НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені М. П. ДРАГОМАНОВА

На правах рукопису

НАК Марина Миколаївна

УДК 373.5.016:512

ІСТОРИКО-МЕТОДИЧНИЙ АНАЛІЗ РОЗВИТКУ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З АЛГЕБРИ В ЗАГАЛЬНООСВІТНІЙ ШКОЛІ

13.00.02 – теорія і методика навчання математики

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата педагогічних наук

Науковий керівник:
Слєпкань Зінаїда Іванівна
доктор педагогічних наук,
професор

Київ – 2007

Зміст

Вступ 4
Розділ 1. **Теоретичні основи проблеми дослідження** 14
1.1.Історико-методичний аналіз як науковий метод дослідження 14
1.2.Психолого-педагогічні передумови та методичні вимоги навчання учнів методам розв'язування задач в курсі алгебри 27
1.3.Методи розв'язування алгебраїчних задач, їх роль та місце у навчанні алгебри 51
1.4.Вивчення методів і способів розв'язування задач в курсі алгебри загальноосвітньої школи 76
Висновки до розділу І 87
Розділ 2. **Історичний огляд та сучасний стан розвитку методів розв'язування алгебраїчних задач** 89

2.1. Історія виникнення та розвитку методів і способів розв'язування алгебраїчних задач 89
2.1.1. Історія розвитку методів та способів розв'язування задач стародавньої алгебри 89
2.1.2. Формування методів розв'язування алгебраїчних задач у середні віки 94
2.1.3. Розвиток методів розв'язування алгебраїчних задач (ХІХст. – 20-і роки ХХст.) 105
2.1.4. Вивчення і використання методів розв'язування алгебраїчних задач в період з 20-их років до кінця ХХст. 116
2.2. Аналіз стану використання методів і способів розв'язування задач з алгебри, алгебри і початків аналізу в сучасній загальноосвітній школі 135
2.3. Розв'язування алгебраїчних задач з використанням нових інформаційних технологій навчання 148
2.4. Організація, проведення та результати експерименту 162
2.4.1. Мета і завдання експерименту 162
2.4.2. Методичні рекомендації щодо навчання учнів методам розв'язування задач з алгебри, алгебри і початків аналізу на сучасному етапі розвитку середньої школи 170
Висновки до розділу II 194
Загальні висновки 197
Список публікацій за тематикою дослідження 200
Список використаних джерел 202
Додаток А. Анкета для вчителів та викладачів 231
Додаток Б. Анкета для учнів та студентів 232
Додаток В. Використання методу складання рівнянь при розв'язуванні задач (методичні рекомендації) 233

ВСТУП

Кінець XX – початок XXI ст. характеризуються реформуванням системи освіти, передбаченим законом України “Про освіту”. Метою реформи є підвищення інтелектуального потенціалу народу, розвиток творчої особистості учня в умовах нових технологій навчання та сучасних інформаційних технологій. Інформатизація та комп’ютеризація освіти, які є невід’ємною частиною Державної національної програми “Освіта”, передбачають і відповідний розвиток та вдосконалення системи навчання учнів розв’язуванню математичних задач.

Озброєння учнів методами та способами розв’язування задач, навчання учнів самостійному їх пошуку є зараз однією з найважливіших проблем шкільної математичної освіти.

Проблема методу завжди існувала в теорії і практиці пізнання, особливо в математиці. Досить часто успішність розв’язування певної задачі безпосередньо залежала від вибору методу чи способу її розв’язування. Загальновідомими є пошуки видатних математиків середньовіччя універсального методу, подібного до філософського каменю. Але, оскільки такого методу не існує, то оцінка можливостей та вибір найбільш простого і раціонального методу розв’язування задачі і на сьогодні залишаються непростою проблемою. В першу чергу, це стосується алгебри, як найбільш абстрактного розділу математики. Необхідність переведення умови задачі на мову алгебраїчних символів з наступною оцінкою типу задачі і можливого методу її розв’язання, ускладнюють проблему вибору цього методу чи способу.

З іншого боку, людині в своїй практичній діяльності доводиться розв’язувати багато задач. Досвід розв’язування задач та вибору найбільш вдалого методу, набутий при розв’язуванні задач в школі, буде тим більш цінним, чим більше методів і способів засвоїть учень в школі.

В різні періоди вивчення алгебри, алгебри і початків аналізу методи і способи розв’язування задач виступали на другому плані. Тому багато учнів та випускників загальноосвітніх шкіл не розрізняють понять “метод” і “спосіб”, не володіють набором основних методів і способів. Вони не в змозі оцінити тип задачі та підібрати відповідний метод чи спосіб її розв’язання.

На фоні постійних реформ загальноосвітньої школи і змін в програмах з математики проблема вивчення методів розв’язування алгебраїчних задач залишалась поза увагою методистів і вчителів-практиків. Частина з них надавали перевагу одним методам, частина – іншим. Наприклад, в підручниках з алгебри за редакцією Колмогорова А. М. частіше згадується графічний метод та ряд способів; Тихонов А. Н. у своїх підручниках наводить метод рівнянь і також графічний; а в підручниках за редакцією Башмакова Л. І. згадуються метод інтервалів та графічний.

Одні методи відходили в минуле, з'являлись і розвивались інші методи, але аналіз процесу розвитку методів до цього часу не був проведений. Відомі окремі спроби аналізу методів та способів розв'язування задач в алгебрі, але на тлі сучасних уявлень про методику і дидактику вивчення математики в загальноосвітній школі вони виглядають застарілими і неповними.

В методичній літературі відомі роботи, присвячені самому процесу розв'язування алгебраїчних задач (Балк Г. Д. та Балк М. Б. [26], Бевз Г. П. [42], Бровченко О. М. [54], Василевський А. Б. [61], Гайштут О. Г. та Литвиненко Г. М. [79], Завало С. Т. [118], Пойа Дж. [241], [242], Слєпкань З. І. [273] та ін.). Є роботи, у яких розглядається конкретний метод (Барановський В. [29], Демідов А. І. [107], Кирилецький І. М. [139], Самовол П. І. [263], Сомінський І. С. [279] та ін.), або методи і способи розв'язування певного типу задач (Зільберг Н. І. [121], Коржуєв А. В. та Богатирьова Н. Є. [162], Плужніков І. [240], Седякін В. та Філіповський Г. [265].) Роботи ж, присвячені аналізу та класифікації методів і способів розв'язування алгебраїчних задач, визначенню ролі і місця методів у шкільному курсі алгебри, невідомі.

Тому проблема методу розв'язування задач в курсі алгебри, алгебри і початків аналізу загальноосвітньої школи є актуальною, а її дослідження – потрібним і своєчасним. Необхідність цього дослідження випливає з того, що учні загальноосвітньої школи погано орієнтуються навіть серед основних методів розв'язування алгебраїчних задач. Вони не мають достатніх навичок і умінь розв'язування задач, не кажучи вже про вміння оцінити та вибрати найбільш раціональний метод для їх розв'язання.

Для ліквідації цих недоліків у системі математичної освіти слід виділити ряд основних методів розв'язування алгебраїчних задач і обов'язкових для вивчення в загальноосвітній школі. Необхідно визначити місце цих методів в курсі алгебри, алгебри і початків аналізу, розробити методичні рекомендації з вивчення основних методів та їх використання при розв'язуванні задач.

Під алгебраїчними задачами будемо розуміти задачі на перетворення виразів, доведення тотожностей, дослідження висловлень, функцій, побудову графіків, розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем, а також текстові задачі, розв'язування яких зводиться до складання рівнянь, нерівностей та їх систем, тобто всі звичайні шкільні задачі з курсу алгебри, які є у всіх шкільних підручниках.

Ефективність навчання розв'язуванню алгебраїчних задач в значній мірі визначається вибором прийомів, способів та методів їх розв'язування. Метод розв'язування задач – це сукупність прийомів розумової діяльності або логічних і математичних дій та операцій, за допомогою яких розв'язується великий клас задач. Поняття способу розв'язування задачі – вужче поняття. Це сукупність прийомів розумової діяльності або логічних і математичних дій та операцій, які використовуються у разі розв'язування окремої задачі або невеликої сукупності задач певного виду [276,86]. Загальними прийомами розв'язування задач є сукупність розумових вмінь, органічно поєднаних з методами наукового пізнання [210,154].

Попередньо проведені дослідження (анкетування учнів та вчителів загальноосвітньої школи) показують, що частина учнів (а також вчителів) не розрізняє понять "метод", "спосіб" та "прийом" розв'язування задачі. Багато вчителів у практичній діяльності використовують методи безсистемно, в залежності від своїх індивідуальних вмінь і знань. Фактично, метод у навчанні учнів математики (і, відповідно, алгебри) в навчальному процесі присутній неявно, без конкретизації назви, без визначення алгоритму або правила-орієнтиру (евристичної схеми) та його операційного складу.

Але навчання учнів методам розв'язуванню алгебраїчних задач неможливе без детального, критичного історико-педагогічного дослідження та аналізу історичної спадщини в галузі методики розв'язування задач.

У математиці в усі часи її історії продовжувалась робота по усвідомленню основних її понять та методів. При цьому ставало очевидним, що конкретні, практичні задачі (задачі, які виникли із конкретних потреб людини) при їх розв'язуванні призводять до необхідності відповідати на питання різного характеру. У першу чергу це означає необхідність філософського, методологічного аналізу основних понять математики та методики математики.

Історичний підхід у дослідженні розвитку методів розв'язування алгебраїчних задач дозволить виявити об'єктивні та суб'єктивні чинники і фактори цього розвитку, визначити історичну зумовленість цього процесу. Відповідно, це буде сприяти підвищенню рівня математичної підготовки та розвитку учнів середньої загальноосвітньої школи. Такий аналіз може сприяти пошуку подальших шляхів розвитку методів розв'язування задач. Також, на нашу думку, цей історико-методичний аналіз дозволить глибше розглянути основні методи і способи розв'язування алгебраїчних задач, які передбачаються в шкільній програмі: розглянути їх належність до алгоритмічних або евристичних, описати операційний склад цих методів та виявити несправедливо забуті методи, які в ході розвитку шкільного курсу алгебри були віднесені на другий план.

Саме історико-методичний аналіз є найбільш сприятливим для дослідження історичного розвитку та подальшої еволюції методів розв'язування алгебраїчних задач.

Упродовж історії розвитку математичної освіти, як складової системи освіти, значний внесок в психологічне обґрунтування та розвиток методів і способів та методики розв'язування алгебраїчних задач зробили такі вчені: Балк Г. Д., Балк М. Б., Бевз Г. П., Колягін Ю. М., Кушнір І. А., Пойя Д., Славська К. А., Слєпкань З. І., Фрідман Л. М. та ін. Але в історико-методичній та спеціальній літературі не було спроби аналізу самого процесу розвитку методів розв'язування алгебраїчних задач як спеціальної історико-методичної проблеми. Окремі роботи не розкривали повністю проблеми в її історичному аспекті, логіки та періодизації процесу розвитку методів розв'язування алгебраїчних задач.

Вищесказаним зумовлений вибір теми дисертаційного дослідження: “Історико-методичний аналіз розвитку методів розв’язування задач з алгебри в загальноосвітній школі.”

Тема дисертаційного дослідження затверджена Вченою радою Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова (протокол №4 від 29 листопада 2001 року) та узгоджена бюро Ради з координації наукових досліджень в галузі педагогіки та психології в Україні (протокол №1 від 29 січня 2002 року).

Об’єкт дослідження – навчання учнів алгебри, алгебри і початків аналізу в ретроспективному розвитку.

Предмет дослідження – розвиток методів розв’язування задач з алгебри, алгебри і початків аналізу в історичному аспекті.

Мета дослідження – здійснити історико-методичний аналіз розвитку методів розв’язування задач з алгебри, алгебри і початків аналізу; виявити основні досягнення і тенденції в їх розвитку, висунути методичні вимоги до сучасного використання методів та способів розв’язування алгебраїчних задач.

Гіпотеза дослідження – якщо врахувати історичні тенденції щодо навчання учнів середньої школи методам розв’язування алгебраїчних задач, а також їх операційний склад та правила-орієнтири, систематично впроваджувати традиційні і сучасні нестандартні методи та інформаційно-комунікаційні технології, то це сприятиме підвищенню якості математичної освіти, математичного і загального розвитку школярів.

Мета дослідження і гіпотеза визначають конкретні ***завдання дослідження***:

1. Дослідити історію зародження та розвитку методів розв’язування алгебраїчних задач.
2. З’ясувати стан використання методів розв’язування алгебраїчних задач в сучасній школі і роль інформаційних технологій у навчанні учнів методам розв’язування задач з алгебри, алгебри і початків аналізу.
3. На основі системного, діяльнісного і комплексного підходів розробити послідовність вивчення та операційний склад основних (таких як метод складання рівнянь, метод інтервалів, графічний метод та ін.) методів розв’язування алгебраїчних задач у середній загальноосвітній школі.
4. Розробити методичні рекомендації з використання методів розв’язування задач при навчанні курсу алгебри, алгебри і початків аналізу середньої школи та експериментально перевірити ефективність розроблених рекомендацій.

Для розв’язання поставлених завдань були використані такі ***методи дослідження:***

– системно-теоретичний аналіз проблеми як невід’ємної частини дидактики та методики математики;

– історико-методичний аналіз етапів розвитку методів розв'язування задач з алгебри, алгебри і початків аналізу у їх хронологічному порядку;
– аналіз науково-методичної літератури та періодичних видань у відповідності з метою та завданнями дослідження;
– експериментальний – проведення формуючого та констатуючого експериментів з проблеми дослідження;
– критичне осмислення ролі методів розв'язування алгебраїчних задач у підготовці учнів, студентів та вчителів в їх історичному розвитку;
– використання надбань методики математики у вдосконаленні методики навчання методам розв'язування задач з алгебри, алгебри і початків аналізу в загальноосвітній школі на основі ідеї застосування елементів історизму в навчанні алгебри.

Наукова новизна дослідження:

1. Висвітлена мало досліджена проблема – історія зародження і розвитку методів розв'язування алгебраїчних задач в загальноосвітній школі. При цьому предмет дослідження розглядається як єдине історично і соціально зумовлене ціле.
2. Вперше проаналізовано сучасний стан вивчення і використання методів розв'язування задач в курсі алгебри, алгебри і початків аналізу загальноосвітньої школи.
3. Виділено основні методи і способи розв'язування алгебраїчних задач. Запропоновано порядок їх вивчення в курсі алгебри, алгебри і початків аналізу загальноосвітньої школи, який базується на уявленнях про операційний склад методу, як сукупність операцій, дій (розумових та практичних), що до нього входять.

Теоретичне значення дослідження. Історико-методичний аналіз, як специфічний метод пізнання є необхідною умовою дослідження історично-наукової спадщини і, на його основі формування нових ідей і підходів у навчанні математики, зокрема алгебри, алгебри та початків аналізу. У роботі вперше проаналізовано і систематизовано емпіричний матеріал, починаючи від перших посилань (згадувань) на той чи інший метод розв'язування задач з алгебри, алгебри і початків аналізу до сучасних варіантів з використанням передових інформаційних (комп'ютерних) технологій.

У процесі дослідження проведена систематизація та класифікація методів , способів і прийомів розв'язування алгебраїчних задач, встановлені критерії розподілу методів на основні та додаткові (нестандартні), алгоритмічні та евристичні.

На основі аналізу дидактичних та методичних матеріалів розроблено операційний склад основних в шкільній практиці методів розв'язування задач з алгебри, алгебри і початків аналізу.

Висновки і положення, отримані в результаті дослідження, можуть бути основою для подальших історико-методичних досліджень методів розв'язування алгебраїчних задач, для визначення місця, значення і доцільності використання окремо взятого методу в шкільному курсі математики.

Практичне значення дослідження. Отримані результати і висновки сприятимуть більш продуктивному і творчому підходу вчителів та учнів загальноосвітньої школи до засвоєння і використання в практиці навчання методів та способів розв'язування алгебраїчних задач, активній і свідомій оцінці особливостей кожного з методів та вибору найбільш раціонального в залежності від специфіки завдання.

У результаті дослідження:

1. Показано, що історично-визначні задачі з алгебри не тільки активізують навчальну діяльність учнів, але і дозволяють зрозуміти та засвоїти основні методи розв'язування алгебраїчних задач.
2. Запропоновано вивчати методи і способи розв'язування алгебраїчних задач як систему, в основі якої лежать поняття операційного складу методу, алгоритму чи правила-орієнтиру (евристичної схеми).
3. Розроблено методичні рекомендації з вивчення та використання методів розв'язування алгебраїчних задач, які пройшли апробацію під час констатуючого експерименту. Ці рекомендації впроваджені в навчальний процес у ряді шкіл м. Києва, м. Чернігова та регіону.

Особистий внесок здобувача полягає у формуванні та реалізації конкретних завдань дослідження, власному підході до проблеми методу при розв'язуванні задач з алгебри, розробці порядку вивчення методів розв'язання алгебраїчних задач в загальноосвітній школі, одноосібній розробці методичних рекомендацій, апробованих в процесі педагогічного експерименту.

