашем эксперименте к неварьируемым условиям мы отнесли: объем учебного материала, соответствующий учебной программе по математике; одни и те же тексты контрольных работ. Различной же была методическая работа по обучению учебному материалу. В частности, в экспериментальных классах использовались аналитические и графические учебные исследования для обучения учащихся решению поисково-исследовательских задач.

Для осуществления сравнительной эффективности выбирались классы, совпадающие по следующим характеристикам: успеваемость учащихся, результаты контрольных и текущие оценки проверочных работ.

Учебные исследования по математике являются одним из эффективных способов одновременной реализации развивающей и дидактической функций процесса обучения. Показателем выполнения этих функций является умение решать эвристические задания. Поэтому в срезовую контрольную работу нами были включены пять заданий различного уровня сложности. Первые три из них – это задания на уровне минимальных программных требований и среднего уровня сложности. Их решение предусматривает умение применять знания в стандартных условиях или при небольших отклонениях от них. По сложности они соответствуют большинству заданий учебника. Следующие два задания эвристического характера, проверяющие математическое развитие учащихся, требующие для их решении умения применять знания в усложненных ситуациях, творческого применения знаний, анализа нестандартных ситуаций, самостоятельности в открытии новых фактов и нахождении отношений между ними.

Приведем один из вариантов контрольной работы по алгебре:

1. Решить уравнение .

2. Решить неравенство .

3. Вычислить .

4. Решить уравнение .

5. При каких значениях параметра а уравнение не имеет решений?

Данная контрольная работа составлена из многокомпонентных заданий и предназначена не только для контроля за усвоением темы, но и для диагностики развития:

– гибкости мыслительных процессов учащихся (критерий – умение решать задачи несколькими способами);

– способности к обратимости мыслительных процессов (критерий – умение самостоятельно составлять задачи с помощью приема обращения и решать их);

– способности к обобщению математического материала (критерий – умение составлять и решать задачи, являющиеся обобщением исходной задачи);

– способности к схватыванию формальной структуры задачи (критерий – умение составлять и решать задачи, аналогичные данной).

Результаты контрольной работы представлены в следующих таблицах (табл. 2.5.1 и табл. 2.5.2).

Таблица 2.5.1

Таблица результатов контрольной работы

Количество решенных задач	Число учащихся, справившихся с заданием контрольной работы	
	ЭК	КК
5	7	–
4	35	8
3	70	64
2	49	85
1	28	31
0	–	–
	Всего 189 человек	Всего 188 человек

Таблица 2.5.2

Результаты контрольной работы

	Решение первого задания	Решение второго задания	Решение третьего задания	Решение четвертого задания	Решение пятого задания

	Количество	%	Количество	%	Количество	%	Количество	%	Количество	%
ЭК	189	100	175	92,59	70	37,04	42	22,22	7	3,70
КК	188	100	173	92,02	57	30,32	8	4,26	0	0

Результаты таблицы 2.5.2 показывают, что количество учащихся, решивших первые три задачи (стандартные) в ЭК и КК почти одинаковые, а число учеников, решивших два следующих задания (эвристические), заметно различается. Следовательно, на основании данных наблюдения можно сделать вывод, что при введении в практику обучения алгебры и начал анализа и геометрии учебных исследований, умения решать стандартные задания сохраняются, а умения решать эвристические задания имеют заметную положительную динамику. Кроме того, следует отметить более полное обоснование решений выполненных заданий.

Выполненные работы учащихся экспериментальных классов отличались от решений тех же самых задач соответствующими учащимися контрольных классов большей обоснованностью, нахождением более рациональных путей решения. Кроме того, заметна разница в затратах времени на решение предложенных задач учащимися соответствующих групп. Поэтому оставшееся время использовалось учащимися экспериментальных классов для более обстоятельного выполнения творческих заданий, предложенных в контрольной работе.

Проведем статистическую обработку для полученных данных, характеризующих умение решать различные поисково-исследовательские задания.

Для оценки существенности различий, полученных результатов в КК и ЭК, воспользуемся медианным критерием. Он используется для выявления некоторого свойства в двух совокупностях на основе изучения членов двух независимых выборок из этой совокупности. В нашем исследовании таким свойством является степень овладения учащимися умением решать эвристические задания.

Сформулируем гипотезы. Основная гипотеза Но: пусть законы распределения X и Y одинаковы. Тогда различие в степени сформированности умения решать различные задания для учащихся в КК и ЭК неслучайно. В случае отклонения гипотезы Но принимается гипотеза Н1.

Альтернативная гипотеза Н1: Пусть законы распределения X и Y одинаковы, тогда различие в степени сформированности умения решать различные задания для учащихся в КК и ЭК носит случайный характер.

Имеем две совокупности КК и ЭК. Пусть X характеризует состояние исследуемого свойства в ЭК, а Y – состояние этого свойства в КК. Обозначим через xi и yi i результаты измерения этого свойства у объектов выборок, то есть xi и yi – это количество баллов, набранных i-ым учеником. Каждое выполненное задание оценивалось по трехбалльной шкале (табл. 2.5.3).

Таблица 2.5.3

Результаты измерения независимых выборок

	3 балла	6 баллов	9 баллов	12 баллов	15 баллов
xi	28	49	70	35	7
yi	31	85	64	8	–

Наблюдаемое значение статистики критерия в данном случае находится по

формуле: (2.1)

где N n1+n2, n1 – учащихся ЭК, n2 – число учащихся КК.

В нашем случае N=189+188=377 (объем объединенной выработки). Поскольку N нечетное число, то медиана в объединенной выработке равна 189. На этом месте в этой выработке стоит 9. То есть m=9. Необходимые числовые значения разместим в таблице (табл. 2.5).

Таблица 2.5.4

Таблица числовых значений

Число элементов	Выборка xi	Выборка yi
Больших 9	42 (A = 42)	8 (B = 8)
Меньших или равных 9	147 (C = 147)	180 (D

Подставляя числовые значения, получаем:

Наблюдаемое значение критерия Тн=24,9, критическое значение Тк=23,8. Поскольку Тн > Тк, то принимается гипотеза Но со степенью достоверности 95%. Таким образом, существенное различие в степени сформированности проверяемого умения у учащихся контрольных и экспериментальных классов обусловлено различием методик обучения.

Полученные в результате эксперимента данные свидетельствуют о том, что уровень знаний учащихся, изучавших материал с систематическим использованием заданий на решение поисково-исследовательских задач несколькими способами, а также на составление задач, развивающих темы исходных задач, выше уровня знаний учащихся, изучавших данный раздел курса математики по традиционной методике.

Таким образом, предложенная нами методика оказывает статистически значимое влияние на качество процесса обучения и на развитие математических способностей учащихся математических классов. Гипотеза о позитивных изменениях, которые произошли в развитии математических способностей учащихся экспериментальных классов в результате применения разработанной нами методики обучения, подтвердилась.

