Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

На правах рукопису

ПАНЧЕНКО *Лариса Леонтіївна*

УДК 378.637.016:51

ФОРМУВАННЯ ВМІНЬ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ В ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

13.00.02 — теорія та методика навчання математики

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата
педагогічних наук

Науковий керівник
Слєпкань Зінаїда Іванівна
доктор педагогічних наук, професор

Київ — 2006

ЗМІСТ

Вступ

Актуальність теми. На сучасному етапі наука і техніка розробили технології дуже високого рівня, які вимагають від спеціалістів переважної більшості професій мати високий рівень математичної підготовки, володіти різноманітними математичними методами. Тільки при цій умові спеціалісти зможуть опанувати сучасними технологіями і тим більше розвивати їх далі. Серед математичних методів наукового дослідження найбільшого поширення набув метод математичного моделювання. Він використовується також як метод навчального пізнання у вищій і в загальноосвітній школі.

Фундаторами сучасної методології математичного моделювання були В. М. Глушков, Б. В. Гнеденко, А. М. Колмогоров, О. А. Самарський, А. М. Тихонов та інші. Не дивно, що названі вчені, розробляючи методи математичного моделю вання і їх використання в різних галузях науки і техніки, прийшли в 70-х–80-х роках до думки про необхідність навчання математичного моделювання студентів університетів, учнів загальноосвітньої школи. Розвиток інформаційно-комунікаційних технологій підсилив потребу такого навчання.

Б. В. Гнеденко зазначав, що готувати майбутнього вчителя математики слід так, щоб він міг "бачити, з однієї сторони, основний зміст сучасної математики, з другої сторони, її прикладні можливості, методологічні проблеми і історичний процес її розвитку" [44, с. 40].

А. М. Колмогоров, розглядаючи питання про сучасну математику та навчання її в школі, підкреслював: "Дивлячись в майбутнє, необхідно уже зараз будувати шкільний курс так, щоб учні були підготовлені до сприйняття нових аспектів прикладної математики.... Задача полягає в тому, щоб уже в школі переконливо показати, що "сучасна математика" дозволяє будувати математичні моделі реальних ситуацій і процесів, що вивчаються в застосуваннях, не тільки не гірше, але логічно послідовніше і простіше, ніж традиційна" [91, с. 3].

Видатні вчені до прикладної математики відносили ту частину математики, в якій вивчаються математичні структури, які моделюють ті чи інші реальні явища, тобто прикладна математика є наука, що вивчає реальні явища математичними методами. Прикладна математика складається з математичного моделювання реальних об'єктів і процесів, якісного і кількісного аналізу математичних моделей реальних об'єктів, теорії алгоритмів чисельних розв'язків, що виникають при аналізі математичних за дач, математичного забезпечення, необхідного для здійснення обчислень за відповідними алгоритмами на комп'ютерах та аналізу чисельних розв'язків задач [27,42,70,107–109,172].

Протягом двадцяти наступних років необхідність навчання математичного моделювання була схвалена багатьма вченими-математиками, методистами, викладачами.

Центральні ідеї прикладної математики та основні методичні положення навчання застосуванням математики розкривалися в роботах Г. М. Возняка [34,35], Ю. М. Колягіна [94], В. М. Монахова [122], В. А. Стукалова [223], В. В. Фірсова [240], С. І. Шварцбурда [247].

Інтерес до навчання учнів математичного моделювання почав виявлятися в методичній науці в 70-х роках минулого століття після того, як А. М. Колмогоров в

1971 р. у статті “Современная математика и математика в современной школе” пря мо звернув увагу на необхідність ознайомлення школярів з ідеями математичного моделювання і навчання їх складанню простіших моделей.

У 1978 році Г. М. Морозовим [138] була розроблена і експериментально пе ревірена методика формування в учнів поняття математичної моделі та основних вмінь побудови математичних моделей у процесі навчання математики в середній загальноосвітній школі. Однак це було лише початком дослідження цієї теми. У ди сертації Г. М. Морозова чітко не визначене місце введення основних понять теми і навчання учнів математичного моделювання.

В Україні в 1997 р. була захищена дисертація з методики навчання математики Л. О. Соколенко на тему “Методика реалізації прикладної спрямованості шкільної алгебри і початків аналізу” [218]. У цій роботі у зв’язку з розробкою методичного забезпечення для реалізації прикладної спрямованості навчання математики автор звертає увагу на необхідність вчити учнів математичного моделювання, хоч і не розглядає ґрунтовно спеціальну методику навчання учнів цьому.

На сучасному етапі розвитку шкільної математичної освіти, в умовах особистісно-орієнтованого навчання, рівневої та профільної диференціації, проблема навчання майбутніх учителів математики математичного моделювання, навичкам і вмінням такої роботи з учнями середньої школи набула особливої гостроти.

Комісія Європейського математичного товариства (EMS), яка приділяє серйозну увагу актуальним проблемам математичної освіти молоді, на рівні європейського документу виділила моделювання одним з параметрів, за якими можна було б ви значати внесок математики у розвиток особистості учнів.

Розробником даної схеми виступив Інститут продуктивного навчання Російської академії освіти [21, с. 4].

Табл. 1: Параметри, що визначають внесок математики у розвиток особистості учнів

Загальний рівень	Світ математики	Застосування
Алгоритми Міркування, доведення Мова і символи Візуальне мислення Перенесення на нову ситуацію Інтерес до математики, впевненість у її використанні	Числа Геометричні фігури Перетворення Рівняння Функції і графіки Вимірювання Аналіз даних	Моделювання Дослідження Наближені обчислення Використання обчислювальних пристроїв Контроль і самоконтроль

Констатуючий експеримент, проведений нами, показав, що і в умовах традиційної, і в умовах сучасної системи підготовки вчителя математики, проблемі навчання студентів математичного моделювання при вивченні фундаментальних курсів математики та методики навчання математики не приділяється належна увага . На належному рівні у майбутніх учителів математики формуються вміння мате матичного моделювання, пов’язані з дослідженням математичних моделей засобами інформаційно-комунікаційних технологій, завдяки ефективному методичному за безпеченню та методиці навчання, що розроблені академіком М. І. Жалдаком [57, 59–64], професорами Г. О. Михаліним [63,130,131], Н. В. Морзе [137], Ю. С. Рамським [64,193,194].

Щодо шкільного курсу, то зараз про необхідність систематичного навчання учнів простішим вмінням математичного моделювання лише висловлюється побажання математиків, методистів і авторів шкільних програм, зокрема і програми 12-річної школи. Методичне забезпечення формування таких вмінь у школярів фактично відсутнє. Це значною мірою пояснюється і тим, що вчителі під час навчання у ви щих педагогічних закладах не навчалися систематично математичного моделювання і в тому числі розв'язанню прикладних задач, не вміють математизувати ситуації, не дістають необхідної підготовки для навчання цьому учнів.

Названі причини зумовлюють необхідність вирішення проблеми створення науково обґрунтованої методичної системи формування знань та вмінь математичного моделювання у майбутніх учителів математики в процесі вивчення фундаментальних математичних дисциплін, елементарної математики та методики навчання математики. Саме цей факт спонукав нас до вибору теми дисертаційного дослідження: "Формування вмінь математичного моделювання в процесі навчання майбутніх учителів математики".

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційне дослідження виконано відповідно до тематичного плану науково- дослідної роботи кафедри вищої математики та кафедри математики і методики викладання математики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Тему дисертації затверджено на засіданні Вченої ради Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова (протокол № 11 від 29 квітня 2004 р.) і узгоджено Радою з координації наукових досліджень в галузі педагогіки і психології в Україні (протокол № 6 від 15.06.2004 р.).

Об'єкт дослідження. Процес навчання математичних дисциплін та методики навчання математики майбутніх учителів математики.

Предмет дослідження. Методична система формування знань та вмінь математичного моделювання у студентів фізико-математичних факультетів під час вивчення математичних дисциплін та методики навчання математики.

Мета дослідження. Сформулювати цілі і завдання, визначити зміст і структуру, розробити науково обґрунтовану і експериментально перевірену методичну систему навчання математичного моделювання майбутніх учителів математики під час ви вчення ними математичних і методичних дисциплін в умовах особистісно-орієнтованого навчання.

Гіпотеза дослідження. Створення і впровадження в навчальний процес науково обґрунтованої методичної системи формування вмінь математичного моделювання у майбутніх учителів математики в процесі вивчення ними математичних та методичних дисциплін в умовах особистісно-орієнтованого навчання забезпечить:

- свідоме оволодіння студентами методом математичного моделювання як методом наукового дослідження та навчального пізнання навколишнього світу ;
- диференційоване навчання у формуванні в них вмінь будувати різного рівня складності математичні моделі явищ та процесів з різноманітних галузей сучасної науки та практики;
- сформованість у студентів професійних вмінь навчати учнів загальноосвітньої школи будувати простіші математичні моделі;
- підвищить рівень загального і математичного розвитку студентів, їхню творчу активність і пізнавальну самостійність.

Відповідно до мети і сформульованої гіпотези дослідження розв’язувалися такі **завдання:**

1. Вивчити стан проблеми в математичній, психолого- педагогічній, навчально-методичній літературі для студентів і учнів загальноосвітніх шкіл, в системі підготовки вчителя математики та в шкільній практиці.
2. Виділити психолого-педагогічні передумови та сформулювати методичні вимоги до навчання студентів математичного моделювання.
3. Розробити і науково обґрунтувати компоненти методичної системи формування знань і вмінь математичного моделювання в процесі математичної та методичної підготовки майбутніх учителів математики в умовах особистісно-орієнтованого навчання.
4. Експериментально перевірити ефективність розробленої методичної системи та внести корекції в розроблені в дисертації методичні рекомендації.

Методологічною основою дослідження є теорія пізнання: системний, комплексний , діяльнісний та особистісно-орієнтований підходи формування особистості вчителя (Г. О. Атанов, П. Я. Гальперін, В. В. Давидов, О. Н. Леонтьев, С. І. Подмазін, В. В. Сєріков, З. І. Слєпкань, С. Д. Смирнов), теорія математичного моделювання (В. М. Глушков, Б. В. Гнеденко, А. М. Колмогоров, Л. Д. Кудрявцев, О. А. Самарський, А. М. Тихонов), роботи з методики навчання математики (Г. П. Бевз, М. І. Бурда, З. І. Слєпкань, М. І. Шкіль), роботи про застосування інформаційно-комунікаційних технологій у навчальному процесі педагогічного університету (М. І. Жалдак, А. П. Єршов, Н. В. Морзе, Ю. С. Рамський, О. В. Співаковський), Закон України “Про освіту”, Закон України “Про вищу освіту”, галузеві стандарти вищої освіти зі спеціальності “Педагогіка і методика середньої освіти. Математика”, Державна національна програма “Освіта” (“Україна XXI століття”), Національна Доктрина розвитку освіти України у XXI столітті.

Для реалізації поставлених завдань були застосовані такі **методи науково-педагогічного дослідження:**

- теоретичні: аналіз літератури з проблеми дослідження (математичне моделювання, психологія, педагогіка, теорія і методика навчання математики, використання інформаційно-комунікаційних технологій);
- організаційні: аналіз освітніх стандартів, навчальних планів і програм педагогічних університетів, підручників та посібників з математичних дисциплін, з методики навчання математики;
- емпіричні: цілеспрямоване спостереження навчального процесу, анкетування студентів і викладачів, випускників шкіл, аналіз усних відповідей і письмових робіт студентів;
- педагогічний експеримент: констатуючий, пошуковий, формуючий;
- математико-статистичні дослідження: обробка експериментальних даних;
- аналіз, систематизація і узагальнення педагогічного досвіду та власної педагогічної діяльності у педагогічному університеті.

Наукова новизна дослідження полягає в обґрунтуванні необхідності та можливості формування у майбутніх учителів математики знань і вмінь, широкого погляду на математичне моделювання як метод наукового дослідження та навчального пізнання і розробці науково обґрунтованої методичної системи навчання математичного моделювання майбутніх учителів математики.

Теоретичне значення результатів дослідження полягає у:

1. визначенні місця і структури змісту навчання студентів математичного моделювання в процесі математичної, методичної підготовки;
2. розробці операційного складу компонентів методичної системи формування вмінь математичного моделювання з врахуванням вимог особистісно-орієнтованого навчання;
3. встановленні психолого-педагогічних передумов та методичних вимог, що сприяють формуванню вмінь математичного моделювання у студентів різних курсів;
4. розробці критеріїв та методики визначення рівнів сформованості вмінь математичного моделювання.

Практичне значення результатів дослідження полягає в тому, що розроблена та експериментально перевірена методична система формування знань і вмінь математичного моделювання в процесі підготовки вчителя математики може бути використана викладачами вищої школи, методистами інститутів післядипломної освіти, авторами посібників для студентів та методичних посібників для вчителів.

Особистий внесок здобувача полягає в обґрунтуванні необхідності та можливості систематичного навчання студентів педагогічних університетів математичного моделювання, у розробці й апробації науково обґрунтованої методичної системи формування знань і вмінь математичного моделювання у майбутніх учителів математики, у констатації висновку про те, що впровадження науково обґрунтованої методичної системи формування знань і вмінь математичного моделювання у майбутніх учителів математики у навчальний процес педагогічних університетів можливе, ефективне і забезпечує відповідний рівень фахової підготовки бакалаврів, спеціалістів, магістрів.

Обґрунтованість і вірогідність отриманих результатів, висновків і методичних рекомендацій забезпечені науковим аналізом стану теоретичної і практичної розробки проблеми, методологічними основами дослідження, відповідністю методів дослідження його меті та завданням, кількісним і якісним аналізом обсягу теоретичн ого та емпіричного матеріалу, результатами педагогічного експерименту.

Апробація і впровадження результатів дослідження здійснювалися в Інституті фізико-математичної та інформатичної освіти і науки Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова (довідка № 04-10/1143 від 08.06.2006 р.), Кримському гуманітарному університеті, м. Ялта (довідка № 3 від 28.04.2006 р.), Херсонському державному університеті (довідка № 01-12/878 від 29.06.2006 р.), Слов’янському державному педагогічному університеті (довідка № 66-01-484 від 27. 04.2006 р.). Основні положення і результати дослідження були висвітлені і знайшли схвалення в повідомленнях на Міжнародній науково-теоретичній конференції “Психолого-педагогічні проблеми підготовки вчительських кадрів в умовах транс формації суспільства” (м. Київ, 2000 р.), Міжнародній конференції, присвяченій 200-річчю з дня народження М. В. Остроградського, (м. Полтава, 2001 р.), VII Всеукраїнській науковій конференції “Фундаментальна та професійна підготовка фахівців з фізики”, (м. Київ, 2002 р.), Всеукраїнській науково-практичній конференції “Формування духовної культури особистості в процесі навчання математики в школі та вищому навчальному закладі” (м. Луцьк, 2003 р.), 4-ій Міжнародній міждисциплінарній науково-практичній конференції “Сучасні пробле ми гуманізації та гармонізації управління” (м. Харків, 2003 р.), 5-ій міжнародній міждисциплінарній науково-практичній конференції “Сучасні проблеми науки та освіти” (м. Алушта, 2004 р.), Десятій міжнародній конференції імені академіка М. Кравчука (м. Київ, 2004 р.), Міжнародній науково-практичній конференції “Ак туальні проблеми теорії і методики навчання математики” (м. Київ, 2004 р.), Міжнародній науково-методичній конференції “Евристичне навчання математики” (Донецьк, 2005 р.), на звітних наукових конференціях викладачів НПУ імені М. П. Драгоманова (м. Київ, лютий 2004 р., лютий 2005 р.), шляхом публікації результатів дослідження (5 статей у фахових виданнях і 1 посібник у співавторстві).

Публікації. Результати дисертаційного дослідження опубліковано в 16 роботах. Серед них 4 — у збірниках наукових праць, 10 — у тезах та матеріалах конференцій, 1 — у науково-методичному журналі “Математика в школі”, 1 — у методичному посібнику.

Структура дисертації. Дисертація складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел з 262 найменувань та 15 додатків. Основний зміст ди сертації викладено на 180 сторінках машинописного тексту, робота містить 24 таблиці, 3 схеми і 16 рисунків. Повний обсяг дисертації становить 260 сторінок.

Розділ 1
Теоретичні основи проблеми дослідження

1.1 Математичне моделювання як метод наукового дослідження і навчального пізнання

Формування наукового світогляду студентів неможливе без знання історії науки та розуміння основних етапів її розвитку [48,49,67,68]. Методологія науки з її загаль ними філософськими питаннями допоможе їм поглянути на предмет математики з більш широких позицій, визначити його місце у системі знань, побачити науку у розвитку, русі, замислитися про рушійні сили її прогресу і, зокрема, зрозуміти нео бхідність все більшої абстракції математики, що допомагає пізнанню явищ природи і процесів суспільства. Це наблизить до глибокого розуміння того, що одні й ті ж самі математичні поняття, твердження і методи можуть бути застосовані до до слідження найрізноманітніших за своїм конкретним змістом явищ.

Математика як наука в ході свого історичного розвитку накопичила багато фактів , які свідчать про те, що математичні поняття, операції, способи логічних міркувань зазнають суттєвого впливу практики і мають цілком певне практичне походження. Багато розділів сучасної математики формувалися під безпосереднім впливом потреб техніки, економіки, військової справи, управління тощо.

Специфічність відображення математикою дійсності визначає основні напрями формування правильного наукового світогляду у процесі її навчання. На відміну від природничих наук (фізика, хімія, біологія) математика не пов'язана з дійсністю без посередньо. Законам матеріального світу у математиці відповідають зв'язки абстра ктно-логічного характеру між математичними поняттями, а системність світу відображається у такому понятті сучасної математики як математична структура. Розкриття матеріального походження математичних понять разом з тим повинно враховувати той факт, що абстрактне мислення є для математики таким же невід'ємним, як і зв'язок з дійсністю. Саме високий ступінь абстрактності математичних понять, логічна розробленість математичних теорій і складає силу математики, робить її могутнім знаряддям пізнання світу і забезпечує широку застосовність. Тому роботу з виявлення зв'язків математики з дійсністю необхідно поєднувати з роз'ясненням ролі абстракції і логіки в усякій науці і в математиці, зокрема. Тоді ступінь абстрактного мислення, тобто формалізація логічного дослідження, розумітиметься як необхідна ланка у науковому пізнанні реальної дійсності.

Не менш важливим у вихованні світогляду молоді є розкриття ролі практики у розвитку математики і показ її практичного, прикладного значення. Вчитель і ви кладач педагогічного університету повинен мати значний набір прикладів, які він зможе розказати учням і студентам. Здійснювати це можна ефективно шляхом складання математичних моделей.

Фахова освіта вчителя математики передбачає вивчення цілого ряду математичних дисциплін таких, як: алгебра і теорія чисел, аналітична геометрія, диференціальна геометрія, проективна геометрія та методи зображень, математичний аналіз, комплексний аналіз, диференціальні рівняння, теорія ймовірностей і математична статистика, дискретна математика, елементарна математика; та педагогічних дисциплін: педагогіка, психологія, методика навчання математики.

Як показує досвід, особливо значний вплив на формування наукового світогляду майбутніх учителів математики має систематичне ознайомлення студентів при вивченні всіх математичних дисциплін з ідеями і методом математичного моделювання і впровадження на старших курсах спецкурсів з математичного моделювання.

Спецкурси систематизують, поглиблюють та узагальнюють знання студентів про предмет і методи кожної з названих математичних дисциплін, тобто відбувається інтегрування математичних знань, які формуються у свідомості майбутнього педа гога як результат природного прогресу людських знань, пов’язаних з розвитком фізики, астрономії, економіки, біології тощо. Учитель повинен чітко уявляти, як у математиці виникли нові напрями досліджень, формувалися основні математичні поняття, як і чому абстрактна наука знаходила і знаходить різностороннє застосування в природознавстві, інженерній та агрономічній справах, соціальних дисциплінах.

Більшість математичних наук виникли в процесі розв’язування проблем практики і розвивалися у тісній єдності одна з одною, у взаємних впливах та в процесі розв’язання внутрішніх протиріч, притаманних будь-якому процесу розвитку. Наве демо деякі приклади. Так, аналітична геометрія, користуючись алгебраїчним методом, досліджує геометричні образи лише першого і другого порядку. Збагачення методів дослідження аналітичної геометрії більш сильними методами математичного аналізу привело до якісного і кількісного розширення геометричних об’єктів об’єктами вищих степенів та вивчення їх локальної структури (диференціальна геометрія). Разом з тим методи диференціальної геометрії дозволяють поглянути та зрозуміти з нової точки зору геометричні об’єкти, які вивчалися в аналітичній геометрії. Методи аналітичної геометрії знайшли свій подальший розвиток у синтетичному методі проективної геометрії.

Одним з напрямів формування світогляду під час вивчення математики є ово лодіння студентами методологією математичного моделювання. Для практичного оволодіння методологією математичного моделювання як невід’ємною складовою математичної освіти майбутніх учителів математики, необхідні такі умови: початко ва математична підготовка студентів, інтерес до майбутньої професії, певний рівень володіння ЕОМ, наукове обґрунтування місця математичного моделювання у структурі математичних дисциплін та його методичне забезпечення тощо. Оволодіння методологією математичного моделювання майбутніми вчителями математики забезпечується реалізацією галузевих стандартів [37] з розділу “Математика”, де формуванню вмінь математичного моделювання приділяється належна увага. Детальніше з цим знайомить таблиця у додатку А.

Формування вмінь математичного моделювання, перерахованих у додатку А, — спільна задача всіх математичних курсів, яка в рамках кожної математичної дисципліни може мати свої ефективні та специфічні шляхи реалізації. Ці шляхи відповідно до концепції базової математичної освіти в Україні [95], Державних ста ндартів освіти [50] також знайшли своє відображення у нових програмах математичних курсів [230,232–234] та побудованих на їх основі робочих програмах викладачів. На жаль, в нині діючих програмах [141,190,191] та робочих програмах викладачів математичному моделюванню належна увага не приділяється у відповідності з вимогами галузевих стандартів [37].

Зупинимося докладніше на поняттях “математична модель” та “математичне мо делювання”. У науковій літературі поняття “модель” трактується досить широко. Цим терміном називають такі поняття, як математичний опис процесу або об’єкта, алгоритмічний опис об’єкта; формулу, що визначає закон функціонування; графічне подання об’єкта (процесу) у вигляді графіка, блок-схеми або кривої, що характеризує динаміку досліджуваного процесу та ряд інших форм і понять [144,164 ,209,226]. Наприклад, можна дати наступне означення моделі в математичних термінах [9, с. 363]: “Модель є ізоморфізм A в Ψ, де A — множина фіксованих елементів предметної області з досліджуваними зв’язками, відношеннями між цими елементами, Ψ — абстрактна множина, що задається кортежем

$$\Psi = \langle \{M\}, P_1, P_2, \ldots, P_n \rangle,$$

де $\{M\}$ — множина елементів моделі, що відповідає елементам предметної області, що називається “носієм моделі”, $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — предикати, що відображають наявність того чи іншого відношення між елементами предметної області. *Предикат* — це логічна n-на пропозиціональна функція, визначена для предметної області і така, що приймає або істинне, або хибне значення. Носій моделі є змістовною областю предикатів $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Предикати називаються *сигнатурою* моделі Ψ. Вибір носія і сигнатури при побудові моделі визначається предметом дослідження.”

У навчальному процесі під час вивчення математичних дисциплін та методики навчання математики студентам пропонується два види математичних моделей, які розрізняють за їх призначенням: математичні моделі прикладних задач; математичні моделі абстрактних теорій та об’єктів.

Першому виду моделей відповідає означення, сформульоване А. М. Тихоновим: “Математична модель — це наближений опис будь-якого класу явищ навколишнього світу за допомогою математичної символіки” [235, с. 574]. Для другого виду математичних моделей найбільше підходить означення Л. Д. Кудрявцева: “Математична модель — це логічна структура, у якої описано ряд відношень між її елементами” [107, с. 45]. Саме на основі цих означень ми будемо формувати у студентів поняття математичної моделі [159]. Як зазначається у роботі І. І. Блехмана та ін., математична модель у найпростіших випадках “...може бути відрізком, функцією, вектором, матрицею, скалярною величиною або навіть конкретним числом” [27, с. 130]. У складніших випадках вона дозволяє звести дослідження нематематичного об’єкта до розв’язання математичної задачі, користуючись універсальним математичним апаратом і як наслідок одержати не тільки кількісну, а й якісну інформацію про досліджуваний об’єкт.

Математичне моделювання — це процес встановлення відповідності даному реальному об’єкту деякого математичного об’єкта, що називається математичною моделлю [9,195].

Табл. 1.1 показує класифікацію видів математичного моделювання в моделюванні як науковому методі дослідження систем, явищ, процесів.

Моделювання як спосіб організації навчально-пізнавальної діяльності широко використовується в педагогіці, хоч воно й не відноситься до математичного моделювання [22,129,212].

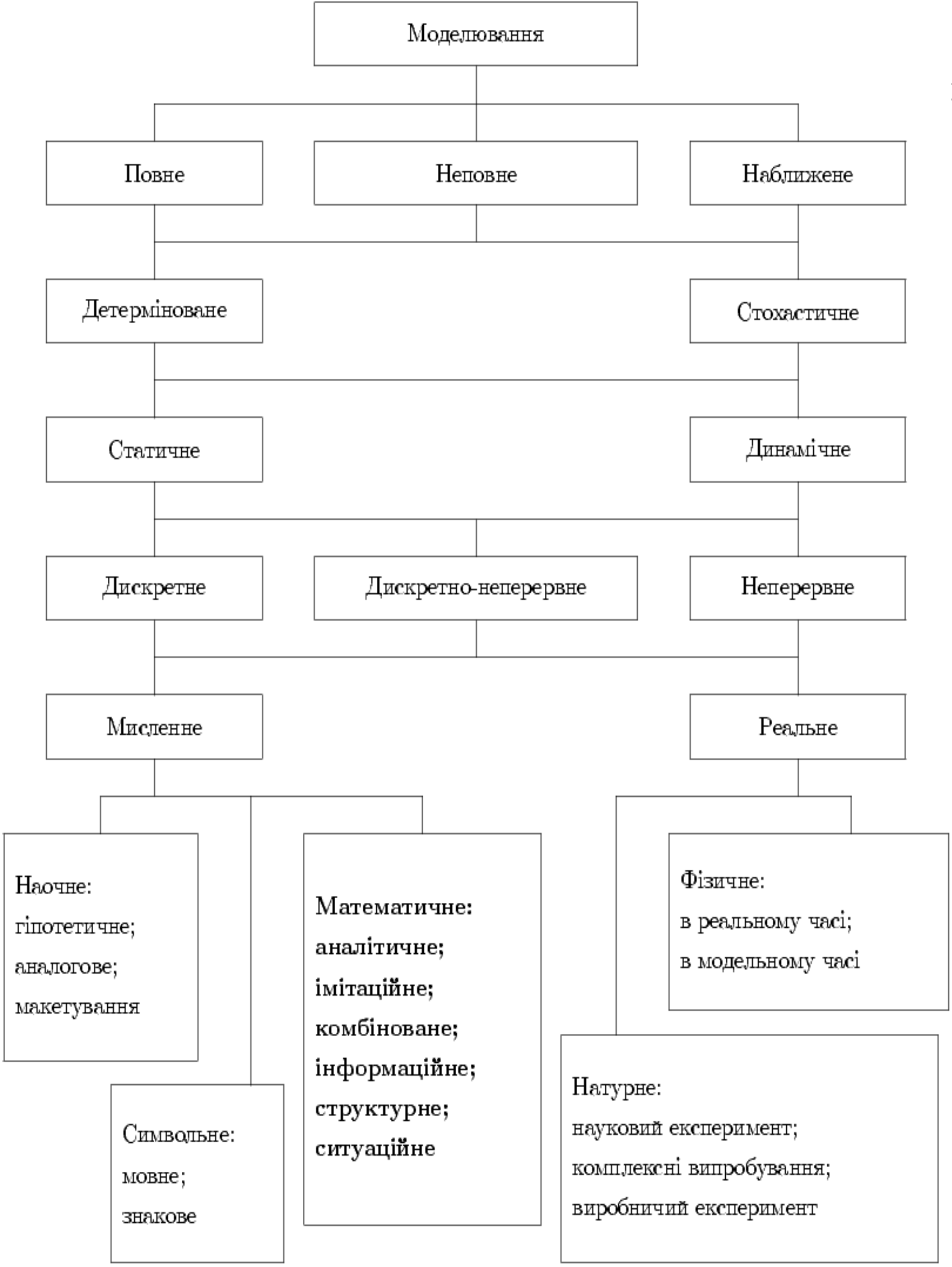
Взагалі, можна виділити такі основні сфери застосування математичних моделей: наукові дослідження, навчання, управління, практична діяльність. У наукових до слідженнях моделі є засобом одержання, фіксування і упорядкування нової інформації, що забезпечують розвиток теорії та практики. При навчанні з допомогою моделей досягається висока наочність відображення різних об'єктів і полегшується передача знань про них. Це моделі, які дозволяють описати і пояснити систему. В управлінні моделі використовуються для обґрунтування рішень. Такі моделі повинні забезпечити як опис, так і пояснення і передбачення поведінки систем.

Охарактеризуємо коротко кожний з тих видів математичного моделювання, які найбільше застосовуються в педагогічному університеті під час вивчення математичних дисциплін [9,143,209].

Для *аналітичного* моделювання характерним є те, що основні закони функціонування записуються у вигляді деяких аналітичних співвідношень (алгебраїчних, інтегродиференціальних, скінченнорізницевих і т. д.) чи логічних умов. Аналітична модель досліджується різними методами:

- *аналітичним*, коли прагнуть одержати в загальному вигляді явні залежності, що пов'язують шукані характеристики з початковими умовами, параметрами;

Табл. 1.1:



Класифікація видів моделювання

- *чисельним*, коли, не вміючи розв’язувати рівняння в загальному вигляді, прагнуть одержати числові результати при конкретних початкових даних (такі моделі називаються цифровими);

- *якісним*, коли, не маючи розв’язку в явному вигляді, можна знайти деякі властивості розв’язку (наприклад, оцінити стійкість розв’язку).

Аналітичне математичне моделювання застосовується для розв’язування прикла дних задач та розвитку математичної теорії в класичних математичних курсах, що вивчаються в педагогічному університеті: математичному аналізі, диференціальних рівняннях, геометрії, алгебрі. Тому саме ці курси мають найбільші дидактичні мож ливості для формування у студентів вмінь аналітичного математичного моделювання. Зокрема:

- вміти виявити множину елементів системи і визначити їх властивості;
- вміти визначити зовнішні умови, в яких знаходиться об’єкт моделювання і охарактеризувати їх певними величинами;
- вміти знайти зв’язки і відношення між елементами системи і записати їх у математичній формі;
- вміти виділити системоутворюючі зв’язки, запис яких у математичній формі є шуканою математичною моделлю;
- вміти обрати критерії оцінювання математичної моделі на предмет досконалості;
- вміти реалізовувати для створення математичних моделей ієрархічний метод;
- вміти наводити приклади конкретних математичних моделей фізичних, біологічних, економічних, інформаційних процесів;
- вміти інтерпретувати математичні залежності в термінах конкретних математичних теорій.

До вмінь аналітичного математичного моделювання також слід віднести всі вміння, спрямовані на створення аксіоматичної теорії та її аналіз. Найбільш вдало такі вміння можна сформувати в процесі вивчення курсів “Основи геометрії” та “Числові системи”.

При *імітаційному* моделюванні відтворюється алгоритм функціонування системи (протікання процесу, зміни стану явища) в часі — поведінка системи, причому імітуються елементарні явища, що складають процес, зі збереженням їх логічної структури і послідовності протікання. Це дозволяє за вихідними даними одержати відомості про стан процесу в певні моменти часу, що дають можливість оцінити характеристики системи. Основною перевагою імітаційного моделювання порівняно з аналітичним є можливість розв’язання складніших задач. Імітаційні моделі дозво ляють досить просто враховувати такі фактори, як наявність дискретних і непере рвних елементів, нелінійні характеристики елементів системи, численні випадкові впливи та інші, які часто створюють труднощі при аналітичних дослідженнях. У наш час імітаційне моделювання — найбільш ефективний метод дослідження сис тем, а часто і єдиний практично доступний метод одержання інформації про поведінку системи, особливо на етапі її проектування.

В імітаційному моделюванні розрізняють метод статистичних випробувань (метод Монте–Карло) і метод статистичного моделювання. *Метод Монте–Карло* — чисельний метод, який застосовується для моделювання випадкових величин і функцій, ймовірнісні характеристики яких співпадають з розв’язками аналітичних задач. Полягає в багаторазовому відтворенні процесів, що є реалізаціями випадко вих величин і функцій, з подальшою розробкою інформації методами математичної статистики. Якщо цей прийом застосовується для машинної імітації з метою досліджень характеристик процесів функціонування систем, що підлягають випадковим впливам, то такий метод називається *методом статистичного моделювання*.

Метод імітаційного моделювання застосовується для оцінки варіантів структури системи, ефективності різних алгоритмів управління системою, впливу зміни різних параметрів системи.

Навчати студентів імітаційного математичного моделювання особливо вдало можна при вивченні теорії ймовірностей та математичної статистики, чисельних ме тодів, інформатики. У процесі навчання імітаційного математичного моделювання при вивченні вище зазначених дисциплін формуються, насамперед, такі вміння математичного моделювання:

- вміти обрати критерії оцінювання математичної моделі на предмет досконалості (у відповідності до цілей навчання);
- вміти здійснити експериментальну перевірку математичної моделі об’єкта на предмет узгодженості моделі з реальним об’єктом;
- вміти забезпечити узгодженість (в рамках допустимих похибок) математичної моделі з реальним об’єктом, відносну простоту моделі і доступність її для дослідження;
- вміти окреслити межі застосовності математичної моделі;
- вміти наводити приклади реалій, моделями яких є математичні об’єкти, наводити приклади задач з реальним змістом, що приводять до математичних понять (похідної, інтегралів, ймовірностей) тощо, а також при цьому формуються всі вміння, пов’язані з дослідженням математичної моделі з використанням комп’ютерної техніки.

Створення математичної моделі реального процесу, явища, об’єкта шляхом аналітичного чи імітаційного моделювання передбачає формування всіх вмінь, зазначених у галузевих стандартах [37] (додаток А). Але найкраще ці вміння формуються при комбінованому (аналітично-імітаційному) моделюванні, яке дозволяє об’єднати переваги аналітичного та імітаційного моделювання. Ця умова забезпечується при вивченні спецкурсів з математичного моделювання, обов’язкових для всіх студентів.

В залежності від конкретної ситуації можливі такі підходи до побудови математичних моделей:

- безпосередній аналіз образу, що моделюється;
- проведення обмеженого експерименту з образом моделювання;
- використання аналога;
- аналіз вихідних даних. [209]

(Під образом моделювання слід розуміти систему, явище, процес, об’єкт і т. д.)

Методологічні підходи до побудови математичних моделей на сьогоднішній день різноманітні [121,133,135,171,195]. Це різноманіття може свідчити про неможливість однозначного визначення найбільш перспективних і ефективних шляхів органічного поєднання математики з іншими сферами знань, а також акцентувати увагу на необхідність вдосконалення фундаментальної підготовки спеціалістів з математичних дисциплін.

Л. І. Нічуговська в монографії [143, с. 35], провівши аналіз, виявляє три найпоширеніші напрями побудови математичних моделей.

Перший напрям, найбільш абстрактний, у якому реалізується побудова загальних моделей та підходів загально-методологічного характеру, що носять яскраво вира жений формальний характер, тобто вони описують формальні побудови причинного характеру (моделі фізичних, хімічних, біологічних процесів тощо). Незважаючи на абстрактну суть таких моделей, їх рейтинг у дослідників з різноманітних проблем досить високий, тому що вони вказують на деякі особливості модельних конструкцій, які дозволяють від вербального опису перейти до математичної постановки даної проблеми, тобто формують, в залежності від мети дослідження, певний спектр математичних підходів, у межах яких можуть бути реалізовані конкретні змістовні пропозиції.

Другий напрям — це математичні моделі прикладного характеру, що пов’язані з плануванням наукових досліджень, аналізом вихідних даних та вимірюванням і ос новою яких є сучасна статистика, планування експерименту, вибірковий метод та конструювання панельних обстежень, багатовимірний статистичний аналіз, економетрика та ін.

Особливістю вище вказаних підходів до моделювання є намагання будувати теоретичну базу математичних моделей на індуктивній основі, тобто визначенням факторів, що характеризують динаміку досліджуваного об’єкта згідно емпіричних даних і гіпотези дослідження та їх структурування у вигляді конкретної моделі. Слід відзначити, що моделі другого напряму також носять абстрактний характер, але ре зультати подібних модельних досліджень знаходять широке застосування в різноманітних прикладних задачах за рахунок визначення мінімального і в той же час достатнього обсягу емпіричної інформації, при якому побудована математична модель була б адекватна реальному процесу з певними, наперед фіксованими обмеженнями.

Третій напрям — це математичні моделі окремих процесів та наукових теорій, які повністю або частково описують побудову математичними засобами дедуктив них систем на базі розробки змістовних постулатів, визначень та нових теорем, які можуть бути перевірені як безпосередньо в теорії, так і за її межами на основі їх здатності пояснювати факти реального світу.

Ці моделі можна розглядати як конкретні, тому що їх результати доцільно використовувати лише у тих наукових галузях, в яких і для яких вони були створені. Крім того, їх можна інтерпретувати як нові досягнення конструктивістської матема тики, що контурно визначають перспективні шляхи розвитку нових галузей знань.

Методи математичного моделювання як розробки моделей по суті подібні і до сить широко висвітлені в науковій та навчальній літературі, зокрема в роботах І. І. Блехмана, А. Д. Мишкіса, Я. Г. Пановко [27], В. С. Анфілатова, А. А. Ємельянова, А. А. Кукушкіна [9], А. М. Тихонова [235], О. А. Самарського, А. П. Михайлова [195]. Найбільш вдалим підходом до процесу математичного моделювання є послідовність етапів, розкритих у праці О. А. Самарського, А. П. Михайлова [195, с. 7–8] та дещо вдосконалених автором даного дослідження для зручності формування вмінь математичного моделювання у майбутніх учителів математики. Це такі етапи:

1. *Попередній аналіз об'єкта дослідження*. Всебічно і детально вивчається процес, що розглядається в задачі, визначаються головні параметри, суттєві і несуттєві зв'язки і залежності між головними характеристиками процесу, закони, яким він підлягає.

2. *Побудова математичної моделі*. Вибір (побудова) "еквівалента" об'єкта (явища, системи), що відображає в математичній формі найважливіші його властивості — закони, яким він підлягає, зв'язки, притаманні його складовим частинам тощо, і є математичною моделлю.

3. *Реалізація математичної моделі математичними методами*. Математична модель (чи її фрагменти) досліджуються теоретичними методами, що дозволяє отримати важливі попередні знання про об'єкт. Далі відбуваються уточнення, до опрацювання моделі, встановлюються межі її використання, суто математичними прийомами виявляються загальні властивості моделі та її розв'язків.

4. *Вибір* (*чи розробка*) *алгоритму для реалізації моделі на комп'ютері*. Модель представляється у формі, зручній для застосування чисельних методів, визначається послідовність обчислювальних та логічних операцій, які слід провести, щоб знайти шукані величини із заданою точністю.

5. *Створення чи вибір програм, що "перекладають" модель та алгоритм на доступну комп'ютерну мову*.

6. *Проведення обчислювального експерименту*. Суть обчислювального експерименту полягає в тому, що на основі математичної моделі шляхом безпосереднього чисельного розв'язування, наприклад, рівнянь, *кількісно* визначається поведінка досліджуваного об'єкта в тих чи інших умовах. Співставлення результатів розрахунків з наявними даними спостережень, натурних експериментів дозволяє оцінити ефективність вихідної математичної моделі і у випадку необхідності модифікувати її з тим, щоб домогтися більшої її адекватності розглядуваному образу. На основі розгляду моделі з'являється можливість прогнозувати поведінку досліджуваного образу в умовах, поки що недосяжних в натурному експерименті, виявити оптимальні параметри і режими роботи діючих або проектованих конструкцій. У цьому розумінні створення чисельних методів і програмних комплексів для реалізації їх на обчислювальних машинах в певному розумінні рівносильне створенню складних експериментальних установок, а діяльність по проведенню розрахунків, обробці та інтерпретації їх результатів можна розглядати як аналог реального фізичного експерименту в лабораторії. Ядерні вибухи і польоти ракет та супутників були спочатку промодельовані на комп'ютерах, лише потім втілені на практиці.

Обчислювальний експеримент носить ітераційний багатоваріантний характер, оскільки в процесі його проведення уточнюється математична модель, модифікується обчислювальний алгоритм, удосконалюється організація обчислювального процесу і обробки результатів розрахунку. Саме це примушує ставити досить жорсткі вимоги до ефективності та економічності чисельних алгоритмів, до можливості їх реалізації за мінімальний машинний час із збереженням при цьому достатньої точності результату.

З точки зору програмування обчислювальний експеримент характерний тим, що для кожної моделі необхідно розв'язувати велику кількість варіантів з варіацією визначаючих параметрів задачі і самої математичної моделі. Ця особливість (багато варіантність і багатомодельність) обчислювального експерименту виявляється у багатократних змінах програми, що реалізує алгоритми, причому ці зміни стосуються як структури програми в цілому, так і окремих її частин.

7. *Аналіз одержаних результатів та перенесення їх на об'єкт, що досліджується*. На цьому етапі розглядається питання про повноту результатів моделювання з метою їх практичного застосування та подальшого вдосконалення моделі, тобто її перевірки на адекватність за тими ознаками, які були відібрані як значущі.

Описану послідовність етапів математичного моделювання назвемо *розширеною* евристичною схемою діяльності математичного моделювання. Аналогічну схему, адаптовану до економіко-математичних моделей як засобу навчального пізнання майбутніх економістів, можна знайти в роботах Л. І. Нічуговської [143,144], інженерів — у роботах Т. В. Крилової [102,103,106], учнів загальноосвітньої школи — у Н. А. Тарасенкової [226,227], В. А. Стукалова [223], Г. М. Морозова [138]. Для спеціалістів з прикладної інформатики подібна послідовність висвітлена в роботах В . С. Анфілатова, А. А. Ємельянова, А. А. Кукушкіна [9], А. В. Могильова, М. І. Пака, Є. К. Хеннера [132].

Не слід думати, що при розв'язанні кожної прикладної задачі чи деякої наукової або навчальної проблеми обов'язково треба виконувати кожний з описаних вище етапів. Якщо розглядати математичне моделювання як метод наукового до слідження, то доцільно дотримуватися даної послідовності етапів. Якщо розглядати математичне моделювання як метод навчального пізнання, то ці етапи можна комбінувати в залежності від цілей моделювання та складності системи, що моде люється. Але в задачах навчального змісту обов'язковими є етапи 1, 2, 3 та 7. Схему, що передбачає виконання послідовності етапів 1, 2, 3 та 7, назвемо *спрощеною* евристичною схемою діяльності математичного моделювання.

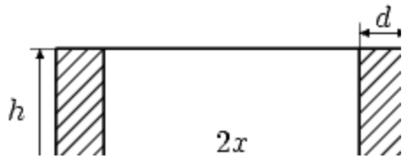


Рис. 1.1: Ілюстрація до задачі 1.1

Наведемо приклад розв'язування прикладної задачі за спрощеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання.

Задача 1.1. Потрібно побудувати відкритий циліндричний резервуар місткістю V 0 із товщиною стінки d (див. рис. 1.1). Якими повинні бути розміри резервуара при мінімальних затратах матеріалу?

Розв'язання. **І. Попередній аналіз об'єкта дослідження.** Оскільки йдеться про циліндричний резервуар, то пригадаємо, що об'єм циліндра визначається за формулою $V = \pi r^2 h$, де r — радіус основи циліндра, а h — його висота. Цю формулу (відому з шкільного курсу геометрії) і використаємо для побудови математичної моделі.

ІІ. Побудова математичної моделі. Розглянемо переріз циліндричного резервуару (рис. 1.1), який складається з зовнішнього циліндра, внутрішнього циліндра та стінки між ними (заштриховано). Нехай d — товщина стінки циліндра, дана в задачі; x — радіус основи внутрішнього циліндра; $x + d$ — радіус основи зовнішнього циліндра; h — висота внутрішнього циліндра; $h + d$ — висота зовнішнього циліндра. Тоді $V_0 = \pi x^2 h$ — об'єм внутрішнього циліндра; $V_1 = \pi(x + d)^2 d$ — об'єм днища циліндра; $V_2 = \pi(x + d)^2 h$ — об'єм зовнішнього циліндра, і відповідно об'єм резервуара $V = V_1 + (V_2 - V_0)$, або

$$V = \pi(x+d)^2 d + \pi((x+d)^2 - x^2)h = \pi d(x+d)^2 + \pi h(d^2 + 2xd).$$

За умовою $V_0 = \pi x^2 h$, звідки $h = \frac{V_0}{\pi x^2}$. Отже,

$$V = \pi d(x+d)^2 + \frac{V_0(2xd + d^2)}{x^2}. \tag{1.1}$$

Співвідношення (1.1) виражає залежність між величиною V та незалежною величиною x і може бути представлене у вигляді функції

$$V(x) = \pi d(x+d)^2 + \frac{V_0(2xd + d^2)}{x^2}, \quad x > 0. \tag{1.2}$$

Це і є математичною моделлю розглядуваної задачі.

III. Реалізація математичної моделі математичними методами. Дослідимо функцію $V(x)$ на екстремум при $x > 0$:

$$V'(x) = 2\pi d(x+d) - \frac{2V_0 d(x+d)}{x^3} = 0.$$

З останньої рівності слідує, що $x = \sqrt[3]{\frac{V_0}{\pi}}$, при цьому

$$h = \frac{V_0}{\pi x^2} = \frac{V_0}{\pi\sqrt[3]{\left(\frac{V_0}{\pi}\right)^2}} = \sqrt[3]{\frac{V_0}{\pi}} = x.$$

Щоб показати, що $V(x)$ має мінімум при такому значенні x, знайдемо другу похідну функції:

$$V''(x) = 2\pi d + \frac{2V_0 d(2x + 3d)}{x^4}.$$

Обчислимо значення другої похідної в точці $x = \sqrt[3]{\frac{V_0}{\pi}}$. Маємо

$$V''\left(\sqrt[3]{\frac{V_0}{\pi}}\right) = \frac{2\pi d\left(\sqrt[3]{\frac{V_0}{\pi}}\right)^4 + 2V_0 d\left(2\sqrt[3]{\frac{V_0}{\pi}} + 3d\right)}{\left(\sqrt[3]{\frac{V_0}{\pi}}\right)^4}.$$

Очевидно, що

$$\left(\sqrt[3]{\frac{V_0}{\pi}}\right)^4 > 0, \quad 2\pi d\left(\sqrt[3]{\frac{V_0}{\pi}}\right)^4 + 2V_0 d\left(2\sqrt[3]{\frac{V_0}{\pi}} + 3d\right) > 0,$$

то і $V''\left(\sqrt[3]{\frac{V_0}{\pi}}\right) > 0$. Отже, функція $V(x)$ досягає мінімуму в точці $x = \sqrt[3]{\frac{V_0}{\pi}}$.

IV. Аналіз одержаних результатів та перенесення їх на об'єкт, що досліджується. Проведене дослідження математичної моделі дозволяє зробити висновок, що забезпечення мінімальних витрат матеріалу на виготовлення резервуару заданої місткості можливе тоді, коли радіус внутрішнього циліндра x дорівнює висоті цього циліндра: $x = h = \sqrt[3]{\frac{V_0}{\pi}}$. ⎯

У цій схемі можна ввести етап "реалізація математичної моделі засобами інформаційно-комунікаційних технологій" і виконувати цей етап замість третього етапу або безпосередньо після нього. Така схема забезпечує плавний перехід від спрощеної до розширеної схем в процесі навчання.

Наведені схеми правильно називати евристичними [138,223,229], тому що вони близькі за змістом до типових евристичних схем розв'язування задач на складання рівнянь та побудову, описаних З. І. Слєпкань у роботі [210, с. 140–143].

Ці схеми сприяють управлінню з боку викладача (вчителя) та самоуправлінню студентами (учнями) у процесі діяльності математичного моделювання.

Математичне моделювання як метод навчального пізнання доцільно використовувати відповідно до зазначених етапів (за спрощеною схемою) у процесі вивчення всіх математичних дисциплін. При цьому особливу увагу слід приділити формуванню вмінь виконувати перший та другий етапи (за спрощеною схемою) і це досить просто робити під час проведення більшості практичних занять, тому що це дає можливість узагальнити знання з теми, що вивчається, показати її практичну зна чимість і не вимагає додаткового навчального часу. При цьому вміння математичного моделювання формуються в тісному зв'язку з вміннями, наприклад, розв'язування диференціальних рівнянь і перші включають в себе другі.

Розглянуту спрощену схему математичного моделювання доцільно використовувати і в школі.

Отже, в процесі навчання математики та методики її навчання майбутніх учителів математики математичне моделювання виступає спочатку як метод навчального пізнання, а потім як метод наукового дослідження.

Математичного моделювання доцільно навчати у процесі вивчення кожної з математичних дисциплін шляхом розгляду та дослідження типових класичних математичних моделей (наприклад, задач Герона та Дідони в геометрії) та розв'язування прикладних задач навчального характеру. Важливим для майбутніх учителів математики є вміння під керівництвом викладача або самостійно складати прикладні задачі, які приводять до побудови певної математичної моделі. Корисно розглянути задачі з різних галузей людської життєдіяльності, які описуються однією й тією ж математичною моделлю. Такі творчі завдання студентам можуть стати змістом рефератів, курсових та кваліфікаційних робіт.

Математичне моделювання є засобом реалізації міжтемних зв'язків у межах однієї математичної дисципліни, міжпредметних зв'язків між різними математичними та іншими навчальними дисциплінами. Так, наприклад, суто геометричну задачу Герона можна розв'язувати як геометричними методами, так і методами математичного аналізу, досліджуючи відповідну функцію на екстремум.

Математичні моделі широко використовуються у фізиці. Усі фізичні закони можна записати математично. В основі фізичного моделювання завжди лежить математичне. Одним з найпоширеніших методів математичного моделювання є метод використання фундаментальних законів фізики [106,124,195].

Математичне моделювання тісно пов'язане з економічним моделюванням, є його основою і сприяє глибокому вивченню різних економічних процесів становлення та розвитку ринкової економіки України та розвитку світових економічних систем [122 ,134,143]. Найбільш вдало висвітлене питання математичного моделювання в системі економічної освіти Л. І. Нічуговською в монографії "Математичне моде лювання в системі економічної освіти" [143]. У монографії розкривається зв'язок математики з економікою через математичне моделювання, наведено приклади побудови математичних моделей задач економічного змісту, які можна широко вико ристовувати не тільки при навчанні математики майбутніх економістів, а й при навчанні майбутніх учителів математики і взагалі спеціалістів з вищою освітою, яким курси математики та економіки читаються обов'язково.

Математичне моделювання пов'язує навчальні математичні дисципліни з інформатикою [56]. Створення математичних моделей дослідницького характеру, тобто математичне моделювання як творчий процес, неможливе без належного рівня вмінь з інформатики та комп'ютерної техніки. За допомогою інформатики математичне моделювання з методу навчального пізнання переростає в метод наукового дослідження. Тобто студенти, оволодівши методом математичного моделювання в процесі вивчення математичних дисциплін, мають змогу вдосконалювати свої вміння математичного моделювання в творчій, дослідницькій діяльності, яку вони можуть проводити або самостійно, або під керівництвом викладача при написанні курсових, кваліфікаційних робіт, підготовці наукових робіт в студентських наукових гуртках чи виступів на наукових конференціях.

Основною особливістю роботи зі студентами — майбутніми вчителями математики — по формуванню в них вмінь математичного моделювання є те, що цими вміннями вони повинні оволодіти так, щоб могли сформувати відповідні вміння в своїх учнів, хай навіть на простішому рівні.

Розглядаючи математичне моделювання як метод наукового дослідження, у май бутніх учителів необхідно сформувати вміння використовувати математичні моделі в педагогіці та психології. На необхідність цього звертав увагу ще в 1981 р. Б. В. Гнеденко. У своїй книзі "Математическое образование в вузах" він пише: "Ма тематичний підхід до вивчення різних педагогічних явищ може надати реальну допомогу справі і служити більш глибокому проникненню в проблеми навчання, психологію учня, цілеспрямоване проведення педагогічних експериментів. На мій погляд, вже зараз математика може бути з успіхом використаною до розв'язання таких задач:

1. планування і проведення педагогічних експериментів;
2. обробка результатів педагогічних експериментів;
3. побудова кількісних моделей навчання і виховання" [43, с. 168].

Таким чином, методичну систему формування вмінь математичного моделювання у майбутніх учителів математики у процесі навчання математики та методики її навчання слід розробляти, спираючись на наступність методу математичного моделювання як методу навчального пізнання і як методу наукового дослідження.

Надзвичайну важливість навчання учнів та студентів діяльності математичного моделювання для формування в них системи дієвих знань та вмінь підкреслює і той факт, що в сучасних програмах з математики для школи [186–188] та в галузевих стандартах [37] вказано на необхідність навчання математичного моделювання.

1.2 Мета, завдання, місце та зміст навчання студентів педагогічного університету математичного моделювання

У 60-і роки минулого століття почалося реформування шкільної освіти, яке мало на меті наблизити шкільний курс математики до ідей та методів сучасної математичної науки. Хоч досягти цієї мети в повній мірі і не вдалося, все ж провідні ідеї теорії функцій, геометричних перетворень, векторів і методів диференціального та інтегрального числення знайшли відображення в шкільних програмах та підручниках. Що ж стосується методу математичного моделювання як методу наукового дослідження і навчального пізнання, то їх систематичне та неперервне впровадження в шкільний курс в останні три десятиріччя фактично обмежилося лише побажаннями щодо їх необхідності.

У 90-х роках минулого століття в шкільний курс алгебри була включена тема “Елементи прикладної математики”. Ця тема за програмою з математики [186] пропонувалася для вивчення у 9 класі. У програмі мета вивчення математичного моделювання була сформульована так: “Ввести поняття про математичну модель. Розглянути загальну задачу математичного моделювання, проілюструвати прикладами.” [186, с. 41–42]. Зміст навчального матеріалу визначався так: “Математичне моделювання. Приклади математичного моделювання” [186, с. 42]. Вивчивши тему, учні повинні *мати уявлення* про математичне моделювання і його загальну задачу, *уміти* складати моделі до прикладних задач та розв’язувати їх. На вивчення всієї теми відводилося 10 годин, з них на ознайомлення з математичним моделюванням можливо виділити найбільше — 2 години.

Сучасна нова програма з математики для 12-річної школи [187] більше уваги приділяє навчанню математичного моделювання, ніж попередня. Зокрема, однієї з цілей навчання математики в основній школі є така: “. . . формування в учнів математичних знань, як невід’ємної складової загальної культури людини, необхідної умови її повноцінного життя в сучасному суспільстві на основі ознайомлення школярів з ідеями і методами математики як універсальної мови науки і техніки, ефективного засобу моделювання і дослідження процесів і явищ навколишньої дійсності” [187, с. 3]. Особливо велика увага навчанню математичного моделювання приділяється в пояснювальній записці програми для старшої школи:

“Для успішної участі в сучасному суспільному житті особистість повинна володіти певними прийомами математичної діяльності та навичками їх застосування до розв’язування практичних задач. Певної математичної підготовки і готовності її застосовувати вимагає і вивчення багатьох навчальних предметів загальноосвітньої школи. Значні вимоги до володіння математикою у розв’язанні практичних задач ставить сучасний ринок праці, отримання професійної освіти, продовження освіти на наступних етапах. Тому одним із головних завдань цього курсу є забезпечення умов для досягнення кожним учнем практичної компетентності.

Практична компетентність передбачає, що випускник загальноосвітнього навчального закладу:

- вміє будувати і досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об’єктів, процесів і явищ, задач, пов’язаних з ними, за допомогою математичних об’єктів, відповідних математичних задач, . . . ” [187, с. 42].

Щодо цілей викладання математики в старшій школі, то у програмі зазначено:

“Формування навичок застосування математики є однією з головних цілей викладання математики. Радикальним засобом реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики є широке систематичне застосування методу математичного моделювання протягом усього курсу. Це стосується введення понять, вияв лення зв'язків між ними, характеру ілюстрацій, доведень, системи вправ і, нарешті, системи контролю. Інакше кажучи, математики треба так навчати, щоб учні вміли її застосовувати. Забезпечення прикладної спрямованості викладання математики сприяє формуванню стійких мотивів до навчання взагалі й до навчання математики зокрема.

Реалізація у навчанні прикладної спрямованості навчання математики означає: 1) створення запасу математичних моделей, які описують реальні явища і процеси, мають загальнокультурну значущість, а також вивчаються у суміжних предметах; 2) формування в учнів знань та вмінь, які необхідні для дослідження цих математичних моделей; 3) навчання учнів побудові та дослідженню найпростіших математичних моделей реальних явищ і процесів.

Прикладна спрямованість математичної освіти суттєво підвищується завдяки впровадженню комп'ютерів у навчання математики, повноцінному введенню ймовірносно-статистичної змістової лінії у шкільний курс математики." [187, с. 43].

У шкільних підручниках Г. П. Бевза "Алгебра 7–9 кл." [23, с. 253–255] та В. Кравчука, М. Підручної, Г. Янченко "Алгебра 9 кл." [100, с. 178–181] математичному моделюванню присвячено по одному параграфу. Структура цих параграфів однакова: вводиться поняття "математична модель", "математичне моделювання", перераховуються етапи математичного моделювання, наводяться приклади задач. У підручнику Г. П. Бевза так вводиться поняття математичної моделі: "Моделлю називають спеціально створений об'єкт, який відображає властивості досліджуваного об'єкта (mod`ele — копія, зразок). Зменшені моделі літака, греблі, автомобіля — приклади фізичних моделей. Математичні моделі створюють з математичних понять і відношень: геометричних фігур, чисел, виразів тощо. Математичними моделями здебільшого бувають функції, рівняння, нерівності, їх системи." [23, с. 254]. У підручнику В. Кравчука, М. Підручної, Г. Янченко пропонується таке означення математичної моделі: "Математична модель — це опис якогось реального об'єкта або процесу мовою математичних понять, відношень, формул, рівнянь тощо." [100, с. 178].

Сьогодні актуальним є створення нових підручників та посібників з математики для основної та старшої школи, в яких навчальний матеріал, що стосується математичного моделювання викладався б детальніше. Наприклад, учнів можливо знайомити із сучасними підходами та методами математичного моделювання, урізноманітнити систему прикладних задач відповідно до вимог профільного навчання.

Не набагато краще порівняно зі школою, метод математичного моделювання знайшов своє місце в системі підготовки вчителя математики. Саме це було і є основною причиною зволікання систематичного впровадження ідеї та методу математичного моделювання в шкільний курс математики. Другою, не менш важливою причиною зазначеного негативного явища, є нерозробленість методичного забезпечення вивчення методу математичного моделювання як в загальноосвітній школі, так і у вищих навчальних закладах, які здійснюють підготовку вчителя математики.

Однією з цілей математичної підготовки вчителя математики у вищій школі є навчити студентів основам математичного моделювання та підготувати їх до впровадження ідей і методу математичного моделювання в курс математики загальноосвітньої школи. На нашу думку, для досягнення цієї цілі необхідно поставити ряд завдань, а саме:

1. Визначити зміст і місце навчання студентів математичного моделювання у системі математичної та методичної підготовки майбутніх учителів. Ознайомити їх з методом математичного моделювання як методом наукового дослідження і навчального пізнання.
2. Домогтися усвідомлення студентами спрощеної і розширеної евристичних схем, які лежать в основі діяльності математичного моделювання.
3. Протягом всього терміну навчання в педагогічному університеті систематично вчити студентів математизувати ситуацію і складати математичні моделі, спочатку за спрощеною схемою, а на старших курсах — за розширеною.
4. Підготувати студентів до ознайомлення учнів з методом математичного моделювання в шкільному курсі і навчання складанню моделей простіших задач, в тому числі прикладного і міжпредметного змісту.
5. Вчити студентів та учнів використовувати інформаційно- комунікаційні технології при створенні та дослідженні математичних моделей.

Процес навчання майбутніх учителів математики математичного моделювання має не лише освітню, розвиваючу, а й виховну мету, спрямовану на виховання загальнолюдських духовних цінностей, гуманізму, економічного, патріотичного, трудового виховання, виховання здорового способу життя. Ця мета реалізується при побудові та дослідженні економічних, екологічних, суспільних моделей.

Виділена мета і завдання навчання майбутніх учителів математики математично го моделювання повинна бути усвідомлена всіма викладачами педагогічних університетів, тому що саме від визначення мети, завдань навчання і місця його в системі підготовки вчителя залежать всі методичні дії викладача: побудова окремо го навчального заняття (лекції, практичного, лабораторного тощо), підбір математичних вправ і завдань, організація самостійної та індивідуальної роботи студентів, цільові рівні тестування рівня научування студентів тощо.

Методична стратегія викладача вважається ефективною, якщо його дії допома гають студентам досягти достатньо високого рівня практичної реалізації навичок та вмінь при розв’язанні певних завдань як у контексті даної навчальної теми, так і за її межами. У той же час, дії викладача потребують корегування, якщо вони не відповідають меті навчального курсу, а методичні цілі і завдання щодо реалізації ідей математичного моделювання вступають в протиріччя із стратегією навчання.

Навчання математичним дисциплінам — досить складний процес, і як показує практика, у багатьох студентів виникають труднощі у сприйманні математики. І тому виникає проблема запобігання конфлікту цілей між тими, кого навчають, і тими, хто навчає, (студенти — викладачі) та узгодження цих цілей з потребами суспільства. Цільові аспекти навчання взагалі і математичним дисциплінам майбутніх учителів математики, зокрема, можна представити у вигляді схеми 1.1.

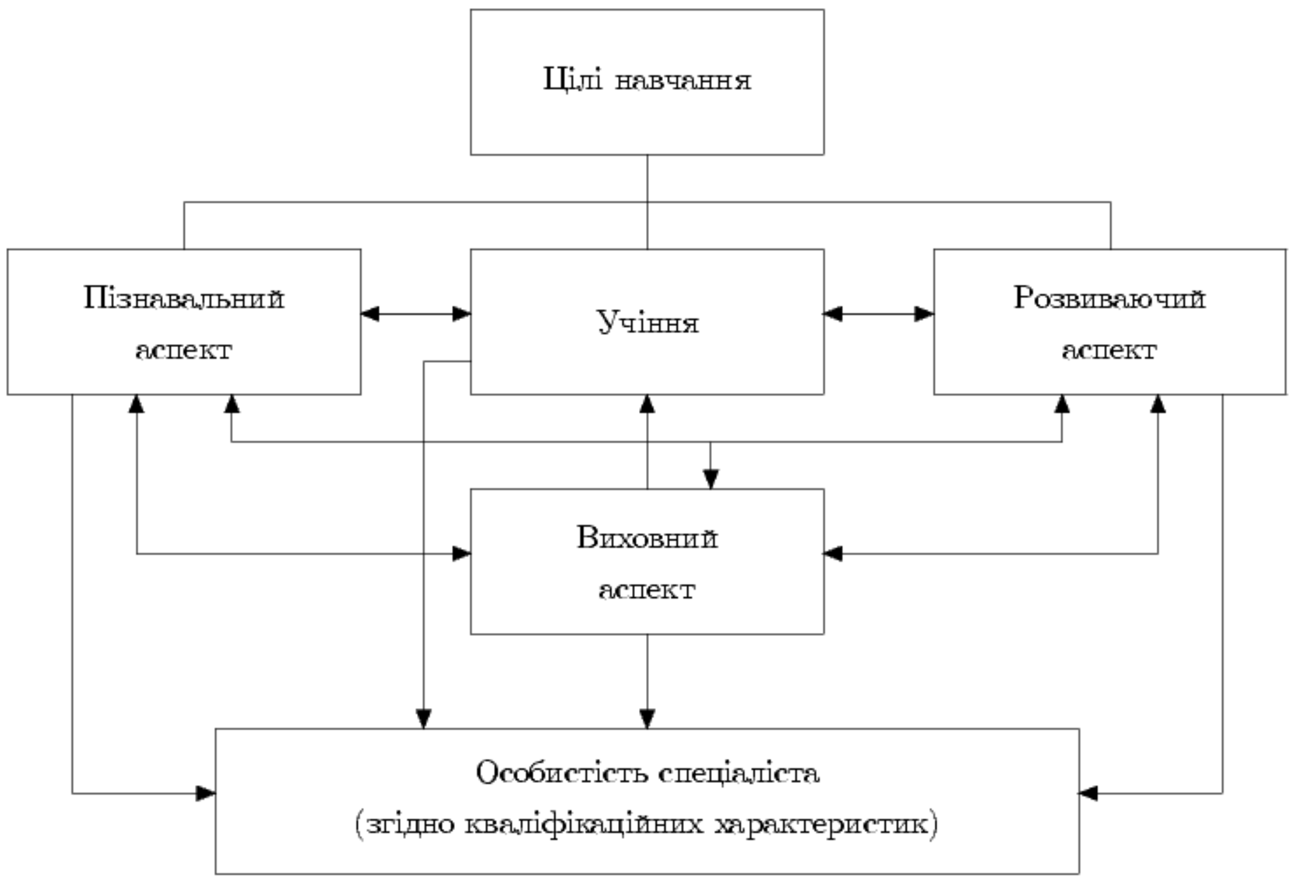


Схема 1.1: Цільові аспекти навчання

Слід зазначити, що навчання математичним дисциплінам у вищому закладі освіти має бути організоване таким чином, щоб усі цільові аспекти знайшли відображення не тільки в змістовному плані, а й ефективно реалізовувалися безпосередньо у системі навчання.