Апробація результатів дослідження. Матеріали дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на Міжвузівській науково-практичній конференції, присвяченій 200-річчю з дня народження М. В. Остроградського (Чернігів, 2001); Всеукраїнській науково-методичній конференції “Засоби і методи навчання фізики” (Чернігів, 2002); IX Міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 2002); II Всеукраїнській науково-методичній конференції “Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики” (Кривий Ріг, 2002); Всеукраїнському семінарі з методики викладання математики (Київ, 2002); Міжвузівській науково-практичній конференції, присвяченій 210-річчю з дня народження М. І. Лобачевського (Чернігів, 2003); Всеукраїнській науково-практичній конференції “Засоби реалізації сучасних технологій навчання” (Кіровоград, 2003); IV Всеукраїнській науково-методичній конференції “Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики” (Кривий ріг, 2004); Десятій міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 2004); Міжнародній науково-методичній конференції “Евристичне навчання математики” (Донецьк, 2005).

Експеримент проводився в загальноосвітніх школах №204 (довідка №210 від 21.10 2004), №258 (довідка №217 від 20.10.2004), №81 (довідка №261 від 21. 10.2004) м. Києва; №29 (довідка №1187 від 17.11.2006) м. Чернігова; Дягівській ЗОШ Чернігівської області (довідка №94 від 15.11.2006), Гончарівській гімназії

Чернігівської області (довідка №483 від 10.11.2006) та Павлівській ЗОШ Чернігівської області (довідка №75 від 01.11.2006).

Публікації. Результати дисертаційного дослідження відображено в 12 публікаціях, з яких 5 статей у фахових журналах, 3 статті у фахових збірниках наукових праць, 3 тези міжнародних конференцій та стаття в газеті „Математика".

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг дисертації 258 сторінок, з яких 199 сторінок основного тексту. Основний текст містить 7 таблиць на 3 сторінках та 10 рисунків на 5 сторінках. Бібліографія включає 339 найменувань.

Розділ 1
ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ПРОБЛЕМИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Історико-методичний аналіз як науковий метод дослідження

Важливе місце в науці займає проблема методу наукового дослідження. Дослідження, як і інші види діяльності, спирається на сукупність дій, операцій та прийомів, які ведуть до досягнення мети. Ця сукупність є похідною від змісту того предмета, на перетворення якого спрямована ця діяльність. Така система прийомів і називається методом.

Ефективність дослідження великою мірою залежить від того, якими засобами ми проникаємо у внутрішні механізми розвитку методів та способів розв'язування алгебраїчних задач та знаходимо пояснення закономірностей цього розвитку, тобто, якими методами проводиться дослідження [284,143]. Найчастіше в дослідженнях використовують методи:

1) вивчення і аналіз психолого-педагогічної літератури, навчальної методичної літератури, періодичних видань, архівних, теоретичних і емпіричних джерел;
2) аналітико-синтетичний метод обробки висновків і результатів у органічній єдності з принципом історичного підходу до досліджуваного явища.

В дослідженні можна застосовувати і спеціальні історичні методи: історико-порівняльний, історико-ретроспективний, історико-генетичний та історико-типологічний. За порівняльним методом передбачається аналітико-критичне зіставлення первинних фактів, відомостей, а відтак пошук існуючих закономірностей. Ретроспективний метод вивчає проблеми від нинішнього часу з орієнтуванням у минуле, від наслідку до причини, до історичних чинників, що зумовили наявну результативність. Генетичний метод розглядається як концентрація зусиль дослідника і спостереження розвитку явища від передумови до кінцевого результату. Типологічний метод забезпечує найповніші можливості для врахування специфіки рухомих динамічних систем, передбачає орієнтацію дослідження на аналіз внутрішньої структури досліджуваного явища і класифікацію його структурних елементів.

Але в науковому дослідженні будь-якого об'єкта, а саме методів та способів розв'язування алгебраїчних задач, постає важливе завдання – виявити самостійні структурні одиниці із яких він складається та зв'язки між ними, що відображають його природу. Яким чином з цих характеристик можна сформулювати закономірність, теорію або гіпотезу, які дозволять пояснити поведінку цього об'єкта в тих чи інших зафіксованих умовах. Ось це завдання і розв'язується за допомогою аналізу як особливого методу дослідження. І тому саме історико-методичному аналізу нами віддано перевагу і вибрано його при виконанні дисертаційного дослідження.

Історико-методичний аналіз розвитку методів розв'язування алгебраїчних задач являє собою специфічний науковий метод дослідження. Він дозволяє виявити історичну зумовленість, причинно-наслідкові залежності між явищами і фактами історичного розвитку методів розв'язування задач з алгебри в загальноосвітніх школах. Цей метод дослідження дозволяє також виявити конкретні історичні стани методики розв'язування алгебраїчних задач, рушійні сили, механізми і умови їх розвитку, що дає змогу встановити історичні закономірності, які визначають основні напрямки і тенденції розвитку методики розв'язування задач в цілому.

Історико-методичний аналіз, як складова історично-наукового аналізу, пройшов у своєму розвитку ряд етапів, основу яких склав перехід від жорстко детермінованої реконструкції історичного розвитку до імовірності логіки мислення, з іншими співвідношеннями між емпіричним і змістовноаксіоматичним. Класично перший етап розвитку – кумулятивний, або накопичувальний, розглядає історію науки як лінійний процес [164, 62-68]. Продовженням кумулятивної моделі є позитивізм, який розглядає історію розвитку науки як кумулятивний, поступальний, неперервний і прогресивний процес. На думку позитивістів, кожен крок науки спирається на попередні дослідження, нове знання завжди досконаліше і точніше старого. Це означає, що старі елементи наукового знання мають значення тільки тоді, коли вони відповідають новим напрямкам, все інше є непридатним. Тобто позитивізм повністю або частково позбавляє науку власної історичності.

Сучасний напрям історико-наукових досліджень визначається не тільки класичною періодизацією соціально-економічної історії людства. Чим далі від економіки віддаляється галузь знань, тим більше вона стає абстрактною, відображаючи матеріальні відносини в специфічній історичній формі [333, 176]. Відповідно, у таких випадках, знання можна отримати шляхом виходу за межі дослідних знань, при умовах глибокої впевненості в раціональності можливості пізнання світу. Усе це означає проникнення імовірнісних законів в історико-методичний аналіз: історія науки відтворюється не як жорсткий причинно-наслідковий зв’язок, а як певний потік варіантних спектрів зв’язків. Самі ж статистичні методи дозволяють виділити один із варіантів “майбутнього в дійсному”, тобто усвідомити ряд можливих розв’язків і перетворити один із них у дійсність [305, 90-97].

Історико-методичні дослідження вимагають знання методології історії і філософії, навичок дослідження документів і використання історичних джерел. Не підлягає сумніву і те, що для пізнання різних сторін історичного розвитку методів розв’язування алгебраїчних задач потрібне використання різних конкретних методик та процедур дослідження. Таким чином, дослідження повинно являти собою систему філософських і загальнотеоретичних положень [284, 141-146].

Ефективне розв’язання таких різноманітних завдань історико-методичного дослідження забезпечується використанням принципу історизму в системі з іншими принципами історичної науки. Принцип історизму є одним з важливіших методологічних принципів наукового пізнання. Він має визначене самостійне значення в методі наукового пізнання. Цей принцип виступає як „спосіб” вивчення явища з точки зору його виникнення , укріплення, а також якісних переходів з одного стану в інший та у зв’язку з конкретними умовами. Історія, що є сферою самореалізації людини, знаходить своє відображення в історичній свідомості, основним структуруючим моментом якої являється історизм. У свою чергу розвиток останнього слугує поглибленню історичного пізнання.

Історизм як категорія історичного знання, в якій зафіксована нова якісність культурно-історичного процесу, яка виникла в результаті його осмислення та інтерпретації і в той же час як форма суспільного розвитку, потребує особливої уваги. Поняття історизму та його методолого-світоглядний зміст почали активно освоюватися як теоретична проблема і прокладати собі шлях в науковий словник та суспільну лексику з середини XIX століття, але до цього часу сутність світоглядної функції історизму дуже рідко була самостійним об'єктом вивчення. Ідея історизму та її застосування для дослідження різноманітних явищ та процесів бере витоки з філософських систем Ф. Бекона, І. Гердера, І. Канта, І. Фіхте, Ф. Шеллінга. На загальну думку, пріоритет у всебічному розробленні та використанні принципу історизму в філософському дослідженні належить Гегелю. Проте останнім часом перевага надається такому визначенню "… щоб кожне положення розглядалося лише:

(α) історично;

(β) лише у зв'язку з іншими;

(γ) лише у зв'язку з конкретним досвідом історії" [184,329].

Принцип історизму розглядається як деякий підхід до історичних явищ взагалі та точка зору, яка сприяє інтерпретації історичного процесу. Він виступає як специфічний спосіб розуміння суті явищ.

Але в сучасній філософії, історії та соціології існує думка, що історизм зводиться лише до визнання послідовності подій, не пов'язаних між собою ніякими закономірностями. Відомий філософ К. Поппер в своїй роботі "Злиденність історицизму" пише, що розвиток залежить лише від зростання знань, характер яких неможливо передбачити, виходячи з попередньої історії, а тому і неможливо передбачувати майбутнє, як неможливо і передбачити відкриття. Тобто за К. Поппером історія – це хроніка політичних та суспільних подій [244,38]. І хоча історики можуть цікавитися деякими ситуаціями та тенденціями, але в дійсності вони цікавляться індивідуальними та унікальними подіями. Поппер оголошує історію хаосом індивідуальних подій, унікальних та неповторних. Він підкреслює, що в історії неможливо знайти навіть статистичну регулярність, а тим більш незмінні вічні закони.

Однак це не так. Г. Лейбніц казав: "Нема нічого більш важливого, ніж виявити джерело нового відкриття…" [195]. Історія математики містить дуже багато матеріалу для стимулювання в учнів інтересу до навчання. Екскурси в історію науки підвищують загальнокультурний рівень учнів та спонукають їх до пізнання не лише того, що відбувалося у попередні роки, але й до сучасного стану математики. Відповідно, проблемою історизму та його практичного застосування плідно займалися українські вчені-педагоги: О. Астряб, Г. Бевз, Б . Болгарский, Г. Глейзер, Б. Гнеденко, Л. Граціанська, О. Дубинчук, А. Конфорович, К. Лебединцев, Л. Лоповок, І. Тесленко.

Л. М. Фрідман в своїх роботах [299, 135] описує важливість використання історизму на уроках математики. Він твердить, що використання елементів історизму в навчанні математики, зокрема алгебри, є дуже ефективним засобом навчання і тому, якщо не використовувати його на уроках, то у багатьох учнів будуть відсутні правильні уявлення про математику, як науку та не буде знань про основні факти її історії, появи та розвитку, її сучасного стану та проблем.

Дотримання принципу історизму в навчанні алгебри забезпечить:

1. Формування в учнів розуміння умов та причин зародження і розвитку методів та способів розв'язування задач. Потрібно розкрити учням, що методи і способи змінюються та розвиваються в результаті розумової діяльності людства впродовж багатьох років. Під впливом потреб інших наук та техніки математика повинна була розв'язувати нові проблеми, створювати нові методи розв'язування задач, які збагатили саму математику.
2. Пояснення послідовності розвитку методів та способів розв'язування алгебраїчних задач. Правильне та змістовне пояснення послідовності розвитку можливе лише при широкому використанні історії самої математики як науки.
3. Створення проблемної ситуації. Найчастіше створення проблемної ситуації досягається шляхом постановки перед учнями певних задач. Але іноді більш доцільно використовувати різні факти історії математики для постановки перед учнями проблем, які дійсно виникали в математиці, а потім пояснити, як ці проблеми розв'язувались.

Сутність принципу історизму в педагогіці полягає у розумінні об'єктивної дійсності як цілого, що розвивається, як складної динамічної системи об'єктів, явищ і процесів педагогічної дійсності. Він (історизм) являється одним із компонентів діалектичного методу, що розглядає минуле, сучасність і майбутнє цих об'єктів, явищ та процесів у діалектичній єдності. Тобто принцип історизму виходить не тільки з їх динаміки і мінливості у часі, але саме з їх розвитку, тобто незворотної, спрямованої і закономірної зміни явищ та процесів реальної шкільної практики. У сучасній літературі [253,233-234] наводиться таке тлумачення принципу історизму:

- об'єктом історичного дослідження є історія, яку ми розуміємо як попередній розвиток методів та способів розв'язування алгебраїчних задач. Цей розвиток підпорядковується деяким особливим законам;
- історичний розвиток є перш за все розвиток цілепокладаючої діяльності людей, тобто методи та способи розв'язування задач є продуктом історичної діяльності науковців, вчителів, методистів. Цей розвиток виступає в формі волі, емоцій та усвідомлених або інтуїтивних цілей і є важливим фактором в історії методики математики;
- всі форми, види та прояви свідомості визначаються суспільним буттям людей, тобто вчителів та методистів в учнівському середовищі ;
- емпіричну базу історико-методичного пізнання складають факти, які побудовані на основі наукового критичного дослідження історичних та методичних джерел. Принцип історизму потребує виявлення та опису максимально повного набору фактів, які необхідні для кожного

конкретного історико-методичного дослідження;
- всі педагогічні події, ситуації та факти об'єктивної дійсності є причинно обумовлені та функціонально пов'язані;
- всі ці події, ситуації та процеси розрізняються за ступенем їх значущості та вкладу в історичний розвиток методики математики;
- виникнення, розвиток та зникнення історико-педагогічних явищ відбувається в об'єктивному просторі та часі. Процес історичного розвитку методів та способів розв'язування задач з алгебри, відбувається діалектично в специфічній історичній формі. Теоретичне пізнання історії розвитку цих методів, спираючись на факти, відтворює, відображає, реконструює та пояснює причинні та функціональні зв'язки, маючи за мету створення концептуальних схем та формулювання законів історії методики математики.

Традиційними, загальноприйнятими вимогами принципу історизму є вивчення й оцінювання усіх явищ:

а) історично, тобто в русі;

б) не ізольовано, а лише у зв'язку з іншими явищами;

в) не абстрактно, а лише у певному історичному контексті, на тлі конкретної історичної епохи [215,50].

Без сумніву, виконання усіх цих вимог забезпечить об'єктивність педагогічного пізнання.

Історизм в математиці представлений концепцією діалектичної зміни етапів історичного розвитку математичних ідей. І тому в дослідженні слід розглядати методи розв'язування алгебраїчних задач з урахуванням усіх вимог принципу історизму: крок за кроком простежувати їх розвиток, ураховувати всі супутні фактори історичної епохи, тримати в полі зору всі моменти взаємодії їх з іншими явищами. Принцип історизму потребує виділення основних етапів розвитку методів розв'язування задач, пізнання взаємозв'язку структурних елементів кожного окремого етапу, встановлення схожості та різниці між ними та механізму подальших змін.

Історичний аспект дослідження, як правило, є підґрунтям для отримання теоретичних знань, для абстрагування від конкретних форм виявлення і виведення на їх основі певних закономірностей, для перетворення фактичної інформації в логічні судження. У процесі історичної оцінки відкриттів і досягнень науки необхідно виявити їх зв'язок з попередніми поглядами і теоріями, розкрити їх ідейно-теоретичні витоки. При оцінці тих чи інших вчень слід враховувати їх значення не тільки в наш час, але і в період їх створення.

Принцип історизму вимагає єдності логічного та історичного методів пізнання в процесі дослідження розвитку методів розв'язування алгебраїчних задач. Співвідношення між логічною структурою основ математики та історичним процесом формування початкових математичних понять та методів і способів розв'язування задач не випадкове [258, 8]. Воно є прикладом появи на математичному матеріалі спільнофілософської закономірності, яка відома під назвою принципу єдності історичного та логічного. Логічний метод відтворює процес розвитку в формі його теорії, а історичний – в формі його історії. Ці методи взаємно доповнюють один одного. Використання в дослідженні історичного і логічного методів дозволяє пізнати основні суттєві ступені розвитку методів розв'язування задач з алгебри в їх конкретно історичній формі. На основі поєднання логічного та історичного методів можливо одержати конкретні і об'єктивні дані про деякі попередні етапи розвитку методів розв'язування задач навіть при відсутності достатніх емпіричних даних. Єдність і боротьба історичного та логічного є законом людського мислення [238,42-43]. У процесі цієї боротьби стара єдність розривається, а нова єдність історичного і логічного відтворюється на якісно іншій, збагаченій основі. Дуже чітко єдність і боротьба історичного та логічного проявляється у випадку, коли в історичному дослідженні аналізується процес деякого явища, в даному випадку технології розв'язування алгебраїчних задач. Розуміння суті та закономірностей історії цього процесу обов'язково змінюється, збагачується, стає повнішим, конкретнішим в міру накопичення нових знань.

Особливості кожного з етапів процесу розвитку методів розв'язування задач можна виявити за допомогою історико-методичного аналізу. Вони визначаються та встановлюються за певними об'єктивними критеріями, які і є специфічними для кожного періоду. Вихідні теоретичні твердження як про процес в цілому, так і про окремі його етапи дають можливість вирішити питання про їх генетичні зв'язки. А принцип історизму вказує, що сучасність також розвивається, тобто сучасний стан методики розв'язування задач формує майбутнє математичної освіти. Тому при застосуванні принципу історизму ми фактично враховуємо тенденції розвитку і наявність зародків майбутнього у сучасному стані методики розв'язування алгебраїчних задач.