Выводы к разделу 2

Проведен научно-методический анализ учебного материала с целью выявления возможностей для развития математических способностей учащихся классов с углубленным изучением математики посредством поисково-исследовательских задач.

Эффективным средством развития таких компонентов математических способностей, как способность к схватыванию формальной структуры задачи, способность к обобщению математического материала, способность к обратимости мыслительных процессов и т.д., служит составление математических задач самими учащимися. Основными видами составления задач, развивающих тему исходной задачи, являются:

1) составление задач, аналогичных исходной;
2) составление задач, обратных заданной;
3) составление задач, являющихся обобщениями исходной задачи;
4) составление задач, являющихся специализациями исходной задачи.

Органичное включение заданий на решение задач несколькими способами и составление на их основе новых задач в практику обучения может быть реализовано при помощи многокомпонентных заданий.

Сформулированы требования к отбору поисково-исследовательских задач, содействующих развитию математических способностей школьников.

При организации процесса изучения поисково-исследовательского материала на углубленном уровне, целесообразно предлагать учащимся задания на решение задач несколькими способами с целью развития у них гибкости мыслительного процесса, а также и некоторых других компонентов математических способностей.

Выделены основные подходы к решению задач по каждому тематическому направлению, приведены методические рекомендации по использованию данных задач в процессе обучения.

Эффективным средством для развития большинства компонентов математических способностей является использование блоков заданий на самостоятельное составление задач, развивающих темы исходных задач, при помощи приемов аналогии, обращения, обобщения и специализации.

Результаты педагогического эксперимента подтвердили гипотезу диссертационного исследования, то есть эффективность предложенных путей развития математических способностей учащихся старших классов с углубленным изучением математики при изучении поисково-исследовательского материала.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе теоретического и экспериментального исследования поставленной научной проблемы, в соответствии с целью и задачами исследования, получены следующие основные результаты и выводы.

1. На основе анализа психолого-педагогической и методической литературы, затрагивающей различные аспекты проблемы развития математических способностей, выявлены психолого-педагогические и дидактико-методические основы развития математических способностей учащихся в процессе обучения их решению поисково-исследовательских задач.

2. Выявлены методические особенности поисково-исследовательских задач, что позволяет использовать их для эффективного развития большинства компонентов математических способностей.

3. Сформулированы требования к подбору поисково-исследовательских задач, содействующих развитию математических способностей школьников.

4. Разработанные рекомендации основаны на выполнении определенных требований, которые следует принимать во внимание при составлении поисково-исследовательских задач.

5. Выделены основные подходы к решению задач по каждому тематическому направлению, приведены методические рекомендации по использовании данных задач в процессе обучения.

6. При обучении поисково-исследовательских задач целесообразно использовать четыре основных приема решению задач. Дана характеристика этих приемов. Каждый прием обучения соответствует определенному классу поисково-исследовательских задач. На основании поэтапного решения поисково-исследовательских задач создаются условия для формирования компонентов математических способностей учащихся.

7. Определены основные формы учебной работы: дифференцированно-групповая, коллективная и индивидуальная при обучении учащихся математических классов решению поисково-исследовательских задач, которые способствуют формированию компонентов математических способностей.

8. Разработаны блоки заданий на решение поисково-исследовательских задач, позволяющие эффективно развивать основные компоненты математических способностей. Педагогический эксперимент показал, что если в основе решения поисково-исследовательской задачи лежит индуктивный метод, то наиболее приоритетной формой организации обучения является сочетание коллективной и индивидуальной форм учебной работы. Если в основе решения лежит сочетание индуктивного и дедуктивного методов, то наиболее оптимальной формой организации обучения является дифференцированно-групповая форма учебной работы. Дифференцированно-групповую форму учебной работы можно использовать в процессе обучения решению любого класса поисково-исследовательских задач.

9. Одним из путей формирования и развития математических способностей старшеклассников является использование в учебном процессе таких компьютерно-ориентированных систем обучения, которые бы обеспечивали компьютерную поддержку поисково-исследовательской деятельности учеников, демонстрация сложного, абстрактного математического материала наглядно, создание учениками компьютерных моделей математических объектов и проведения экспериментов с ними, решение творческих, нестандартных задач, задач прикладной направленности, исследования на основе современных информационных технологий разнообразных математических проблем.

10. Экспериментально установлено, что разработанные учебные материалы содействуют повышению качества знаний учащихся, положительно влияют на воспитание устойчивого интереса к занятиям математикой, являются эффективным средством для развития математических способностей учащихся в процессе изучения ими поисково-исследовательского материала в 9-11 классах с углубленным изучением математики.

Все это дает основание считать, что поставленные задачи исследования решены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики: пер. с франц. /Адамар Ж. – М: Изд-во «Советское радио», 1970. – 152 с.**
2. **Амелькин В.В. Задачи с параметрами: Справочное пособие по математике. /В.В. Амелькин, В.И. Рабцевич – М.: Изд-во. МнАСАР, 1996. – 384 с.**

3. **Ананьев Б.Г. О взаимосвязях в развитии способностей и характера //Доклады на совещании по вопросам психологии личности. /АнаньевБ.Г. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1956. – С. 93-97.**
4. **Ананьев Б.Г. О соотношении способностей и одаренности // Проблемы способностей. / Ананьев Б.Г. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1962. – С. 15-32.**
5. **Ананьев Б.Г. Человек как предмет познания //Избранные психол. труды: в 2 т. /Ананьев Б.Г. – М. – Педагогика, 1980. – Т. 1. – 232 с.**
6. **Андреев В.И. Эвристическое программирование учебно-исследовательской деятельности: Метод. пособие. /Андреев В.И. – М.: Высш. Школа, 1981. – 240 с.**
7. **Андронов И.К. Арифметика: [пособие для средней школы]. /И.К.Андронов, В.М. Брадис – М.: Учпедгиз, 1962. – 296 с.**
8. **Анелаускене А.А. Типы математических способностей и индивидуальное обучение математике (в IX-XI кл.): автореф. дисс. на получение науч. ступени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Теория и методика преподавания» /А.А. Анелаускене– Вильнюс, 1970. – 27 с.**
9. **Антоненко Н.И. Формувание умений учащихся в исследовании стереометрических задач и их решений: автореф. дисс. на получение науч. ступени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Теория и методика преподавания» /Н.И. Антоненко– Киев, 1979. – 17 с.**