Відомо, що навчальний процес визначається не тільки цілями та завданнями, а й змістом освіти. Зміст освіти — це науково обґрунтована система дидактично та методично оформленого навчального матеріалу для різних освітніх та освітньо-кваліфікаційних рівнів. Складовими змісту освіти є нормативний та вибірковий компоненти. Нормативний компонент змісту освіти визначається відповідними державними стандартами освіти, а вибірковий — вищим закладом освіти.

Нормативним документом, що регламентує навчальну діяльність майбутніх учителів математики, є “Галузеві стандарти вищої освіти. Напрям підготовки 0101 Педагогічна освіта. Спеціальність 6.010100 Педагогіка і методика середньої освіти. Математика” [37]. Цей галузевий стандарт складається з двох розділів: 1) освітньо-кваліфікаційна характеристика бакалавра, 2) освітньо-професійна програма підготовки бакалавра.

У першому розділі перераховані типи діяльності, типові завдання діяльності та вміння для вирішення типових завдань діяльності. У додатку “Типи діяльності, типові завдання діяльності та вміння, які повинен мати випускник навчального закладу”, перераховані вміння, які слід сформувати у майбутніх учителів математики за певним типом діяльності. Серед них вказано: “Математичне моделювання природничих, технічних, економічних та соціальних явищ і процесів” [37, с. 15–19].

Зміст цих вмінь частково аналізувався у п. 1.1 і поданий у додатку А. У цьому ж розділі галузевих стандартів зазначається, що “вищі навчальні заклади зобов’язані забезпечити формування у випускників вмінь для виконання типових завдань діяльності” [37, с. 7], а отже, і вмінь математичного моделювання.

У другому розділі галузевих стандартів подано перелік нормативних навчальних дисциплін і мінімальна кількість навчальних годин/кредитів для їх вивчення [37, с. 7–9].

На основі цього нормативного документу необхідно скласти програми з математичних дисциплін, де навчанню математичного моделювання слід відвести належне місце.

Зміст навчання математичного моделювання полягає у знайомстві з понятійним апаратом — розкритті суті таких понять як “математична модель”, “математичне моделювання”, “спрощена та розширена евристичні схеми діяльності математичного моделювання”. Розглядаючи конкретні процеси та явища навколишнього світу, наприклад, процес розмноження бактерій, утворення нової хімічної речовини, рух каменя, кинутого під кутом до горизонту, ефективність рекламної кампанії, підрахунок прибутку з банківських вкладів тощо, приходять до висновку про необхідність створення та дослідження їх математичних моделей. Такими математичними моделями можуть бути рівняння, нерівності та їх системи, геометричні фігури, функції та їх похідні, графіки функцій, теореми та твердження сучасної математики. Вводяться означення математичної моделі, математичного моделювання, розкривається суть кожного з етапів спрощеної та розширеної евристичної схеми діяльності математичного моделювання. Ці означення та зміст етапів евристичних схем наведено в п. 1.1. Наводяться приклади задач, що розв’язуються шляхом побудови та дослідження математичних моделей за спрощеною та розширеною евристичними схемами діяльності математичного моделювання. Розглядаються види моделей та види математичних моделей. Математичні моделі поділяються за способом реалізації на аналітичні та імітаційні, за призначенням — на математичні моделі прикладних задач та математичні моделі абстрактних теорій. Вводиться поняття навчальної математичної моделі. Такі моделі широко використовуються учителями у їх професійній діяльності. Доцільно навести означення цього поняття, дане С. Гончаренком в Українському педагогічному словнику: “*Моделі навчальні* (франц. mod`ele, від modulus — міра, мірило, зразок) — навчальні посібники, які є умовним образом (зображення, схема, опис тощо) якогось об’єкта (або системи об’єктів), який зберігає зовнішню схожість і пропорції частин, при певній схематизації й умовності засобів зображення. Залежно від зображуваних об’єктів моделі навчальні бувають: а) *анатомічні*, які зображують рослини, тварин, тіло людини; б) *технічні* — моделі машин і механізмів, приладів, знарядь праці, технічних споруд; в) *будівельні* — зображення будівель; г) *математичні* — геометричні фігури й тіла, ілюстрації до математичних теорем і формул тощо” [45, с . 213].

Найбільш поширеними методами математичного моделювання є такі: застосування фундаментальних законів розвитку природи та суспільства, варіаційні принципи, метод аналогій, метод фазового укрупнення, метод побудови ієрархічного ланцюга моделей. З цими методами майбутніх учителів математики знайомлять під час перших занять в університеті і розвивають знання та вміння використовувати ці методи в процесі вивчення кожної з математичних дисциплін.

У процесі вивчення студентами кожної з математичних дисциплін зміст навчання математичного моделювання збагачується новими математичними методами до слідження математичних моделей шляхом розв’язування задач за евристичними схемами діяльності математичного моделювання (табл. 1.2).

Табл . 1.2: Система змістовни дисциплін, навчалі яких найбільше спр формуванню знань математичного мод

ї підготовки
росторів. Гомеоморфні відображення. Проблема гомеоморфізму. Топологічні властивості множин.
огічні многовиди. Топологічна розмірність та ейлерова характеристика многовиду.
Ілоскі криві. Особливі точки плоских кривих та їх класифікація. Кривизна плоскої кривої. Обвідна

омплексної змінної. Похідна функції комплексної змінної. Геометричний та гідромеханічний зміст
лгоритмів
ення. Операції над висловленнями.
орядку. Питання несуперечності, повноти та незалежності аксіом числення предикатів. Формальна

і методи. Математичне моделювання і обчислювальний експеримент.
я диференціальних рівнянь. Чисельні методи розв’язування крайових задач математичної фізики

ції. Пошук екстремуму функції однієї змінної. Пошук екстремуму функції багатьох змінних. Метод
пакетів програм для чисельного і графічного розв’язування математичних задач. Класифікаці
офесійних). Використання математичних пакетів для розв’язування основних задач чисельного анал
ї
товки
ки
математики. Внутріпредметні та міжпредметні зв’язки при вивченні математики. Позакласна робо
математичних понять. Задачі в навчанні математики. Контроль результатів навчання математики.
основній школі. Рівняння і нерівності та їх системи в курсі алгебри основної школи. Функції в ку
ностей та елементів статистики в основній школі.

в основній школі. Про побудову шкільного курсу геометрії. Паралельні та перпендикулярні прямі
тетія, перетворення подібності. Координати і вектори на площині.
в шкільному курсі математики, їх властивості та графіки.
відомості про рівняння. Способи розв’язування алгебраїчних рівнянь і систем алгебраїчних рівнян
чних нерівностей.
и. Координатний і векторний методи розв’язування задач у курсі планіметрії та стереометрії.
сних і комплексних чисел. Відповідність, відображення, функція. Потужність множини.
нкцій однієї змінної. Похідна і диференціал. Основні теореми диференціального числення та їх заст
й однієї змінної. Застосування визначених інтегралів.

и. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень.
нкцій багатьох змінних. Поняття *n*-вимірного евклідового простору та функції багатьох змінних. Ч
змінних та їх застосування.
Скалярний добуток векторів. Векторний добуток векторів. Мішаний добуток векторів. Векторні під

Афінна та прямокутна декартова системи координат. Полярна система координат. Геометричні міс

рівнянь прямої та їх застосування. Відстань і відхилення точки від прямої, геометричний зміст лінії
ня прямих. Застосування теорії прямих.
ола, парабола. Еліпс. Гіпербола. Парабола. Оптичні властивості еліпса, гіперболи та параболи.
ощини. Відображення та перетворення множин. Афінні перетворення. Рухи. Перетворення подібно
озв'язання задач.
Афінна та прямокутна декартова системи координат у просторі. Полярно-сферична та полярно-цилі
ат у просторі.
сторі. Площина. Пряма. Пряма і площина. Застосування теорії прямих і площин.
остору. Група афінних перетворень простору та її підгрупи. Група рухів простору та її підгрупи. Гр

гальні відомості про системи лінійних рівнянь. Метод Гаусса. Перестановки та підстановки. Визнач
систем лінійних рівнянь. Алгебра матриць. Обернена матриця.
них чисел. Відношення на множинах. Алгебраїчні операції. Алгебраїчні структури.

яння. Основні поняття теорії звичайних диференціальних рівнянь. Теорема існування та єдиності р
рівнянь I порядку.
астинних похідних. Рівняння гіперболічного типу (рівняння коливання струни та рівняння коливан
івняння теплопровідності). Метод Фур'є. Рівняння еліптичного типу. Рівняння Лапласа. Задача Дир
енціальні рівняння. Поняття математичної моделі. Обчислювальний експеримент. Застосування зв
техніки. Застосування диференціальних рівнянь у частинних похідних до дослідження процесів ре
ні задачі теорії графів.
и зображень
е проектування та його властивості. Паралельне проектування та його властивості. Ортогональне пр
ктивне відображення прямої у пучок прямих. Розширена евклідова пряма. Означення і моделі прое
р. Проективна система координат на прямій. Проективна система координат на площині.
и. Поняття про математичну структуру. Суть аксіоматичного методу. Інтерпретація основних понят
и до системи аксіом: несуперечливість, незалежність, повнота. Геометрична, арифметична та алгеб
атична статистика
д ними. Стохастичний експеримент. Простір елементарних подій. Поняття випадкової події. Опера
ластивості та розподіли. Розподіли статистичних ймовірностей, їх типи та засоби описування. Чис
числення статистичних ймовірностей. Умовні статистичні ймовірності. Формула повної статистичн

ймовірностей. Імовірнісні міри та їх розподіли. Уточнення поняття події. Ймовірнісні міри, їх ти
вні ймовірності. Залежні і незалежні події. Формула повної ймовірності. Формула Байєса. Повторні

діли їхніх ймовірностей. Випадкові вектори. Поняття випадкової величини. Розподіли ймовірност
й випадкових векторів. Математичне сподівання випадкової величини. Моменти випадкових велич
ормальний розподіл ймовірностей. Поняття про випадкові процеси.

стики. Поняття про метод Монте–Карло. Основні задачі математичної статистики. Статистичні с
сть. Довірчі інтервали. Статистична перевірка гіпотез. Поняття про метод статистичних випробуван

Навчати математичного моделювання можна і при вивченні інших тем вказаних математичних дисциплін шляхом розв'язування відповідних прикладних задач за спрощеною та розширеною евристичними схемами діяльності математичного моделювання. Але в процесі вивчення окремих математичних дисциплін не вдається навчати математичного моделювання цілісно і всебічно. Тому знання та вміння студентів з математичного моделювання, отримані під час вивчення кожної математичної дисципліни, потребують систематизації та узагальнення.

Для узагальнення, розширення та поглиблення знань і вмінь з математичного моделювання, одержаних при вивченні окремих математичних дисциплін, доцільно на 4-му і 5-му курсах запропонувати студентам спецкурси з математичного моделювання. Такий спецкурс успішно читається вже кілька років у НПУ імені М. П. Драгоманова. Методика його проведення, мета, завдання та робоча програма розроблені в п. 2.4. Програма спецкурсу передбачає вивчення таких питань.

1. **Математичні моделі реальних процесів та явищ. Математичне моделювання як метод наукового дослідження.** Різні процеси, що описуються однією й тією ж математичною моделлю: процес розмноження бактерій, процес теплопровідності, ефективність реклами, процес утворення нової хімічної речовини. Поняття "математична модель" та "математичне моделювання". Види математичних моделей: за призначенням, за способом математичної реалізації. Математичне моделювання як метод дослідження. Спрощена та розширена евристичні схеми діяльності математичного моделювання. Приклади задач. Задачі локального охолодження циліндра: кільцевою зоною з торця, зоною між твірними на бічній поверхні. Функції як математичні моделі реальних процесів і явищ.*

2. **Теоретико-множинні основи математичного моделювання.** Множини та відношення на них. Відношення еквівалентності та факторизація. Математичні структури. Аксіоматичний метод. Несуперечливість, незалежність і повнота системи аксіом. Поняття математичної моделі системи аксіом. Приклади математичних структур, що визначаються аксіоматикою Д. Гільберта та аксіоматикою Г. Вейля.

3. **Загальні методи математичного моделювання.** *Метод використання фундаментальних законів природи.* Математичні моделі визначення траєкторії спливання підводного човна, руху кульки, приєднаної до пружини. *Варіаційні принципи.* Математична модель руху автомобіля, що вимагає мінімальних затрат часу. Варіаційний принцип Гамільтона та його застосування до побудови математичної моделі руху системи "кулька—пружина". *Метод аналогій.* Аналогічність побудови та дослідження моделей Р. Харрода — розвитку економіки в окремо взятій країні та Мальтуса — розвитку біологічної популяції. Універсальність математичних моделей.* *Ієрархічний підхід до побудови математичних моделей* та застосування його до побудови логістичної моделі динаміки популяції. *Метод фазового укрупнення.* Приклади застосування: знаходження площі трикутника, розв'язування рівнянь.

4. **Деякі сучасні методи дослідження математичних моделей.** Способи масштабування, теореми порівняння, усереднення та максимуму. Розкриття їх суті на задачах локального охолодження циліндра.

5. **Математичне моделювання складних об'єктів.** *Деякі моделі фінансових та економічних процесів*: організація реклами. *Моделі суперництва*: взаємовідносини в системі "хижак —жертва" (найбільш повна модель популяції). *Задачі технології та екології*: "фізично безпечний ядерний реактор". *Фундаментальні проблеми природознавства*: кліматичні наслідки ядерного конфлікту. *Моделювання випадкових процесів у системах масового обслуговування*: математична модель задачі "черга до одного продавця".

6. **Математичне моделювання і професійна діяльність учителя математики.** Організація навчання математичного моделювання учнів школи. Аналіз різних ев ристичних схем діяльності математичного моделювання, що пропонуються в шкільному курсі математики. Математичні моделі, які доцільно розглянути в шкільному курсі математики: процесу розмноження бактерій, процесу тепло провідності, ефективності реклами, утворення нової хімічної речовини, визначення траєкторії спливання підводного човна, руху автомобіля, що вимагає мінімальних затрат часу, модель фізично безпечного ядерного реактора, моделювання черги.

Взагалі, при розробці таких спецкурсів необхідно звернути особливу увагу на ме тодичне забезпечення курсу, а саме, робочу навчальну програму; опорні конспекти лекцій; методичні рекомендації до практичних занять — плани, завдання, ситуації, ділові ігри тощо; методичні рекомендації до використання персонального комп'ютера з відповідним пакетом програмних продуктів; навчальні та контролюючі тести; завдання для самостійної роботи; пакети контрольних завдань для комплексної перевірки знань студентів, заміру залишкових знань, поточного контролю знань; залікового тестування. Наявність цих спецкурсів повинна чіткіше окреслювати можливості та орієнтувати на застосування математичних моделей у процесі вивчення кожної з математичних дисциплін, які вивчаються майбутніми вчителями математики, та відповідний рівень знань, місце цих знань та вмінь учнів у курсі математики загальноосвітньої школи.

Таким чином, стратегічна програма з математичного моделювання в процесі навчання математичних дисциплін та методики навчання математики має реалізовуватися в наступних її аспектах, а саме:

- підвищувати базовий рівень математичних знань на основі використання математичного моделювання як методу наукового дослідження і навчального пізнання;
- озброювати студентів методологічною основою проведення наукових досліджень та їх практичним застосуванням у різноманітних напрямах діяльності;
- надавати можливість кожному студенту відчути себе суб'єктом рівнопартнерського навчального співробітництва у спільному дидактично організованому викладачем розв'язанні навчальних, навчально-пошукових, дослідницьких завдань;
- реалізувати прикладну спрямованість навчання математики в педагогічному університеті та школі;
- вчити використовувати інформаційно-комунікаційні технології при складанні та дослідженні моделей;
- здійснювати рівневу та профільну диференціацію навчання.

1.3 Психолого-педагогічні передумови та методичні вимоги до системи формування у студентів знань, навичок, вмінь з математичного моделювання

1.3.1 Психолого-педагогічні передумови.

Навчання математичного моделювання майбутніх учителів математики — складний психолого-педагогічний процес. Складність його зумовлена тим, що сформувати вміння математичного моделювання слід у студентів на досить високому рівні, який визначений галузевими стандартами [37]. Складність обумовлена також тим, що студенти мають бути підготовлені до формування вмінь математичного моделюван ня у своїх майбутніх учнів. Це одне з важливих завдань математичної підготовки школярів, які будуть розв'язуватися вчителем математики в його професійній діяльності. Успішне навчання математичного моделювання може здійснюватись лише при умові, коли вчитель (викладач) спирається на знання психолого-педагогічних закономірностей навчального процесу, які концентрують в собі досягнення психології, дидактики, і відповідну методику застосування цих закономірностей до навчання математики.

Математичне моделювання — інтелектуальна діяльність особистості. Ж. Піаже вважав, що розвинутий інтелект — це система операцій, яку необхідно організувати, а потім управляти нею. Операція, за теорією Ж. Піаже, — це внутрішня дія, яка ви никла із зовнішніх, предметних дій. Операція є скорочена дія, вона проходить не з реальними предметами, а з образами, символами, знаками. Організація навчання дитини може прискорити чи загальмувати процес розвитку. Успіхи в навчанні зале жать від того, на скільки "дозрів" інтелект дитини для засвоєння понять: те, що дитина в навчанні засвоює, "асимілюється нею у відповідності до сформованої у неї на даний час інтелектуальної структури" [173, с. 24].

Психологами обґрунтовані положення про психологічні резерви особистості учня , студента. А саме: його здібності (Н. С. Лейтес, В. А. Крутецький), типологія індивідуальних відмінностей (Б. М. Теплов, В. Д. Небиліцин), соціально-психологічні феномени (А. В. Петровський, В. І. Войтко), мотиваційні сфери (Л. І. Божович), пам'ять (А. А. Смирнов), увага (Б. Г. Ананьєв), навчальна діяльність (О. Н. Леонтьєв), поетапне формування розумових дій (П. Я. Гальперін, Н. Ф. Тализіна, Г. О. Атанов, В. В. Сєріков, С. І. Подмазін).

Для побудови методичної системи формування вмінь математичного моделювання у майбутніх учителів математики необхідно вивчити вікові і психологічні особливості учнів та студентів, виділяючи ті особливості, які особливо важливі в процесі навчання математики. Розглянемо психологічні особливості навчальної діяльності школярів та студентів у процесі вивчення математики. Це важливо тому, що:

1. студенти — майбутні вчителі математики — вчорашні школярі, з певним психічним розвитком, який слід правильно врахувати в їх подальшому навчанні і в забезпеченні відповідного йому психічного розвитку;
2. майбутні вчителі повинні керувати психічним розвитком дитини в процесі навчання математики, опираючись на свої знання, одержані в університеті.

Як відомо, математика — наука про абстрактні структури, яка розглядає об'єкти досить узагальненої природи. В предмет її вивчення входять просторові форми і кількісні відношення реального світу, які мають такий рівень незалежності від змістовної основи, що можуть бути повністю абстраговані від неї в поняттях, за допомогою яких можна суто логічно розвинути теорію.

Специфічність математичних понять — це їх абстрагованість і загальність. Саме тому математиці властиві строгість її висновків і величезна широта застосувань. Проте абстракції в математиці не втрачають зв’язку з життям, вони мають певний реальний зміст і є засобами вивчення закономірностей реального світу [104,139,140, 242].

Джерело життєвості математики полягає в тому, що її поняття і висновки виходять з дійсності і знаходять широке застосування в інших науках, техніці, виробництві — у всій життєвій практиці людини.

У процесі навчання математики на будь-якому рівні ми маємо справу з поняттями, твердженнями і доведеннями. Засвоєння математичних знань зводиться, нарешті, до засвоєння певної системи понять, тверджень та їх доведень. Але мета на вчання полягає не тільки в засвоєнні учнями та студентами теоретичних знань, а й у прищепленні їм навичок і вмінь застосовувати ці знання не тільки в засвоєнні певних доведень, а й у формуванні вміння міркувати, доводити, розв’язувати практичні задачі.

Визначаючи поняття як одну з основних форм мислення, в якій відображається суть предметів і явищ реального світу в їх істотних, необхідних ознаках і відношеннях, підкреслюють його роль та значення у пізнанні. При цьому мислення розглядається як оперування поняттями, оскільки перехід від чуттєвих ступенів пізнання до абстрактного мислення характеризується як перехід від відображення світу у формі відчуттів, сприймань і уявлень до відображення його в поняттях і на їх основі в судженнях та інших логічних категоріях [210,211,215].

У психології виділяють такі сторони значущості математичних понять: предметну (безпосереднє відображення у математичних поняттях навколишніх предметів і явищ); абстрактну (розуміння особливостей понять, їх ролі для вивчення інших математичних понять); практичну (з’ясування використання математичних понять, їх властивостей на практиці). Показником засвоєння поняття є вміння застосовувати поняття на практиці, вміння оперувати ним [215,242].

Одним із провідних принципів психології є принцип єдності знань і дій. Але існує два роди знань: знання про предмети і явища навколишнього світу (тобто знання про поняття) та знання про дії, які з ними потрібно виконувати для досягнення певної мети [47,99,105,115,116,128,224,225,242,262].

Поняття розкривається у всій повноті в процесі його застосування. Останнє має подвійну функцію: по-перше, виступає як засіб для більш глибокого розкриття по няття, по-друге, є критерієм визнання рівня володіння цим поняттям [215]. Отже, існує необхідність включення у процес навчання математики понять “математична модель” та “математичне моделювання”. Математичне моделювання слід розглядати:

1. як засіб наукового дослідження та навчального пізнання, необхідний учителю для утворення математичних абстракцій при введенні, наприклад, нових математичних понять;
2. як метод розв’язування прикладних задач.

У сучасній педагогічній літературі [34,229] виділено такі дидактичні функції математичного моделювання:

1. *Пізнавальна функція.* Методичною метою цієї функції є формування пізнавального образу об'єкта, що вивчається. Це формування відбувається постійно при переході від простого до складного.

Тут думка суб'єкта спрямовується найкоротшим і найдоступнішим шляхом до сприйняття об'єкта в цілому. Зауважимо, що реалізація пізнавальної функції не ви значає процесу наукового дослідження, цінність цієї функції полягає в ознайомленні учнів та студентів з найбільш коротким і доступним способом осмислення матеріалу , що вивчається.

Наприклад, при вивченні певної теми на заняттях геометрії проводять разом з учнями і студентами поетапну побудову рисунка; при дослідженні функції на моно тонність (чи на екстремум) передують теоретичному обґрунтуванню (побудові аналітичної моделі), розгляд рисунка, на якому пов'язується зростання (спадання) чи локальний максимум (мінімум) функції з кутами нахилу дотичних у відповідних точках і далі зі знаками (і значеннями) похідних в цих точках.

2. *Функція управління діяльністю учнів та студентів.* Математичне моделювання предметне і тому полегшує орієнтувальні, контрольні і комунікаційні дії. Орієнтувальною дією може бути, наприклад, побудова рисунка, відповідного до умови задачі, а також внесення в нього додаткових елементів.

Контролюючі дії спрямовані на знаходження помилок при порівнянні виконаного рисунка (схеми, графіка) з поміщеними в підручнику чи на з'ясування тих властивостей, які повинен зберегти об'єкт при тих чи інших перетвореннях.

Комунікаційні дії відповідають тій стадії реалізації функції управління діяльністю тих, хто навчається, яка відповідає дослідженню одержаних ними результатів. Виконуючи ці дії, студент з власного досвіду пояснює іншим чи хоч би самому собі за побудованою моделлю суть явища чи факту, що вивчається.

3. *Інтерпретаційна функція.* Відомо, що один і той же об'єкт можна виразити за допомогою різних моделей. Наприклад, коло можна задати за допомогою пари об'єктів (центр і радіус), рівнянням відносно осей координат, а також за допомогою рисунка або креслення. В одних випадках можна скористатися його аналітичним виразом, в інших — геометричною моделлю.

Вигляд кожної з цих моделей є його інтерпретацією; чим значиміший об'єкт, тим бажаніше дати більше його інтерпретацій, що розкривають пізнавальний образ з різних сторін.

Можна також говорити про естетичну функцію моделювання, а також про такі, як функція забезпечення цілеспрямованої уваги студентів, запам'ятовування і повторення ними навчального матеріалу тощо.

Використання різних функцій математичної моделі сприяє найбільш результативному мисленню суб'єкта, так як його увага легко і своєчасно переключається з моделі на одержану з її допомогою інформацію про об'єкт і навпаки. Таке переключення приводить до мінімуму відволікання розумових зусиль студентів від предмету їх діяльності.

Побудова математичних моделей вимагає багатьох вмінь, серед яких дуже важливі:

1. вміння виділяти істотні фактори, які визначають досліджуване явище (процес) і на їх основі утворити систему основних характеристик;
2. вміння знаходити системи суттєвих зв'язків між характеристиками і на цій основі вибирати математичний апарат для побудови моделі;
3. вміння виділяти фактори, що викликають похибку при побудові моделі і знаходження в зв'язку з цим системи необхідних обмежень, що накладаються на характеристики [138,218].

Особливе значення при цьому має рівень сформованості в суб'єктів навчання таких загальних розумових дій і прийомів розумової діяльності як аналіз (аналіз формулювання проблеми), синтез (співставлення умов з вимогами), аналіз через синтез (вміння переусвідомлювати елементи моделі), узагальнення, абстрагування, а також специфічних розумових дій: підведення під поняття, розгортання умов, встановлення істотних зв'язків [73,75,76,218].

Тому велику роль в успішній роботі щодо навчання математичного моделювання відіграє виявлення елементів математичного моделювання, його операційного складу. Опишемо операційний склад діяльності математичного моделювання. За теорією поетапного формування розумових дій етапи засвоєння знань розглядаються разом з етапами засвоєння діяльності [16,38,178,201,216,217,225]. Знання та вміння математичного моделювання формуються в процесі діяльності за спрощеною та розширеною схемами діяльності математичного моделювання. Розглянемо послідовність мислительних операцій, які відбуваються на кожному етапі математичного моделювання, на прикладі діяльності за розширеною схемою (див. додаток В).

Виконання I, II, III, IV, V, VI, VII етапів схеми вимагає активної мислительної діяльності. На етапі VI обчислення виконує комп'ютер, тому мислительна діяльність пасивна, спрямована на спостереження за роботою комп'ютера. На початкових стадіях навчання діяльності математичного моделювання важливе місце займає діяльність за спрощеною схемою. Наведемо розв'язування прикладної задачі за спрощеною схемою та проаналізуємо операційний склад мислення при цьому.

Задача 1.2. Трос канатної дороги між двома опорами моста має прогнуту форму (див. рис. 1.2). Відстань між опорами моста 400 м. Трос повинен провисати на 40 м. Під яким кутом слід прикріпити трос до опори?

Розв'язання. **I. Попередній аналіз об'єкта дослідження.** Розглядаючи уважно рисунок до задачі, слід встановити, що прогнута форма троса нагадує параболу, а опори моста — пряму. При цьому відбувається *аналіз, порівняння, абстрагування*. Аналізуючи зображення на рисунку, порівнюємо ввігнуту форму кривої з відомими нам абстрактними образами кривих: колом, еліпсом, гіперболою, параболою. З рисунка видно, що шуканий кут — це кут між параболою та прямою. При цьому відбувається *аналіз* — розчленовуються парабола і пряма та *синтез* — встановлюється, що вони утворюють кут.

II. Побудова математичної моделі. Відповідно до проведеного аналізу слід вважати, що парабола — це трос, а опора моста — це пряма (*узагальнення*).

Виберемо прямокутну декартову систему координат, як показано на рис. 1.2. При такому виборі початок координат співпадає з вершиною параболи. Тоді рівняння параболи в цій системі координат має канонічний вигляд: $y = ax^2$. Це співвідношення задає функціональну залежність.

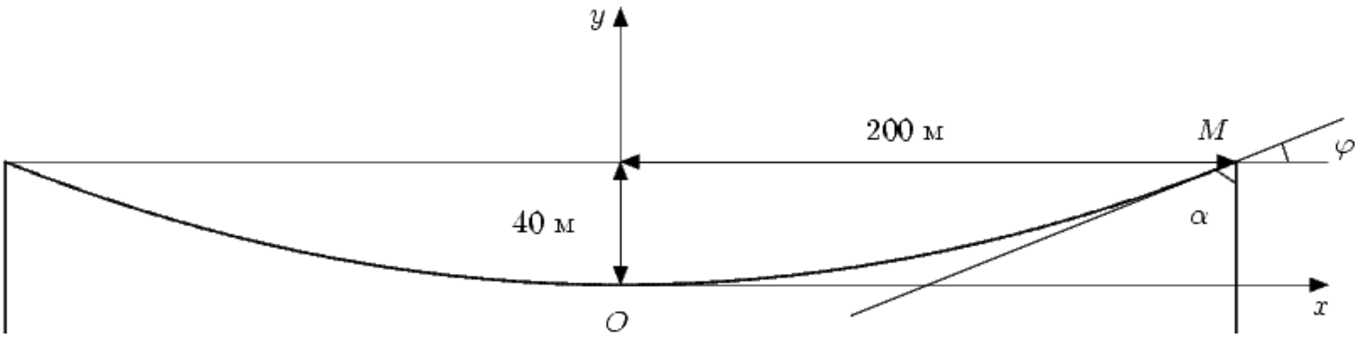


Рис. 1.2: Ілюстрація до задачі 1.2

Вибираючи систему координат, проводимо пошук того, в якій точці параболи найкраще розташувати її початок, як повинні бути направлені її осі і встановлюємо, що система координат повинна бути розташована так, як на рис. 1.2.

Пригадуючи канонічне рівняння параболи, проводимо *аналіз, порівняння* з іншими рівняннями, які знаємо, і *синтез* — вибираємо і записуємо рівняння. Нехай α — кут між прямою та параболою (*аналіз, синтез*). Кут між параболою та прямою будемо шукати, як кут між дотичною до параболи і прямою в їх спільній точці. Позначимо їх спільну точку *M* (перебираємо можливі варіанти пошуку кута, і встановлюємо, як треба шукати невідомий кут, пошук тут відбувається шляхом перевірки гіпотез), пригадуємо всі рівняння прямої, серед яких вибираємо необхідне нам рівняння — *синтез, абстрагування*:

1. невідомий кут слід шукати, як кут між прямими;
2. невідомий кут слід шукати, як кут між кривими;
3. невідомий кут слід шукати, як кут між кривою та прямою;

Вибір спільної точки — *порівняння та абстрагування*. (Порівнюючи точки *M* з іншими точками прямої (*співставлення*) та кривої, абстрагуємося від них і встановлюємо, що *M* — єдина спільна точка).

Нехай φ — кут між дотичною до параболи і додатним напрямком осі *Ox*. Тоді шуканий кут α доповнює кут φ до прямого кута: $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$.

Напишемо рівняння дотичної до кривої в точці *M*, вважаючи, що її координати у вибраній нами прямокутній декартовій системі координат $(x_0;y_0)$, це рівняння має вигляд $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$, де $y'(x_0)$ — похідна функції $y = ax^2$ в точці x_0.

Пригадуємо геометричний зміст похідної і встановлюємо, що це тангенс кута нахилу дотичної до кривої, утвореного з додатним напрямом осі *Ox*. При цьому відбувається *аналіз, синтез, узагальнення*.

Отже, $= y'(x_0) = 2ax_0$. Ця рівність і є математичною моделлю даної задачі. Математична постановка задачі така: *встановити вид функції, знайти її похідну в точці x_0, геометрично проінтерпретувати її, знайти кут α, що доповнює кут φ до прямого*.

При пред'явленні формулювання задачі відбувається *аналіз, порівняння, синтез та абстрагування*.

ІІІ. Реалізація математичної моделі математичними методами. Встановлюємо, що точка *M* у введеній прямокутній декартовій системі координат має координати *M*(200;40). При цьому відбувається *аналіз, порівняння* (*співставлення*), *абстрагування, узагальнення*. Аналізуючи, порівнюючи (співставляючи), встановлюємо, що точка *M* віддалена від осі *Oy* на 200 одиниць, а від осі *Ox* на 40, узагальнюємо, що координати точки (200;40), синтезуємо — записуємо координати точки *M*(200;40). Підставляємо координати точки в рівність $y'(x_0) = 2ax_0$, дістаємо $y'(200) = 2a \cdot 200$.

Знаходимо *a*, підставляючи в рівняння $y = ax^2$ координати точки *M*, дістаємо $a \cdot 200^2 = 40$, $a = 0{,}001$.

Розв’язуючи останнє рівняння, *аналізуємо*: співставляємо *a* з числовими величинами, виконуємо *синтез* — обчислюємо *a*.

Знаходимо $y' = 0{,}002 \cdot 200 = 0{,}4$ (*аналіз, синтез*), $= y' = 0{,}4$. Звідки $\varphi = \operatorname{arctg} 0{,}4$. Шуканий кут $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 0{,}4 \approx \frac{\pi}{2} - 22^\circ \approx 68^\circ$.

Знаходження кута — це послідовність операцій *аналіз, синтез, порівняння, абстрагування*.

IV. Аналіз одержаних результатів та перенесення їх на об’єкт, що досліджується. Кут між прямою і кривою дорівнює 68°. Отже, кут між тросом і опорою моста дорівнює 68°. __

Однією з вимог математичного моделювання є простота і доступність побудова ної моделі, тобто сформульована на першому етапі математична задача повинна розв’язуватися за допомогою засобів, якими володіють студенти на даному етапі навчання. Результат виконання цієї вимоги залежить від рівня сформованості в них логіко-математичних розумових дій, вміння виконувати умовиводи індуктивного і дедуктивного характеру, за аналогією, за інтуїцією з наступним обґрунтуванням або запереченням їх.

Побудова математичної моделі здійснюється логічним шляхом на основі глибо кого аналізу явища процесу, проблеми, ситуації, що досліджується і вимагає вміння описати їх на мові математики. Успіх у розв’язуванні даної проблеми залежить від рівня володіння студентами евристичними методами (прийомами) розв’язування нестандартних задач, до яких належать і прикладні задачі.

Взагалі математичне моделювання є евристичною діяльністю учнів та студентів. Тому основні принципи навчання математичного моделювання повністю співпадають з принципами організації евристичної діяльності, сформульованими в роботах О. І. Скафи [204–206].

Найефективнішим методом розв’язання прикладних задач є метод математичного моделювання. Практика показує, що дійовим засобом управління і самоуправління розумовою діяльністю учнів та студентів у процесі розв’язування цих задач методом математичного моделювання є ознайомлення їх з евристичними схемами діяльності математичного моделювання. Учнів старших класів та студентів перших та других курсів педагогічних університетів доцільно знайомити та організовувати їх навчаль ну діяльність за спрощеною схемою, а студентів 4-го та 5-го курсів за розширеною схемою (п. 1.1).

Ми розглянули характерні для математичного моделювання особливості мислення студентів і їх місце в діяльності математичного моделювання. Окрім них слід розглянути психолого-педагогічні особливості, що виявляються при переході рубежу між школою та університетом взагалі, особливо при навчанні математики і зокрема, математичного моделювання.

Характерною рисою морального розвитку студентства є посилення у цьому віці свідомих мотивів поведінки, цілеспрямованості, рішучості, наполегливості, самостійності, ініціативи, вміння володіти собою тощо [96].

Разом з тим, у 17–21-річному віці ще недостатньо розвинута здатність до регуляції своєї поведінки, чому сприяють і більша "свобода" у процесі навчання і послаблення контролю. Через недостатній життєвий досвід деякі студенти плутають ідеали з ілюзіями, романтику з екзотикою тощо.

Різка зміна багаторічного звичного робочого стереотипу інколи призводить до нервових вибухів і стресових ситуацій. На 1–2 курсах відбувається процес адаптації до університетського життя, самоаналіз, самооцінка шляхом порівняння ідеального "я" з реальним.

Усе це може викликати внутрішню невпевненість у собі, інколи супроводжуватися зовнішньою агресивністю, розв'язністю. Настрій часто змінюється від захопленості до скептицизму при оцінці університетського режиму, системи навчання, діяльності окремих викладачів. До 2-го курсу поглиблюються і розширюються міжособистісні стосунки студентів у групі та поза нею, виникає проблема створення сім'ї.

Створення родини під кінець навчання, як правило, не призводить до виходу зі студентського колективу, але проблем у студентської сім'ї теж багато. Вона потре бує порад і допомоги батьків та викладачів. Навчальна діяльність студентів є їхньою провідною діяльністю. Тому інтелектуальний розвиток і професійне становлення, хоч і не виключно, але в основному, відбувається в процесі навчальної діяльності.

Студенти відрізняються за інтелектуальними здібностями, типом мислення, тем пом просування у навчанні. Це необхідно враховувати. при організації навчання слід здійснювати диференціацію навчально-виховного процесу. Потрібна спеціальна діагностика рівня готовності студентів до вивчення основних навчальних дисциплін, своєчасний контроль за їхньою успішністю. У п. 2.3–2.5 наведені зразки контрольних завдань різного рівня складності.

Для підвищення рівня навчальної діяльності необхідно продовжувати формувати у студентів загальні розумові дії і прийоми розумової діяльності, підсилювати моти вацію навчання і використовувати традиційні та нові технології, сучасні інформаційні технології, які активізують, інтенсифікують навчально-пізнавальну діяльність [216].

Питання формування у студентів загальних розумових дій і прийомів розумової діяльності в процесі навчальної діяльності, пов'язаної з математичним моделюванням, висвітлено попереду.

Розглянемо проблему мотивації та врахування потреб особистості студента в навчальному процесі. Мотиваційно-особистий аспект пов'язаний з врахування позитивних навчальних мотивів і особистих якостей майбутнього вчителя, дійових цілей, оскільки мотиви і цілі є найважливішими детермінантами діяльності. Структура мотивів студента, яка формується в період навчання, стає стрижнем особистості майбутнього спеціаліста.

Серед мотивів навчальної діяльності студентів виділяють *внутрішні мотиви*: суспільна значущість навчання, професійні мотиви, пізнавальні мотиви, пов'язані з потребою у нових знаннях, і *зовнішні мотиви*, які орієнтуються на цінності, що лежать поза навчальною діяльністю. По- справжньому позитивно впливають на діяльність студентів внутрішні мотиви.

Психологи виділяють за впливом різних внутрішніх і зовнішніх мотивів чотири групи студентів:

1. студенти з вираженою професійною предметною мотивацією;
2. з вираженою професійною, але слабкою предметною мотивацією;
3. лише з предметною;
4. з відсутністю і предметної, і професійної мотивації.

Під час спеціального дослідження ролі мотивів серед відрахованих студентів було виявлено 94,7 % студентів четвертої групи і лише 6,9 % першої [216].

Механізмом навчальної мотивації є формування цілісної структури цілей і завдань навчальної діяльності. Звідси випливає важливість своєчасної і систематичної постановки викладачами цілей навчання, які студенти мають прийняти, і спрямувати свою діяльність на досягнення поставлених викладачем і самостійно цілей навчання. Так, оволодіння методом математичного моделювання — одна з цілей, яку ставить викладач, коли формулює основні цілі певного розділу математики, що починає вивчатися студентами. При цьому важливе значення має правильна організація педагогічної взаємодії між викладачами і студентами відповідно до принципів діалогізації, проблематизації, персоналізації, індивідуалізації і диференціації навчання [10,28,30,86,89,136,178,201,216,217].

Важливу роль для ефективної організації навчального процесу відіграє ак тивізація навчально-пізнавальної діяльності студентів, що розуміється як цілеспрямована діяльність викладача, спрямована на розробку і використання такого змісту, методів, прийомів, форм і засобів навчання, які сприяють підвищенню пізнавального інтересу, активності, творчої самостійності студентів у засвоєнні знань, формуванні навичок і вмінь, застосуванні їх на практиці. Це напрямок діяльності студентів на пошук і вдосконалення нових знань.

До психолого-педагогічних умов активізації пізнавальної діяльності студентів при навчанні математичного моделювання належать:

- забезпечення єдності освітньої, розвиваючої і виховної цілей процесу навчання;
- педагогічно правильне використання принципів дидактики вищої школи;
- забезпечення емоційності навчання і створення сприятливої атмосфери взаємин всіх учасників навчального процесу;
- динамічність, різноманітність методів, прийомів, форм і засобів викладання і учіння, їх спрямованість на розвиток активної дослідницької діяльності студентів, пріоритетність методів і форм активного навчання;
- орієнтація студентів на систематичну самостійну роботу, забезпечення регулярності і ефективності контролю і оцінювання успішності студентів;
- комплексне, педагогічно доцільне використання технічних засобів навчання та інформаційно-комунікаційних технологій;

- використання системи психологічних і педагогічних стимуляторів активної навчальної діяльності.

Серед методів навчання, що використовуються у вищій школі, є такі, які спрямо вані на засвоєння знань в умовах репродуктивної діяльності і такі, що викликають продуктивну діяльність і активізують навчально-пізнавальну діяльність. Їх поділяють на методи викладання і методи учіння: лекція; розповідь; показ, демонстрація; пояснення; бесіда [10,16,18,19,24,26,77,203,216,217].

Вдале навчання математичного моделювання можна забезпечити в рамках кожного методу. Викладач під час лекції може будувати сам математичні моделі, активізуючи цим увагу учнів і мотивуючи практичну доцільність теоретичного ма теріалу, що вивчається. Особливо це проявляться в процесі вивчення курсу “Диференціальні рівняння”, окремих розділів “Теорії множин”, “Теорії ймовірностей” і “Математичного аналізу”.

Розповідь дуже часто може носити локальний характер і бути присвяченою історії і розвитку деякої практичної проблеми, представленої ієрархічним ланцюгом математичних моделей, які ускладнювалися в процесі розвитку математичної науки. Прикладом може бути розповідь про визначення траєкторії польоту снаряда чи тіла, кинутого під кутом до горизонту. Таку розповідь пропонують студентам при вивченні теми “Обвідна сімейства плоских кривих” в диференціальній геометрії. Вона вдало сприяє активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів. Лекція і розповідь можуть бути побудовані на основі дослідження вже відомих математичних моделей, якими є: різні види рівнянь, графіки, зображення кривих та поверхонь і виділення тих суттєвих ознак, які необхідні для розуміння нових властивостей об’єктів, що вивчається.

Пояснення при вивченні питань математичного моделювання найчастіше вико ристовується при характеристиці певних станів, розкритті суттєвих і несуттєвих властивостей об’єкту, що моделюється. Так, наприклад, при побудові зображень геометричних тіл, що є їх геометричними (а значить, і математичними) моделями. Суттєвими є відношення довжин ребер, а несуттєвими дійсні розміри тіла, матеріал, з якого воно виготовлено і т. д. Показ, демонстрація сприяє активному створенню наочного образу, формуванню конкретних уявлень про предмети та явища. Широко використовується при навчанні математичного моделювання під час вивчення гео метричних курсів.

Бесіда також активізує мислення студентів і процес пізнання. Особливо зручним є цей метод при проведенні спецкурсів з математичного моделювання, коли шука ється найкращий шлях побудови математичної моделі задачі, що розглядається. При цьому активізуються і попередні знання, і чуттєвий досвід, і творчі здібності студентів.

До методів учіння, як способів пізнавальної діяльності студентів, належать: спостереження; експеримент; слухання (осмислення); вправи (дослідження); моделювання; вивчення підручників, посібників, першоджерел, наукової літератури [10,22,129,212,216].

Оскільки математичне моделювання передбачає творчу діяльність студентів, то особливо важливим для такої діяльності є такі методи:

- експеримент (особливо важливий обчислювальний експеримент);

- вправи, які можуть бути тренувального і дослідницького характеру.

Математичне моделювання є окремим видом моделювання і, як спосіб пізнавальної діяльності, має всі риси йому притаманні.

Всім відомо, що рівень підготовки студентів навіть в одній групі неоднаковий. Це зумовлюється індивідуальними психологічними особливостями індивіда, а також рівнем його попередньої математичної підготовки і потребує пред'явлення навчаль них завдань різного рівня складності [17,178,201,216,217].

За рівнем попередньої підготовки студентів в академічній групі можна умовно поділити на чотири підгрупи, що відповідають тому чи іншому рівню засвоєння знань (навченості) і научуваності. Сучасна дидактика розрізняє чотири рівні засво єння знань: 1) знання-знайомства; 2) знання-копії; 3) знання- вміння; 4) знання-трансформації [26].

У процесі навчання математичного моделювання перший рівень передбачає загальні уявлення про зміст процесів та явищ. На другому рівні студенти розрізняють внутрішні закономірності впливу на явища та процеси, володіють системою прийомів математичних перетворень та засобів розв'язання задач. На третьому рівні студенти можуть продемонструвати цю систему прийомів та засобів на практиці, тобто самостійно побудувати математичну модель. Четвертий рівень означає можливість творчої діяльності студента, він не лише може побудувати математичну модель, а й оцінити її точність, дослідити її і вибрати оптимальний метод побудови математичної моделі для даної конкретної ситуації.

Наведені вище фактори зумовлюють необхідність диференціації при навчанні математичного моделювання, яка передбачає:

- необхідність додаткової консультаційної навчальної співпраці викладача зі студентами першої та другої груп;
- розвитку творчих можливостей студентів третьої групи шляхом додаткових творчих домашніх завдань;
- наукова орієнтація студентів четвертої групи, об'єднання їх в наукові групи з вирішення проблем математичного моделювання деяких практичних задач, підготовка виступів на конференціях за результатами досліджень, участь їх у студентському науково-творчому товаристві (СНТ).

Таким чином, ми розглянули основні психолого-педагогічні передумови навчан ня студентів — майбутніх учителів математики — математичного моделювання. Слід підкреслити, що дотримання їх може внести суттєві зміни в навчально-виховний процес в педагогічному університеті та школі і гарантувати успішне фор мування вмінь математичного моделювання як в університеті, так і в школі.

1.3.2 Методичні вимоги.

Методична система навчання студентів математичного моделювання — складна багатокомпонентна структура з рядом зв'язків і відношень між її елементами. Така система є підсистемою в системі навчання математики і методики навчання математики майбутніх учителів. На сьогоднішній день, на жаль, немає літератури, в якій би в цілому була досліджена та описана система навчання математичного моделювання майбутніх учителів математики. А потреба в такій літературі існує. Це необхідно, перш за все, для студентів, майбутніх магістрів, аспірантів, викладачів-початківців. Наукова педагогічна думка викладачів педагогічних університетів спрямована на створення систем навчання окремих математичних дисциплін. На нашу думку, досить серйозними є роботи з методики навчання студентів математичному аналізу М. І. Шкіля [250–254,257], Г. О. Михаліна [131], Т. В. Колесник [82–90]; з методики навчання геометрії О. Ф. Семеновича, Т. В. Ломаєвої [197–199], О. П. Сергунової [200]; з методики навчання алгебри С. С. Левіщенка [1,2,32]; з методики навчання теорії ймовірностей, методів обчислень, інформатики М. І. Жалдака [57–63], Н. В. Морзе [137], Ю. С. Рамського [64,193,194], методики навчання математики Г. П. Бевза [22,24], З. І. Слєпкань [210–216]. Важливими є роботи із загальної методології змісту вищої математичної освіти М. В. Працьовитого, В. М. Усенка [184,185].

Наше дисертаційне дослідження спрямоване на створення системи формування знань і вмінь математичного моделювання у майбутніх учителів математики в процесі навчання університетських курсів математики і методики навчання математики. Система формування знань і вмінь математичного моделювання включає в себе:

1. Формулювання цілей і завдань формування знань і вмінь математичного моделювання.
2. Визначення змісту навчального матеріалу, що стосується математичного моделювання, та його структурування.
3. Відбір методів та прийомів навчання, які сприяють формуванню знань і вмінь математичного моделювання.
4. Добір доцільних організаційних форм навчання математичного моделювання.
5. Використання засобів формування знань і вмінь математичного моделювання.

Розкриємо детальніше зміст кожного компонента системи. Цілі, завдання і зміст навчання математичного моделювання розкриваються в п. 1.2.

Загальні методи навчання, що широко практикуються у вищій педагогічній школі при вивченні різних математичних дисциплін можуть бути тими методами, що спрямовані на формування вмінь математичного моделювання у майбутніх учителів математики. Охарактеризуємо ці методи. Взагалі, різні автори по-різному трактують поняття “метод навчання”. М. М. Скаткін під методом навчання розуміє “способи роботи вчителя і учнів, за допомогою яких досягається оволодіння знаннями, навичками і вміннями, формується світогляд учня, розвиваються його здібності” [169, с. 813]. Н. Д. Нікандров [142], А. М. Алексюк [5] визначають відповідно метод навчання як спосіб управління, спосіб організації і управління з боку вчителя (викладача) пізнавальною діяльністю учнів (студентів). Наша думка співпадає з думкою З. І. Слєпкань, яка стверджує, що “під методом навчання у вищій школі (у практичному аспекті) слід розуміти способи роботи викладача і студентів, за допомогою яких досягається оволодіння знаннями, навичками і вміннями, формується світогляд студентів, розвиваються їхні здібності” [216].

У педагогіці існує різна класифікація методів навчання залежно від вибору основи класифікації, а саме: за джерелом здобування знань (словесні, наочні, практичні), за способами організації навчальної діяльності учнів (студентів) (методи здобування нових знань, методи формування навичок і вмінь та застосування знань на практиці, методи перевірки й оцінювання знань, навичок і вмінь), за характером навчально-пізнавальної діяльності учнів (І. Я. Лернер і М. М. Скаткін) [203]. В останню класифікацію входять:

- пояснювально-ілюстративний (розповідь, лекція, пояснення, робота з підручником, демонстрації та ін.);
- репродуктивний (відтворення знань і способів дій, діяльність за алгоритмом, програмою);
- проблемний виклад;
- частково-пошуковий або евристична бесіда;
- дослідницький метод.

При класифікації методів навчання у вищій школі, як і в загальноосвітній, важливими є два положення.

По-перше, навчання — двосторонній процес активної взаємодії викладача і сту дента. При цьому завдання викладача — доступний виклад змісту знань, організація самостійного пошуку знань студентом. Завдання студента — засвоєння наукових знань, формування навичок і вмінь застосування знань при розв'язуванні різноманітних задач, у тому числі прикладного змісту, оволодіння методами самостійного пошуку знань. Оскільки в цьому процесі викладач і студент користуються різними способами досягнення цілей і завдань, доцільно розділити методи навчання на методи викладання і методи учіння.

По-друге, при трактуванні методів учіння доцільно використовувати принципи побудови методів наукового пізнання, діалектико-матеріалістичний метод, який розкриває загальні методологічні принципи пізнання, загальні методи і розумові дії (експеримент, спостереження, моделювання, аналіз, синтез, порівняння, абстрагування, узагальнення, класифікація, систематизація) і окремі методи, які використовуються лише в науці. Наприклад, у математиці — метод математичної індукції, векторний метод, координатний метод, методи диференціального та інтегрального числення.

Методи викладання — це способи (система прийомів), які використовуються ви кладачем з метою ефективного викладу знань, формування навичок і вмінь, світогляду, розвитку здібностей студентів, способи організації та управління пізнавальною діяльністю студентів. Можна виділити такі методи викладання: лекція , розповідь, показ, демонстрація, пояснення, бесіда [24,77,118,129,216]. Покажемо, що формування знань і вмінь математичного моделювання пов'язане з використанням названих вище методів.

Університетська лекція багатьма дидактами вищої школи розглядається і як форма, і як метод навчання [17,82,216]. Розглянемо лекцію як метод навчання математичного моделювання.

У педагогічній літературі лекція означається як "систематичний послідовний виклад навчального матеріалу, будь-якого питання, теми, розділу, предмету" [45, с. 189]. Лекції можуть бути цілком присвячені питанням математичного моделювання . Це одна з вступних лекцій будь-якого з математичних курсів (найдоцільніше вибрати курс математичного аналізу), на якій студентів знайомлять з методом математичного моделювання як методом наукового дослідження і навчального пізнання. Викладач знайомить студентів з різними математичними моделями, якими можуть бути, наприклад, рівняння, нерівності, функції та їх похідні, геометричні образи. Ці математичні моделі побудовані на основі знань, одержаних у шкільному курсі математики. Приклади таких моделей представлені в розділі 2.

Далі лекцію можна продовжити пояснювально-ілюстративним методом, ввести означення математичної моделі, познайомити студентів з евристичними схемами діяльності математичного моделювання, дослідити запропоновані на початку лекції математичні моделі за цими схемами.

Вступну лекцію, присвячену математичному моделюванню, можна прочитати як проблемну лекцію. На такій лекції слід комбінувати проблемний виклад з частково-пошуковим методом (евристична бесіда). Розглядаючи запропоновані викладачем приклади практичних ситуацій (математичними моделями яких є образи, відомі студентам зі шкільного курсу математики), студенти самі складають рівняння, нерівності, описують функціональні залежності, що є математичними моделями, викладач аналізує ситуацію, ставить студентам питання, підводить їх до створення математичної моделі. Аналізуючи створені математичні моделі, студенти виділяють суттєві та несуттєві властивості поняття “математична модель” і роблять спроби да ти самостійно означення цього поняття. Викладач уточнює і остаточно формулює означення математичної моделі. Далі студенти намагаються самостійно виділити етапи математичного моделювання, дати їм назву. Викладач уточнює назву та по слідовність етапів математичного моделювання і підкреслює, що послідовність етапів складає евристичну схему діяльності математичного моделювання. Викладач наводить приклади задач, які студенти розв’язують разом з викладачем, відпрацьовуючи кожний етап схеми для того, щоб студентам зрозумілою була логічна послідовність дій, що виконуються на кожному етапі.

Такі комбіновані проблемні лекції слід проводити і на спецкурсах з математично го моделювання на старших курсах педагогічних університетів. Приклади на цих лекціях слід наводити такі, щоб базою для побудови математичних моделей були знання та вміння, одержані студентами під час вивчення різних математичних дис циплін. Як показує досвід проведення спецкурсів (спецкурс представлений у розділі 2) з математичного моделювання в НПУ імені М. П. Драгоманова, вони сприяють також повноцінному засвоєнню та застосуванню набутих знань, навичок та вмінь з математичних дисциплін і сприяють успішній підготовці до державного екзамену на звання бакалавра.

Кількість лекцій, цілком присвячених математичному моделюванню, при ви вченні математичних дисциплін значно обмежена. Але, наприклад, прочитавши в межах однієї навчальної дисципліни одну-дві лекції з математичного моделювання, викладач може вести змістовну лінію математичного моделювання упродовж всього курсу. Окрім того, інші викладачі, які паралельно читають математичні курси, теж можуть вести цю змістовну лінію, не роблячи ніяких вступних бесід чи розповідей про математичне моделювання. Вступні лекції з математичного моделювання читаються, як правило, на 1-му курсі в 1-му семестрі одним з викладачів, що ведуть математичний аналіз, лінійну алгебру чи аналітичну геометрію. Названі дисципліни є основними математичними дисциплінами, які вивчаються за навчальним планом майбутніми вчителями в 1-му семестрі. Викладачі домовляються, хто ці лекції читає . Але ідеї, закладені у вступних лекціях, повинні бути присутні при вивченні кожної з перерахованих дисциплін. Зокрема, евристична схема математичного моде лювання (як спрощена, так і розширена) повинна бути схвалена всіма викладачами і однаковою для задач з різним практичним змістом та їх модельною реалізацією. З цією метою необхідне проведення спеціального спільного засідання кафедр, при свяченого впровадженню математичного моделювання в педагогічний процес.

Вступні лекції (проблемного викладу) — це лише перший крок у навчанні математичного моделювання. Ідеї математичного моделювання розвиваються викладачами-лекторами в процесі читання кожного окремого курсу. Дуже зручно використовувати практичні проблеми, які привели до виникнення тих чи інших розділів математики, як засіб мотивації та стимулювання пізнавальної активності студентів. Поставивши практичну проблему, можна розв'язувати її, поступово будуючи математичну модель на основі теоретичного матеріалу, що розглядається на цій лекції.

Вивчаючи ту чи іншу тему, завжди слід звертати увагу на її практичну значущість, застосування до розв'язування задач прикладного змісту. Слід наводити приклади такого застосування. Розв'язувати задачі необхідно за евристичною схе мою діяльності математичного моделювання (див. приклади у розділі 2).

Наступним методом навчання математичного моделювання є пояснювально-ілюстративний метод. Пояснення використовується на практичних заняттях. На практичних заняттях, де студенти розв'язують велику кількість задач прикладного змісту, мають змогу працювати як під керівництвом викладача, так і самостійно, формуються вміння математичного моделювання. На практичних заняттях викладач детально пояснює, розкриває суть кожного етапу схеми математичного моделюван ня стосовно до задач різних типів, задач з різних галузей людської життєдіяльності. Лише розв'язавши достатню кількість задач (чого немає можливості зробити на лекції), студенти можуть переконатися в універсальності математичних моделей (наприклад, одним і тим же диференціальним рівнянням описуються різні за своєю природою процеси і явища), використовувати аналогії при побудові математичних моделей.

На лекційних, практичних, семінарських заняттях широко можна використати і такий метод як бесіда. Особливо ефективно використати цей метод можна, коли в студентів уже є початкові знання з математичного моделювання, вони ознайомлені з евристичною схемою діяльності математичного моделювання.

Показ-демонстрацію можна застосовувати як на лекціях, так і на практичних заняттях. При навчанні математичного моделювання особливо цей метод застосову ють при формуванні вмінь працювати за розширеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання. Розв'язуючи задачі за цією схемою, викла дач обов'язково повинен продемонструвати студентам на комп'ютері проведення таких етапів як "Створення програм, що "перекладають" модель та алгоритм на до ступну комп'ютерну мову", "Проведення обчислювального експерименту". Показ-демонстрація на комп'ютері найбільше використовується при навчанні математичного моделювання. Важливою умовою цього методу є поєднання показу, демонстрації зі словом викладача.

До методів навчання математичного моделювання слід віднести і методи учіння, зокрема навчального пізнання: слухання-усвідомлення; спостереження; експеримент ; вивчення підручників, навчальних посібників, першоджерел та інших матеріалів; моделювання [10,17,19,24,178,201,203,212,216,217].

Особливо важливими при формуванні вмінь математичного моделювання є обчи слювальний експеримент як вид експерименту та моделювання. Вміння проводити обчислювальний експеримент є складовою вмінь математичного моделювання. У розширену евристичну схему діяльності математичного моделювання входить етап "Проведення обчислювального експерименту". Обчислювальний експеримент як метод учіння полягає в тому, що студенти проводять ряд обчислень за певними формулами при різних вихідних даних (особливого значення немає, вручну чи за до помогою ЕОМ, хоч, на нашу думку, за допомогою ЕОМ детальніше і краще можна зробити обчислення). Це допомагає студентам вивчити кількісні та якісні характе ристики об'єкта чи явища, що досліджується, зробити необхідні висновки про його поведінку в різних умовах, дослідити його зміну при впливі різних факторів. Проводити обчислювальний експеримент студенти вчаться, вивчаючи курс "Методи обчислень", та на спецкурсах з математичного моделювання.

Вивчаючи підручники, навчальні посібники, присвячені проблемам математич ного моделювання, студенти самостійно можуть створити для себе банк моделей, за аналогією з якими зможуть створювати математичні моделі практичних ситуацій, які необхідно розв'язати в процесі певної наукової діяльності (написання курсових, кваліфікаційних робіт).

Щодо методу моделювання, то слід підкреслити, що математичне моделювання є видом моделювання і використовується і як засіб навчання, і як метод навчального пізнання. Про це детальніше описано в п. 1.1.

Організаційні форми навчання математичного моделювання наступні: лекція, практичні та семінарські заняття, лабораторні роботи, міжпредметні гуртки-факультативи, науково-дослідницька робота в гуртках та проблемних групах [17,108 ,182,216]. Зупинимося детально на ролі та місці кожної з цих організаційних форм у процесі навчання математичного моделювання майбутніх учителів математики.

Вміння математичного моделювання студенти набувають на практичних заняттях . Практичні заняття є основною формою навчання математичного моделювання та формування відповідних вмінь. Практичні заняття з математичних дисциплін слід проводити так, щоб на кожному з них студенти розв'язували хоч по кілька задач прикладного змісту. Звичайно, коли розглядається навчальний матеріал досить високого рівня абстрактності (наприклад, комплексний аналіз), то дуже важко вдало підібрати такі задачі. На нашу думку, вдалий підбір задач прикладного змісту з багатьох тем вищої математики подано в посібниках [29,39,53,58,69,125–127].

У процесі розв'язування прикладних задач студенти оволодівають евристичними схемами діяльності математичного моделювання. Саме на практичних заняттях необхідно впроваджувати диференціацію в навчанні математичного моделювання. Диференціація забезпечується пропонуванням завдань на трьох рівнях складності. *І рівень* (*задовільний*) передбачає побудову математичної моделі та її дослідження математичними методами, що розглядаються на практичному занятті, задачі, умова якої містить підказку до побудови математичної моделі. *ІІ рівень* (*достатній*) — студентам пропонують задачі, умови яких підказки не містять, але, аналізуючи які та пов'язуючи з темою практичного заняття, студенти можуть побудувати математичну модель. *ІІІ рівень* (*високий*) — творчі завдання, побудувати математичну модель в яких можна, знаючи та аналізуючи весь вивчений матеріал з даної дисципліни, а дуже часто і з дисциплін, що лежать в основі явища чи процесу, які розглядаються в задачі, наприклад, фізики, економіки, біології.

Наведемо приклади таких задач, які можна задавати на І, ІІ та ІІІ рівнях складності при вивченні в аналітичній геометрії теми “Криві другого порядку на площині”.

І рівень: “Краї декоративних газонів мають форму частини гіперболи $3x^2 - y^2 = 3$. Обчислити гострий кут між краями алей, які прокладені вздовж асимптот гіперболи. ” [39]

ІІ рівень: “Сталевий трос натягнуто на однаковій висоті між двома точками, віддаль між якими 20 м. Провисання на віддалі 2 м по горизонталі від точок закріплення дорівнює 14,4 см. Визначити стрілу провисання троса, дослідивши різні форми провисання.” [79]

ІІІ рівень: Хлібний елеватор знаходиться біля залізничної станції *A*. Хліб на цей елеватор можна доставити або прямо на вантажівках, або спочатку на вантажівках до станції *B*, а потім залізницею — до станції *A*. Знайти, для яких сіл вигідний перший спосіб, а для яких — другий. [51]

До семінарських занять студенти готуються вдома, а темами таких занять можуть бути наступні “Пряма лінія як математична модель деяких фізичних та економічних об’єктів”, “Застосування похідної до розв’язування задач прикладного змісту” і т. д. На семінарських заняттях студенти доповідають про загальновідомі класичні математичні моделі, пов’язані з даною темою, та пропонують розв’язати задачі, математичною моделлю яких є розглянута ними в доповіді математична модель.