Але принцип історизму буде ефективним не при будь-яких умовах. Є певні вимоги, дотримання яких забезпечує ефективність використання принципу історизму [215,50]:

1. Вивчати внутрішні протиріччя досліджуваних подій та явищ треба всебічно, пізнаючи їх сутність та окремі і спільні закономірності. Такий підхід дає можливість фіксувати факти історичного розвитку методів та способів розв'язування задач з алгебри та зрозуміти напрямки та тенденції їх подальшого розвитку.
2. Точне наукове доведення необхідності (в окремо взятий період) даних методів та способів розв'язування алгебраїчних задач, констатуючи також необхідність інших методів та способів, які повинні бути виведені з вже існуючих. Відступ від таких позицій не буде забезпечувати послідовного виконання принципу історизму в історичному дослідженні та приведе до серйозних методологічних помилок і упущень.

3. Принцип історизму вимагає врахування зв'язку між цілим та частинами, тобто вивчення явищ і подій у всіх взаємозв'язках та опосередкованостях. Аналіз цього взаємозв'язку дуже важливий, бо часто про ціле судять за його частинами. Тому треба виходити з цілого, аналізуючи історичне досягнення та не перебільшувати значення частини цілого.
4. Один з основних принципів методології – вимога вивчення зв'язків між самими дослідженнями та шкільною практикою. У світлі спільного підходу до проблеми співвідношення світу математичного та світу реального слід розглядати і більш вузьку проблему про співвідношення математики теоретичної та практичної. Зв'язок з практикою допоможе перевірити правильність висновків та узагальнень, бо саме практика виступає не тільки як предметно-практична і розумова діяльність вчителів та методистів, а й як мірило істинності результатів вивчення розвитку методів та способів розв'язування алгебраїчних задач.

Послідовне використання принципу історизму дозволяє набагато глибше зрозуміти єдність історичного процесу, але треба пам'ятати, що використання принципу історизму буде тим ефективніше, чим краще ми зрозуміємо зв'язок його з іншими методологічними принципами. Тобто в процесі дослідження не слід обмежуватись тільки аналізом історичних умов виникнення і розвитку методів та способів розв'язування задач з алгебри, але і, відокремивши все випадкове та другорядне, виявити найбільш істотне в цьому розвитку.

Виходячи із вимог принципу історизму, визначається і історичне значення всіх процесів та явищ у розвитку методів та способів розв'язування алгебраїчних задач. Це історичне значення найкраще оцінюється через певний проміжок часу, коли ми спостерігаємо вже і причини, і наслідки впливу даного відкриття на подальший розвиток методики розв'язування задач.

Таким чином, послідовне втілення принципу історизму в історико-методичному дослідженні – основна передумова виявлення змісту, суті та закономірності історичного розвитку методів і способів розв'язування задач.

Щоб забезпечити ефективність історико-методичного дослідження, треба утворити систему з певних принципів, на основі яких доцільно організувати науковий пошук [284,142]. До них відносяться принципи:

а) цільової спрямованості;

б) системності;

в) основного (провідного) факту;

г) історико-хронологічної послідовності;

д) врахування специфічних особливостей досліджуваних періодів;

е) оптимального поєднання історичного та логічного в науковому поясненні;

є) наступності теоретичних ідей та практичного досвіду в історичному минулому;

ж) зв’язку вивчення історії розвитку методики розв’язування задач з алгебри із загальною історією розвитку науки.

Користуючись історико-методичним аналізом, ми розглядаємо методологію математики (алгебри) як складову частину методології науки. Те, що виділяє методологію алгебри з більш загальних концепцій методології науки, визначається перш за все предметом самої алгебри. Виникнення алгебри, форми існування та розвитку її методів визначаються тим, які сторони матеріальної дійсності при цьому вивчаються. Тому, у всі часи вчені та методисти, які працюють над теоретичними проблемами математики, зокрема алгебри, постійно займаються питаннями про сутність методів, побачивши в цьому необхідну передумову подальших успіхів.

Історико-методичний аналіз розкриває різноманітні зв’язки алгебри з потребами та діяльністю людей, з розвитком інших наук, вплив економічної та соціальної структури суспільства на зміст і характер розвитку алгебри, роль особи вчених, їхніх колективів і т. д. І також, історико-методичний аналіз розкриває історичну обумовленість логічної структури сучасної алгебри, допомагає правильно зрозуміти (до певної міри) її перспективи.

Методологія математики, зокрема алгебри, має справу з великою кількістю різних груп методів. Ці групи формуються залежно від аспектів самого предмету, що робить методологію складною, як сама математика [259, 10]. Математичні методи несуть в собі риси відображених областей людського знання або об’єктивної дійсності. Приклад цього – математична логіка. В історико – методичних дослідженнях з математики, зокрема алгебри, постійно використовуються логічні елементи, тому роль математичної логіки, як основи математичних суджень, як вчення про методи та способи математичних доведень та розв’язування задач, вважається встановленою.

Метою методологічних досліджень є відшукання закономірностей в розвитку об’єкта, що вивчається, в даному випадку методів та способів розв’язування алгебраїчних задач. Для досягнення цієї мети потрібно дотримуватись таких вимог [259,11]:

– алгебра, як й інші науки, в подібних дослідженнях повинна розглядатись у розвитку. Це означає, що аналіз не зводиться до накопичення нових теорем, а включає в себе також і якісні зміни змісту. Це досягається на основі накопичення результатів та супроводжується збагаченням змісту основних понять. Означення та формули, методи та способи мають наукову значимість лише тому, що вони відбуваються у загальнолюдській практиці та правильно її відображають;
– закономірності розвитку методів та способів розв’язування задач не можуть бути виведені та сформульовані без врахування зв’язків та впливів. Розвиток тут розуміється як складна взаємодія: а) логічно послідовних побудов теоретичної математики; б) впливу виробництва та суспільної практики людей; в) взаємозв’язків з іншими галузями

науки;
- при виявленні та обговоренні закономірностей розвитку методів та способів розв'язування алгебраїчних задач повинні враховуватись, і причому не в останню чергу, філософські позиції науковців-математиків. Взаємний вплив змісту математики та ідеології є важливим аспектом у висвітленні методологічних проблем.

Взагалі, історико-методичні дослідження за змістом є теоретико-пізнавальною рефлексією в теорії методики розв'язування алгебраїчних задач. І тому на сьогодні вони є важливою умовою формування принципово нових ідей і концептуальних підходів у процесі вироблення наукового теоретичного знання.

Історико-методичний аналіз, так як і будь-який метод історичного дослідження, повинен базуватися на правильному теоретичному, світоглядному усвідомленні методики розв'язування алгебраїчних задач. Це означає, що наукову розробку проблеми потрібно тісніше пов'язати не тільки із специфікою історичного пізнання, але й з дослідженням методології суспільного пізнання в цілому. Результати дослідження суттєво залежать від методики аналізу, від того , наскільки теоретичні закономірності, принципи і методи є адекватними предмету дослідження. У цьому суть питання співвідношення методології та методики самого аналізу. Користуючись сукупністю прийомів історичного аналізу, слід з'ясувати закономірності розвитку методів та способів розв'язування задач з алгебри, виділити спільне та особливе, особливе та індивідуальне, необхідне та випадкове в цьому розвитку.

Усе викладене демонструє специфічну, самостійну роль історико-методичного аналізу як наукового методу дослідження. Слід підкреслити, що цей метод націлений на розкриття конкретних форм історичного процесу розвитку методів та способів розв'язування алгебраїчних задач у всій його складності та протиріччі.

1.2. Психолого-педагогічні передумови та методичні вимоги навчання учнів методам розв'язування задач в курсі алгебри

Процес навчання математики, зокрема алгебри, алгебри і початків аналізу , часто протікає за схемою: задача – теорія – задача. Цим виражається велика роль задач в навчанні математики. Загальновідомо, що задачі в шкільному курсі математики (зокрема в алгебрі) є і предметом, і засобом навчання [299,150]. Під алгебраїчними задачами будемо розуміти задачі на перетворення виразів, доведення тотожностей, дослідження висловлень, функцій, побудову графіків, розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем, а також текстові задачі, що зводяться до рівнянь, нерівностей та їх систем, тобто всі традиційні шкільні задачі з курсу алгебри, які є в усіх шкільних підручниках. Мислення людини, головним чином, і формується та розвивається з постановкою та розв'язуванням задач. Відомий математик-педагог Д. Пойа відмічав: "Що значить володіти математикою? Це значить уміти розв'язувати задачі, причому не тільки стандартні, але й ті, що потребують відомої незалежності мислення, здорового глузду, оригінальності, винахідливості” [242,16]. Тому навчитись розв’язувати задачі дуже важливо.

Ефективність використання алгебраїчних задач як основного засобу прищеплення школярам математичної культури та засобу навчання алгебри залежить від того, наскільки учні володіють теоретичними основами методу розв’язування, а також визначеною сукупністю розумових дій та прийомів розумової діяльності, які складають вміння розв’язувати задачі. У наш час велику увагу в педагогіці, педагогічній психології та предметних методиках приділяють цілеспрямованому розвитку мислення школярів. Цей розвиток тісно пов’язаний із формуванням загальних і специфічних розумових дій та прийомів розумової діяльності в процесі навчання (аналіз, синтез, порівняння, абстрагування, узагальнення, систематизація, класифікація, виявлення і використання аналогії та аналіз через синтез). Ці прийоми мислення також виступають і як специфічні методи наукового дослідження, які особливо проявляються під час вивчення математики, зокрема при розв’язуванні алгебраїчних задач. Для психології більш цікавим є не отримання самої відповіді, а характер дій та думок школяра, які проявляються під час розв’язання задачі. “Механізм” природи ефекту розв’язування задач, який полягає у включенні в реальний процес неперервної взаємодії суб’єкта із навколишнім світом, і складає основну проблему психології мислення. Предметом аналізу для психолога є не тільки рух самої думки, визначений основною невідповідністю між умовою та вимогами задачі, але й протиріччя всередині складу самих умов та вимог, тому що через них визначається головне протиріччя задачі, а значить і подальші шляхи її розв’язання [336,30]. Можливість своєчасно побачити і навіть передбачити ці протиріччя потребує великих зусиль від учня, але у формі такого передбачення і з’являється один із самих вдалих варіантів розв’язання даного завдання. Тому, розробляючи конкретну методику навчання учнів розв’язуванню задач, треба встановити основні розумові вміння, які можуть і повинні бути сформовані в учнів в процесі розв’язання; виділити їхні загальні методи та способи розв’язування, ознайомлення школярів з якими можливе та корисне; виділити операційний склад цих методів та способів [276]; розробити методику навчання школярів їх використанню до розв’язування задач. Цим самим буде забезпечене навчання учнів алгебрі через задачі.

Есаулов А. Ф. Відмічав, що довгий час в методичній літературі була поширена думка про те, що розв’язування задач здійснюється або шляхом використання методу “спроб та помилок”, або шляхом застосування готових правил та законів, або за допомогою побудови нової гіпотези, схеми дій (коли виявляється, що необхідні для розв’язування правила та закони відсутні) і т. д. Ця точка зору на процес розв’язування задач не враховує того, що без спроб та помилок взагалі неможливо розв’язати жодну скільки-небудь складну задачу, але характер цих спроб на різних рівнях формування знань істотно відрізняється один від одного [336,122]. Учень розв'язує задачу за допомогою послідовних спроб, а не хаотичних. Спираючись на свій попередній досвід, він уже при знайомстві із задачею відкидає частину даних, які зафіксовані в умові, як абсурдні; доповнює інші, які найбільш підходять для розв'язування даної задачі. За допомогою характерних для учня розумових спроб, він в процесі розв'язання задачі передбачає наслідки операцій з тими чи іншими початковими даними і, таким чином, відбирає одні методи та способи розв'язування і відкидає інші.

На запитання: "Що значить розв'язати задачу?" – можна відповідати по різному. Наприклад: "Розв'язати задачу – це значить знайти шукану величину або довести, що цього зробити неможливо", або: "Це значить встановити аналогії між процесами та явищами, відображеними в задачі". Фрідман Л. М. дає таку відповідь: "Розв'язати математичну задачу – це значить знайти таку послідовність загальних положень математики (означень, аксіом, теорем, правил, законів, формул), використовуючи які до умов задачі або до їх наслідків (проміжних результатів розв'язання) отримуємо те, що вимагається в умові задачі [299,153]. А Ю. М. Колягін дає таке означення: розв'язати задачу – це значить перетворити дану проблемну ситуацію у відповідну їй стаціонарну ситуацію або встановити, що таке перетворення в даних умовах неможливе [151, 14]. Ми приймаємо у нашому дослідженні трактування Фрідмана Л. М.

Відомо також, що при розв'язуванні алгебраїчних (та і математичних взагалі) задач часто використовуються методи і результати розв'язання попередніх задач. Вже при складанні плану розв'язання задачі доводиться з'ясовувати, чи не розв'язувалась аналогічна задача, чи немає можливості звести розв'язання задачі до вже розв'язаної. Також треба намагатися підмічати в задачі, яку розв'язуєш, те, що зможе згодитися і в майбутньому, при розв'язуванні інших задач. Розв'язання, знайдене в результаті своїх зусиль, або те, з яким познайомились за підручником, або те, яке підгледіли, може перетворитися в метод, в зразок, за яким з успіхом можна працювати при розв'язуванні інших задач. Навіть Р. Декарт писав: "Кожна розв'язана мною задача ставала зразком, який слугував згодом для розв'язування інших задач" [106,274]. Порівнюючи задачу з розв'язаними раніше схожими задачами, учні виявляють їх спільність та різницю, краще засвоюють ідею розв'язання даної задачі, глибше пізнають методи розв'язування класу схожих задач і таким чином готуються до розв'язання наступних задач.

В дослідженні ми намагаємося показати найбільш ефективні та раціональні шляхи використання методів та способів розв'язування алгебраїчних задач в практиці навчання. Під методами та способами розв'язування задач ми розуміємо деякі приписи, вказівки про способи дій людини, які треба зробити, щоб розв'язати дану задачу [274,125]. Зазначимо, що існує принципова різниця між методами розв'язування задач та методами навчання розв'язуванню задач. Методи розв'язування – це способи дій тих, хто розв'язує; методи навчання розв'язуванню – способи дій учителя, який навчає учнів розв’язувати задачі [39,72]. Часто ці поняття або ототожнюють, або замінюють одне іншим, що не сприяє активному і свідомому засвоєнню матеріалу. Відповідно, учитель повинен орієнтуватися як у методах розв’язування задач, так і методах навчання розв’язанню.

Отже, метод взагалі – це сукупність дій та порядок їх виконання, для досягнення певної мети. Метод розв’язування алгебраїчних задач – сукупність математичних і логічних дій та порядок їх виконання, призначених для розв’язання великого класу задач.

Вміння розв’язувати задачі – це дуже складний комплекс, до складу якого входять активно діючі математичні знання (та відповідні їм спеціальні вміння і навички), досвід в застосуванні знань та розумові вміння, які розглядаються як визначена сукупність сформованих властивостей мислення, які проявляються в процесі розв’язання задач [153,4]. Основна складність при розв’язуванні задачі полягає в знаходженні розв’язання, а не в здійсненні його. В результаті розв’язування кожної задачі відбувається не одна будь-яка зміна (наприклад, набуття вміння розв’язувати задачі даного виду, розвиток мислення, уяви і т. д.), а різного виду зміни в знаннях, вміннях, здібностях, розвитку особистості, світогляду і т. д. Формування вміння розв’язувати задачі забезпечує учням продуктивну та творчу діяльність в ході розв’язування задач, що сприяє підвищенню ефективності і якості виховуючого та розвиваючого навчання математиці.

Виділимо такі основні вміння по розв’язуванню задач:

1. Вміння аналізувати текст задачі:
   а) вміння виділяти в тексті умову та запитання (вимогу);
   б) вміння коротко записувати умову і вимогу задачі;
   в) вміння застосовувати малюнки, креслення та ін.
2. Вміння проводити пошук методу чи способу розв’язання задачі:
   а) вміння усвідомлювати всі елементи задачі;
   б) вміння виділити співвідношення між ними;
   в) вміння встановити повноту даних;
   г) вміння скласти математичну модель задачі.
3. Вміння реалізувати знайдений метод чи спосіб розв’язування задачі:
   а) вміння вибирати раціональний метод чи спосіб розв’язання з усіх можливих;
   б) вміння викласти мовою математики знайдений спосіб.
4. Вміння аналізувати знайдене розв’язання:
   а) вміння здійснити перевірку знайденого розв’язання;
   б) вміння працювати з розв’язком (уточнення, перевірка);
   в) вміння знаходити інший метод чи спосіб розв’язання;
   г) вміння складати нові задачі [255, 24].

З. І. Слєпкань [274,128] відмічає, що до складу розумової діяльності із розв’язування задач входять як загальні розумові дії (аналіз, синтез, порівняння , абстрагування, узагальнення, конкретизація, класифікація, систематизація, встановлення та використання аналогій), так і специфічні розумові дії, які характерні для розв'язування задач (підведення під поняття, виведення наслідків, переосмислення елементів задачі, встановлення істотних зв'язків) та логіко-математичні, за допомогою яких той, хто розв'язує задачу, логічно перетворює математичний матеріал. При цьому самі учні виконують умовиводи індуктивного та дедуктивного характеру, за аналогією, за інтуїцією з наступним обґрунтуванням або спростуванням цих умовиводів.