10. Артемьева Т.И. Способности и условия их развития: автореф. дисс. на получение науч. ступени канд. психол. наук. 19.00.07 «Педагогическая психология» /Т.И. Артемьева– М., 1969. – 18 с.
11. Бабанский Ю.К. Проблемы повышения эффективности педагогических исследований: (Дидактический аспект). /Бабанский Ю.К. – М.: Педагогика, 1982. – 192 с.
12. Бабанский Ю.К. Проблема оптимизации процесса обучения математике /Ю.К. Бабанский, В.Ф. Харьковская //Изучение возможностей школьников в усвоении математики: Сб. научи, трудов НИИ школ. – М., 1977. – С. 3-28.
13. Баранова Е.В. Методические основы использования учебных исследований при обучении геометрии в основной школе: автореф. дисс. на получение науч. ступени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Теория и методика преподавания» /Е.В. Баранова – Саранск, 1999. – 17 с.
14. Барнова Т. И. Исследовательский метод обучения в теории и практике общеобразовательной школы РСФСР (1917-1931): автореф. дисс. на получение науч. ступени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Теория и методика преподавания» /Т.И . Барнова – М., 1974. – 18 с.
15. Бевз Г.П. Алгебра і початки аналізу: [підруч.для 10-11 кл. загальноосвіт. навч. закл.] – 2. вид. /Бевз Г.П. – К.: Освіта, 2006. – 255с.
16. Бевз Г.П. Геометрия: Учеб. [для 10-11 кл. общеобразоват. учеб. заведений] – /Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владимирова – К.: Вежа, 2005. – 224 с.
17. Бетц В. Проблема корреляции в психологии. О соотношении психических способностей: Пер. с нем. /Бетц В. – М.: «Русский книжник», 1923. – 88 с.
18. Бинэ А. Современные идеи о детях: Пер. с франц. /Бинэ А. – М., 1910. – 216 с.

19. **Біляніна О. Я. Збірник завдань для тематичного оцінювання навчальних досягнень. Алгебра і початки аналізу. 11 клас. /О.Я. Біляніна, М.В.Гулій – Кам'янець-Подільський : Абетка, 2003. – 124с.**
20. **Блох А.Ш. Неравенства. / А.Ш. Блох, Т.Л. Трухан – Минск: Народная асвета, 1972. – 53 с.**
21. **Блох А.Я., Черкасов Р.С. О современных тенденциях в методике преподавания математики /А.Я. Блох, Р.С.Черкасов //Математика в школе. – 1989. – № 5. – С. 133-142.**
22. **Богоявленская Д.Б. Об одном из подходов к исследованию интеллектуального творчества /Д.Б. Богоявленская //Вопросы психологии.– 1994. – №4. – С. 69-79.**
23. **Богоявленский Д.Н. Психология усвоения знаний в школе. /Д.Н. Богоявленский, Н.А. Менчинская – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1959. – 347 с.**
24. **Бойцов М.И. Приобщение учащихся к исследовательской работе в обучении (на материале преподавания гуманитарных дисциплин). автореф. дисс. на получение науч. ступени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Теория и методика преподавания» /Бойцов М.И. – М., 1975. – 17 с.**
25. **Боно Э. Рождение новой идеи. О нешаблонном мышлении. /Боно Э.; пер. с англ. под общей редакцией и с послесловием д.п.н., профессора О.К. Тихомирова.– М.: «Прогресс», 1976. – 143 с.**
26. **Брунер Дж. Психология познания /Брунер Дж.; пер. с англ, яз., предисловие и общ. ред. А.Р. Лурия. – М.: Професс., 1977. – 412 с.**
27. **Бурда М.І. Методичні основи диференційованого формування геометричних умінь учнів основної школи: дис... доктора пед. наук: 13.00.02 /Бурда Михайло Іванович. – К., 1994. – 347л.**
28. **Бурда М.І. Геометрія: [навч. посіб. для 8-9 класів шкіл з поглибленним вивченням математики] / М.І. Бурда, Л.М. Савченко – К.: Освіта, 2004. – 240 с.**

29. **Бурда М.І. Розв'язування геометричних задач підвищеної складності у 8-9 класах: [посібник для вчителя] /М.І. Бурда, В.О. Чернишов – К.: Педагогічна думка, 2003. – 69 с.**
30. **Брушлинский А.В. Психология мышления и проблемное обучение. /Брушлинский А. В. – М.: Знание, 1983. – 95 с.**
31. **Буй Ван Хуэ. Составление задач как учебное и диагностическое средство: автореф. дисс. на получение науч. ступени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Теория и методика преподавания» /Буй Ван Хуэ – М., 1978. – 24 с.**
32. **Валитов Р.М.Развитие математических способностей учащихся в юношеской математической школе /Р.М. Валитов, А.М. Нежданов //За прочные и глубокие знания школьников по математике. – Казань, 1965. – С. 118-127.**
33. **Василевский А.Б. Обучение решению задач по математике: [учеб. пособие для пед. институтов.] /Василевский А.Б. – Минск: «Вышэйшая школа», 1988. – 255 с.**
34. **Венгер Л.А. Педагогика способностей. /Венгер Л.А. – М.: Знание, 1973. – 96 с.**
35. **Виноградова Л.В. Развитие мышления учащихся при обучении математике. /Виноградова Л.В. – Петрозаводск, 1989. – 175 с.**
36. **Власенко К.В. Формування прийомів евристичної діяльності учнів на уроках геометрії в класах з поглибленим вивченням математики: дис... канд. пед. наук: 13. 00.02 /Власенко Катерина Володимирівна. – Донецьк, 2003. – 293 с.**
37. **Волкова Н. Д. Дослідницька діяльність учнів при вивченні геометрії як засіб розвитку їх творчого мислення. автореф. дисс. на получение науч. ступени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Теория и методика преподавания» /Н.Д. Волкова – Київ, 1972. – 22 с.**
38. **Выгодский Л. С. Проблема обучения и умственного развития в школьном возрасте /Выгодский Л. С. /Педагогическая психология. – М.: Педагогика, 1991. – 290 с.**
39. **Выготский Л.С. Педагогическая психология /Выготский Л.С. под ред. В.В. Давыдова . – М.: Педагогика, 1991. – 480 с.**
40. **Гайбуллаев Н.Р. Развитие математических способностей учащихся. /Н.Р. Гайбуллаев, И.И. Дырченко – Ташкент: «Укитувчи», 1988. – 248с.**
41. **Гайштут О.Г. Алгебра. 7-11 класи: [зб. задач]. /Гайштут О.Г. – К.: КІМО, 2000. – 192 с.**
42. **Гарнец О.Н. Розвиток гнучкості розумових дій у школярів: автореф. дисс. на получение науч. ступени канд. психол. наук: спец. 19.00.07 «Педагогічна психологія» /О.Н. Гарнец – Київ, 1979. – 24 с.**
43. **Гаук М.М. Алгебра та початки аналізу 11 клас: [самостійні та контрольні роботи]. /М. М. Гаук, Л.В. Зубович – Т.: Навчальна книга – Богдан, 1999. – 96 с.**
44. **Гаук М.М. Алгебра та початки аналізу. 10 клас: [самостійні та контрольні роботи]. /М. М. Гаук, Л.В. Зубович – Т.: Навчальна книга – Богдан, 1999.– 80 с.**
45. **Гельфман Э.Г. Психологический аспект исследования задач на уроках математики /Э.Г. Гельфман, Н.А. Холодная //Роль и место задач в формировании системы основных знаний. Сб. науч. работ /Ниис школ МП РСФСР. – М., 1976. – С. 22-34.**
46. **Герд А.Я. Избранные педагогические труды. /Герд А.Я. – М., Изд-во Акад. пед. наук. РСФСР, 1953. – 487с.**
47. **Германович П.Ю. Вопросы и задачи на соображение. Арифметика и алгебра. /Германович П.Ю. – Л.: Учпедгиз, 1956. – 92 с.**
48. **Гингулис Э.Ж. Методика развития математических способностей учащихся 6-8 классов в ходе решения геометрических задач: автореф. дисс. на получение науч. ступени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Теория и методика преподавания» /Э.Ж. Гингулис – М., 1987. – 16 с.**
49. **Гингулис Э.Ж. Развитие математических способностей учащихся /Э.Ж.Гингулис //Математика в школе. 1989. №3. – С. 14-17.**
50. **Гнеденко Б.В. Математика и математическое образование в современном мире. /Гнеденко Б.В. – М.: Просвещение, 1985. – 191 с.**
51. **Гнеденко Б.В. Математика и научное познание. /Гнеденко Б.В. – М.: Знание, 1983. – 64 с.**