Іще однією, досить ефективною, формою роботи є міжпредметні гуртки з питань математичного моделювання. На цих заняттях можна обговорювати відомі класичні задачі давнини, які мають практичний зміст, актуальний і в наш час. Так, наприклад, на першому курсі після вивчення тем “Пряма на площині”, “Криві другого порядку” (аналітична геометрія), “Похідна функції однієї змінної” (математичний аналіз) доцільно провести заняття гуртка на тему “Задача Герона — одна з найдавніших екстремальних задач”. На занятті слід розглянути різні методи розв’язання задачі Ге рона, яка формулюється так: “Дано дві точки *A* та *B* по одну сторону від прямої *l*. Знайти на прямій *l* таку точку *D*, щоб сума відстаней від *A* до *D* і від *B* до *D* була найменшою” та вказати ті практичні задачі, математичною моделлю яких є задача Герона. Це можуть бути наступні задачі.

Задача 1.3. Нехай маємо три міста *A*, *B*, *C*. Вказати таке місце *D*, щоб сумарна довжина прямолінійних ділянок шосе, що з’єднує *D* з *A*, *B* і *C* була мінімальною.

Задача 1.4. Де на прямолінійній ділянці залізниці слід побудувати залізничну платформу *D*, щоб прямолінійні ділянки шосе, що з’єднують її з містами *A* та *B*, мали найменшу сумарну довжину?

Задача 1.5. Автомобіль, який рухається зі сталою швидкістю *v*, повинен проїхати з міста *A* в місто *B*, заїхавши при цьому на заправку *C*, розташовану на прямолінійній ділянці дороги. Як водієві вибрати шлях, що вимагає мінімальних затрат часу?

Студентам слід запропонувати творчі завдання на складання текстових задач з різним практичним змістом, математичною моделлю яких є задача Герона. На занятті ці задачі можна обговорити, а також порівняти математичні моделі, побудо вані засобами аналітичної геометрії (використовуючи геометричні перетворення та метод координат) та засобами математичного аналізу (досліджуючи на екстремум деяку функцію однієї змінної, наприклад, у третій задачі час можна представити як функцію від відстані).

Найважчим етапом навчання математичного моделювання є вміння провести обчислювальний експеримент. Початкові навички і вміння організації обчислювального експерименту слід виробляти у студентів на простих тренувальних вправах. Причому такі вправи можуть носити як детермінований характер (порахувати амплітуду коливань механічної системи), так і статистичний (обробка результатів деякого опитування чи анкетування). Найкращою формою роботи зі студентами для формування вмінь проводити обчислювальний експеримент як складової вмінь математичного моделювання є лабораторні роботи. Такі лабораторні роботи слід проводити обов'язково з комп'ютерною підтримкою, наприклад, під час вивчення спецкурсу "Математичне моделювання".

Важливу роль у навчанні математичного моделювання відіграють засоби навчання. У сучасній педагогічній науці все частіше зустрічаються визначення засобів навчання не у вузькому їх розумінні (матеріальні засоби — інструменти), а більш широко. Так, П. І. Підкатистий розуміє під засобом навчання матеріальний чи ідеальний об'єкт, який використовується учителем чи учнем для засвоєння знань [168]. С. А. Смирнов поділяє засоби навчання на:

- матеріальні (підручники, навчальні посібники, дидактичні матеріали, книги-першоджерела, тестовий матеріал, засоби наочності, технічні засоби навчання, лабораторне обладнання);
- ідеальні (усне й письмове мовлення, математичний апарат, навчальні комп'ютерні програми, організуюча і координуюча діяльність викладача, загальна культура викладача, методи навчання й форми організації навчальної діяльності студентів тощо) [167, с. 253].

При навчанні математичного моделювання слід ефективно поєднувати як матеріальні, так і ідеальні засоби навчання. Наведемо приклади використання як матеріальних, так і ідеальних засобів навчання математичного моделювання.

Так, вводячи поняття "математична модель", "математичне моделювання" на одній із вступних лекцій, демонструємо таблицю "Види математичних моделей" за допомогою кодоскопа-графопроектора (матеріальний засіб навчання). За допомогою цього технічного засобу слід також знайомити студентів зі спрощеною та розширеною евристичними схемами діяльності математичного моделювання. Ці ж схеми можна подавати і за допомогою навчальних таблиць.

При навчанні математичного моделювання важливу роль відіграють підручники та посібники, науково-популярна та методична література. Ці засоби навчання спри яють ефективній організації самостійної роботи студентів, особливо при вивченні спецкурсу "Математичне моделювання", написанні курсових та кваліфікаційних робіт.

Особливе, головне місце серед матеріальних засобів навчання займають персональні комп'ютери. Без використання комп'ютерів та сучасного педагогічного програмного забезпечення навчання математичного моделювання у педагогічному університеті не є можливим. П'ятий та шостий етапи розширеної евристичної схеми діяльності математичного моделювання виконуються тільки за допомогою засобів інформаційно-комунікаційних технологій. Це є яскравий приклад використання ма теріальних (персональний комп’ютер) та ідеальних (пакети прикладних програм, педагогічні засоби GRAN, Mathematica, Derive) засобів. Найкраще адаптованими до умов підготовки вчителя математики є педагогічні програмні засоби GRAN1, GRAN -2D, GRAN-3D, створені під керівництвом академіка М. І. Жалдака вченими Ю. В. Горошком та О. В. Вітюком. Методика використання цих засобів детально описана в літературних джерелах [59–61,63,189].

Серед ідеальних засобів важливе місце займають організуюча і координуюча діяльність викладача, методи організації і форми навчальної діяльності студентів [16 ,216], а також загальна, а особливо математична культура викладачів, компоненти якої описані в роботах Г. О. Михаліна [130,131].

Для успішного формування знань та вмінь математичного моделювання у майбутніх учителів математики в межах створеної нами методичної системи необхідно:

- забезпечити усвідомлення і прийняття студентами цілей навчання математичного моделювання та необхідності набути вмінь навчати цьому методу учнів;
- виділити зміст і місце теоретичних знань і практичних вмінь з математичного моделювання в кожній математичній дисципліні та методиці навчання математики;
- здійснити відбір теоретичного матеріалу, що стосується математичного моделювання на кожному етапі навчання (в різних математичних дисциплінах , спецкурсі “Математичне моделювання”, методиці навчання математики);
- розробити систему задач для кожного навчального предмету відповідно до змісту теоретичного навчального матеріалу, що вивчається, та трьох рівнів на вчальних можливостей студентів: задовільного, достатнього та високого, до складу якої повинні входити задачі прикладного та міжпредметного змісту;
- розробити зміст спецкурсу, який пропонується студентам для вивчення на завершальному етапі навчання математичного моделювання в педагогічному університеті. Цей спецкурс передбачає систематизацію, узагальнення розши рення та поглиблення знань і вмінь з математичного моделювання, одержаних шляхом попереднього навчання.

Висновки до розділу 1

1. На сучасному етапі розвитку педагогічної освіти назріла необхідність у свідомому оволодінні майбутніми учителями математики методом математичного моделювання як методом наукового дослідження і навчального пізнання.
2. Оволодіння методом математичного моделювання як методом наукового дослідження передбачає формування знань та вмінь математичного моделювання у студентів за розширеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання, а оволодіння методом математичного моделювання як навчального пізнання — за спрощеною схемою.
3. Аналіз галузевих стандартів, навчальних планів, навчальних програм з фундаментальних математичних дисциплін та методики навчання математики показав місце та зміст навчання математичного моделювання у процесі

навчання майбутніх учителів математики.

4. При навчанні математичного моделювання найкраще використовувати діяльнісний підхід. Питання добору ефективних методів, організаційних форм та засобів навчання доцільно вирішувати з врахуванням основних положень теорії поетапного формування розумових дій.
5. Дослідження психолого-педагогічних передумов навчання математичного моделювання майбутніх учителів математики показало, що навчати математич ного моделювання слід, враховуючи їх вікові особливості, загальний рівень розвитку, диференціацію навчання відповідно до рівнів научуваності та на вченості. Це забезпечить необхідній рівень мотивації та активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів при навчанні математичного моделювання.
6. Науково обґрунтована система формування вмінь математичного моделювання у майбутніх учителів математики повинна включати в себе:
   - на основі сформульованих цілей і завдань, визначення змісту знань та вмінь, що стосуються математичного моделювання, та його структурування;
   - відбір методів та прийомів навчання, які сприяють формуванню знань і вмінь математичного моделювання;
   - добір доцільних форм навчання математичного моделювання;
   - використання засобів формування знань і вмінь математичного моделювання;
   - контроль і самоконтроль за рівнем сформованості знань і вмінь математичного моделювання.
7. Потрібна координуюча діяльність всіх математичних кафедр в прийнятті єди ної стратегії навчання студентів математичного моделювання (спільні засідання кафедр щодо координації робочих програм в темах, які сприяють формуванню знань і вмінь математичного моделювання, прийняття єдиного підходу щодо змісту і методики такої роботи).

Розділ 2
Методика навчання математичного моделювання майбутніх учителів математики

2.1 Планування роботи викладача та структурування змісту навчального матеріалу

Планування роботи викладача педагогічного університету та вчителя математики загальноосвітньої школи з математичного моделювання — процес різносторонній, який відображається в різного виду планах. Якщо розглядати процес навчання математичного моделювання майбутніх учителів математики, то слід відмітити, що це процес цілісний. Він включає в себе три складові: 1) навчання учнів математичного моделювання в школі; 2) навчання студентів математичного моделювання у педагогічному університеті; 3) навчання студентів використанню математичного моделювання у шкільному курсі математики. Ці складові взаємопов'язані між собою наступністю і строгою логічною послідовністю.

Пропедевтика навчання математичного моделювання проводиться в 5–6 класах при розв'язанні текстових задач арифметичними методами. Саме тут учні вчаться будувати та досліджувати числові моделі. Методика пропедевтичного навчання математичного моделювання в 5–6 класах досить детально описана в дисертаційному дослідженні С. М. Лук'янової [120].

Систематичне навчання учнів математичного моделювання в школі слід розпочати у середніх класах, а саме в 7 класі, де передбачене ознайомлення учнів з методом рівнянь розв'язування текстових задач. Тому загальне планування роботи вчителя з набуття знань та формування навичок і вмінь математичного моделювання слід розпочати саме у 7 класі.

У 7 класі учні починають вчити окремі курси: алгебри та геометрії. У діючій зараз програмі для загальноосвітніх навчальних закладів [186] так формулюється мета вивчення алгебри в 7–9 класах: "удосконалення обчислювальних навичок, формування в учнів навичок виконання тотожних перетворень різних видів виразів, розв'язування рівнянь і нерівностей, *засвоєння апарату рівнянь і нерівностей як основного засобу математичного моделювання прикладних задач*, формування поняття функції і вивчення властивостей функцій, зазначених у програмі, застосування одержаних знань і вмінь до вивчення суміжних предметів (фізики, хімії, основ інформатики та обчислювальної техніки тощо)" [186, с. 8].

Відповідно до цієї мети слід спланувати роботу з навчання математичного моделювання учнів, насамперед під час вивчення тем "Рівняння" (15 год, 7 клас), "Системи лінійних рівнянь з двома змінними" (21 год, 7 клас), "Квадратні рівняння" (20 год, 8 клас), "Функції" (12 год, 8 клас), "Нерівності" (18 год, 9 клас), "Числові послідовності" (16 год, 9 клас), "Елементи прикладної математики" (10 год, 9 клас). Остання тема цілком присвячена навчанню математичного моделювання учнів. Але, на жаль, вона не розкриває можливостей шкільного курсу математики для такого навчання в цілому. Тому планування роботи з навчання математичного моделювання слід здійснювати дуже уважно і при плануванні вказаних вище інших тем. У додатку С наведено тематичний план з вивчення теми "Рівняння", який передбачає навчання учнів математичного моделювання.

Наведений у додатках тематичний план розрахований на 17 год, а програмою на вивчення теми “Рівняння” відведено 15 год навчального часу. Дві години до цих 15 год відводимо з резервного часу. Взагалі, у програмі з алгебри для 7 класу виділено 15 год як резерв навчального часу. Тому з цих годин можна іще 3–4 год виділити для формування вмінь математичного моделювання під час вивчення теми “Системи лінійних рівнянь з двома змінними”.

Великі можливості для формування в учнів загальноосвітньої школи вмінь мате матичного моделювання має і шкільний курс алгебри та початків аналізу. У програмі [186, с. 10] вказується: “засвоєння понять похідної, первісної, інтеграла дасть змогу досліджувати елементарні функції, розв’язувати найпростіші геометричні, фізичні та інші задачі прикладного змісту”.

У 10 класі формувати вміння математичного моделювання в учнів слід під час вивчення таких тем: “Тригонометричні функції”, “Степенева функція”, “Показнико ва і логарифмічна функції”. Під час вивчення цих тем доцільно провести уроки на тему “Застосування властивостей функції до розв’язування задач прикладного змісту” та, наприклад, “Показникова функція як математична модель реальних про цесів і явищ”. Під час таких уроків учні розв’язують прикладні задачі за спрощеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання, і тому відбувається закріплення знань і вмінь не тільки з теми “Показникова функція”, а й загальних вмінь математичного моделювання. Такі уроки сприяють забезпеченню наступності та систематичності в навчанні математичного моделювання, що в умовах шкільного курсу математики, де теми, які сприяють навчанню математичного моделювання, чергуються з іншими, досить важливо. Час для проведення цих уроків можна виділити частково з резервного часу, а частково з навчального часу, відведеного програмою для вивчення цих тем. Програмою передбачається, що “розв’язування сотень тригонометричних, логарифмічних, показникових рівнянь, не пов’язаних з будь-якими прикладними задачами — традиція, від якої бажано поступово звільнятися. Вивільнені години доцільно використовувати для розв’язування важливих прикладних задач” [186, с. 10].

У 11 класі вміння математичного моделювання формуються під час вивчення таких тем як “Похідна та її застосування”, “Інтеграл та його застосування”, “Елементи комбінаторики”, “Початки теорії ймовірностей”, “Вступ до статистики”.

Значні можливості для формування вмінь математичного моделювання має і шкільний курс геометрії. Геометрія як наука виникла з практичних потреб вимірювання земельних ділянок. Тому при вивченні геометричних фігур та їх влас тивостей математичне моделювання може стати дієвим засобом мотивації навчаль ної діяльності учнів. На основі теорем, формул шкільного курсу геометрії можна будувати різні математичні моделі прикладних задач. Зокрема, слід приділити увагу формуванню вмінь математичного моделювання під час вивчення таких тем: “Три кутники” та “Геометричні побудови” (7 клас), “Чотирикутники”, “Теорема Піфагора”, “Вектори”, “Геометричні перетворення” (8 клас), “Розв’язування трикутників”, “Многокутники”, “Площі фігур”, “Початкові відомості зі стереометрії” (9 клас).

При вивченні у 10 класі тем “Паралельність прямих і площин” та “Перпендикулярність прямих і площин” учнів доцільно знайомити з елементами геометричного моделювання. Вивчивши дані теми, учні повинні розуміти, що зображення просторової фігури на площині є геометричною моделлю цієї фігури, а отже, і її математичною моделлю [98]. Доцільно сформувати в учнів поняття про геометричне моделювання як особливий вид математичного моделювання, а саме: побудова зображення просторової фігури — це такий же процес математичного моделювання, як і розв'язування прикладної задачі, і виконувати його можна та слід за однією і тією ж евристичною схемою діяльності математичного моделювання. У 10 класі вчити математичного моделювання необхідно також і при розгляді теми "Координати і вектори в просторі".

В 11 класі слід продовжити формування навичок і вмінь геометричного моделювання та розв'язування прикладних задач методом математичного моделювання під час вивчення тем "Многогранники", "Тіла обертання", "Об'єми тіл", "Площі поверхонь тіл обертання", "Комбінації геометричних тіл". Причому теми "Многогранники", "Тіла обертання", "Комбінації геометричних тіл" мають більші можливості для формування вмінь геометричного моделювання, а теми "Об'єми тіл", "Площі поверхонь тіл обертання" — вмінь математичного моделювання прикладних задач.

В 11 класі можна також запропонувати учням факультатив "Математичне моделювання засобами шкільної математики". Мета такого факультативу — узагальнення і розширення знань, вмінь з математичного моделювання.

Сучасна школа переходить на 12-річний термін навчання. Нова програма з математики [187] приділяє більше уваги навчанню математичного моделювання, ніж попередня. Програма для старшої школи передбачає побудову курсу математики на засадах застосування методу математичного моделювання. Тому навчання математичного моделювання повинне бути систематичним і неперервним під час вивчення кожної програмної теми курсів "Алгебра і початки аналізу", "Геометрія" у 10–12 класах. За новою програмою вивчення курсу алгебри і початків аналізу слід розпочати вступним заняттям, присвяченим методу математичного моделювання. На нашу думку, на цьому занятті слід повторити поняття "математична модель", "математичне моделювання", послідовність етапів спрощеної евристичної схеми діяльності математичного моделювання, познайомити учнів з методом застосування фундаментальних законів природи до побудови математичних моделей. Це заняття повинне забезпечити зв'язок у системі навчання математичного моделювання в основній та старшій школі.

Щодо основної школи, то навчання математичного моделювання слід розпочати за новою програмою також у 7 класі під час вивчення в курсі алгебри теми "Лінійні рівняння з однією змінною". Програма передбачає розгляд питання "Рівняння як математична модель задачі" [187, с. 18]. На жаль, за новою програмою час для вивчення зазначеної теми скорочено до 9 год. На нашу думку, у тематичному плані, наведеному у додатку С, слід запланувати уроки № 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 17. Продовжити формування знань та вмінь з математичного моделювання слід під час вивчення теми "Функції" (7 клас, 10 год), яка передбачає розгляд питання "Функція як математична модель реальних процесів". Роботу з навчання математичного моделювання за новою програмою слід планувати при вивченні всіх тем, перерахованих при розгляді питання такого планування за нині діючою програмою.

Прикро, але доводиться констатувати зменшення кількості годин, що відводяться на вивчення цих тем. Це обмежує час, який можливо виділити на формування знань та вмінь математичного моделювання.

Продовження формування вмінь математичного моделювання у майбутніх учителів має відбутися у педагогічному університеті під час вивчення практично всіх математичних дисциплін і курсу "Методика навчання математики".

Робота з навчання математичного моделювання планується кожним викладачем окремо в робочій програмі з навчальної дисципліни, яку він викладає. Робочі програми складаються у відповідності з навчальними програмами, затвердженими Радою університету. На сьогоднішній день складено нові програми з математичних дисциплін, які вивчаються у педагогічних університетах. Ці програми складено відповідно до галузевих стандартів [37]. Лише деякі програми передбачають на вчання математичного моделювання. Так, зокрема, у програмі "Диференціальні рівняння" [231] зазначено: "Розділ ПП. 10.03 програми передбачає знайомство студентів з побудовою та дослідженням математичних моделей за допомогою дифе ренціальних рівнянь. Важливим є те, що теорія диференціальних рівнянь є могутнім засобом пізнання явищ реального світу. Вивчення процесу чи явища математичними методами починається із складання математичної моделі. Досліджуючи рівняння, які описує певний реальний процес, можна всебічно вивчити цей процес і на основі знайдених результатів прогнозувати нові якісні характеристики того чи іншого яви ща. Математичні методи розв'язування диференціальних рівнянь залежать лише від типу цього рівняння і зовсім не залежать від конкретної природи явища, якому це рівняння відповідає. Зазначена особливість математичних методів дає змогу засто совувати їх під час дослідження різних за своєю природою процесів..." [231, с. 4]. Розділ цієї програми, присвячений математичному моделюванню, має такий вигляд (ПП — професійна та практична підготовка [37]).

ПП. 10.03 Математичні моделі та диференціальні рівняння

Основні поняття. Математична модель.

Основні вміння. Алгоритм побудови математичної моделі.

ПП. 10.03.01 Поняття математичної моделі. Обчислювальний експеримент Математичне моделювання. Основні етапи складання і дослідження математичної моделі. Обчислювальний експеримент як метод наукового дослідження.

ПП. 10.03.02 Застосування звичайних диференціальних рівнянь до розв'язування задач науки та техніки
Розв'язування та дослідження задач геометрії, механіки, фізики, техніки, біології, економіки, які приводять до диференціальних рівнянь.

ПП. 10.03.03 Застосування диференціальних рівнянь з частинними похідними до дослідження процесів реальної дійсності
Задача Коші і мішані задачі для рівняння коливання струни і для рівняння теплопровідності. Крайові задачі для рівняння Лапласа. [Задача Коші і мішані задачі для рівнянь гіперболічного та параболічного типу.] [Крайові задачі для рівнянь еліптичного типу.] [231, с. 4]

Навчальна програма з дисципліни "Методи обчислень" також приділяє достатню увагу математичному моделюванню. "Мета курсу "Методи обчислень" —

сформувати у студентів поняття про чисельні методи розв'язування прикладних задач, математичне моделювання і обчислювальний експеримент, методи оцінки точності одержуваних результатів" [233, с. 1]. На жаль, програми з інших математичних дисциплін не містять окремо розділів чи тем з математичного моделювання. Це є, звичайно, недоліком цих програм. І подолати його можна, передбачивши навчання математичного моделювання у робочих програмах викладачів. Наприклад, фрагмент робочої програми з "Аналітичної геометрії" з елементами математичного моделювання для розділу "Конічні перерізи: еліпс, гіпербола, парабола" наведено у додатку D.

Особливу роль при формуванні вмінь математичного моделювання відіграють спецкурси. Адже на цих спецкурсах закріплюються, систематизуються, узагальнюються, розширюються і поглиблюються знання та вміння майбутніх учителів з математичного моделювання. При складанні робочої програми такого спецкурсу слід врахувати, що основним змістом повинні бути питання загальної методології математичного моделювання, а методи алгебри, геометрії чи математичного аналізу — засобом побудови математичних моделей. У п. 2.4 запропонована робоча програма спецкурсу "Математичне моделювання", прочитаного нами в 2002–2005 н. р. в НПУ імені М. П. Драгоманова.

У системі навчання майбутніх учителів слід навчити студентів планувати роботу з навчання математичного моделювання учнів. Це завдання повинно бути ре алізовано в навчальній дисципліні "Методика навчання математики". У робочій програмі з загальної методики слід виділити тему "Формування вмінь математичного моделювання в учнів у процесі вивчення шкільного курсу математики", розглянувши при цьому такі питання:

1. Розвиток поняття "математична модель" у шкільному курсі математики.
2. Спрощена евристична схема діяльності математичного моделювання та методика оволодіння нею учнями.
3. Можливості шкільних курсів алгебри та геометрії для навчання математичного моделювання.
4. Планування роботи з навчання учнів математичного моделювання.
5. Методика проведення уроків з елементами математичного моделювання.
6. Контроль та оцінка знань та вмінь учнів з математичного моделювання.

Оскільки даний розділ стосується саме планування роботи з навчання математичного моделювання майбутніх учителів математики, то розкриємо детальніше питання про навчання студентів плануванню роботи з учнями з математичного моделювання.

На лабораторному занятті слід розглянути складання тематичного плану з деякої теми з елементами математичного моделювання. За зразок можна використати наве дений нами тематичний план з теми "Рівняння". Як домашнє завдання, студентам слід запропонувати складання тематичного плану з тих тем, які найбільше сприяють навчанню математичного моделювання (вони також перераховані нами на початку розділу). На наступному лабораторному занятті слід запропонувати студентам зробити зведений тематичний план, куди внести перелік всіх тем шкільних уроків з математики, на яких навчають математичного моделювання. Навчальне значення такого плану полягає в тому, що студенти в цілому одержать уявлення про послідовність і систему в навчанні учнів математичного моделювання в межах шкільного курсу математики [183].

Планування роботи викладача університету з математичного моделювання в межах тієї чи іншої дисципліни носить творчий характер, але має загальні зако номірності, які слід враховувати при складанні робочих програм, що передбачають навчання математичного моделювання в межах окремої математичної дисципліни. До них відносять:

- наступність та послідовність у навчанні математичного моделювання, оскільки ця робота не може носити епізодичний характер;
- органічне поєднання основної теми лекції чи практичного заняття з необхідністю її практичного застосування через математичне моделювання (навчання математичного моделювання не повинно бути самоціллю і проводитися на надуманих, далеких від реальності прикладах);
- доступність (математичні моделі повинні розглядатися на відомому теоретичному матеріалі);
- прикладну спрямованість навчання математичного моделювання в системі будь-якої дисципліни.

2.2 Вивчення теоретичного матеріалу, пов'язаного з математичним моделюванням

Математична освіта майбутнього вчителя математики не повинна обмежуватися тільки сучасним і строгим викладом математичної теорії, а і формувати уявлення про зв'язок її з практикою, про її необмежені можливості у пізнанні оточуючого нас світу. Побудова та дослідження математичних моделей у процесі вивчення університетських курсів математики сприятиме не тільки свідомому засвоєнню ма тематичних знань, а і розумінню місця математики у системі наук та її ролі у пізнанні оточуючої дійсності. Разом з тим, майбутній учитель математики матиме можливість познайомитися з одним із ефективних наукових методів сучасної мате матики — методом математичного моделювання та оволодіти цим методом.

Навчати математичного моделювання необхідно під час вивчення кожної математичної дисципліни зокрема, а не лише вивчаючи окрему дисципліну "Математичне моделювання", як пропонували деякі викладачі в ході констатуючого експерименту. На нашу думку, найбільш ефективною є така послідовність етапів у системі навчання математичного моделювання:

1. Вступні лекції з математичного моделювання, на яких мотивується необхідність оволодіння методом математичного моделювання, вводяться поняття "математична модель", "математичне моделювання", дається спрощена евристична схема діяльності математичного моделювання, наводяться приклади розв'язування задач за спрощеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання.

2. Лекції, практичні, семінарські, лабораторні заняття (з кожної конкретної математичної дисципліни) з елементами математичного моделювання, тобто розглядається застосування матеріалу, що вивчається, до розв'язання конкретних практичних проблем через математичне моделювання, або ж показується виконання теоретичних положень на конкретних математичних моделях (у проективній геометрії, наприклад).

3. Написання курсових, кваліфікаційних, наукових робіт з кожної окремої дисципліни з елементами математичного моделювання.

4. Спецкурси з математичного моделювання. Такі спецкурси, як правило, проводяться на 4–5-му курсі, і їх метою є не лише формування навичок і вмінь з математичного моделювання, а їх поглиблення, вдосконалення та піднесення на творчий рівень на базі тих знань, навичок і вмінь, які отримані у процесі попереднього вивчення всіх математичних дисциплін. Дається розширена евристична схема діяльності математичного моделювання, і приклади задач, що розв'язуються за цією схемою.

5. Лекції, семінарські, лабораторні заняття з методики навчання математики. Особливість цих занять полягає в тому, що основне завдання, яке слід тут реалізувати, — це не оволодіння методом математичного моделювання, а формування навичок та вмінь навчання математичного моделювання інших — майбутніх учнів.

Розглянемо детальніше ті теоретичні аспекти математичного моделювання, на які слід обов'язково звернути увагу, щоб забезпечити виконання вказаної послідовності етапів.

Вступні лекції з математичного моделювання, як зазначалося раніше, повинні бути прочитані в I семестрі на першому курсі, або під час вивчення дисципліни "Вступ до спеціальності", або однієї з навчальних дисциплін "Аналітична геометрія", "Лінійна алгебра", "Математичний аналіз" за домовленістю викладачів. На нашу думку, найкраще це робити під час вивчення "Математичного аналізу", тому що матеріал, який розглядається на перших лекціях, а це "Функції однієї змінної та їх властивості", має широке практичне застосування.

З досвіду роботи слід зауважити, що вступних лекцій повинно бути не менше двох (цієї кількості навчального часу цілком досить, щоб студенти ознайомилися з основними поняттями, зрозуміли послідовність етапів евристичної схеми математичного моделювання). Ми не вважаємо за доцільне викладати повний зміст цих лекцій цілком, але все ж на основні теоретичні положення звернемо увагу.

Зміст лекції № 1 "Математичне моделювання як метод наукового дослідження навколишнього світу" передбачає розгляд таких питань:

1. Реальні процеси та їх відображення математикою.
2. Математичні моделі серед інших моделей: 1) моделі та їх види; 2) означення математичної моделі, основні види математичних моделей.
3. Математичне моделювання як науковий метод. Евристична схема діяльності математичного моделювання.

Зміст лекції № 2 "Методи математичного моделювання" може бути таким:

1. Метод використання фундаментальних законів фізики, біології, розвитку суспільства.
2. Методи варіації — знаходження оптимального розв'язку.
3. Метод універсальності.
4. Метод аналогій.

Зміст вказаних лекцій повинен бути доступний студентам і цікавий як студентам, які зі школи незнайомі з математичним моделюванням, так і студентам, які мають певні уявлення і навички математичного моделювання.

Доступність змісту вказаних лекцій забезпечується розглядом тих прикладів, математичними моделями яких є рівняння, системи рівнянь, функції та похідні функцій, геометричні фігури і т. д., тобто математичні образи, відомі майбутнім учителям зі шкільного курсу математики.

Розкриваючи перед студентами питання 1 лекції № 1 “Реальні процеси та їх відображення математикою”, слід зазначити наступне: “Процес пізнання реального світу є складним. Шлях вдосконалення наших знань необмежений і, незважаючи на те, що він привів нас до відкриття багатьох законів природи і до побудови картини світу, ми є свідками нових відкриттів, нового проникнення у не досить вивчені, а часом і зовсім невідомі сторони навколишнього світу. При цьому завжди виявляєть ся, що глибоке проникнення у суть явищ дозволяє відкривати численні можливості використання знайдених закономірностей для найрізноманітніших галузей людської діяльності. Кількісні відношення і просторові форми притаманні будь-якому реаль ному процесу і математика, вивчаючи їх, встановлює різноманітні зв’язки у цих процесах, формулюючи їх у вигляді логічних висловлювань, записаних мовою символів.

Наука починається із спостережень, в процесі яких створюється початковий запас інформації і використання математики носить досить примітивний характер. Потім з’являються намагання пояснення явища чи процесу і створення початкової теорії, яка далі перевіряється шляхом нових спостережень, а якщо можливо, то і експериментів. У подальшому на певному етапі виникає об’єктивна необхідність у серйозній математичній обробці наявного наукового матеріалу. Відбувається так зва ний процес математизації знань, який приводить з необхідністю до якісного стрибка у розвитку заданої галузі людського знання.

Особливістю розвитку науки у другій половині ХХ ст. є значне розширення сфери математизації. Взаємозв’язок експериментальних досліджень і математичних методів виявився плідним на широкому фронті технічних, біологічних і економічних наук, виробництві. Проникнення математичних методів у ті галузі знань, де вони раніше взагалі не застосовувалися, означає, що математика стає основою наукового і технічного прогресу в цілому, тобто стає виробничою силою розвитку суспільства. Звернемося до прикладів.

У 1908–1922 р.р. науковий співробітник Копенгагенської телефонної компанії К. Ерланг (1878–1922), працюючи над розрахунками пропускної спроможності те лефонної мережі, зумів побудувати принципово нову математичну схему. Ця схема дозволила враховувати як випадковості, характерні для надходження телефонних викликів, так і випадкову тривалість розмов абонентів по телефону. Природно, що для математичного опису подібних задач було залучено апарат теорії ймовірностей, модифікований у відповідності з особливостями “телефонних” задач. Протягом короткого часу з цих досліджень з’явилася математична теорія масового обслуговування (теорія черг). Галузь дії цієї теорії у наш час досить широка. Задачі, які приводять до аналогічних математичних схем, виявилися на транспорті, у торгівлі та постачанні, в організації виробництва, в роботі складних електронних систем. Теорія з успіхом розвивається, освоюючи різноманіття ситуацій: системи з очікуванням, з втратами заявок, з обмеженою кількістю місць очікування і т. ін.

Для багатьох галузей сучасної математики легко прослідкувати їх походження з реально існуючих технічних, фізичних, економічних, військових та інших ситуацій. Такими є теорія керуючих систем, теорія інформації, дослідження операцій та інші, які об'єднують назвою "математична кібернетика". Математичні теорії, які постали з практики розробки та експлуатації обчислювальних машин, самим своїм змістом підтверджують практичне походження своїх елементів.

Однак зміст математики не вичерпується її застосуваннями і поповнюється не тільки елементами, які доводиться вводити при розв'язуванні практичних задач. Історія математики і її сучасна практика засвідчує появу нових понять і навіть цілих теорій як результат логічного розвитку математичних міркувань, тобто самої мате матики як науки. Слід зауважити, коли навіть математичний результат з'явився і увійшов у науку внаслідок логічного розвитку певних теоретичних понять, його ніяк не можна тлумачити тільки як витвір вільної гри розуму, не пов'язаної з практикою людської діяльності. Наприклад, комплексні числа було введено в математику як оперативний засіб для розв'язування рівнянь. Вся їх початкова історія наповнена спробами відшукати їх реальну інтерпретацію, що було знайдено вперше на шляху геометричного їх тлумачення. Зв'язок комплексних чисел з практикою підтверджується їх численними застосуваннями, зокрема при розв'язуванні задач електротехніки, теорії пружності, аеродинаміки і т. д.

Для кожного теоретичного результату можна знайти його походження з практичної діяльності людей. Щоправда, ланцюг логічних міркувань, які привели до розглядуваного результату, може виявитися занадто довгим. Однак рано чи пізно розкриваються застосування або схожі, близькі до практики, інтерпретації. І навіть у тих випадках, коли судження про математичний результат поки що залишаються на стадії теоретичного розгляду, справедливо, що цей результат наукової творчості є усвідомлено необхідним, бо визначається прийнятою логікою та спирається на вихідні поняття та висловлювання, взяті з практики.

Реальні процеси та об'єкти бувають настільки багатогранні і складні, що найкращим способом їх вивчення часто є побудова моделі, що відображає лише якусь грань реальності і тому є набагато простішою, ніж ця реальність. Найчастіше ці моделі будують математичними методами і засобами. Багатовіковий досвід розвитку науки довів на практиці плідність такого підходу. Практично в усіх науках про природу та суспільство побудова та дослідження моделей засобами математики є вагомим знаряддям пізнання. Поговоримо про моделі та їх побудову детальніше."

На цьому завершується виклад першого питання лекції 1, який мав за мету:

- показати, що математика як наука виникла з потреб розв'язання практичних проблем і розвивається, досягнувши досить високого рівня абстрактності для задоволення цих потреб, тобто більшість розділів математики мають практичне застосування: безпосередньо чи опосередковано;
- мотивувати необхідність знання про те, як же саме відбувається зв'язок математики та інших наук з практикою. Це відбувається шляхом побудови та дослідження моделей, засобом побудови яких є математичні методи.

Друге питання лекції 1 "Математичні моделі серед інших моделей" передбачає розгляд у двох послідовних напрямах:

1. моделі та їх види;

2. означення математичної моделі, основні види математичних моделей.

Ці питання можна подати студентам, наприклад, так: “З поняттям “модель” ви зустрічалися з дитинства (тут студентам можна поставити питання “Де ви зустрічалися з поняттям “модель”?”). Іграшкові автомобіль, літак чи кораблик для багатьох були улюбленими іграшками, такими ж як плюшевий ведмедик чи лялька. У розвитку дитини, у процесі пізнання нею навколишнього світу такі іграшки, що є, по суті, моделями реальних об’єктів, відіграють важливу роль. У підлітковому віці для багатьох захоплення автомоделюванням, судномоделюванням, власним створенням іграшок, подібних до реальних об’єктів, мало великий вплив на вибір життєвого шляху.

Що ж таке модель? Що спільного між іграшковим корабликом і малюнком на моніторі комп’ютера, що відображає складну математичну абстракцію? І все ж спільне є: і в тому, і в іншому випадку ми маємо образ реального об’єкта чи явища, “замінника” деякого “оригіналу”, що відтворює його з тією чи іншою достовірністю і детальністю. Іншими словами: *модель є представленням об’єкта в деякій формі, відмінній від форми його реального існування*. Французьке слово mod`ele походить від латинського modus (зразок) [45, с. 213]. При побудові моделей використовують два різних шляхи. Модель може бути подібною копією об’єкта, виконаною з іншого матеріалу в іншому масштабі з відсутністю ряду деталей. Наприклад, іграшковий кораблик, літак, будинок з кубиків і багато інших натурних моделей. Однак модель може і відображати реальність більш абстрактно — словесним описом у довільній формі, описом, формалізованим за якимись правилами, математичними співвідношеннями. Розглянемо види моделей, що застосовуються у прикладних га лузях (схема 2.1).

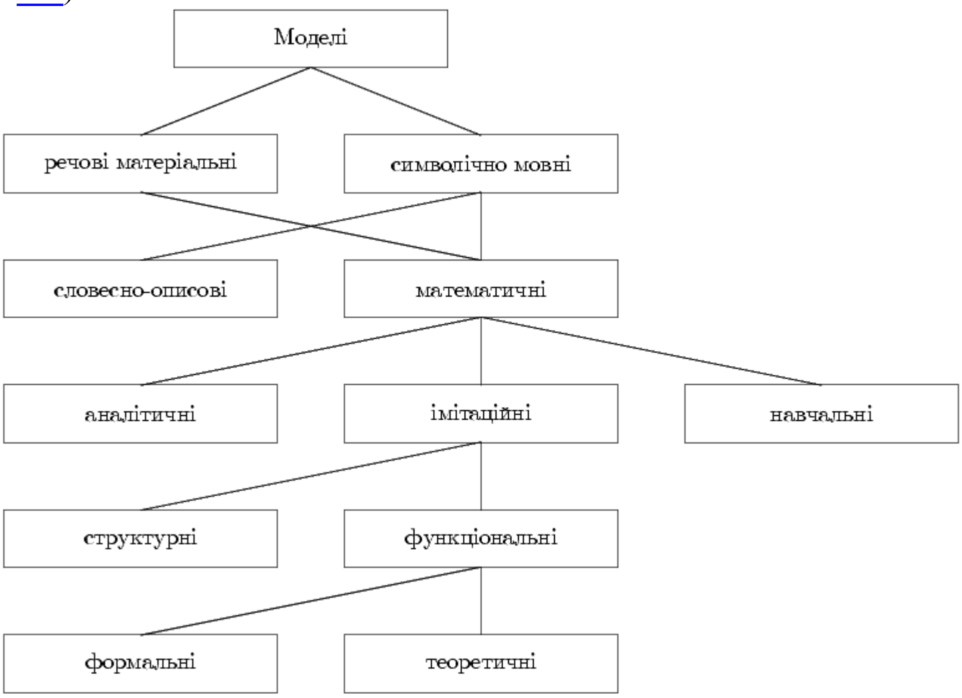


Схема 2.1: Види моделей

Речовими моделями часто просто називають моделі: авіамоделі, автомоделі, макети міст, різних технічних установок.

У *символічних* моделях фіксація, побудова, опис об'єкта чи явища даються тією чи іншою мовою. Прикладами символічних моделей є рівняння, системи рівнянь, креслення виробу, схема технологічної обробки, географічні карти, опис, даний розмовною мовою. Математичні моделі — комплекси математичних залежностей, що відображають суттєві характеристики явищ, що вивчаються. Можна дати і таке означення математичної моделі: *Математична модель — наближений опис будь-якого класу явищ навколишнього світу за допомогою математичної символіки* [235, с. 574].

Математичні моделі можуть бути аналітичними чи імітаційними. При використанні аналітичних моделей процеси, явища, об'єкти навколишнього світу описуються у вигляді функціональних співвідношень (алгебраїчних, диференціальних, інтегральних і т. д.) або логічних умов. Аналітична модель може досліджуватися одним з таких способів:

- аналітично — коли одержуються в явному вигляді залежності для шуканих величин;
- чисельно — коли, не маючи розв'язків рівняння в загальному вигляді, застосовують засоби обчислювальної техніки, щоб одержати числові результати при конкретних початкових даних;
- якісно — коли, не маючи розв'язку в явному вигляді, можна знайти деякі властивості розв'язків, наприклад, оцінити стійкість розв'язку.

Імітаційне математичне моделювання виконується за допомогою ЕОМ і нагадує експеримент. Звідси його переваги: 1) наочність результатів моделювання; 2) можливість моделювання навіть у тих випадках, коли аналітичні методи або відсутні, або (через складність системи) не дають необхідних результатів [209].

Надалі, вивчаючи алгебру, геометрію, математичний аналіз, ми будемо в основному будувати і досліджувати аналітичні математичні моделі. Імітаційні математичні моделі розглядаються під час вивчення курсу "Інформатика"."

Розглянувши питання 2 лекції 1, зауважимо, що означення математичної моделі слід вибрати досить просте і зрозуміле студентам, таблиця "Види моделей" дещо спрощена порівняно з таблицею "Види моделювання", даною в п. 1.1. Але використання такої таблиці дидактично доцільне, тому що показує місце математичних моделей серед інших моделей і виділяє два основних види математичних моделей: аналітичні та імітаційні. В інформаційний зміст питання 2 можна також включити пояснення щодо навчальних математичних моделей, означивши їх так, як це робить в "Українському педагогічному словнику" С. Гончаренко [45, с. 215]. Це означення особливо корисне тим для майбутніх учителів математики, що розкриває, які саме моделі можуть бути навчальними і використовуватися ними в майбутній професійній діяльності.

Питання 3 лекції 1 "Математичне моделювання як науковий метод. Евристична схема діяльності математичного моделювання" доцільно розкрити так: "Якщо роз глядати математичне моделювання як науковий метод, то спочатку слід з'ясувати, що ж таке математичне моделювання? (Доцільно поставити це питання перед студентами, і, як правило, на нього дають відповідь: "Математичне моделювання — процес побудови математичної моделі".) Тут слід пояснити, що такий підхід до розуміння поняття "математичне моделювання" дуже вузький і взагалі неправильний. “Математичне моделювання — це процес встановлення відповідності даному реальному об’єкту деякого математичного об’єкта, що називається математичною моделлю” [195]. Саме так дає відповідь на це питання академік О. А. Самарський — один з оновоположників сучасної методології математичного моделювання. Хоч на даному етапі навчання це можна сказати і так: “Математичне моделювання — це процес побудови та дослідження математичної моделі деякої нематематичної задачі”. Математичне моделювання як науковий метод передбачає виконання певної послідовності етапів, яку називають “евристичною схемою діяльності математичного моделювання”. Ця схема виглядає так.

1. *Попередній аналіз об’єкта дослідження.* Виділяється об’єкт дослідження та галузь науки, до якої він належить чи спираючись на яку можна об’єкт вивчати разом із системою його зовнішніх взаємозв’язків.

2. *Побудова математичної моделі.* На цьому етапі відображаються в математичній формі найважливіші властивості об’єкта, закони, яким він підлягає, зв’язки, притаманні його складовим частинам, формулюється відповідна об’єкту математична задача.

3. *Реалізація математичної моделі математичними методами.* Розв’язується поставлена у попередньому пункті 2 математична задача методами елементарної чи вищої математики.

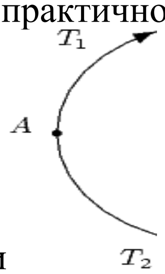


Рис. 2.1: Ілюстрація до задачі 2.1

4. *Аналіз одержаних результатів та перенесення їх на об’єкт, що досліджується.* Розглядається питання про повноту результатів моделювання з метою їх практичного застосування та подальшого вдосконалення моделі, тобто її перевірки на адекватність за такими ознаками, які були відібрані як значущі.

Таку схему діяльності математичного моделювання називають спрощеною. Розв’яжемо методом математичного моделювання наступну задачу.

Задача 2.1. По колу у протилежних напрямах рухаються два тіла: перше — рівномірно з лінійною швидкістю v, а друге — рівноприскорено з лінійним прискоренням a. У початковий момент часу обидва тіла знаходилися в одній точці A і швидкість другого дорівнювала нулю. Через який час відбудеться перша зустріч цих тіл, якщо друга зустріч буде знову в точці A?

Розв’язання. **І. Попередній аналіз об’єкта дослідження.** Тіла починають свій рух одночасно з однієї і тієї ж точки A. Зустрінуться вони, при умові руху в протилежних напрямах, через однаковий проміжок часу, коли пройдуть разом відстань, яка дорівнює довжині кола $C = 2\pi R$. Відповідно до законів фізики: при рівномірному русі $S = vt$, та при рівноприскореному $S = \frac{at^2}{2}$.

II. Побудова математичної моделі. Позначимо через t_1 час до першої зустрічі тіл , а через t_2 — час до другої зустрічі, через R — радіус кола. За час t_1 перше тіло пройде шлях vt_1, а друге — шлях $\frac{at_1^2}{2}$. Сума цих шляхів дорівнює довжині кола (рис. 2 .1), тобто

$$vt_1 + \frac{at_1^2}{2} = 2\pi R. \tag{2.1}$$

За час t_2 кожне тіло пройшло один і той же шлях, рівний довжині кола, отже

$$vt_2 = 2\pi R, \quad \frac{at_2^2}{2} = 2\pi R.$$

Виключивши звідси t_2, знайдемо $R = \frac{v^2}{\pi a}$. Підставивши значення R в рівняння (2.1), одержуємо квадратне рівняння відносно шуканої величини t_1:

$$\frac{at_1^2}{2} + vt_1 - \frac{2v^2}{a} = 0, \quad t_1 > 0, \tag{2.2}$$

що і є математичною моделлю поставленої задачі. Формулюємо математичну задачу: “Знайти корені квадратного рівняння (2.2).”

III. Реалізація математичної моделі математичними методами. Розв’язуємо квадратне рівняння

$$\frac{at_1^2}{2} + vt_1 - \frac{2v^2}{a} = 0$$

відносно t_1:

$$D = v^2 - 4 \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{2v^2}{a}\right) = v^2 + 4v^2 = 5v^2,$$

$$t_1 = \frac{-v \pm \sqrt{5}v}{a} = \left(-1 \pm \sqrt{5}\right)\frac{v}{a}.$$

IV. Аналіз одержаних результатів та перенесення їх на об’єкт, що досліджується. Ми одержали два значення t_1, причому одне з них $t_1' = \left(-1 - \sqrt{5}\right)\frac{v}{a}$ від’ємне і тому не може бути розв’язком задачі. Отже, тіла зустрінуться через час $t_1 = \left(\sqrt{5} - 1\right)\frac{v}{a}$. В умові не вказано розмірність, тому будемо вважати, відповідно до міжнародної системи СІ, що t_1 вимірюється у секундах. Отже, через $\left(\sqrt{5} - 1\right)\frac{v}{a}$ (сек) тіла зустрінуться.”

Під час розгляду питання 3 студентів знайомлять лише зі спрощеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання. У процесі вивчення математичних дисциплін ця схема може розширюватися. Так, вже в середині першого семестру можна додати пункт “Реалізація математичної моделі засобами інформаційно-комунікаційних технологій”, що передбачає розв’язання поставленої в пункті II математичної задачі за допомогою сучасних програмних засобів, наприклад, GRAN1, GRAN-2D чи інших. Цілком розширену евристичну схему слід давати або на спецкурсах з математичного моделювання, або під час вивчення такої математичної дисципліни як “Методи обчислень”. Цілий ряд прикладних задач цього курсу можна розв’язати також за розширеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання, тому дати її студентам слід на одному з перших лекційних занять “Методів обчислень”, а під час вивчення спецкурсів цю схему слід закріпити і подальша діяльність математичного моделювання студентами повинна здійснюватися за цією схемою.

На лекції ми не пояснюємо, чому саме діяльність математичного моделювання є евристичною. Це доцільно зробити при вивченні курсу “Методика навчання математики”.

Лекція № 2 “Методи математичного моделювання” має за мету ознайомити студентів з основними, найпоширенішими методами математичного моделювання, розглянувши конкретні приклади задач, які розв’язуються за спрощеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання. На початку лекції необхідно зробити зауваження, що математичне моделювання — творчий процес і готових рецептів, як поступати в кожному конкретному випадку, немає і бути не може, але загальні закономірності існують і знати їх майбутні вчителі повинні. Успіх в математичному моделюванні визначається загальним розвитком та обсягом математичних знань, якими володіє людина.

Описані в лекції методи математичного моделювання найбільш прості, доступні і зрозумілі студентам на основі тих знань з математики, якими вони володіють, але ними не вичерпуються всі методи математичного моделювання. Вивчаючи матема тичні дисципліни, майбутні вчителі розширять свої знання про методи побудови математичних моделей. До них належать як методи кожної окремої науки, наприклад, симплекс-метод в алгебрі, так і загальні методи, наприклад, метод “ієрархічного ланцюга”. До методів побудови математичних моделей обов’язково слід повернутися на спецкурсах. Там знання студентів про різні методи математичного моделювання будуть розкриті в усій повноті та узагальнені при розв’язанні досить складних творчих задач.

Зі вступних лекцій розпочинається оволодіння майбутніми вчителями методом математичного моделювання. Наступним кроком є лекції та практичні заняття з математичних дисциплін з елементами математичного моделювання. Теоретичний матеріал повідомляється студентам в основному під час лекцій. Використання елементів математичного моделювання на лекціях значно підвищує інтерес до математики. Розгляд математичних моделей в навчальному процесі виховує вміння проникати у суть явищ природи, помічати закономірності у навколишньому світі. Розв’язування практичних задач допоможе на реальних явищах бачити ті математичні поняття і методи, які вивчаються в курсі, навіть за загальними поняттями бачити конкретні образи, реальний зміст і метод пізнання, нехай навіть і в найпростішій формі. Ця обставина дуже суттєва, бо правильне уявлення про формування математичних понять має виключне значення для формування методологічних поглядів молоді. Саме при розгляді математичних моделей можна проілюструвати студентам суть процесу пізнання, яку висловлено у відомій ленінській фразі: “Від живого споглядання до абстрактного мислення і від нього до практики — такий діалектичний шлях пізнання істини, пізнання об’єктивної реальності” [114, с. 142].

Лекції з елементами математичного моделювання — це лекції проблемного навчання, коли конкретна задача породжує проблемну ситуацію, служить стимулом для розширення теоретичних знань і, зрештою, для вирішення проблемної ситуації.

Такі лекції можна описати схемою 2.2 [222, с. 56].

Загальне завдання навчання математичним дисциплінам у педагогічному університеті — це навчання математичній діяльності. Діяльність математичного моделювання є складовою математичної діяльності. А. А. Столяр зазначав: "... навчання математичній діяльності є *активним* навчанням математики. Це означає, що ми повинні навчати учнів не заучувати готовий матеріал, а *відкривати математичні істини* (відкривати для себе те, що вже відкрито в науці), *логічно організовувати* здобутий дослідним шляхом математичний матеріал (хоч він уже і організований у науці) і, нарешті, застосовувати теорію в різних конкретних ситуаціях." [222, с. 56].

Важлива педагогічна проблема полягає у визначенні доцільного співвідношення трьох стадій математичної діяльності на різних етапах навчання. Перша та третя стадії математичної діяльності (математизація ситуації та застосування теорії) не менш важливі, ніж друга (логічна побудова теорії), як у науковому дослідженні, так і особливо у навчанні. Навчання, яке ведеться чисто дедуктивно, тобто враховує тільки одну з цих стадій, за висловом відомого французького математика Г. Шоке, є безплідним і калічащим [222, с. 56]. Це необхідні стадії і на їх рівні утворюються нові структури і переходять від одного рівня мислення до іншого. Лекції проблемного навчання (викладу та засвоєння) математичним дисциплінам з елементами математичного моделювання є прикладом вдалого співвідношення всіх трьох стадій математичної діяльності.

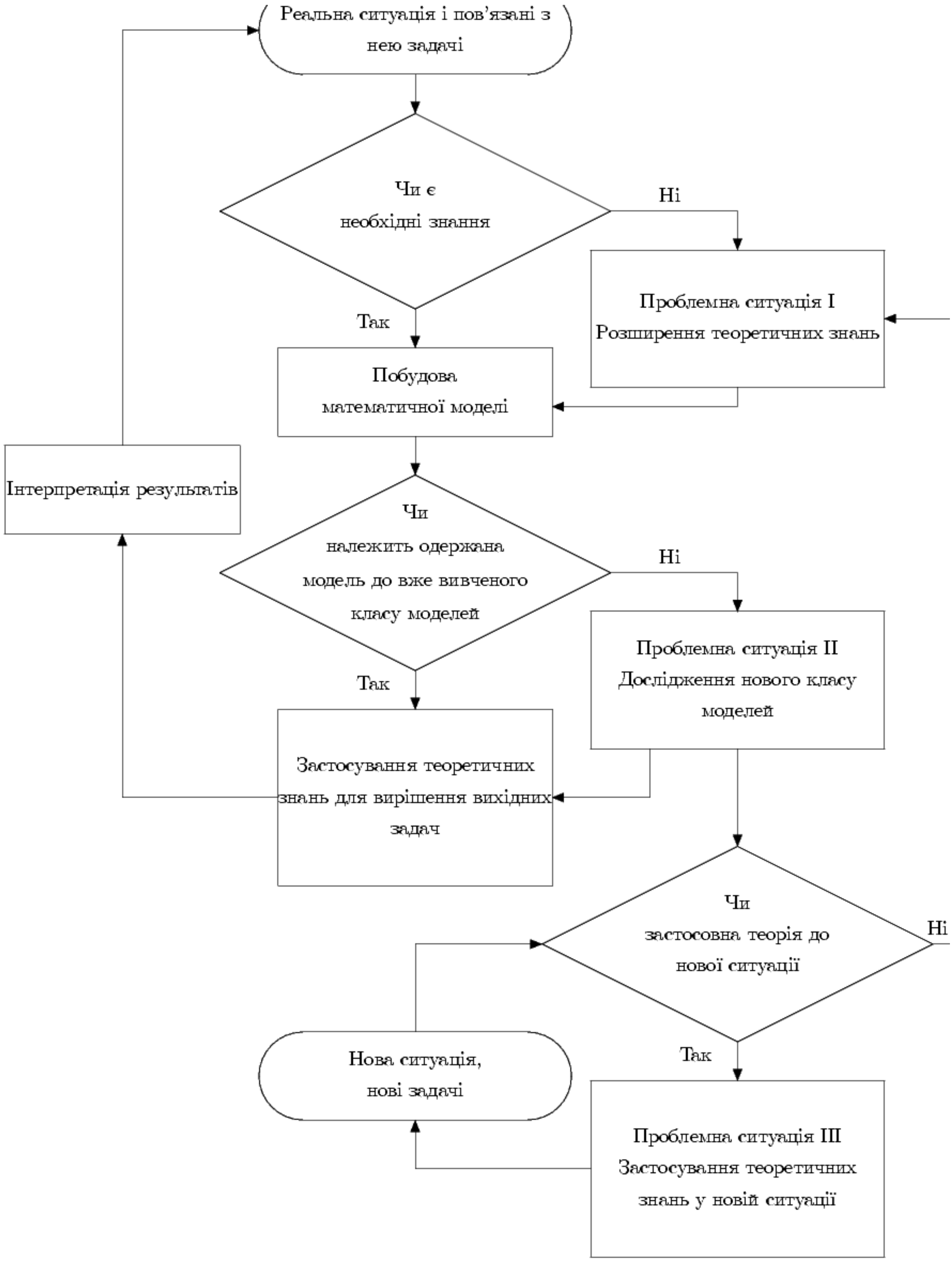


Схема 2.2: Структура лекції проблемного навчання з елементами математичного моделювання

Окрім таких лекцій, є ще лекції повідомлення нових знань з математичних дисциплін, теж з використанням елементів математичного моделювання. Але математичне моделювання полягає тут у виборі математичної моделі та інтерпретації на ній тих теоретичних фактів, які викладені у вигляді тверджень у рамках якоїсь конкретної теорії, але буває, що ті чи інші поняття вводять відразу на моделях, а потім роблять загальні висновки. Так, при вивченні основ геометрії М. І. Лобачевського спочатку формулюються основні означення, теореми, теореми доводяться, а потім будуються різні моделі площини Лобачевського: Бельтрамі, Пуанкаре, Келі–Клейна і на них показують виконання цих теоретичних положень [199,239]. А при вивченні проективної геометрії багато фактів демонструються спочатку на моделях, а вже потім робляться загальні висновки. Так, наприклад, при введенні проективної системи координат на прямій спочатку вводять систему координат в пучку прямих, який є моделлю проективної прямої, а потім приходять до висновку, що довільна пара чисел, окрім нульової, визначає деяку пряму в пучку [165, с. 125], [198,200].

Ще однією важливою складовою в системі навчання майбутніх учителів матема тики математичного моделювання є написання курсових робіт, кваліфікаційних робіт та наукових робіт з тематики, пов'язаної з математичним моделюванням. Це самостійна творча робота студентів, що здійснюється під керівництвом викладача. Досвід керування написанням таких робіт в НПУ імені М. П. Драгоманова свідчить про те, що така робота особливо вдала, коли викладач дає завдання до роботи у вигляді розширеного плану, який при написанні роботи студентами уточнюється. Ко рисно давати також літературу до роботи і настанови до самостійного пошуку літератури та інформації на сайтах Інтернету.

При написанні кваліфікаційних робіт студенти не тільки досліджують деяку проблему методами математичного моделювання, а й вирішують, на якому рівні можна говорити про цю проблему в школі, розробляють методику подання даного матеріалу на шкільних заняттях з математики, проводять ці заняття під час педагогічної практики.

Самостійна творча робота студентів над тематикою, пов'язаною з математичним моделюванням, найкраще сприяє закріпленню знань і вмінь з математичного моделювання і є критерієм, що визначає успішність роботи з навчання математичного моделювання майбутніх учителів математики.

Спецкурси з математичного моделювання завершують роботу з навчання математичного моделювання майбутніх учителів. Вони мають за мету закріпити та розширити знання, навички та вміння студентів з математичного моделювання, дають можливість осмислити всі вивчені ними розділи математики з точки зору їх практичного застосування до різних галузей людської життєдіяльності та до подальшого розвитку сучасної математики як науки. Детально про організацію та методику такого спецкурсу буде сказано далі.

Особливістю таких спецкурсів є те, що різні форми організації навчальної діяльності повинні вдало поєднуватися. Лекції повинні чергуватися із семінарськими та лабораторними заняттями. Теоретичний матеріал може подаватися як викладачем, так і вивчатися самими студентами.

Лекції та практичні заняття з методики навчання математики є саме тим компонентом у системі навчання математичного моделювання майбутніх учителів, що забезпечує формування знань та вмінь навчання математичного моделювання інших — майбутніх учнів. Відповідно до цієї задачі слід організовувати вивчення теоретичного матеріалу, що стосується не стільки математичного моделювання, а скільки методів, форм та засобів навчання математичного моделювання учнів у процесі вивчення ними шкільного курсу математики, висвітлюючи такі аспекти:

- математичне моделювання як науковий метод, що забезпечує зв’язок математичної науки і реальної дійсності, сприяє практичному застосуванню математичних знань;
- математичне моделювання як зразок проблемного викладу теоретичного матеріалу;
- математичне моделювання як дієвий засіб міжпредметних зв’язків.

Тема лекції з цього питання може бути така: “Навчання математичного моделювання у процесі вивчення шкільної математики”. Наведемо розширений план такої лекції:

1. *Введення поняття “математична модель” у шкільному курсі математики.* При розгляді цього питання слід обґрунтувати необхідність введення цього поняття саме в курсі алгебри 7 класу, прослідкувавши розвиток поняття про “математичну модель” у курсах геометрії, алгебри 8–9 класів, алгебри та початків аналізу. Тут же слід разом зі студентами пригадати всі відомі їм означення “математичної моделі” і звернути їх увагу на таке означення: “Математична модель — наближений опис будь-якого класу явищ навколишнього світу за допомогою математичної символіки” , тому що це означення досить просте (не вимагає спеціальних знань) і вказує на такі суттєві властивості поняття “математична модель”:

1. *наближений* опис явищ навколишнього світу;
2. опис засобами математики (символами, формулами, через відношення, графіки, блок-схеми, алгоритми, функції та їх похідні, рівняння тощо).

Таке означення повністю задовольняє методичні вимоги до означень, які сформульовано раніше [212].

Рис. 2.2: Відношення між родовим поняттям “модель” та видовим поняттям “математична модель”

Відношення між родовим поняттям “модель” та видовим поняттям “математична модель” студентам слід проілюструвати у вигляді діаграм Ейлера–Венна [159] (рис. 2.2).

2. *Евристична схема діяльності математичного моделювання, що доцільна в школі.* На момент висвітлення цього питання студенти вже будуть знайомі зі спрощеною та розширеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання. Слід показати, що спрощену схему діяльності математичного

моделювання цілком можливо застосовувати у школі тому, що вона більш доступна, передбачає меншу послідовність етапів, не передбачає використання комп'ютера на початкових кроках навчання учнів математичного моделювання. Розширену евристичну схему діяльності математичного моделювання у масовій школі давати недоцільно. Але в школах і класах з поглибленим вивченням математики це можливо. Спрощену схему можна дещо розширити у 10–11 класах, коли учні мають певні навички роботи з комп'ютером, введенням етапу "Реалізація математичної моделі засобами інформаційно-комунікаційних технологій". Цей етап у схемі може бути після етапу "Реалізація математичної моделі математичними методами" або замість нього.

Саме тут слід обґрунтувати, чому діяльність математичного моделювання є еври стичною діяльністю. Діяльність математичного моделювання є евристичною, тому що відповідає означенню навчально-пізнавальної евристичної діяльності, даному О. І. Скафою: "Навчально-пізнавальна евристична діяльність — це діяльність учнів, що організовується та управляється педагогом з використанням різноманітних евристичних засобів, направлених на створення нової системи дій з пошуку невідомих раніше закономірностей, на формування процесів, які забезпечують пізнавальну і творчу діяльність, в результаті якої учні активно оволодівають знаннями і розвивають свої евристичні навички і вміння, формують пізнавальні мотиви і організаційні якості" [204, с. 54].

Студенти добре знають послідовність етапів у спрощеній схемі діяльності математичного моделювання, але слід зауважити, що при виконанні кожного етапу необхідно реалізовувати певні дидактичні завдання. Так, етап "Попередній аналіз об'єкта дослідження" зручний для реалізації міжпредметних зв'язків з хімією, біологією, економікою, фізикою. На етапі "Побудова математичної моделі" слід на вчати вмінню абстрагуватися від конкретних величин, надавати конкретним зв'язкам та відношенням логічну та математичну інтерпретацію, що сприяє формуванню вміння "математизувати ситуацію".

Етап "Реалізація математичної моделі математичними методами" спрямований на формування та закріплення навичок та вмінь розв'язування математичних задач пе вного виду. На етапі "Аналіз одержаних результатів та перенесення їх на об'єкт, що досліджується" слід навчити інтерпретувати одержаний математичний результат до образів вихідної ситуації, перевірити цей результат, уточнити його.

Тут же слід також розглянути питання про узгодженість різних евристичних схем діяльності. Показати, як спрощена евристична схема узгоджується зі схемою діяльності "розв'язування задач на побудову" та схемою діяльності "метод рівнянь", як найбільш поширеними схемами у шкільному курсі математики.

3. *Планування роботи вчителя з навчання математичного моделювання.* Детально це висвітлено у попередньому п. 2.1, [183].

4. *Уроки з елементами математичного моделювання.* Це можуть бути уроки повідомлення нових знань з пояснювально-ілюстративним, а найчастіше проблемним викладом навчального матеріалу. Тут слід познайомити студентів із загальною схемою проблемного навчання математики (див. схему 2.2). Важливе місце у формуванні вмінь математичного моделювання у школярів займають також уроки закріплення набутих навичок та вмінь, уроки формування навичок та вмінь [

147]. Студентам слід показати методичні розробки таких уроків та запропонувати розробити такі уроки самим.

5. *Контроль знань та вмінь учнів з математичного моделювання.* Розкриваючи форми цього контролю, слід підкреслити, що вміння математичного моделювання вторинні від власне математичних вмінь і включають їх, тому проконтролювати окремо вміння математичного моделювання від вмінь, скажімо, розв'язувати квад ратні рівняння неможливо, а тому недоцільні в шкільному курсі окремо контрольні роботи з математичного моделювання, проте можна організувати тематичні тести з математичного моделювання.

6. *Організація позакласної роботи.* У школі є можливість проводити факультативи з математичного моделювання, розглядати цю тему на шкільному математичному гуртку. Безумовно, задачі, що розв'язуються методом математичного моделювання, повинні бути в завданнях математичних олімпіад і не тільки шкільних. Питання організації таких факультативів висвітлені у роботах В. В. Фірсова, С. І. Шварцбурда [240,247].