До властивостей творчої особистості, які сприяють навичкам і вмінням розв'язування задач Скафа О. І. відносить [272, 136]:

1) здатність до формалізованого сприймання умови задачі;
2) здатність до швидкого і широкого узагальнення математичних об'єктів, відношень і дій;
3) здібності до згортання процесів мислення, здатність мислити згорнутими (узагальненими) структурами;
4) гнучкість процесів мислення, здатність швидкої і вільної їх перебудови, переключення ходу мислення з прямого на зворотній, переходу від однієї розумової операції до іншої;
5) прагнення до ясності, простоти, економності і раціональності розв'язань;
6) пам'ять і стійкість мислення. Здатність запам'ятовувати схеми доведень, принципи підходу, загальні правила, методи розв'язування типових задач.

Одним із показників математичних здібностей учнів є швидкість і ефективність зміни мислення від прямого до зворотного. Ефективність знаходження розв'язання зростає, якщо [100]:

а) алгоритм, правило-орієнтир(евристична схема) і умова задачі виражені в одних і тих же одиницях;

б) задані і невідомі величини в задачі наближені настільки, що інтервал між ними повністю заповнюється шуканим розв'язанням.

Активність розумової діяльності в процесі розв'язування задачі зростає при дотриманні наступних умов:

а) учень при вивченні теоретичного матеріалу одночасно виконує конкретне завдання, яке допомагає глибше зрозуміти даний матеріал;

б) це завдання спрямовує зусилля учня на використання певних прийомів розумової діяльності;

в) учень володіє знаннями, необхідними для виконання цієї задачі, вміннями застосовувати прийоми розумової діяльності;

г) ці прийоми відповідають змісту матеріалу і, чим в більшій мірі, тим більше активізують діяльність;

д) зміст задачі не є дуже легким.

Розглянуті групи закономірностей дозволяють здійснювати педагогічне керівництво діяльністю учнів в процесі розв'язування задач.

Взагалі, процес розв’язування задачі можна розділити на декілька етапів. Есаулов А. Ф. дає вісім етапів розв’язування задачі [336,29]:

1) аналіз задачі;
2) схематичний запис задачі;
3) знаходження методу або способу розв’язування задачі;
4) здійснення розв’язання задачі;
5) перевірка розв’язання задачі;
6) дослідження задачі;
7) формулювання відповіді задачі;
8) аналіз розв’язання задачі.

За Ю. М. Колягіним [152,15], розв'язування кожної математичної задачі здійснюється в чотири етапи:

1) усвідомлення умови і вимоги задачі, засвоєння і розробка окремих елементів умови;
2) складання плану розв'язання;
3) практична реалізація плану у всіх його деталях;
4) аналіз одержаного розв'язання.

Л.М.Фрідман [299,76] вважає, що діяльність щодо розв'язання задач складається з трьох компонентів:

1) орієнтовна (аналіз задачі та пошук плану розв’язання);
2) виконавча (здійснення плану розв’язання);
3) контрольно-корекційна (перевірка та аналіз розв’язання).

При цьому провідною, головною частиною, без сумніву, вважається орієнтовна, яка накреслює план, спосіб розв'язання задачі.
В посібнику З. І. Слєпкань запропоновано такі етапи процесу розв’язування задачі [274,128]:

1) аналіз формулювання задачі;
2) пошук плану розв’язання;
3) здійснення знайденого плану, перевірка та доведення того, що отримане розв’язання задовольняє вимогам задачі;
4) Обміркування (аналіз) проведеного розв’язання.

Ми будемо дотримуватись етапів, які запропоновано З. І. Слєпкань.

Розглянемо ці етапи докладніше.

І-й етап – аналіз умови. Не можна приступати до розв’язання задачі, не зрозумівши чітко, в чому полягає завдання, тобто, не визначивши, що дано в задачі, що треба знайти, які початкові умови і які висновки з них. Не треба поспішати розв’язувати задачі. Ця порада не означає, що задачу слід розв’язувати якомога повільніше. Порада означає, що процесу розв’язування повинна відповідати попередня підготовка, яка полягає у виконанні певних необхідних процедур:

а) спочатку слід ознайомитись із задачею, уважно прочитати її формулювання. При цьому охоплюється загальна ситуація, описана в задачі;

б) після ознайомлення із задачею необхідно вникнути в її умову. При цьому слід виконувати наступну пораду: виділити в задачі дані і шукані невідомі, а в задачі на доведення – посилання і висновки;

в) якщо можливо, то зробити рисунок (тобто записати умову задачі за допомогою малюнку, графічно або таблично) і позначити на ньому всі дані та невідомі величини;

г) в тому випадку, якщо дані або шукані величини не позначені, слід ввести зручні позначення. Наприклад, при розв'язуванні текстових задач вводять позначення шуканих або інших змінних, прийнятих за шукані;

д) вже на першій стадії розв'язання задачі, стадії аналізу, бажано відповісти на запитання: "Можливо чи ні розв'язати задачу при заданих умовах ?" Не завжди вдається одразу дати відповідь на це питання, але інколи це можливо зробити. Відповідаючи на це питання, корисно з'ясувати, чи однозначно сформульована задача, чи не містить вона надлишкових або несумісних даних. При цьому встановлюють, чи достатньо в умові даних для розв'язання.

ІІ-й етап – пошук плану розв'язання. Цей етап полягає у складанні плану розв'язання, що є, напевне, головним кроком на шляху до отримання кінцевого результату. Правильно складений план майже гарантує правильне розв'язання задачі. Але складання плану може виявитися складним і тривалим процесом. Тому необхідно пропонувати учням додаткові питання і поради, які допоможуть їм швидше і краще скласти план розв'язання задачі, цим самим визначивши метод її розв'язання. Розглянемо найбільш типові і уживані підготовчі питання, які можуть підвести учнів до результату:

а) чи відома вам яка-небудь подібна, аналогічна задача(тобто схожа із раніше розв'язаною)? Якщо така задача відома, то складання плану розв'язання не буде важким. Іншими словами, слід перевірити, чи не можна до даної задачі застосувати метод зведення до раніше розв'язаних. Але такий хід не завжди результативний (не завжди вдається знайти подібну задачу з відомим планом розв'язання). В такому випадку буде корисною наступна порада;

б) подумайте, чи відома вам задача, до якої можна звести задану? Якщо така задача відома, то шлях складання плану розв'язання даної задачі очевидний: звести розв'язувану задачу до розв'язаної раніше. Може виявитись, що і споріднена задача учням невідома і звести дану до деякої відомої не вдається;

в) наступна порада: спробуйте сформулювати задачу по-іншому. Тобто переформулювати задачу, не змінюючи її математичного змісту. При переформулюванні задачі може бути використана заміна термінів їх означеннями або їх ознаками чи достатніми умовами. Слід зазначити, що вміння переформульовувати текст задачі є показником розуміння математичного змісту задачі.

Деякі автори відносять до переформулювання і переклад задачі на мову математики: тобто алгебри, геометрії чи аналізу. Але ця процедура є скоріш за все формалізацією або “математизацією” задачі. До такого прийому часто звертаються при розв’язуванні текстових задач;

г) при складанні плану розв’язання задачі може бути корисною наступна порада: “Спробуйте перетворити дані або шукані невідомі”. Часто перетворення даних або шуканих сприяє більш швидкому складанню плану розв’язання. При цьому перетворення проводять так, щоб шукані наблизились до даних, а дані, відповідно, до шуканих величин. Тоді при кожному тотожному перетворенні відбувається наближення шуканих величин до даних. Наприклад, рівняння, систему рівнянь, нерівність або систему нерівностей перетворюють у рівносильні, щоб знайти їх корені або множину розв’язків;

д) може статись, що попередні поради і рекомендації не приведуть до складання плану розв’язання. Тоді слід скористатися такою порадою: “Спробуйте розв’язати лише частину задачі”. Іншими словами слід до задачі застосувати метод аналізу і розбити дану задачу на частини, а потім звести ці частини методом синтезу;

е) коли план розв’язання не вдається скласти, слід задати питання: “Чи всі дані задачі використані?”. Виявлення неврахованих даних задачі полегшує складання плану її розв’язання;

є) корисним може бути виконання ще однієї рекомендації. Необхідно проаналізувати, для якого окремого випадку можливо достатньо швидко розв’язати цю задачу. Виявивши такий окремий випадок, переходять до нової мети – використати цей частковий розв’язок для пошуку більш загального (не обов’язково самого загального) випадку.

ІІІ-й етап – здійснення знайденого плану (безпосередньо розв’язання задачі). Складений план вказує (описує) лише загальний контур розв’язання задачі. При реалізації плану необхідна деталізація всіх елементів, які вписуються в цей контур. Ці деталі слід розглядати уважно і терпляче. Корисним буде при цьому виконання наступних порад:

а) перевіряйте кожен свій крок, впевнюйтесь, що він зроблений правильно. Іншими словами, необхідно доводити правильність кожного кроку посиланнями на відповідні, раніше відомі математичні факти і твердження;

б) замініть терміни і символи їх означеннями. Наприклад, термін “границя числової послідовності” при доведенні правила, що границя суми двох послідовностей, що мають границі, рівна сумі границь цих послідовностей , можна замінити його означенням.

IV-етап – перевірка і аналіз правильності розв’язання задачі. Навіть досить здібні учні, одержавши розв’язок і виклавши хід розв’язання, вважають задачу вже розв’язаною. Але одержання результату ще не означає, що задача розв’язана правильно. Тим більше, позитивний результат не означає, що для розв’язання вибрано кращий, найбільш раціональний метод або спосіб. За В. М. Брадісом задачу можна вважати розв’язаною, якщо знайдене розв’язання: а) безпомилкове; б) обґрунтоване; в) має вичерпний характер [53].

Тому аналіз розв'язання задачі, перевірка розв'язання і достовірності розв'язку повинні бути обов'язковим етапом процесу розв'язування задачі. Відповідно, дві наступні поради: "Перевіряйте хід розв'язання", "Перевіряйте результат". При цьому перевірка розв'язання може проводитися різними способами. Перевіряючи хід розв'язання, тим самим ще раз впевнюються у правильності результату.

Один із способів перевірки одержаного розв'язку полягає в одержанні тієї самої відповіді, застосовуючи інший метод або спосіб розв'язування. Тому корисно задавати учням питання : "Чи не можна отриманий розв'язок одержати іншим способом?". Іншими словами, доцільно сформулювати ще одну пораду: "Розв'яжіть задачу іншим методом або способом". Якщо при розв'язанні задачі іншим способом одержиться той самий результат, що і в першому випадку, задачу можна вважати розв'язаною. Далі можна зробити аналіз, який із методів чи способів є найраціональнішим у даному конкретному випадку. Розгляд і одержання різних варіантів розв'язання однієї і тієї задачі мають до того ж важливе навчаюче значення.

Особистість учня – головний ціннісний орієнтир у діяльності школи. Навчаючи, вчитель повинен бачити в учневі особистість, розуміти всю складність і багатогранність її структури, враховувати вікові особливості, виявляти в учня спадкові та набуті нахили, здібності і можливості, створювати максимально сприятливі умови для їх розвитку. Раніше були проведені дослідження вікових особливостей математичного мислення школярів. Л. М. Проколієнко виявила певні особливості міркування підлітків та старших школярів в процесі розв'язування задач та встановила, що: учні VI класу відрізняються репродуктивним підходом до розв'язування задач, а VII класу – творчим; учні IX класу міркують індуктивним способом і мислення їх розгорнуте, а учні X класу частіше використовують дедуктивний метод та прагнуть міркувати в скороченій формі [252,304].

Молодший і середній підлітковий вік є етапом великих інтелектуальних можливостей і пошуків. У цей період інтенсивно розвиваються всі психічні процеси (увага, сприймання, пам'ять, мислення і ін.), відбувається становлення позитивних властивостей особистості (розумова активність, пізнавальна самостійність, саморегуляція) та рис характеру (чесність, правдивість, наполегливість, інтелектуальна витримка, працездатність та ін.). Також підлітковий вік, за висновками психологів і дидактів, є сприятливим для опанування абстрактними алгебраїчними поняттями, для розвитку продуктивного мислення, розумової активності. Для підлітків провідним є наочно-образне мислення, яке наближається до оперування образами-категоріями, тому саме візуальне мислення може виступити містком, який забезпечить ґрунтовне навчання математики на основі залучення і функціонування обох півкуль головного мозку. На цьому етапі навчання з'являються об'єктивні умови для підвищення теоретичного рівня навчання курсу алгебри, алгебри і початків аналізу та його практичного застосування.

Тому в цей час на уроках необхідно формувати в учнів потребу в доведеннях, навчати їх методам доведень та методам і способам розв'язування задач. Причому одночасно із вивченням методу слід усвідомити його операційний склад, чітко формулювати його алгоритм або правило-орієнтир. Також дуже важливо навчити учнів загальному підходу до розв'язування задач. Л. Н. Ланда в своїй роботі "Алгоритмизация в обучении" відмічає, що учні "при вивченні математики мають знання про зміст учбового матеріалу – знають теореми та правила, але не знають загальних методів розв'язування задач, не володіють необхідними в даному випадку прийомами міркування…" [177,27].

Загальновідомо, що в ході розв'язування задач можливо природнім способом сформувати у школярів елементи творчого мислення поряд з реалізацією безпосередніх цілей навчання математики. Формування в школярів інтересу до розв'язування алгебраїчних задач є важливим засобом формування у них інтересу до алгебри та взагалі до всієї математики і до її вивчення, а також разом з тим ефективним засобом залучення учнів до учбової діяльності творчого характеру.

До засобів, які сприяють мотивації учнів при розв'язуванні алгебраїчних задач і вивченні методів їх розв'язання, можна віднести:

1) оригінальні, цікаві, нестандартні, парадоксальні задачі;
2) незвичну форму викладу, виділення проблемних ситуацій;
3) аналіз життєвих, практичних ситуацій;
4) уміле поєднання заохочень і покарань;
5) спрямованість на самостійне виконання навчальних дій;
6) спеціальні задачі, спрямовані на формування загального, алгоритмічного підходу до їх розв'язання, задачі які вимагають творчості та уяви;
7) ситуаційні задачі, спрямовані на усвідомлення і закріплення мотивів. Ситуації вибору сприяють формуванню вмінь і навичок приймати рішення, зважувати всі "за" і "проти" і вибирати спосіб чи метод розв'язання, відповідний до ситуації.

На етапі мотивації необхідно поєднувати індивідуальні та групові форми роботи, включати мотиваційні задачі у домашні завдання безпосередньо перед вивченням нової теми. Аналіз цих завдань (вдома і в класі) буде сприяти формуванню позитивних мотиваційних факторів.

Формування стійкої, цілеспрямованої мотивації слід проводити поетапно, у відповідності з етапами аналізу і розв'язання задачі.

На початковому етапі враховуються попередні види прагнень учнів: виділити те, що учні добре засвоїли, виділити і поставити перед учнями нові проблеми, вказати можливі способи їх розв'язання.

Наступний етап – закріплення і підсилення мотивації, яка виникла. Тут можливо використовувати як соціальні мотиви (диференціація завдань, різні способи співробітництва на уроці), так і пізнавальні (співставлення різних методів і способів розв'язування задач, їх аналіз). Для підтримання мотивації важливо чергувати різні види навчальної діяльності (усний аналіз, письмові завдання, індивідуальні і фронтальні).

Можливі різні підходи до опису процесу розв'язування задач. Інтерес становить проблема співвідношення інформаційних та мотиваційних компонентів, які включені до реального руху думки на шляху до розв'язання. Вірогідність успіху при розв'язанні задачі визначається швидше за все запасом інформації, яку має учень в даній області діяльності. При розв'язуванні задач сама складність задач виступає для учня як ціннісний критерій. Коли дитина співвідносить свою самооцінку з оцінкою класу, то вона вважає, що досягнення успіху при розв'язуванні легких задач не є показником її особистої майстерності. Чим важча задача та чим більше розв'язань цієї задачі знайде учень, тим більш цінне досягнення успіху. Взагалі, в основі активної пошукової діяльності з розв'язування задач лежать різні види мотивацій. Єдність різних мотиваційних факторів – потреба у новизні та потреба в досягненні мети, у виявленні своїх сил через розв'язання задачі все більш високого рівня складності – приводить до того, що пошук інформації починає формулюватися як спеціальне завдання, виконання якого пов'язане не просто з споживанням, але і з створенням нового [172].

Довгий час знання та уміння в психології розглядали як результат навчання та життєвого досвіду людини. Такий підхід був поширений в галузі психології пам'яті, тому дане розуміння набутих людиною знань дуже заважало постановці експериментальної роботи з виявлення особливостей процесу розв'язування різного типу задач. В цьому напрямку працював угорський психолог Л. Секкей. Він дійшов висновку, що є деяке "вихідне знання", від якого істотно залежить характер підходу до задачі [266,343]. Різноманітні шляхи зіткнення різнорідних систем знань та способів діяльності, їхні складні форми спільного перетворення – це результат та наслідок розв'язування задач, які будуються з опорою на раніше придбані знання та способи діяльності. Високий ступінь одночасної міцності та рухливості знань – це своєрідне вміння ними користуватися.