52. Гнеденко Б.В. О воспитании учителя математики /Б.В. Гнеденко //Математика в школе. – 1964. – № 6. – С. 8-20.
53. Гнеденко Б.В. О математических способностях и их развитии /Б.В.Гнеденко //Математика в школе. – 1982. – № 1. – С. 31 – 34.
54. Гнеденко Б.В. Формирование мировоззрения учащихся в процессе обучения математике. /Гнеденко Б.В. – М.: Просвещение, 1982. – 145 с.
55. Голубева Э.А. Некоторые направления и перспективы исследования природных основ индивидуальных различий. /Э.А. Голубева //Вопросы психологии. – 1983. – №3. – С. 16-28.
56. Голубева Э.А. Способности и индивидуальность. /Голубева Э.А. – М.: Прометей, 1993. – 306 с.
57. Горбунова Г.А. О решении геометрических задач различными методами. /Г.А. Горбунова //Подготовка студентов désinститутов к внеурочной работе по математике. – Вологда, 1981. – С. 62 – 73.
58. Горельченко З.П. К вопросу о математических способностях учащихся школ: дисс. …канд. пед. наук: 13.00.02 /Горельченко Зинаида Петровна – М., 1968. – 223 с.
59. Горнштейн П.И. Задачи с параметрами. 3-е издание, дополненное и переработанное . /Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. – М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 1998, 336 с.
60. Горяев Ю.А. Развитие творческой деятельности учащихся при обучении математике в средней школе в системе укрупненных дидактических единиц: дисс. ... канд. пед. наук. 13.00.02 /Горяев Юрий Александрович – М., 1997. – 167 с.
61. Готман Э.Г. Задача одна – решения разные. /Э.Г. Готман, З.А. Скопец. – Киев: Рад. шк., 1988. – 175 с.
62. Грабарь М.И. Применение математической статистики в педагогических исследованиях. Непараметрические методы. /М.И. Грабарь, К.А. Краснянская. – М.: Педагогика, 1977. – 136 с.
63. Григорьева Т.П. Основы технологии развивающего обучения математике: Учеб. пособие. /Григорьева Т.П., Иванова Т.А., Кузнецова Л.И., Перевощикова Е.Н. – Н. Новгород: НГПУ, 1997. – 134 с.
64. Грималюк В.П. Математика для вступників до вузів. Арифметика, алгебра, задачі з параметрами початку аналізу: [навч. посібник для вступників до вищ. навч. закладів України]. /ІСДО; Національний технічний ун-т. /Грималюк В.П. – К., 1996. – 340с.
65. Груденов Я.И. Психолого-дидактические основы методики обучения математике. /Груденов Я.И. – М.: Педагогика, 1987. – 159 с.
66. Губа С.Г. Варьирование задач на доказательство как средство активизации математической деятельности учащихся и развития у них интереса к предмету: автореф. дисс. на получение науч. ступени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Теория и методика преподавания» /С.Г. Губа – Ярославль, 1972. – 20 с.
67. Гурова Л.Л. Психологический анализ решения задач. /Гурова Л.Л. – Воронеж, 1976. – 328 с.
68. Гусев В.А. Методические основы дифференцированного обучения математике в средней школе: дис. ... доктора пед. наук: 13.00.02 /Гусев Влерий Александрович – М ., 1990. – 364 с.
69. Давыдов В.В. О понятии развивающего обучения. /В.В.Давыдов //Педагогика. – 1995 . – №1.-С. 29-39.
70. Давыдов В.В. Проблемы развивающего обучения. /Давыдов В.В.– М.: Педагогика, 1986. – 240 с.
71. Далингер В.А. Совершенствование процесса обучения математике на основе целенаправленной реализации внурипредметных связей /Далингер В.А. /ОмИПКРО – Омск. 1993. – 323 с.

72. **Далингер В.А. Организация и содержание поисково-исследовательской деятельности учащихся по математике. [учебное пособие]. /В.А. Далингер, Н.В. Толпекина – Омск: Изд-во ОмГПУ, 2004. – 263 с.**
73. **Державний стандарт базової і повної середньої освіти [О.А. Кривенко (ред.)]. – К. : КНТ, 2004. – 88 с.**
74. **Дорофеев Г.В. О составлении циклов взаимосвязанных задач. /Г.В. Дорофеев //Математика в школе. – 1983. – № 6. – С. 34-35.**
75. **Дружинин В.Н. Психология общих способностей. /Дружинин В.Н. – М.: Лантерна Вита, 1995. – 150 с.**
76. **Дубровина И.В. Анализ компонентов математических способностей в младшем школьном возрасте: автореф. дисс. на получение науч. ступени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Теория и методика преподавания» /И.В. Дубровина– М., 1967. – 19 с.**
77. **Дункер К. Психология продуктивного (творческого) мышления //Психология мышления /Дункер К.; под ред. А.М. Матюшкина. – М.: «Прогресс», 1965. – С. 86-234.**
78. **Дырченко И.И. Развитие математических способностей учащихся на внеклассных занятиях: автореф. дисс. на получение науч. ступени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Теория и методика преподавания» /И.И. Дырченко – М., 1963. – 19 с.**
79. **Евстигнеева И.С. Значение и постановка курса теоретической арифметики в средней школе и педагогических учебных заведениях: автореф. дисс. на получение науч. ступени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Теория и методика преподавания» /И.С . Евстигнеева – М., 1964. – 22 с.**
80. **Евтушевский В.А. Методика арифметики. /Евтушевский В.А. – С. Петербург, 17-е изд . – 1912. – 352 с.**
81. **Егоров Ф.И. Методика арифметики. – /Егоров Ф.И. М., 1917. – 454с.**