Слід зауважити, що питання навчання математичного моделювання учнів у про цесі вивчення шкільної математики повинне бути відображене і в курсових роботах з методики навчання математики, в кваліфікаційних роботах майбутніх учителів, і дуже добре розглянути тему "Методичні питання навчання математичного моделю вання учнів загальноосвітньої школи" в курсі методики навчання математики.

Вдалий підбір та навчання теоретичному матеріалу з математичного моделювання, розумне його поєднання з теоретичним матеріалом кожної окремої математичної дисципліни забезпечують високий рівень знань студентів — майбутніх учителів математики з математичного моделювання і є міцною базою для формування навичок та вмінь математичного моделювання у них.

2.3 Роль практичних занять у формуванні навичок і вмінь математичного моделювання. Вимоги до системи задач

Загальні методичні вимоги до організації практичних занять.

Основні вміння математичного моделювання формуються у майбутніх учителів на практичних заняттях. У посібнику З. І. Слєпкань [216] зазначається: "Слово "прак тикум" від грецького "practicos" означає "діяльнісний". Термін практичні заняття у педагогіці вищої школи часто використовується як родове поняття, яке включає вла сне практичні заняття (їх інколи називають "вправи"), лабораторні заняття, семінар у всіх його різновидах, різноманітні навчальні та виробничі практики, зокрема педа гогічна практика в школі. Їхня мета — розширити, поглибити і уточнити теоретичні знання, одержані на лекціях і під час самостійної роботи, забезпечити вироблення навичок та вмінь застосовувати знання для розв'язування практичних і теоретичних завдань, а також формування професійних якостей майбутнього спеціаліста." [216, с . 123].

Практичні заняття є основною формою формування навичок і вмінь студентів з математичного моделювання. Основною метою їх є формування навичок і вмінь використання методу математичного моделювання. Для досягнення цієї мети необхідне виконання таких завдань:

- розробити систему різнорівневих задач, які можуть використовуватися в умовах особистісно-орієнтованого, диференційованого навчання;

- передбачати адекватні змісту методи і прийоми роботи під час практичних занять;
- обрати організаційні форми і засоби роботи зі студентами;
- здійснити оперативний і об'єктивний контроль щодо формування у студентів навичок і вмінь.

Щодо системи задач, то вона має складатися відповідно принаймні до трьох рівнів навчальних можливостей студентів і пропонуватися на практичних заняттях та в домашніх завданнях. На практичних заняттях мають використовуватися різні методи і організаційні форми навчання у відповідності з метою і змістом навчального матеріалу. Наприклад, на початкових етапах використання евристичних схем доцільно використовувати фронтальну роботу студентів, а під час самостійної роботи з розв'язування запропонованих задач є ефективними групові форми навчальної діяльності у поєднанні з індивідуальною формою роботи окремих студентів. Зрозуміло, що під час самостійної роботи як на практичному занятті, так і при виконанні домашніх завдань здійснюється дослідницький метод навчання. Щодо контролю і оцінювання навчальних досягнень студентів, то він має здійснюватися як на самому практичному занятті, так і за наслідками виконання домашніх завдань, самостійних і контрольних робіт. Серед засобів навчання на практичних заняттях доцільно використовувати графопроектор (кодоскоп) під час формулювання студентам задач та комп'ютери персонального користування при розв'язуванні задач за розширеною схемою.

Вимоги до системи задач.

Основним засобом навчання студентів математичного моделювання є задачі. Вдало підібрана система задач забезпечить формування навичок та вмінь математичного моделювання на досить високому рівні. Ця система задач носить інтегрований хара ктер, вона складається з підсистем задач, створених у рамках кожної математичної дисципліни. Вказані підсистеми задач мають спільні риси:

1. Всі вони містять прикладні задачі. *Прикладні задачі* — це задачі, які поставлені зовні математики і розв'язуються математичними методами і засобами. Прикладні задачі, як і будь-які інші задачі, у процесі навчання математики виконують різні дидактичні цілі, основними з яких є *навчаюча* (формування системи математичних знань, навичок і вмінь на різних етапах засвоєння); *виховна* (формування наукового світогляду, пізнавального інтересу і самостійності, навичок навчальної праці, моральних якостей особистості); *розвиваюча* (розвиток логічного мислення, оволодіння загальними та специфічними розумовими діями та ефективними прийомами розумової діяльності) [92,93]. Розв'язання будь-якої задачі прикладного характеру зводиться до побудови та дослідження відповідної математичної моделі [151,152,154,157,163].

2. Розв'язування задач здійснюється за спрощеною та розширеною евристичними схемами діяльності математичного моделювання.

3. За своїми дидактичними цілями задачі поділяються на *тренувальні* (для вироблення стійких навичок і вмінь) і *розвиваючі* (для розвитку, зокрема, і творчого мислення) [151]. *Тренувальні задачі* — задачі досить простого змісту, такі, що текст задачі містить підказку у виборі математичної моделі. Саме тренувальні задачі пови нні бути першими, що забезпечать поетапне оволодіння евристичною схемою

діяльності математичного моделювання. Зі студентами слід відпрацювати кожний етап схеми окремо. Складність у навчанні студентів математичного моделювання полягає в тому, що воно здійснюється різними викладачами, які проводять лекції та практичні заняття з фундаментальних курсів математики, елементарної математики, методики навчання математики. Звичайно, кожний викладач повинен ставитись творчо до процесу формування вмінь математичного моделювання, але доцільно до тримуватися наступних *методичних рекомендацій*:

- відпрацьовувати етапи діяльності математичного моделювання слід за наведеною вище спрощеною евристичною схемою з перших тижнів навчання студентів у педагогічному університеті;
- узгодженість дій викладачів: бажано, щоб всі починали одночасно, або з невеликими розривами у часі розв'язування тренувальних вправ на відпрацювання етапів спрощеної схеми математичного моделювання;
- неперервність у навчанні математичного моделювання. Зміст навчального матеріалу більшості з математичних дисциплін сприяє тому, що прикладні задачі можна розв'язувати майже на кожному практичному занятті, природно вплітаючи їх в систему предметних задач;
- на кінець I навчального семестру студенти повністю повинні засвоїти спрощену евристичну схему діяльності математичного моделювання і вміти застосовувати її до розв'язування не тільки тренувальних, а й розвиваючих задач.

Наведемо приклади тренувальних задач з різних математичних дисциплін, на яких можливо відпрацьовувати етапи схеми.

Задача 2.2 (аналітична геометрія, тема: "Скалярний добуток векторів")**.** Обчислити, яку роботу виконує сила $\vec{F}$(3;-2;-5), коли точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, переміщується з положення *A*(2;-3;-5) в положення *B*(3;-2;-1).

Розв'язання (*за етапами евристичної схеми*). **I. Попередній аналіз об'єкта дослідження.** З курсу фізики відомо, що робота дорівнює скалярному добутку двох векторів: сили та переміщення. Сила $\vec{F}$ задана своїми координатами в прямокутній декартовій системі координат, вектор переміщення легко знайти: з умови задачі слідує, що це вектор $\overrightarrow{AB}$.

II. Побудова математичної моделі. Позначимо роботу буквою *A*, вектор $\overrightarrow{AB}$ через $\vec{s}$, тоді з аналізу слідує, що $A = \vec{F}\cdot\vec{s}$. Отже, слід знайти скалярний добуток двох векторів $\vec{F}$ та $\vec{s}$, заданих своїми координатами.

III. Реалізація математичної моделі математичними методами. Скалярний добуток двох векторів, заданих своїми координатами, дорівнює сумі добутків відповідних координат цих векторів. Звідси слідує, що якщо

$$\vec{F}(3;-2;-5),\quad \vec{s}(3-2;-2-(-3);-1-5)=\vec{s}(1;1;-6),$$

то $A = 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + (-5) \cdot (-6) = 3 - 2 + 30 = 31$.

IV. Аналіз одержаних результатів та перенесення їх на об'єкт, що досліджується. Сила вимірюється в ньютонах, переміщення — в метрах, робота — в джоулях, тому шукана робота дорівнює 31 Дж. __

Задача 2.3 (математичний аналіз, тема: "Функції та їх класифікація")**.** Фермерське господарство реалізує свинину вартістю 9 грн за кілограм. Визначити функцію, що виражає дохід від продажу свинини. Яку кількість свинини треба продати, щоб дохід становив 11385 грн? Як зміниться дохід, якщо продаж свинини збільшиться на 500 кг?

Розв'язання. **І. Попередній аналіз об'єкта дослідження.** Вважатимемо, що дохід від реалізації продукції прямо пропорційний кількості цієї продукції.

ІІ. Побудова математичної моделі. Нехай D — дохід від реалізації продукції, S — вартість одиниці продукції (9 грн), x — кількість реалізованої продукції. Тоді дохід від реалізації продукції виражається функцією $D = S \cdot x$. Якщо продаж свинини збільшиться на Δx, то дохід зросте на $\Delta D = S \cdot \Delta x$.

ІІІ. Реалізація математичної моделі математичними методами. Функція $D = S\cdot x$ — лінійна функція, що набуває вигляду $D = 9 \cdot x$, звідси слідує, що $x = \frac{D}{9}$, приріст функції $\Delta D = 9 \cdot \Delta x$. Якщо $D = 11385$, то $x = \frac{11385}{9} = 1265$. Якщо $\Delta x = 500$, то $\Delta D = 9 \cdot 500 = 4500$.

IV. Аналіз одержаних результатів та перенесення їх на об'єкт, що досліджується. Щоб дохід становив 11385 грн, слід продати 1265 кг свинини, тому що $1265\cdot 9 = 11385$ (грн). Якщо продаж свинини збільшиться на 500 кг, то дохід від її реалізації зросте на 4500 грн.

Задача 2.4 (лінійна алгебра, тема: "Запис і розв'язування системи n лінійних рівнянь з n невідомими в матричній формі")**.** У цеху підприємства виготовляють дві моделі жіночого одягу. На виготовлення першої моделі витрачають 2 м тканини, на виготовлення другої — 3 м. При цьому витрати робочого часу на виробництво цих моделей становлять відповідно 5 та 7 год. Відомо, що запас тканини — 100 м, а робочий час обмежено 245 год. Скласти такий план виготовлення цих моделей одягу , при якому повністю використовують ресурси (тканину і робочий час).

Розв'язання. **І. Попередній аналіз об'єкта дослідження.** Запас тканини витрачається прямо пропорційно до суми витрат тканини на продукцію першої та другої моделі. Робочий час теж буде витрачатися прямо пропорційно до суми витрат робочого часу на виготовлення продукції кожної моделі.

ІІ. Побудова математичної моделі. Позначимо: x_1 — кількість одиниць випуску першої моделі; x_2 — кількість одиниць випуску другої моделі; $2x_1$ — витрати тканини на випуск першої моделі; $3x_2$ — витрати тканини на випуск другої моделі; $2x_1 + 3x_2$ — витрати тканини на випуск обох моделей одягу; $5x_1$ — витрати робочого часу на виготовлення першої моделі; $7x_2$ — витрати робочого часу на виготовлення другої моделі; $5x_1 + 7x_2$ — витрати робочого часу на виготовлення обох моделей.

Тоді з аналізу слідує, що $2x_1 + 3x_2 = 100$, а $5x_1 + 7x_2 = 245$. Оскільки ці співвідношення повинні виконуватись одночасно, то дістанемо математичну модель у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 100, \\ 5x_1 + 7x_2 = 245. \end{cases} \tag{2.3}$$

Слід розв'язати одержану систему з двох лінійних рівнянь з двома невідомими.

ІІІ. Реалізація математичної моделі математичними методами. Розв'яжемо систему (2.3) матричним способом. Запишемо її в матричному вигляді $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 100 \\ 245 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Для матриці A знайдемо обернену матрицю A^{-1}. Оскільки

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 15 = -1,$$

$$A_{11} = 7, \quad A_{12} = -5, \quad A_{21} = -3, \quad A_{22} = 2,$$

то

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Відомо, що $X = A^{-1} \cdot B$. Отже,

$$X = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 245 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -700 + 735 \\ 500 - 490 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 10 \end{pmatrix},$$

звідки $x_1 = 35$, $x_2 = 10$.

IV. Аналіз одержаних результатів та перенесення їх на об’єкт, що досліджується. Для повного використання ресурсів треба виготовити 35 одиниць першої та 10 одиниць другої моделей одягу. Переконаємося, що це справді так. На виготовлення 35 одиниць першої моделі витрачається 35 · 2 м = 70 (м) тканини, на виготовлення 10 одиниць другої моделі витрачається 10 · 3 м = 30 (м) тканини. Сумарні витрати тканини 70 м + 30 м = 100 м, що дорівнює запасу тканини. На виготовлення 35 одиниць першої моделі витрачається 35 · 5 год = 175 (год) часу, на виготовлення 10 одиниць другої моделі витрачається 10 · 7 год = 70 (год) часу. Сумарні витрати часу 175 год + 70 год = 245 год, що дорівнює обмеженню часу. Отже, для повного використання ресурсів слід виготовити 35 одиниць першої та 10 одиниць другої моделей одягу. ___

Наведені вище задачі досить прості, в процесі їх математичного моделювання відбувається швидкий перехід від одного етапу до іншого, що сприяє активному засвоєнню студентами спрощеної схеми евристичної діяльності математичного моделювання в цілому.

Аналіз робочих програм викладачів свідчить про те, що практичні заняття, на яких розв’язуються наведені та подібні їм задачі, проходять на одному навчальному тижні. Це забезпечує паралельність, неперервність і міжпредметний взаємозв’язок у навчанні студентів математичного моделювання.

Належної уваги формуванню вмінь математичного моделювання слід приділити при вивченні наступних тем: “Пряма на площині”, “Конічні перерізи: еліпс, гіпербола, парабола” (аналітична геометрія), “Системи лінійних рівнянь” (лінійна алгебра), “Похідна функції дійсної змінної” (математичний аналіз). Практичні заняття на закріплення навичок та вмінь з названих тем можна цілком присвячувати розв’язуванню прикладних задач (див. додаток Е). Користуючись евристичною схемою діяльності математичного моделювання, розв’яжемо розвиваючі задачі Е.6 та Е.10.

Розв’язання задачі Е.6. **І. Попередній аналіз об’єкта дослідження.** Для того, щоб визначити, для яких сіл вигідніший перший спосіб, а для яких — другий, слід знайти криву, що розмежовує ці області впливу.

ІІ. Побудова математичної моделі. Нехай станції A та B — відповідні точки на площині, l (км) — відстань між A та B; d_1 (грн) — вартість перевезення однієї тонни залізницею; d_2 (грн) — вартість перевезення автотранспортом; d (грн) — вартість додаткового перевантаження однієї тонни зерна при другому варіанті перевезень; M — точка, що позначає на площині населений пункт, з якого доставляємо зерно на елеватор.

Тоді ($d_2 \cdot |MA|$) (грн) — вартість доставки однієї тонни зерна з M в A при першому варіанті; ($d_2 \cdot |MB| + ld_1 + d$) (грн) — вартість доставки зерна при другому варіанті.

Для довільного M може виконуватись нерівність

$$d_2 \cdot |MA| < d_2 \cdot |MB| + ld_1 + d \tag{2.4}$$

або нерівність

$$d_2 \cdot |MA| > d_2 \cdot |MB| + ld_1 + d. \tag{2.5}$$

Слід знайти геометричне місце точок M, що є межею областей площини, для яких виконуються нерівності (2.4) та (2.5).

ІІІ. Реалізація математичної моделі математичними методами. Нерівності (2.4) та (2.5) запишемо у вигляді

$$d_2(|MA| - |MB|) < ld_1 + d \quad \text{та} \quad d_2(|MA| - |MB|) > ld_1 + d$$

відповідно. Перетворимо їх, і після перетворення вони набудуть вигляду

$$|MA| - |MB| < 2a, \quad |MA| - |MB| > 2a, \quad \text{де} \quad 2a = \frac{ld_1 + d}{d_2}.$$

Отже, шуканим геометричним місцем точок, що розмежовують області площини, для яких виконуються нерівності (2.4) та (2.5) є права вітка гіперболи з фокусами A та B.

IV. Аналіз одержаних результатів та перенесення їх на об'єкт, що досліджується. Якщо $d_2(|MA| - |MB|) < ld_1 + d$, то для M вигідний перший варіант (населений пункт лежить зліва від межі областей впливу). Якщо $d_2(|MA| - |MB|) > ld_1 + d$, то зручним є другий варіант (населений пункт M лежить справа від межі областей). __

Розв'язання задачі Е.10. **І. Попередній аналіз об'єкта дослідження.** Вартість перевезень вантажів із заводу A до міста B буде прямо пропорційною сумі витрат на перевезення вантажів по шосе та залізницею.

ІІ. Побудова математичної моделі. Позначимо місце розташування заводу точкою A, міста B — точкою B, N — проекція точки A на пряму, що зображає залізницю, X — місце будівництва станції перевантаження з автотранспорту на залізничний транспорт. Нехай $|NB| = a$ (км), $|AN| = c$ (км), k грн — вартість перевезення 1 тонни на 1 км залізницею, $m \cdot k$ грн — вартість перевезення 1 тонни на 1 км по шосе, $y(m)$ — план перевезень,

$|AX| = \frac{c}{\sin\alpha}$ (км), $|XB| = a - \frac{c\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (км).

Вартість перевезення:

$$V = g(\alpha) = \frac{c}{\sin\alpha} \cdot m \cdot k \cdot y + \left(a - \frac{c\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) \cdot k \cdot y = k \cdot y \cdot \left(\frac{cm}{\sin\alpha} + a - \frac{c\cos\alpha}{\sin\alpha}\right).$$

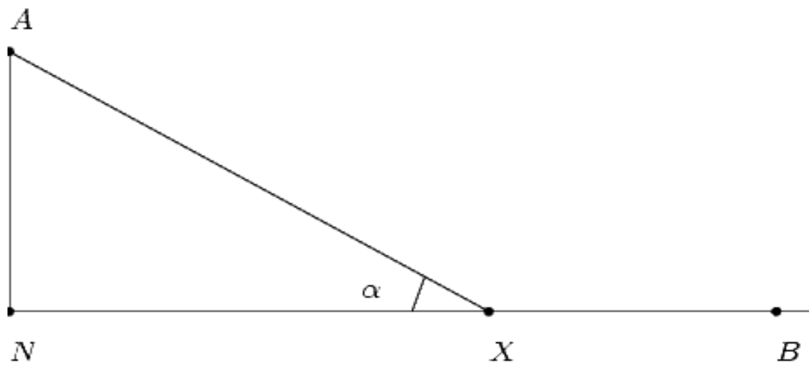


Рис. 2.3: Ілюстрація до задачі Е.10

$$g(\alpha) = k \cdot y \cdot c \cdot \left(\frac{m}{\sin\alpha} + \frac{a}{c} - \operatorname{ctg}\alpha\right).$$

Кут α потрібно вибрати таким, щоб мінімізувати значення функції $g(\alpha)$ (очевидно, що $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$). Ця задача рівносильна знаходженню точки мінімуму функції

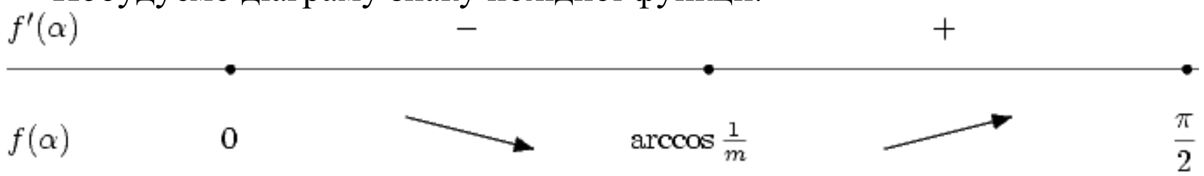
$$f(\alpha) = \frac{m}{\sin\alpha} + \frac{a}{c} - \operatorname{ctg}\alpha$$

на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$.

III. Реалізація математичної моделі математичними методами. Знайдемо точку мінімуму функції $f(\alpha)$:

$$f'(\alpha) = -\frac{m\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{1 - m\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = 0, \quad \cos\alpha = \frac{1}{m}, \quad \alpha = \arccos\frac{1}{m}.$$

Побудуємо діаграму знаку похідної функції.



Отже, $\alpha = \arccos\frac{1}{m}$ — єдина точка мінімуму функції f на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$. Тому у цій точці функція набуває найменшого значення на вказаному проміжку.

IV. Аналіз одержаних результатів та перенесення їх на об’єкт, що досліджується. Для мінімізації транспортних витрат шосе потрібно прокласти під кутом $\alpha = \arccos\frac{1}{m}$ до залізниці. __

Система прикладних задач з різних математичних дисциплін займає центральне місце як підсистема у системі задач, що є засобом формування вмінь математичного моделювання у студентів — майбутніх учителів математики.

Прикладні задачі доцільно включити до варіантів контрольних робіт та екзаменаційних білетів семестрових іспитів. Наведені задачі, в переважній більшості, можуть бути розв’язані і в шкільних курсах алгебри, геометрії та алгебри і початків аналізу.

Прикладні задачі широко використовуються для мотивації та активізації навчальної діяльності студентів. Приклади таких задач наведені у додатку Е.

Для формування вмінь математичного моделювання на практичних заняттях з диференціальних рівнянь досить широко доцільно використовувати прикладні задачі з посібників [6,53,69,127].

Досить широкі можливості для формування та закріплення вмінь математичного моделювання має така математична дисципліна як “Теорія ймовірностей та матема тична статистика”, якою завершується вивчення майбутніми вчителями математики фундаментальних математичних курсів. Приклади тренувальних і розвиваючих задач з цього курсу наведені у додатку Е.

У процесі навчання математичного моделювання заслуговують на увагу творчі завдання на складання розвиваючих текстових задач з різним змістом за даною ма тематичною моделлю, які свідчитимуть про те, що математичні методи дослідження носять універсальний характер і застосовуються для вивчення різних за своєю природою процесів.

Формування вмінь математичного моделювання через систему прикладних задач реалізується в межах кожної навчальної дисципліни систематично, неперервно, в межах кількох математичних дисциплін — паралельно і обов’язково за однією і тією ж евристичною схемою діяльності математичного моделювання. Навчання математичного моделювання сприяє міжпредметному узагальненню набутих знань і вмінь. В умовах рівневої диференціації навчання треба передбачити систему прикладних задач на трьох рівнях складності: задовільному, достатньому та високому, що розраховані для розв’язання студентами різних типологічних груп.

При розв’язанні технічних, економічних, суспільних, біологічних, фізичних задач достатнього та високого рівня складності застосовується розширена евристична схема діяльності математичного моделювання з широким використанням інформаційно-комунікаційних технологій.

Навчати студентів педагогічних університетів математичного моделювання за цією схемою доцільно і на спецкурсах. Зміст і методика проведення такого спецкурсу детально розглянута в п. 2.4.

Окрім прикладних задач, вміння математичного моделювання в педагогічному університеті слід формувати і в процесі розв’язування задач на створення аксіоматичної теорії та її аналізу, задач з неевклідових геометрій (наприклад, “Прое ктивної геометрії”, “Основ геометрії”), які розв’язуються лише на математичних моделях проективної прямої чи проективної площини, площини Лобачевського.

На першій лекції з проективної геометрії дається означення проективного простору: “Нехай V — векторний простір розмірності $n + 1$ над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел, а V — множина всіх ненульових векторів цього простору. Непорожня множина P називається проективним простором розмірності n (породженим векторним простором V), якщо задано відображення $f: V \to P$, що задовольняє наступні умови (аксіоми проективного простору):

1. Відображення f сюр’єктивне, тобто будь-який елемент з P має хоч би один прообраз.
2. Рівність $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$ виконується тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{x}$ та $\vec{y}$ колінеарні.

Якщо $f(\vec{x}) = X$, то кажуть, що вектор $\vec{x}$ породжує точку X. Оскільки неколінеарні вектори породжують різні точки, то проективний простір розмірності n має нескінченну множину точок.” [14, с. 9]. У курсі “Проективна геометрія” студенти вивчають в основному проективні властивості одновимірного та двовимірного проективного простору — проективної прямої та проективної площини. Студентам, уявлення яких про геометрію склалися в процесі вивчення евклідової геометрії, дуже складно зрозуміти такі абстрактні поняття як “проективна пряма” та “проективна площина”. Зрозуміти їх можливо, лише проінтерпретувавши в образах евклідової геометрії. Тому, перш ніж дати наведене вище означення проективного простору, студентам на моделях, побудованих в образах евклідової геометрії, пояснюють, що являє собою проективна пряма та проективна площина. Основними моделями проективної прямої є: 1) пучок евклідових прямих; 2) розширена евклідова пряма (евклідова пряма, доповнена нескінченно віддаленою точкою) [14, 165,197,200]. Основними моделями проективної площини є: 1) розширена евклідова площина (евклідова площина, доповнена нескінченно віддаленою прямою; нескінченно віддаленою прямою є геометричне місце усіх нескінченно віддалених точок площини) [14,165,197,200]; 2) в’язка прямих та площин, що проходять через деяку точку S простору.

На проективній прямій вводиться система координат, яку називають проективною системою координат. Координати точки проективної прямої визначаються координатами вектора евклідової площини, що породжує цю точку. Оскільки цілий клас колінеарних векторів породжує лише одну точку проективної прямої, то координати точки записуються у вигляді відношення: $M(X_1 : X_2)$. Проективна система координат на проективній прямій задається її фундаментальними точками: $E_1(1 : 0)$, $E_2(0 : 1)$, $E_0(1 : 1)$. Проективна система координат $R(E_1, E_2, E_0)$ на розширеній евклідовій прямій R_1 називається системою однорідних афінних координат, якщо точка E_1 — невласна. Сукупність точки O та вектора $\overrightarrow{OE}$ на евклідовій прямій R_1 задає систему неоднорідних афінних координат. Якщо $O = E_2$, $E = E_0$, то системи відповідні. Власна точка X прямої R_1, що має неоднорідну координату x, у відповідній однорідній системі координат має координати $(x : 1)$. Введення проективної системи координат на моделях дозволяє записувати рівняння геометричних образів, досліджувати ці образи, формулювати їх властивості у вигляді теорем, доводити ці теореми, вивчати проективні перетворення проективної прямої (інволюції) та проективної площини (колінеації). Основним засобом формування навичок та вмінь з проективної геометрії є задачі. Ці задачі дуже рідко розв’язуються в абстрактних образах проективної геометрії. Це не є дидактично доцільним. Більшість задач проективної геометрії розв’язуються на наведених вище математичних моделях проективних образів. Для роз’язання цих задач наведена вище евристична схема діяльності математичного моделювання також доцільна. Наведемо приклад задач, розв’язаних за цією схемою.

Задача 2.5 (тренувальна, проективна геометрія, тема: “Проективна система координат на проективній прямій”)**.** На евклідовій прямій R' дано своїми неоднорідними координатами точки $E_1(-1)$, $E_2(4)$, $E_0(1)$, $A(-2)$. Знайти проективні координати точки A в проективній системі координат $R(E_i)$. [165].

Розв’язання. **І. Попередній аналіз об’єкта дослідження.** Проективна система координат може бути задана лише на проективній прямій, тому дану евклідову пряму слід розширити, додавши до неї невласну точку. Цією точкою є $E_1(1 : 0)$.

ІІ. Побудова математичної моделі (у проективній геометрії доцільніше називати **вибір моделі**)**.** Отже, проективною прямою тут буде її модель — розширена евклідова пряма. Проективні координати виразимо через однорідні координати, використовуючи формули зв’язку між однорідними та неоднорідними афінними координатами на розширеній евклідовій прямій:

$$X = x_1/1. \tag{2.6}$$

На розширеній евклідовій прямій у нас буде задано дві системи проективних координат $R(E_1,E_2,E_0)$ та $R'(E_1',E_2',E_0')$. Знайшовши зв'язок між цими системами у вигляді співвідношень

$$\begin{cases} \mu x_1 = q_{11}x_1' + q_{12}x_2', \\ \mu x_2 = q_{21}x_1' + q_{22}x_2', \end{cases} \tag{2.7}$$

знайдемо координати точки A.

Розглянемо другу модель проективної прямої — пучок евклідових прямих. Знайти координати точки A на цій моделі — це означає знайти відношення координат власного вектора, що породжує точку A. Розглянемо відповідність між прямими пучка з вершиною в точці S і точками евклідової прямої, заданими в умові задачі.

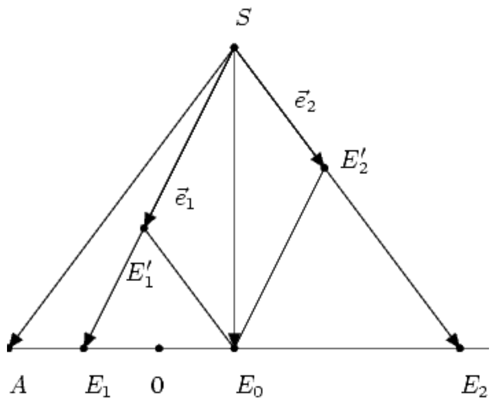


Рис. 2.4: Математична модель проективної прямої

Будемо вважати, що вектор $\overrightarrow{SA}$ породжує точку A проективної прямої, $\overrightarrow{SE_1}$ — точку E_1, $\overrightarrow{SE_2}$ — точку E_2, $\overrightarrow{SE_0}$ — точку E_0. Спроектуємо точку E_0, на прямій $\overrightarrow{SE_1}$ одержимо точку E_1', на $\overrightarrow{SE_2}$ — точку E_2'. Тоді $\overrightarrow{SE_1'} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{SE_2'} = \vec{e}_2$, вектори $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$ приймемо за вектори базису. Задачу, яку ми розглядаємо, можна записати в термінах евклідової геометрії: знайти координати вектора $\overrightarrow{SA}$ в базисі $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Отже, задачу можна розв'язати двома різними способами, в залежності від того, яку модель проективної прямої ми виберемо.

III. Реалізація математичної моделі математичними методами. *Перший спосіб.* Розв'язуємо задачу на розширеній евклідовій прямій. Відповідно до співвідношення (2.6), однорідні координати заданих в задачі точок будуть $E_1(-1 : 1)$, $E_2(4 : 1)$, $E_0(1 : 1)$, $A(-2 : 1)$ в системі координат R'. Але ці ж точки є фундаментальними точками проективної системи координат R: $E_1(1 : 0)$, $E_2(0 : 1)$, $E_0(1 : 1)$. У цій системі координат слід знайти координати точки A (табл. 2.1).

Табл. 2.1: Зв'язок між координатами точок у різних проективних системах координат

	E_1	E_2	E_0	A
$R(E_i)$	1 : 0	0 : 1	1 : 1	?
R'	-1 : 1	4 : 1	1 : 1	-2 : 1

Знайдемо рівняння переходу від однієї системи координат до іншої, скориставшись співвідношенням (2.7). Підставимо у формулу координати точок:

E_1: $\begin{cases} \mu_1 = -q_{11} + q_{12}, \\ 0 = -q_{21} + q_{22} \quad \Rightarrow \quad q_{21} = q_{22}, \end{cases}$

E_2: $\begin{cases} 0 = 4q_{11} + q_{12} \quad \Rightarrow \quad q_{12} = -4q_{11}, \\ \mu_2 = 4q_{21} + q_{22}, \end{cases}$

E_0: $\begin{cases} \mu_0 = q_{11} + q_{12}, \\ \mu_0 = q_{21} + q_{22}. \end{cases}$

Звідси

$$\begin{cases} \mu_1 = -q_{11} - 4q_{11} = -5q_{11}, & q_{11} = -\frac{1}{5}\mu_1, & q_{12} = \frac{4}{5}\mu_1, \\ \mu_2 = 4q_{22} + q_{22} = 5q_{22}, & q_{22} = \frac{1}{5}\mu_2, & q_{21} = \frac{1}{5}\mu_2 \end{cases}$$

і

$$\begin{cases} \mu_0 = -\frac{1}{5}\mu_1 + \frac{4}{5}\mu_1 = \frac{3}{5}\mu_1, \\ \mu_0 = \frac{1}{5}\mu_2 + \frac{1}{5}\mu_2 = \frac{2}{5}\mu_2. \end{cases}$$

Нехай $\mu_0 = 1$, то $\mu_1 = \frac{5}{3}$, а $\mu_2 = \frac{5}{2}$, тоді

$q_{11} = -\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{3} = -\frac{1}{3}$, $\qquad q_{12} = \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{3} = \frac{4}{3}$,

$q_{21} = \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{2} = \frac{1}{2}$, $\qquad q_{22} = \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{2} = \frac{1}{2}$.

Шукані формули переходу матимуть вигляд

$$\begin{cases} \mu x_1 = -\frac{1}{3}x_1' + \frac{4}{3}x_2', \\ \mu x_2 = \frac{1}{2}x_1' + \frac{1}{2}x_2'. \end{cases}$$

Знайдемо координати точки A:

$$\begin{cases} \mu x_1 = -\frac{1}{3}\cdot(-2) + \frac{4}{3}\cdot 1 = 2, \\ \mu x_2 = \frac{1}{2}\cdot(-2) + \frac{1}{2}\cdot 1 = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Точка $A(2 : -1/2)$, або ж $A(4 : -1)$.

Другий спосіб. Розглянемо рис. 2.4: $\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SE_1} + \overrightarrow{E_1A}$. Виразимо вектори $\overrightarrow{SE_1}$ та $\overrightarrow{E_1A}$ через вектори базису $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$. З подібності трикутників SE_1E_2 та $E_2'E_0E_2$ слідує, що $\overrightarrow{SE_1} = 5/3\,\vec{e}_1$. Аналогічно з подібності трикутників SE_1E_2 та $E_1'E_1E_0$ слідує, що $\overrightarrow{SE_2} = 5/2\,\vec{e}_2$. Вектор $\overrightarrow{E_1A}$ колінеарний вектору $\overrightarrow{E_2E_1}$:

$$\overrightarrow{E_1A} = \frac{1}{5}\overrightarrow{E_2E_1}, \quad \overrightarrow{E_1A} = \frac{1}{5}\left(\frac{5}{3}\vec{e}_1 - \frac{5}{2}\vec{e}_2\right).$$

$$\overrightarrow{SA} = \frac{5}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2, \quad \overrightarrow{SA} = 2\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2,$$

отже, точка A, породжена вектором $\overrightarrow{SA}$, має координати (2 : -1/2), або A(4 : -1).

IV. Аналіз одержаних результатів та перенесення їх на об'єкт, що досліджується. Шукані проективні координати точки A в системі координат R з фундаментальними точками $E_1(1 : 0)$, $E_2(0 : 1)$, $E_0(1 : 1)$ — (4 : -1). Проективні координати точки A однакові на обох моделях проективної прямої, що свідчить про те, що проективні координати точки на проективній прямій не залежить від вибору моделі цієї проективної прямої. __

У процесі розв'язування цієї задачі формуються наступні вміння:

1. *Математичного моделювання*, а саме:
   - вміти інтерпретувати основні поняття та відношення проективної геометрії в термінах евклідової геометрії;
   - вміти доцільно вибирати з кількох моделей найбільш зручну для розв'язання тієї чи іншої проблеми (доведення теореми, розв'язання задачі);
   - вміти аналізувати одержаний результат на моделі та представляти його в образах проективної геометрії;
   - розуміти евклідову природу проективних координат.
2. *Проективної геометрії*:
   - знаходити зв'язок між різними системами проективних координат у вигляді формул;
   - знаходити однорідні координати точок, коли задані її неоднорідні координати.

Наведену задачу необхідно розв'язувати обома способами. Перший спосіб є вдалим для формування вмінь і з математичного моделювання, і з проективної гео метрії, другий спосіб формує вміння з математичного моделювання. Таким чином, математичні моделі абстрактної теорії проективної геометрії допомагають правильно та наочно зрозуміти теорію проективної геометрії. Звичайно, наведений приклад — один з найпростіших: "Задачу 2.5" розв'язують на другому практичному занятті з проективної геометрії. Але саме на перших практичних заняттях слід підкреслювати зв'язок між евклідовою та проективною геометрією через математичне моделювання.

При вивченні як проективної геометрії, так і інших розділів геометрії, які прийнято називати неевклідовими, математичне моделювання є тим ключем до розуміння суті цих теорій, що забезпечує у студентів міцність знань та позбавляє їх від труднощів, пов'язаних з високим рівнем абстрактності.

Важливе місце в системі задач займають задачі, математичні моделі яких забезпечують розуміння аксіоматичної побудови геометричної теорії. При побудові та аналізі таких математичних моделей формуються наступні вміння математичного моделювання:

- вміти створювати моделі аксіоматичних теорій: інтерпретувати основні (неозначувані) поняття, положення та відношення систем аксіом в термінах конкретних математичних теорій (знаходити конкретні множини і відношення на них, які мають задані властивості);
- вміти обґрунтовувати еквівалентність тверджень, зокрема, аксіом;

- вміти перевіряти несуперечливість, незалежність, повноту, категоричність системи аксіом.

Перераховані вміння формуються в основному в процесі вивчення курсу “Основи геометрії”. Вивчаючи аксіоматичний метод обґрунтування сучасної геометричної теорії, студенти знайомляться з різними системами аксіом: Евкліда, Г. Вейля, Д. Гільберта, М. І. Лобачевського та їх математичними моделями. Роль математичних моделей в аксіоматичному методі надзвичайно важлива, адже саме на моделях перевіряється несуперечливість, незалежність та повнота певної системи аксіом. Так , математичні моделі Вейля та Гільберта побудовані на основі арифметики дійсних чисел. Ці моделі описані в посібниках [14,15,54,239]. Під час вивчення курсу “Основи геометрії” студенти не тільки знайомляться з наведеними моделями, вони вчаться будувати моделі конкретної системи аксіом самостійно. Евристична схема діяльності математичного моделювання залишається для цих задач такою ж, як і для прикладних задач, лише поетапна діяльність за цією схемою набуває іншого змісту. Перший та другий етапи тут не змінюються. Третій етап зводиться до перевірки виконання кожної аксіоми системи на побудованій моделі. Виконуючи четвертий етап, студенти дають відповідь на запитання: “Чи є побудована модель математичною моделлю системи аксіом, чи ні?”, встановлюють, що треба змінити в моделі, щоб на ній виконувалися всі аксіоми системи. Розглянемо приклад.

Задача 2.6 (основи геометрії, тема: “Аксіоматичний метод побудови сучасної геометрії”)**.** Побудувати модель системи аксіом:

Аксіома 1. Пряма, площина — множини точок.

Аксіома 2. Дві різні точки визначають пряму, якій вони належать. **Аксіома 3.** Дві різні точки визначають не більше, ніж одну пряму, якій вони належать.

Аксіома 4. На кожній прямій існує принаймні дві різні точки. Існує три точки, які одній прямій не належать.

Аксіома 5. Три точки, які не належать одній прямій, визначають одну і тільки одну площину, якій вони належать.

Розв'язання. **І. Попередній аналіз об'єкта дослідження.** Модель будуватимемо на множині $\{1;2;3;4\}$.

ІІ. Побудова математичної моделі. Проінтерпретуємо основні поняття та основні відношення системи аксіом. Основні поняття: точки, прямі, площини. Основне відношення: відношення належності. Під точками будемо розуміти числа 1, 2, 3, 4. Під прямими — двоелементні множини чисел $\{1;2\}$, $\{1;3\}$, $\{1;4\}$, $\{2;3\}$, $\{2;4\}$, $\{3;4\}$. Під площинами — трьохелементні множини чисел $\{1;2;3\}$, $\{1;2;4\}$, $\{2;3;4\}$, $\{1;3;4\}$.

ІІІ. Реалізація математичної моделі математичними методами. Перевіримо виконання системи аксіом на побудованій моделі.

Аксіома 1: Двоелементні та трьохелементні множини — числові. Виконується.

Аксіома 2: Два різні числа визначають двохелементну множину, до якої вони належать. Виконується.

Аксіома 3: Два різні числа визначають не більше, ніж одну двохелементну множину, до якої вони належать. Виконується.

Аксіома 4: У кожній двохелементній множині існує принаймні два різних числа. Існує три числа, які до однієї двохелементної множини не належать. Виконується.

Аксіома 5: Три числа, які не належать до однієї двохелементної множини, визначають одну і тільки одну трьохелементну множину, до якої вони належать. Виконується.

IV. Аналіз одержаних результатів та перенесення їх на об’єкт, що досліджується. Задана система аксіом виконується на побудованій моделі. Отже, побудована математична модель і є шуканою. __

Система задач обов’язково повинна включати і задачі на побудову геометричних моделей. Під геометричними моделями розуміють зображення просторових геомет ричних фігур на площині. Ці моделі називають просто зображенням фігури. Існують різні способи їх побудови. У шкільному курсі геометрії застосовується спосіб, в ос нові якого лежить паралельне проектування. Одержані цим способом зображення досить наочні і легко можуть бути побудовані [14]. Задачі на побудову зображень геометричних фігур розглядаються в розділі “Методи зображень”. Розв’язуючи ці задачі, студенти набувають наступних вмінь математичного моделювання:

- ототожнювати геометричну модель з математичною моделлю, тобто бачити в геометричній моделі певний вид математичної моделі;
- класифікувати всі математичні моделі, що розглядаються в геометрії, на два види: математичні моделі, побудовані геометричними методами; геометричні моделі.

Побудова геометричних моделей здійснюється за евристичною схемою діяльності математичного моделювання. Наведемо приклад.

Задача 2.7 (тренувальна, методи зображень, тема: “Побудова зображень правильних многокутників”)**.** Побудувати зображення правильного п’ятикутника [71 , с. 13].

Розв’язання. **І. Попередній аналіз об’єкта дослідження.** Зображення правильного п’ятикутника на деякій площині — це образ даного п’ятикутника, одержаний в результаті паралельного проектування його на площину зображення. При цьому виконуються такі властивості, важливі для побудови даного зображення:

1. Паралельні прямі переходять в паралельні прямі.
2. Зберігається просте відношення трьох точок прямої.
3. Зберігаються довжини відрізків, розташованих на паралельних прямих.
4. Довжини відрізків, розташованих на непаралельних прямих, не зберігаються.

Враховуючи ці властивості, можна сказати, що зображенням правильного п’ятикутника буде довільний п’ятикутник.

ІІ. Побудова математичної (геометричної) моделі. Розглянемо правильний п’ятикутник $A'B'C'D'E'$. Проведемо діагоналі $A'C'$, $B'D'$ і $A'D'$. Трикутники $A'F'D'$ і $C'F'B'$ подібні за двома сторонами та кутом між ними. З подібності названих трикутників слідує, що

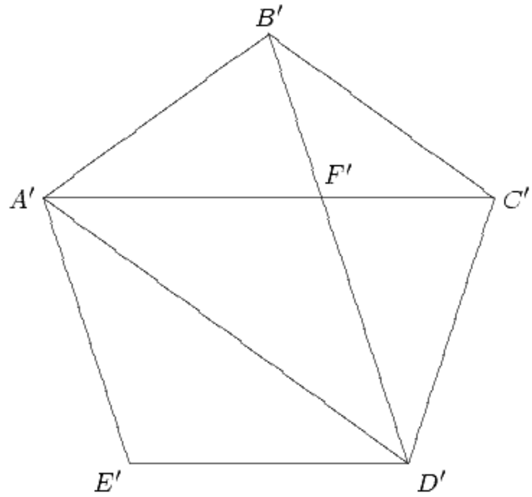


Рис. 2.5: Правильний п’ятикутник

$$A'F' : F'C' = A'D' : B'C'. \qquad (2.8)$$

Отже, при побудові зображення точка F (образ точки F') буде ділити відрізок AC (образ відрізка $A'C'$) у відношенні $AF : FC = A'F' : F'C'$ (за властивістю 2).

З властивостей правильного п’ятикутника слідує, що $|A'F'| = |A'B'|$, позначимо $|A'F'| = a'$, $|A'D'| = |A'C'| = d'$. Тоді співвідношення (2.8) можна записати у вигляді

$$a' : (d' - a') = d' : a'. \qquad (2.9)$$

При побудові зображення $a' \to a$, $d' \to d$, за властивістю 2 збереження співвідношення (2.9):

$$a : (d - a) = d : a, \quad \text{або ж} \quad d^2 - ad - a^2 = 0.$$

Розв’яжемо одержане квадратне рівняння відносно d:

$$d = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}.$$

Побудову зображення слід почати із зображення площини π. На площині π будуємо довільний трикутник ADE, що є образом трикутника $A'D'E'$, потім на основі властивості 1 добудовуємо його до паралелограма $AEDF$. Не порушуючи загальності, вважатимемо $|ED| = a$, тоді $|AC| = d = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$. П’яту вершину п’ятикутника — точку B, знаходять як точку перетину прямої, проведеної через точку C паралельно до прямої AD, з прямою FD. Побудований п’ятикутник $ABCDE$ буде шуканим зображенням правильного п’ятикутника, його геометричною моделлю.

III. Реалізація математичної моделі математичними методами. Будуємо зображення правильного п’ятикутника циркулем та лінійкою згідно опису, даного в пункті II, а саме:

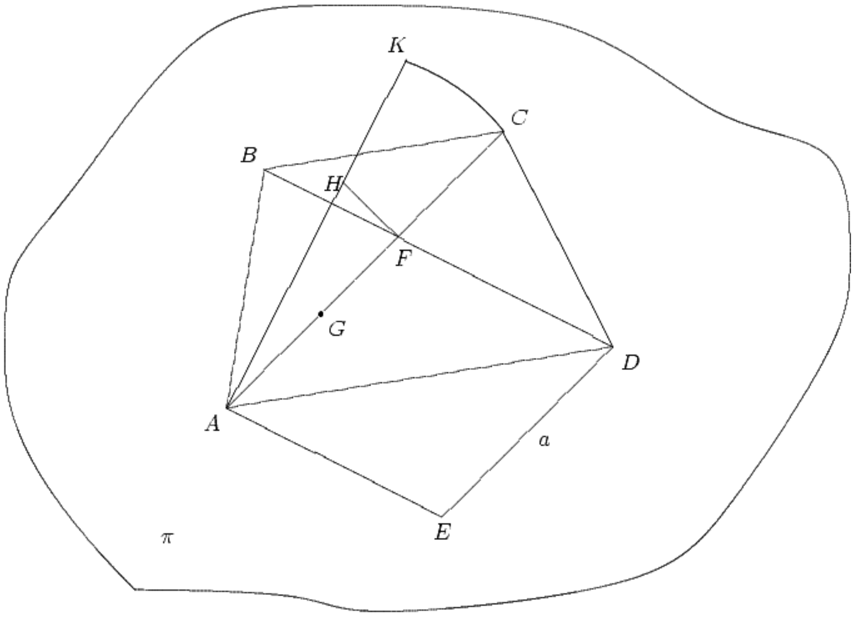


Рис. 2.6: Геометрична модель правильного п’ятикутника

1. $\triangle ADE$ — довільний трикутник у площині π.
2. $(AF) \parallel (ED)$, $(FD) \parallel (AE)$, $(AF) \cap (FD) = F$, паралелограм $AFDE$, де $|AF| = |ED| = a$.
3. точка G, $|AG| = |GF| = \frac{a}{2}$.
4. $|FH| = |FG| = \frac{a}{2}$.
5. $|AH| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$.
6. $|AK| = \frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$.
7. На прямій (AF) будуємо $|AC| = |AK|$.
8. $(CB) \parallel (AD)$.
9. $(CB) \cap (FD) = B$.
10. $ABCDE$ — шукане зображення правильного п’ятикутника.

IV. Аналіз одержаних результатів та перенесення їх на об’єкт, що досліджується. Побудований п’ятикутник $ABCDE$ є зображенням правильного п’ятикутника $A'B'C'D'E'$, тому що задовольняє властивості паралельного проектування 1–4. Побудову моделі можна дещо спростити, поклавши $a = 1$, тоді $d = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx \frac{3}{2}$. Так дуже часто поступають на практиці, зокрема, при побудові зображень п’ятикутника в шкільному курсі геометрії. __

Розглянуту задачу можна розв’язувати за допомогою комп’ютерного педагогічно -програмного засобу GRAN-2D, тоді в евристичній схемі діяльності пункт 3 слід замінити на пункт “Реалізація математичної моделі засобами інформаційно-комунікаційних технологій”.

Евристична схема діяльності математичного моделювання, як показує розглянутий приклад, цілком адаптована до розв’язування задач з методів зображень.

Ми навели можливу систему задач як основного засобу формування вмінь математичного моделювання у майбутніх учителів математики і показали, що можливі наступні класифікації підсистем у системі задач, що формують вміння математичного моделювання:

1. по предметно (з аналітичної геометрії, лінійної алгебри, математичного аналізу, диференціальних рівнянь, проективної геометрії та методів зображень , диференціальної геометрії та топології, теорії ймовірностей та математичної статистики, елементарної математики, методів обчислень, основ геометрії);
2. за призначенням (прикладні; задачі, що забезпечують розуміння та розвиток математичної теорії, до яких відносяться задачі, пов’язані з геометричним моделюванням).

Відповідно до наведеної класифікації сформулюємо вимоги до системи задач:

1. відбір задач повинен відповідати математичному змісту курсу;
2. в основу класифікації системи задач мають бути покладені види математичних моделей, які створюються при їх розв’язанні або містяться в умовах окремих задач;
3. задачі системи повинні відповідати їх дидактичним функціям у процесі навчання математики;
4. необхідна можливість одержувати розв’язання задач системи не тільки незалежно від інших, а й на основі розв’язання попередніх;
5. вміння розв’язувати задачі одного типу повинно полегшувати розв’язування задач іншого типу (реалізація принципу наступності);
6. відбір задач слід здійснювати диференційовано для різних типологічних груп студентів;
7. сприяти міжпредметному узагальненню набутих знань і вмінь;
8. використовувати універсальність математичних моделей, аналогічність побудови математичних моделей для різних за змістом задач;
9. передбачати можливість розв’язання задач різними способами;
10. сприяти оволодінню прийомами як алгоритмічної, так і евристичної діяльності за спрощеною та розширеною схемами.

Основною підсистемою задач у системі, що нами розглядається, є підсистема прикладних задач. Сформулюємо наступні вимоги до цієї підсистеми:

1. задачі повинні мати реальний прикладний зміст, який забезпечує ілюстрацію практичної цінності і значущості набутих математичних знань;
2. задачі повинні відповідати змісту університетських програм і діючих навчальних посібників щодо методів і фактів, які будуть використовуватися в процесі їх розв’язування;
3. повинні ілюструвати практичне застосування математичних ідей і методів у сучасних галузях наук, виробництві та життєвій практиці;
4. у змісті задач повинен бути відображений особистий досвід студентів, місцевий матеріал, на якому можна ефективно показати використання набутих знань;
5. поняття і терміни задачі мають бути відомі або зрозумілі студентам інтуїтивно , не повинно бути термінів і понять, роз’яснення яких вимагає значного навчального часу;
6. числові дані повинні бути реальними, при цьому можливе використання методів наближених обчислень;

7. являти деякий теоретичний вступ до проблеми, що вивчається;
8. бути спрямовані на формування вмінь математичного моделювання, що відповідають типовим завданням діяльності:
   - створення математичної моделі реального об’єкта, процесу, явища;
   - аналіз створеної моделі реального об’єкта;
   - дослідження математичної моделі з використанням засобів комп’ютерної техніки;
   - створення аксіоматичної теорії та її аналіз [37].

Перераховані вимоги слід враховувати при підготовці до практичних занять, написанні курсових робіт, кваліфікаційних робіт.

Методика організації та проведення практичних занять з математичного моделювання.

Найбільш вдалими для формування вмінь математичного моделювання у студентів є такі види практичних занять:

1. *Власне практичні заняття*. Ці заняття можуть бути присвячені як формуванню вмінь математичного моделювання, так і їх закріпленню. Такі практичні заняття можуть бути після вступних лекцій з математичного моделювання. На цих заняттях студентами усвідомлюється і осмислюється спрощена евристична схема діяльності математичного моделювання, формуються навички і вміння розв’язування прикладних задач за цією схемою. На цих заняттях закладається основа для подальшого формування вмінь математичного моделювання в межах кожної математичної дисципліни, яка буде вивчатися майбутніми вчителями згідно навчального плану. Окрім вступних практичних занять, безпосередньо присвячених математичному моделюванню, на практичних заняттях слід розв’язувати прикладні задачі методом математичного моделювання. Це забезпечить формування як вмінь оперувати певними поняттями і твердженнями конкретної математичної дисципліни (алгебри, геометрії, математичного аналізу і т. п.), так і вмінь математичного моделювання. При цьому відповідні вміння з кожної математичної дисципліни є первинними, а вміння математичного моделювання, сформовані на їх основі, є вторинними.

2. *Лабораторні роботи*. Лабораторні роботи найбільш ефективні як практичні заняття, що проводяться після лекційних занять спецкурсів з математичного моделювання. На таких лабораторних роботах студенти розв’язують прикладні задачі за розширеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання. Лабораторні роботи інтегрують теоретико-методологічні знання, практичні навички і вміння математичного моделювання в єдиному процесі діяльності навчально-дослідницького характеру. Під впливом цієї форми занять у студентів часто виникають нові ідеї наукового і технічного характеру, які використовуються у курсових, кваліфікаційних роботах. Розвиваються творчі здібності студентів — майбутніх учителів, їхні дослідницькі інтереси і вміння.

Під час лабораторних робіт з математичного моделювання у студентів формуються навички і вміння побудови алгоритмів та вибору програм для їх реалізації на комп’ютері, проведення обчислювального експерименту, аналіз результатів експерименту. Лабораторні роботи з математичного моделювання необхідно проводити з допомогою комп’ютерів. Основні вимоги до проведення таких лабораторних робіт загальновідомі, висвітлені у посібнику З. І. Слєпкань [216] та в лабораторному практикумі з курсу “Чисельні методи” [113]:

1. Важливою умовою ефективності проведення лабораторних робіт є теоретична підготовка студентів і попередня перевірка викладачем готовності студента (“допуск” до роботи).
2. Необхідною умовою організації лабораторної роботи є підготовка інструкції щодо її проведення, яку студенти мають уважно вивчити на початку заняття.
3. Оскільки лабораторні роботи проводяться за допомогою комп’ютерів, важливі навички та вміння студентів роботи з програмним забезпеченням, з масивами числових даних, на основі яких проводиться обчислювальний експеримент.
4. На лабораторних роботах однією з ефективних форм навчальної діяльності є спільна групова робота. Важливо так організувати роботу групи, щоб кожний студент знайшов свої місце, відповідну роль, належну частку участі у виконанні роботи і відповідну оцінку викладача.

Розглядаючи метод математичного моделювання як метод навчального пізнання, слід ще раз наголосити, що серед математичних моделей, з якими в процесі навчання у університеті має справу майбутній учитель математики, є ще і навчальні математичні моделі. На спеціальному лабораторному практикумі з методики навчання математики студенти навчаються виготовляти різноманітні навчальні математичні моделі під час формування понять, навчання методам і способам доведень, розв’язання задач [78].

3. *Семінарські заняття.* Такі заняття як форма практичних занять теж є особливо ефективними в межах спецкурсів з математичного моделювання. Особливо вдалим є поєднання, коли частина практичних занять є семінари, а частина — лабораторні роботи. Більшість проблем технічного, природничого чи економічного характеру, сформульовані у вигляді задач, які слід розв’язати методом математичного моделю вання за розширеною евристичною схемою, є досить складними і вимагають певних знань з галузі, в якій задача виникла. Ці знання можна одержати з довідників або з іншої спеціальної літератури. Тому розв’язання такої задачі вимагає попередньої підготовки студентів. Ця підготовка ведеться студентами самостійно, але під керівництвом викладача, а результати її повідомляються у вигляді доповідей на семінарських заняттях. Причому доповіді можуть бути присвячені як розв’язанню задачі-проблеми повністю, так і повідомленню відомостей, необхідних для розв’язування таких задач, а самі задачі розв’язуються тут же в аудиторії колективно з допомогою викладача або без нього. Ці семінари сприяють формуванню у студентів найважливіших інтелектуальних навичок і вмінь, зокрема, вміння аналізувати факти і події, порівнювати, узагальнювати і систематизувати набуті знання і вміння. Вони сприяють розвитку творчості студентів.

Загальновідомо [111,216], що поширеними є три види семінарських занять:

1. семінар, метою якого є поглиблення лекційного курсу;
2. семінар, який ставить за мету ґрунтовне опрацювання окремих, найбільш важливих у методологічному плані тем курсу або навіть однієї теми;
3. семінар, де широко використовується дослідницький метод навчання, тому що діяльність студентів, організована за розширеною евристичною схемою математичного моделювання, сприяє цьому.

Окрім семінарів з математичного моделювання, що проводяться в межах спецкурсів з математичного моделювання, досить ефективно проводити семінари з питань навчання математичного моделювання учнів загальноосвітніх шкіл у процесі вивчення ними шкільної математики. Такі семінари проводяться при вивченні майбутніми вчителями дисципліни "Методика навчання математики".

Ми коротко охарактеризували основні види практичних занять, на яких формуються та закріплюються вміння математичного моделювання у майбутніх учителів математики. У п. 2.2 зазначалося, що слід обов'язково для студентів-першокурсників прочитати одну або дві вступні лекції з математичного моделювання. Після цих лекцій необхідно провести практичне заняття на тему "Розв'язування задач методом математичного моделювання".

Слід зауважити, що задачі на практичному занятті розв'язуються студентами під керівництвом викладача за традиційною формою: один студент розв'язує задачу біля дошки, решта студентів обговорюють задачу та допомагають тому, хто розв'язує, з місця. Викладач спрямовує роботу студентів, даючи їм підказки в тих місцях, що викликають труднощі.

Щодо загального підходу до добірки задач розробленого практичного заняття, то слід зауважити, що задачі повинні підбиратися досить прості за практичним змістом і такі, щоб математична реалізація моделі не вимагала трудомістких математичних дій та операцій, і на це не витрачалося багато часу. Основна увага повинна бути спрямована на формування навичок та вмінь працювати за евристичною схемою діяльності математичного моделювання. На кінець заняття студенти повинні знати, що саме слід виконувати на кожному етапі математичного моделювання за спрощеною евристичною схемою, запам'ятати саму послідовність етапів, вміти застосовувати схему до розв'язування задач, математичними моделями яких є рівняння, нерівності, функції та їх похідні, системи рівнянь. На цьому занятті доцільно розглянути задачу, математичною моделлю якої є лінійне рівняння з параметром. Взагалі, задачі з параметрами відіграють важливу роль у формуванні вмінь математичного моделювання. О. І. Скафа у посібнику [205] на конкретних прикладах показує, що коли в процесі навчання математики використовувати систему задач з параметрами, яка містить розгляд цих задач як моделей реальних систем і процесів, їх дослідження, а також узагальнення математичних задач і тверджень, використовуючи при цьому прийоми евристичної і дослідницької діяльності, то можливе більш повноцінне формування в учнів (студентів) мислительних операцій, евристичних навичок та вмінь, реалізація через такі системи міжпредметних зв'язків, а також розвиток інтересу до математики як навчального предмету.

На побудову математичних моделей процесів, що містять параметри, слід звертати увагу при вивченні всіх математичних дисциплін, а також елементарної математики. Саме з елементарної математики слід провести практичне заняття на тему "Математичне моделювання задач з параметрами". Окрім задач на побудову математичних моделей, на такому занятті слід розв'язувати задачі на дослідження математичних моделей.

Задача 2.8. Вивчалася залежність швидкості росту міцелія гриба (мм за добу) від t °С. Дані наведено в таблиці 2.2.

Табл. 2.2: Залежність швидкості росту міцелія гриба від температури

t	1	2	2	2	2	2	3
°	8	0	2	4	6	8	0
V	5	9	1	1	1	1	2
			1	2	4	8	2

Теоретична залежність має вид $y = at + b$, де y — швидкість зросту міцелія (мм/добу), t — температура за шкалою Цельсія. Визначити параметри a та b, які найбільше відповідають емпіричній залежності.

Перед студентами слід на цьому практичному занятті ставити і таке завдання: скласти задачу за даною математичною моделлю.

Задача 2.9. Знайти прикладну інтерпретацію задачі: при всіх значеннях параметра b знайти значення x, при яких $f'(x) = 0$, якщо $f(x) = 2bx^2 - \frac{x^3}{3b} - (2b-1)x$. Прикладною інтерпретацією даної задачі могла б бути така задача: "Тіло рухається за законом $S(t) = 2bt^2 - \frac{t^3}{3b} - (2b - 1)t$. Визначити час зупинки тіла при всіх b."

Задачі на дослідження математичних моделей та складання прикладної інтерпретації деякої математичної моделі не доцільно розглядати на першому практичному занятті з математичного моделювання, тому що це значно розширить дидактичні завдання заняття і відволікатиме студентів від засвоєння евристичної схеми діяльності математичного моделювання. Оскільки для задач дослідження математичних моделей такого типу, як нами наведена задача 2.8, I та II етапи схеми спрощуються, тому що модель будувати не треба, вона дана в задачах, фактично виконуються лише III та IV етапи.

Для завдання знаходження прикладної інтерпретації даної математичної моделі (складання задачі за її математичною моделлю) дана спрощена евристична схема діяльності не підходить. Ця діяльність більш творча і більш складна. Для того, щоб таке завдання можна було поставити перед студентами, треба, щоб у них був певний досвід математичного моделювання прикладних задач, при якому будується дана математична модель, і тільки тоді перед ними можна поставити обернену задачу — за даною математичною моделлю скласти прикладну задачу.

Практичне заняття "Розв'язування задач методом математичного моделювання" — одне з перших практичних занять студентів-першокурсників в університеті, яке йде безпосередньо після вступних лекцій з математичного моделювання. Оскільки в сучасній школі навчанню математичного моделювання не приділяють належної уваги, то діяльність математичного моделювання навіть за спрощеною евристичною схемою є для більшості з них новою і тому викликає труднощі. Складання задач за даною математичною моделлю саме на цьому занятті викличе ще більші труднощі і може створити певний психологічний бар'єр в оволодінні методом математичного моделювання у окремих студентів.

Навчати складати задачі за даною математичною моделлю зручно на практичних заняттях, які містять елементи математичного моделювання і присвячені вивченню властивостей одного або небагатьох математичних образів та їх властивостей. На приклад, при вивченні теми "Похідна функції однієї змінної" (математичний аналіз) на практичному занятті зі студентами розв'язують спочатку задачі на знаходження похідних даних функцій, потім прикладні задачі за спрощеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання, в яких похідна функції є математичною моделлю (найбільш поширеним прикладом таких задач є задачі на рівноприскорений рух), а потім студентам доцільно запропонувати скласти задачу за математичною моделлю, тобто дати завдання, подібне до завдання 2.9.

Практичні заняття з елементами математичного моделювання (це заняття, на яких формуються як суто математичні вміння, так і вміння математичного моделювання) повинні складати переважну більшість з усіх практичних занять з математичних дисциплін, які вивчаються майбутніми вчителями в університеті.

Другою формою практичних занять з математичного моделювання в університеті є лабораторні роботи. Лабораторні роботи, так як і власне практичні заняття, можуть бути цілком присвячені математичному моделюванню, а можуть містити лише еле менти математичного моделювання. Приклад лабораторної роботи з елементами математичного моделювання з "Методів обчислень" наведений у посібнику [113, с. 34–45].

Завдання до лабораторної роботи свідчать про необхідність розгляду в курсі "Методи обчислень" розширеної евристичної схеми діяльності математичного мо делювання. Цю схему слід дати студентам у вступній лекції з "Методів обчислень". Під час лекції про лінійне програмування та симплекс-метод цю схему ще раз повторюють і наводять приклад практичної задачі, яка розв'язується за цією схемою .

Під час лабораторної роботи "Задача лінійного програмування та її розв'язування симплекс-методом" [113, с. 34–45] студенти повинні розв'язати за розширеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання задачі, наведені у додатку Е [113, с. 38–41].

У процесі виконання даної лабораторної роботи у майбутніх учителів математики формуються та закріплюються такі вміння математичного моделювання:

- вміти сформулювати проблему-потребу математичного моделювання;
- вміти осмислити і конкретизувати проблему та визначити можливості її математичної ідеалізації;
- вміти виділяти об'єкт математичного моделювання;
- вміти виконати словесно-змістовний опис математичного об'єкта моделювання;
- вміти виявити множину елементів системи і визначити їх властивості;
- вміти знайти зв'язки і відношення між елементами системи і записати їх у математичній формі;
- вміти добирати ефективний метод дослідження математичної моделі для розв'язування поставленої задачі;
- вміти добирати та використовувати готові програмні засоби (математичні пакети прикладних програм) для символьно- формульного, графічного, чисельного аналізу математичних моделей реальних об'єктів;
- вміти при необхідності розробити алгоритм і програму для розв'язування математичної задачі, яка є математичною моделлю.