Зараз все більше уваги приділяється розвивальному навчанню. Вчителі прагнуть сприяти творчій роботі учнів, стимулюють їхню допитливість, пропонуючи застосовувати набуті знання у нестандартних умовах. Враховуючи індивідуальні відмінності школярів у процесах мислення, сприймання, запам'ятовування, треба звернути увагу на диференційоване навчання.

Думку про необхідність диференційованого підходу до навчальної діяльності учнів висловлював В. О. Сухомлинський: "До кожного учня необхідно підійти, побачити його труднощі, кожному необхідно запропонувати тільки йому призначене завдання"[188]. В наш час диференціація проявляється по різному. Про це свідчить і виникнення нових типів начальних закладів, і виділення в школах класів різних рівнів та різних напрямків. Разом з тим у нинішніх умовах внутрішньокласна диференціація має в процесі навчання не менш важливу роль.

Орієнтація системи освіти на розвиток особистості, реалізація навчально-пізнавальної діяльності учня неможливі без диференціації навчання. Вона спрямована як на реабілітацію відстаючих у навчанні учнів, так і на стимулювання їх навчально-пізнавальної діяльності [188, 18-22]. Основне призначення диференційованого навчання полягає у тому, щоб, знаючи і враховуючи індивідуальні відмінності у навчальних можливостях школярів, забезпечити для кожного з них оптимальний характер пізнавальної діяльності у процесі навчальної роботи. При цьому важливо надати кожному учню способи здобування знань.

Учні об’єктивно відрізняються характером розумової діяльності, пам’яттю, здібностями, швидкістю мислення і т. п. Тому мають місце ситуації, коли частина учнів знає хід і спосіб розв’язання задачі, в той час, як більшість учнів класу тільки починає осмислювати зміст задачі. Відповідно потреби в допомозі, консультаціях при вибору методу чи способу розв’язання у різних учнів різні. Психологи виділяють три рівні вміння розв’язувати задачі [188]:

а) низький рівень. Сприйняття задачі учнем неповне і поверхневе. Учень виділяє із умови задачі розрізнені поодинокі дані, часто несуттєві для розв’язання. Учень не може і не намагається передбачити хід розв’язання. Можлива ситуація, коли, не зрозумівши змісту задачі, учень починає її розв’язувати, просто маніпулюючи даними;

б) середній рівень. Сприймання задачі супроводжується її аналізом, учень намагається зрозуміти задачу, виділити дане і шукане, але здатен встановити між ними тільки окремі зв’язки. Через відсутність системи зв’язку між даними задачі і невідомими існує імовірність вибору помилкового шляху розв’язання. Ця імовірність зростає при розгалуженні зв’язків між відомими і невідомими величинами;

в) високий рівень. На основі повного аналізу умови задачі учень формулює закінчену систему зв’язків між даними задачі та шуканим. Це дозволяє йому сформувати план (алгоритм) розв’язання задачі. Учень здатен самостійно визначити різні методи та способи розв’язування задачі та вибрати серед них найбільш раціональний.

Відповідно, організація роботи учнів на уроках повинна враховувати можливості учнів. Рівневий підхід можливо реалізувати двома способами. За першим учням пропонуються різні завдання, тобто завдання різної складності, у відповідності до теми, яка вивчається. За другим клас розв’язує одну і ту ж задачу, але рівень вимог до розв’язування і самого розв’язання задається у варіантах, відповідно до рівня умінь і навичок розв’язування. На цьому етапі ефективним буде використання карток-завдань.

Другий спосіб є більш сприятливим в плані організації навчально-пізнавального процесу: можливість повноцінної організації зворотного зв’язку учень-учитель; практично в реальному масштабі часу виявляються труднощі і сумніви, підтверджується або відхиляється хід розв’язання; кожен учень має можливість побачити і оцінити діяльність більш високого рівня, ніж той, за яким він працював.

Основний засіб, який використовується при диференційованому навчанні , зокрема математики, є диференційовані завдання. Сукупність диференційованих завдань можна звести до груп: диференціація за ступенем складності завдань і диференціація за ступенем самостійності учнів. Способи використання диференційованих завдань відрізняються своєю навчальною метою та місцем в структурі уроку. Спільним для них є те, що всі диференційовані завдання повинні передбачити засвоєння всіма учнями визначених програмою методів і способів розв'язування алгебраїчних задач з переходом від простіших до складніших задач.

Деякі автори пропонують диференціацію змісту навчальних завдань за рівнем творчості, за складністю і за обсягом. За рівнем творчості пізнавальна діяльність учнів може бути продуктивною і репродуктивною. До репродуктивної діяльності відноситься розв'язування задач за відомим алгоритмом, відтворення знань у відомих ситуаціях. Продуктивна діяльність передбачає застосування знань в нових ситуаціях, створення нових продуктів, пошук найбільш раціональних методів та способів розв'язання, розв'язування нестандартних завдань.

Диференціація самої навчально-пізнавальної діяльності учнів може визначатися такими критеріями:

ступенем самостійності учнів;

характером допомоги учням;

формою навчальної діяльності.

Способи диференціації, а також самі завдання, можуть визначатися залежно від собливостей груп, на які поділений клас.

Зміст навчальних матеріалів підбирається у відповідності до напрямів пізнавальних інтересів учнів, якщо в учнів переважає стрижневий інтерес до дисциплін певного циклу (економічні, історичні, гуманітарні і т. д.). Якщо ж інтерес до математики аморфний або відсутній, корисно використовувати завдання, які захоплюють своїм змістом, новизною, незвичністю, завдання, які підкреслюють перевагу математичних методів розв'язування над іншими [113, 46-47].

Важливим компонентом при навчанні учнів розв'язуванню задач є привчання школярів до виконання завдань різними методами та способами (тобто відшуканню різних прийомів розв'язування задач) та виробленню в них умінь вибирати найраціональніший з них. Автори одностайні у високій оцінці значення таких пошуків для математичного розвитку учнів. Розв'язування задачі декількома методами або способами дає учням усвідомлення того, що ці методи та способи існують і багато з них є цілком посильними для них. Адже у значної частини учнів виникає думка, що дану задачу не можна розв'язати іншим методом, ніж запропоновано в підручнику. Психологи вважають, що краще розв'язати одну задачу багатьма способами, ніж багато задач одним способом. Справді, якщо розв'язання задачі не сподобалось учневі, то він скоріш за все його забуде. Але, якщо учень побачить, що задача розв'язана декількома методами або способами, то він зверне більшу увагу на цю задачу і зможе знайти прийнятніший для себе метод або спосіб. На сучасному етапі розвитку методики алгебри постає питання про співставлення знайдених методів та способів розв'язування алгебраїчних задач та виділення більш раціональних і повчальних. Можливість свідомо вибирати краще, особливо коли це стосується предмета власної творчості, розвиває в учнів самокритичність. А ця важлива риса потрібна будь-якій дитині в практичній діяльності.

Використання різних методів дає змогу в окремих випадках замінити одне розв'язання іншим – легшим та раціональнішим. Розв'язуючи одну задачу різними методами та способами, можна краще зрозуміти специфіку того чи іншого методу, його переваги та недоліки залежно від змісту задачі. Взагалі, розв'язування задач різними методами та способами сприятиме розвитку пізнавальної активності учнів, систематизації знань, умінь та навичок. Також це є одним із шляхів перевірки достовірності отриманого результату: якщо різні методи розв'язування привели до одного і того ж розв'язку, то його можна вважати правильним. Треба пам'ятати, що нема більш ефективного шляху для виховання гнучкості розуму, математичного мислення та винахідливості, ніж шлях, який пролягає через пошуки різних розв'язань задач. Розв'язування задач та вправ різними методами та способами є одним із засобів активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів.

Взагалі, кожен вчитель знає, наскільки важливо зацікавити учнів уроком. Рушійною силою процесу пізнання є внутрішні суперечності між завданнями, які ускладнюються, і вимогами та наявними можливостями учня. Тому розвиток (еволюція) процесу навчання математики повинен бути поступовим. У ньому повинні поєднуватися процеси різного характеру: логічні міркування і уява, інтуїція, чуттєве і наочне, конкретне і абстрактне, індуктивні і дедуктивні методи. Мета вчителя – перетворити знання учнів на їхні переконання, сформувати стійкий потяг до поглиблення, розширення та вдосконалення їхніх знань, вмінь та навичок. В реалізації цих завдань важливу роль відіграє активізація навчально-пізнавальної діяльності учнів, використання різноманітних її методів [131].

Одним із шляхів підвищення ефективності навчання і активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів є поєднання практичних і розумових дій (при умові попереднього навчання цим діям).

Засобів активізації навчально-пізнавальної діяльності існує багато. Ефективними прийомами активізації навчально-пізнавальної діяльності є:

- використання елементів історизму на уроках алгебри;
- активізація пізнавальної діяльності учнів через розв'язування задач;
- диференціація задач за складністю;
- управління вчителем діяльністю учнів при розв'язуванні стандартних і нестандартних задач;

- диференціація ступеня допомоги учням в процесі фронтальної, групової та індивідуальної роботи;
- використання прикладних задач;
- використання знаково-символьних засобів, зокрема відповідної термінології і символіки, математичних речень і текстів, таблиць, графіків, макетів і реальних предметів;
- використання ланцюжків задач, допоміжних задач, зведення задач до підзадач, складання карток опорних задач та ін. [131] та [331].

Тут слід виділити деякі вимоги до розв'язування задач, які сприяють активізації навчально-пізнавальної діяльності:

- засвоєння учнями алгоритмів і правил-орієнтирів, методів і способів розв'язування певних класів задач;
- можливість переносу засвоєних знань в нові ситуації, зокрема розв'язування нестандартних задач;
- виділення окремих видів задач, які розв'язуються певними методами або способами з подальшою класифікацією методів та способів розв'язування.

Активізація навчально-пізнавальної діяльності при вивченні математики (зокрема алгебри) буде ефективною при виконанні таких умов:

1. Чітке формулювання мети уроку, окремого завдання, які повинні бути орієнтовані на кінцевий результат і зрозумілі учням.
2. Формування потреби в оволодінні знаннями і відповідної мотивації через проблемний, індивідуальний та диференційований підхід.
3. Важлива умова активізації – міцне та усвідомлене засвоєння базових знань, навичок та умінь.
4. Самостійна робота учнів при розв'язуванні задач (під контролем вчителя), конструюванні правил-орієнтирів, евристичних схем, алгоритмів розв'язання.
5. Організація навчання як на уроці, так і в позаурочний час повинна активізувати розумові і практичні дії учня. Це забезпечується методами проблемного навчання, структуруванням змісту навчального матеріалу, програмуванням діяльності учнів на уроках і в позаурочний час.
6. Формування в учнів загальних і специфічних для алгебри прийомів навчальної і розумової діяльності, поєднання традиційних засобів і методів навчання з новими інформаційними технологіями.

Не секрет, що на сьогодні рівень математичної підготовки учнів не дуже високий. Одним із шляхів розв'язання цієї проблеми якраз і є активізація навчально-пізнавальної діяльності учнів, зокрема через вивчення методів та способів розв'язування алгебраїчних задач. Таким способом можна добитися міцніших і глибших знань, сприяти підвищенню математичної культури учнів.

Навчання методам та способам розв'язування задач повинно проходити у поєднанні з різними підходами.

В педагогіці і методиці навчання системний підхід спрямований на розкриття цілісності педагогічних об'єктів, виявлення в них різноманітних типів зв'язків та зведення їх у єдину теоретичну систему (поняття "система" означає множину елементів, які перебувають у відношеннях і зв'язках і утворюють певну цілісність) [277, 47]. Це означає, що певну пізнавальну діяльність можна розглядати як систему. Її складовими будуть суб'єкт пізнання (особистість учня), процес пізнання, продукт і мета пізнання, умови, в яких ця пізнавальна діяльність відбувається та особистість вчителя. Системні знання – це знання, що вибудовуються у свідомості учнів за схемою: основні наукові поняття, основні положення теорії-наслідки-застосування. Тому необхідно озброювати учнів не лише теоретичними знаннями з алгебри, але і методологічними знаннями про основні елементи цих знань та структурні зв'язки між ними. При цьому елементами знання прийнято називати знання, яким притаманна відносна самостійність, тобто такі знання, які в навчальному процесі стають або об'єктом вивчення, або засобом розв'язання теоретичних, практичних чи навчальних задач. Цим ознакам повністю відповідають знання про методи і способи розв'язування алгебраїчних задач, які на початковому етапі є об'єктом вивчення, а на наступному засобом розв'язання алгебраїчних задач і вправ.

Відповідно, системний підхід до вивчення методів і способів розв'язування алгебраїчних задач в курсі алгебри загальноосвітньої школи полягає в наступному:

- як і основні методи розв'язування, так і методи та способи розв'язання нестандартних задач вивчаються за єдиною схемою;
- ця схема включає, як мінімум, три етапи:
    1) вивчення теоретичного матеріалу, теорем, аксіом та висновків з них як теоретичної основи методу;
    2) вивчення принципу, структури, алгоритму, правила-орієнтиру чи евристичної схеми методу;
    3) застосування методу до конкретних задач, аналіз його особливостей та переваг (у порівнянні з іншими).

Основна теза діяльнісного підходу полягає в тому, що людина виявляє властивості та зв'язки елементів реального світу лише в процесі і на основі різних видів діяльності (предметної, розумової, індивідуальної, колективної тощо). Учень добре засвоює те, що виступає як предмет і як мета його діяльності. Свідома діяльність учня передбачає, з одного боку, виконання ним відповідних дій із навчальним матеріалом та перетворення матеріалу, що засвоюється, в мету цих дій [277].

Діяльнісний підхід до розв'язування задач вимагає, щоб учень самостійно або під керівництвом вчителя здійснив повний цикл дій: аналіз задачі, виділення істотних зв'язків, розділення змісту задачі на відомі, невідомі величини і константи, розчленування задачі на певну кількість чи послідовність дій, вибір методу, способу, алгоритму розв'язання і т. д. При цьому обов'язковими повинні бути етапи застосування набутих знань на практиці (закріплення), повторення і поглиблення даного матеріалу.

Методика навчання учнів розв'язування задач повинна базуватися і на комплексному підході до навчального процесу. Комплексний підхід до навчального процесу полягає у поєднанні трьох складових:

1) соціального, психологічного і педагогічного факторів;
2) усіх функцій навчання;
3) єдності усіх компонентів навчального процесуі.

Це означає, в першу чергу, формування теоретичних знань як операційного складу методу (способу), який буде вивчатись, чітке визначення мети навчання. Повинні ретельно підбиратись задачі, які будуть розв'язуватись у класі і задаватись додому; слід чітко визначити методи, організаційні форми і засоби навчання, форми контролю і самоконтролю [276, 88].

Приступаючи до розв'язування задачі, ми перш за все шукаємо головну ідею, за якою слід працювати. Якщо таку ідею ми знайдемо, то подальше розв'язання являє собою використання цієї ідеї, тобто її здійснення. Щоб мати можливість вибрати ідею розв'язування задачі, треба мати достатній запас таких ідей. Цей запас створюється в практиці розв'язування задач. Треба вчити школярів використовувати запас методів та способів для розв'язування різного виду задач, вміти вибирати та застосовувати потрібні. Відомий математик Г . Лейбніц писав: "Метод розв'язання гарний, якщо з самого початку ми можемо передбачити – і надалі підтвердити це - що використовуючи цей метод, ми досягнемо мети" [126,161].

Підводячи підсумок, зазначимо: щоб навчити учнів розв'язувати алгебраїчні задачі (та і математичні взагалі), треба перш за все уважно їх вивчити, проаналізувати; встановити кожен раз умови та вимоги, які є в задачі; з'ясувати, які об'єкти, їх характеристики та відношення входять в умову; що означають вимоги задачі. Тільки на основі такого аналізу пошук методів та способів розв'язування задач буде ефективним. При цьому треба пам'ятати, що розв'язання задачі зводиться до знаходження таких спільних положень алгебри (математики), застосовуючи які до умов задачі або до їх наслідків можна задовольнити її вимоги. Знаходження методу або способу розв'язування задачі подібне до винаходу, а винахід потребує знань, уяви, здогадки і фантазії.

1.3 Методи розв'язування алгебраїчних задач, їх роль та місце у навчанні алгебри

У навчанні математики задачі мають велике і різноманітне значення. Розв'язуючи алгебраїчну задачу, учень пізнає багато нового: знайомиться з новою ситуацією, описаною в задачі, із застосуванням математичної теорії до її розв'язання, пізнає новий метод розв'язування чи нові теоретичні розділи алгебри, необхідні для розв'язання задачі і т.д. Іншими словами, при розв'язуванні алгебраїчних задач дитина здобуває математичні знання, підвищує свою математичну освіту. Під час опанування методом розв'язування деякого класу задач у людини формуються навички і уміння розв'язувати такі задачі.

Роль та місце задач у навчанні математики історично не залишалася незмінною. В "Арифметиці" Л. Ф. Магницького до задач вказувалися розв'язання, які потрібно було "затверджувати". Методи та способи розв'язування задач давалися у вигляді багатослівних правил, і ці правила учні повинні були заучувати напам'ять. Зміст задач охоплював всі типові ситуації, які вимагали відповідних практичних розрахунків: купівлю-продаж, кредити, підряди, витрати і накопичення, обчислення календарних дат. Задача була предметом навчання, тобто математику вчили для того, щоб засвоїти правила (методи та способи) розв'язання типових задач [313, 13].