82. Епишева О.Б. Методическая система обучения математике на основе формирования приемов учебной деятельности учащихся: Основные технологические процедуры: [кн. для учителя]. /Епишева О.Б. – Тобольск: ТГПИ им. Д.И. Менделеева, 1999. – 175 с.
83. Ермакова Е.С. Развитие гибкости мыслительной деятельности детей дошкольного возраста: автореф. дисс. на получение науч. ступени канд. психол. наук: спец. 19.00 .07 «Педагогическая психология» /Е.С. Ермакова. – М., 1989. – 16 с.
84. Програма GRAN1 для вивчення математики в школі й вузі / уклад.: [М.І Жалдак, Ю.В. Горошко]. – К.: КДПІ, 1992. – 49 с.
85. Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках геометрії: [посібник для вчителів]. /М.І. Жалдак, О. В. Вітюк – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2000. – 167с.
86. Жмулева А.В. Арифметика. Практикум по решению задач. /А.В.Жмулева, Л.Л. Степанова – М.: МГПИ им. В.И.Ленина, 1986. – 128 с.
87. Жумаев Э.Э. Розвиток творчого мислення учнів в процесі рішення геометричних задач: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 «Теорія та методика викладання» /Жумаев Эркин Эргашевич. – К., 1997. – 162 с.
88. Земцова Л.И. Методики оценки эффективности учебно-воспитательного процесса (для учителей-экспериментаторов). Ч. 1. /Л.И. Земцова, Е.Ю. Сушкова – М.: НИИ школ , 1987. – 102 с.
89. Зосимовский А.В. Интересный эксперимент /А.В. Зосимовский //Советская педагогика. – 1965. – № 6. – С. 46 – 56.
90. Ибрагимов Р.В. Воспитание интереса учащихся к математике и развитие их математических способностей /Р.В. Ибрагимов //За прочные и глубокие знания школьников по математике. – Казань: Татарское книжное издательство, 1965. – С. 7-30.
91. Ігнатенко М.Я. Активізація навчально-пізнавальної діяльності учнів старших класів при вивченні математики. /Ігнатенко М.Я. – К. : Тираж, 1997. – с. 299.
92. Ігнатенко М.Я. Ірраціональні алгебраїчні рівнення. Методи розв'язування: [навч.-метод. посібник]. Частина І-ІІ. /Ігнатенко М.Я. – Ялта: РВВ, КДП, 2003 – 82 с.
93. Ігнатенко М.Я. Методологічні та методичні основи активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів старших класів при вивченні математики: дис. ... доктора пед. наук: 13.00.02 /Ігнатенко Микола Якович – К., 1997. – 335 с.
94. Ігнатенко М.Я. Раціональні алгебраїчні рівняння. Навчально-методичний посібник. Частина І-ІІ. /Ігнатенко М.Я. – Ялта: РВВ КДП, 2002. – 72с.
95. Ігнатенко М.Я. Тригонометричні рівняння з параметрами. /М.Я. Ігнатенко //Математика в школі – 2000 – №3, С. 18-21.
96. Игнатенко Н.Я. Аналитическая геометрия и школьный курс геометрии: Учебное пособие для учителей. /Игнатенко Н.Я., Первун О.Е. – Ялта: РИО КГУ, 2007 – 80 с.
97. Інструктивно-методичний лист про вивчення математики у 2003-2004 навчальному році. //Математика в школі. – 2003 – №6, С. 2-7.
98. Калмыкова З.И. Психологические принципы развивающегося обучения. /Калмыкова З.И. – М.: Знание, 1979. – 48с.
99. Калмыкова З.И. Проблема преодоления неуспеваемости глазами психолога. /Калмыкова З.И.– М.: Знание, 1982. – 96 с.
100. Канин Е.О. Заключительный этап решения учебных задач //Преподавание алгебры и геометрии в школе: [пособие для учителей] /Е.О. Канин, Ф.Ф. Нагибин; сост. О.А. Боковнєв. – М.: Просвещение, 1982. – С. 131-138.
101. Капіносов А.М. Алгебра 10 кл: Дидактичні матеріали для різнорівневого навчання. – 2. вид. /Капіносов А.М. – К.: "А.С.К", 1997. – 80 с.
102. Капіносов А.М. Тематичні самостійні та контрольні роботи. Алгебра. 10 клас: [навч.-метод. посіб.]. /Капіносов А.М., Мартинюк С.В., Сень Я.Г. – Т. : Підручники і посібники, 2005. – 112 с.
103. Каплан Б.С. Методы обучения математике: Некоторые вопросы теории и практики /Б.С. Каплан, Н.К. Рузин, А.А. Столяр; под ред. А.А. Столяра. – Мн.: Нар. асвета. 1981.

– 191 с.

104. Карелін Л.З. Задачі на дослідження в шкільному курсі геометрії: дис. ...канд. пед. наук. 13.00.02 «Теория и методика преподавания» /Карелін Леонід Зиновєвич. – Київ, 1968. – 189 с.

105. Карлащук А.Ю. Формування дослідницьких умінь в процесі розв'язування задач з параметрами //Дидактика математики: проблеми і дослідження. – Міжнародний збірник наукових робіт. /А.Ю. Карлащук – Донецьк: ТЕАН, 1999. – Вип.11. – С. 40-43.

106. Карлащук А.Ю. Формування дослідницьких умінь школярів в процесі розв'язання математичних задач з параметрами. автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Теория и методика преподавания»/А.Ю. Карлащук – Київ, 2001. – 28 с.

107. Клейман Я.М. Решение задач различными способами //Математика в школе. /Я.М. Клейман – 1987. – № 6. – С. 23-28.

108. Ковалев А.Г. Психические особенности человека. Т.2. «Способности». /Ковалев А.Г., Мясищев В.Н. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1960. – 304 с.

109. Коваленко В.Г. Алгебра. Експериментальний навчальний посібник для 9 класу шкіл з поглибленим вивченням математики і спеціалізованих шкіл фізико-математичного профілю. /В.Г. Коваленко, В.Я. Кривошеєв, О.В. Старосєльцева – К.: Освіта, 1998.

110. Коварская Е.А. К вопросу о психолого-педагогическом значении разных учебных предметов // Естественный эксперимент и его школьное применение /Е.А. Коварская; под ред. А.Ф. Лазурского. – Петроград, 1918. – С.158-181.

111. Ковтонюк М.М. Алгебра та початки аналізу. 10 клас: [навч. посіб.]. /М.М. Ковтонюк, В. А. Ясінський, Г.М. Ковтонюк– Х. : Видавнича група "Основа", 2005. – 224 с.

112. Кожухов С.К. Составление задач школьниками /С.К. Кожухов //Математика в школе. – 1995. – № 2. – С. 4-6.

113. Колмогоров А.Н. О профессии математика. /Колмогоров А.Н. – 3-е изд. – М.: Изд-во Московского Университета, 1960. – 30 с.