Під час проведення спецкурсів з математичного моделювання зі студентами слід провести принаймні три лабораторні роботи цілком присвячені математичному моделюванню процесів і явищ навколишнього світу. Тематика цих лабораторних робіт може бути, наприклад, такою.

Лабораторна робота № 1: “Обчислювальний експеримент у математичному моделюванні процесів теплопровідності”.

Лабораторна робота № 2: “Математичне моделювання в екології”.

Лабораторна робота № 3: “Моделювання випадкових процесів у системах масового обслуговування”.

Тема № 1 важлива тим, що в процесі цієї лабораторної роботи студенти набудуть вмінь виконання обчислювального експерименту на основі дослідження фізичного процесу теплопровідності. Взагалі, фізика — наука, в якій математичне моделюван ня є надзвичайно важливим методом дослідження. Поряд з традиційним поділом фізики на експериментальну і теоретичну сьогодні виділяється третій фундамента льний розділ — обчислювальна фізика (computational physics). Причину цього в цілому можна сформулювати так: при максимальному проникненні в фізику мате матичних методів, реальні можливості розв’язання виникаючих математичних задач традиційними методами дуже обмежені. З багатьох конкретних причин слід виділити дві, які найчастіше зустрічаються: нелінійність багатьох фізичних процесів і необхідність дослідження спільного руху багатьох тіл, для якого доводиться розв’язувати системи великого числа рівнянь. Таке чисельне моделювання у фізиці (і не тільки) називають обчислювальним експериментом, оскільки воно має багато спільного з лабораторним (натурним) експериментом. Аналогії між натурним і об числювальним експериментом можна показати у вигляді табл. 2.3.

Табл. 2.3: Аналогії між натурним і обчислювальним експериментом

Лабораторний експеримент	Обчислювальний експеримент
Зразок	Модель
Фізичний прилад	Програма для комп’ютера
Калібровка приладу	Тестування програми
Вимірювання	Розрахунок
Аналіз даних	Аналіз даних

Обчислювальний експеримент (як і лабораторні експерименти), частіше за все, є інструментом пізнання якісних закономірностей природи. Сутність обчислювального експерименту полягає в тому, що на основі математичної моделі шляхом безпосереднього чисельного розв’язування відповідної задачі кількісно визначається поведінка досліджуваних об’єктів у тих чи інших умовах, які на цей час можуть бути навіть недоступні реальному експерименту. Співставлення результатів розрахунків з наявними аналогічними розв’язками, з даних оцінок, спостережень, експериментів дозволяє визначити ефективність вихідної моделі і в разі необхідності змінити її з тим, щоб досягти адекватності моделі розглядуваному явищу (властивість багатомодельності обчислювального експерименту). Отже, обчислювальний експеримент виявляє головне в досліджуваному процесі, в результаті чого є можливість проаналізувати поведінку об’єкта в умовах, поки що недосяжних для реального експерименту, з’ясувати оптимальні параметри (багатоваріантність обчислювального експерименту), режими роботи діючих або проектних систем і передбачити нові ще не спостережувані явища.

Важливим етапом обчислювального експерименту, коли розрахунки уже завер шено, є усвідомлення результатів, представлення їх в максимально наочній і зручній для сприймання формі. Забити числами екран комп'ютера чи одержати роздруківку тих же чисел не означає закінчити моделювання (навіть якщо ці числа правильні). Тут на допомогу приходить інша чудова особливість комп'ютера, що доповнює здатність до швидких підрахунків — можливість візуалізації абстракцій. Представлення результатів у вигляді графіків, діаграм, траєкторій руху динамічних об'єктів в силу особливостей людського сприйняття збагачує дослідника якісною інформацією [132].

Під час цієї лабораторної роботи необов'язково досліджувати процес тепло провідності. Можна досліджувати різноманітні фізичні процеси, наприклад, рух тіла , кинутого під кутом до горизонту, рух тіла зі змінною масою, політ ракети, рух небесних тіл, коливання математичного маятника. Основне — правильна і вдала організація обчислювального експерименту.

Вибір теми лабораторного заняття № 2 "Математичне моделювання в екології" зумовлений необхідністю показати широке застосування методу математичного моделювання до проблем сучасної науки біологічних процесів і явищ, продемонстру вати побудову та дослідження неперервних математичних моделей, представлених у вигляді диференціальних рівнянь. Темою лабораторного заняття № 2 можуть бути і такі теми: "Математичне моделювання в економіці", "Математичне моделювання і глобальні проблеми людства".

Математичні моделі в екології використовуються з моменту виникнення цієї науки. І хоч поведінку організмів у живій природі досить важко адекватно описати засобами математики порівняно з найскладнішими фізичними процесами, моделі до помагають встановити деякі закономірності і загальні тенденції розвитку окремих популяцій, а також спільнот.

Здається дивним, що люди, які займаються живою природою, відтворюють її в штучній математичній формі, але є вагомі причини, які стимулюють ці заняття. Перерахуємо переваги створення математичних моделей у класичній екології:

1. Моделі допомагають виділити сутність чи об'єднати і виразити за допомогою кількох параметрів важливі розрізнені властивості великої кількості унікальних спостережень, що полегшує екологу аналіз розглядуваного процесу чи проблеми.
2. Моделі виступають в якості "спільної мови", з допомогою якої може бути описано кожне унікальне явище і відносні властивості таких явищ стають все більш зрозумілими.
3. Модель може служити зразком "ідеального об'єкта" чи ідеалізованої поведінки, при порівнянні з якою можна оцінювати і вимірювати реальні об'єкти і процеси.
4. Моделі дійсно можуть пролити світло на реальний світ, недосконалими імітаціями якого вони є.

При побудові моделей в математичній екології використовується досвід математичного моделювання механічних та фізичних систем, однак з урахуванням специфічних особливостей біологічних систем:

- складності внутрішньої будови кожної особини;

- залежності умов життєдіяльності організмів від багатьох факторів зовнішнього середовища;
- незамкненості екологічних систем;
- великого діапазону зовнішніх характеристик, при яких зберігається життєздатність систем.

Застосування комп'ютерів значно розширило межі математичного моделювання екологічних процесів. З однієї сторони, з'явилася можливість всебічної реалізації складних математичних моделей, що не допускають аналітичного дослідження, з іншої, — виникли принципово нові напрями і перш за все — імітаційне моделювання.

Лабораторна робота № 3 "Моделювання випадкових процесів у системах масового обслуговування" має за мету навчити студентів будувати та досліджувати дискретні математичні моделі, в основі яких лежать випадкові події. Ці математичні моделі часто інтерпретують практичні життєві ситуації, з якими ми стикаємося кож ного дня. Поняття "випадкова" — одне з фундаментальних як у математиці, так і в повсякденному житті. Моделювання випадкових процесів — наймогутніший напрям у сучасному математичному моделюванні.

Кому не доводилося стояти в черзі і з нетерпінням підраховувати, чи встигне він зробити покупку (чи заплатити за квартиру, покататися на каруселі і т. д.) за деякий час, що є в розпорядженні? Чи, намагаючись зателефонувати в довідкову і натикаю чись кілька разів на короткі гудки, нервувати і оцінювати — дозвонюся чи ні? Із таких "простих" проблем на початку XX століття виникла досить непроста наука — теорія масового обслуговування, що використовує апарат теорії ймовірностей і ма тематичної статистики, диференціальних рівнянь і чисельних методів. Основоположником її став датський вчений А. К. Ерланг, який досліджував проблеми функціонування телефонних станцій.

Пізніше з'ясувалося, що нова наука має тісний зв'язок з економікою, військовою справою, організацією виробництва, біологією, екологією тощо.

Комп'ютерне моделювання при розв'язуванні задач масового обслуговування, що реалізується у вигляді методу статистичних випробувань (методу Монте–Карло), хоч і не є в теорії масового обслуговування основним, все ж відіграє в ній важливу роль. Основна лінія в теорії масового обслуговування — одержання результатів аналітичних, тобто представлених формулами. Однак можливості аналітичних методів досить обмежені, в той час як метод статистичних випробувань універсальний і досить простий для розуміння.

З досвіду проведення лабораторних робіт за вказаною тематикою в НПУ імені М. П. Драгоманова слід зауважити, що найбільш ефективною є така схема організації лабораторної роботи:

1. Складається графік проведення лабораторних робіт, з яким студентів знайомлять на початку семестру. Студентів розбивають на групи по 2 студенти.

2. За кілька днів до вказаного часу проведення лабораторної роботи студенти переписують протокол лабораторної роботи, вивчають теоретичні відомості, дають відповіді на контрольні запитання.

3. Допуск до виконання лабораторної роботи студенти отримують в процесі фро нтального усного опитування, проведеного на початку заняття. Викладач кожному

студенту задає по одному запитанню, на яке той зразу ж відповідає, а інші студенти його відповідь доповнюють і виправляють (якщо необхідно). Викладач фіксує в журналі оцінки відповіді студентів (можливо в балах) і за цими оцінками відповідно допускає чи не допускає студента до виконання роботи. Допуск може реалізовуватися і в позааудиторний час у формі співбесіди викладача з кожним студентом або шляхом проведення тестування на початку лабораторного заняття.

4. Лабораторна робота виконується в аудиторії (обов'язково комп'ютерному класі) шляхом реалізації студентами індивідуальних завдань, перерахованих в протоколах.

5. За встановленим зразком оформляється звіт про виконану роботу. Звіт здається викладачу.

6. Оцінюється лабораторна робота за кількістю балів, одержаних студентом за письмовий звіт та відповіді на контрольні запитання і усне запитання викладача про етапи виконання роботи в кінці кожного лабораторного заняття.

Особливістю лабораторних робіт, що розглядаються, є те, що всі вони передбачають математичне моделювання деякої практичної задачі за розширеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання. А ця діяльність передбачає використання комп'ютера. Лабораторні роботи проводяться в комп'ютерних класах, в той час, коли в студентів уже сформовані навички і вміння роботи з програмним забезпеченням, а саме з такими педагогічними програмними засобами, як GRAN1, GRAN-2D, GRAN-3D і т. д., а також навички і вміння програмування за вказаним алгоритмом.

Тому не є досить принциповим питання про те, пропонує це програмне забезпечення викладач, чи їх вибирають і створюють самі студенти. Це залежить від загального рівня математичної та інформаційної культури кожної конкретної групи студентів. Так, для студентів спеціальності "математика та фізика" і "математика та економіка" такі програми слід запропонувати викладачеві, студенти спеціальності "математика та інформатика" повинні вибирати їх самостійно.

Дидактична цінність наведених лабораторних робіт полягає в тому, що вони дають можливість формувати вміння математичного моделювання в комплексі, і не тільки формувати нові вміння, а й закріплювати раніше сформовані. Під час виконання лабораторних робіт формується сукупність вмінь, перерахованих у галузевих стандартах [37] за типом діяльності "математичного моделювання природничих, технічних, економічних та соціальних явищ і процесів" через виконання типових завдань діяльності:

- створення математичної моделі реального об'єкта, процесу, явища;
- аналіз створеної моделі реального об'єкта;
- дослідження математичної моделі з використанням засобів комп'ютерної техніки.

Зміст вмінь за названими типовими завданнями діяльності розкрито у додатку А.

Щодо організації і методики проведення семінарських занять, то у цій справі важливим є добір питань для розгляду і заздалегідь складений план із зазначенням літератури, яку рекомендується використовувати студентам під час підготовки. Звичайно, план має бути вчасно доведений до відома студентів. Нерідко це робиться на попередньому занятті. Доцільно заздалегідь запропонувати студентам кілька планів наступних семінарських занять, що сприятиме раціональному розподілу їхнього часу.

За методикою проведення семінарських занять важливо не припускати механічного відтворення студентами конспектів лекцій без глибокого аналізу проблеми з різних поглядів (зокрема, й особистого). Викладачеві слід викликати і підтримувати жваву дискусію, виявляти повагу і в міру вимогливе ставлення до студента, швидко встановлювати контакт з учасниками семінару, вдумливо і справедливо оцінювати їхні відповіді. Досвід показує, що обговорення проходить цікавіше й активніше при проблемному плануванні заняття.

Доцільно заохочувати студентів до занотовування фактів і тез, що не розглядали ся у лекційному курсі, зокрема, й доповнень та узагальнень, які викладач здійснює під час заняття чи при підведенні підсумків. Варто контролювати не лише роботу студентів під час семінару, а й конспекти літератури до семінарського заняття.

Спецкурс “Математичне моделювання” передбачає проведення двох таких семінарських занять: семінарське заняття № 1 “Універсальність математичних мо делей” та семінарське заняття № 2 “Математичне моделювання складних об’єктів”. Ці семінарські заняття мають за мету закріпити навички і вміння студентів з діяльності математичного моделювання; вміння проводити самостійно пошукову та науково-дослідницьку роботу з проблем математичного моделювання; виховувати у студентів гуманізм, бережливе ставлення до навколишнього світу, що повинно проявлятися при розгляді на другому семінарському занятті таких математичних моделей, як “моделі суперництва, екології та технології”. Плани цих семінарських занять наведені у додатку F.

При проведенні зазначених семінарських занять доцільно за бажанням студентів розподілити питання таким чином, щоб кожне питання готували два студенти: один висвітлює проблему в цілому, другий — ілюструє відповідною прикладною задачею . Викладач повинен під час консультації обговорити зміст кожної відповіді зі студентом-доповідачем, оскільки матеріал, взятий з посібника О. А. Самарського, А. П. Михайлова [195], досить великий, громіздкий і досить складний для розуміння студентами. Студенти, що не готують дане питання, ведуть короткі записи по його суті та записують розв’язування задач.

При проведенні практичних, семінарських, лабораторних робіт студенти не тільки формують вміння, пов’язані з розв’язуванням прикладних задач, а й формують навчально-методичний комплекс задач для навчання математичного моделювання своїх майбутніх учнів. Більшість задач, розглянутих у процесі навчання математичного моделювання майбутніх учителів у спрощеному або ж і в такому вигляді можливо і необхідно розв’язувати в школі.

2.4 Спецкурс “Математичне моделювання” в аспекті підготовки вчителя математики та використання інформаційно-комунікаційних технологій

Спецкурс “Математичне моделювання” є важливою складовою процесу навчання у методичній системі формування вмінь математичного моделювання у майбутніх учителів математики. Цей спецкурс доцільно проводити на IV–V курсах. З досвіду читання автором дисертаційного дослідження таких спецкурсів в НПУ імені М. П. Драгоманова слідує, що найкращими формами проведення занять зі спецкурсу є лекційні та практичні заняття.

Робоча програма спецкурсу “Математичне моделювання”

Пояснювальна записка

У наш час закладено основи нової методології наукових досліджень — математичного моделювання та обчислювального експерименту. Суть цієї методології полягає в заміні вихідного об’єкту його математичною моделлю і дослідженні її математичними методами та засобами інформаційно- комунікаційних технологій. Методологія математичного моделювання бурхливо розвивається, проникаючи у нові сфери — від розробки великих технічних систем і управління ними до аналізу найскладніших економічних і соціальних процесів.

Для успішного оволодіння методологією математичного моделювання спеціалістами найрізноманітніших професій необхідно розпочинати навчання мате матичного моделювання всіх учнів ще в загальноосвітній школі. У зв’язку з цим необхідно готувати майбутнього вчителя математики так, щоб він міг успішно спра витися з цим завданням. Тому навчанню математичного моделювання майбутніх учителів математики слід приділити належну увагу в процесі їх університетської підготовки.

Спецкурс “Математичне моделювання” призначений для навчання студентів — майбутніх учителів математики — методам математичного моделювання на ма теріалі вивчених ними раніше математичних дисциплін та міжпредметних і міжнаукових зв’язків. Метою спецкурсу є: привести в систему, розширити та поглибити знання, навички і вміння студентів з математичного моделювання, вже одержані при вивченні різних дисциплін.

Для цього необхідно виконати такі завдання:

- повторити, систематизувати, розширити та поглибити знання, навички і вміння студентів щодо математичного моделювання, набуті в процесі навчання на попередніх курсах основних математичних і методичних дисциплін;
- ввести розширену евристичну схему діяльності математичного моделювання і навчити студентів розв’язувати задачі у відповідності з цією схемою;
- застосовувати знання і вміння студентів працювати з програмним забезпеченням, засобами інформаційно-комунікаційних технологій, зокрема при проведенні обчислювального експерименту.

Табл. 2.4: Робоча програма спецкурсу “Математичне моделювання”

№ п/п	Тема заняття	Форма заняття	К-сть годин	К-сть годин сам. роб.	Література
1.	Математичні моделі реальних процесів та явищ. Математичне моделювання як метод наукового дослідження.	лекція	4	2	[6,33,42,70, 119,195,196, 209,235,236, 244,245,260]
2.	Теоретико-множинні основи математичного моделювання.	лекція	2		[14,33,40,55, 62,65,66, 112, 261]
3.	Математичне моделювання засобами класичних галузей математики.	практичне заняття	4		[12,39,64,69, 71,79,83,87, 88

					,98,110, 121, 126,127, 146, 166,192]
4.	Диференціальні рівняння як математичні моделі реальних процесів та явищ.	практичне заняття	2		[6,51,53,127, 196,254,257]
5.	Контрольна робота.		2		
6.	Загальні методи математичного моделювання.	лекція	4	2	[9,97,121, 132, 195,257]
7.	Універсальність математичних моделей.	семінарськ е заняття	2		[6,34,35,195]
8.	Деякі сучасні методи дослідження математичних моделей.	лекція	2		[44,97,132, 133 ,148,149, 195, 244,245]
9.	Обчислювальний експеримент в математичному моделюванні процесів теплопровідності.	лаборатор на робота	2		За індивідуальни ми завданнями
10.	Математичне моделювання складних об’єктів.	лекція	2	3	[6,97,124, 132, 195,245]
11.	Математичне моделювання складних об’єктів.	семінарськ е заняття	2		[29,97,121, 132 ,195,260]
12.	Математичні моделі в екології.	лаборатор на робота	2		За індивідуальни ми завданнями [132]
13.	Моделювання випадкових процесів в системах масового обслуговування.	лаборатор на робота	2		За індивідуальни ми завданнями [132]
14.	Математичне моделювання і професійна діяльність вчителя математики.	лекція	2		[8,16,19,23, 31, 46,123, 145, 147,170, 186, 188,202, 207, 213,222, 228, 229,240, 241, 246,255, 256, 258,259]
15.	Залік.		2		
	Загальна кількість годин		36	7	

Спецкурс з математичного моделювання розрахований на 34 години аудиторних занять (лекційних, практичних, семінарських, лабораторних). Дві годин відводяться для проведення заліку, 7 годин відводиться на самостійну роботу студентів. Загаль на кількість — 43 години. Така кількість годин є оптимальною і методично доцільною тому, що забезпечує можливості: актуалізувати, осмислити та системати зувати знання, навички та вміння з математичного моделювання, набуті раніше під час вивчення передбачених навчальним планом математичних дисциплін; познайо митися з сучасними науковими підходами до математичного моделювання; засвоїти розширену евристичну схему діяльності математичного моделювання і навчитись розв'язувати задачі за цією схемою, тобто оволодіти методом математичного моде лювання як методом наукового дослідження в цілому.

З 36 аудиторних годин занять спецкурсу: 16 годин — лекційні заняття, 16 годин — практичні заняття, з них 6 годин — власне практичні заняття, 4 години — семінарські заняття, 6 годин — лабораторні заняття. По 2 години відводиться на ко нтрольну роботу та залік. Зупинимось детальніше на змісті, методах, організаційних формах і засобах проведення лекційних та практичних занять спецкурсу.

Перше лекційне заняття присвячене повторенню і приведенню в систему теоретичних знань і вмінь, які студенти набули при попередньому навчанні математичного моделювання в процесі вивчення математичних дисциплін. Методи, які доцільно використати на цьому занятті: репродуктивний та частково-пошуковий (евристична бесіда). Форми навчальної діяльності — фронтальні. Засоби, які слід використати на першому лекційному занятті: таблиці, які відображають спрощену та розширену евристичні схеми діяльності математичного моделювання, та комп'ютер для демонстрації розв'язування задачі за розширеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання.

Такі ж методи навчання: репродуктивний та евристична бесіда, доцільно викори стати і при проведенні другої лекції. На цій лекції слід зосередити увагу студентів на самому факті, що в основі побудови математичної моделі лежать множини та відношення на них. Під час лекції актуалізуються знання студентів про множини та відношення на них, про математичні структури та аксіоматичний метод, наводяться приклади побудови математичних моделей абстрактних наукових теорій, в яких ма тематичними моделями є різні множини, наприклад, множина дійсних чисел з відношенням належності (інцидентності) та порядку на ній. Засоби навчання, що використовуються при читанні другої лекції — це таблиці та кодоскоп для їх демон страції. На таблицях подано розв'язування задач за евристичними схемами діяльності математичного моделювання, що наводяться як приклади під час лекції.

На лекції, присвяченій загальним методам математичного моделювання, слід ви користовувати пояснювально-ілюстративний метод, вдало поєднуючи розповідь та пояснення з демонстрацією. Як засіб демонстрації під час проведення цієї лекції доцільно використати кодоскоп та комп'ютер. Особливістю цієї лекції є те, що ви користання методів (застосування фундаментальних законів природи, варіаційних, аналогій, ієрархічного, фазового укрупнення) при побудові та дослідженні матема тичних моделей передбачається демонструвати на конкретних прикладах, які через їх громіздкість слід наводити з допомогою комп'ютера або кодоскопа.

Лекції "Деякі сучасні методи дослідження математичних моделей" та "Математичне моделювання складних об'єктів" доцільно проводити пояснювально-ілюстративним методом з використанням таблиць та комп'ютера.

Під час лекцій передбачається розширення знань студентів з математичного моделювання шляхом ознайомлення їх з сучасними підходами до математичного мо делювання, які сформувались в останні десятиріччя. Це знайомство із застосуванням методів подібності, принципу максимуму і теорем порівняння, методу усереднення. Зокрема, на лекції "Деякі сучасні методи дослідження математичних моделей" слід підкреслити, що “. . . існують різні способи спрощення математичних моделей, більшість з них засновані на властивостях їх симетрії. Одна з фундаментальних властивостей багатьох природних, технологічних, економічних і соціальних об’єктів — симетрія (подібність, повторювальність) — знаходить своє відображення в їх математичних моделях. Наявність якого-небудь виду симетрії у явища, що вивчається, означає більшу простоту об’єкта в порівнянні з його менш симетричним аналогом. На цьому засновані широко застосовні методи спрощення математичних моделей і, відповідно, методи спрощення їх аналізу. Вони полягають в пониженні порядку системи рівнянь, що утворюють модель, в зменшенні числа змінних, від яких залежать шукані величини, чи числа сталих параметрів, що визначають процес тощо.

Типовий підхід до використання властивостей симетрії — аналіз розмірності ве личин, що входять в модель. Частина характеристик об’єктів вимірюється в якихось одиницях, що має безпосередній (механічний, фізичний, економічний і т. д.) зміст, наприклад, маса в грамах, температура в градусах Кельвіна, валовий національний продукт в гривнях. Такі величини називають *розмірними*, їх числове значення залежить від вибору одиниць вимірювання. Серед них виділяються величини з *незалежною* (основною) *розмірністю*, або розмірно незалежні величини. Наприклад , якщо для опису механічних явищ використовується система одиниць СГС (сантиметр, грам, секунда), то розмірності довжини *x*, маси *m* і часу *t* незалежні і не виражаються одна через другу. На відміну від них розмірність кінетичної енергії $E = mv^2/2$ визначається через розмірність основних величин за формулою $[E] = [m] \cdot [x]^2 \cdot [t]^{-2} = г \cdot см^2 \cdot с^{-2}$, що називається формулою розмірності (тут $v = \frac{dx}{dt}$, символом $[m]$ позначається розмірність величини *m*). Такі величини називаються розмірно залежними. Пригадаємо, що явища і процеси можуть бути описані також і безрозмірними величинами, скажімо, відношення довжини водоносного пласту до його ширини, показником степеня у формулі, що вказує на залежність коефіцієнта теплопровідності від температури, річним банківським процентом тощо. Системи одиниць вимірювання можна вибирати по-різному, причому зв’язки між величинами, що характеризують об’єкт (одержаних із законів природи чи інших міркувань), не повинні змінюватись при зміні одиниць вимірювання. Наприклад, другий закон Ньютона $F = ma$ (*F* — сила, *a* — прискорення) в системі СІ записується точно так, як у системі СГС. Інваріантність явищ і процесів по відношенню до зміни одиниць вимірювання знаходить своє втілення в П-теоремі.

П-теорема ([195, с. 203])**.** *Нехай маємо функціональний зв’язок*

$$a = F(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) \tag{2.10}$$

між n + 1 *розмірними величинами a, a_1, ..., a_n, де величини a_1, ..., a_k мають незалежну розмірність, і нехай цей зв’язок не залежить від вибору системи одиниць вимірювання* (*величина a — шукана, решта величин — задані*). *Тоді зв’язок* (2.10) *може бути записаний як*

$$\Pi = F(\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, \underbrace{\Pi_1, \ldots, \Pi_{n-k}}_{n-k}),$$

тобто у вигляді співвідношення між n + 1 -*k величинами* П, $П_1$, ..., $П_{n-k}$, *що є безрозмірними комбінаціями із n* + 1 *розмірних величин a, a_1, ..., a_n.*

При цьому величини Π, Π_1, . . . , Π_{n-k} пов'язані з a, a_1, ..., a_n простими співвідношеннями:

$$a = \Pi a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_k^{m_k},$$
$$a_{k+1} = \Pi_1 a_1^{l_1} a_2^{l_2} \dots a_k^{l_k},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_n = \Pi_{n-k} a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_k^{p_k}.$$

Тут показники степенів m_1, . . . , m_k; l_1, . . . , l_k; p_1, . . . , p_k ті ж, що і у відповідних формулах розмірностей для розмірно залежних величин a, a_1, . . . , a_n, наприклад, у формулі

$$[a] = [a_1]^{m_1} [a_2]^{m_2} \dots [a_k]^{m_k} \dots".$$

Далі слід зауважити, що застосування Π-теореми зменшує кількість величин, що фігурують в описі об'єкту, і дає явний спосіб представлення шуканої величини a (і величин a_{k+1}, . . . , a_n) через Π, Π_1, . . . , Π_{n-k} і a_1, . . . , a_k.

Процедура масштабування завжди корисна при вивченні математичних моделей, оскільки може дати важливу попередню інформацію про об'єкти.

Одержані з допомогою Π-теореми безрозмірні величини Π_1, . . . , Π_{n-k} можна називати *параметрами* (*критеріями*) *подібності* в тому розумінні, що різні за своїми масштабами, але однакові по суті явища і процеси ведуть себе якісно однаково при заданому наборі параметрів Π_1, . . . , Π_{n-k} (і однаково змінюються при їх зміні). Наведемо приклад масштабування (демонструємо на комп'ютері) для задачі "Знайти температуру деталі циліндричної форми, при її локальному охолодженні кільцевою зоною з торця. Коефіцієнт теплопровідності (λ) матеріалу, з якого виготовлено деталь і густина (q) теплових джерел, розташованих в ній, є сталими." [148].

Відомо, що шукану температуру циліндра можна знайти з диференціального рівняння

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial T}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{\lambda} = 0. \qquad (2.11)$$

Оскільки охолодження відбувається за законом Ньютона, то крайові умови при охолодженні кільцевою смужкою з торця можуть бути записані у вигляді

$$\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=h} = \left.\frac{\partial T}{\partial\rho}\right|_{\rho=R} = 0, \qquad (2.12)$$

$$\lambda\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{\substack{\rho_1\leqslant\rho\leqslant\rho_2,\\ -\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi}} = k\chi(\rho_1,\rho_2,\rho)(T_0 - T)\Big|_{\substack{\rho_1\leqslant\rho\leqslant\rho_2,\\ -\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi}} \qquad (2.13)$$

де

$$\chi(\rho_1,\rho_2,\rho) = \begin{cases} 1, & \rho\in[\rho_1;\rho_2], \\ 0, & \rho\notin[\rho_1;\rho_2]. \end{cases}$$

Тут h — висота циліндра, R — радіус основи циліндра, ρ_1 — радіус меншого кола з центром у початку координат, ρ_2 — відповідно радіус більшого кола. Ці кола обмежують зону охолодження. Формули (2.11)–(2.13) спростимо, провівши масштабування шляхом заміни змінних

$$\rho = R\xi; \quad z = R\zeta; \quad T = \frac{R^2qt}{\lambda} + T_0; \quad \aleph = \frac{Rk}{\lambda}; \quad \xi_1 = \frac{\rho_1}{R}, \quad \xi_2 = \frac{\rho_2}{R}.$$

Таким чином, розмірні величини ρ_1 (см), ρ_2 (см), R (см), z (см), T (градусах С), k ми виразили через безрозмірні величини ξ_1, ξ_2, $R = 1$, ζ, t, $\aleph$. Провівши масштабування, замість рівняння (2.11) дістанемо рівняння

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial t}{\partial\xi}\right) + \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial^2 t}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial\zeta^2} + 1 = 0 \tag{2.14}$$

і відповідно крайові умови

$$\left.\frac{\partial t}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=h} = \left.\frac{\partial t}{\partial\xi}\right|_{\substack{0\leqslant\varphi\leqslant h,\\ -\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi}} = \left.\frac{\partial t}{\partial\xi}\right|_{\substack{\xi_1\leqslant\xi\leqslant\xi_2,\\ -\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi}} = 0, \tag{2.15}$$

$$\left.\frac{\partial t}{\partial\zeta}\right|_{\substack{\xi_1\leqslant\xi\leqslant\xi_2,\\ -\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi}} = \aleph\chi(\xi_1,\xi_2,\xi)t\Big|_{\substack{\xi_1\leqslant\xi\leqslant\xi_2,\\ -\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi}} \tag{2.16}$$

У задачі, що розглядається, функція t не залежить від змінної φ і, отже, рівняння (2.14) набуде вигляду

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial t}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial^2 t}{\partial\zeta^2} + 1 = 0 \tag{2.17}$$

з крайовими умовами

$$\left.\frac{\partial t}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=h} = \left.\frac{\partial t}{\partial\xi}\right|_{\xi=1} = \left.\frac{\partial t}{\partial\zeta}\right|_{\substack{\zeta=0,\\ \xi\notin[\xi_1;\xi_2]}} = 0, \tag{2.18}$$

$$\left.\frac{\partial t}{\partial\zeta}\right|_{\substack{\zeta=0,\\ \xi_1\leqslant\xi\leqslant\xi_2}} = \aleph\chi(\xi_1,\xi_2,\xi)t\Big|_{\substack{\zeta=0,\\ \xi_1\leqslant\xi\leqslant\xi_2}} \tag{2.19}$$

Рівняння (2.17) з крайовими умовами (2.18)–(2.19) і є спрощеною математичною моделлю даної задачі, одержаної в результаті процедури масштабування.

Під час лекції студенти знайомляться також з принципом максимуму і теоремами порівняння на прикладах задач локального охолодження циліндра.

Наведений вище матеріал є новим для студентів, з ним вони знайомляться вперше, тому важливо домогтися правильного розуміння ними сучасних підходів до математичного моделювання.

Під час лекції “Математичне моделювання складних об’єктів” слід показати застосування математичного моделювання та обчислювального експерименту до вивчення складних об’єктів: процесу організації реклами, взаємовідносин у системі “хижак—жертва”, створення фізично безпечного ядерного реактора, дослідження кліматичних наслідків ядерного конфлікту, моделювання випадкових процесів у системах масового обслуговування. Математичні моделі цих об’єктів досить складні, але вони яскраво демонструють досягнення сучасної математичної науки у вивченні навколишнього світу. Під час лекції слід зауважити, що дальший розвиток математичного моделювання як методології сучасної науки варто продовжувати творчій молоді, до якої і належать студенти — майбутні вчителі математики.

Передбачена демонстрація на комп’ютері таблиць, схем та графіків, що ілюструють побудовані математичні моделі.

Заключною лекцією спецкурсу є лекція на тему “Математичне моделювання і професійна діяльність учителя математики”. Метод проведення цієї лекції —

репродуктивний та евристична бесіда. Під час лекції актуалізуються знання і вміння студентів, одержані на попередніх лекціях спецкурсу, зокрема виділяються ті математичні моделі, які доцільно розглянути у шкільному курсі математики. На лекції використовується кодоскоп для демонстрації таблиць, що розкривають форми та методи роботи з навчання математичного моделювання учнів школи. Значення лекційних занять спецкурсу полягає в тому, що під час лекції засвоюються знання студентами з математичного моделювання, які потім осмислюються і усвідомлюються під час самостійної роботи над лекцією та в процесі практичного заняття. Одержані на лекціях знання є основою для формування навичок та вмінь математичного моделювання на практичних заняттях.

Зміст практичних занять повинен цілком відповідати змісту лекційних занять. Л. Д. Кудрявцев у книзі “Современная математика и ее преподавание” писав: “Для того, щоб практичні заняття приносили максимальну користь, їх зміст повинен бути добре узгодженим з лекційним матеріалом: якщо студент і на лекціях, і на практичних заняттях буде знайомитись з однією і тією ж точкою зору на поняття, що ним вивчаються, буде закріплювати на практичних заняттях набуті ним теоретичні знання як в результаті обговорення і аналізу лекційного матеріалу, так і з допомогою розв’язування задач, то він не тільки добре засвоїть цей матеріал і навчиться застосовувати його на практиці, але й одержить додатковий стимул (і це дуже важливо) для активної роботи над лекцією” [108, с. 37]. Обов’язковою умовою проведення практичних занять слід вважати те, що всі задачі, що розв’язуються в аудиторних та домашніх роботах студентів, повинні бути розв’язані за спрощеною чи розширеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання. Тому , що саме діяльність за цими евристичними схемами забезпечує свідоме та міцне оволодіння студентами методом математичного моделювання. Саме на цих практичних заняттях остаточно формуються вміння математичного моделювання, основа яких закладена при вивченні окремих дисциплін. Ці вміння детально описані в п. 1.1, їх формування у майбутніх учителів математики передбачено галузевими стандартами [37]. Засобом формування таких вмінь є система задач, які студенти розв’язують на практичних заняттях в університеті та під час самостійної роботи вдома. До системи задач входять задачі, наведені в додатку Е.

На перших практичних заняттях: “Математичне моделювання засобами класичних галузей математики” та “Диференціальні рівняння як математичні моделі реальних процесів та явищ” доцільно використати репродуктивний та частково-пошуковий методи навчання. Під час цих занять слід повторити спрощену схему діяльності математичного моделювання та сформувати навички роботи за розшире ною евристичною схемою діяльності математичного моделювання. Засоби навчання при проведенні цих занять — це таблиці зі спрощеною і розширеною схемами діяльності математичного моделювання та комп’ютер з відповідним змісту задач, що розв’язуються за розширеною евристичною схемою, програмним забезпеченням.

Слід зауважити, що під час проведення занять зі спецкурсу слід поєднувати колективні, групові, індивідуальні форми роботи. Лекційні заняття дають можливість працювати фронтально, забезпечуючи зв’язок “студенти — викладач” та “викладач — студенти” під час проблемного викладу та проблемного засвоєння матеріалу.

На практичних заняттях доцільно застосовувати як фронтальні форми роботи, так і групові та індивідуальні. Найпоширенішою формою фронтальної роботи є колек тивне розв'язування задачі, коли один студент розв'язує задачу біля дошки, а йому допомагають викладач та студенти з аудиторії. При цьому детально обговорюється і фіксується кожний етап евристичної схеми діяльності математичного моделювання. Фронтальна форма особливо зручна на перших практичних заняттях спецкурсу з ма тематичного моделювання, коли у студентів повинно остаточно сформуватись вміння працювати за спрощеною та розширеною схемами діяльності математичного моделювання. На наступних практичних заняттях слід застосовувати групові форми діяльності. Причому бажано склад групи змінювати. Один раз в групи слід об'єднувати сильніших та слабших студентів — різнорівневі групи, інший раз можна об'єднувати в динамічні типологічні групи студентів з однаковим рівнем навченості, научуваності та загального математичного розвитку [180]. Це забезпечить диференціацію у навчанні математичного моделювання. Оскільки в середньому на практичному занятті слід розв'язати 8 задач різного рівня складності, то студентів слід розділити на 8 груп по 3–4 чоловіка з однаковим рівнем, або 1–2 сильніші студенти (консультанти) та 2 слабші студенти. Кожна група одержує відповідну до її рівня задачу, розв'язує її протягом 15–20 хвилин, а потім починається колективне обговорення розв'язаних задач, один студент з кожної групи (бажано слабший) записує розв'язання задачі на дошці і пояснює всій студентській групі кожний етап її розв'язування. При організації групової роботи на практичному занятті доцільно (з досвіду) давати одну задачу задовільного рівня, три задачі високого рівня складності та дві задачі достатнього рівня. Наприклад, при проведенні груповою формою практичного заняття на тему “Диференціальні рівняння як математичні моделі деяких реальних процесів та явищ” студентам доцільно запропонувати такі задачі.

1. Задовільний рівень. 1. Швидкість тіла пропорційна пройденому шляху. За перші 10 с тіло пройшло 100 м, за 15 с — 200 м. Який шлях пройде тіло за 20 с?

2. Достатній рівень. 2. Знайти максимальну швидкість падіння парашутиста, якщо його маса разом з парашутом дорівнює 90 кг, а сила опору повітря при падінні пропорційна квадрату швидкості його руху (вважати, що коефіцієнт пропорційності $k = 3 \cdot 10^2$ г/см).

3. Ланцюг, що звисає на гачку, починає сповзати в момент часу, коли один кінець його має довжину 11 м, а інший — 9 м. За який час ланцюг сповзе повністю?

3. Високий рівень. 4. Температура вийнятого з печі хліба протягом 20 хвилин зменшується від 100°С до 60°С. Температура повітря a°С. Через який час від початку охолодження температура хліба знизиться до b°С? Провести підрахунки, якщо a набуває значень 5, 10, 15, 20, 25°С, а b набуває значень 30, 40, 50°С.

5. Населення міста зростає зі швидкістю, пропорційною його кількості. Знайти закон зростання населення міста, якщо в момент часу t_0 у ньому проживало N_0 тисяч населення, а щорічний приріст становив h тисяч. Визначити через скільки років населення міста збільшиться вдвічі. Провести підрахунки, якщо N_0 набуває значень 900, 700, 600, 500, 400, 300 тис. чол., а h — відповідно 30, 25, 20, 15, 10, 5 тис. чол.

6. У корівнику встановлено два вентилятори, кожний з яких подає за хвилину 50 м^3 чистого повітря, що містить 0,01 % вуглекислоти. Визначити вміст

вуглекислоти в 1 $м^3$ повітря після двогодинного перебування тварин у приміщенні, якщо у корівнику об'ємом 1000 $м^3$ із початковим вмістом вуглекислоти 0,2 % перебуває N корів, кожна з яких видихає за хвилину 0,1 $м^3$ повітря з 5 % вуглекислоти. Дослідити процес, поклавши N рівним 80, 90, 100, 110, 120 тварин.

Під час проведення лабораторних робіт студенти працюють індивідуально, кожний виконує свій варіант та оформляє роботу за поданим зразком.

Лабораторні та семінарські заняття проводяться дослідницьким методом з обов'язковим використанням засобів інформаційно-комунікаційних технологій.

Особливе місце при навчанні математичного моделювання має самостійна робота студентів з навчальними посібниками, науковою, науково-популярною та довідковою літературою при підготовці ними до проведення лабораторних та семінарських занять. На жаль, сьогодні немає в Україні сучасного посібника з мате матичного моделювання, рекомендованого Міністерством освіти і науки. На нашу думку, найбільш вдалим зарубіжним посібником з математичного моделювання є посібник О. А. Самарського та А. П. Михайлова [195]. Сьогодні достатньо наукової та науково-популярної літератури присвячено математичному моделюванню. Це література як науково-популярного, так і високого наукового рівня. Частину літератури до спецкурсу рекомендує викладач на вступному занятті і потім на кож ному лекційному занятті підкреслює, в яких літературних джерелах висвітлено ту чи іншу тему. До семінарських занять студентам пропонується відшукувати інформацію з літературних джерел чи на сайтах Інтернет самостійно. Як показує до свід, студенти з цією проблемою успішно справляються. Плани семінарських занять подані в додатку F.

Індивідуалізація і диференціація навчально-виховної роботи під час проведення спецкурсу з математичного моделювання буде сприяти підвищенню рівня навчання і розвитку студента лише за умови постійної діагностичної роботи не лише на поча тковому етапі організації навчання, а і протягом усіх періодів його здійснення. Цьому сприяє модульно-рейтингова система навчання і обліку успішності студентів (див. п. 2.5).

Роботу над спецкурсом можливо і доцільно організувати за модульно-рейтинговою системою, мета якої — сконцентрувати увагу і час студентів протягом семестру, шляхом проведення різноманітних видів контролю за самостійною роботою студентів. Основний організаційний принцип системи — вчасне виконання завдань.

Для тих студентів, які не можуть з деяких причин приділити досить часу для роботи в календарній системі рейтингових контролів, працює класично-академічна система відвідування лекцій, практичних робіт, виконання і захист лабораторних робіт, підготовка та виступ на семінарі, залікова контрольна робота та семестровий контроль-залік.

Організовуючи роботу за модульно-рейтинговою системою, до робочої програми , яка наведена на початку параграфа, слід обов'язково додати "Тематичний план". Він включає назви модулів та кількість годин, що на їх вивчення відводиться (див. додаток G).

Спецкурс з математичного моделювання передбачає широке застосування інформаційно-комунікаційних технологій. Розглянемо детальніше місце та роль інформаційно-комунікаційних технологій у навчанні математичного моделювання майбутніх учителів математики. Методологічною основою використання інформаційно-комунікаційних технологій в цьому дослідженні є роботи вітчизняних вчених М. І. Жалдака [57,60,61,63], В. І. Клочка [80,81], Н. В. Морзе [137], Г. О. Михаліна [131], Ю. С. Рамського [193], О. В. Співаковського [219–221], присвячені проблемі навчання використанню інформаційно-комунікаційних технологій при підготовці майбутнього вчителя математики.

Серед вмінь "математичного моделювання", перерахованих у галузевих стандартах, важливе місце займають "вміння створювати та досліджувати математичні моделі з використанням засобів комп'ютерної техніки:

- вміти добирати ефективні методи чисельного аналізу математичних моделей різних задач;
- вміти добирати та використовувати готові програмні засоби (математичні пакети прикладних програм) для символьно-формульного, графічного, чисельного аналізу математичних моделей реальних об'єктів;
- вміти при необхідності розробити алгоритм і програму для розв'язування математичної задачі, яка є математичною моделлю;
- вміти виконувати чисельний експеримент в тому числі з використанням комп'ютера;
- вміти аналізувати похибки при чисельному розв'язуванні задач;
- вміти інтерпретувати, аналізувати та узагальнювати результати розрахунків чисельного експерименту".

Формування вмінь математичного моделювання, перерахованих вище, — спільне завдання всіх математичних дисциплін та інформатики. Саме в процесі вивчення інформатики студенти набувають знань та вмінь, що є базовими для навчання мате матичного моделювання і комп'ютерної підтримки цього процесу.

Засоби інформаційно-комунікаційних технологій допомагають здійснювати по ступовий плавний перехід від діяльності за спрощеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання до діяльності за розширеною схемою. Так, уже на першому курсі під час вивчення математичного аналізу, лінійної алгебри, аналітичної геометрії, доцільно розв'язувати прикладні задачі за спрощеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання, яка розширюється введенням етапу "реалізація математичної моделі засобами інформаційно-комунікаційних технологій". Це розширення слід виконувати після етапу "реалізація моделі математичними методами" або замість нього.

На цьому етапі передбачається використання педагогічних програмних засобів (ППЗ) типу GRAN1, GRAN-2D, які створені під керівництвом академіка М. І. Жалдака вченими Ю. В. Горошком та О. В. Вітюком [60,189]. Від студента ви магається вміння працювати з комп'ютером на рівні користувача, що цілком відповідає рівню випускника загальноосвітньої школи.

Наведемо приклади задач, які розв'язуються математичним моделюванням і для розв'язування яких доцільно використати ППЗ.

Задача 2.10. На шкільному подвір'ї треба обгородити квітник прямокутної форми, що прилягає до паркана, довжина якого понад 50 м. Є 200 плит, кожна з яких має довжину 50 см. Якими мають бути розміри квітника, щоб його площа була найбільшою?

Розв'язання. **I. Попередній аналіз об'єкту дослідження.** Площу квітника прямокутної форми слід представити як функцію від незалежних змінних, якими є розміри паркана. Дослідивши таку функцію на максимум, знайдемо розміри паркана .

II. Побудова математичної моделі. Позначимо через y ту сторону прямокутника , яка паралельна паркану, а іншу — через x. Тоді площа прямокутника $S = xy$. За умовою довжина огорожі становить 200 · 0,5 = 100 м. Тоді $y+2x = 100$, звідки $y = 100 - 2x$ і $S = x(100-2x) = 100x-2x^2$, де $0 \leqslant x \leqslant 50$. Отже треба знайти найбільше значення функції $S = 100x- 2x^2$ на відрізку [0;50].

Далі у розв'язанні задачі можна піти двома шляхами:

1. знайти найбільше значення функції $S(x)$ на відрізку [0;50] методами математичного аналізу;
2. використати ППЗ GRAN1. За допомогою його послуг побудувати графік залежності $S = f(x)$ при $x \in [a;b]$ і далі скориставшись послугою "координати" пункту "Графік" визначити координати найвищої точки на графіку.

Перший шлях розв'язання задачі забезпечується виконанням етапу "реалізація математичної моделі математичними методами" евристичної схеми діяльності ма тематичного моделювання. Для розв'язання задачі другим шляхом цей етап слід замінити на такий "реалізація математичної моделі засобами інформаційно-комунікаційних технологій". Доцільним є другий шлях розв'язання, тому в евристичній схемі діяльності третім є наступний етап.

III. Реалізація математичної моделі засобами інформаційно- комунікаційних технологій. За допомогою послуг програми GRAN1 будуємо графік залежності $S = 100x - 2x^2$ на відрізку [0;50] і визначивши координати найвищої точки на графіку, одержимо $x = 25$, $S = 1250$. Далі будуємо графік $y = 100 - 2x$ і скориставшись послугою "координати" пункту "Графік" знаходимо: при $x = 25$, $y = 50$ (рис. 2.7, 2.8).

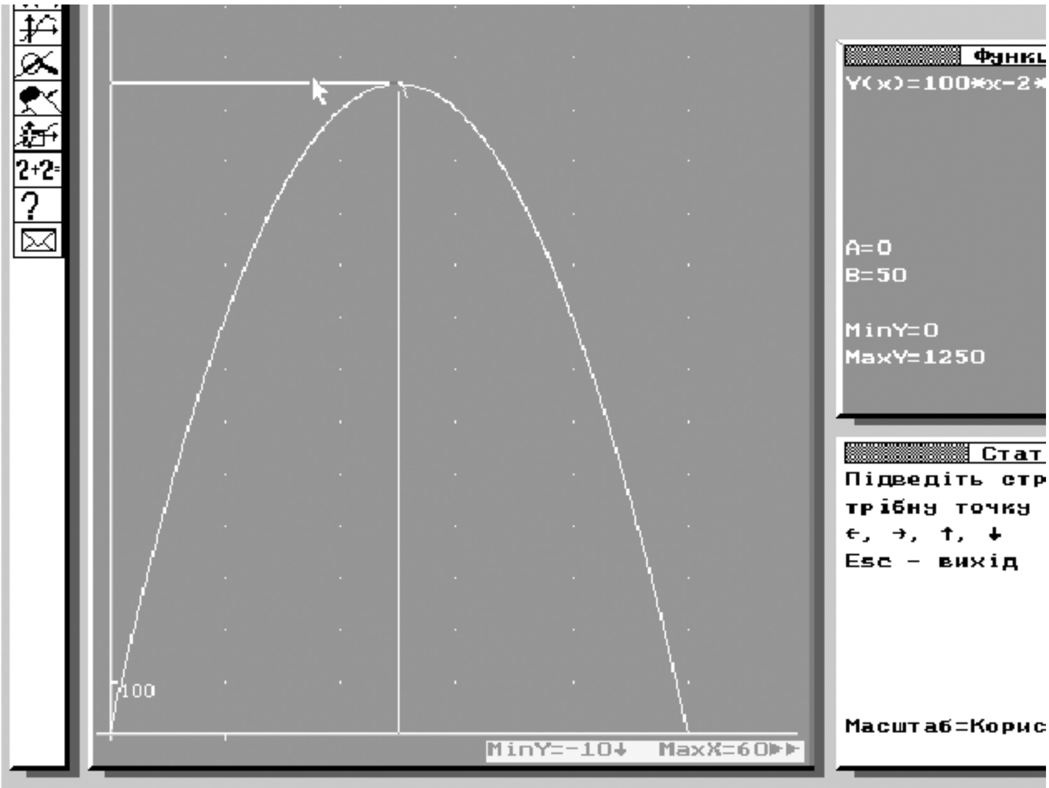


Рис. 2.7: Графік функції $S(x) = 100x - 2x^2$

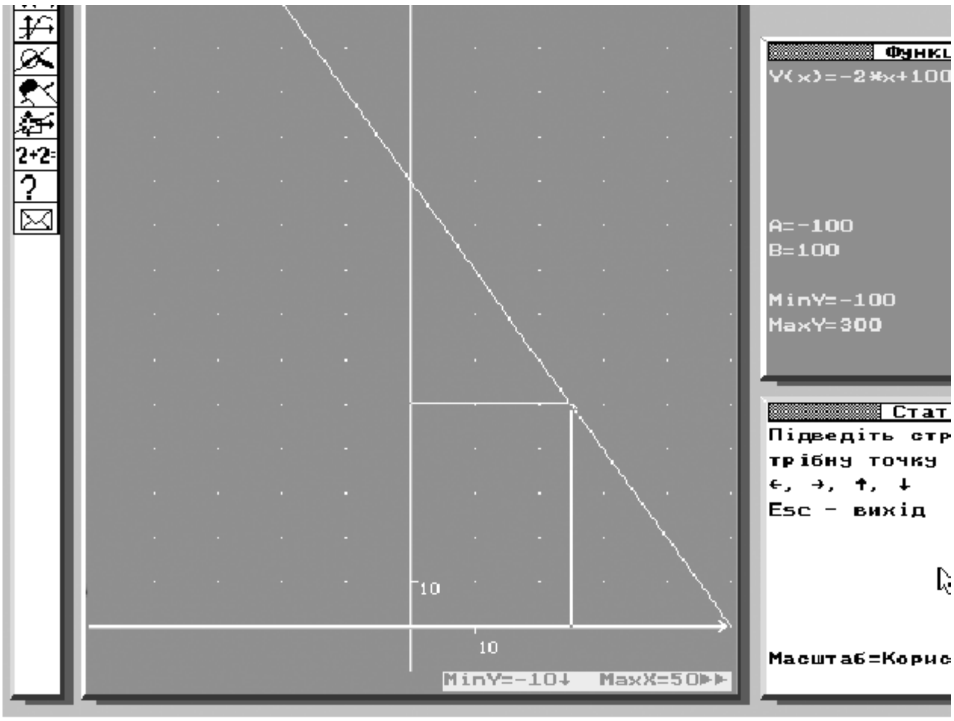


Рис. 2.8: Графік функції $y + 2x = 100$

IV. Аналіз одержаних результатів та перенесення їх на об'єкт, що досліджується. Найбільшого значення функція набуває в стаціонарній точці $x = 25$, при цьому $y = 50$. Отже, квітник матиме найбільшу площу, якщо сторона, паралельна паркану, є вдвічі більшою за іншу. __

Цю задачу вказаним шляхом цілком можна розв'язати і в шкільному курсі алгебри і початків аналізу. Розв'язуючи подібні задачі, студентів слід орієнтувати на використання обох шляхів реалізації третього етапу евристичної схеми діяльності математичного моделювання. Необхідно формувати у них вміння самостійного доцільного вибору евристичної схеми діяльності математичного моделювання.

При розв'язанні задач такого типу, окрім інших вмінь математичного моделювання, передбачених галузевими стандартами і не пов'язаних з використанням інформаційно-комунікаційних технологій, формується вміння добирати та використовувати готові програмні засоби (математичні пакети прикладних програм) для символьно-формульного, графічного, чисельного аналізу математичних моделей реальних об'єктів.

Доцільно використовувати педагогічний програмний засіб GRAN-2D і на другому курсі в процесі вивчення “Проективної геометрії та методів зображень”, при побудові зображень правильних многокутників та зображень перетинів многогранників січними площинами. Розглянемо приклад такої задачі.

Задача 2.11. Побудувати зображення правильного шестикутника.

Розв'язання. **І. Попередній аналіз об'єкта дослідження.** Зображення шестикутника на площині, одержане в результаті паралельного проектування правильного шестикутника на площину, є його геометричною моделлю. Будувати цю модель слід на основі властивостей паралельного проектування:

1. Паралельні прямі переходять в паралельні прямі.
2. Зберігається просте відношення трьох точок прямої.
3. Зберігаються довжини відрізків, розташованих на паралельних прямих.
4. Довжини відрізків, розташованих на непаралельних прямих, не зберігаються.

II. Побудова математичної (геометричної) моделі. Розглянемо правильний шестикутник $A'B'C'D'E'F'$ (демонструємо студентам побудову правильного шестикутника за допомогою ППЗ GRAN-2D). Проведемо діагоналі $A'D'$, $B'E'$, $C'F'$. Діагоналі правильного шестикутника перетинаються в точці O', і діляться в ній пополам. Отже, при побудові слід врахувати той факт, що діагоналі на зображенні шестикутника теж в точці перетину будуть ділитися пополам. Паралелограм $A'O'E'F'$ перейде в довільний паралелограм $AOEF$. Із зображення паралелограма $AOEF$ і доцільно розпочати побудову зображення шестикутника. Збільшивши в два рази сторони паралелограма AO, EO та діагональ FO, одержуємо вершин — протилежні A, E, F. Це відповідно точки D, B, C. Сполучаємо вершини A, B, C, D, E, F і одержуємо шукану математичну модель.

III. Реалізація математичної моделі засобами інформаційно- комунікаційних технологій. Побудова правильного шестикутника та його зображення виконана за допомогою програмного засобу GRAN-2D [60] (див. рис. 2.9, 2.10).

IV. Аналіз одержаних результатів та перенесення їх на об'єкт, що досліджується. Перевіримо відповідність побудованої математичної моделі шестикутника правильному шестикутнику. Встановлюємо, що протилежні сторони математичної моделі шестикутника паралельні та рівні, отже, побудована модель відповідає об'єкту дослідження — правильному шестикутнику. __

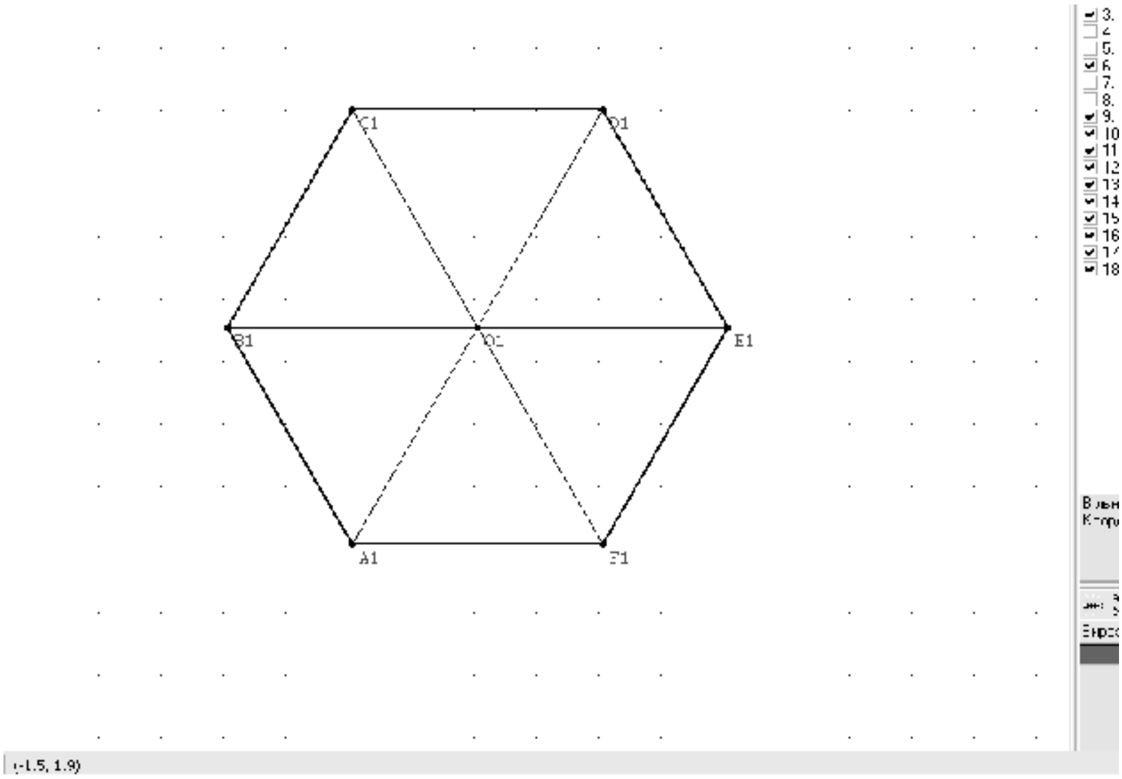


Рис. 2.9: Правильний шестикутник

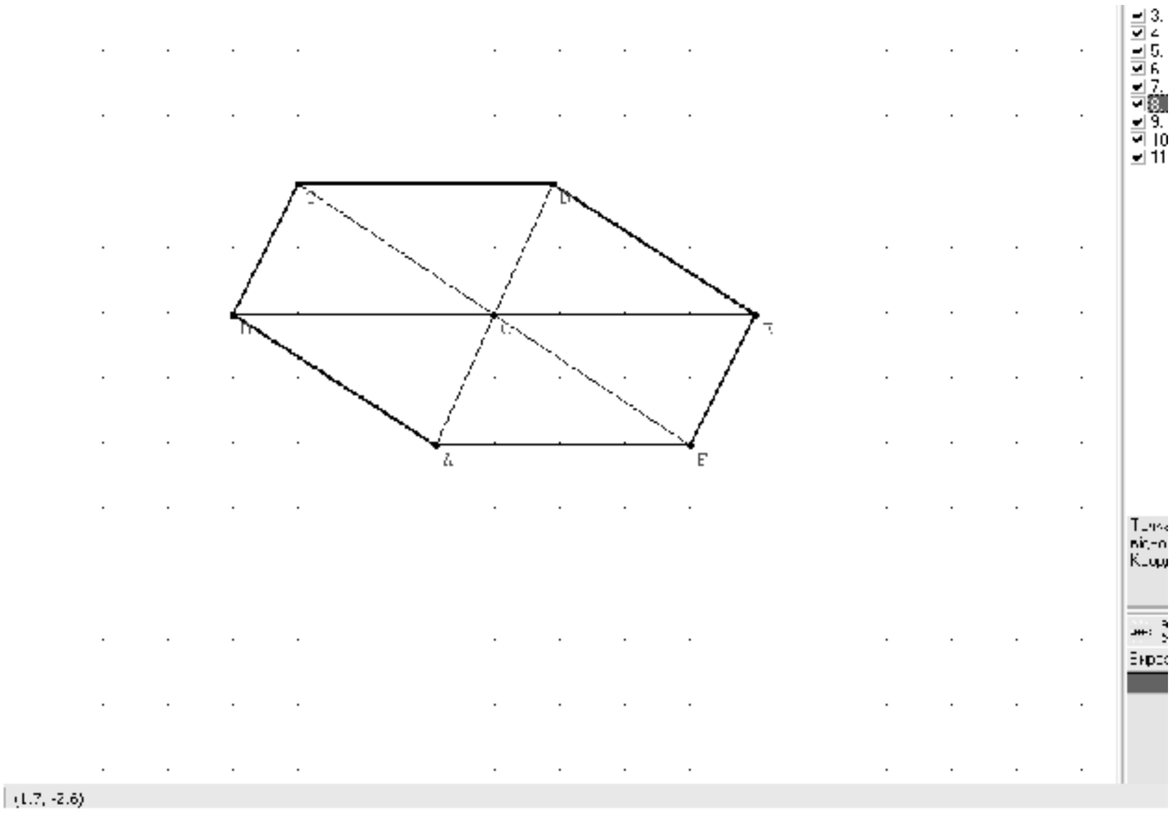


Рис. 2.10: Зображення правильного шестикутника

Застосування програмних засобів GRAN1, GRAN-2D, GRAN-3D дозволяє підвищити ефективність вивчення багатьох математичних понять і фактів, допомагає здогадатися і сформулювати гіпотезу (часто це найголовніше), знайти оригінальне розв’язання, надає можливості перевірити припущення, сприяє розвитку творчої та евристичної складової навчання математичного моделювання.

Формування інших вмінь створювати та досліджувати математичні моделі з використанням комп’ютерної техніки відбувається при вивченні майбутніми вчителями спецкурсів з математичного моделювання. На цих спецкурсах розглядаються задачі-проблеми з різних галузей людської діяльності економіки, біології, техніки. Такі задачі розв’язуються за розширеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання. Приклад такої задачі-проблеми наведено в додатку Н.

Систематичне застосування математичного моделювання з комп’ютерною підтримкою на лекційних, практичних заняттях та в науково-дослідній роботі студентів сприяє підвищенню якості підготовки майбутніх учителів математики, формуванню в них цілого комплексу професійних вмінь, серед яких вміння математичного моделювання займають важливе місце.

2.5 Контроль знань та вмінь студентів з математичного моделювання

В умовах особистісної зорієнтованості навчально-виховного процесу контроль ре зультатів навчання стає дійовим засобом розкриття індивідуальності студента і підтримки його особистісного розвитку. Розглянувши різні підходи до тлумачення контролю результатів навчання, висвітлені в дисертаційних дослідженнях В. О. Швеця [249] та І. А. Дремової [52], а також у посібниках [117,208] і враховуючи сучасні вимоги до навчального процесу, в нашому дослідженні дотримано такої *структури контролю* результатів навчання.

Перевірка — виявлення результатів навчання в опануванні певним обсягом предметних знань, навичок, вмінь, в інтелектуальному, психічному й соціальному розвитку студента і реалізації його можливостей, нахилів, інтересів. Перевіркою визначається:

- правильність виконання навчального завдання;
- сформованість загальних і предметних знань, навичок, вмінь;
- виявлення помилок, відхилень, недоліків у формуванні понять, способів дій;
- виявлення причин неуспіхів, індивідуальних особливостей, резервів розвитку кожного студента;
- планування коригуючої роботи.

Оцінювання — вимірювання досягнутих результатів навчання студентів і порівняння їх із запланованими програмою і конкретизованими у навчальних цілях, а також з його власними попередніми досягненнями. Результатом оцінювання є оцінка. В умовах кредитно-модульної організації навчального процесу встановлено порядок перерахунку рейтингових показників нормованої 100-бальної університетської шкали оцінювання в традиційну 4-бальну шкалу та європейську шкалу ECTS (табл. 2.5).

Табл. 2.5: Оцінювання знань та вмінь студентів в умовах кредитно-модульної організації навчального процесу

За шкалою ECTS	За шкалою університету	За національною шкалою	
		Екзамен	Залік
A	90–100 (відмінно)	5 (відмінно)	

B	80–89 (дуже добре)	4 (добре)	
C	70–79 (добре)		зараховано
D	65–69 (задовільно)	3 (задовільно)	
E	60–64 (достатньо)		
FX	35–59 (незадовільно — з можливістю повторного складання)	2 (незадовільно)	незараховано
F	1–34 (незадовільно — з обов’язковим повторним курсом)		

Облік — фіксація й збереження даних про досягнуті результати навчання, об’єктивне відображення динаміки розвитку особистості.

Корекція — усунення виявлених недоліків і прогалин у знаннях, вміннях студентів шляхом навчальної роботи, вдосконалення організації навчального процесу тощо.

Контроль знань та вмінь студентів з математичного моделювання має описану структуру і як педагогічний контроль, взагалі, виконує такі *основні функції*: діагностичну, навчаючу, розвиваючу, виховну, контролюючу.