Із зміною цілей навчання, обумовлених розвитком суспільства, змінюється і роль задач. Зростає обсяг теоретичного матеріалу, засвоєння якого починає супроводжуватися розв'язуванням задач. Відповідні методичні погляди висловив ще на початку минулого століття В. О. Латишев: "Необхідно, щоб теорія не подавалась учням і не передувала практичним вправам, а навпаки , щоб теорія поступово формувалась самими учнями і являла собою ряд висновків з практичних вправ в обчисленнях і в розв'язуванні задач"[180, 26].

Зазвичай виділяють чотири основні функції задач – навчальна, розвивальна, виховуюча і контролююча. Взагалі, повинна існувати кореляція між функціями задач і методами чи способами їх розв'язання і вибір методу повинен бути якщо не безпосередньо, то опосередковано пов'язаний із головною функцією задачі. Наприклад, для навчаючої задачі слід вибрати метод розв'язування, в якому найяскравіше висвітлюється потрібний теоретичний матеріал. Тому вчитель математики повинен володіти арсеналом методів та способів розв'язування алгебраїчних задач та вміти вибрати найоптимальніший в залежності від функції задачі і цілей навчання. Відповідно , в процесі навчання ці вміння і навички повинні передаватись учням.

Тому в методиці навчання математики значну роль відіграє навчання учнів через задачі (так званий задачний підхід), бо встановлено, що розв'язання задач є важливим засобом формування у учнів основних математичних знань, вмінь та навичок. Багато відомих учених наголошували на тому, що задачі відіграють у навчанні чи не найважливішу роль. С. І. Шохор-Троцький запропонував спеціальний метод навчання (метода доцільних задач), в якому основну роль відводив розв'язуванню задач [328]. Відповідно розв'язання задач стає основною формою навчальної діяльності. Загальні знання про задачі та методи їх розв'язування потрібні для того, щоб це приносило найбільший пізнавальний ефект, щоб сам процес розв'язання перетворився на справжній метод навчання учнів визначеним знанням та навичкам. Тому на сучасному етапі розвитку алгебри питання про методи розв'язування задач, їх алгоритми або правила-орієнтири та операційний склад є актуальним. Дуже важливо систематизувати методи, засоби і прийоми доведень та розв'язування задач, а також ідеї, пов'язані з ними. Тобто, найважливішим завданням математики в школі є навчання учнів математичних методів, зокрема методів доведення теорем та методів і способів розв’язування задач [276,86]. “Однією з основних цілей розв’язування задач в шкільному курсі математики є та, щоб забезпечити дійове засвоєння кожним учнем основних методів і прийомів розв’язання учбових математичних задач” [211, 175].

Процес розв’язування задач являє собою пошук виходу з утруднення або шляху обходу перешкод, - це процес досягнення мети, яка спочатку не здається доступною. Уміння розв’язувати задачі є специфічною особливістю інтелекту, а інтелект – це особливий дар людини; тому розв’язування задач слід розглядати як один із самих характерних проявів людської діяльності. Дж. Пойа вказував, що розв’язування задач – практичне мистецтво, подібно до плавання, катання на лижах або грі на фортепіано; навчитися йому можливо, тільки наслідуючи гарним зразкам та постійно практикуючись. “Якщо ви хочете навчитись плавати, то сміливо заходьте у воду, а якщо хочете навчитись розв’язувати задачі, то розв’язуйте їх” [242,13].

Задачі, які учень повинен вміти розв’язувати протягом навчальної діяльності, дуже різноманітні. Навчити в школі розв’язуванню всіх задач, які можуть зустрітися в житті, неможливо; їх кількість практично неосяжна. Але вчитель повинен підготувати учнів до того, щоб в майбутньому вони вміли розв’язувати різноманітні задачі. Зробити це можливо єдиним способом: навчаючи учнів розв’язуванню конкретних задач, методам та способам розв’язання, формувати в них достатньо загальні методи мислення і взагалі діяльності, загальні способи підходу до будь-якої задачі, вміння шукати розв’язання в будь-якій новій ситуації.

В історії розвитку середньої школи як складової системи освіти значний внесок в розвиток методів і методики навчання методам розв’язування алгебраїчних задач зробили такі математики і методисти: Балк Г. Д., Балк М. Б., Бевз Г. П., Декарт Р., Дорофєєв Т. В., Колягін Ю. М., Лейбніц Г., Пойя Д., Славська К. А., Слєпкань З. І., Фрідман Л. М., Ядренко М. Й.; вчителі-практики: Кушнір І. А., Хазанкін Р. Г. та ін.

Наприклад, учні відомого вчителя-математика Р. Г. Хазанкіна різні ідеї разом з методами і способами розв’язування задач не лише систематизують і виписують разом з ілюструючими їх задачами в спеціальний блокнот, але й самостійно добирають оригінальні задачі, в яких ці методи “працюють” особливо яскраво і наочно. В арсеналі його учнів таких ідей та методів розв’язування задач більше семидесяти. А учні відомого київського вчителя І. А. Кушніра набір таких ідей, методів та прийомів називають “джентльменським набором” [262].

Досліджуючи методи розв’язування задач, треба дати означення цього поняття. У методиці розв’язування алгебраїчних задач Г. П. Бевза [42] точного означення методу не дано, а дано опис методів та способів розв’язування задач. Часто одна задача має кілька розв’язань. У таких випадках говорять про різні способи її розв’язування. Відрізнятися ці способи можуть або деталями, або істотно. У першому випадку говорять про різні способи, в другому – про різні методи розв'язування задач.

Л. М. Фрідман вказує, що метод розв'язування задачі – це деякий план розв'язання, але не тільки даної конкретної задачі, а й усіх задач того виду, до якого ми відносимо дану задачу [298,76]. Тому метод, на відміну від плану, містить в собі не тільки опис усіх необхідних перетворень умов задачі для її розв'язання, а й вказівку усіх логічних умов застосовуваності кожного з перетворень, та головне, вказівку усіх ознак того виду задач, розв'язання яких може бути знайдено цим методом. В кожному плані розв'язування деякої задачі міститься (неявно) деякий метод чи спосіб розв'язання, частинним втіленням якого є цей план, але цей метод не виявлений, він прихований.

Ми будемо дотримуватись трактовки, яка подана у підручнику З. І. Слєпкань [276,86]. Метод розв'язування задач – це сукупність прийомів розумової діяльності або логічних і математичних дій та операцій, за допомогою яких розв'язується великий клас задач. Поняття способу розв'язування задачі – вужче поняття. Це сукупність прийомів розумової діяльності або логічних і математичних дій та операцій, які використовуються у разі розв'язування окремої задачі або невеликої сукупності задач певного виду.

Розв'язування задач – це складна робота. Матеріалом, над яким проводиться ця робота, є самі задачі, методи та способи їх розв'язування – це інструменти для роботи, а саме розв'язання – це процес роботи, процес застосування інструментів до матеріалу. Тому, щоб полегшити розв'язання, треба знати матеріал цієї роботи, тобто самі задачі – як вони улаштовані, з чого складаються, треба знати та володіти інструментами – методами та способами розв'язування, та навчитись розумно використовувати ці інструменти [298, 48]. Взагалі розв'язування будь-якої математичної задачі складається з того, що знаходиться така послідовність загальних положень математики, застосування яких до її умов і вимог або до їх наслідків приводить до знаходження розв'язку. Найбільша складність у розв'язуванні – це знаходження цієї послідовності загальних положень, тобто знаходження самого методу або способу розв'язування задачі.

Складність полягає в тому, що відсутній загальний (універсальний) метод , при володінні якими ми б мали можливість розв'язати будь-яку задачу. Мабуть кожен з нас мріяв винайти, або, хоча би оволодіти універсальним методом, за допомогою якого можна було б розв'язати будь-яку задачу. Але пошуки універсального, досконалого методу дали не більший ефект, ніж пошуки філософського каменя, який перетворює неблагородні метали в золото; існують великі мрії, яким судилося залишатися тільки мріями. Для розв'язування окремих типів задач маються алгоритми (спеціальні правила). Для задач інших типів, для яких немає (не можливі або поки не відомі) алгоритмів, існують евристичні схеми (або правила-орієнтири). Але треба вчитись розв'язувати як перші, так і другі типи задач.

Задачі, для яких існують готові правила – алгоритми їх розв’язання, називаються стандартними. При розв’язуванні стандартних задач великих труднощів не виникає. Треба лише розпізнати тип даної задачі, пригадати відповідне цьому типу задач правило розв’язання, розгорнути це правило в покрокову програму та застосувати її до умов даної задачі. Набагато важче розв’язувати нестандартні задачі, для яких немає готових правил. Розв’язування нестандартних задач складається з того, щоб звести їх до розв’язання однієї або декількох стандартних задач. Метод або спосіб розв’язування задач залежить від характеру самих задач і від сукупності дійових знань, якими володіє учень. І . Г. Габович відмічає, що для того, щоб навчитись розв’язувати задачі, учні перш за все повинні накопичити деякі знання (запам’ятати основні математичні співвідношення), із яких потім будуть вибирати ті, які потрібні для розв’язання даної конкретної задачі [78, 4]. Якщо ці задачі алгоритмічного характеру, то метод їх розв’язання може бути представлений у вигляді учбового алгоритму. Для більшості стандартних задач шкільного курсу розроблені послідовності загальних положень, які утворюють відомі загальні правила (алгоритми) розв’язування задач визначеного типу. Коли учбовий алгоритм не існує або його складання недоцільне для розв’язування задач даного виду, метод їх розв’язання може бути представлений у формі особливої евристичної схеми. Цими евристичними схемами або правилами-орієнтирами треба володіти якраз для розв’язування нестандартних задач. Якщо алгоритм існує, то навчання повинно привести учнів до його відкриття та засвоєння, щоб при розв’язуванні іншої задачі такого ж типу можна було зразу ж застосувати цей спосіб (після того, як розпізнали належність задачі до даного виду). Коли ж треба навчити розв’язуванню нестандартних задач, які потребують творчого підходу, коли відомі учням способи неможливо застосувати (тобто вони не приводять до розв’язку), навчання повинно орієнтувати учнів на пошук деяких корисних рекомендацій, які хоча і не гарантують успіх пошуку, але все ж сприяють йому [282,205]. Взагалі, без конкретної програми діяльності з розв’язування задач для учнів, без алгоритмів, правил-орієнтирів, евристичних схем або загальних вказівок, важко організувати процес навчання дітей, бо цей процес має своїми складовими частинами діяльність за зразком і подальшу творчість.

Для успішного розв’язування задачі учню потрібно добре проаналізувати зміст задачі, встановити її тип та з’ясувати, чи не належить вона до того типу, метод або спосіб розв’язування якого вже відомий. В шкільному курсі алгебри передбачено розв’язування багатьох типових стандартних задач (дії з цілими та дробовими числами, основні види тотожних перетворень виразів, розв’язування текстових задач, основні типи рівнянь, нерівностей та їх систем, знаходження похідних та інтегралів та задачі на застосування похідних та інтегралів) [274, 128]. Навчання учнів методам або способам розв’язування типових стандартних задач є важливим завданням вчителя. Ці знання орієнтують учня на встановлення зв’язків між шуканими та даними об’єктами, звільняють його від повторних відкриттів, скорочують витрати часу та дають основу для відшукання розв'язання нестандартних задач.

Взагалі, за дослідженнями психологів та методистів, виділяються два різних прийоми розумової діяльності з розв'язування задач: алгоритмічний та евристичний. Коли учень, розв'язуючи задачі, здійснює свою діяльність у відповідності з відомим йому алгоритмом або правилом-орієнтиром, то він використовує алгоритмічний прийом діяльності. Коли ж такий алгоритм чи правило-орієнтир відсутній, і головна складова частина його діяльності складається з пошуку методу або способу розв'язування даної задачі, то цим характеризується евристичний прийом розумової діяльності. Прикладом евристичної діяльності є аналіз через синтез, введений С. Л. Рубінштейном. При евристичному прийомі діяльності знайдений метод або спосіб розв'язування може представляти собою деякий алгоритм, але це не змінює психологічної суті діяльності учня.

Шкільна практика та дослідження психологів та методистів показують, що управління розумовою діяльністю учнів при вивченні методів та способів розв'язування задач буде ефективнішим в умовах алгоритмічного підходу у навчанні. Оскільки багато шкільних задач розв'язуються за визначеними правилами, то надання учням навчальних алгоритмів (під навчальним алгоритмом будемо розуміти приписи, користуючись яким будь-який учень, який має певні необхідні знання та точно виконуючи цей припис, правильно розв'яже будь-яку задачу даного типу або виду [298,69]) розв'язування таких задач – найбільш ефективний шлях навчання цьому умінню. Використання алгоритмічного підходу вносить раціональність та економічність у мислення, допомагає не тільки управлінню, а й самоуправлінню в процесі розв'язання типових (стандартних) задач [274,132]. Формування прийомів алгоритмічного типу є важливим компонентом розвитку продуктивної, творчої діяльності. Також ці прийоми служать тим фондом знань, із яких учень може черпати матеріал для пошуку методів та способів розв'язування нових для нього задач.

Алгоритм є одним з видів загальних методів діяльності взагалі, а не тільки діяльності розумової. Поняття "алгоритм" застосовується не тільки до діяльності, яка здійснюється через розумові операції, але й до діяльності, яка здійснюється також і через практичні і фізичні дії. Більше того, алгоритми можуть використовуватись для формування завдання обчислювальній машині. Поняття алгоритму виникло в математиці. Точного означення поняття алгоритму не існує, але це поняття можна пояснити. Являючись планом дій при розв'язуванні задач, алгоритм в той же час визначає зміст та задає послідовність розумових і практичних операцій. Сукупність елементарних кроків, з яких складається діяльність з розв'язування задач, реалізація яких являє собою достовірний висновок – це і є алгоритм методу чи способу розв'язування задач. Послідовність елементарних кроків такого виду, яка завжди приводить до розв'язку будь-якої задачі деякого виду, є алгоритмом розв'язання задач цього виду. Таке тлумачення алгоритму дає Л. М. Фрідман [297]. А. А. Ляпунов визначає алгоритм так: "Алгоритмом для розв'язання даної задачі називається об'єднання елементарних актів та перевіряємих умов, які забезпечують такий порядок роботи, який при будь-яких початкових даних, тобто вихідній інформації, приводить до правильної відповіді". Ще одне означення алгоритму можна прочитати в роботі Я. М. Жовніра та ін. [293,4]: "Алгоритм – точне приписання про виконання у визначеному порядку деякої системи операцій, яка дозволяє розв'язувати сукупність задач визначеного класу". Алгоритм приводить від вихідних даних до шуканого результату через скінчену кількість кроків (дій); при цьому дані розташовуються у відомих межах. Ці характеристики алгоритму не являються точними математичними означеннями, але ясно розкривають суть цього поняття.

Не кожне правило або вказівку для розв'язування задач можливо назвати алгоритмом. Л. М. Фрідман зазначає, що ці правила або вказівки повинні задовольняти деяким вимогам [298,70]:

- повинні бути чітко перераховані всі операції, які потрібно зробити, щоб розв'язати дану задачу і вказані умови, які визначають порядок застосування цих операцій;
- кожна операція та кожна умова повинні бути точно означені;
- кожна операція виконується однозначно;
- учні, для яких дається дана вказівка, володіють всіма операціями, які перелічені у вказівці;
- точне виконання усіх вказаних операцій із урахуванням умов їх виконання і порядку завжди приводить до розв'язання будь-якої задачі даного виду.

Наприклад, при вивченні графічного методу розв'язування нерівностей з однією змінною виду EMBED Equation.3 алгоритм розв'язання такий:

1) будуємо графік функції ;
2) знаходимо на осі ОХ ті значення (у вигляді проміжків), для яких , тобто абсциси тих точок графіка, які розміщені над віссю ОХ, де ;
3) записуємо відповідь.

Аналогічним буде алгоритм і для розв'язування нерівностей виду: [208, 95].

Алгоритм являє собою зразок або модель того процесу, який повинен здійснюватись у голові учня, щоб він міг безпомилково розв'язати ту чи іншу задачу. Він (алгоритм), вказуючи послідовність, в якій потрібно діяти, щоб розв'язувати задачі визначеного типу, тим самим визначає зміст та вказує послідовність, в якій треба (або доцільно) формувати відповідні розумові операції в учнів.

Але, мабуть, не кожну діяльність із розв'язування задач можна назвати алгоритмічною, тобто треба з'ясувати, яку задачу можна назвати задачею алгоритмічного типу. Задача буде алгоритмічного типу тоді, коли для неї заданий (відомий) алгоритм. При цьому треба зважати на те, що алгоритм розв'язання може бути заданий у різних формах. Наприклад, у вигляді словесної програми виконання всіх елементарних кроків із розв'язання задачі з виконанням умов їх застосування, або у формі інструкції з роботи над таблицею, у вигляді формули, блок-схеми і т. д. Але немає різниці, в якій формі заданий алгоритм, тому що діяльність по розв'язуванню задачі у відповідності з цим алгоритмом буде носити алгоритмічний характер.