114. Колмогоров А.Н. О профессии математика. /Колмогоров А.Н. – М.: Изд-во МГУ, 1959. – 123с.

115. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике. Ч.1. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. /Колягин Ю.М. – М.: Просвещение, 1977. – 112 с.

116. Колягин Ю.М. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся средней школы: автореф. дисс. на получение науч. степени доктр. пед. наук: спец. 13.00.02. «Теория и методика преподавания» /Ю.М. Колягин – М., 1977.– 55 с.

117. Колягин Ю.М. Опыт применения задач как средства диагностики развития математического мышления учащихся //Изучение возможностей школьников в усвоении математики: Сб. научных трудов. /Ю.М. Колягин, В.С. Копылов, А.С. Шепетов. – М., 1977. – С. 66-75.

118. Колягин Ю.М. Учись решать задачи. /Колягин Ю.М., Оганесян В.А. – М.: Просвещение , 1980. – 96 с.

119. Кон И.С. Психология ранней юности. /Кон И.С. – М.: Просвещение, 1989. – 255 с.

120. Концепція математичної освіти 12-річної школи //"Математика в школі", 2002. – №2(64). – 12-17 с.

121. Кравцова І.А. Дидактичні умови формування у учнів інтересу до учбово-дослідницької роботи: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.01 „Загальна педагогіка та історія педагогіки" /Кравцова Інна Адамівна – К.Р., 1997. – 180 с.

122. Крайчук О.М. Застосування комп'ютерної техніки при вивченні шкільного курсу стереометрії //Особистісне орієнтоване навчання математики: сьогодення і перспективи: Тези доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції (9-10грудня). /О.М.Крайчук, О.В. Крайчук, Н.О. Остапчук. – м. Полтава, 2003. – с 175.

123. Крамор В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс геометрии. /Крамор В.С. – М.: Просвещение, 1992. – 320 с.

124. Крупич В.И. Структура и логика процесса обучения математике в средней школе: [методические разработки по спецкурсу для слушателей ФПК]. /Крупич В.И. – М.:

МГПИ им. В.И. Ленина, 1985. – 117 с.

125. **Крупич В.И. Теоретические основы обучения решению школьных математических задач. /Крупич В.И. – М.: Прометей, 1995. – 210 с.**
126. **Крутецкий В.А. Основы педагогической психологии. /Крутецкий В.А. – М.: Просвещение, 1972. – 255 с.**
127. **Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьников. /Крутецкий В.А. – М.: Просвещение, 1968. – 432 с.**
128. **Крутецкий В.А. Психология. /Крутецкий В.А. – М.: Просвещение, 1980. – 352 с.**
129. **Кудрявцев Т.В. Система проблемного обучения: Проблемное и программированное обучение /Кудрявцев Т.В.; под ред. Т.В. Кудрявцева и А.М. Матюшкина. – М., 1973.**
130. **Куликова О.С. Геометрические задачи на построение как средство развития математических способностей учащихся: дисс. ... канд. пед. наук 13.00.02 «Теория и методика преподавания» /Куликова Ольга Сергеевна – М., 1998. – 215 с.**
131. **Ларькина Е.В. Методика формирования элементов исследовательской деятельности учащихся основной школы на уроках геометрии. автореф. дисс. на получение науч. степени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Теория и методика преподавания» /Е.В. Ларькина – М., 1996. – 17 с.**
132. **Лейтес Н.С. Возрастные и типологические предпосылки развития способностей: автореф. дисс. на получение науч. степени канд. психол. наук: спец. 19.00.07 «Педагогическая психология» /Н.С. Лейтес – М., 1970. – 32 с.**

133. **Лейтес Н.С. Об умственной одаренности. Психологические характеристики некоторых типов школьников. /Лейтес Н.С. – М.: АПН РСФСР, 1960. – 215 с.**

134. **Лейтес Н.С. Умственные способности и возраст. /Лейтес Н.С. – М.: Педагогика, 1971 – 279 с.**

135. **Леонтьев А.Н. О формировании способностей /А.Н. Леонтьев //Вопросы психологии . – 1960. – № 1. – С. 7-17.**

136. **Леонтьев А.Н. Проблемы развития психики. /Леонтьев А.Н. – М.: Мысль, 1970. – 191 с.**

137. **Лернер И.Я. Поисковые задачи в обучении как средство развития творческих способностей – В сб.: Научное творчество /Лернер И.Я.; под ред. Микулинского С.Р ., Ярошевского М.Г. – М.: Педагогика, 1969. – 79 с.**

138. **Лернер И.Я. Дидактические основы методов обучения. /Лернер И.Я. – М.: Педагогика, 1981 – 186 с.**

139. **Малков Н.Е. Подвижность нервных процессов старших школьников и их способности к обучению /Н.Е. Малков //Проблемы способностей. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1962. – С. 79-88.**

140. **Маркушевич А.И. Об очередных задачах преподавания математики в школе /А.И. Маркушевич //Математика в школе. – 1962. – № 2. – С. 3-14.**

141. **Математика. 8-11 класи: Програма для класів з поглибленим вивченням математики . /М. Бурда, М. Жалдак, Т. Колесник, Е. Хмара, М. Ядренко. – К.: Шкільний світ, 2001. – 28 с.**

142. **Математика: програма для загальноосвітніх навчальних закладів а також для профільного навчання, факультативів, спецкурсів, гуртків. – К.: "Навчальна книга", 2003. – 302 с.**

143. **Матюшкин А. И. Проблемные ситуации в мышлении и обучении. /Матюшкин А.И. – М .: Педагогика, 1995. – 208с.**

144. **Махмутов М.И. Проблемное обучение. Основные вопросы теории. /Махмутов М.И. – М.: Педагогика, 1975. – 368с.**

145. **Менчинская Н.А. Интеллектуальная деятельность при решении арифметических задач /Н.А. Менчинская //Известия АПН РСФСР. – М. – Л., 1946. – вып. 3. – С. 99-134.**

146. **Менчинская Н.А. Психология обучения арифметике. /Менчинская Н.А. – М.: Учпедгиз , 1955. – 432 с.**

147. **Метельский Н.В. Психолого-педагогические основы дидактики математики. /Метельский Н.В. – Минск: «Вышэйшая школа», 1977. – 160 с.**

148. **Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика: [учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по спец. «Математика и физика»] /А.Я. Блох, Е.С. Канин, Н.Г. Килина и др.; сост. Р.С. Черкасов, А.А. Столяр. – М.: Просвещение, 1985. – 336 с.**

149. **Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика: [учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов] /Ю.М. Колягин, В.А. Оганесян, В.Я . Саннинский, Г.Л. Луканкин – М.: Просвещение, 1975. – 462 с.**

150. **Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: [учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец.] /А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др.; сост. В.И. Мишин. – М.: Просвещение, 1987. – 416 с.**