Діагностика — це процес виявлення і оцінювання властивостей особистості, які нас цікавлять. Педагогічна діагностика — частина наукової системи контролю, яка безпосередньо пов’язана з процесом виявлення рівня знань, навичок та вмінь, розвитку, вихованості, оцінки реальної поведінки студентів.

На різних етапах навчання предметом діагностики в університеті є різні аспекти навчальної, науково-дослідної, суспільної діяльності студентів, а метою — отримання науково обґрунтованої інформації для удосконалення процесу навчання [74].

Навчаюча функція зумовлює таку організацію контролю навчальних досягнень студентів, коли його проведення сприяє повторенню, уточненню і систематизації навчального матеріалу, вдосконаленню підготовки студента. *Розвиваюча і виховна функції* контролю спрямовані на формування у студентів загальних і специфічних розумових дій і прийомів розумової діяльності та відповідального ставлення до занять, розвитку своїх здібностей, виховання активного прагнення навчатися. *Контролююча функція* передбачає визначення рівня досягнень окремого студента (групи), виявлення рівня готовності до засвоєння нового матеріалу, що дає змогу викладачеві відповідно планувати і викладати навчальний матеріал.

Всі ці функції тісно пов’язані між собою у навчально-виховному процесі. Заліки, екзамени і колоквіуми виконують діагностичну і контролюючу функцію, семінари, практичні заняття — діагностичну, навчаючу, розвиваючу і виховну.

Навчання математичного моделювання майбутніх учителів математики буде успішним лише за умови постійної діагностично-контролюючої роботи не лише на початковому етапі організації навчання (під час вступних лекцій та практичних занять), а й протягом усіх періодів його здійснення (під час вивчення кожної математичної дисципліни, а також під час впровадження спецкурсу “Математичне моделювання”).

Контроль знань та вмінь математичного моделювання на різних етапах навчання є важливим складовим компонентом системи навчання математичного моделювання майбутніх учителів математики в процесі вивчення ними різних математичних дисциплін.

Як зазначено в посібнику З. І. Слєпкань [216, с. 144], "*Педагогічний контроль* — це система перевірки результатів навчання, розвитку і виховання студентів. Існування і розвиток різних видів педагогічного контролю пояснюється стимулюючою і діагностичною роллю перевірки у навчальній діяльності учнів і студентів.

Система контролю знань, навичок і вмінь повинна будуватися на єдиних об'єктивних критеріях, бути простою і зручною, одночасно визначати стан якості підготовки даного контингенту студентів не тільки з точки зору наявності предмет них знань і вмінь, але і сформованості загальних і специфічних розумових дій та тих прийомів навчальної роботи, без яких програма навчання не може бути реалізована. "

В умовах організації навчального процесу за кредитно-модульною системою для визначення якості оволодіння навчальним матеріалом із подальшим його оцінюванням рекомендується застосовувати такі рівні досягнень студентів. *Високий рівень.* Студент вільно володіє навчальним матеріалом на підставі вивченої основної та додаткової літератури, аргументовано висловлює свої думки, проявляє творчий підхід до виконання індивідуальних та колективних завдань при самостійній роботі. *Достатній рівень.* Студент володіє основним обсягом навчального матеріалу, здатний його аналізувати, але не має достатніх знань та вмінь для формулювання висновків, допускає несуттєві неточності. *Задовільний рівень.* Студент володіє навчальним матеріалом на репродуктивному рівні або володіє частиною навчального матеріалу, уміє використовувати знання в стандартних ситуаціях. *Низький рівень.* Студент володіє навчальним матеріалом поверхово і фрагментарно. *Незадовільний рівень.* Студент не володіє навчальним матеріалом.

Трансформуючи зазначені рівні на тему "Математичне моделювання", можна виділити такі рівні засвоєння знань з математичного моделювання.

Низький рівень передбачає засвоєння таких понять як "математична модель", "математичне моделювання", "метод математичного моделювання", "спрощена евристична схема діяльності математичного моделювання", "прикладна задача", за стосування спрощеної евристичної схеми діяльності математичного моделювання до розв'язування простих задач (шкільного типу). Наприклад, таких:

Задача 2.12. Залежність витрат y на купівлю молочної продукції від щомісячного доходу x сім'ї виражається функцією $y = 0{,}3x - 36$. Який дохід повинна мати сім'я щомісяця, щоб витрачати на молочну продукцію 120 грн у місяць? Скільки сім'я витрачатиме на молочну продукцію, маючи дохід у 1500 грн?

Задача 2.13. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = 6\text{-}33t+32t^2\text{-}\ \frac{t^5}{20}$, де $s(t)$ — шлях, м, t — час, с. В який момент часу тіло має найбільшу швидкість? Знайти цю швидкість.

На задовільному рівні студенти повинні свідомо володіти спрощеною схемою діяльності математичного моделювання, вміти виконувати всі етапи схеми, а це вміння безпосередньо пов'язане з вміннями математичного моделювання, описаними у галузевих стандартах [37] (див. додаток А). Особливістю цього рівня навчальних досягнень є те, що знання і способи діяльності математичного моделювання базуються на відповідних знаннях і вміннях з математичної дисципліни, що вивчається, і ці знання і вміння проявляються під час виконання етапу “Реалізація математичної моделі математичними методами”. Приклади:

Задача 2.14. Переріз тунелю заданого периметра *p* має форму прямокутника з насадженим півкругом. За яких розмірів сторін прямокутника площа перерізу буде найбільшою?

Задача 2.15. Скільки тканини треба витратити на виготовлення пляжного зонта, що має форму частини сферичної поверхні радіуса 4 м, вирізаної прямим круговим циліндром радіуса 2 м?

Необхідно, щоб студенти вміли: для задачі 2.14 — знаходити похідну функції однієї змінної; знаходити найбільше та найменше значення функції однієї змінної; для задачі 2.15 — знаходити частинні похідні функції двох змінних; здійснювати перехід від прямокутної декартової системи координат до полярної системи координат; знаходити подвійний інтеграл.

На цьому рівні досягнень студенти знайомляться з розширеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання. Вони повинні знати послідовність етапів цієї схеми. Викладач наводить приклади розв’язування задач за розширеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання. Студентам пропонуються завдання: виділити етапи розширеної евристичної схеми діяльності математичного моделювання в процесі розв’язування певної задачі. Приклад:

Задача 2.16. Двоє друзів замовили в кафе каву та вершки. Коли їм одночасно подали однаково гарячу кафу та вершки, вони вчинили таким чином. Один з них додав до кави трішки вершків, накрив чашку паперовою серветкою і вийшов зателефонувати. Інший накрив чашку паперовою серветкою, а додав ту ж кількість вершків лише через 10 хвилин, коли повернувся перший, і вони почали пити каву разом. Хто з них пив більш гарячу каву? [6].

На достатньому рівні студенти повинні вміти розв’язувати простіші задачі за розширеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання, чітко виконувати кожний етап цієї схеми, використовувати різні методи математичного моделювання.

Високий рівень передбачає діяльність студентів за розширеною евристичною схемою творчого характеру, яка вимагає високого рівня знань і вмінь студента з математики та інформатики, вміння визначати, до якої галузі знань відноситься про блема, поставлена в задачі, вміння користуватися довідковою літературою з цієї галузі, актуалізувати свої знання та свій життєвий досвід. Цього рівня, як правило, досягають не всі студенти і це закономірно.

Щодо оцінювання знань та вмінь математичного моделювання слід зазначити на ступне. У процесі вивчення кожної математичної дисципліни студенти досягають достатнього рівня засвоєння знань та вмінь з математичного моделювання, що відповідає оцінці “добре”. Це повинно, на нашу думку, так впливати на загальну оцінку з математичної дисципліни (див. табл. 2.6).

Табл. 2.6: Оцінювання знань та вмінь студентів при вивченні математичної дисципліни

Оцінювання основних знань та вмінь		Оцінювання знань та вмінь з математичного моделювання		Загальна оцінка	
нац.	ECTS	нац.	ECTS	нац.	ECTS
5	A	4	B, C	5	A

відмінно			добре			відмінно		
добре	4	B, C	добре	4	B, C	добре	4	B, C
задовільно	3	D, E	добре	4	B, C	задовільно	3	D
відмінно	5	A	задовільно	3	D, E	добре	4	C
добре	4	B, C	задовільно	3	D, E	добре	4	C
задовільно	3	D, E	задовільно	3	D, E	задовільно	3	D, E

нац. — за національною шкалою
ECTS — за шкалою ECTS

У графі "Оцінювання основних знань та вмінь" оцінюються знання, навички та вміння студентів відповідно до вимог програми з кожної математичної дисципліни зокрема.

Під час вивчення спецкурсу з математичного моделювання зберігається загальноприйнята відповідність між рівнем навчальних досягнень та оцінкою, яка проілюстрована в табл. 2.7.

Табл. 2.7: Відповідність між рівнем навчальних досягнень студентів і оцінкою

Рівень навчальних досягнень студентів	Оцінка		
	за шкалою ECTS	за шкалою університету	за національною шкалою
високий	A	90–100	5
достатній	B	80–89	4
	C	70–79	
задовільний	D	65–69	3
низький	E	60–64	3
незадовільний	FX	35–59	2
	F	1–34	

Високий рівень (творчий) з математичного моделювання досягається здібними та обдарованими студентами також у процесі індивідуальної та групової роботи під керівництвом викладача під час написання курсових, кваліфікаційних робіт, наукових студентських робіт, підготовки доповідей на засідання наукових гуртків та наукові конференції.

До форм педагогічного контролю з математичного моделювання віднесемо екзамени, заліки, усне опитування, письмові контрольні роботи, реферати, колоквіуми, семінари, лабораторні заняття, курсові, кваліфікаційні роботи тощо.

Педагогічний контроль з математичного моделювання поділяється на такі види: попередній, поточний, модульний, рубіжний, підсумковий і заключний.

З метою вибору ефективних форм, методів і засобів навчальної діяльності здійснюється *попередній* (*діагностичний*) *контроль*. Його проведення сприяє актуалізації опорних знань та чуттєвого досвіду студентів, а результати дають змогу викладачу виявити можливі "прогалини" і "слабкі" місця знань та вмінь студентів, більш цілеспрямовано планувати вивчення навчального матеріалу та навчально-пізнавальної діяльності студентів. З математичного моделювання попередній контроль проводиться у вигляді усного фронтального опитування, коли студенти повторюють, наприклад, спрощену чи розширену евристичні схеми.

Поточний контроль здійснюється під час занять (усне опитування, письмові самостійні та контрольні роботи). Наприклад, при проведенні письмових контрольних робіт з окремих математичних дисциплін студентам слід пропонувати прикладні задачі, які дають змогу перевірити не тільки основні знання і вміння із заданої теми, а і вміння математичного моделювання.

При вивченні теми "Множини та операції над ними" (лінійна алгебра) студентам можна запропонувати в письмовій контрольній роботі такі задачі.

Задача 2.17. Із 30 студентів групи 20 займаються волейболом (множина A), 15 — тенісом (множина B). Відомо, що 8 студентів займаються обома видами спорту. За допомогою діаграм Венна з'ясувати, скільки студентів займаються тільки одним видом спорту, не займаються жодним видом спорту? [53, с. 15]

Задача 2.18. Для визначення впливу реклами на купівлю мийних засобів було проведено опитування, після якого з'ясувалося, що при виборі товару 50 % осіб керувалися рекламою, 40 % — власною думкою про якість товару, 30 % — порадами друзів та знайомих. При цьому 10 % осіб керувалися рекламою і власною думкою, 8 % — рекламою та порадами друзів, 7 % — власною думкою і порадами друзів. Скільки процентів опитуваних при виборі товару керувалися одночасно рекламою, власною думкою та порадами друзів?

При розв'язанні цих задач студенти не тільки демонструють вміння складати та аналізувати діаграми Венна, а і вміння працювати за спрощеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання.

Письмові контрольні роботи на одну–дві задачі слід давати на кожному практичному занятті, причому як всім студентам на 15–20 хв, так і 4–6 студентам, відсадивши їх окремо за перші парти, а з рештою студентів проводити усне опиту вання. Письмові контрольні роботи з комбінованим опитуванням слід чергувати. Це сприятиме систематичності знань та вмінь студентів та активізації їх готовності до кожного практичного заняття зокрема. Так само організовувати поточний контроль слід під час вивчення кожної математичної дисципліни.

Організація навчальної діяльності студентів за кредитно-модульною системою навчання передбачає модульний контроль.

Модуль — задокументована завершена частина освітньо-професійної програми (навчальної дисципліни, практики, державної атестації), що реалізується відповідними формами навчального процесу.

Змістовний модуль — цілісна система навчальних елементів, що поєднані за ознакою відповідності певному навчальному об'єктові, яка забезпечує досягнення мети модуля [179].

Модульний контроль — це оцінювання результатів засвоєння певного модуля. Такий контроль, як правило, проводиться у вигляді письмової контрольної роботи або тестів. До завдань такої контрольної роботи входять як теоретичні питання, так і задачі. Тривалість контрольної роботи 45 хв або 1,5 години в залежності від обсягу теми, матеріал якої контролюється. Так, при проведенні спецкурсу "Математичне моделювання" доцільно перевірити знання і вміння студентів з теми "Методи математичного моделювання", запропонувавши їм контрольну письмову роботу з чотирьох варіантів. Наведемо зміст одного з варіантів цієї контрольної роботи (інші наведені у додатку G).

Варіант № 1.

1. Навести приклад застосування фундаментальних законів природи до побудови математичних моделей.
2. Описати математичну модель визначення траєкторії спливання підводного човна.
3. Назвати та коротко охарактеризувати основні методи математичного моделювання.

На виконання запропонованих завдань доцільно відвести 45 хв. Оцінюється ро бота наступним чином. Оцінка "відмінно" (5, A) — виконання всіх трьох завдань. Оцінка "добре" (4) — виконання всіх трьох завдань, питання 3 (4, B) або 1 (4, C) можуть бути розкриті неповністю. Оцінка "задовільно" (3) — виконання двох за вдань, 1-го та 2-го або 2-го та 3-го завдань (3, E), 1-го та 3-го завдань та аналіз і побудова математичної моделі в 2-му завданні (3, D). Одержана за письмову контрольну роботу оцінка виставляється студентам як оцінка за модуль.

Рубіжний контроль — заліки за модулями, виявлення готовності виконання курсових та кваліфікаційних робіт.

Найпоширенішим видом рубіжного контролю є залікова контрольна робота. Як правило, робочі програми з кожної математичної дисципліни передбачають прове дення двох таких контрольних робіт. На факультетах складається графік проведення цих контрольних робіт. Це сприяє серйозному ставленню студентів до цього виду контролю. З досвіду роботи слід зауважити, що ці контрольні роботи є ефективними тоді, коли студентам пропонується для розв'язування 4–6 варіантів. Текст цих контрольних робіт складається з 5–6 завдань різного рівня складності. З запропонованих студентам 5–6 задач одна або дві повинні розв'язуватися студентами методом математичного моделювання за спрощеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання.

Наведемо приклад тексту варіанту № 1 залікової контрольної роботи № 1 з курсу "Проективна геометрія та методи зображень".

Варіант № 1.

1. На евклідовій прямій дано своїми неоднорідними координатами фундаментальні точки проективної системи координат: $E_0(0)$, $E_1(1)$, $E_2(-1)$. Знайдіть проективні координати точок $A(2)$, $B(3)$, $C(-2)$, $D(-3)$ і невласної точки K_∞.
2. Дано дві пари точок проективної прямої: $A(2;-1)$, $A'(0;1)$ і $B(1;0)$, $B'(1;4)$. Знайти пару точок, що гармонійно розділяє кожну з даних пар.
3. Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих
$$l: 3x_1 - x_2 + 6x_3 = 0, \qquad m: x_2 - 4x_3 = 0$$
і точку $A(1;-2;3)$.
4. В однорідних афінних координатах дано рівняння кривої
$$3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 - 8x_2x_3 - 8x_1x_3 = 0.$$
Знайти рівняння цієї кривої в проективній системі координат R з фундаментальними точками

$$E_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad E_2 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad E_3 = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad E_4 = \begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

5. Використовуючи теорему Дезарга, доведіть, що медіани трикутника перетинаються в одній точці.
6. Нехай *A* і *A*' — інверсні точки, *K* і *L* — точки перетину прямої *AA*' з колом інверсії. Доведіть, що пари точок *A*, *A*' і *K*, *L* гармонічно розділяються.

Задачі 1 та 4 даної контрольної роботи слід розв’язувати за спрощеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання, вибравши за математичну модель проективної прямої розширену евклідову пряму (задача 1) та за математичну модель проективної площини — розширену евклідову площину (задача 4).

Залікова контрольна робота проводиться також і під час проведення спецкурсу з математичного моделювання. Робоча програма спецкурсу, що наведена в п. 2.4, передбачає проведення однієї контрольної роботи в аудиторії. Ця робота має за мету перевірити вміння застосовувати знання та вміння з математичних дисциплін та одержані у процесі вивчення спецкурсу до побудови і дослідження математичних моделей реальних процесів та явищ і проводиться під час практичного заняття. Наведемо приклад тексту варіанту контрольної роботи (інші варіанти подані в додатку G).

Контрольна робота. Варіант № 1.

1. Струмінь води фонтана досягає найбільшої висоти 4 м на відстані 0,5 м від вертикалі, що проходить через точку *O* виходу струменя. Знайти висоту струменя над горизонтом на відстані 0,75 м від точки *O*.
2. Побудувати зображення правильного дванадцятикутника.
3. Проективною площиною називають довільну множину елементів (точок) та систему її підмножин (прямих), якщо виконуються такі аксіоми:
    - Через дві різні точки проходить одна і тільки одна пряма.
    - Дві довільні прямі мають щонайменше одну спільну точку.
    - Існують три точки, що не лежать на одній прямій.
    - На прямій лежить щонайменше дві точки.

    У просторі візьміть довільну точку *O* і розгляньте множину Пусіх прямих, що проходять через цю точку. Чи буде множина Пматематичною моделлю проективної площини?
4. Населення міста зростає на 2 % за рік. У скільки разів воно збільшиться через *n* років? Обчислення провести, якщо *n* = 10, 25, 50, 100 років.
5. Знайти максимальну швидкість зниження парашутиста, якщо його маса разом з парашутом дорівнює 80 кг, а сила опору повітря при цьому пропорційна квадрату швидкості його руху (вважати, що коефіцієнт пропорційності $k = 3 \cdot 10^2$ г/см).

У задачах цієї контрольної роботи математичні моделі будуються засобами аналітичної геометрії (задача 1), теорії методів зображень — геометричного моделювання (задача 2), основ геометрії та лінійної алгебри (задача 3), математичного аналізу (задача 4), диференціальних рівнянь (задача 5). Задачі 1, 4, 5 — прикладні. Задачі 2 та 3 контролюють розуміння розвитку математичної теорії.

Щодо оцінювання даної контрольної роботи, то слід зауважити, що оцінка “відмінно” (5, A) ставиться за правильне виконання п’яти завдань. Оцінка “добре” (4 , B) — за виконання чотирьох завдань, допускається невиконання однієї з прикла дних задач або однієї із задач 2, 3. Оцінка “добре” (4, C) ставиться також за виконання п’яти завдань з незначними неточностями, пропусками, помилками (не більше однієї, двох). Оцінка “задовільно” (3, D) ставиться за виконання трьох завдань, допускається невиконання однієї з прикладних задач та задачі 2 або 3 (“задовільно”, 3, E). В усіх інших випадках ставиться оцінка “незадовільно” і студенти повинні переписувати дану контрольну роботу.

Охарактеризуємо *підсумковий контроль* — це екзамен або залік за весь курс. В білети курсових екзаменів доцільно включати задачі, які розв’язуються методом математичного моделювання, що дозволяє викладачеві перевірити не тільки основні вміння застосовувати теорію до розв’язування задач, а й вміння математичного мо делювання. Наведемо білет екзамену з “Диференціальної геометрії та топології”.

Білет № 3.

1. Просторові криві. Супровідний тригранник Френе просторової фігури.
2. Неперервні відображення. Гомеоморфізм. Приклади гомеоморфних топологічних просторів.
3. Дослідити траєкторію руху тіла, кинутого під кутом α до горизонту, що рухається зі швидкістю v_0.
4. Показати, що метричний простір є топологічним простором.

Задача 3 даного білета є прикладною. Траєкторію польоту тіла описує обвідна сім’ї парабол $y = x - \dfrac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$, яка також є параболою.

Спецкурс “Математичне моделювання” передбачає підсумковий контроль у ви гляді диференційованого заліку. На залік виносяться теоретичні питання та задачі, що розв’язуються за розширеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання. Теоретичні питання та зразки задач даються студентам для підготовки за два тижні до заліку. Залік проводиться у письмовій формі за розкладом деканату. Викладачу до заліку доцільно скласти окремі білети, які на заліку вибирають студенти. У білет включаються два теоретичні питання та задача. Оскільки розв’язування задачі передбачає діяльність математичного моделювання за розширеною евристичною схемою, то залік слід проводити в комп’ютерному класі. Наведемо приклад білета до заліку зі спецкурсу “Математичне моделювання”.

Білет № 5.

1. Процес розмноження бактерій та його математична модель.
2. Метод аналогій при побудові математичних моделей.
3. Знайти температуру деталі циліндричної форми при її локальному охолодженні кільцевою зоною з торця. Коефіцієнт теплопровідності (λ) матеріалу, з якого виготовлено деталь, і густина (q) теплових джерел, розташованих в ній, є сталими при таких вихідних даних: $\rho_1 = 0{,}2$, $\rho_2 = 0{,}4$, $R = 1$, $h = 1$, $\lambda = 0{,}1$, $k = 0{,}04$, $q = 2$, $T_0 = 0^\circ$, $n = 7$, $n(z) = 6$.

Для одержання заліку обов’язково слід відповісти на одне теоретичне запитання і розв’язати задачу. При цьому залік буде зараховано з оцінкою “задовільно” (3, D). Оцінка “зараховано” (3, E) виставляється за правильну відповідь на 2 теоретичних питання та виконання аналізу і побудови математичної моделі задачі. Залік зарахований з оцінкою “добре” (4, В), коли студент відповів на всі питання і розв’язав задачу, допустивши при цьому 2 недоліки, з оцінкою “добре” (4, С), коли допустить ще і 1 помилку. І залік зараховується з оцінкою “відмінно” (5, А) за глибоку, змістовну відповідь на теоретичні питання і правильне розв’язування задачі та її оформлення.

На жаль, залік з математичного моделювання в НПУ імені М. П. Драгоманова не є диференційованим, але він повинен бути саме таким, тому що це єдина форма підсумкового контролю з математичного моделювання, цілком присвячена перевірці знань та вмінь з цієї галузі знань.

Заключний контроль знань та вмінь студентів — майбутніх учителів — здійснюється комісією на державних екзаменах та під час захисту кваліфікаційних робіт. Наприклад, до білетів державного екзамену з математики в НПУ імені М. П. Драгоманова входить обов’язково прикладна задача, яка розв’язується методом математичного моделювання [51].

Як показує досвід, майже всі студенти, що прослухали спецкурс з математичного моделювання, розв’язують прикладну задачу методом математичного моделювання і одержують високі оцінки на державному екзамені з математики.

Описані нами види контролю, хоч і є в сьогоднішній університетській практиці дуже поширеними, проте не є досконалими. Головна перевага традиційної системи контролю — простота, а недоліки — суб’єктивізм в оцінці, а також слабка диференціююча здібність.

Вища школа, яка знаходиться на етапі переходу до інтенсивних методів навчання , шукає свою більш досконалу систему педагогічного контролю, оскільки тра диційна система контролю успішності студентів не відповідає сучасним вимогам до вищої школи і не задовольняє потреб систематичної діагностики успішності навчання студентів.

Зараз вищі заклади освіти впроваджують кредитно-модульну систему навчання і контролю успішності студентів у відповідності з рекомендаціями Болонської декларації, яку підписала Україна.

При умові впровадження описаної системи контролю та оцінювання знань і вмінь щодо математичного моделювання і при вивченні інших навчальних дисциплін, перехід на кредитно-модульну систему навчання може пройти без проблем.

2.6 Експериментальна перевірка основних результатів дослідження, корекція методичних рекомендацій

Метою нашого педагогічного експерименту була оцінка ефективності пропонованої методики вивчення теоретичних знань і формування вмінь математичного моделювання у майбутніх учителів математики. У цьому контексті вирішувалися такі завдання:

1. розробка методичних рекомендацій щодо навчання математичного моделювання студентів педагогічних університетів;
2. створення необхідного методичного забезпечення (тексти лекцій, система задач, програма спецкурсу, методичні вказівки до проведення практичних занять та інструкції до лабораторних занять, завдання для діагностики і контролю успішності студентів) для підтримки особистісно орієнтованої

системи навчання математичного моделювання у педагогічних університетах;
3. обґрунтування критеріїв щодо діагностики рівнів засвоєння знань та сформованості вмінь з математичного моделювання у майбутніх учителів математики — студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів;
4. забезпечення можливості використання експериментальних матеріалів як за допомогою комп’ютера, так і у роздрукованому вигляді;
5. проведення кількісного та якісного аналізу результатів педагогічного експерименту.

Експериментальні дослідження проводилися у Національному педагогічному університеті імені М. П. Драгоманова, Кримському гуманітарному університеті (м. Ялта), Херсонському державному університеті, Слов’янському державному педа гогічному університеті. Дослідження здійснювалися у три взаємопов’язані етапи протягом 1998–2005 рр.

На першому етапі (1998–1999 рр.) було проведено *констатуючий* експеримент, розрахункові дані до якого наводяться у додатку J. Констатуючий етап експерименту здійснювався шляхом аналізу результатів вступних іспитів з математики, контрольних робіт, матеріалів атестаційних та акредитаційних комісій, опитування, анкетування, тестування викладачів, студентів, учителів, учнів загальноосвітньої школи. Він дозволив з’ясувати рівень математичної підготовки майбутніх учителів у цілому, а також рівень знань та вмінь математичного моделювання зокрема.

Усереднені дані рівнів фактичних досягнень першокурсників у опануванні курсу математики основної школи досить високі і досягають 85 %. Це зумовлено вибором професії “вчитель математики” та конкурсним відбором до педагогічного університету в умовах конкурсу 3–4 особи на місце. Наведені дані відповідають 1999–2001 рр. Слід відмітити, що за останні роки результати вступних випробувань дають підстави стверджувати, що успішність з математики випускників середніх шкіл України, так само як і якість математичної підготовки, помітно знизилися [248]. При достатньому рівні основних математичних знань та вмінь за курс основної школи рівень вмінь математичного моделювання дуже низький (12 % від загальної кількості студентів). Це зумовлено двома причинами:

- відсутністю науково обґрунтованої методичної системи навчання математичного моделювання у процесі вивчення математики у загальноосвітній школі;
- опосередкованим характером навчання математичного моделювання, що склався у середині 80-х років минулого сторіччя і триває досі [41].

Опосередкованість у навчанні математичного моделювання полягає в тому, що розв’язуючи прикладну задачу, школярі інтерпретують вихідні дані задачі у вигляді математичних символів та співвідношень між ними (фактично, будують математич ну модель), розв’язують відповідну математичну задачу і одержану відповідь пере водять на образи вихідної задачі (це відбувається дуже рідко), при цьому не знаючи, що вони займаються математичним моделюванням. Слова “математична модель”, “математичне моделювання” не розуміються, а тому і не вживаються не тільки уч нями, а і вчителями. Лише методисти, що спостерігають за процесом розв’язування прикладної задачі, називають це “діяльністю математичного моделювання”.

Ми вважаємо, що процес навчання математичного моделювання повинен бути свідомим. Учні загальноосвітніх шкіл та студенти — майбутні вчителі математики — повинні свідомо володіти такими поняттями як “математична модель”, “мате матичне моделювання”, виконувати розв’язання прикладної задачі за спрощеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання, демонструючи при цьому вміння попереднього аналізу практичної проблеми, що досліджується, побу дови математичної моделі задачі, реалізації побудованої математичної моделі математичними чи комп’ютерними засобами, вміння аналізувати одержаний результат та записувати його в образах проблеми, що досліджується.

Важливою проблемою у формуванні вмінь математичного моделювання у студентів — майбутніх учителів математики — є:

1. вміння різнобічно аналізувати об’єкти, систему, явище, що моделюється;
2. вміння власне побудови математичної моделі;
3. вміння досліджувати побудовану модель (розв’язування відповідної математичної задачі) точними або наближеними математичними методами;
4. вміння побудови та опису алгоритму розв’язування задачі (дослідження математичної моделі комп’ютерними засобами);
5. вміти складати чи добирати та використовувати готові програмні засоби (математичні пакети прикладних програм);
6. вміння проводити обчислювальний експеримент;
7. вміння аналізувати одержані результати та переносити їх на образ, що вивчається;
8. вміння вдосконалювати модель та уточнювати її.

Якщо розглянути згадані вміння у висхідній послідовності від а) до ж), то можна говорити про п’ять рівнів сформованості вмінь математичного моделювання у майбутніх учителів математики.

У додатку L наводяться розрахункові дані з діагностики рівнів сформованості вмінь математичного моделювання у студентів математичних спеціальностей НПУ імені М. П. Драгоманова — майбутніх учителів математики. У цілому за усередне ними показниками, результати констатуючого експерименту засвідчили, що високий рівень сформованості знань та вмінь математичного моделювання показали 5 % студентів-випускників, вище середнього — 7 %, середній — 9 %, нижче середнього — 48 %, низький — 31 %. Близько 79 % учасників констатуючого етапу експерименту показали нижчий від середнього та низький рівень оволодіння знаннями та сформованості вмінь математичного моделювання (рис. L.1).

На підставі цих даних та компонентного аналізу анкет констатуючого етапу експерименту (додаток I) ми прийшли до висновку:

1. серед випускників загальноосвітніх шкіл, що вступають до педагогічних університетів на математичні спеціальності, спостерігається низький рівень вмінь математичного моделювання та відсутність знань про математичне моделювання як метод взагалі;
2. серед випускників педагогічних університетів також переважає низький рівень вмінь математичного моделювання, що не відповідає потребам сучасної школи;

3. під час навчання у педагогічному університеті розвиток вмінь математичного моделювання у більшості студентів — майбутніх учителів математики — відбувається повільно, несистематично й розрізнено;
4. більшість випускників не вміє комплексно використовувати вміння математичного моделювання, одержані під час вивчення математичних дисциплін та інформатики, до розв'язування прикладних задач.

На нашу думку, однією з головних причин такого стану є відсутність науково обґрунтованої методичної системи навчання математичного моделювання студентів — майбутніх учителів математики. Для більшості педагогічних університетів є характерною та ж опосередкованість у навчанні математичного моделювання, що і у школі. На сьогоднішній день повністю відсутні посібники для математичних спеціальностей педагогічних університетів з математичного моделювання. А потре ба формування знань і вмінь математичного моделювання у майбутніх учителів математики викликає необхідність відповідного методичного забезпечення, включаючи методичні рекомендації, розробки, засоби навчання, вимагає досвіду, знань внутріпредметних і міжпредметних зв'язків.

Отже, діагностуючи за результатами констатуючого експерименту стан система тичного формування вмінь математичного моделювання у студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів — майбутніх учителів математики — як незадовільний, ми прийшли до висновку про необхідність пошуку шляхів виходу з цієї ситуації, про нагальну потребу цілеспрямованого, систематичного, розгорнутого в часі формування в майбутніх учителів математики вмінь математичного моделювання у процесі вивчення дисциплін математичного циклу, методики навчання математики, окремого спецкурсу з математичного моделювання. На нашу думку це мало сприяти розвитку у студентів наукового світогляду на основі математичних знань та вмінь, інтеграції знань та вмінь з різних математичних дисциплін та з інформатики і обчислювальної техніки, рельєфно окреслити внутріпредметні та міжпредметні зв'язки, значно покращити професійну компетентність майбутніх учителів математики.

На другому етапі (1999–2001 рр.) було проведено *пошуковий* експеримент, під час якого вивчалася та аналізувалася математична, психолого-педагогічна та навчально-методична література, педагогічний досвід викладачів з метою створення сучасного методичного забезпечення для навчання математичного моделювання і ме тодики його використання. Одним із результатів цього етапу дослідження став висновок про необхідність комплексного вирішення проблеми, яке б включало виділення концептуальних положень, створення сучасних засобів навчання матема тичного моделювання та розробку ефективної методики їх використання.

На основі зазначених факторів було сформульовано загальну гіпотезу, намічено програму дослідження і перевірки висунутої гіпотези, визначено мету, предмет, об'єкт і завдання дослідження.

Для створення відповідної методичної системи навчання було визначено її основні компоненти: цілі і завдання, зміст, методи, організаційні форми і засоби навчання (див. п. 1.2 та 1.3).

Аналіз діючих освітніх стандартів і кваліфікаційних характеристик учителів ма тематики, програм математичних дисциплін, методики навчання математики, існуючих навчальних посібників з різних математичних дисциплін для педагогічних університетів, а також шкільних підручників і посібників з математики допоміг уто чнити вимоги до підготовки майбутніх учителів математики з математичного моделювання, згідно з якими:

1. виділявся зміст основних компонентів методичної системи навчання математичного моделювання;
2. формувалися та вдосконалювалися ефективні методи, прийоми, організаційні форми та засоби навчання математичного моделювання.

Обираючи ефективні напрями формування знань і вмінь математичного моделювання у студентів — майбутніх учителів математики, ми звертались до наукової думки, досвіду вітчизняних та зарубіжних педагогів, психологів, дидактів, досвідчених викладачів математики; досліджували їх на придатність, адаптованість до навчального процесу педагогічних університетів; прогнозували вплив пропонованих нами заходів на покращення математичної та фахової підготовки студентів — майбутніх учителів математики.

Такими були основні характерні риси наукового пошуку педагогічного до слідження, під час якого розроблялись конкретні методичні рекомендації, ретельно добирався матеріал для проведення експериментального навчання, детально відшліфовувалися окремі компоненти методичної системи формування вмінь мате матичного моделювання у майбутніх учителів математики в процесі навчання.

На третьому етапі (2001–2005 рр.) проводився *формуючий* експеримент, тобто йшло впровадження запропонованої методики навчання математичного моделювання, всебічно вивчалися можливості її ефективного застосування, аналізувалися переваги та недоліки створеного методичного забезпечення, коригувалися окремі компоненти розробленої нами методичної системи навчання.

Для перевірки висунутої гіпотези дослідження були розв’язані такі завдання:

1. вивчено стан проблеми в математичній, психолого-педагогічній, навчально-методичній літературі, в системі підготовки вчителя математики та у шкільній практиці;
2. виділено психолого-педагогічні передумови та методичні вимоги до навчання студентів математичного моделювання;
3. розроблені і науково обґрунтовані компоненти методичної системи формування знань і вмінь математичного моделювання в процесі математичної та методичної підготовки майбутніх учителів математики в умовах особистісно-орієнтованого навчання;
4. експериментально перевірено ефективність розробленої методичної системи та внесено корекції в методичні рекомендації.

У здійсненні формуючого етапу експерименту брали участь викладачі НПУ імені М. П. Драгоманова, зокрема дисертантка Л. Л. Панченко, професор Т. В. Колесник, доцент Т. В. Ломаєва, професор М. В. Працьовитий, професор З. І. Слєпкань. Пара лельно розроблені методичні матеріали використовувалися у процесі підготовки вчителів у Кримському гуманітарному університеті, Херсонському державному університеті, Слов’янському державному педагогічному університеті, де викладачі використовували методичне забезпечення і розроблену автором методику навчання математичного моделювання, оцінювали її ефективність, висловлювали свої враження та побажання, що сприяло їх вдосконаленню.

Ми виходили, перш за все, з того, що безпосереднім об’єктом формуючого експерименту є зміна обсягу та характеру знань, навичок та вмінь студентів під впли вом педагогічної дії. Щоб забезпечити об’єктивне і якісне вимірювання такої діяльності у відповідності із пропонованою методичною системою формування знань і вмінь математичного моделювання, у підготовчий період формуючого етапу експерименту ми особливу увагу приділяли як вибору змісту, методів, форм і засобів його проведення, так і розробці системи кількісної оцінки знань, навичок і вмінь студентів з математичного моделювання.

Крім того, намагалися передбачити можливість коригування моделі досліджуваного навчального процесу з характеристиками, які визначає експериментальна методична система в ході самого формуючого навчання.

Під час аналізу даних психолого-педагогічного експерименту найчастіше використовувалися непараметричні моделі перевірки гіпотез. Ці методи вільні від використання законів розподілу і застосовуються для опрацювання даних, які не є кількісними за своєю природою. У процесі дослідження якісних ознак використовуються критерії знаків Стьюдента, Вілкоксона, медіанний, Мана–Уїтні, Колмогорова–Смірнова тощо [202].

Найдоцільнішим для наших умов і завдань експериментального дослідження був визнаний метод єдиної відмінності [36]. Об’єм вибірки ми визначили в 211 студентів. Для формуючого експерименту були вибрані експериментальні (Е) та контрольні (К) групи.

Вибір експериментальних і контрольних груп відбувався таким чином: початковий рівень знань і вмінь математичного моделювання в експериментальних та контрольних групах однаковий, заняття в експериментальних та контрольних групах ведуть одні й ті ж викладачі. У процесі проведення експерименту використовувалися усі вимоги щодо застосування експериментальних методів опрацювання результатів педагогічного дослідження: всі вибірки були однорідними та незалежними, а заняття з одних і тих же дисциплін в експериментальних і контрольних групах проводилися одним викладачем. Єдиною відмінністю у навчанні в експериментальних і контрольних групах була методична система формування знань і вмінь математичного моделювання в процесі вивчення окремих математичних дисциплін.

Для оцінки ефективності традиційної (опосередкованої) та пропонованої нами методик формування знань і вмінь математичного моделювання були використані показники приросту вихідного рівня знань, навичок і вмінь студентів. За такого підходу пропонована методична система вважається тим ефективнішою, чим більшого приросту рівня знань, навичок, вмінь, загального математичного розвитку досягнуто в результаті її використання. Правильність оцінки ефективності методич ної системи, що реалізується, суттєво залежить від того, наскільки коректно вимірюється рівень знань, навичок, вмінь та позитивні зміни когнітивної сфери студентів.

Для кількісної оцінки заданого рівня ми використовували поняття інформаційно-смислового елементу тексту (ІСЕТ), що ґрунтується на структурності навчальної інформації [228]. Рівень знань, навичок, вмінь кожного студента до і після апробації методичної системи формування вмінь математичного моделювання оцінювався за допомогою коефіцієнта $K_i = \frac{S_i}{S}$, де S — загальна кількість раніше засвоєних ICET, S_i — загальна кількість ICET, які засвоєні та виявлені i-м студентом до початку та після формуючого етапу експерименту.

Середнє значення приросту рівня знань, навичок, вмінь студентів групи, яка навчалась за відповідною методичною системою, знаходилась за формулою

$$\Delta \bar{K} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(K_{1i} - K_{2i})}{n},$$

де n — чисельність студентів у групі, K_{1i} та K_{2i} — відповідні значення коефіцієнтів рівня знань, навичок, вмінь i-го студента, які виявлені під час підсумкового та початкового зрізів відповідно.

Структурно наша методика оцінки ефективності методичних систем формування вмінь математичного моделювання (пропонованої та традиційної опосередкованої) складається з таких компонентів:

1. Визначення вихідного рівня знань, навичок, вмінь загального та математичного розвитку кожного студента експериментальної та контрольної груп.
2. Визначення кінцевого рівня зазначених вище показників кожного студента в експериментальній та контрольній групах (після формуючого експерименту).
3. Знаходження абсолютного приросту рівня знань, навичок, вмінь, фіксація позитивних тенденцій розвитку когнітивної сфери кожного учасника дослідження експериментальної та контрольної груп.
4. Обчислення середніх значень вихідних та кінцевих рівнів знань, навичок, вмінь (у групах і типологічних підгрупах).
5. Обчислення середнього значення абсолютних приростів рівнів знань, навичок, вмінь, фіксація позитивних тенденцій загального та математичного розвитку (у групах та типологічних підгрупах).
6. Знаходження відносного приросту рівня знань, навичок, вмінь студентів кожної групи і типологічної підгрупи.
7. Математична обробка одержаних результатів (порівняння значень відносних приростів рівнів знань, навичок, вмінь, а також позитивних тенденцій розвитку когнітивної сфери студентів експериментальної та контрольної груп, у групах та типологічних підгрупах [25].

Формуючий експеримент за наведеною схемою проводився на матеріалі наступних дисциплін:

- математичний аналіз (розділи “Функції та їх властивості”, “Похідна та її застосування”, “Інтеграл та його застосування”, “Функції кількох змінних”, “Подвійні та потрійні інтеграли і їх застосування”);
- аналітична геометрія (розділи “Пряма на площині”, “Криві другого порядку”, “Афінні перетворення площини”);
- лінійна алгебра (розділи “Матриці та операції над ними”, “Системи лінійних рівнянь”, “Бінарні відношення на множинах”, “Алгебраїчні структури”);
- проективна геометрія та методи зображень (основні моделі проективної прямої та проективної площини, розділи “Проективна система координат”,

“Перетворення проективної системи координат”, “Побудова зображень правильних многокутників”, “Побудова зображень перерізів правильних многогранників”);

- основи геометрії (розділи “Аксіоматичний метод обґрунтування сучасної геометрії”, “Моделі геометрії М. І. Лобачевського”);
- диференціальні рівняння;
- методика навчання математики;
- спецкурс “Математичне моделювання”.

Завдання підсумкового зрізу були спрямовані на виявлення кінцевого рівня знань , навичок, вмінь студентів з математичного моделювання за матеріалом названих тем, а також для з’ясування змін у вміннях студентів самостійно виконувати діяльність математичного моделювання за спрощено та розширеною евристичною схемами діяльності математичного моделювання. Зразки завдань початкового та підсумкового зрізів знаходяться у додатку К.

Розрахунок середніх значень початкового рівня знань, навичок, вмінь ($\bar{K}$) та абсолютного приросту цього рівня ($\Delta\bar{K}$) виконувався спочатку для кожної навчальної групи окремо, а потім для всієї сукупності експериментальних і контрольних груп. Під час аналізу результатів враховувалися лише останні дані, які мають більш загальний характер, об’єктивно відображають вплив експериментальної та традиційної методичних систем на підвищення рівнів знань, навичок, вмінь студентів, загальний розвиток їх когнітивної сфери (додаток М).

Водночас ми брали до уваги, що через неоднорідний склад досліджуваних груп студентів у кожному зрізі спостерігалося розпорошення значень K_i та ΔK_i, тому усе реднення даних деякою мірою маскує відхилення. Цим пояснюється наша увага до відстеження динаміки перерозподілу студентів контрольних та експериментальних груп за рівнями сформованості знань і вмінь математичного моделювання у процесі формуючого етапу експерименту (табл. М.1). Динаміка цих змін має чітко виражений позитивний характер (рис. N.1).

На основі аналізу результатів формуючого етапу експерименту приходимо до висновку, що запропонована методика формування знань і вмінь математичного моделювання дозволила досягти в експериментальних групах значно більшого в порівнянні з контрольними абсолютного та відносного середніх приростів рівнів знань, навичок, вмінь майбутніх учителів математики та зафіксувати суттєві пози тивні тенденції їх загального та математичного розвитку.

Отже, досліджувана методична система формування знань і вмінь математичного моделювання у студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів є ефективнішою, ніж традиційна (додаток О).

Резюмуючи формуючий етап експерименту, паралельно з описаним способом оцінювання зрізових робіт використовувався ще й інший, за допомогою якого ефек тивність методичної системи встановлюється опосередковано, шляхом підрахунку кількості студентів, що виконали зрізове завдання. Дані, які були отримані при такому підході, теж підтвердили переваги пропонованої методики навчання математичного моделювання (додаток N, таблиця N.1).

Вагоме місце під час формуючого експерименту належало з’ясуванню впливу пропонованої методичної системи на формування наукового світогляду студентів через застосування математики до опису та дослідження явищ та систем реального світу. Це здійснювалось за допомогою прикладних задач, що розв’язувалися за спрощеною та розширеною евристичними схемами діяльності математичного моделювання і комплексних індивідуальних завдань.

Як показують дані педагогічного дослідження, в експериментальних групах з комплексним індивідуальним завданням впорались 85,7 % студентів проти 64,3 % у контрольних групах. Зазначимо, що при цьому студенти експериментальних груп виконували індивідуальне завдання на більш високому якісному рівні, що є свідченням достатньо високого рівня сформованості вмінь математичного моделювання.

Цей факт було підтверджено ще й даним компонентного аналізу студентських робіт підсумкового зрізу, які вказували на кращу сформованість у студентів експериментальних груп знань і вмінь математичного моделювання, що забезпечують виконання завдань математичного моделювання як процесу встановлення відповідності деякого реального об’єкта чи системи їх математичним образам, а це, в свою чергу, свідчить про підвищення їх загального та математичного розвитку.

Отже, висновки нашого дослідження, які були отримані експериментальним шляхом, підтвердили сформульовану на початку дослідження гіпотезу, а розроблену нами методичну систему формування знань і вмінь математичного моделювання можна вважати ефективною.

Висновки до розділу 2

1. Робота з навчання математичного моделювання повинна бути чітко спланована і відображена в робочих програмах викладачів. У цих програмах чітко слід вказувати місце та зміст навчання математичного моделювання, що потребує координації робочих програм викладачів всіх кафедр.
2. Відбір та структурування теоретичного матеріалу, на основі якого відбувається навчання математичного моделювання, повинен бути чітко визначений і найбільше сприяти цьому.
3. Практичні заняття є основною організаційною формою формування вмінь математичного моделювання в університеті. У методичній системі навчання математичного моделювання доцільно поєднувати власне практичні заняття з лабораторними та семінарськими заняттями. Діяльність математичного моделювання на практичних заняттях повинна здійснюватися за спрощеною та розширеною евристичними схемами діяльності математичного моделювання в умовах диференційованого підходу. Це повинна забезпечувати спеціально підібрана система задач.
4. Діяльність за розширеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання неможлива без використання засобів інформаційно-комунікаційних технологій.
5. Для ефективного навчання математичного моделювання майбутніх учителів математики слід використовувати комплекс традиційних засобів навчання та засобів інформаційно-комунікаційних технологій.
6. Навчання студентів діяльності математичного моделювання повинне бути неперервним, систематичним у процесі вивчення кожної фундаментальної

математичної дисципліни зокрема і завершуватися вивченням спецкурсу "Математичне моделювання" на 4-му, 5-му курсі.

7. Спецкурс "Математичне моделювання" систематизує, поглиблює і розширює знання, навички та вміння студентів з математичного моделювання, одержані раніше. Спецкурс орієнтований на використання засобів інформаційно-комунікаційних технологій. В умовах Болонського процесу доцільна модульно-рейтингова система організації навчання під час вивчення спецкурсу "Математичне моделювання".
8. Формуючий експеримент показав, що впровадження розробленої нами методичної системи формування вмінь математичного моделювання можливе, педагогічно доцільне і значно підвищує ефективність знань та вмінь з математичних дисциплін та їх використання у майбутній професійній діяльності.

Висновки

У процесі дисертаційного дослідження отримано основні результати:

- обґрунтовано необхідність створення наукової методичної системи формування вмінь математичного моделювання у майбутніх учителів математики у процесі навчання математики та методики навчання математики ;
- розроблено всі компоненти методичної системи формування вмінь математичного моделювання у майбутніх учителів математики;
- обґрунтовано доцільність впровадження методичної системи формування вмінь математичного моделювання у майбутніх учителів математики у навчальний процес математичних факультетів педагогічних університетів;
- проаналізовано структуру навчальної діяльності з математичного моделювання та обґрунтовано необхідність цілеспрямованого використання інформаційно- комунікаційних технологій в забезпеченні її ефективності;
- підібрано необхідне методичне забезпечення для процесу навчання майбутніх учителів математики математичного моделювання;
- проведено педагогічний експеримент та аналіз його результатів, що підтверджують ефективність запропонованої методики формування вмінь математичного моделювання у майбутніх учителів математики.

Отримані результати дослідження дають підстави зробити наступні **загальні висновки**:

1. Аналіз математичної та методичної літератури, робіт видатних вчених-математиків А. М. Колмогорова, А. М. Тихонова, О. А. Самарського, Б. В. Гнеденка та педагогів-методистів Ю. М. Колягіна, В. М. Монахова, С. І. Шварцбурда, В. В. Фірсова показав, що вже давно виникла необхідність у свідомому оволодінні майбутніми вчителями математики методом математичного моделювання як методом наукового дослідження та навчального пізнання і підготовці їх до впровадження ідей і методу математичного моделювання у шкільний курс математики. Але разом з тим науково обґрунтованої необхідності і можливості методики навчання студентів — майбутніх учителів математики математичного моделювання на початок XXI століття не було створено.
2. Констатуючий експеримент, проведений серед старшокласників і випускників педагогічних університетів, показав низький рівень знань та вмінь з математи чного моделювання. Анкетування викладачів університетів, учителів школи показало, що вони в стінах педагогічного університету систематично не навчалися математичного моделювання, відчувають гостру потребу в методичному забезпеченні цього процесу.
3. У процесі дослідження з’ясувалося, що зміст навчання математичного моделювання найдоцільніше розподілити між всіма фундаментальними математичними дисциплінами та курсами елементарної математики і методики її навчання. При цьому необхідно використати наступність в початкових знаннях і вміннях, які учні мають набути ще в шкільному курсі математики (усвідомлення спрощеної схеми математичного моделювання та застосування її до розв’язування прикладних задач, в тому числі

міжпредметного змісту).

4. Потрібний на 4–5-му курсах спеціальний курс з математичного моделювання, де студенти знайомляться з розширеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання і вчаться володіти методом математичного моделювання як методом наукового дослідження.
5. Педагогічно доцільне і грамотне впровадження методичної системи формування знань і вмінь математичного моделювання з урахуванням психолого-педагогічних основ навчальної діяльності та у відповідності до принципу диференціації навчання забезпечує належний рівень формування вмінь математичного моделювання і підвищує ефективність навчання математики у педагогічному університеті взагалі; сприяє більш якісному та свідомому засвоєнню навчального матеріалу, надає навчально-пізнавальній діяльності дослідницького, творчого характеру, сприяє формуванню навичок та вмінь самостійної роботи у студентів.
6. Організація навчальної діяльності математичного моделювання повинна здійснюватися на основі системного, діяльнісного, комплексного та особистісно-орієнтованого підходів і потребує педагогічно-доцільної дифе ренціації навчання та комплексного використання як традиційних засобів, так і засобів інформаційно-комунікаційних технологій.
7. Відносно методів і організаційних форм, то формуючий експеримент підтвердив, що вони мають сприяти активному навчанню. Серед них мають бути як репродуктивний метод, який забезпечує фонд дійових знань, так і проблемний виклад, евристична бесіда, дослідницький метод. Останній має бути провідним у поєднанні з груповими та індивідуальними формами навчання.
8. Результати формуючого експерименту дають підставу зробити висновки, що впровадження методичної системи формування вмінь математичного моделювання у майбутніх учителів математики доцільне та можливе і підвищує загальний рівень знань, вмінь студентів та розвиток їх математичного мислення і творчого використання математичних знань та вмінь.
9. Потрібна координуюча діяльність всіх математичних кафедр в прийнятті єди ної стратегії навчання студентів математичного моделювання (спільні засідання кафедр щодо координації робочих програм в темах, які сприяють формуванню знань і вмінь математичного моделювання, прийняття єдиного підходу щодо змісту і методики такої роботи).

Виконане дослідження не вичерпує поставленої проблеми. Роботу доцільно продовжити в наступних напрямах:

- посилення міжпредметних зв’язків у системі задач математичного моделювання;
- подальша розробка шляхів використання інформаційно-комунікаційних технологій у процесі навчання студентів математичного моделювання;
- розробка змісту і методики навчання математичного моделювання учнів профільних класів різного спрямування.

Список використаних джерел

[1] Алгебра і теорія чисел. Практикум: У 2-х ч. / С. Т. Завало, С. С. Левіщенко, В. В. Пилаєв, І. О. Рокицький. Ч. 1. — К.: Вища школа, 1983. — 232 с.

[2] Алгебра і теорія чисел. Практикум: У 2-х ч. / С. Т. Завало, С. С. Левіщенко, В. В. Пилаєв, І. О. Рокицький. Ч. 2. — К.: Вища школа, 1986. — 264 с.

[3] *Александров А. Д., Нецветаев Н. Ю.* Геометрия: Учеб. пособие. — М.: Наука, 1990. — 672 с.

[4] *Александров П. С.* Лекции по аналитической геометрии. — М.: Наука, 1968. — 912 с.

[5] *Алексюк А. М.* Педагогіка вищої освіти в Україні. — К.: Либідь, 1998. — 560 с.

[6] *Амелькин В. В.* Дифференциальные уравнения в приложениях. — М.: Наука, 1987 . — 158 с.

[7] Аналітична геометрія / В. П. Білоусова, І. Г. Ільїн, О. П. Сергунова, В. М. Котлова. — К.: Вища школа, 1973. — 328 с.

[8] *Андрущенко В. П.* Теоретико-методичні засади модернізації вищої освіти в Україні на рубежі століть // *Вища освіта України*. — 2001. — № 2. — С. 5–13.

[9] *Анфилатов В. С., Емельянов А. А., Кукушкин А. А.* Системный анализ в управлении. — М.: Финансы и статистика, 2002. — 600 с.

[10] *Архангельский С. И.* Учебный процесс в высшей школе, его закономерности, основы и методы. — М., 1980. — 388 с.

[11] *Атанасян Л. С.* Геометрія. Ч. 1. — К.: Вища школа, 1976. — 456 с.

[12] *Атанасян Л. С., Атанасян В. А.* Сборник задач по геометрии. Ч. 1. — М.: Просвещение, 1973. — 254 с.

[13] *Атанасян Л. С., Базылев В. Т.* Геометрия: В 2-х частях. Ч. 1. — М.: Просвещение, 1986. — 336 с.

[14] *Атанасян Л. С., Базылев В. Т.* Геометрия: В 2-х частях. Ч. 2. — М.: Просвещение, 1987. — 352 с.

[15] *Атанасян Л. С., Гуревич Г. Б.* Геометрия. Ч. 2. — М.: Просвещение, 1976. — 447 с.

[16] *Атанов Г. А.* Деятельностный подход в обучении. — Донецк: ЕАИ-пресс, 2001. — 160 с.

[17] *Атанов Г. А., Пустынникова И. Н.* Обучение и искусственный интеллект, или основы современной дидактики высшей школы. — Донецк: Изд-во ДОУ, 2002. — 504 с.

[18] *Бабанский Ю. К.* Оптимизация процесса обучения: Общедидактический аспект. — М.: Педагогика, 1982. — 191 с.

[19] *Бабанский Ю. К.* Методы обучения в современной общеобразовательной школе. — М.: Просвещение, 1985. — 206 с.

[20] *Базылев В. Т., Дуничев К. М., Иваницкая В. П.* Геометрия. Ч. 1. — М.: Просвещение, 1974. — 352 с.

[21] *Башмаков М. И.* Мы учим и учимся математике в нашем общем доме — Европе // *Математика в школе*. — 2002. — № 1. — С. 3–6.

[22] *Бевз Г. П.* Методика викладання математики. — К.: Рад. шк., 1989. — 240 с.

[23] *Бевз Г. П.* Алгебра: Проб. підруч. для 7–9 кл. серед. шк. — К.: Освіта, 2001. — 303 с.

[24] *Бевз Г. П.* Методи навчання математики. — Х.: Видавнича група “Основа”, 2003. — 96 с.

[25] *Берман В. П.* Совершенствование обучения математике в среднем профтехучилище на межпредметной основе: Дис. . . . канд. пед. наук: 13.00.02. — К., 1983. — 157 с.

[26] *Беспалько В. П.* Слагаемые педагогической технологии. — М.: Педагогика, 1989. — 190 с.

[27] *Блехман И. И., Мышкис А. Д., Пановко Я. Г.* Механика и прикладная математика: логика и особенности приложений математики. — М.: Наука, 1990. — 356 с.

[28] *Болтянский В. Г., Глейзер Г. Д.* К проблеме диференциации школьного математического образования // *Математика в школе*. — 1988. — № 3. — С. 9–10.

[29] *Бородавко Ю. М., Гусарова І. Г., Дикарєв В. А.* Збірник задач з прикладної математики: Навчальний посібник для студентів за напрямом “Прикладна математика”. — Х.: ХДТУРЕ, 1999. — 136 с.

[30] *Бурда М. І.* Методичні основи диференційованого формування геометричних умінь учнів основної школи: Дис. . . . докт. пед. наук: 13.00.02. — К., 1994. — 347 с.

[31] *Былков В. С.* Обучение школьников некоторым элементам математического моделирования // *Математика в школе*. — 1986. — № 1. — С. 34–36.

[32] *Вивальнюк Л. М., Григоренко В. К., Левіщенко С. С.* Числові системи. — К.: Вища школа, 1988. — 272 с.

[33] *Виленкин Н. Я.* Функции в природе и технике. — М.: Просвещение, 1985. — 178 с.

[34] *Возняк Г. М., Возняк О. Г.* Математика. Прикладні задачі: від теорії до практики. — Тернопіль: Мандрівець, 2003. — 136 с.

[35] *Возняк Г. М., Маланюк М. П.* Взаємозв’язок теорії з практикою в процесі вивчення математики. — К.: Рад. шк., 1989. — 128 с.

[36] *Воловик Т.* Теория вероятностей и математическая статистика в педагогике. — К.: Рад. школа, 1969. — 233 с.

[37] Галузеві стандарти вищої освіти. Математика. — К.: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2003. — 83 с.

[38] *Гальперин П. Я.* Психология мышления и учение о поэтапном формировании умственных действий // Исследования мышления в советской психологии: Сб. науч. тр. — М.: Наука, 1966. — С. 236–278.

[39] *Гандуліч В. К., Мохонько А. З., Томецька С. І.* Збірник прикладних задач з математики для будівельних спеціальностей. — Львів: Львівська політехніка, 1999. — 223 с.

[40] *Гастеев Ю. А.* Гомоморфизмы и модели. Логико-алгебраические аспекты моделирования. — М.: Наука, 1975. — 150 с.

[41] *Глобін О. І.* Поняття “математична модель” при розв’язуванні текстових задач // *Радянська школа*. — 1987. — № 10. — С. 42–46.

[42] *Глушков В. М.* Современная культура и математика. — М.: Знание, 1975. — 64 с.

[43] *Гнеденко Б. В.* Математическое образование в вузах. — М.: Высшая школа, 1981. — 175 с.
[44] *Гнеденко Б. В.* Математика и математическое образование в современном мире. — М.: Просвещение, 1985. — 192 с.
[45] *Гончаренко С. У.* Український педагогічний словник. — К.: Либідь, 1997. — 376 с.
[46] *Гриб'юк О.* Математичне моделювання екологічних процесів у профільних класах // *Математика в школі*. — 2004. — № 8. — С. 45–48.
[47] *Давыдов В. В.* О понятии развивающего обучения // *Педагогика*. — 1995. — № 1 . — С. 29–40.
[48] Державна національна програма "Освіта (Україна XXI століття)". — К.: Райдуга , 1994. — 61 с.
[49] Державна програма "Вчитель" // Інформаційний збірник МО України. — К.: Педагогічна преса, 2002. — № 10. — 32 с.
[50] Державний стандарт базової і повної середньої освіти в україні // *Математика в школі*. — 2004. — № 2. — С. 3–8.
[51] Дидактичні матеріали до державного екзамену з математики / М. І. Шкіль, Г. П. Грищенко, М. В. Працьовитий та ін. — К.: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2005. — 88 с.
[52] *Дремова І. А.* Контроль знань учнів з алгебри в основній школі: Дис. . . . канд. пед. наук: 13.00.02 / Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова. — К., 2003. — 211 с .
[53] *Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О.* Вища математика: Приклади і задачі. — К.: Видавничий центр "Академія", 2002. — 624 с.
[54] *Егоров И. Б.* Геометрия. — М.: Просвещение, 1969. — 368 с.
[55] *Егоров И. П.* О математических структурах. — М.: Знание, 1976. — 64 с.
[56] *Ершов А. П.* Компьютеризация школы и математическое образование // *Информатика и образование*. — 1992. — № 5–6. — С. 3–12.
[57] *Жалдак М. И.* Система подготовки учителей к использованию информационной технологии в учебном процессе: Дис. в форме научного доклада на соискание учёной степени д-ра пед. наук: 13.00.02 / НИИ СИМО АПН СССР. — М., 1989. — 48 с.
[58] *Жалдак М. И., Квитко А. Н.* Теория вероятностей с элементами информатики. Практикум. — К.: Вища школа, 1989. — 263 с.
[59] *Жалдак М. І.* Комп'ютер на уроках математики: Посібник для вчителів. — К.: Техніка, 1997. — 303 с.
[60] *Жалдак М. І., Вітюк О. В.* Комп'ютер на уроках геометрії: Посібник для вчителів. — К., 2000. — 168 с.
[61] *Жалдак М. І., Грохольська А. В., Жильцов О. Б.* Математика (Алгебра і початки аналізу) з комп'ютерною підтримкою: Навч. посіб. для підготов. від-нь. — К.: МАУП, 2003. — 304 с.
[62] *Жалдак М. І., Кузьміна Н. М., Берлінська С. Ю.* Теорія ймовірностей і математична статистика з елементами інформаційної технології. — К.: Вища школа, 1995. — 352 с.

[63] *Жалдак М. І., Михалін Г. О.* Елементи стохастики з комп’ютерною підтримкою: Посібник для вчителів. — К.: Шкільний світ, 2002. — 128 с.

[64] *Жалдак М. І., Рамський Ю. С.* Чисельні методи математики. — К.: Радянська школа, 1984. — 206 с.

[65] *Завало С. Т.* Курс алгебри. — К.: Вища школа, 1985. — 503 с.

[66] *Завало С. Т., Костарчук В. Н., Хацет Б. І.* Алгебра і теорія чисел: В 2-х ч. Ч. 1. — К.: Вища школа, 1974. — 464 с.

[67] Закон України “Про вищу освіту” // *Голос України*. — 5 березня 2002 р. — С. 10–15.

[68] Закон України “Про внесення змін і доповнень до Закону Української РСР “Про освіту””. — К.: Генеза, 1996. — 36 с.

[69] *Запорожец Г. И.* Руководство по решению задач по математическому анализу. — М.: Высшая школа, 1966. — 460 с.

[70] *Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д.* Элементы прикладной математики. — М.: Лань, 2002. — 592 с.

[71] *Зенгин А. В.* Основные принципы построения изображений в стереометрии. — М.: Учпедгиз, 1962. — 108 с.

[72] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Аналитическая геометрия: Учебник для университетов . — М.: Наука, 1988. — 224 с.

[73] *Кабанова–Меллер Е. Н.* Формирование приемов умственной деятельности и умственного развития учащихся. — М.: Просвещение, 1968. — 238 с.

[74] *Калмыкова З. И.* Обучаемость и принципы построения методов ее диагностики // Проблемы диагностики умственного развития учащихся. — М.: Педагогика, 1975. — 207 с.

[75] *Калмыкова З. И.* Психологические принципы развивающего обучения. — М.: Знание, 1979. — 48 с.

[76] *Калмыкова З. И.* Продуктивное мышление как основа обучаемости. — М.: Педагогика, 1981. — 200 с.

[77] *Каплан Б. С., Рузин Н. К., Столяр А. А.* Методы обучения математике: Некоторые вопросы теории и практики / Под ред. А. А. Столяра. — Минск: Нар. асвета, 1981. — 191 с.

[78] *Каченовский М. И.* Математический практикум по моделированию. — М.: Учпедгиз, 1959. — 183 с.

[79] *Клетенник Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии. — М.: Наука, 1968. — 224 с.

[80] *Клочко В. І.* Застосування нових інформаційних технологій при вивченні курсу вищої математики у технічному вузі. — Вінниця: Вінницький держ. техніч. ун-т, 1997. — 63 с.

[81] *Клочко В. І.* Нові інформаційні технології навчання математики в технічній вищій школі: Дис. . . . докт. пед. наук: 13.00.02 / Вінницький держ. техніч. ун-т. — Вінниця, 1998. — 396 с.

[82] *Колесник Т. В.* Вузівська лекція і фахова підготовка вчителя математики // Науково-педагогічні проблеми підготовки вчителя у вузі. — К., 1991. — С. 45–48.