Розглянемо тепер складові, з яких складається діяльність із розв'язування задачі, якщо відомий алгоритм її розв'язання. По-перше, треба розпізнати вид задачі, тобто встановити , який саме алгоритм можливо застосувати для її розв'язання. Якщо алгоритм розв'язання заданий в нерозгорнутому вигляді, наприклад у вигляді формули, то складовою частиною цієї діяльності є розгортання цього алгоритму – складання програми. Завершальною частиною є реалізація цього алгоритму – програми розв'язування задачі. Наприклад, учню потрібно розв'язати квадратне рівняння, якщо йому відомі формули коренів квадратного рівняння. Тоді його діяльність буде складатися з таких частин:

- розпізнання виду задачі (в даному випадку воно зводиться до розпізнання виду задачі за її формулюванням);
- потім учень повинен пригадати формули коренів квадратного рівняння та вибрати найбільш відповідну для даного рівняння;
- тепер учень повинен подумки або явно скласти програму реалізації того алгоритму, який заданий цією формулою;
- і останнє, він повинен здійснити цю програму – реалізувати складений алгоритм і тим самим розв'язати сформульовану задачу [298,72].

Взагалі, в залежності від змісту учбового матеріалу, зазначає З . І. Слєпкань, вчитель повинен визначити, в якому випадку доцільно організувати колективний або самостійний пошук алгоритму розв'язування задач, а коли дати алгоритм в готовому вигляді. Пропонується алгоритми виконання дій з цілими та дробовими числами, алгоритми розв'язування лінійних рівнянь і нерівностей формулювати готовими, проілюструвавши їх відповідними прикладами. Але алгоритми тотожних перетворень цілих і дробових виразів, дослідження властивостей функцій за допомогою похідної та ін. краще вводити шляхом організації попереднього колективного їх пошуку на прикладі однієї – двох задач [274,138].

Взагалі вважається, що учень оволодів алгоритмом, якщо він вміє досить легко та швидко застосувати його до розв'язування конкретних завдань. Складне вміння застосовувати алгоритми для розв'язування задач з алгебри складається з наступних основних компонентів: учень повинен знати пооперацiйне формулювання правила-алгоритму, правильно і послідовно його висловлювати, повинен розуміти зміст кожної окремої операції алгоритму, швидко та в потрібний момент згадати та застосувати відповідні, раніш засвоєні знання, вміти своєчасно і правильно використовувати зразок, а також контролювати свою діяльність на кожному етапі (при виконанні кожної окремої операції) та її результат [296,88].

Покращення алгоритмічної культури учнів є однією з головних умов успішної реалізації задач політехнічного навчання та посилення прикладної спрямованості в навчанні. Формування в учнів алгоритмічної культури є в той же час ефективним засобом реалізації ідей міжпредметних зв’язків, що виховує в учнів єдине сприйняття оточуючого світу. Алгоритмізація навчання допомагає спростити та прискорити вивчення програмного матеріалу і тим самим звільняє розумову енергію учнів для розвитку інтуїції, творчої діяльності із розв’язування задач.

Але при розв’язанні задач прийомами алгоритмічного типу в учнів формується установка на дію за готовим зразком, і це стає гальмом при розв’язуванні нових задач, виникає “бар’єр минулого досвіду”. Тому формування алгоритмічних прийомів повинно впроваджуватися разом із спеціальною роботою по навчанню учнів прийомам евристичного типу. На відміну від алгоритмічних прийомів, евристичні прийоми орієнтують не на формально-логічний, а на змістовний аналіз проблеми. Розуміння розвитку евристичних процедур мислення ґрунтується на принципі детермінізму: зовнішні причини діють через внутрішні умови. За такого трактування пізнавальної діяльності можливо розкрити найголовніше в мисленні – його творчий характер, тобто здатність шукати, знаходити, відкривати і створювати щось суттєво нове, раніше невідоме.

Евристичні прийоми розумової діяльності, в тому числі прийоми розв’язання задач, характеризуються певними особливостями [272]:

- евристичні прийоми задовольняють принципу редукції підцілей;
- евристики обмежують перебір;
- на відміну від алгоритмів евристики здатні відвести в сторону, вони не гарантують досягнення мети;
- використання евристик високоефективне;
- евристичні прийоми можна розглядати як теорію поведінки людини при розв’язуванні задач.

Тобто евристичні прийоми трактуються як особливі прийоми, які сформувались в ході розв’язання одних задач і (більш або менш свідомо) переносяться на інші.

В шкільному курсі алгебри існують методи та способи розв’язування задач, які неможливо виразити у вигляді алгоритму. Наприклад, метод складання рівнянь при розв’язуванні текстових задач. Практика довела, що в процесі розв’язування таких задач дійовим засобом управління розумовою діяльністю учнів є ознайомлення їх з евристичними схемами пошуку розв’язання тим або іншим методом. З. І. Слєпкань вважає [274,125-126], що успіх евристичної діяльності учнів залежить від сформованості таких вмінь, як аналіз (аналіз формулювання задачі), синтез (співставлення умов з вимогами), аналіз через синтез (вміння переосмислити елементи задачі), узагальнення, абстрагування, встановлення і використання аналогій, а також специфічних розумових дій: підведення під поняття, розгортання умов, встановлення істотних зв'язків. Ці прийоми мислення необхідно формувати вже на перших етапах навчання розв'язуванню задач.

Проблемою евристичних методик займався Д. Пойа [241,200]. Він виділив і сформулював наступні загальні орієнтири пошуку: спочатку треба зрозуміти задачу, треба уважно вивчити умови та вимоги задачі, розділити умову на частини, встановити зв'язок між відомими та невідомими, скласти план розв'язання. При цьому корисно відповісти на такі запитання: чи не зустрічалася раніше подібна задача; чи не можна скористатись нею; чи не можна придумати більш простої подібної задачі; чи не можна розв'язати тільки частину задачі, відкинувши частину умови. У процесі виконання плану розв'язання потрібно контролювати кожен крок, а після одержання результату, доцільно перевірити його та подумати, чи не можна одержати цей результат іншим способом.

"Мета евристики, – пише Пойа, – досліджувати методи та правила, як робити відкриття та винаходи… Прикметник "евристичний" означає "той, що служить для відкриття". Евристичне міркування не розглядається як скінчене та строге, але лише як попереднє та правдоподібне міркування, мета котрого – знайти розв'язання для даної проблеми. Нам часто доводиться вдаватися до евристичних міркувань. Ми досягаємо повної упевненості в правильності свого розв'язання, коли отримуємо остаточний розв'язок, але до цього ми часто повинні задовольнятися більш або менш правдоподібною здогадкою" [241].

Подібну схему евристичної діяльності змалював і Л. М. Фрідман [298,73-74]. В своїй роботі він вказує, що евристичні елементи діяльності з розв'язування задач являють собою елементарні кроки цієї діяльності, які носять правдоподібний характер. В першу чергу вступають в дію ті евристичні елементи, які спрямовані на пошук відповідного об'єкту (задачі, або її частини) з минулого досвіду (з розв'язування задач) для порівняння, співставлення з даною задачею. Якщо такий об'єкт буде знайдено, то подальші дії полягають в сполученні знайденого об'єкту з даною задачею шляхом визначеного правдоподібного логічного правила (наприклад, аналогії) з тим, щоб отримати правдоподібний висновок про можливість використання відповідного цьому об'єкту методу для розв'язування даної задачі. Якщо учень не може підшукати об'єкт, який би підходив для порівняння із даною задачею, то застосовуються евристичні елементи з її перетворення. Наприклад, такі: "вичленувати вимогу задачі", "замінити даний термін його означенням", "розчленувати дану умову на частини" і т. д. Всі ці перетворення спрямовані на аналіз формулювання задачі і на побудову різних моделей даної задачі.

В цій галузі також заслуговують уваги дослідження, проведені Ю. М. Кулюткіним. Евристичні методи він розглядає з точки зору управління діяльністю учня, маючи на увазі, що в процесі навчання в учня формуються такі пізнавальні структури, які дозволяють йому все більш ефективно регулювати свою власну розумову діяльність: знаходити потрібну інформацію, перетворювати її, розробляти на її основі плани і розв'язання навіть в нестандартних ситуаціях. Існують ситуації, зазначає Ю. М. Кулюткін [174,8], коли конкретні правила розв'язування ще не відомі – або взагалі ще ніким не відкриті, або з ними не знайомий наш учень. В таких нестандартних умовах виникає специфічна проблема – відкрити конкретний метод або спосіб розв'язування, побудувати потрібну систему дій у вигляді того або іншого плану розв'язання. Прийоми розумової діяльності, за допомогою яких людина відкриває нові методи та способи розв'язування, називаються евристичними. Евристика розглядає не самі по собі розумові дії – аналіз, синтез, узагальнення і т. д. (вона відштовхується від них як від даного), а ті способи, якими окремі операції структуруються в складні утворення типу стратегій і тактик, які спрямовані на пошук необхідної інформації та розробку розв'язань. Ці складні інформаційні структури виступають як результат комбінації елементарних інформаційних одиниць. Евристичні прийоми часто розглядаються як те, що скорочує перебір варіантів розв'язання, або можливих шляхів у "лабіринті" пошуку. Евристичні прийоми є лише попередніми моментами в процесі розв'язування задач і часто наводять на правильне розв'язання, але існує вірогідність і помилкових дій. Взагалі, під евристикою слід розуміти методи, прийоми або операційні процедури, за допомогою яких людина отримує інформацію, необхідну їй для створення гіпотез та планів розв'язань, коли ці останні заздалегідь не дані (інакше мова повинна йти про стандартизований, алгоритмічний пошук) [173,231].

Найновішими дослідженнями з евристики є дослідження Скафи О. І. [272]. Евристика тут розглядається як наука про творчість, про творчу діяльність з метою отримання нових результатів в певних областях знань. Стосовно розв'язання алгебраїчних задач, евристичні методи – це спеціальні методи розв'язування задач, які звичайно протистоять формальним (алгоритмічним) методам, що спираються на точні математичні моделі. Використання евристичних методів скорочує розв'язання задачі порівняно з методом повного довільного перебору можливих варіантів.

В процесі навчання математики, зазначає О. І. Скафа, корисно давати учням деякі загальні рекомендації, які полегшують пошук розв'язання задачі або підказують шлях відкриття нової залежності, нового факту або поняття. Такі рекомендації різні дослідники в області методики називають по-різному: евристичні орієнтири, правила-орієнтири, евристичні схеми і т. д. Під евристичними прийомами розуміються особливі прийоми, які сформувалися в процесі розв'язування одних задач і більш чи менш свідомо переносяться на інші задачі. До таких евристичних прийомів слід віднести аналіз, синтез, порівняння, абстрагування, узагальнення, класифікацію, систематизацію, встановлення і використання аналогій. Кожен із цих прийомів характеризується своїм операційним складом [272].

Із сказаного вище випливає висновок, що евристичні прийоми розумової діяльності дозволяють діяти в нестандартних ситуаціях, в умовах невизначеності, полегшуючи пошук розв'язання нових проблем та розвивати продуктивне мислення школярів.

Коли ми на практиці зустрічаємось з реальними стратегіями, на основі яких учень будує свої розв'язування, ми бачимо, що вони ніколи не є ні чисто стандартизованими (алгоритмічними), ні чисто евристичними. Звичайно ті та інші прийоми переплітаються між собою, зчіплюються один з одним, і лише для окремого типу задач ми можемо говорити про переважно алгоритмічний або про переважно евристичний пошук.

Пошуками універсального методу розв'язування будь-яких задач (тобто методу, яким би було можливо розв'язати будь-яку математичну задачу) займався в свій час ще Р. Декарт [106]. Слідом за Р. Декартом тією ж проблемою про знаходження загального методу розв'язування задач займався і Г. Лейбніц. Але, як відомо, такого методу не існує й досі. Про складність розв'язування без існування загального методу розв'язування для всіх задач писав в своїй роботі і А. А. Столяр [282,205]. Він зазначав, що складність пояснюється відсутністю (і неможливістю) загального методу (алгоритму), оволодіння яким гарантувало б здатність розв'язати будь-яку задачу. Алгоритми маються лише для розв'язання задач окремих класів (або типів). Для задач інших класів немає (неможливі або поки невідомі) алгоритмів. Наприклад, для тригонометричних, показникових та логарифмічних рівнянь.

Спроба розробити загальний підхід (але не метод), загальну методику навчання розв'язуванню задач була розпочата Д. Пойа [241]. В своїй роботі він подав рекомендації, які сприяють формуванню структури міркування в пошуках розв'язання задачі, правильно орієнтують на цей пошук. За допомогою цих рекомендацій підвищується імовірність успішного закінчення та зменшується час, який витрачається на пошук розв'язання. Але ця книга розчарує тих, хто в загальному методі шукає ключ до розв'язання будь-яких задач. Якщо і будуть виконані всі рекомендації Д. Пойа, це не означає, що з'явиться можливість розв'язати яку завгодно задачу.

Проблемою методики навчання учнів розв'язуванню задач займався і Ю . М. Колягін. У його роботах описується необхідність розробки конкретної методики навчання учнів розв'язуванню задач [152,116]. Треба встановити основні розумові вміння, які можуть бути сформовані в процесі розв'язування алгебраїчних (математичних) задач; виділити загальні прийоми та методи розв'язування задач, ознайомлення з якими можливе та корисне; розробити методику навчання учнів застосуванню до розв'язування задач певних методів (методу рівнянь, векторного та координатного методів та ін.).

При навчанні розв'язуванню задач необхідно навчити учнів аналізувати зміст задач, як побудовані задачі, з яких частин складаються, як і з чого починається їх розв'язання. Якщо прочитати будь-яку задачу, то можна виділити певне запитання, іншими словами вимогу, на яке необхідно одержати відповідь, спираючись на умову. При уважному вивченні формулювання задачі в ній виділяються певні твердження (те, що дано), вони називаються умовою і певні вимоги (те, що необхідно знайти).

Л. М. Фрідман зазначає, що однією з основних функцій в навчанні математики є функція формування та розвитку у учнів загальних вмінь розв'язування будь-яких задач [299, 151]. Але Л. М. Фрідман звертає увагу на те, що потрібно розрізняти загальні вміння з розв'язування задач та часткові вміння розв'язування задач окремого виду. В основі часткових вмінь лежать часткові методи розв'язування задач окремого виду (алгоритми та евристичні схеми), наприклад методи розв'язування рівнянь та нерівностей першого степеня, квадратних та ін. Усі ці часткові вміння формуються на основі засвоєння учнями теоретичних знань, користуючись якими діти роблять операції і дії, які входять до цього вміння. Загальні вміння виникають лише завдяки розв'язуванню великої кількості доцільно підібраних задач.

За період навчання учень розв'язує досить багато математичних задач:

1) задачі-формули і текстові задачі (в залежності від формулювання задачі);
2) арифметичні, алгебраїчні, геометричні (залежно від предмету);
3) прості, складні (за простотою розв'язання);
4) задачі на обчислення, на доведення, на дослідження, на побудову;
5) стандартні, нестандартні, задачі із специфічними методами розв'язування тощо (за наявністю готового алгоритму).

При цьому застосовується немало як загальних методів, так і часткових методів та прийомів їх розв'язування.

Серед загальних методів та прийомів розв'язування задач назвемо наступні: аналітичний, синтетичний, аналітико-синтетичний, метод повної індукції, прийом зведення до раніше розв'язаних, метод моделювання та ін.(про інші методи та способи розв'язування задач буде йти мова у наступному параграфі).

Аналіз – логічний прийом який полягає в тому, що об'єкт, який вивчається, розумово (або практично) розбивається на складові елементи (ознаки, властивості, відношення), кожен з яких досліджується окремо як частина розчленованого цілого.

Синтез – логічний прийом, за допомогою якого окремі елементи з'єднуються в єдине ціле (іншими словами, синтез обернений аналізу).

Кожен з цих методів розв'язання задач має свої переваги і недоліки. При розв'язуванні задач синтетичним методом не завжди зрозуміло, з чого починати розв'язання або доведення. З іншої сторони, при аналітичному методі можливо отримати декілька розв'язків і доведеться робити перевірку.

Синтетичний метод в основному використовують в початковій школі та в 5-6 класах основної школи при розв'язуванні найпростіших задач. При розв'язанні задач синтетичним методом міркують від умови до шуканого, виводячи наслідки з того, що дано.

Синтетичний метод доведення дуже простий з логічного погляду, такі доведення найбільш переконливі і порівняно короткі. Але, як здогадатися, в якому напрямі треба виконувати перетворення, щоб отримати бажаний результат? Синтетичний метод буде зручним тоді, коли доведення вже відоме і потрібно пояснити його іншим. А якщо доведення тільки треба відшукати, то зручніше користуватися аналітичним методом.

При розв'язуванні задач аналітичним методом міркування йдуть у зворотному напрямку, від доводжуваного твердження до відомих. Аналітичний метод широко використовується у старших класах при розв'язуванні стереометричних задач на обчислення. Цей метод сприяє свідомому пошуку розв'язання задачі та вчить учнів самостійно здійснювати такий пошук [276, 87].

Але навчання учнів даним методам важливе тому, що вони виступають і як особливі форми мислення.

У навчанні аналітичному або синтетичному методам слід добре підбирати завдання, оскільки в кожному з них необхідне обґрунтування конкретного методу. Так, при розв'язуванні нерівностей, як правило, використовується аналітичний метод, в цьому випадку використання синтезу є незручним.