151. **Мордкович А.Г. Беседы с учителями математики: Концептуальная методика. Рекомендации, советы, решения. Обучение через задачи. /Мордкович А.Г. – М.: Школа-пресс, 1995. – 272 с.**

152. **Мордкович А.Г. Профессионально-педагогическая направленность специальной подготовки учителя математики в педагогическом институте: дисс. ... доктора пед. наук: 13.00.02 /Мордкович Александр Григорьевич – М., 1986. – 355 с.**

153. **Мордухай-Болтовской Д. Психология математического мышления //Вопросы философии и психологии. /Мордухай-Болтовской Д. – М., 1908, книга IV(94). – С. 491-534.**

154. Морозова Е.А. Международные математические олимпиады. /Морозова Е.А., Петраков И.С. – М: Просвещение, 1967. – 176 с.
155. Муравин Г.К. Исследовательские работы в школьном курсе алгебры /Г.К. Муравин //Математика в школе. – 1990. – №1. – С.43-46.
156. Мясищев В.Н. О связи склонностей и способностей /В.Н. Мясищев //Склонности и способности. – Л.: Изд-во Ленинградского Университета, 1962. – С. 3-14.
157. Наконечный М.Н. Различные способы решения задач способствуют эффективности обучения /М.Н. Наконечный //Математика в школе. – 1980. – № 4. – С . 45-47.
158. Насыбуллина А.К. Методика выявления параметров математических способностей учащихся при обучении математике в неполной средней школе: дисс. ... канд. пед. наук: 13.00.02 /Насыбуллина Анна Константиновна – М., 1993. – 203 с.
159. Оконь В. Основы проблемного обучения. /Оконь В. – М.: Просвещение, 1968. – 208с.
160. Окунев А.А. Спасибо за урок, дети!: О развитии творческих способностей учащихся: [кн. для учителя: из опыта работы]. /Окунев А.А. – М.: Просвещение, 1988 . – 128 с.
161. Орлова Л.Э. Исследование геометрических ситуаций как метод реализации деятельностного подхода в обучении геометрии: автореф. дисс. на получение науч . степени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Теория и методика преподавания» /Л.Э. Орлова – М. – 1993. – 17 с.
162. Осинская В.Н. Формирование умственной культуры учащихся в процессе обучения математике: [кн. для учителя]. /Осинская В.Н. – К.: Рад. шк., 1989. – 192 с.
163. Первун О.Е. Использование свойств функции при решении задач с параметрами // Проблеми сучасної педагогічної освіти. /О.Е. Первун – Ялта. –2005. – Вып. 7. ч. 2. – С . 65-73.
164. Первун О.Е. Поисково-исследовательские задачи как средство развития математических способностей учащихся /О.Е. Первун //Математична освіта в Україні: минуле, сьогодення, майбутнє: Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції.– К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2007. – С. 244-245.
165. Первун О.Е. Решение поисково-исследовательских задач несколькими способами как средство развития гибкости мышления учащихся /О.Е. Первун //Вісник Черкаського університету – 2007. – Вип. 104. – С. 100-105.
166. Первун О.Е. Розв’язання пошуково-дослідницьких задач при колективній формі організації навчання (на прикладі тригонометричних рівнянь) /О.Е. Первун //Математика в школі. – 2007. – № 8 – С. 16-19.
167. Первун О.Е. Роль поисково-исследовательских задач в развитии математических способностей учащихся старшей школы /О.Е. Первун //Проблеми сучасної педагогічної освіти. Ялта. 2006. – Вып. 12. ч. 1. – С. 136-143.
168. Первун О.Е. Структура и содержание исследовательской деятельности школьников в процессе обучения алгебре и геометрии /О.Е. Первун //Проблеми сучасної педагогічної освіти. Ялта. – 2006. – Вып. 11. ч. 2. – С. 252-257.
169. Пиаже Ж. Психология интеллекта /Ж.Пиаже //Избранные психологические труды: пер. с англ, и фр. – М.: Междунар. пед. акад., 1994. – С. 51-235.
170. Платонов К.К. Проблемы способностей. /Платонов К.К. – М.: Наука, 1972. – 312 с.
171. Платонов К.К. Структура и развитие личности. /К.К. Платонов – М.: Наука, 1986. – 255 с.
172. Пойа Д. Как решать задачу /Пойа Д. //Квантор. – 1991. – № 1. – 216 с.
173. Пойа Д. Математическое открытие. /Пойа Д. – М.: Наука, 1970.–452 с.
174. Пособие для учителя. – Львов: журнал "Квантор", 1991. – 91 с.

175. Поспелов Н.Н. Формирование мыслительных операций у старшеклассников. /Н.Н. Поспелов, И.Н. Поспелов – М.: Педагогика, 1989. – 152 с.
176. Пуанкаре А. Математическое творчество /А. Пуанкаре //В кн.: Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики: пер. с франц. – М.: Изд-во «Советское радио», 1970. – С. 135 – 147.
177. Райков Б.Е. Исследовательский метод педагогической работе. /Райков Б.Е., Ульянинский В.Ю., Ягодовский К.П. – Л.: Госиздат, 1924. – 68с.
178. Раков С.А. Формування математичних компетентностей учителя математики на основі дослідницького підходу у навчанні з використанням інформаційних технологій: дисс. ... доктора пед. наук: 13.00.02 /Раков Сергій Анатолійович – Х., 2005 . – 516 с.
179. Рощина Н.Л. Решение задач различными способами – первый шаг к эстетическому восприятию геометрии /Н.Л. Рощина // Математика в школе. – 1996. – №3. – С. 17-19.
180. Рубинштейн С. Л. Проблема способностей и вопросы психологической теории /С.Л. Рубинштейн //Психология индивидуальных различий. Тексты. /Под ред. Ю.Б. Гиппенрейтер, В.Я. Романова. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982. – С. 59-68.
181. Рубинштейн С.Л. О мышлении и путях его исследования. /Рубинштейн С.Л. – М.: Изд -во АН СССР, 1958. – 147 с.
182. Самарин Ю.А. Знания, потребности и умения как динамическая основа умственных способностей /Ю.А. Самарин //Проблемы способностей. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1962. – С. 42-52.
183. Саранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе: [учебное пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов]. /Саранцев Г.И. – М.: Просвещение, 2002. – 224 с.