[83] *Колесник Т. В.* Загляньмо у світ показникової функції // У світі математики. — К ., 1991. — Вип. 20. — С. 149–160.
[84] *Колесник Т. В.* Формування навичок математичного моделювання у навчальному процесі вищої школи // Матеріали III Всеукраїнської наукової конференції “Фундаментальна та професійна підготовка фахівців фізики”. — Ч. 1. — К.: 1998. — С. 194–197.
[85] *Колесник Т. В.* Про прикладну спрямованість математичного аналізу для студентів фізичних спеціальностей // Наукові записки: Збірник наукових статей НПУ імені М. П. Драгоманова. — К., 2001. — Вип. XLIII. — С. 126–130.
[86] *Колесник Т. В.* Мотивація пізнавальної діяльності студентів при вивченні курсу математичного аналізу // Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова. — К., 2002. — Вип. XLVIII. — С. 112–116.
[87] *Колесник Т. В.* Вивчаємо алгебру і початки аналізу. 10 клас: Навч. посібн. — Тернопіль: Навчальна книга — Богдан, 2005. — 112 с.
[88] *Колесник Т. В.* Вивчаємо алгебру і початки аналізу. 11 клас: Навч. посібн. — Тернопіль: Навчальна книга — Богдан, 2005. — 136 с.
[89] *Колесник Т. В., Панченко Л. Л.* Математична мова в системі неперервної освіти // Наукові записки. — К.: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2001. — С. 5.
[90] *Колесник Т. В., Панченко Л. Л.* Спецкурс “Математичне моделювання” у системі фахової та професійної підготовки вчителя математики // Збірник наукових праць. Матеріали науково-практичної конференції “Інформаційні технології в освіті”, 16–18 травня 2001 р. — Бердянськ: 2001. — С. 153–158.
[91] *Колмогоров А. Н.* Современная математика и математика в современной школе // *Математика в школе*. — 1971. — № 6. — С. 2–3.
[92] *Колягин Ю. М.* Задачи в обучении математике: В 2-х т. Ч. 1: Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. — М.: Просвещение, 1977. — 110 с.
[93] *Колягин Ю. М.* Задачи в обучении математике: В 2-х т. Ч. 2: Обучение математике через задачи и обучение решению задач. — М.: Просвещение, 1977. — 144 с.
[94] *Колягин Ю. М.* О прикладной и практической направленности обучения математике // *Математика в школе*. — 1985. — № 6. — С. 27–32.
[95] Концепція математичної освіти 12-річної школи: Проект // *Математика в школі*. — 2002. — № 2. — С. 12–17.
[96] *Кон И. С.* Психология ранней юности: Кн. для учителя. — М.: Просвещение, 1989. — 255 с.
[97] *Королюк В. С.* Стохастические модели систем. — К.: Наукова думка, 1989. — 208 с.
[98] *Костицын В. Н.* Моделирование на уроках геометрии. — М.: Владос, 2000. — 160 с.
[99] *Костюк Г. С.* Избранные психологические труды. — М.: Педагогика, 1988. — 304 с.
[100] *Кравчук В., Підручна М., Янченко Г.* Алгебра. Підручник для 9 класу / За ред. З . І. Слєпкань. — Тернопіль: Підручники і посібники, 2005. — 248 с.

[101] *Кравчук В., Янченко Г.* Алгебра. Підручник для 7 класу / За ред. З. І. Слєпкань. — Тернопіль: Підручники і посібники, 2003. — 192 с.

[102] *Крилова Т. В.* Початки математичного моделювання: Наукові основи навчання математики студентів технічних спеціальностей. — К.: Вища школа, 1997. — 278 с.

[103] *Крилова Т. В.* Наукові основи навчання математики студентів нематематичних спеціальностей (на базі металургійних, енергетичних і електромеханічних спеціальностей вищого закладу технічної освіти): Дис. . . . докт. пед. наук: 13.00 .02 / Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова. Дніпродзержинський держ. техн. ун-т. — К., 1999. — 473 с.

[104] *Крутецкий В. А.* Психология математических способностей школьников. — М. : Просвещение, 1968. — 431 с.

[105] *Крутецкий В. А.* Психология обучения и воспитания школьников. — М.: Просвещение, 1976. — 303 с.

[106] *Крылова Т. В.* Начала математического моделирования: Спецкурс “Стационарные и нестационарные задачи теории колебаний” для студентов технических вузов. — К.: Вища школа, 1998. — 177 с.

[107] *Кудрявцев Л. Д.* Мысли о современной математике и ее изучении. — М.: Наука , 1977. — 110 с.

[108] *Кудрявцев Л. Д.* Современная математика и ее преподавание. — М.: Наука, 1985. — 170 с.

[109] *Кудрявцев Л. Д.* Основные положения преподавания математики // Математика в высшем образовании. — Нижний Новгород: Изд-во Ниж. гос. университета, 2003. — № 1. — С. 127–156.

[110] *Кузнецов Ю. Н.* Аналитическая геометрия с экономическими примерами и задачами. — К.: МВССО УССР НИНХ им. Д. С. Коротченко, 1976. — 76 с.

[111] *Кузьменко О. В.* Організація навчального спілкування на уроці-семінарі: Дис. . . . канд. пед. наук: 13.00.02. — Х., 1997. — 222 с.

[112] *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1971. — 432 с.

[113] Лабораторный практикум по курсу “Численные методы”. Методические указания для студентов специальности 2104 “Математика и информатика” / Ю. С. Рамский, Н. Н. Кузьмина, С. Н. Коваленко, А. Г. Олейник. — К.: КГПИ, 1991 . — 72 с.

[114] *Ленін В. І.* Філософські зошити. — К.: Вид-во Політичної літератури України, 1979. — 721 с.

[115] *Леонтьев А. Н.* Обучение как проблема психологии // *Вопросы психологии*. — 1957. — № 1. — С. 17–26.

[116] *Леонтьев А. Н.* Деятельность, сознание, личность. — М.: Полиздат, 1975. — 304 с.

[117] *Лернер И. Я.* Качества знаний учащихся. Какими они должны быть? — М.: Знание, 1978. — 47 с.

[118] *Лернер И. Я.* Дидактические основы методов обучения. — М.: Педагогика, 1981. — 186 с.

[119] *Лиман Ф. М.* Математична логіка і теорія алгоритмів. — Суми: Видавництво “Слобожанщина”, 1998. — 152 с.

[120] *Лук'янова С. М.* Розв'язування текстових задач арифметичними способами в основній школі: Дис. . . . канд. пед. наук: 13.00.02 / Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова. — К., 2005. — 236 с.
[121] *Малинецкий Г. Г.* Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент. — М.: Наука, 1997. — 255 с.
[122] *Малкова Т. В., Монахов В. М.* Математическое моделирование — необходимый компонент современной подготовки школьника // *Математика в школе*. — 1984. — № 3. — С. 46–49.
[123] *Матвіїшина Н. В.* Інформаційні технології та математичне моделювання процесу навчання з використанням стохастичних методів: Дис. . . . канд. тех. наук: 05.13.06 / Запорізький держ. ун-т. — Запоріжжя, 2000. — 159 с.
[124] Математика и естествознание: Сборник статей / Сост. С. И. Шварцбурд. — М.: Просвещение, 1970. — 448 с.
[125] Математичний аналіз (дидактичні матеріали для систематизації, узагальнення і повторення) / М. І. Шкіль, М. М. Білоцький, Т. В. Колесник та ін.; МО України. НПУ ім. М. П. Драгоманова. — К., 1999. — 150 с.
[126] Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2 ч.: Навч. посіб. / Л. І. Дюженкова, Т. В. Колесник, М. Я. Лященко та ін. Ч. 1. — К.: Вища школа, 2002. — 462 с.
[127] Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2 ч.: Навч. посіб. / Л. І. Дюженкова, Т. В. Колесник, М. Я. Лященко та ін. Ч. 2. — К.: Вища школа, 2003. — 470 с.
[128] *Менчинская Н. А.* Проблемы учения и развития // Проблемы общей, возрастной и педагогической психологии. — М., 1978. — С. 36.
[129] *Метельский Н. М.* Дидактика математики. — Минск: Изд. БГУ, 1982. — 256 с.
[130] *Михалін Г. О.* Формування елементів інформаційної культури вчителя математики у процесі навчання математичного аналізу // *Комп'ютер у школі та сім'ї*. — 2003. — № 8. — С. 31–33.
[131] *Михалін Г. О.* Формування основ професійної культури вчителя математики у процесі навчання математичного аналізу: Дис. . . . докт. пед. наук: 13.00.04 / Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова. — К., 2004. — 481 с.
[132] *Могилев А. В., Пак Н. И., Хённер Е. К.* Информатика: Учеб. пособие для студ. пед. вузов. — М.: Академия, 1999. — 816 с.
[133] *Моисеев Н. Н.* Математика ставит эксперимент. — М.: Наука, 1979. — 224 с.
[134] *Монахов А. В.* Математические методы анализа экономики: Учебн. пособие. — СПб.: Питер, 2002. — 176 с.
[135] *Монахов В. М.* Технологические основы проектирования и конструирования учебного процесса. — Волгоград, 1995. — 168 с.
[136] *Монахов В. М., Орлов В. А., Фирсов В. В.* Дифференциация обучения в средней школе // *Сов. педагогика*. — 1990. — № 8. — С. 42–47.
[137] *Морзе Н. В.* Система методичної підготовки майбутніх вчителів інформатики в педагогічних університетах: Дис. . . . докт. пед. наук: 13.00.02 / Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова. — К., 2003. — 452 с.
[138] *Морозов Г. М.* Проблема формирования умений, связанных с применением математики: Дис. . . . канд. пед. наук: 13.00.02. — М., 1978. — 150 с.

[139] *Мышкис А. Д.* О прикладной направленности преподавания математики в средних специальных учебных заведениях // Методические рекомендации по математике. — М.: Высшая школа, 1989. — № 11. — С. 5–11.

[140] *Мышкис А. Д., Сатьянов П. Г.* О развитии математической интуиции учащихся // *Математика в школе*. — 1987. — № 5. — С. 18–22.

[141] Навчальна програма з лінійної алгебри для спеціальності “Математика” / Укл. Д. Я. Требенко, Н. Ю. Верпатова, О. В. Співаковський. — К.: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2000. — 21 с.

[142] *Никандров Н. Д.* О соотношении методов и организационных форм в дидактике // *Вестник высшей школы*. — 1972. — № 11. — С. 44–47.

[143] *Нічуговська Л. І.* Математичне моделювання в системі економічної освіти. — Полтава: ВВ ПУСКУ, 2003. — 289 с.

[144] *Нічуговська Л. І.* Науково-методичні основи математичної освіти студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів: Дис. . . . докт. пед. наук: 13.00.04 / Полтавський ун-т спожив. кооперації України. — Полтава, 2004. — 470 с.

[145] Новые педагогические и информационные технологии в системе образования / Под ред. Е. С. Полат. — М.: Изд-во центр “Академия”, 2000. — 272 с.

[146] *Окунев Л. Я.* Сборник задач по высшей алгебре. — М.: Просвещение, 1964. — 185 с.

[147] *Онищук В. А.* Урок в современной школе. — М.: Просвещение, 1981. — 191 с.

[148] *Панченко Л. Л.* Математичні моделі локального охолодження циліндра та їх застосування // Некоторые модели в математической физике и методы их исследования. — К.: Институт проблем материаловедения им. И. Н. Францевича , 1997. — С. 141–154.

[149] *Панченко Л. Л.* Дослідження теплових полів у крайових задачах охолодження конструкцій // Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — К.: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1999. — № 1. — С. 217–224.

[150] *Панченко Л. Л.* Розрахунок теплового опору в одній задачі локального охолодження // Наукові записки. Ювілейний випуск. — К.: Вид-во НПУ імені М . П. Драгоманова, 2000. — № 67. — С. 71.

[151] *Панченко Л. Л.* Формування навичок математичного моделювання при розв’язуванні прикладних задач // Матеріали міжнародної конференції, присвяченої 200-річчю з дня народження М. В. Остроградського, 26–27 вересня 2001 р. — Полтава: 2001. — С. 139.

[152] *Панченко Л. Л.* Формування навичок математичного моделювання при вивченні вищої математики // Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова. Педагогічні та історичні науки. — К.: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2002. — № 48. — С. 172–176.

[153] *Панченко Л. Л.* Формування навичок математичного моделювання при вивченні вищої математики // Матеріали VII Всеукраїнської наукової конференції “Фундаментальна та професійна підготовка фахівців з фізики”, 30–31 травня 2002 р. — К.: 2002. — С. 64.

[154] *Панченко Л. Л.* Математичні моделі в університетських курсах геометрії // Формування духовної культури особистості в процесі навчання математики в школі та вищому навчальному закладі: Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції, 22–24 травня 2003 р. — Луцьк: РВВ "Вежа" Волин. держ. ун-ту ім. Лесі Українки, 2003. — С. 58–59.
[155] *Панченко Л. Л.* Система формування навичок математичного моделювання у студентів педагогічних університетів // Сучасні проблеми гуманізації та гармонізації управління. Матеріали 4-ї Міжнародної міждисциплінарної науково-практичної конференції. — Х.: Українська асоціація "Жінки в науці та освіті", Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна, 2003. — С. 239.
[156] *Панченко Л. Л.* Математичне моделювання у неперервній освіті студентів педуніверситетів // 5-я Международная научно-практическая конференция "Современные проблемы науки и образования", Алушта, 30 апреля–10 мая 2004 г. — Х.: 2004. — С. 150.
[157] *Панченко Л. Л.* Навчання студентів математичному моделюванню у вузівських курсах геометрії // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. — Донецьк: Фірма ТЕАН, 2004. — № 22. — С. 50–57.
[158] *Панченко Л. Л.* Про наступність формування навичок математичного моделювання у майбутніх вчителів математики // Десята міжнародна конференція імені академіка М. Кравчука, Київ, 13–15 травня 2004 р.: Матеріали конф. — Київ: Задруга, 2004. — С. 719.
[159] *Панченко Л. Л.* Про понятійний апарат математичного моделювання в загальноосвітній школі та педагогічному вузі // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія № 3. Фізика і математика у вищій і середній школі. — К. : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2004. — № 1. — С. 89–97.
[160] *Панченко Л. Л.* Інформаційно-комунікаційні технології в навчанні математичного моделювання майбутніх вчителів математики // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія № 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. — К.: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2005. — № 3 (10). — С. 195–206.
[161] *Панченко Л. Л.* Математичне моделювання як евристична діяльність // Тези доповідей Міжнародної науково-методичної конференції "Евристичне навчання математики", Донецьк, 15–17 листопада 2005 р. — Донецьк: Вид-во ДонНУ, 2005. — С. 88–89.
[162] *Панченко Л. Л., Ткаченко Н. В.* Математичне моделювання і перспективи розвитку вузівської освіти // Психолого-педагогічні проблеми підготовки вчительських кадрів в умовах трансформації суспільства: Матеріали міжнародної науково-теоретичної конференції, Київ, 18–19 жовтня 2000 р. — Ч. 1. — К.: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2000. — С. 3–4.
[163] *Панченко Л.* Система прикладних задач як засіб формування вмінь математичного моделювання у майбутніх учителів математики // *Математика в школі*. — 2004. — № 9–10. — С. 21–28.
[164] *Параскевич С. П.* Задачі графічного змісту як модель проблемної ситуації // *Математика в школі*. — 2005. — № 5. — С. 32–35.

[165] *Певзнер С. Л.* Проективная геометрия. — М.: Наука, 1980. — 128 с.
[166] *Певзнер С. Л., Цаленко М. М.* Задачник-практикум по проективной геометрии. — М.: Просвещение, 1982. — 80 с.
[167] Педагогика. Педагогические теории, системы, технологии / Под ред. С. А. Смирнова. — М., 2001. — 253 с.
[168] Педагогика / Под ред. П. И. Пидкатистого. — М., 1998. — 240 с.
[169] Педагогическая энциклопедия. — М.: Советская энциклопедия, 1966. — Т. 3. — 879 с.
[170] Педагогічні технології: Навчальний посібник для вузів / О. С. Падалка, А. М. Нісімчук, І. О. Смолюк, О. Г. Шпак. — К.: Вид-во "Українська енциклопедія" ім. М. П. Бажана, 1995. — 254 с.
[171] *Петрик М., Баб'юк М.* Основи математичного моделювання та застосування математичних методів у наукових дослідженнях. — Тернопіль: Підручники і посібники, 1988. — 160 с.
[172] *Петров Ю. П.* Лекции по истории прикладной математики. — СПб: НИИХ СПбГУ, 2001. — 337 с.
[173] *Пиаже Ж.* Избранные психологические труды: Психология интеллекта. Генезис числа у ребенка. Логика и психология. — М.: Междунар. пед. акад., 1994. — 680 с.
[174] *Погорелов А. В.* Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1978. — 208 с.
[175] *Погорелов А. В.* Геометрия. — М.: Наука, 1984. — 288 с.
[176] *Погорєлов О. В.* Геометрія: Планіметрія: Підручник для 7–9 кл. середн. шк. — К.: Освіта, 2003. — 240 с.
[177] *Погорєлов О. В.* Геометрія: Стереометрія: Підручник для 10–11 кл. середн. шк. — К.: Школяр, 2004. — 128 с.
[178] *Подмазин С. И.* Личностно-ориентированое образование: Социально-философское исследование. — Запоріжжя: Просвіта, 2000. — 250 с.
[179] Положення про кредитно-модульну систему організації навчального процесу в Національному педагогічному університеті імені М. П. Драгоманова / Укл. Р. М. Вернидуб, Г. М. Бойко. — К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2005. — 25 с.
[180] *Пометун О. І., Пироженко Л. В.* Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання. — К.: А.С.К., 2005. — 192 с.
[181] *Постников М. М.* Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1986. — 752 с.
[182] *Потоцький М. В.* Преподавание высшей математики в педагогическом институте. — М.: Просвещение, 1975. — 208 с.
[183] Практикум з методики навчання математики. Загальна методика: Навчальний посібник для організації самостійної роботи студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів / З. І. Слєпкань, А. В. Грохольська, В . Я. Забранський, С. М. Лук'янова, Л. Л. Панченко, І. С. Соколовська; За ред. професора З. І. Слєпкань. — К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2006. — 292 с.
[184] *Працьовитий М. В., Усенко В. М.* Про методологічні проблеми формування змісту математичної освіти // Міжнародна математична конференція, присвячена сторіччю від початку роботи Д. О. Граве (1863–1939) в Київському

університеті, Київ, 17–22 червня 2002 р. — К.: Інститут математики НАН України, 2002. — С. 216.

[185] *Працьовитий М. В., Усенко В. М.* Системні основи формування змісту математичної освіти // Формування духовної культури особистості в процесі навчання математики в школі та вищому навчальному закладі: Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції, 22–24 травня 2003 р. — Луцьк: РВВ “Вежа” Волин. держ. ун-ту ім. Лесі Українки, 2003. — С. 254–255.

[186] Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5–11 класи / В. Бевз, А. Мерзляк, З. Слєпкань // *Математика*. — 2001. — № 35. — С. 63.

[187] Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5–12 класи. — К.: Ірпінь, 2005. — 65 с.

[188] Програма для класів з поглибленим вивченням математики. 8–11 класи / М. Бурда, М. Жалдак, Т. Колесник та ін. // *Математика*. — 2001. — № 37 (145). — 48 с.

[189] Програма GRAN1 для вивчення математики в школі й вузі / Укл. М. І. Жалдак, Ю. В. Горошко. — К.: КДПУ, 1992. — 49 с.

[190] Програми для фізико-математичних факультетів педагогічних інститутів. Зб. 1: Математичний аналіз. Алгебра і теорія чисел. Геометрія. Числові системи. Шкільний курс математики і методики її викладання. Історія математики і фізики. Державний екзамен з математики з методикою викладання / За ред. М. І. Шкіля, Г. П. Грищенка; МО України. РНМК. — К.: РНМК, 1993. — 174 с.

[191] Програми з методики навчання математики, елементарної математики та історії математики / Укл. В. Я. Забранський, В. О. Швець, Г. В. Акулов та ін. — К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2001. — 34 с.

[192] *Проскуряков И. В.* Сборник задач по линнейной алгебре. — М.: Наука, 1974. — 384 с.

[193] *Рамський Ю. С.* Формування інформаційної культури вчителя математики при вивченні методів обчислень у педагогічних вузах // Комп’ютерно орієнтовані системи навчання. Зб. наукових праць. — К.: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2000. — Вип. 2. — С. 25–47.

[194] *Рамський Ю. С.* Логічні основи інформатики. — К.: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2003. — 284 с.

[195] *Самарский А. А., Михайлов А. П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. — М.: Физматлит, 2001. — 320 с.

[196] *Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О.* Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. — К.: Вища школа, 1994. — 455 с.

[197] *Семенович О. Ф., Ломаєва Т. В.* Перетворення і аксіоматичний метод в геометрії: В 3 ч. Ч. 1. — Черкаси, 1998. — 215 с.

[198] *Семенович О. Ф., Ломаєва Т. В.* Перетворення і аксіоматичний метод в геометрії: В 3 ч. Ч. 2. — Черкаси, 1998. — 173 с.

[199] *Семенович О. Ф., Ломаєва Т. В.* Перетворення і аксіоматичний метод в геометрії: В 3 ч. Ч. 3. — Черкаси, 2002. — 212 с.

[200] *Сергунова О. П., Котлова В. М.* Практикум з проективної геометрії. — К.: Вища школа, 1971. — 188 с.
[201] *Сериков В. В.* Образование и личность. Теория и практика проектирования педагогических систем. — М.: Логос, 1999. — 273 с.
[202] *Сидоренко Е. В.* Методы математической обработки в психологии. — СПб.: Речь, 2001. — 350 с.
[203] *Скаткин М. Н., Лернер И. Я.* О методах обучения // *Советская педагогика*. — 1965. — № 3. — С. 21–26.
[204] *Скафа Е. И.* Теоретико-методические основы формирования приемов эвристической деятельности при изучении математики в условиях внедрения современных технологий обучения: Дис. . . . докт. пед. наук: 13.00.02 / Донецкий нац. ун-т. — К., 2004. — 479 с.
[205] *Скафа Е. И.* Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология. — Донецк: Изд-во ДонГУ, 2004. — 439 с.
[206] *Скафа О. І.* Задача як форма і засіб формування евристичної діяльності // *Рідна школа*. — 2003. — № 7. — С. 43–46.
[207] *Скворцова М.* Математическое моделирование // *Математика*. — 2003. — № 14. — С. 2–4.
[208] *Скобелев Г. Н.* Контроль на уроках математики: Пособие для учителя. — Минск: Народная асвета, 1986. — 104 с.
[209] *Скурихин В. И., Шифрин В. Б., Дубровский В. В.* Математическое моделирование. — К.: Техника, 1983. — 270 с.
[210] *Слепкань З. И.* Психолого-педагогические основы обучения математике. — К.: Рад. школа, 1983. — 192 с.
[211] *Слепкань З. И.* Методическая система реализации развивающей функции обучения математике в средней школе: Дис. в форме научного доклада на соискание учёной степени д-ра пед. наук: 13.00.02 / НИИ СИМО АПН СССР. — М., 1987. — 47 с.
[212] *Слєпкань З. І.* Методика навчання математики. — К.: Зодіак-ЕКО, 2000. — 512 с.
[213] *Слєпкань З. І.* Формування творчої особистості учня в процесі навчання математики // *Математика в школі*. — 2003. — № 1. — С. 6–9.
[214] *Слєпкань З. І.* Формування творчої особистості учня в процесі навчання математики // *Математика в школі*. — 2003. — № 3. — С. 7–13.
[215] *Слєпкань З. І.* Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики. — Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. — 240 с.
[216] *Слєпкань З. І.* Наукові засади педагогічного процесу у вищій школі. — К.: Вища школа, 2005. — 239 с.
[217] *Смирнов С. Д.* Педагогика и психология высшего образования: От деятельности к личности. — М.: Academia, 2001. — 304 с.
[218] *Соколенко Л. О.* Методика реалізації прикладної спрямованості шкільної алгебри і початків аналізу: Дис. . . . канд. пед. наук: 13.00.02 / Укр. держ. пед. ун -т ім. М. П. Драгоманова. — К., 1997. — 245 с.
[219] *Співаковский О. В.* Теоретико-методичні основи навчання вищої математики майбутніх учителів математики з використанням інформаційних технологій:

Дис. . . . докт. пед. наук: 13.00.02 / Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова. — К ., 2003. — 534 с.

[220] *Співаковский О. В.* Теорія і практика використання інформаційних технологій у процесі підготовки студентів математичних спеціальностей. — Херсон: Айлант, 2003. — 215 с.

[221] *Співаковський О. В.* Принципи відповідності технологічного інструментарію вчителя і учня в умовах постіндустріального суспільства // *Комп'ютер у школі та сім'ї*. — 2003. — № 5. — С. 31–32.

[222] *Столяр А. А.* Педагогика математики. — Минск: Вышэйш. шк., 1986. — 413 с.

[223] *Стукалов В. А.* Использование представлений о математическом моделировании при обучении математике: Дис. . . . канд. пед. наук. — М., 1975. — 150 с.

[224] *Талызина Н. Ф.* Управление процессом усвоения знаний. — М.: Изд-во Московск. ун-та, 1975. — 43 с.

[225] *Талызина Н. Ф.* Формирование познавательной деятельности учащихся. — М.: Знание, 1983. — 96 с.

[226] *Тарасенкова Н. А.* Використання знаково-символьних засобів у навчанні математики. — Черкаси: Відлуння-Плюс, 2002. — 400 с.

[227] *Тарасенкова Н. А.* Теоретико-методичні основи використання знаково-символьних засобів у навчанні математики учнів основної школи: Дис. . . . докт. пед. наук: 13.00.02 / Черкаський держ. ун-т ім. Б. Хмельницького. — Черкаси, 2003. — 630 с.

[228] Теория и практика педагогического эксперимента / Под ред. А. И. Пискунова, Г. В. Воробьева. — М.: Педагогика, 1979. — 207 с.

[229] *Терешин Н. А.* Прикладная направленность школьного курса математики: Кн. для учителя. — М.: Просвещение, 1990. — 96 с.

[230] Типова програма з дисципліни "Дискретна математика" / Укл. О. Д. Нестерова. — 12 с. — (Затверджено на засіданні Вченої ради НПУ імені М. П. Драгоманова 16.12.2004, протокол № 4. Рукопис).

[231] Типова програма з дисципліни "Диференціальні рівняння" / М. М. Білоцький, Л. І. Дюженкова, Т. В. Колесник та ін. — 7 с. — (Затверджено на засіданні Вченої ради НПУ імені М. П. Драгоманова 29.10.2004, протокол № 3. Рукопис).

[232] Типова програма з дисципліни "Математична логіка і теорія алгоритмів" / Укл. Ю. С. Рамський. — 9 с. — (Затверджено на засіданні Вченої ради НПУ імені М. П. Драгоманова 16.12.2004, протокол № 4. Рукопис).

[233] Типова програма з дисципліни "Методи обчислень" / Укл. Ю. С. Рамський. — 11 с. — (Затверджено на засіданні Вченої ради НПУ імені М. П. Драгоманова 16 .12.2004, протокол № 4. Рукопис).

[234] Типова програма з дисципліни "Теорія ймовірностей та математична статистика" / Укл. М. І. Жалдак. — 9 с. — (Затверджено на засіданні Вченої ради НПУ імені М. П. Драгоманова 16.12.2004, протокол № 4. Рукопис).

[235] *Тихонов А. Н.* Математическая модель // Математическая энциклопедия. — М.: Советская энциклопедия, 1982. — Т. 3. — С. 574–575.

[236] *Тихонов А. Н., Костомаров Д. П.* Рассказы о прикладной математике. — М.: Наука, 1979. — 208 с.

[237] *Тичина І. І.* Модульна організація учбового процесу, рейтингова система контролю успішності студентів. — К.: УДПУ, 1990. — 10 с.

[238] *Тичина І. І., Грищенко Г. П.* Модульна система вивчення оцінки знань студентів. — К.: УДПУ, 1994. — 14 с.

[239] *Трайнин Я. Л.* Основания геометрии. — М.: Учпедгиз, 1969. — 325 с.

[240] *Фирсов В. В., Боковнев О. А., Шварцбурд С. И.* Состояние и перспективы факультативных занятий по математике. — М.: Просвещение, 1977. — 48 с.

[241] *Фомкіна О.* Елементи прикладної математики в шкільному курсі // *Математика в школі*. — 1999. — № 4. — С. 41–43.

[242] *Хмара Т. М.* Навчання учнів математичної мови: Методичний посібник. — К.: Рад. школа, 1985. — 95 с.

[243] *Цубербиллер О. Н.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии. — М., Л .: ОГИЗ, 1946. — 308 с.

[244] *Чарушников В. Д.* Основы математического моделирования. — Кетово: НФВИУ, 1999. — 123 с.

[245] Число и мысль. Сборник. № 5. — М.: Знание, 1982. — 176 с.

[246] *Шапиро С. И.* Использование задач с практическим содержанием в преподавании математики. — М.: Просвещение, 1990. — 126 с.

[247] *Шварцбурд С. И., Ковалев М. П.* Электроника помогает считать. — М.: Просвещение, 1978. — 96 с.

[248] *Швець В.* Про вступні іспити і якість шкільної математичної освіти // *Математика*. — 2006. — № 10. — С. 8–12.

[249] *Швец В. А.* Реализация функций тематического контроля результатов обучения учащихся математике в старших классах средней школы: Дис. . . . канд. пед. наук: 13.00.02. — К., 1988. — 209 с.

[250] *Шкіль М. І.* Математичний аналіз: У 2-х ч.: Підручник для студ. пед. навч. закладів. Ч. 1. — К.: Вища школа, 1994. — 423 с.

[251] *Шкіль М. І.* Математичний аналіз: У 2-х ч.: Підручник для студ. пед. навч. закладів. Ч. 2. — К.: Вища школа, 1995. — 510 с.

[252] *Шкіль М. І., Колесник Т. В., Котлова В. М.* Вища математика: У 3-х кн. Кн. 1: Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу. — К.: Либідь, 1994. — 280 с.

[253] *Шкіль М. І., Колесник Т. В.* Вища математика: У 3-х кн. Кн. 2. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Ряди. — К.: Либідь, 1994. — 352 с.

[254] *Шкіль М. І., Колесник Т. В.* Вища математика: У 3-х кн. Кн. 3. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння. — К.: Либідь, 1994. — 352 с.

[255] *Шкіль М. І., Колесник Т. В., Хмара Т. М.* Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10 кл. з поглибл. вивч. математики в серед. закл. освіти. — К.: Освіта, 2000. — 318 с.

[256] *Шкіль М. І., Колесник Т. В., Хмара Т. М.* Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 11 кл. з поглибл. вивч. математики в серед. закл. освіти. — К.: Освіта, 2001. — 311 с.

[257] *Шкіль М. І., Лейфура В. М., Самусенко П. Ф.* Диференціальні рівняння. — К.: Техніка, 2003. — 368 с.

[258] *Шкіль М. І., Слєпкань З. І., Дубинчук О. С.* Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів. — К.: Зодіак-Еко, 2002. — 272 с.

[259] *Шкіль М. І., Слєпкань З. І., Дубинчук О. С.* Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів. — К.: Зодіак-Еко, 2003. — 384 с.

[260] *Яглом И. М.* Математические структуры и математическое моделирование. — М.: Сов. радио, 1980. — 144 с.

[261] *Ядренко М. Й.* Дискретна математика. — К.: Вид.-поліграф. центр “Експрес”, 2003. — 244 с.

[262] *Якиманская И. С.* Развивающее обучение. — М.: Педагогика, 1979. — 144 с.

Додаток А
Зміст вмінь діяльності математичного моделювання, що визначається “Галузевими стандартами вищої освіти. Математика”

Табл. А.1: Зміст вмінь діяльності математичного моделювання, що визначається “Галузевими стандартами вищої освіти. Математика”

лювАння природничих, тЕхнічних, Економічних тА соціАльних явищ і процЕсів

ної моделі реального об’єкта, процесу, явища. 2.СВ.Д.01

облему-потребу математичного моделювання.
ретизувати проблему та визначити можливості її математичної ідеалізації.
атематичного моделювання.
делювання (дослідження, управління, прогнозування).
о-змістовний опис математичного об’єкта моделювання.
мний підхід у модельному дослідженні об’єкта.
истеми, математичну модель якої потрібно створити.
елементів системи і визначити їх властивості.
ні умови, в яких знаходиться об’єкт моделювання, і охарактеризувати їх певними величинами.
дношення між елементами системи і записати їх у математичній формі.
утворюючі зв’язки у досліджуваній системі, запис яких у математичній формі і є шуканою математ
творення математичних моделей ієрархічний метод.
цінювання математичної моделі на предмет досконалості.
иментальну перевірку математичної моделі досліджуваного об’єкта на предмет узгодженості модел
ня моделі формулювати допоміжні гіпотези.
ематичну модель у випадку її неадекватності реальному об’єкту.
дженість (в рамках допустимих похибок) математичної моделі з реальним об’єктом, відносну просте

астосовності математичної моделі.

тематичні та інформаційні моделі за галузями наук (математичні моделі у фізиці, біології, соціологі
ивні (описові), оптимізаційні, багатокритеріальні, ігрові, імітаційні).
ди конкретних математичних та інформаційних моделей фізичних, біологічних, економічних, інфор

і реального об’єкта. 2.ПФ.Д.02

оцінювання математичної моделі на предмет її досконалості (у відповідності до цілей моделюванн

екватність побудованої математичної моделі досліджуваному об’єкту (зокрема, застосовувати крит
ої моделі).
ди реалій, моделями яких є математичні об’єкти, наводити приклади задач з реальним змістом, що п
алів, ймовірностей) тощо.
делі проблемної (задачної) ситуації (предметні, схематичні, графічні, імітаційні та ін.).
атематичні залежності в термінах конкретних математичних теорій.

чної моделі з використанням засобів комп’ютерної техніки. 2.ПФ.Д.03

ьний метод дослідження математичної моделі для розв’язування поставленої задачі.
ректність”, “стійкість”, “обумовленість” задач.
ьні методи чисельного аналізу математичних моделей різних задач.
ристовувати готові програмні засоби (математичні пакети прикладних програм) для символьно-фор
матичних моделей реальних об’єктів.
розробити алгоритм і програму для розв’язування математичної задачі, яка є математичною моделл
ьний експеримент, в тому числі з використанням комп’ютера.
бки при чисельному розв’язуванні задач.
налізувати та узагальнювати результати розрахунків чисельного експерименту.

ної теорії та її аналіз. 2.ПФ.Д.04

лядами на аксіоматичний метод побудови математичної теорії.
ні аксіоматичних теорій: інтерпретувати основні (неозначувані) поняття, положення та відношення
их теорій (знаходити конкретні множини і відношення на них, які мають задані властивості).

квівалентність тверджень, зокрема, аксіом.
ечливість, повноту, категоричність системи аксіом, незалежність аксіом.
тематичні об’єкти із заданими властивостями.

Додаток В
Операційний склад діяльності математичного моделювання

Табл. В.1: Операційний склад діяльності математичного моделювання

Етап схеми	Послідовність дій	Відповідні діям операції
I. Попередній аналіз об'єкта дослідження	Встановити, який об'єкт описується в задачі	Аналіз, порівняння
	Пригадати про цей об'єкт суттєве і несуттєве, зв'язки і відношення між його елементами	Порівняння (співставлення, протиставлення), аналіз, синтез
II. Побудова математичної моделі	Інтерпретувати в математичних образах дані задачі	Абстрагування, аналіз, синтез
	Встановити залежність між одержаними величинами	Аналіз, співставлення, протиставлення, синтез, узагальнення
	Описати встановлені залежності, відношення математичного	Аналіз, синтез, абстрагування, узагальнення
	Сформулювати відповідну математичну задачу — математизувати ситуацію, описану в задачі	Абстрагування
III. Реалізація математичної моделі математичними методами	Розв'язуємо поставлену математичну задачу математичними методами	Аналіз, синтез, аналіз через синтез (переосмислення елементів задачі у плані різних понять)
IV. Вибір (чи розробка) алгоритму для реалізації моделі на комп'ютері	Перелічити послідовність кроків розв'язання математичної задачі, які можна описати комп'ютерною мовою	Аналіз, синтез, порівняння (співставлення), конкретизація
V. Створення програм, що "перекладають" модель та алгоритм на доступну комп'ютерну мову	Вибрати або скласти програму, яка реалізує алгоритм доступною комп'ютерною мовою	Аналіз, синтез, порівняння (співставлення), абстрагування
VI. Проведення обчислювального експерименту	Обчислити розв'язки математичної задачі при різних конкретних значеннях вихідних величин	Аналіз, порівняння (співставлення), синтез, узагальнення

VII. Аналіз одержаних результатів та перенесення їх на об’єкт, що досліджується	Проаналізувати одержані розв’язки математичної задачі	Аналіз, порівняння (співставлення), протиставлення
	Надати їм конкретного змісту в образах вихідної ситуації	Конкретизація
	Перевірити, задовольняють ці розв’язки поставлену задачу чи ні	Аналіз, синтез, порівняння (співставлення , протиставлення)
	Якщо “ні” — повернутися до першого етапу та шукати шляхи вдосконалення математичної моделі	Аналіз, синтез
	Якщо “так” — задачу вважаємо розв’язаною	

Додаток C
Календарно-тематичний план з теми “Рівняння”. Алгебра, 7 клас

Табл. C.1: Календарно-тематичний план з теми “Рівняння”. Алгебра, 7 клас

Номер уроку	Дата	Тема уроку	Зміст навчального матеріалу	Питання і задачі на уроці	Повторення	Домашнє завдання
1		Рівняння. Корені рівняння.	Поняття рівняння. Означення “рівняння”. Означення “кореня рівняння”. Що означає “розв’язати рівняння”.	№ 112, 113, 114 (усно), № 115, 121, 117, 122 [101]	№ 131 (а, в, д) [101]	§ 2, п. 1 [101], № 1 , 118, 127 № 131 (б, е) [101]
2		Розв’язування рівнянь.	Закріпити поняття рівняння , продовжити формувати навички і вміння розв’язування рівнянь.	№ 119, 123, 125, 128, 129 [101]	№ 132 [101]	§ 2, п. 1 [101], № 1 , 124, 126 133 [101]
3		Рівносильні рівняння, основні властивості рівнянь.	Поняття “рівносильні рівняння”, три основні властивості рівнянь, а саме їх зміст, застосування на прикладах.	№ 134, 135, 136 (усно), № 137, 139 [101]	№ 149 [101]	§ 2, п. 2 [101], № 1 , 140 [101
4–5		Розв’язування рівнянь, використовуючи основні властивості рівнянь.	Формувати навички та вміння зводити дане рівняння до рівносильного йому, виконуючи тотожні перетворення, переносячи доданки з однієї частини рівняння в іншу, домножуючи обидві частини на одне і теж відмінне від нуля число.	№ 25, 27, 29, 31 [23]		§ 2, п. 2 [101], № 1 , 143 [101
6		Самостійна робота № 1.	Перевірити навички та вміння розв’язувати рівняння, використовуючи основні властивості.	Робота за індивідуальними завданнями		№ 144, 14 [101]
7		Лінійні рівняння з однією змінною.	Означення лінійного рівняння з однією змінною як рівняння виду $ax = b$, зв’язок між значеннями коефіцієнтів і кількістю коренів рівняння.	№ 151, 152 (усно), № 153 (а, б, д, е, з), № 154 (б, г, е, ж) [101]	№ 176 [101]	§ 2, п. 3, № 155, 15 [101]
8		Розв’язування лінійних рівнянь.	Формування навичок та вмінь розв’язувати лінійні рівняння, закріплення знань про рівносильні рівняння, лінійні рівняння.	№ 153 (в, г, є, ж), № 154 (а, в), № 156 (а, в, д) [101]	№ 177 [101]	§ 2, п. 3, № 154 (д, з), № 156 , г, е) [10
9		Розв’язування лінійних рівнянь.	Формування навичок та вмінь розв’язувати лінійні рівняння, закріплення знань про рівносильні рівняння, лінійні рівняння.	№ 158, 159, 161 [101]	№ 178 [101]	§ 2, п. 1–3 № 160, 16 163 [101]

10	Розв’язування лінійних рівнянь.	Закріпити знання, навички, вміння учнів розв’язувати лінійні рівняння.	№ 164, 165, 170 (а) [101]	№ 178 [101]	§ 2, п. 1–3 № 166, 17 (б) [101]
11	Рівняння з модулем.	Поняття “рівняння з модулем”, корені рівнянь з модулем, розв’язання рівнянь виду $\lvert x \rvert + bx = a$.	№ 167, 168, 172 [101]	Означення модуля	§ 2, п. 3 “Рівнянн модулем” № 169, 17 173 [101]
12	Математичні моделі. Математичне моделювання. Спрощена евристична схема діяльності математичного моделювання.	Означення математичної моделі. Задачі, що приводять до математичного моделювання, поняття математичного моделювання. Спрощена евристична схема діяльності математичного моделювання.	№ 179, 181 [101]		Конспект зошиті, № 180, 18 [101]
13	Лінійні рівняння з однією змінною як математичні моделі реальних процесів і явищ.	Сформувати навички і вміння будувати математичні моделі у вигляді лінійних рівнянь. Розрізняти задачі на складання рівнянь, які розв’язуються математичним моделюванням.	№ 183, 184, 186, 188 [101]		№ 182, 18 187, 189 [101]
14	Розв’язування задач за допомогою лінійних рівнянь.	Розв’язувати нескладні текстові задачі на складання лінійних рівнянь з однією змінною різного змісту. Виділення тих задач , які розв’язуються математичним моделюванням, та розв’язування їх за спрощеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання.	№ 190, 191, 194, 196, 200 [101], № 56, 58, 68 [23]		№ 193, 19 197 [101] № 57 [23
15	Побудова математичних моделей у вигляді лінійних рівнянь задач з різних галузей людської практики.	Розв’язання задач, математичними моделями яких є лінійні рівняння, закріпити навички і вміння математичного моделювання за евристичною схемою діяльності математичного моделювання.	№ 203, 205, 206, 207 [101]		№ 201, 20 204 [101]
16	Підготовка до контрольної роботи № 1.	Повторити основні властивості рівнянь, їх застосування до	2 та 4 рівні ст. 43–44 [101]	пит. 1–7 ст. 41 [101]	1 та 3 рів ст. 43–44 101]

		розв'язування рівнянь, евристичну схему діяльності математичного моделювання при побудові математичних моделей у вигляді рівнянь.		
17	Контрольна робота № 1.	Перевірка навичок і вмінь розв'язувати рівняння, складати математичні моделі у вигляді лінійних рівнянь та розв'язувати ці задачі за евристичною схемою діяльності математичного моделювання.	За індивідуальними завданнями	§ 2 [101]

Додаток D
Фрагмент робочої програми з курсу “Аналітична геометрія” з елементами математичного моделювання

Табл. D. 1: Фрагмент робочої програми з курсу “Аналітична геометрія” з елементами математичного моделювання (лекційний курс)

Теми лекцій. Основні питання лекцій	К-сть годин	Навчальний матеріал, що виноситься на самостійне опрацювання	Література до лек
Еліпс. Канонічне рівняння еліпса. Дослідження еліпса за його канонічним рівнянням. Ексцентриситет еліпса. Директриси еліпса. Теорема про фокальні властивості еліпса. Параметричні рівняння еліпса. Еліпс як математична модель процесів та явищ навколиш нього світу. Приклади задач, в основі математичних моделей яких лежать властивості еліпса.	2	Механічний спосіб побудови еліпса. Побудова точок еліпса за допомогою циркуля та лінійки. [7,13]	[3,4,7,11,13,15,20
Гіпербола. Канонічне рівняння гіперболи. Взаємне розміщення гіперболи з прямою, яка проходить через її центр. Асимптоти гіперболи. Ексцентриситет гіперболи. Директриси гіперболи. Приклади процесів та явищ, математичне моделювання яких ґрунтується на властивостях гіперболи.	2	Дослідження гіперболи за її канонічним рівнянням . Побудова гіперболи за її рівнянням. [7,13]	[4,7,11,13,15,20,3
Парабола. Застосування конічних перерізів у різних сферах людської життєдіяльності. Канонічне рівняння параболи. Еліпс, гіпербола та парабола в полярних координатах. Парабола як математична модель деяких практичних задач. Практичне застосування конічних перерізів у фізиці та астрономії (оптичні властивості гіперболи, еліпса, закон заломлення світла, траєкторії руху планет у Сонячній системі), економіці (задачі на область впливу), механіці (визначення траєкторії польоту кулі чи снаряду, рух тіла, кинутого під кутом до горизонту).	2	Дослідження параболи за її канонічним рівнянням. Побудова параболи за її рівнянням. [7,13]	[4,7,11,13,15,20,3 243]

Табл. D .2: Фрагмент робочої програми з курсу “Аналітична геометрія” з елементами математичного моделювання (практичні заняття)

Теми практичних занять

	К-сть годин	Задачі, що визначають нормативний рівень	Задачі для самостійно розв’язуван
Еліпс. Застосування властивостей еліпса до розв’язування задач прикладного характеру методом математичного моделювання.	2	[79] 444, 448, 452, 456, 462, 477, [243] 386, 426, 429, [39] 1.3.20, 1.3.21	[243] 375, 3 399
Гіпербола. Рівняння, властивості гіперболи та математичні моделі практичних задач, побудовані на їх основі.	2	[79] 515, 518, 520, 524, 528, 536, 575	[243] 433, 4 445, [79] 53
Парабола. Еліпс, гіпербола та парабола в полярних координатах. Практичне застосування властивостей параболи.	2	[243] 480, 481, 482, 500, 523, 525, 528, 511, 516, [39] 1.3.22	[243] 483, 5 531, [79] 58
Конічні перерізи: еліпс, гіпербола, парабола як математичні моделі різних процесів та явищ навколишнього світу.	2	[51] 5.8, 5.14, 5.24, 5.33	[51] 5.19, 5] 1.3.23, 1.3

Додаток Е
Система задач як засіб формування вмінь математичного моделювання

Рівні навчальних можливостей студентів позначені буквами: з — задовільний, д — достатній, в — високий.

Задачі, що розв'язуються за спрощеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання

Тема: "Пряма на площині"

Задача Е.1 (тренувальна, з)**.** На рівнинній території парку вісь прямолінійної пішохідної алеї проходить через дві мітки: $A(0;2)$ і $B(14;8)$. Знайти рівняння осі другої алеї, яка проходить через мітку $C(5;-1)$ перпендикулярно до першої алеї.

Задача Е.2 (тренувальна, з)**.** Через мітку $A(1;2)$ запроектувати прямолінійне шосе так, щоб віддалі до нього від пунктів $B(2;3)$ і $C(4;-5)$ були однакові. Місцевість рівнинна.

Задача Е.3 (розвиваюча, д)**.** Де на прямолінійній ділянці залізниці слід побудувати залізничну платформу D, щоб прямолінійні ділянки шосе, що з'єднують її з містами A та B мали найменшу сумарну довжину?

Ця задача може бути розв'язана як засобами аналітичної геометрії, так і засобами математичного аналізу. Математичною моделлю цієї задачі є відома задача Герона, розв'язання якої сприяло відкриттю закону заломлення світла Ферма.

Тема: "Конічні перерізи: еліпс, гіпербола, парабола"

Задача Е.4 (тренувальна, з)**.** Кинуте під гострим кутом до горизонту тіло описало дугу параболи і впало на відстані 32 м від початкового положення. Визначити параметр параболічної траєкторії, якщо найбільша висота траєкторії дорівнює 12 м.

Задача Е.5 (тренувальна, з)**.** Земля рухається по траєкторії, що є деяким геометричним місцем точок, яке володіє такою властивістю, що сума відстаней від будь-якої його точки до двох фіксованих точок є величина стала. Відомо, що Сонце знаходиться в одній з цих фіксованих точок. Найменша відстань від Землі до Сонця наближено дорівнює 147,5 млн. кілометрів, а найбільша — 152,5 млн. кілометрів. Записати рівняння траєкторії руху Землі, знайти велику піввісь та ексцентриситет.

Задача Е.6 (розвиваюча, д)**.** Хлібний елеватор знаходиться біля залізничної станції A. Хліб на цей елеватор можна доставляти або відразу на вантажівках, або спочатку на вантажівках до станції B, а потім залізницею до станції A. Визначити, для яких сіл вигідний перший спосіб, а для яких — другий.

Тема: "Похідна функції однієї змінної"

Задача Е.7 (тренувальна, з)**.** Профіль підйому гірської дороги має форму кривої $y = \frac{x}{1+x^2}$. Визначити кут нахилу підйому на його початку.

Задача Е.8 (тренувальна, з)**.** Ліфт після виключення рухається за законом $x = 2t^2 + 3t + 1$ (в метрах). Визначити швидкість його руху в момент часу $t = 1$ с.

Задача Е.9 (тренувальна, з)**.** Обсяг продукції, виробленої бригадою робітників, описується функцією $y = -t^3 + 9t^2 + 120t + 60$ (одиниць), $1 \leqslant t \leqslant 8$, де t — робочий час у годинах. Визначити продуктивність праці $P(t)$, темп її зміни та еластичність через годину після початку роботи та за годину до її закінчення.

Задача Е.10 (розвиваюча, д)**.** Поблизу заводу *A* будується по наміченій прямій залізниця до міста *B*. Під яким кутом до запроектованої залізниці потрібно провести шосе від заводу *A*, щоб доставка вантажів з *A* до *B* була найдешевшою, якщо перевезення 1 т/км шосейною дорогою в *m* разів дорожче, ніж залізницею?
Задача Е.11 (розвиваюча, д)**.** Потрібно виготовити закритий розширювальний бачок для системи центрального опалення у вигляді прямокутного паралелепіпеда з об'ємом *V* і висотою *H*. Якою повинна бути основа цього бачка, щоб на його виготовлення витрати матеріалу були найменшими?
Задача Е.12 (розвиваюча, д)**.** На якій висоті *h* від горизонтальної площини слід помістити електричну лампочку, щоб точка *A* цієї площини була найбільш освітленою? (Освітленість в деякій точці прямо пропорційна косинусу кута падіння променів і обернено пропорційна квадрату відстані від точки до джерела світла).
Тема: "Системи лінійних рівнянь"
Задача Е.13 (тренувальна, з)**.** Підприємство випускає продукцію двох видів, використовуючи при цьому сировину трьох типів. Витрати сировини на виробництво продукції задаються матрицею $S = \left(S_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, де S_{ij} — кількість одиниць сировини *i*-го типу, що використовується на виготовлення одиниці продукції *j*-го виду. План щоденного випуску продукції передбачає 90 одиниць продукції першого виду і 120 одиниць продукції другого виду. Вартість одиниці кожного типу сировини відповідно дорівнює 8, 5 і 10 грн. Визначити загальні витрати сировини V, необхідні для щоденного випуску продукції, а також загальну вартість *C* цієї сировини.
Тема: "Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними"
Задача Е.14 (розвиваюча, д)**.** Нехай коло має масу *m*, питому теплоємність *c* та початкову температуру T_0. Розглянемо процес його охолодження за рахунок теплообміну із зовнішнім середовищем. Вважається, що температура T_* останнього є сталою величиною, $T_* < T_0$.
Задача Е.15 (розвиваюча, д)**.** Проаналізувати процес розмноження одновидної популяції живих організмів, позначивши через $x(t)$ величину цієї популяції в момент часу *t*. Це може бути загальна кількість особин популяції або їхня маса. Ідеалізуючи досліджуваний процес, вважатимемо, що $x(t)$ неперервно змінюється в часі.
Задача Е.16 (розвиваюча, д)**.** Дослідити розвиток економіки країни, враховуючи один визначальний фактор — капітальні вкладення, а стан економіки оцінювати через розмір національного прибутку.
Тема: "Повна ймовірність. Формула Байєса"
Задача Е.17 (тренувальна, з)**.** У корзині лежить 20 футбольних м'ячів, з них 12 нових і 8 старих. Із корзини навмання вибирають два м'ячі для гри і після гри повертають до корзини. Після цього з корзини знову виймають два м'ячі для наступної гри. Знайти ймовірність того, що обидва ці м'ячі будуть новими.
Тема: "Повторення випробувань, схема Бернуллі"
Задача Е.18 (тренувальна, з)**.** У коло вписано квадрат. Знайти ймовірність того, що із 10 точок, кинутих навмання незалежно одна від іншої всередину кола, 4

потраплять у квадрат, 3 — в якийсь сегмент і по одній — в інші три сегменти.

Тема: “Числові характеристики дискретної випадкової величини”

Задача Е.19 (тренувальна, з)**.** У деякій лотереї маємо m_1 виграшів вартістю k_1, m_2 — вартістю k_2, . . . , m_n — вартістю k_n. Всього N білетів. Яку слід встановити вартість білета, щоб математичне сподівання виграшу на один білет дорівнювало половині його вартості?

Тема: “Ентропія випадкових величин”

Задача Е.20 (розвиваюча, д)**.** Нехай з багаторічних спостережень за погодою відомо, що для пункту A ймовірність того, що 15 червня буде йти дощ, дорівнює 0,4, а ймовірність того, що в указаний день дощу не буде, дорівнює 0,6. Далі, для пункту A ймовірність того, що 15 листопада буде йти дощ, дорівнює 0,65, ймовірність того, що буде йти сніг, дорівнює 0,15 і ймовірність того, що 15 листопада зовсім не буде опадів, дорівнює 0,2. Якщо з усіх характеристик погоди цікавитись тільки питанням про наявність і характер опадів, то в який з двох перерахованих днів погоду в пункті A слід вважати більш невизначеною?

Тема: “Система аксіом Г. Вейля”

Задача Е.21 (тренувальна, з)**.** Назвемо вектором будь-яку квадратну матрицю A_{pp} (p — фіксоване натуральне число); сумою векторів A_{pp} і B_{pp} назвемо вектор $A_{pp}{\cdot}B_{pp}$. Перевірити виконання аксіом I та II груп системи аксіом Г. Вейля.

Задача Е.22 (тренувальна, з)**.** Назвемо вектором довільну матрицю A_{31}, точкою — довільну матрицю M_{13}, сумою векторів A_{31} і B_{31} — вектор $A_{31} + B_{31}$, добутком вектора A_{31} на число λ — вектор λA_{31}. Скалярним добутком векторів A_{31} і B_{31}, визначеним вектором U_{31}, назвемо число

$$\frac{a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{31}b_{31}}{u_{11}^2 + u_{21}^2 + u_{31}^2}.$$

Перевірити, чи виконуються в даній моделі аксіом Вейля 1–5 груп.

Тема: “Система аксіом Д. Гільберта”

Задача Е.23 (тренувальна, з)**.** Переконатися в тому, що в даній моделі, описаній нижче, виконуються всі аксіоми I, II груп системи аксіом Гільберта.

а) Точкою називається пара дійсних чисел (x,y), взятих у певному порядку.

б) Прямою називається будь-яке рівняння виду $kx - y + b = 0$ або $-x + b = 0$, де k і b — довільні дійсні числа.

в) Нехай різні точки $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$, $(x_3;y_3)$ належать одній прямій; точка $(x_2;y_2)$ називається такою, що лежить між $(x_1;y_1)$ і $(x_3;y_3)$, якщо при $x_2 - x_3 \neq 0$ $\frac{x_1-x_2}{x_2-x_3} > 0$, а при $x_2 = x_3$: $\frac{y_1-y_2}{y_2-y_3} > 0$.

Тема: “Проективна система координат”

Задача Е.24 (тренувальна, з)**.** Побудувати точку $C(3 : -1 : -2)$ в різних моделях проективної площини.

Задача Е.25 (розвиваюча, д)**.** У проективній системі координат R дано координати фундаментальних точок проективної системи координат R': $E_1'(1 : 1 : 1)$, $E_2'(0 : 1 : 0)$, $E_3'(1 : 0 : 0)$, $E_0'(0 : 0 : 1)$. Знайти координати точки B в системі R', якщо відомі її координати в системі R: $B(2 : -1 : 3)$.

Задача Е.26 (розвиваюча, д)**.** Точки $E_0(0;0)$, $E_1(1;0)$, $E_2(1;1)$, $E_3(0;1)$ евклідової площини взяті за фундаментальні точки системи координат R. Знайти координати невласних точок прямої $2x + y - 2 = 0$.

Тема: "Перспективно-афінна відповідність"

Задача Е.27 (розвиваюча, д)**.** Дано вісь і напрям споріднення. Встановити споріднення так, щоб трикутник $A'B'C'$, споріднений з даним трикутником ABC, мав при вершині C' кут, який дорівнював би α.

Задача Е.28 (розвиваюча, д)**.** Дано вісь споріднення і два трикутники ABC, $A_1B_1C_1$. Побудувати трикутник $A'B'C'$, споріднений з першим і подібний до другого.

Тема: "Моделі геометрії М. І. Лобачевського"

Задача Е.29 (розвиваюча, в)**.** Побудувати пряму, паралельну даній під заданим кутом паралельності α.

Задача Е.30 (розвиваюча, в)**.** Дано відрізок. Побудувати кут паралельності, що відповідає даному відрізку.

Задача Е.31 (розвиваюча, в)**.** Дано кут. Побудувати відрізок так, щоб даний кут був кутом паралельності даного відрізка.

Задачі, що розв'язуються за розширеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання

Тема: "Симплекс-метод. Задача лінійного програмування"

Задача Е.32 (розвиваюча, в)**.** Нехай для вирощування деякої культури в господарстві застосовується m видів добрив відповідно в кількості b_i ($i = 1, 2, ..., m$) одиниць. Вся посівна площа розбита на n грунтово-кліматичних зон, кожна по d_j ($j = 1, 2, ..., n$) одиниць. Нехай a_i — кількість i-го добрива, що вноситься на одиницю площі j-ї зони, а C — підвищення середньої врожайності, що одержується з одиниці площі j-ї зони. Скласти такий план розподілу добрив між посівними зонами, який забезпечував би максимальний сумарний приріст врожайності культури. Дані до задачі наведені в табл. Е.1.

Табл. Е.1: Дані до задачі Е.32

Зона	Посівна площа, га	Затрати добрив на 1 га, ц: Фосфорні	Азотні	Калійні	Приріст врожайності на 1 га, ц
1	100000	2	1	1	12
2	150000	1	2	5/4	14
3	210000	1	1/2	0	10
Наявність добрив, ц		400000	300000	500000	

Задача Е.33 (розвиваюча, в)**.** Щоб при відгодівлі тварин вагою 30–40 кг одержати щоденне зростання ваги в середньому по 300–400 г, за нормою денний раціон повинен містити поживні речовини в такій кількості: кормових одиниць — не менше 1,6 кг, протеїну — не менше 200 г, каротину — не менше 10 мг. При відгодівлі ви користовують ячмінь, боби, сінну муку. Вміст поживних речовин в 1 кг цих кормів і вартість 1 кг корму наведені в табл. Е.2. Скласти денний раціон, що задовольняє даній поживності при мінімуму вартості.

Табл. Е.2: Дані до задачі Е.33

Кількість поживної речовини	Кількість одиниць поживних речовин в 1 кг корму: Ячмінь	Боби	Сінна мука
Кормові одиниці, кг	1,2	1,4	0,8

Засвоєний протеїн, г	80	280	240
Каротин, мг	5	5	100
Ціна 1 кг корму, грн	3	4	5

Тема: "Математичне моделювання засобами класичних галузей математики"

Задача Е.34 (розвиваюча, в)**.** Енергозберігаюче обладнання коштує 80 тис. грн. Заощадження від його використання описується формулою $S(t) = 40e^{-0,5t}$, де t — час (у роках), S — заощадження (у гривнях). Підрахувати заощадження за 1, 2, 3, 4, 5 років. Через який час фірма покриє витрати на придбання обладнання?

Задача Е.35 (розвиваюча, в)**.** Вкладник поклав 10000 грн на свій пенсійний рахунок у банку, який виплачує 12 %. Визначити величину вкладу через 1, 2, 3, 4, 5 років. Яка сума буде на рахунку через 1, 2, 3, 4, 5 років, якщо кожний місяць вкладник забирає та знову вносить вклад? Визначити суми вкладів при неперервному нарахуванні процентів.

Задача Е.36 (розвиваюча, в)**.** Мідний кубик з ребром 6 см піддали рівномірному шліфуванню з усіх боків. Визначити, на скільки скоротиться ребро кубика, якщо його маса зменшиться на 0,53, 0,62, 0,78, 0,88 г (густина міді 8,9 г/см^3).

Задача Е.37 (розвиваюча, в)**.** Населення міста зростає на 2 % за рік. У скільки разів воно збільшиться за 100 років?

Задача Е.38 (розвиваюча, в)**.** Розглядаючи падіння тіла, при якому шлях S як функція часу t визначається за формулою $S(t) = \frac{gt^2}{2}$, знайти швидкість руху тіла у момент часу $t_0 = 4$ с.

Задача Е.39 (розвиваюча, в)**.** Є три типи сировини: A, B, C, які використовуються для виробництва двох видів продуктів: I і II. В наявності знаходяться 500 одиниць сировини A, 750 одиниць сировини B і 200 одиниць сировини C. Продукт I складається з 1 одиниці сировини A і 2 одиниць сировини B. Продукт II складається з 2 одиниць сировини A, 1 одиниці сировини B і 1 одиниці сировини C. Прибуток від виробництва одиниці продукту I складає 4 грн, а від одиниці продукту II — 5 грн. Скільки одиниць кожного продукту потрібно виробляти, щоб отримати максимальний прибуток?

Лабораторна робота № 1: "Обчислювальний експеримент у математичному моделюванні процесів теплопровідності"

Задача Е.40 (розвиваюча, в)**.** Знайти температуру деталі циліндричної форми при її локальному охолодженні кільцевою зоною з торця. Коефіцієнт теплопровідності (λ) матеріалу, з якого виготовлено деталь, і густина (q) теплових джерел, розташованих в ній, є сталими. Як змінюється різниця між максимальною та мінімальною температурами із збільшенням площі охолодження? Вихідні дані: $\rho_1 = 0,2$ — радіус меншого кола, що обмежує кільце охолодження, $\rho_2 = 0,4$ — радіус більшого кола, $R = 1$ — радіус основи циліндра, $\lambda = 0,1$, $k = 0,04$, $q = 2$, $T_0 = 0$ — початкова температура.

Лабораторна робота № 2: "Математичне моделювання в екології"

Задача Е.41 (розвиваюча, в)**.** Провести дослідження динаміки розвитку деякої популяції на основі моделі Мальтуса та логістичної моделі популяцій.

Лабораторна робота № 3: “Моделювання випадкових процесів у системах масового обслуговування”

Задача Е.42 (розвиваюча, в)**.** Нехай маємо магазин з одним продавцем, в який випадковим чином заходять покупці. Якщо продавець вільний, то він починає обслуговувати покупця відразу, якщо покупців кілька, то вистроюється черга. Скільки часу в середньому доведеться простояти в черзі?

Додаток F
Семінарські заняття
Семінарське заняття № 1
Універсальність математичних моделей

МЕтА: узагальнити знання студентів про універсальність математичних моделей на основі їх загального математичного розвитку, навести приклади універсальності математичних моделей складних об'єктів.

Для досягнення мети необхідно виконати такі завдання:

1. Опрацювати наукову літературу за вказаним списком.
2. Детально підготувати доповідь за виділеним викладачем питанням.
3. Приклади задач оформити за розширеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання, підібравши при цьому самостійно програми для реалізації моделі на комп'ютері (де такі програми існують та є загально доступними).

План

1. Диференціальні рівняння та їх застосування.
2. Функції як математичні моделі різних процесів та явищ.
3. Приклади аналогій між механічними, термодинамічними і економічними об'єктами:
   a. організація рекламної кампанії;
   b. взаємовідносини в системі "хижак — жертва".

ЛітЕратура: [6,33,53,126,195].

Семінарське заняття № 2
Математичне моделювання складних об'єктів

МЕта: познайомити студентів з тими глобальними проблемами, які стоять сьогодні перед людством, та як вони вирішуються наукою за допомогою математичного моделювання.

Для досягнення мети необхідно виконати такі завдання:

1. Опрацювати наукову літературу за вказаним списком.
2. Детально підготувати доповідь за виділеним викладачем питанням.
3. Для ілюстрації доповіді підготувати таблиці, графіки і діаграми та вибрати засіб їх демонстрації в аудиторії під час доповіді.