184. **Саранцев Г.И. Упражнения в обучении математике. /Саранцев Г.И. – М.: Просвещение, 1995. – 239 с.**
185. **Сем'я Ф.Ф. Самостійне складання задач учнями початкових класів як засіб навчання розв'язанню задач і розвитку творчих здібностей: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук: спец. 13.00.02 „Теорія та методика навчання" /Ф.Ф. Сем'я – Київ, 1970. – 24 с.**
186. **Сивашинский И.Х. Задачи по математике для внеклассных занятий (9-10 классы) /Сивашинский И.Х.; под ред. В.Г.Болтянского. – М.: Просвещение, 1968. – 311 с.**
187. **Слєпкань З.І. Методика навчання математики. /Слєпкань З.І. – К.: Зодіак – ЕКО, 2000. – 512 с.**
188. **Слєпкань З.І. Психолого-педагогічні основи навчання математики в школі. /Слєпкань З.І. – К.: Радянська школа, 1983. – 160 с.**
189. **Смирнова И.М. Научно-методические основы преподавания геометрии в условиях профильной дифференциации: дисс. ... доктора пед. наук: 13.00.02 /Смирнова Ирина Михайловна – М., 1994. – 364 с.**
190. **Снигирев В.Т. Методика арифметики. /В.Т. Снигирев, Я.Ф. Чекмарев – 7-е изд. – М., 1948. – 344с.**
191. **Страчевский Э.А. Составление задач по математике как средство активизации мыслительной деятельности учащихся (на материале седьмых – десятых классов): автореф. дисс. на получение науч. степени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Теория и методика преподавания» /Э.А. Страчевский – М., 1973. – 24 с.**
192. **Талызина Н.Ф. Педагогическая психология. /Талызина Н.Ф. – М.: Издат. Центр Академия, 1998. – 288 с.**
193. **Тальянова Е.Н. Составление учащимися арифметических задач как средство повышения эффективности обучения математике в начальных классах: автореф. дисс. на получение науч. степени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Теория и методика преподавания» /Е.Н. Тальянова– М., 1971. – 20 с.**

194. Танеев Х.Ж. Теоретические основы развивающего обучения математике в средней школе: автореф. дисс. на получение науч. степени доктра пед. наук: спец. 13.00.02 «Теория и методика преподавания» /Х.Ж. Танеев. – СПб, – 1997. – 34 с.

195. Теплов Б.М. Способности и одаренность //Психология индивидуальных различий. Избранные труды: в двух томах. Т.1 /Б.М. Теплов– М.: Педагогика, 1985. – С. 15-41.

196. Тадеєв В.О. Поглиблене вивчення математики. 9-11 класи. Випускний екзамен: [навч. посіб.]. – 2. вид., стер. /Тадеєв В.О., Кравчук В.Р., Мартинюк О.М. – Т. : Підручники і посібники, 2007. – 128 с.

197. Торндайк Э.Л. Вопросы преподавания алгебры: пер. с англ. /Торндайк Э.Л. – М.: Учпедгиз, 1934. – 192 с.

198. Труднев В.П. Составление задач как одно из средств развития логического мышления /В.П. Труднев //Начальная школа. – 1969. – № 4. – С. 47-50.

199. Успенский В.В. Школьные исследовательские задачи и их место в учебном процессе: дисс. ... ... канд. пед. наук: 13.00.02 /Успенский Владимир Васильевич – М., 1967. – 186 с.

200. Формирование математического мышления /Под ред. Н.Ф. Талызиной. – М.: «Вентана-Граф», 1995. – 232 с.

201. Фридман Л.М. Логико-психологический анализ школьных учебных задач. /Фридман Л.М. – М.: Педагогика, – 1977. – 208 с.

202. Фридман Л.М. Методика обучения решению математических задач /Л.М. Фридман //Математика в школе. – № 5. – 1991. – С. 59-62.

203. Фридман Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе: Учителю математики о педагогической психологии. /Фридман Л.М. – М.: Просвещение, 1983. – 160 с.

204. Фридман Л.М. Теоретические основы методики обучения математике. /Фридман Л. М. – М., 1998. – 216 с.

205. **Халіков А. Стереометрические задачі на дослідження і методика їх рішення в середній школі: автореф. дисс. на получение науч. степени канд. пед. наук: спец. 13. 00.02 «Теория и методика преподавания» /А. Халіков – Київ, 1983.– 24 с.**

206. **Хамракулов А. Активизация творческой деятельности учащихся в процессе решения геометрических задач в неполной средней школе: дисс. ... канд. пед. наук: 13.00.02 /Хамракулов Амрилло – Душанбе, 1991. – 189 с.**

207. **Хинчин А.Я. О воспитательном эффекте уроков математики //Повышение эффективности обучения математике в школе: [кн. для учителя: из опыта работы] /А.Я. Хинчин; сост. Г.Д.Глейзер. – М.: Просвещение, 1989. – С. 18-37.**

208. **Холодная М.А. Психология интеллекта: парадоксы исследования. /Холодная М.А. – Томск: Изд-во Том. ун-та. Москва: Изд-во Барс, 1997. – 392с.**

209. **Цукарь А.Я. Самостоятельная работа учащихся по решению и составлению задач как средство повышения качества знаний по математике (на материале геометрии): дисс. ... канд. пед. наук: 13.00.02 /Цукарь Анатолий Яковлевич – М., 1984. – 196 с.**

210. **Чашечникова О.С. Розвиток математичних здібностей учнів основної школи: дисс. ... канд. пед. наук: 13.00.02 „Теорія та методика навчання” /Чашечникова Ольга Серафімівна. – К., 1997. – 208 с.**

211. **Чиканцева Н.И. Индивидуальные самостоятельные работы как средство повышения самостоятельности и творческой активности учащихся в обучении: дисс. ... канд. пед. наук: 13.00.02 /Чиканцева Надежда Ивановна – М., 1978. – 185 с.**

212. **Шабунин М.И. Научно-методические основы углубленной математической подготовки учащихся средних школ и студентов ВУЗов: дисс. ... в виде научного доклада доктора пед. наук: 13.00.02 «Теория и методика преподавания» /М.И. Шабунин – М., 1994. – 28 с.**

213. **Шадриков В.Д. Проблемы профессиональных способностей /В.Д. Шадриков //Психологический журнал. – 1982. – Т. 3. – №5. – С. 13-26.**

214. **Шадриков В.Д. Психология деятельности и способности человека: [учеб. пособие]. – 2-е изд. /Шадриков В.Д. – М.: «Логос», 1996. – 320 с.**

215. **Шапиро С.И. Психологический анализ структуры математических способностей в старшем школьном возрасте: автореф. дисс. на получение науч. степени канд. психол. наук: спец. 19.00.07 «Педагогическая психология» /С.И. Шапиро – Курск, 1967. – 21 с.**

216. **Шатилова А.В. Обучение школьников составлению математических задач: [учеб. метод, пособие для студентов физико-математических факультетов педагогических вузов]. /Шатилова А.В. – Балашов: Изд-во БГТТИ, 1999. – 48 с.**

217. **Шварцбурд С.И. О развитии интересов, склонностей и способностей учащихся к математике /С.И. Шварцбурд //Математика в школе. – 1964. – № 6. – С. 32-37.**

218. **Швець В.О. Дидактичні матеріали з математики 10 клас: [посібник для вчителя]. /Швець В.О., Деркач Ф.Г., Комар М. Г. – К.: Освіта, 1997. – 78 с.**