План

1. Задачі технології та екології: фізично "безпечний" ядерний реактор.
2. Фундаментальні проблеми природознавства: кліматичні наслідки ядерного конфлікту.

ЛітЕратура: [121,124,132,195,245].

Додаток G
Організація роботи за модульно-рейтинговою системою на спецкурсі “Математичне моделювання”

Найбільш поширеною нині стала модульно-рейтингова система навчання і оцінки успішності студента. *Модульна програма з навчальної дисципліни* — це розділена на окремі модулі діюча навчальна програма. Модуль — це цілісна, логічно завершена програмна частина теоретичних знань, навичок і вмінь з даної навчальної дис ципліни, яка адаптована до індивідуальних особливостей студентів (учнів) в умовах диференційованого навчання. Модуль, визначений у часовому інтервалі, передбачає не лише засвоєння студентами відповідного програмного матеріалу, а й оцінювання кожного студента (учня) у відповідності із заздалегідь сформульованими рівнями вимог (обов’язковий, підвищений, поглиблений).

Модульне планування програмного матеріалу повинне передбачати виділення опорних знань і вмінь (актуалізація), які будуть використовуватися при вивченні модуля, а також систематичне повторення головного навчального матеріалу при вивченні наступних модулів (поточне повторення).

Рейтинг — це порядкова позиція студента (учня) певної групи (класу) за результатами навчання з базових предметів, яка визначається рейтинговим показником. *Рейтинговий показник* — числова величина, що дорівнює процентному відношенню суми опорних оцінок з усіх модулів до суми максимально можливих.

Розглянемо досвід упровадження модульно-рейтингової системи на фізико-математичному факультеті Національного педагогічного університету ім. М. П. Драгоманова. За такою системою працюють кафедра експериментальної і теоретичної фізики та окремі викладачі математичних кафедр.

На початку семестру викладачі складають календарний графік навчального про цесу з даного курсу, який оформлюється у вигляді плаката і вивішується на дошці інформації для ознайомлення студентів. Студенти, ознайомившись із графіком і оцінивши свої можливості, розбиваються на три групи.

Перша група орієнтується на індивідуальну форму роботи, кожний студент пра цює за складеним ним індивідуальним планом, що може бути зумовлено соціально-побутовими умовами та рівнем підготовки студента. Це особливо актуально під час проведення спецкурсу з математичного моделювання, оскільки більшість студентів 4–5 курсів працюють в школі, а деякі мають новонароджених дітей.

Друга група орієнтується на традиційну форму навчання і контролю (відвідування лекцій, відпрацювання всіх практичних занять і лабораторних робіт, складання заліків і екзаменів).

Третя група навчається за модульно-рейтинговою системою. Студенти цієї групи працюють за складеним викладачем графіком, мають можливість ще до початку екзаменаційної сесії отримати екзаменаційну оцінку за сумарною кількістю балів (рейтинг).

Практика показує, що протягом семестру групи не залишаються стабільними. Може відбутися перехід студента з другої (традиційної) групи до третьої (рейтинго вої) з дозволу викладача. Але для цього студент має наздогнати рейтингову групу у виконанні календарних форм контролю. Очевидно, такий перехід можливий у перші тижні семестру. Можливий і перехід студента з рейтингової групи до традиційної через порушення графіку. Такий перехід також має відбуватися за бажанням студен та і за порадою викладача. Для підвищення відповідальності студентів за навчання і реальної оцінки їхніх успіхів необхідний контрольний аналіз стану роботи студентів викладачем. Перший такий аналіз доцільно проводити, коли мине третина семестру. Дати їх проведення доцільно зазначати у графіку. Невчасне виконання графіка студентами приводить відрахування штрафних балів. За деякі види роботи (за умови якісного і своєчасного виконання) можливе нарахування заохочувальних балів.

При складанні календарного графіка навчального процесу враховуються викладачами такі вимоги:

1. кількість модулів курсу погоджується з кількістю тижнів семестру;
2. терміни проведення контрольних заходів для кожного модуля узгоджуються з факультетським графіком контрольних робіт, колоквіумів, консультацій;
3. кількість та форми контрольних заходів складаються з врахуванням складності навчального матеріалу в даному модулі;
4. строго регламентується кожний вид контролю.

У календарному графіку кожного модуля визначено теми лекцій, практичних занять, перелік задач для розв'язування в аудиторії та при виконанні домашніх за вдань, для самостійної роботи, а також рейтингові бали, які може отримати студент. Студент може замінити стандартні домашні задачі розв'язанням задач підвищеної складності.

Рейтингові бали з кожного виду контролю отримуються шляхом множення оцінки у чотирибальній системі з інтервалом 0,1 від 2,5 до 5, яку отримує студент, на рейтинговий коефіцієнт. Останній відбиває значущість навчального матеріалу, має адекватно представляти ті чи інші форми контролю, сприяти зацікавленості студентів у виконанні контрольних завдань. Скажімо, якщо рейтинговий коефіцієнт для лабораторних робіт 5, то для колоквіуму він дорівнює 20. Чим більше диференційовані рейтингові коефіцієнти, тим точніше можна оцінити роботу студента.

Важливо попередньо визначити максимальну кількість балів, яку студент може набрати, виконавши весь обсяг робіт за календарним графіком навчального процесу за семестр. Доцільно також визначити кількість балів для отримання екзаменаційної оцінки "відмінно", "добре", "задовільно". Досвід показує, що при кількості балів, не меншій, ніж 80 % від максимальної кількості по залікових формах контролю, доцільно виставляти залік.

Якщо студент набрав 85 % від максимальної кількості балів з екзаменаційних форм контролю, то він одержує екзаменаційну оцінку "відмінно". Щоб розрахувати кількість балів для оцінки "добре", яку б студент одержав, маючи по всіх формах контролю "добре", беремо 115 % від одержаної суми балів. Якщо студент одержав за всіма формами контролю "задовільно", то 125 % від сумарної кількості балів дає змогу виставити екзаменаційну оцінку "задовільно".

Студенти, які навчалися за індивідуальним графіком, можуть отримати рейтингову оцінку за таким самим принципом, хоч тут можливі й інші форми контролю та розрахунків, але лише за умови своєчасного виконання всього обсягу роботи.

Порівняно з модульно-рейтинговими системами, які практикуються в інших закладах вищої освіти, модульно-рейтингова система фізико-математичного факуль тету НПУ імені М. П. Драгоманова відрізняється насамперед демократичністю. Справді, кожному студентові надається право працювати чи за модульно-рейтинговою системою, чи за традиційними формами. Тут модульно-рейтингова си стема відрізняється більш чітким плануванням роботи студента (календарний навчальний план) і систематичним управлінням цією роботою з боку викладача. Досить стійкою є і система розрахунку рейтингу та переведення сумарної кількості балів у чотирибальну систему оцінок.

Детальніше модульно-рейтингова система як організаційно-методична форма навчання взагалі і на фізико-математичному факультету НПУ імені М. П. Драгоманова описана в посібнику [216] та в методичних рекомендаціях [237,238].

За описаною модульно-рейтинговою системою доцільно організовувати і спецкурс з математичного моделювання, де контроль успішності студентів здійснюється відповідно до вказівок, поданих вище.

Разом з тим, впровадження модульно-рейтингової системи буде ефективним, як що всі кафедри працюють за нею, інакше відбувається перерозподіл навчального навантаження студентів на дисципліни кафедри, яка працює за модульно-рейтинговою системою. Це явище спостерігалося і на фізико-математичному факультеті НПУ імені М. П. Драгоманова.

Табл. G.1: Тематичний план (IV курс I семестр)

Назва модулів	Всього годин	Всього ауд.	Лекції	Лабор. роб.	Практ. роб.	Семінар. заняття	Са роб
Модуль I. Математичне моделювання як метод наукового дослідження. Загальні методи математичного моделювання.	18+4	18	10	-	6	2	4
Модуль II. Деякі сучасні методи дослідження математичних моделей	14+3	14	6	6	-	2	3
За навчальним планом	39	32	16	6	6	4	7

Табл. G.2: Зміст програми, що відповідає модульному контролю (IV курс I семестр)

№ п/п	Теми лекційного курсу	К-ть лекц. год.	К-ть год. сам. роб.
	I. Математичне моделювання як метод наукового дослідження. Загальні методи математичного моделювання.		
1.	Математичні моделі реальних процесів та явищ. Математичне моделювання як метод наукового дослідження.	4	2
2.	Теоретико-множинні основи математичного моделювання.	2	
3.	Загальні методи математичного моделювання.	4	2
	II. Деякі сучасні методи дослідження математичних моделей.		
1.	Деякі сучасні методи дослідження математичних моделей.	2	

2.	Математичне моделювання складних об'єктів.	2	3
3.	Математичне моделювання і професійна діяльність учителя математики.	2	
		16	7
№ п/п	Практичні заняття	К-ть годин	Тижні семестру
1.	Математичне моделювання засобами класичних галузей математики.	4	3–4
2.	Диференціальні рівняння як математичні моделі реальних процесів та явищ.	2	5
		6	
№ п/п	Лабораторні роботи	К-ть годин	Тижні семестру
1.	Обчислювальний експеримент в математичному моделюванні процесів теплопровідності.	2	11
2.	Математичні моделі в екології.	2	14
3.	Моделювання випадкових процесів в системах масового обслуговування.	2	15
		6	
№ п/п	Семінарські заняття	К-ть годин	Тижні семестру
1.	Універсальність математичних моделей.	2	9
2.	Математичне моделювання складних об'єктів.	2	13
		4	
№ п/п	Зміст модульного контролю	Вид контролю	Тижні семестру
1.	Модуль 1. Математичне моделювання як метод наукового дослідження.	Залікова конт. роб.	6–7
2.	Модуль 1. Загальні методи математичного моделювання	Модульна конт. роб.	10–11
3.	Модуль 2. Деякі сучасні методи дослідження математичних моделей.	Тест № 1	14
4.	Модуль 2. Математичне моделювання складних об'єктів.	Тест № 2	15–16
№ п/п	Зміст самостійної роботи	К-ть годин	Література
1.	Функції як математичні моделі різних процесів та явищ.	2	[33]
2.	Універсальність математичних моделей.	2	[33,121,195]
3.	Математичне моделювання задач сучасної екології та технології.	3	[121,195]
		7	

Зміст видів контролю

Залікова контрольна робота (6–7 тиждень)

Варіант 2.

1. Диск, кинутий спортсменом під гострим кутом до горизонту, впав на відстані 54 м від початкового положення. Визначити параметр параболічної траєкторії, яку описує диск, якщо найбільша висота, якої він досяг, дорівнює 10 м.
2. Побудувати зображення правильного десятикутника.
3. Чи є групою відносно операції множення: а) множина всіх неособливих матриць другого порядку з невід'ємними дійсними елементами; б) множина

всіх матриць другого порядку з цілими елементами, визначник яких дорівнює 1?

4. Слід обгородити прямокутну ділянку заданої площі S. Визначити розміри ділянки з найкоротшою огорожею.
5. Швидкість приросту ферменту пивних дріжджів пропорційна кількості цього ферменту. Початкова кількість N_0 ферменту через 1 год подвоюється. У скільки разів вона збільшиться через b год, якщо b набуває значень 4, 5, 6, 7, 8 год?

Варіант 3.

1. Дзеркальна поверхня прожектора утворена обертанням параболи навколо її осі симетрії. Діаметр дзеркала 80 см, а глибина його 10 см. На якій відстані від вершини параболи слід розташувати джерело світла, якщо для відбиття про менів паралельним пучком воно повинно знаходитися у фокусі параболи.
2. Побудувати зображення правильного восьмикутника.
3. Назвемо афінною площиною довільну непорожню множину елементів (їх називатимемо точками) та систему її підмножин (їх називатимемо прямими), якщо виконуються такі аксіоми:
   - Для довільних двох різних точок A і B існує одна і тільки одна пряма, що проходить через ці точки.
   - Які б не були задані пряма l і точка P, через точку P проходить одна і тільки одна пряма m, паралельна прямій l.
   - Існують три точки, які не лежать на одній прямій.

   Примітка: дві прямі називаються паралельними, якщо вони збігаються ($l = m$) або не мають спільних точок ($l \cap m = \varnothing$).
   Переконайтеся, що множина $\{1;2;3;4\}$ та система підмножин $\{1;2\}$, $\{1;3\}$, $\{1;4\}$, $\{2;3\}$, $\{2;4\}$, $\{3;4\}$ становлять математичну модель афінної площини. Що можливо сказати про незалежність, несуперчливість та повноту цієї системи аксіом?
4. Енергозберігаюче обладнання коштує 60 тис. грн. Заощадження від його використання описується формулою $S(t) = 20e^{-0,3t}$, де t — час (у роках), S — заощадження (у гривнях). Підрахувати заощадження за 1, 2, 3, 4 роки. Через який час фірма покриє витрати на придбання обладнання?
5. У кімнаті, об’єм якої 300 $м^3$, міститься 0,15 % вуглекислоти. За 1 хв у кімнату вентилятор подає 20 $м^3$ повітря, що містить 0,04 % вуглекислоти. Через який час вміст вуглекислоти у кімнаті зменшиться вдвічі?

Варіант 4.

1. Земля рухається по траєкторії, що є деяким геометричним місцем точок, яке має таку властивість, що сума відстаней від будь-якої його точки до двох фіксованих точок є величина стала. Відомо, що Сонце знаходиться в одній з цих фіксованих точок. Найменша відстань від Землі до Сонця наближено дорівнює 147,5 млн. км, а найбільша — 152,5 млн. км. Записати рівняння траєкторії руху Землі, знайти велику піввісь та ексцентриситет.
2. Побудувати зображення правильного п’ятикутника.
3. Чи утворює групу множина: а) всіх векторів площини відносно операції додавання; б) всіх векторів простору відносно операції додавання; в) всіх

векторів простору відносно вектрного добутку?

4. Визначити розміри відкритого басейну з квадратним дном і об'ємом 32 м^3, щоб на облицювання його стін і дна витратити якнайменше матеріалу.
5. За статистичними даними швидкість зменшення кількості робітників заводу з часом прямо пропорційна їх кількості. Відомо також, що кількість робітників за рік зменшилася втричі. Визначити залежність кількості робітників від часу. Через скільки років ця кількість зменшиться в a разів, якщо в початковий момент $t = 0$ вона дорівнювала N_0? Обчислення провести, якщо N_0 дорівнює 500, 600, 700 тис. чол., a дорівнює 4, 5 разів.

Модульна контрольна робота (10–11 тиждень)

Варіант 2.

1. Варіаційні принципи. Приклад застосування до побудови математичної моделі .
2. Модель Р. Харрода розвитку економіки в окремо взятій країні.
3. У чому полягає універсальність математичних моделей?

Варіант 3.

1. Метод аналогій. Приклад застосування.
2. Математична модель руху кульки, приєднаної до пружини.
3. У чому полягає ієрархічний підхід до побудови математичних моделей?

Варіант 4.

1. Метод фазового укрупнення. Приклад застосування.
2. Модель Мальтуса розвитку біологічної популяції.
3. Які варіаційні принципи застосовуються до побудови математичних моделей?

Тест № 1 (14 тиждень)

1. Які сучасні підходи до дослідження математичних моделей ви знаєте?
2. У чому полягає процедура масштабування?
3. Наведіть приклади масштабування.
4. Сформулюйте теореми порівняння.
5. Сформулюйте принцип максимуму.

Тест № 2 (15–16 тиждень)

1. Описати математичну модель взаємовідносин у системі "хижак — жертва".
2. Описати математичну модель організації реклами.
3. Описати математичну модель "черга до одного продавця".
4. Які кліматичні наслідки ядерного конфлікту?
5. Математична модель "фізично безпечного ядерного реактора".

Примітка: *Тест за часом проведення потребує до 20–25 хвилин, тому проводиться як групами, так і індивідуально в зручний час. Пропонується по одному питанню з набору.*

Залік. Питання до заліку

1. Різні процеси, що описуються однією і тією ж моделлю.
2. Процес розмноження бактерій та його математична модель
3. Процес теплопровідності та його математична модель.
4. Математична модель ефективності реклами.
5. Математична модель утворення нової хімічної речовини.
6. Розкрити зміст понять "математична модель", "математичне моделювання" з різних точок зору.

7. Основні напрями математичного моделювання в математиці.
8. Види математичних моделей та математичного моделювання.
9. Метод математичного моделювання, як метод наукового дослідження.
10. Евристичні схеми діяльності математичного моделювання. Приклади задач, розв'язаних за цими схемами.
11. Множини та відношення на них.
12. Відношення еквівалентності та факторизація.
13. Математичні структури.
14. Аксіоматичний метод.
15. Несуперечливість, незалежність і повнота системи аксіом.
16. Поняття математичної моделі системи аксіом.
17. Приклад математичної структури, що визначається аксіоматикою Д. Гільберта .
18. Приклад математичної структури, що визначається аксіоматикою Г. Вейля.
19. Коротко охарактеризувати загальні методи математичного моделювання.
20. Метод використання фундаментальних законів природи.
21. Модель руху кульки, приєднаної до пружини.
22. Варіаційний принцип Гамільтона.
23. Математична модель Мальтуса розвитку біологічної популяції.
24. Математична модель Р. Харрода розвитку економіки в окремо взятій країні.
25. Навести приклад аналогій математичних моделей різних процесів.
26. Особливості математичного моделювання складних об'єктів.
27. Моделі суперництва: взаємовідносини в системі "хижак — жертва" (найбільш повна модель популяції).
28. Математична модель організації реклами.
29. Модель фізично безпечного ядерного реактора.
30. Які сучасні методи дослідження математичних моделей?
31. Сформулювати теореми порівняння, усереднення та максимуму.
32. Проілюструвати на прикладі процедуру масштабування.
33. Описати математичну модель "черга до одного продавця".
34. Дослідження кліматичних наслідків ядерного конфлікту.
35. Універсальність математичних моделей.
36. Функції як математичні моделі різних процесів та явищ.
37. Організація навчання математичного моделювання учнів.
38. Різні евристичні схеми діяльності математичного моделювання, що пропонуються у шкільному курсі математики.
39. Які з розглянутих моделей доцільно давати у шкільному курсі математики? Чому?

Примітка: *Складається студентами згідно навчального плану за розкладом, складеним деканатом. Залік передбачає перевірити знання теоретичного матеріалу, висвітленого на лекціях. Складається в письмово-усній формі. Спочатку студенти пишуть відповіді на два із запропонованих питань (за вибором викладача), а потім захищають ці відповіді усно. До теоретичних питань слід додавати задачу з домашніх завдань, що пропонуються на практичних заняттях.*

Додаток Н
Приклад задачі, розв'язаної за розширеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання

Задача Н.1. При проектуванні електричних машин дуже важливо вибрати вдалу схему охолодження. Досить ефективним на сьогоднішній день є локальне охолодження деталей. Більшість деталей мають форму циліндра. В залежності від конструкції машини та взаємодії її вузлів, деталі циліндричної форми доцільно охолоджувати такими зонами: кільцевою зоною з торця, аксіальною зоною на його бічній поверхні; зоною вздовж твірної на бічній поверхні. Знайти найменше, найбільше та середнє значення температури при охолодженні деталі циліндричної форми зоною вздовж твірної на бічній поверхні, вважаючи, що λ — коефіцієнт теплопровідності матеріалу, з якого виготовлено циліндр, α — коефіцієнт тепловіддачі, q — густина теплових джерел, розташованих в циліндрі, є сталими.

Розв'язання. **I. Попередній аналіз об'єкта дослідження.** З курсу фізики відомо, що існують три способи переносу тепла: теплопровідність (кондукція), пе ремішування (конвенція) і випромінювання (радіація). У задачі, що розглядається, перенос тепла відбувається кондуктивно. Ще в середині XVIII віку М. В. Ломоносов вказав, що кількість теплоти, що передається від одного тіла до другого, про порційна різниці кількості руху складаючих ці тіла "частинок", тобто молекул.

Кількість руху, що передається молекулам, пропорційна різниці їх кінетичних енергій в областях тіла, що розглядаються, тобто пропорційна різниці температур цих областей. Формально в математичну фізику це положення було введено на по чатку XIX століття у вигляді гіпотези Біо–Фур'є про пряму пропорційність вектора теплового потоку градієнту температури:

$$q = -\lambda \operatorname{grad} T. \tag{Н.1}$$

Знак "мінус" показує взаємнообернені напрями вектора теплового потоку q і градієнта температури (grad$T$), а множник пропорційності λ розглядається як деяка фізична характеристика, що називається коефіцієнтом теплопровідності.

При побудові математичної моделі врахувати слід такі припущення:

1. охолодження поверхні відбувається відповідно до закону Ньютона
$$-\lambda \frac{dT}{dn}\bigg|_{S_1} = k(T - T_0),$$
де $T(x,y,z)$ — температура елемента, S_1 — поверхня, що охолоджується, n — напрям зовнішньої нормалі до поверхні S_1, λ — коефіцієнт теплопровідності матеріалу, з якого виготовлено елемент; k — коефіцієнт зовнішньої теплопровідності.
2. на теплоізольованій частині S_2 межової поверхні $S = S_1 + S_2$ області D виконується умова
$$\frac{dT}{dn}\bigg|_{S_2} = 0.$$

Будемо вважати, що деталь — циліндричної форми скінчений циліндр з радіусом основи R та висотою l. Розглядатимемо цей циліндр відносно деякої циліндричної системи координат (див. рис. Н.1).

Рис. Н.1: Циліндр з вказаною зоною охолодження між двома твірними на бічній поверхні

Тоді співвідношення (Н.1) запишеться у вигляді диференціального рівняння в частинних похідних другого порядку

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial T}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{q}{\lambda}=0, \tag{Н.2}$$

яке і слід розв'язати, враховуючи характер охолодження, щоб знайти шукану в задачі температуру.

II. Побудова математичної моделі. З аналізу слідує, що температура циліндра T задовольняє рівнянню (Н.2). Враховуючи, що охолодження циліндра відбувається за законом Ньютона, крайові умови при охолодженні зоною між двома твірними на поверхні циліндра матимуть такий вигляд:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{\substack{z=0\\ z=l}}=\left.\frac{\partial T}{\partial\rho}\right|_{\substack{0\leqslant z\leqslant l\\ \varphi\notin[-\varphi_0;\varphi_0]}}=0, \tag{Н.3}$$

$$\left.\lambda\frac{\partial T}{\partial\rho}\right|_{\substack{0\leqslant z\leqslant l\\ -\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0}}=\left.\alpha\chi(-\varphi_0,\varphi_0,\varphi)\right|_{\substack{0\leqslant z\leqslant l\\ -\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0}}, \tag{Н.4}$$

де

$$\chi(-\varphi_0,\varphi_0,\varphi)=\begin{cases}1, & \varphi\in[-\varphi_0;\varphi_0],\\ 0, & \varphi\notin[-\varphi_0;\varphi_0].\end{cases}$$

Формули (Н.2)–(Н.4) можна спростити, ввівши заміну змінних

$$\rho=R\xi,\quad z=R\zeta,\quad T=\frac{R^2qt}{\lambda}+T_0,\quad k=\frac{R\alpha}{\lambda}.$$

Замість рівняння (Н.2) матимемо рівняння

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial t}{\partial\xi}\right)+\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial^2 t}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial\zeta^2}+1=0 \tag{Н.5}$$

і відповідно крайові умови

$$\left.\frac{\partial t}{\partial\zeta}\right|_{\substack{\zeta=0\\ \zeta=h}}=\left.\frac{\partial t}{\partial\xi}\right|_{\substack{0\leqslant\zeta\leqslant l_1\\ \varphi\notin[-\varphi_0;\varphi_0]}}=0, \tag{Н.6}$$

$$\left.\frac{\partial t}{\partial\xi}\right|_{\substack{0\leqslant\zeta\leqslant h\\ -\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0}}=\left.-k\chi(-\varphi_0,\varphi_0,\varphi)t\right|_{\substack{0\leqslant\zeta\leqslant h\\ -\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0}}. \tag{Н.7}$$

Відповідно до крайових умов (Н.6) та (Н.7) розв'язок рівняння (Н.5) не залежить від аргументу ζ, і тому функція t задовольняє рівняння

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial t}{\partial\xi}\right)+\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial^2 t}{\partial\varphi^2}+1=0 \tag{Н.8}$$

і крайові умови

$$\left.\frac{\partial t}{\partial\xi}\right|_{\substack{\xi=1\\ -\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0}}=\left.-k\chi(-\varphi_0,\varphi_0,\varphi)t\right|_{\substack{\xi=1\\ -\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0}}. \tag{Н.9}$$

Рівняння (Н.8) з крайовими умовами (Н.9) і є математичною моделлю задачі локального охолодження зоною між двома твірними на бічній поверхні циліндра.

III. Реалізація математичної моделі математичними методами. Розв'яжемо рівняння (Н.8) з крайовими умовами (Н.9). Розв'язок його шукатимемо у вигляді

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \cos n\varphi. \tag{Н.10}$$

Підставимо співвідношення (Н.10) у рівняння (Н.8). Матимемо

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dt_n}{d\xi} \right) - \frac{n^2}{\xi^2} t_n \right) \cos n\varphi + 1 = 0. \tag{Н.11}$$

Помножимо рівняння (Н.11) на $\cos m\varphi$ і проінтегруємо на відрізку $[-\pi;\pi]$. Дістанемо

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dt_0}{d\xi} \right) + 1 = 0, \qquad \text{якщо } m = 0, \\ &\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dt_m}{d\xi} \right) - \frac{m^2}{\xi^2} t = 0, \qquad \text{якщо } m \neq 0. \end{aligned} \tag{Н.12}$$

Розв'язок першого з цих рівнянь має вигляд

$$t_0 = -\frac{1}{4}\xi^2 + C_0. \tag{Н.13}$$

Для розв'язання другого рівняння застосуємо підстановку $\tau = \ln \xi$. Враховуючи обмеженість розв'язку, дістанемо

$$t_n = C_n \xi^n. \tag{Н.14}$$

З рівностей (Н.13), (Н.14) маємо розв'язок рівняння (Н.11):

$$t = -\frac{1}{4}\xi^2 + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \xi^n \cos n\varphi. \tag{Н.15}$$

Величини C_n з рівності (Н.15) можна визначити наступним способом.

У зоні охолодження функцію $\frac{\partial t}{\partial \xi}$ покладемо рівною її наближеному значенню:

$$\left.\frac{\partial t}{\partial \xi}\right|_{\substack{\xi=1 \\ -\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0}} = \left.\left(\left(-\frac{\pi}{2\varphi_0} + a \cos\left(\frac{\pi}{\varphi_0} \varphi \right) \right) \chi(-\varphi_0, \varphi_0, \varphi) \right)\right|_{\substack{\xi=1 \\ -\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0}} \tag{Н.16}$$

і далі розкладемо цю функцію в ряд Фур'є в інтервалі $[-\pi;\pi]$.

Порівнюючи значення $\left.\frac{\partial t}{\partial \xi}\right|_{\substack{\xi=1 \\ -\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0}}$ з формули (Н.16) та

$$\left.\frac{\partial t}{\partial \xi}\right|_{\substack{\xi=1 \\ -\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0}} = \left.\left(-\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n n \cos n\varphi \right)\right|_{\substack{\xi=1 \\ -\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0}},$$

одержимо

$$C_n = -\frac{\sin n\varphi_0}{n^2 \varphi_0} - \frac{2a}{\pi} \frac{\sin n\varphi_0}{\frac{\pi^2}{\varphi_0^2} - n^2}, \tag{Н.17}$$

$$C_0 = \frac{\pi}{2\varphi_0 k} + \frac{a}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi_0}{n^2 \varphi_0} + \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi_0}{\frac{\pi^2}{\varphi_0^2} - n^2} - \frac{k}{4}, \tag{Н.18}$$

де

$$a = \frac{\pi \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi_0}{n^2 \varphi_0} \left(1 - \cos n \left(\frac{\pi}{18} \right) \right)}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi_0}{\frac{\pi^2}{\varphi^2} - n^2} \left(\cos n \left(\frac{\pi}{18} \right) - 1 \right) + 1 - \cos \frac{\pi}{\varphi_0} \left(\frac{\pi}{18} \right)}. \tag{Н.19}$$

І нарешті, враховуючи значення (Н.17) та (Н.18) і співвідношення (Н.15), остаточно матимемо

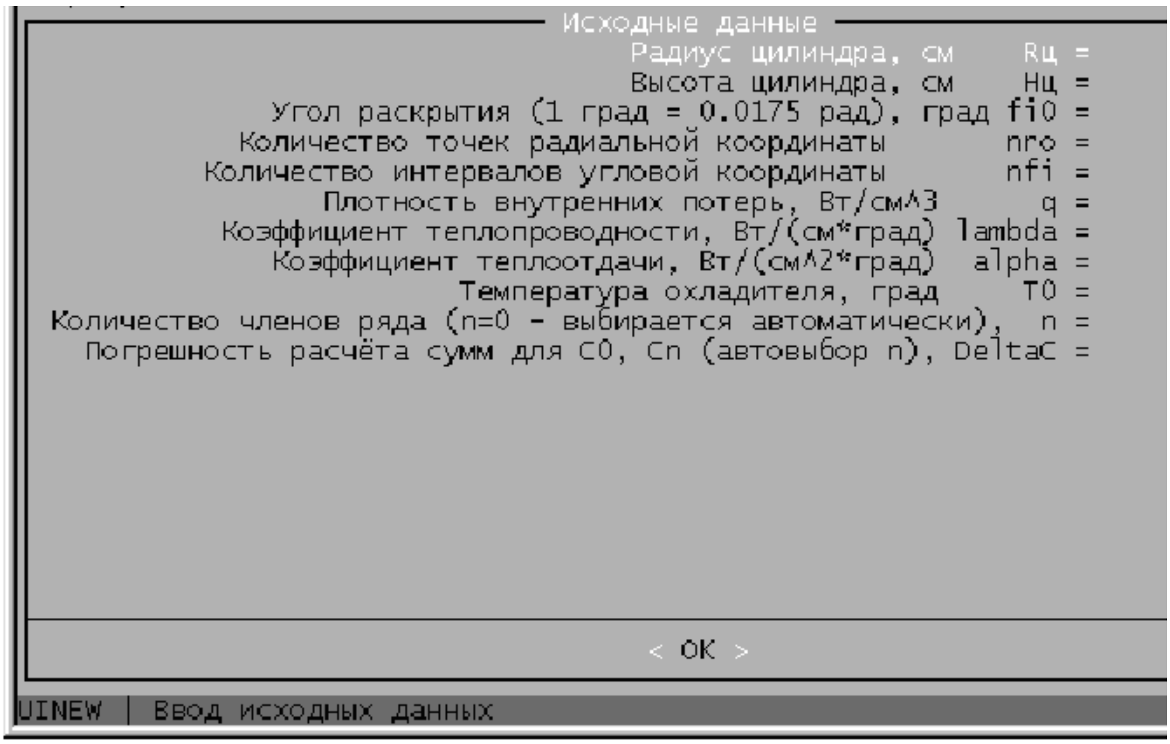
$$t\Big|_{\substack{\xi=1\\-\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0}}=\left(-\frac{1}{4}+C_0-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\varphi_0}{n^2\varphi_0}\cos n\varphi-\frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\varphi_0}{\frac{\pi^2}{\varphi_0^2}-n^2}\cos n\varphi\right)\Bigg|_{\substack{\xi=1\\-\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0}}.$$

IV. Вибір (чи розробка) алгоритму для реалізації моделі на комп'ютері. Алгоритм обчислень температури реалізується у вигляді такої послідовності.

1. Ввести значення сталих величин:
   - радіус циліндра R у (см);
   - висота циліндра h у (см);
   - кут розкриття зони охолодження на бічній поверхні φ_0 у град.;
   - кількість точок радіальної координати nr_0;
   - густина внутрішніх втрат (Вт/см^3);
   - коефіцієнт теплопровідності λ;
   - коефіцієнт тепловіддачі α;
   - температура охолоджувача T_0;
   - кількість членів ряду розкладу температури за методом Фур'є;
   - похибка розрахунків для C_0 та C_n.
2. Обчислити a за формулою (Н.19).
3. Обчислити C_0 за формулою (Н.18).
4. Обчислити C_n за формулою (Н.17).
5. Обчислити t за формулою (Н.15).
6. Обчислити T за формулою $T=\frac{R^2qt}{\lambda}+T_0$.
7. Серед значень T вибираємо найбільше та найменше.

V. Створення чи вибір програм, що "перекладають" модель та алгоритм на доступну комп'ютерну мову. Програма реалізована на алгоритмічній мові Pascal.

VI. Проведення обчислювального експерименту. Підрахуємо значення температури циліндра при різних значеннях φ_0. На рис. Н.2 подані результати обчислень при $\varphi_0 = 30^\circ$.



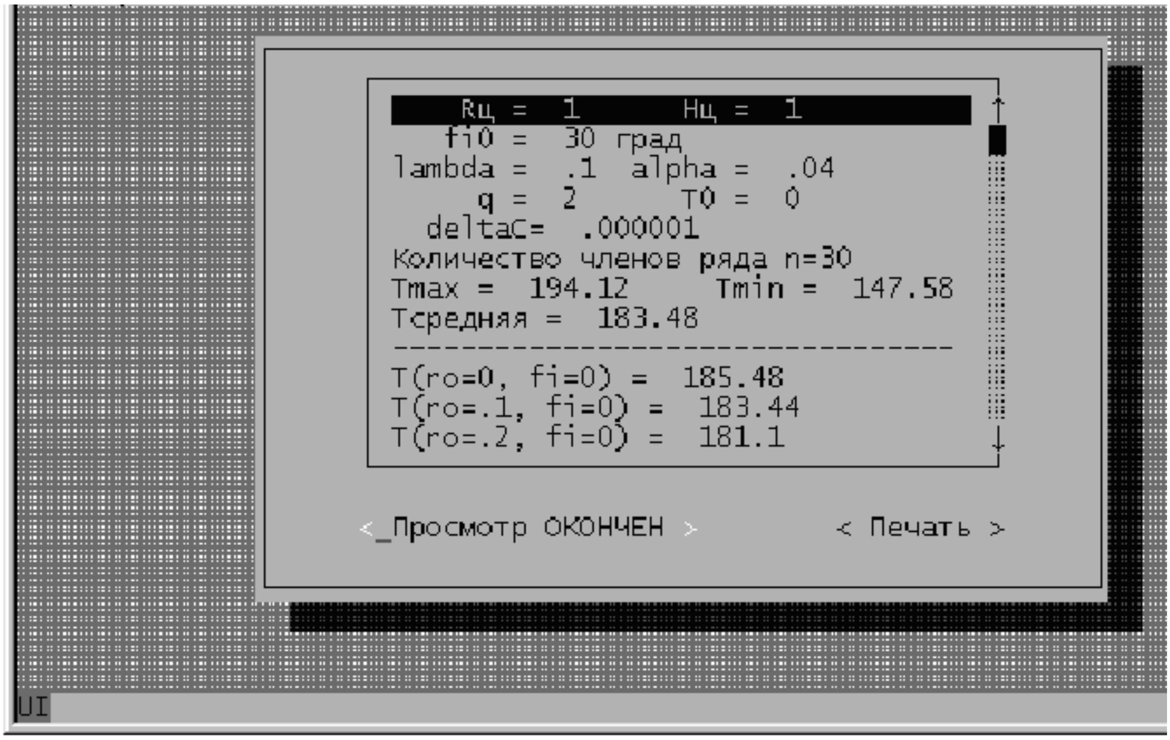


Рис. Н.2: Обчислення температури циліндра при куті охолодження $\varphi_0 = 30^\circ$

VII. Аналіз одержаних результатів та перенесення їх на об’єкт, що досліджується. В залежності від величини розкриття зони кута охолодження максимальна та мінімальна температури змінюються наступним чином: зі збільшенням кута охолодження максимальна температура зменшується, а мінімальна температура збільшується.

Одержані результати корисні для вибору ефективної схеми охолодження при проектуванні електричних машин. __

Додаток I

Зразки анкет констатуючого етапу експерименту та їх аналіз

Анкета № 1

(для вчителів)

1. Як Ви вважаєте, математичного моделювання слід навчати:
   a. в школі;
   b. в університеті;
   c. не слід навчати.
2. Які задачі розв'язуються за допомогою математичного моделювання?
3. Якою може бути евристична схема (послідовність етапів) математичного моделювання?
4. Чи відчуваєте Ви потребу в методичній літературі з питань математичного моделювання?
5. В яких підручниках для учнів і методичних посібниках для вчителів представлені ідеї математичного моделювання?
6. Створення методичної системи навчання математичного моделювання:
   a. необхідне;
   b. недоцільне;
   c. така система існує.
7. Наведіть приклад розв'язання задачі за допомогою математичного моделювання.
8. При вивченні якого навчального матеріалу зручніше всього знайомити учнів з математичним моделюванням?
9. Чи вважаєте Ви за необхідне систематично навчати учнів математичного моделювання, чи це має бути окрема тема в шкільній програмі?
10. З якого класу доцільно починати навчання математичного моделювання?

Проанкетовано 32 учителі (100 %), які дали наступні відповіді на поставлені запитання:

1. математичного моделювання слід навчати:
   a. в школі — 38 %;
   b. в університеті — 21 %;
   c. в школі та університеті — 41 %;
   d. не слід навчати — 0 %.
2. На запитання "які задачі розв'язуються за допомогою математичного моделювання" найпоширеніші відповіді:
   a. прикладні — 62 %;
   b. задачі практичного змісту — 32 %;
   c. не знаю — 5 %;
   d. некоректні відповіді:
   e. задачі на побудову та доведення — 1 %.
3. Евристичні схеми діяльності (різні за змістом та послідовністю етапів) пропонують лише близько 10 % проанкетованих учителів, решта 90 % таких схем не знають.

4. Потребу в методичній літературі з питань математичного моделювання відчувають 100 % учителів.
5. На питання про підручники для учнів та методичні посібники для вчителів переважають наступні відповіді:
   a. не знаю — 43 %;
   b. шкільні підручники з алгебри Г. П. Бевза та Г. М. Янченко, В. Р. Кравчук — 57 %.
6. Створення методичної системи навчання математичного моделювання вважають:
   a. необхідним — 82 %;
   b. недоцільним — 7 %;
   c. така система існує — 11 %.
7. Приклади розв'язування задач за допомогою математичного моделювання наводять 3 %, умови задач, які розв'язуються методом математичного моделювання — 9 %, решта проанкетованих учителів (88 %) не дають відповіді на поставлене питання.
8. Відповіді на питання "при вивченні якого навчального матеріалу зручніше всього знайомити учнів з математичним моделюванням?" вчителі дають такі:
   a. всієї шкільної математики — 43 %;
   b. теорії ймовірностей та математичної статистики — 12 %;
   c. не знаю — 17 %;
   d. залишають питання без відповіді — 28 %.
9. Систематичність у навчанні математичного моделювання вчителі вбачають таку:
   a. систематично навчати математичного моделювання в процесі навчання шкільної математики — 67 %;
   b. при вивченні окремих тем — 33 %.
10. Проанкетовані вчителі вважають, що починати навчання математичного моделювання доцільно:
    a. в початковій школі — 3 %;
    b. з 7 класу — 15 %;
    c. з 9 класу — 45 %;
    d. з 10 класу — 25 %;
    e. з 11 класу — 12 %.

Анкета № 2

(для старшокласників та студентів-першокурсників педагогічних університетів)

1. Що називається:
   a. математичною моделлю;
   b. математичним моделюванням?
2. Чи навчалися Ви математичного моделювання:
   a. в школі;
   b. в університеті?
3. Яка схема (послідовність етапів) математичного моделювання?
4. Розв'яжіть задачі:

a. Знайти об'єм цеглини, розміри якої 250 Ч 120 Ч 65 мм.
b. Дріт завдовжки 90 м розрізали на два шматки так, що другий виявився на 12 % коротший, ніж перший. Знайдіть довжини цих шматків.
c. Знайдіть звичайний дріб, чисельник якого на 2 більший, ніж знаменник і на 40 менший, ніж квадрат знаменника.
d. Швидкість тіла, яке рухається прямолінійно, визначається за формулою $v = 2t^2 + 4t$. Яке прискорення матиме тіло через 3 с після початку руху?

5. Чи можна процес розв'язування наведених вище задач назвати математичним моделюванням? Якщо так, то яких саме задач: 1), 2), 3), 4)?

Проанкетовано 195 студентів та учнів (100 %), які дали наступні відповіді на поставлені запитання:

1. На запитання "що називається математичною моделлю" опитані дали відповідь:
   - не знаю — 82 %;
   - фігура, рівняння, функція, геометрична інтерпретація — 10 %;
   - безглузді відповіді типу "усна інтерпретація фігур" — 8 %.

   Дати означення "математичного моделювання" не можуть 99 % опитаних, 1 % — дають неточну відповідь, наприклад, "за допомогою відомих даних побудова математичної моделі".
2. Всі опитані (100 %) стверджують, що математичного моделювання вони не навчалися ні в школі, ні в університеті.
3. 100 % проанкетованих не знають схем математичного моделювання: 99 % навіть не намагаються дати відповідь на запитання 3 анкети, 1 % — дають некоректні відповіді.
4. З розв'язанням задач впоралися 89 % опитаних, 4 % — розв'язали не всі задачі , 2 % — не розв'язували задачі зовсім, 3 % — допустили помилки при розв'язуванні, 2 % — розв'язали не всі чотири задачі, а лише дві, три, одну.
5. На поставлене запитання 5 відповіді проанкетованих студентів та учнів розподілилися так:
   - математичним моделюванням названо процес розв'язування всіх чотирьох задач — 43 %;
   - математичним моделюванням названо процес розв'язування першої, другої та четвертої задачі (правильна відповідь) — 13 %;
   - залишили запитання без відповіді або відповіли "не знаю" — 44 % проанкетованих школярів та студентів.

Анкета № 3

(для викладачів педагогічних університетів)

1. Що називається:
   a. математичною моделлю;
   b. математичним моделюванням?
2. Як Ви вважаєте, математичного моделювання слід навчати:
   a. в школі;
   b. в університеті;
   c. не слід навчати.
3. Які задачі розв'язуються за допомогою математичного моделювання?

4. Якою може бути евристична схема (послідовність етапів) математичного моделювання?
5. Чи відчуваєте Ви потребу в методичній та науковій літературі з питань математичного моделювання?
6. Створення методичної системи навчання математичного моделювання:
   a. необхідне;
   b. недоцільне;
   c. така система існує.
7. Чи вважаєте Ви за необхідне систематично навчати студентів математичного моделювання під час вивчення різних математичних дисциплін, чи це має бути окремий навчальний предмет (спецкурс)?
8. Коли доцільно починати навчання математичного моделювання майбутнього вчителя математики?
9. При вивченні яких математичних курсів, яким Ви навчаєте, можливо і доцільно вчити студентів математичного моделювання?
10. Наведіть приклад розв'язання задачі за допомогою математичного моделювання (бажано з дисципліни, якій навчаєте Ви).

Проаналізуємо результати анкетування за анкетою № 3 викладачів педагогічних університетів. Проанкетовано 48 викладачів, які дали наступні відповіді:

1. На перше питання дали позитивну відповідь 100 % проанкетованих. Переважають відповіді:
   - математична модель — це відображення реальної дійсності у математичних об'єктах і поняттях;
   - математичні моделі — об'єкти математики (рівняння, нерівності, функції тощо), якими описується ситуація прикладної задачі;
   - математична модель — це формалізований опис задачі;
   - математична модель — це математична структура, яка описує задану ситуацію за допомогою математичного апарату;
   - математична модель — це опис реального процесу математичними співвідношеннями;
   - математичне моделювання — процес розв'язування прикладних задач засобами математики;
   - математичне моделювання — процес створення математичної моделі.

   Наведені відповіді свідчать про те, що викладачі правильно розуміють суть поняття "математична модель", що ж до поняття "математичне моделювання", то 36 % викладачів розуміють це поняття досить вузько, вважаючи, що це — "процес створення, побудови математичної моделі". Більшість викладачів (64 %) розуміють це поняття правильно, як процес розв'язування нематематичної задачі математичними засобами.
2. 13 % проанкетованих викладачів вважають, що навчати математичного моделювання слід лише в університеті, 87 % — у школі та вузі.
3. Відповідаючи на питання 3, 94 % проанкетованих викладачів вважають, що за допомогою математичного моделювання розв'язуються прикладні задачі; 6 % дають інші відповіді, такі як, наприклад, "задачі економічного змісту най частіше, а також задачі фізичного, хімічного, біологічного, екологічного

характеру”, “задачі на складання рівнянь, геометричні задачі практичного спрямування”.

4. 100 % викладачів наводять доцільність евристичної схеми діяльності математичного моделювання. Послідовність етапів в цих схемах цілком відповідає тому, що викладачі розуміють під поняттям “математичного моделювання”. 64 % викладачів наводять таку схему:
   - Аналіз умови, переклад її на мову математики (формалізація задачі).
   - Складання математичної моделі.
   - Розв’язування складеної моделі.
   - Інтерпретація одержаних розв’язків (деформалізація задачі).

   Решта — 36 % проанкетованих викладачів, які під “математичним моделюванням” розуміють лише “процес побудови математичної моделі” наводять наступну евристичну схему:
   a. Аналіз умови задачі.
   b. Введення величин, змінних.
   c. Встановлення залежності між ними.
   d. Запис цих залежностей (відношень) за допомогою математичних співвідношень.
2. Потребу в методичній та науковій літературі з питань математичного моделювання відчувають 100 % викладачів.
3. Всі проанкетовані (100 %) вважають, що створення методичної системи навчання математичного моделювання необхідне.
4. Щодо систематичності навчання математичного моделювання думки викладачів розділилися:
   a. навчати систематично при вивченні всіх математичних дисциплін та спецкурсів — 71 %;
   b. як окремий навчальний предмет — 7 %;
   c. спецкурси — 12 %;
   d. в процесі навчання всіх математичних дисциплін, методики навчання математики та на спецкурсах — 5 %;
   e. в процесі вивчення окремої математичної дисципліни (найчастіше: теорія ймовірностей та математична статистика, дискретна математика, математичне програмування) — 5 %.
5. На запитання про початок навчання математичного моделювання проанкетовані викладачі відповідають так:
   a. зі школи — 8 %;
   b. перші курси університетів — 7 %;
   c. 4 і 5 курси університетів — 2 %;
   d. починати в школі, продовжувати в університеті протягом усього навчання — 82 %.
6. Всі 100 % проанкетованих викладачів наводили теми занять, на яких можливо і доцільно вчити студентів математичного моделювання. Це свідчить про те, що за запропонованою нами методикою навчання математичного моделюван ня зможуть ефективно працювати всі викладачі педагогічних університетів, кожний в межах дисципліни, якій навчає.

7. З завданням “навести приклад розв’язання задачі за допомогою математичного моделювання” проанкетовані викладачі впорались так:
    a. навели текст задачі та її розв’язання — 23 %;
    b. навели текст задачі — 44 %;
    c. не навели прикладу задачі — 15 %;
    d. обмежились загальними твердженнями типу “будь-яка прикладна задача” — 18 %.

Додаток J
Розрахункові дані для проведення констатуючого етапу експерименту

Для визначення мінімального об'єму вибірки *n*, який забезпечить достовірні оцінки параметрів генеральної сукупності, користувалися відомою розрахунковою формулою

$$n = \frac{t^2 w(1-w)}{\Delta^2}, \tag{J.1}$$

де Δ — задана гранична похибка, *w* — вибіркова доля досліджуваного показника, визначена за допомогою пробної вибірки, *t* — аргумент інтегральної функції Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

значення якого визначається з рівності $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$, де γ — довірча ймовірність [228].

Використання замість формули для безповторної вибірки більш простої формули для повторної вибірки, мотивується тим, що при достатньо великому об'ємі *N* генеральної сукупності відповідні значення основних характеристик цих вибірок несуттєво відрізняються одне від одного.

При проведенні пробного анкетування серед студентів було з'ясовано, що рівень досліджуваного показника (рівень знань студентів про математичні моделі та математичне моделювання) становить 3 %, тобто $w = 0{,}03$. Виберемо значення граничної похибки $\Delta = 0{,}02$, рівень надійності $\gamma = 0{,}99$. Тоді $t = 2{,}33$ і за формулою (J.1) матимемо

$$n = \frac{2{,}33^2 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}97}{0{,}02^2} \approx 394.$$

Отже, об'єм репрезентативної вибірки становить 394 чоловіки. Виходячи з загального об'єму вибірки, орієнтовно визначили кількість навчальних закладів для проведення педагогічного експерименту.

Щоб забезпечити репрезентативність вибірки, відбір об'єктів до неї (спочатку педагогічних вищих навчальних закладів III–IV рівнів акредитації, а потім експериментальних груп у цих навчальних закладах) здійснювали таким чином: початковий рівень знань і вмінь математичного моделювання в експериментальних та контрольних групах однаковий, заняття в експериментальних та контрольних групах ведуть одні й ті ж викладачі; тобто всі об'єкти сукупності мали при цьому однакові шанси бути відібраними, і відбір одного об'єкту не впливав на відбір якогось іншого [36]. Загальна кількість старшокласників, учителів, студентів та викладачів, що брали участь в констатуючому етапі експерименту, дорівнювала 483, тобто мало місце незначне перевищення числа опитаних у нашій виборці порівняно з розрахунковим.

Отже, всі умови утворення вибірки з генеральної сукупності були виконані. А це означає, що висновки, які ми одержали в результаті проведення анкетування у відібраних групах студентів та викладачів, можна з надійністю 99 % та похибкою 2 % поширити на генеральну сукупність.

Додаток К

Зрізи для контролю рівня вмінь математичного моделювання

Зразок завдання початкового зрізу.

Побудувати математичну модель задачі та розв'язати задачу.

1. Із пункту *A* в пункт *B* виїхав мотоцикліст, швидкість якого 40 км/год. Через 1, 5 год слідом за ним виїхав вантажний автомобіль, швидкість якого 60 км/год. Через який час після свого виїзду автомобіль наздожене мотоцикліста?

2. Вкладник поклав до банку 2000 грн під 11 % річних. На скільки більше від внесеної суми він зможе одержати грошей через 3 роки?

3. Є дріт завдовжки *a* метрів. Як огородити цим дротом прямокутну ділянку землі , одна сторона якої прилягає до будинку, щоб площа огороженої ділянки була найбільшою?

4. Вартість (за годину) утримання баржі складається з двох частин: вартості палива, яка пропорційна кубу швидкості баржі, і вартості амортизації баржі (заробітна плата команди, обладнання та ін.). Загальна вартість утримання баржі за годину, таким чином, виразиться формулою $S = av^3 + b$, де v — швидкість судна в км/год, a і b — коефіцієнти, задані для кожного судна.

Визначити, за якої швидкості v загальна сума утримання баржі на 1 км шляху буде найменшою, якщо $a = 0{,}005$, $b = 40$.

5. Скільки оліфи треба, щоб пофарбувати зовнішню поверхню 100 однакових відер, які мають форму зрізаного конуса, якщо діаметри основ 25 см і 30 см, твірна 27,5 см і на 1 м^2 витрачають 150 г оліфи?

Зразок завдання підсумкового зрізу.

Розв'язати задачі методом математичного моделювання та пояснити методику навчання методу математичного моделювання при розв'язанні цих задач в шкільному курсі математики.

1. Відповідно до вимог агротехніки зерно потрібно засипати на тривале зберігання при вологості 14 % (кондиційний стан). На скільки відсотків зменшиться маса зібраного зерна, що має вологість 24 %, при доведенні до кондиційного стану?

2. Скільки квадратних метрів латунного листа потрібно, щоб зробити рупор, у якого діаметр одного кінця 0,43 м, другого — 0,036 м, а твірна 1,42 м?

3. Побудувати зображення правильного восьмикутника.

4. У пунктах *A* та *B* розташовані фаянсові заводи різної потужності. На деякій відстані від них розташовані глиняні кар'єри, вивіз сировини з яких обмежений транспортними засобами, причому вартість перевезень глини від кожного кар'єру до кожного заводу різна. Як скласти найдешевший план постачання заводів глиною?

5. Температура вийнятого з печі хліба протягом 20 хвилин зменшується від 100 $^\circ$ до 60 $^\circ$. Температура повітря 25 $^\circ$С. Через який час від початку охолодження температура хліба знизиться до 30 $^\circ$С?

6. Переконатися в тому, що в інтерпретації, описаній нижче, виконуються всі планіметричні аксіоми першої групи та аксіоми другої групи системи аксіом Гільберта.

а) Точкою називається пара дійсних чисел (x,y), взятих у певному порядку.

б) Прямою називається будь-яке рівняння виду kx-$y + b = 0$ або -$x + b = 0$, де k і b — довільні дійсні числа.

в) Нехай різні точки $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$, $(x_3;y_3)$ належать одній прямій; точка $(x_2;y_2)$ називається такою, що лежить між $(x_1;y_1)$ і $(x_3;y_3)$, якщо при $x_2 - x_3 \neq 0$ $\frac{x_1-x_2}{x_2-x_3} > 0$, а при $x_2 = x_3$: $\frac{y_1-y_2}{y_2-y_3} > 0$.

Додаток L
Діагностика рівнів сформованості вмінь математичного моделювання у студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів

Табл. L.1: Частотний аналіз даних констатуючого етапу педагогічного експерименту в НПУ імені М. П. Драгоманова

№	Інтервал	Середній бал	Частота		Рівень сформованості вмінь математичного моделювання
			Значення	%	
1	0–30	19	64	31	Низький
2	31–60	47	100	48	Нижче середнього
3	61–74	65	19	9	Середній
4	75–90	77	15	7	Вище середнього
5	91–100	93	10	5	Високий

В експерименті брали участь 208 студентів. Для зручності обчислень початкову вибірку даних (кількість набраних балів за результатами контрольної роботи) згруповано в п’ять інтервалів, що відповідають п’яти рівням засвоєння вмінь математичного моделювання: низький, нижче середнього, середній, вище середнього, високий.

Середню кількість балів для кожного рівня обчислено за формулою

$$\bar{x}_i = \frac{\sum\limits_{j=1}^{k} x_j k_j}{k}, \qquad \text{(L.1)}$$

$i = 1,2,3,4,5$, де $\bar{x}_i$ — середнє значення в кожній групі, x_j — кількість балів, k_j — частота. Отримані результати представлені в табл. L.1.

Середнє вибіркове значення також обчислене за формулою (L.1) (допоміжні обчислення наведені в табл. L.2):

$$\bar{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \bar{x}_i n_i}{n} = \frac{9223}{208} = 44{,}34.$$

Дисперсію обчислимо за формулою

$$\sigma^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (\bar{x}_i - \bar{x})^2 n_i}{n} = \frac{90256}{208} = 433{,}92, \qquad \text{(L.2)}$$

середнє квадратичне відхилення дорівнює $\sigma = \sqrt{433{,}92} = 20{,}83$.

Табл. L.2: Допоміжні обчислення

$\bar{x}_i$	n_i	$\bar{x}_i n_i$	$(\bar{x}_i - \bar{x})^2$	$(\bar{x}_i - \bar{x})^2 n_i$
19	64	1225	642	41404
47	100	4692	7	706
65	19	1217	427	7990
77	15	1121	1067	15531
93	10	967	2368	24625

Сума	9223	90256

Отже, за результатами констатуючого експерименту рівні сформованості вмінь математичного моделювання розподілилися так: низький — 31 %, нижче середнього — 48 %, середній — 9 %, вище середнього — 7 %, високий — 5 %.

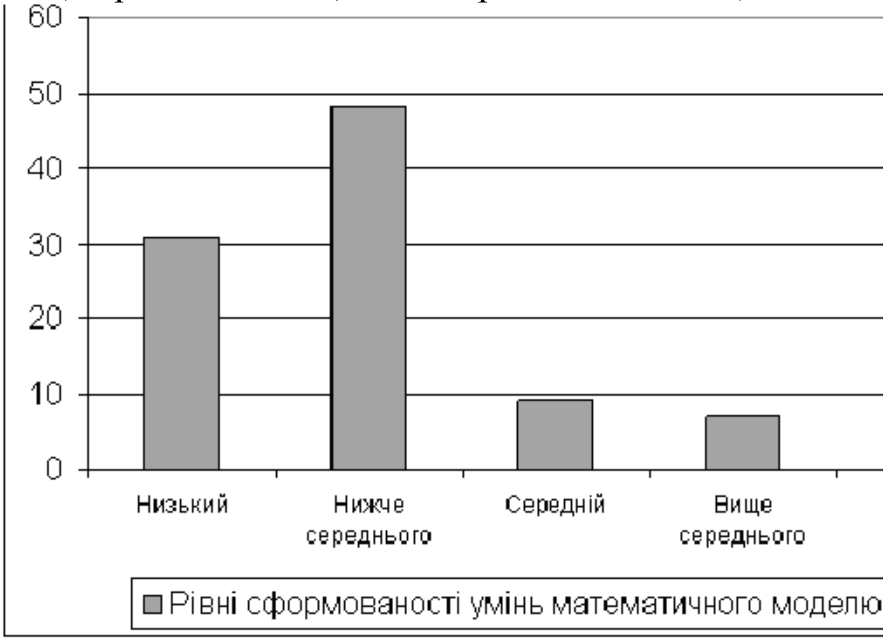


Рис. L.1: Рівні сформованості вмінь математичного моделювання студентів-випускників під час констатуючого експерименту в НПУ імені М. П. Драгоманова

Додаток М
Визначення коефіцієнтів сформованості вмінь математичного моделювання

Табл. М.1: Динаміка зміни рівнів сформованості знань, навичок і вмінь з математичного моделювання під час проведення формуючого експерименту

Вид зрізу	$\bar{K}$		$\Delta\bar{K}$		$\Delta\bar{K}/\bar{K}$	
	Е	К	Е	К	Е	К
Початковий (I курс)	0,345	0,351				
Проміжний (II курс)	0,372	0,352	0,027	0,001	0,073	0,003
Проміжний (III курс)	0,401	0,352	0,029	0	0,072	0
Проміжний (IV курс)	0,440	0,353	0,039	0,001	0,089	0,003
Підсумковий	0,488	0,355	0,048	0,002	0,098	0,006

Е — експериментальні групи, К — контрольні групи

Табл. М.2: Усереднені значення вимірюваних рівнів сформованості знань, навичок і вмінь з математичного моделювання за результатами формуючого експерименту

Вимірювані параметри	Групи	
	експериментальні	контрольні
$\bar{K}$	0,345	0,351
$\Delta\bar{K}$	0,143	0,004
$\Delta\bar{K}/\bar{K}$	0,414	0,011

Коефіцієнти сформованості вмінь математичного моделювання визначалися за формулою

$$K_i = \frac{S_i}{S},$$

де S_i — кількість засвоєних елементів знань для i-го студента, S — загальна кількість елементів знань, що міститься в запропонованій контрольній роботі. Середній коефіцієнт обчислювався за формулою

$$\bar{K} = \frac{\sum_{i=1}^{n} K_i}{n}.$$

Середнє значення приросту рівня знань, навичок та вмінь студентів кожної групи обчислювалося за формулою

$$\Delta\bar{K} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(K_{1i} - K_{2i})}{n},$$

де K_{1i} — коефіцієнт сформованості вмінь математичного моделювання, виявлений i-м студентом під час підсумкового контролю, а K_{2i} — відповідно під час початкового контролю.

Додаток N
Результати формуючого етапу експерименту

Табл. N.1: Результати формуючого етапу експерименту (за результатами початкового та підсумкового зрізів)

Вид зрізів	Кількість студентів, які виконували зрізову роботу		Кількість студентів, які впоралися із зрізовою роботою	
	Експериментальні групи	Контрольні групи	Експериментальні групи	Контрольні групи
Початковий	103	108	36 (34,5 %)	36 (34,1 %)
Підсумковий	102	103	87 (85,7 %)	66 (64,3 %)

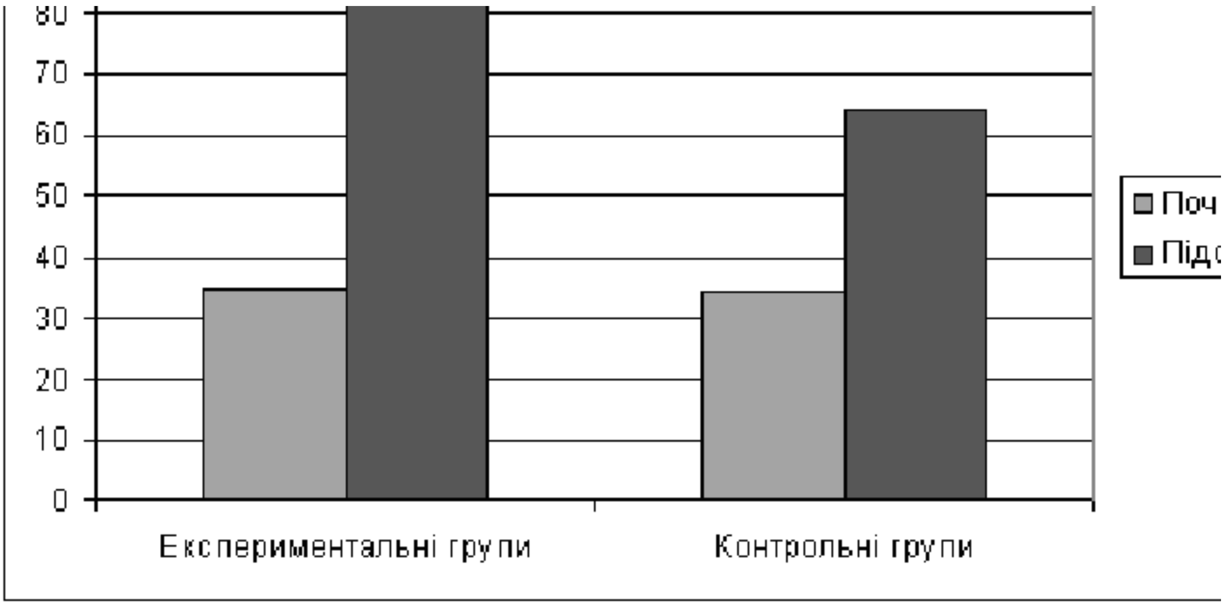


Рис. N.1: Результати формуючого етапу експерименту (за результатами початкового та підсумкового зрізів)

Додаток О
Оцінка ефективності формуючого етапу експерименту

Обчислимо середні бали в контрольній та експериментальній групах: середній бал в експериментальній групі — $\bar{x}_1 = 77$, у контрольній групі — $\bar{x}_2 = 63$. Значення дисперсій: в експериментальній групі — $\sigma_1^2 = 14{,}318$, у контрольній групі — $\sigma_2^2 = 16{,}667$.

Нульова гіпотеза формулюється на припущенні, що відхилення середніх значень випадкове, тобто

$$H_0 \colon \bar{x}_1 = \bar{x}_2,$$

альтернативна гіпотеза передбачає, що методика навчання, використана в експериментальній групі, ефективніша, тобто

$$H_1 \colon \bar{x}_1 > \bar{x}_2.$$

При такому формулюванні альтернативної гіпотези проводиться одностороння перевірка нульової гіпотези за допомогою критерію Стьюдента. Статистичною характеристикою перевірки нульової гіпотези є нормоване відхилення середніх

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}},$$

яке підпорядковане розподілу ймовірностей Стьюдента з числом ступенів свободи $k = n_1 + n_2 - 2 = 206$. Оцінка середньої з групових дисперсій становить

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2 n_i}{n_1 + n_2 - 2} = 16{,}138.$$

Тоді $t = 25{,}24$.

Критичне значення одностороннього t-критерію Стьюдента при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ та $k = 206$ становить $t_{0,95}(206) = 1{,}97$, що менше фактичного. Отже, нульова гіпотеза відхиляється. З імовірністю 0,95 можна стверджувати, що методика, використана в експериментальній групі, ефективніша.

Коефіцієнт ефективності запропонованої методики в даному випадку визначається за формулою

$$\eta = \frac{K_E}{K_k},$$

де K_E — значення коефіцієнта сформованості знань, навичок і вмінь математичного моделювання для студентів експериментальної групи за результатами підсумкового зрізу, K_k — значення коефіцієнта для контрольної групи.

Отже, за підсумками формуючого етапу експерименту коефіцієнт ефективності розробленої нами методичної системи навчання математичного моделювання студентів педагогічних університетів дорівнює

$$\eta = \frac{0{,}488}{0{,}355} = 1{,}37.$$