Наприклад: розв'язати рівняння - = (використання аналітичного методу при розв'язанні ірраціональних рівнянь):

1) розглянемо ліву частину рівняння: < так як

2) тоді отримуємо - <0;

3) але за означенням арифметичного кореня відомо, що ≥0;

4) приходимо до протиріччя, а значить - EMBED Equation.3

5) рівняння не має розв'язків.

Застосування цих методів можна прослідкувати у процесі розв'язування наступних задач:

1) Задачі на доведення.

2) Текстові задачі.

Аналітичний та синтетичний методи використовуються для розв'язування задач як окремо один від одного, так і в сукупності. Разом вони складають єдиний аналітико-синтетичний метод. Цей метод полягає в тому, що міркування починають аналітичним методом, але не доводять до кінця, а, спиняючись на певному кроці, починають міркувати у зворотному напрямку, тобто з розгортання умови. Далі міркування виконують синтетичним методом [276, 72].

Аналітико-синтетичний процес міркувань значно зменшує ймовірність механічних, формальних дій учня, бо можна заздалегідь і свідомо планувати свою розумову діяльність над теоремою чи задачею. Але аналітико-синтетичний метод використовується рідко. Частіше йдеться про синтетичний метод, який використовується після аналізу Евкліда, в єдності з ним і аналітичний метод, який дає змогу зрозуміти, чому виконується саме таке перетворення, така побудова.

Опанування аналітичним і синтетичним методами має велике значення не тільки для навчальної, а й для майбутньої діяльності учня, оскільки така логічна схема міркувань досить поширена в життєвій практиці.

Також при розв'язуванні задач та доведенні різноманітних теорем і тверджень використовують аналіз через синтез. У реальній розумовій діяльності аналіз і синтез нерозривно пов'язані [276,34]. У процесі розв'язання задачі за допомогою аналізу через синтез, елементи задачі вичленовуються, зіставляються з іншими елементами і включаються у нові зв'язки, що й дає можливість розв'язати задачу. Аналіз через синтез інколи називають "прийомом переосмислення елементів задачі". С. Рубінштейн вважав, що основною формою мислення, яке здійснює "переформулювання" задачі, є аналіз через синтез, коли "об'єкт у процесі мислення включається у все нові зв'язки і в силу цього виступає у все нових якостях, які фіксуються у нових поняттях…".

Також поширені такі методи міркувань як індукція та дедукція. Індукція і дедукція – форми умовиводу, за допомогою яких мислення рухається від відомого до невідомого [70,45].

За своїм початковим змістом поняття індукція застосовується до міркувань, за допомогою яких одержують загальні висновки, спираючись на ряд окремих тверджень. Індуктивними називають висновки, зроблені на основі спостережень, дослідів, отримані шляхом висновку від часткового до загального.

Роль індуктивних висновків в експериментальних науках дуже велика. Вони дають ті положення, з яких потім шляхом дедукції робляться подальші умовиводи, обґрунтовується їх правильність.

Прикладами методів міркувань такого роду є неповна та повна індукція.

Неповною індукцією називають таке міркування, при якому загальний висновок роблять на основі розгляду кількох, але не всіх, можливих окремих випадків. Але такі міркування можуть привести до неправильного твердження. Тому неповна індукція не є методом доведення, вона не має "доказової сили"[40, 56].

Повна індукція (або його ще іноді називають методом вичерпних проб) – метод, основою якого є виявлення всіх логічних можливостей і вибір з них таких, які задовольняють умову задачі. Якщо логічних можливостей, що відповідають умові задачі, скінчене число, то може виявитися можливим перебрати їх всі і в ході цього перебору виділити цілком задовольняючі умови. Таким чином, повна індукція полягає в тому, що загальне твердження доводиться окремо в кожному із скінченого числа випадків, які можуть трапитися. Логічною основою цього методу є така аксіома логіки: якщо якусь властивість мають всі елементи множини A і всі елементи множини B та якщо

, то цю саму властивість має і кожний елемент множини M [40, 50].

За допомогою цього методу розв'язуються, зокрема, елементарні задачі теоретико-числового змісту. Даним методом з великим успіхом можна користуватися і для розв'язання багатьох логічних задач.

Також, одним із методів доведення є рекурентний метод. Суть цього методу полягає в тому, що підбирається відповідне рекурентне співвідношення, записується кілька співвідношень, що випливають з нього при конкретних значеннях змінної і додаються чи перемножуються ці співвідношення [40, 52]. Рекурентним методом зручно доводити багато формул з розділу "Числові послідовності" та ін.

Ще один загальний прийом розв'язування задач – прийом зведення. Суть навчання даному прийому полягає в тому, щоб навчити учнів бачити в даній задачі раніше розв'язану та зведенню розв'язуваної задачі за допомогою послідовних перетворень до неї. У цьому випадку відбувається дія за аналогією (аналогія – часткова схожість, деяка подібність у певному розумінні між предметами або явищами).

Якщо потрібно розв'язати рівняння, то звичайно складають таку скінчену послідовність рівнянь, еквівалентних даному, останньою ланкою якої є рівняння з очевидним розв'язком.

Аналогічно діють і при розв'язанні різного виду нерівностей, систем рівнянь та систем нерівностей. Особливу роль цей метод відіграє при знаходженні похідної.

Наприклад: знайдіть похідну (x) = cos2x•sinx + sin2x•cosx:

Загальновідомо, що cos2x•sinx + sin2x•cosx = sin(2x+x), тоді за формулою додавання f(x) = sin(2x+x) => f(x) = sin3x.

Записавши вираз у такому вигляді знайти похідну дуже просто.

Вивченню прийому зведення до раніше розв'язаних задач в шкільному курсі сприяє тема "Розкладання многочленів на множники", яка вивчається в сьомому класі. Але ще раніше використання цього прийому можна продемонструвати при розв'язуванні текстових задач, коли вихідна задача зводиться до декількох простих задач.

В шкільному курсі алгебри даний прийом широко використовується в тригонометрії (при розв'язанні рівнянь та нерівностей). Цей прийом найчастіше застосовується тоді, коли задане відношення має властивість транзитивності. Такими є відношення еквівалентності (рівність, тотожності та ін.) і порядку (строгі та нестрогі нерівності, включення множин, логічне слідування). Прийом зведення лежить і в основі розв'язування геометричних задач на побудову.

Розв'язування задач на доведення також в своїй основі має прийом зведення: доводжуване твердження зводиться до раніше доведених теорем та раніше введених аксіом і означень даної теми. Взагалі, розв'язання більшості задач починається з того, що з'ясовують, чи не можна її звести до простішої задачі, розглянутої раніше. Але не варто захоплюватися таким прийомом, оскільки є небезпека і надалі мислити "за шаблоном".

Наступний метод – це метод моделювання. Моделювання в літературі представлене як метод наукового дослідження, наукового пізнання і метод навчального пізнання, а також і як метод розв'язування задач. Цей метод має своєю основою моделювання (математичне і предметне). До моделювання залучаються різні математичні об'єкти: числові формули, числові таблиці, буквені формули, функції, рівняння алгебраїчні чи диференціальні, нерівності, системи рівнянь та нерівностей, геометричні фігури, різноманітні графосхеми, діаграми Венна, графи і т. д. Математичне моделювання знаходить застосування при розв’язанні багатьох текстових (сюжетних) задач. Вже саме рівняння, складене за умовою задачі, є її алгебраїчною (аналітичною) моделлю. Також цей метод широко застосовується при вивченні початків диференціального та інтегрального числення та при розв’язуванні геометричних задач.

Особливу роль в курсі математики середньої школи грає графічне моделювання. Графічними моделями слугують діаграми, графіки функцій, графічні інтерпретації рівнянь, нерівностей і т. д. Також для розв’язання задач доводиться користуватися і предметним (реальним) моделюванням. Прикладами цього є: знаходження значень функції за графіком, графічне розв’язання рівнянь та нерівностей, а також їх систем та ін. [226, 143].

Моделювання в основному використовується при розв’язуванні неалгоритмічних задач для подолання труднощів, які виникають в ході розв’язання. Ці труднощі можуть бути, по-перше, чисто психологічного характеру, пов’язані із складністю задачі, з тим, що для її розв’язання необхідно уявити собі всі умови задачі, всі зв’язки і відношення між даними та невідомими у легкоуявній формі. Для подолання цих труднощів використовуються всі можливі моделі у вигляді схем, креслень і т. д., які називаються допоміжними моделями задачі. При цьому пошук розв’язання і саме розв’язання проводяться, спираючись на побудовану допоміжну модель. По-друге, труднощі можуть бути змістовного характеру, коли для розв’язання даної задачі неможливо знайти відповідний метод, тоді вона заміняється іншою – її моделлю, яку можливо назвати розв’язною [299, 89].

Для побудови будь-якої моделі необхідно виділити з задачі всі її елементи, всі її відношення, встановити дані та вимоги. Якраз в цьому і полягає аналіз задачі. А якщо при цьому вибрати вдалу форму моделі, то тим самим можна просунутись в розв’язанні, бо саме розв’язання задачі і є побудова ланцюга її моделей.

Математичне моделювання дуже широко застосовується для вивчення реального світу, тому створення в учнів уявлення про його суть, підведення їх до опанування кожного з етапів розв’язання повинно стати предметом турботи вчителя математики [312,38].

Також одним із загальних прийомів розв’язування задач слід назвати розв’язання за відомими правилами та формулами (наприклад, розв’язування квадратних рівнянь за відомою формулою коренів). Суть цього алгоритмічного прийому можна виразимо фразою: “У відому формулу підставив відомі дані і одержав невідомий результат”. Основна проблема полягає у знанні чи незнанні певного правила або формули. Ефективність вказаного прийому залежить від теоретичної підготовки учнів, їх вміння правильно підібрати до заданої задачі правило або формулу, тобто від навичок класифікації задач, співставлення їх з відповідним теоретичним матеріалом. Але такий прийом є незамінним для розв’язування широкого класу стандартних задач, які часто називають задачами на підстановку.

Слід відмітити, що в практиці розв'язування задач основні методи і способи розв'язування алгебраїчних задач часто комбінуються.

1.4. Вивчення методів і способів розв'язування задач в курсі алгебри загальноосвітньої школи

Аналіз історії розвитку алгебри показує, що одночасно з формуванням обсягу і змісту алгебраїчних задач розвивалися і методи і способи їх розв'язування. Початок поклали стародавні вавілоняни, запропонувавши метод відрізків як геометричний метод розв'язування задач з алгебри. Після єгиптян, які ввели алгебраїчний вираз як запис умови задачі, греки навчили людство складати рівняння (або систему рівнянь), де поряд з відомими фігурували невідомі величини. Розвиток класичних методів завершився в XV-XVIII століттях розробкою ряду алгоритмічних методів (алгоритмів) розв'язування алгебраїчних рівнянь і систем рівнянь ("хибне правило", теорема Вієта, метод визначників). Вивчення історії цього питання показує, що вже в донауковий період люди для розв'язання задач намагались застосовувати певні методи, причому деякі з них в якійсь мірі нагадують сучасні. Так, і в єгипетських папірусах і в старослов'янських математичних рукописах ми в прихованій формі маємо складання і розв'язання рівнянь. При цьому розгляд методів, що застосовувалися для розв'язання, показує, що одним з найдавніших з них був метод спроб. Але поступово, приблизно з IX ст. метод спроб перестав вживатись, так як досягли певного розвитку інші методи та способи розв'язування.

Алгебру як навчальний предмет у середніх школах Росії почали вивчати приблизно з 1804 року, тобто з початку заснування гімназій. Тоді ж були складені і перші навчальні програми [42]. Якщо розглянути ці програми, то побачимо, що вже тоді учні вивчали метод рівнянь для розв'язування задач. Цей метод вони вивчали в третьому класі (до першого класу гімназій приймали хлопчиків десяти років). Далі (десь у 1890 році) відбулися незначні зміни цієї програми, але потім її не змінювали аж до революції. Після революції перша програма була надрукована у 1921 році. Надалі програми з алгебри (та і всієї математики) змінювалися дуже часто. Разом з програмами змінювалися погляди на мету, методи і прийоми навчання. Але все одно в програмах не було передбачено вивчення будь-яких теоретичних основ про задачі та їх розв'язання. Тому уявлення учнів про задачі і суть їх розв'язання були досить неясними, а іноді і неправильними. Причому ці уявлення при переході в старші класи не покращувались, тому що вони формувалися стихійно, в результаті випадкової інформації і рідкої рефлексії на свої дії в процесі розв'язання великої кількості задач.

Були часи, коли учні розв'язання окремих математичних задач заучували на пам'ять без розуміння, як ці розв'язання були знайдені. Потім від учнів стали вимагати вміння самостійного розв'язання задач за готовим зразком. Для цього всі задачі, які використовувались в навчанні, розбивалися на різноманітні типи, і для кожного з них учні повинні були знати спосіб розв'язування. Надалі задачі стали використовувати в навчанні і за іншим призначенням, наприклад для закріплення пройденого теоретичного матеріалу, для контролю та оцінки знань і вмінь учнів та ін.

На різних етапах розвитку алгебри змінювалися не тільки задачі та методи їх розв'язання, змінювалась і шкільна програма. За різними програмами в різні роки школярі розглядали певні питання алгебри то в одних класах, то в інших. Але оскільки універсального методу розв'язування алгебраїчних задач не було знайдено, то незалежно від вищезгаданих варіацій робимо висновок, що:

1) теоретичні основи та відповідні методи розв'язування задач тісно пов'язані між собою;
2) не існує універсального методу і до різних типів задач застосовуються різні методи;
3) для свідомого вивчення і засвоєння даного методу розв'язування алгебраїчних задач учень повинен опанувати певною сукупністю математичних знань.

Система розумових операцій, дій і практичних в тому числі, які в сукупності складають метод чи спосіб розв'язування алгебраїчних задач, являє собою операційний склад методу.

Згідно з програмним матеріалом сучасної загальноосвітньої школи учні повинні навчитися розв'язувати задачі з усіх розділів шкільної математики. А розв'язуючи задачі, вони повинні навчитися використовувати відповідні методи і способи розв'язання, але в залежності від того, в якому класі вони навчаються (тобто від того теоретичного матеріалу, яким володіють учні на даному етапі навчання), потрібно навчати їх тим методам, які будуть для них зрозумілими.

З деякими методами розв'язування алгебраїчних задач учні вже знайомі з молодших класів. Наприклад, в шостому класі вивчається поняття пропорції і надалі при розв'язуванні задач можна використовувати спосіб похідної пропорції (старша школа). Також учні знайомляться з синтетичним та аналітичним методами, якими вони користуються для розв'язування різноманітних задач. Часто, згадуючи ці методи, говорять про "міркування від кінця до початку" або "міркування від початку до кінця" [42,37]. Розв'язуючи задачу синтетичним методом, школярі міркують від умови до шуканого, тобто виводять наслідки з того, що дано. Якщо умову доводжуваного твердження позначити через А, а висновок – буквою В, то схема міркувань при доведенні синтетичним методом буде виглядати так: A→A1→A2→…→An-1→An→B. Логічною основою аналітичного методу доведення є та ж сама, що і у синтетичного: з правильного твердження завжди випливає правильний наслідок. В аналітичному методі міркування ідуть в зворотному напрямку. Схема міркувань при цьому буде виглядати так: B←An←An-1←…←A2←A1←A. Аналітичний і синтетичний методи доведення використовують при доведенні нерівностей, хоча частіше вони використовуються при розв'язуванні задач з аналітичної геометрії і математичного аналізу.

У монографіях [273], [42] та [276] зроблено аналіз застосування методів розв'язування задач з алгебри (та геометрії) разом з їх алгоритмами чи правилами-орієнтирами (або евристичними схемами). У роботі [223] подано аналіз та систематизацію алгебраїчних методів розв'язування задач саме за назвою методів, тобто: назва методу, його суть та приклади застосування даного методу. У посібниках [112]; [217]; [307]; [20]; [191] та ін. зроблені спроби класифікації задач за методами їх розв'язування. У них дається метод чи спосіб розв'язування і набір задач, які можливо розв'язати даним методом чи способом. Але у згаданих роботах не ставилося за мету систематизувати методи розв'язування задач.

На основі аналізу діючих в кінці XX ст. у Радянському Союзі та в останні роки в Україні підручників, збірників задач та посібників з алгебри, алгебри та початків аналізу нами запропоновано порядок вивчення і використання основних методів розв'язування алгебраїчних задач. Логічною основою пропозицій є принципи послідовності у навчанні та відповідності операційного складу методу теоретичній підготовці учнів на момент його вивчення. Основною джерелознавчою базою для них стали діючі підручники з алгебри, алгебри та початків аналізу і програми з математики: "Програми для середніх загальноосвітніх шкіл: Математика 5-11 класи", [251]; "Програма з математики для загальноосвітніх навчальних закладів, 5-11 класи", [37]. Розглянемо ці пропозиції.

В 7-му класі доцільно подати метод перебору. Цей метод є одним із найдавніших методів розв'язування математичних задач, які виникли із практики. Він полягає в тому, що при переборі учень фактично експериментує, спостерігає і на основі окремих висновків робить загальний висновок.

Наприклад: Знайти двоцифрове число, яке дорівнює подвоєному добутку його цифр.

При розв'язанні цієї задачі будемо міркувати так. Відповідно до умови треба знайти

таке число , для якого виконується рівність . Звідси . Але . Крім того, з останньої рівності слідує, що . Тоді Легко пересвідчитись перебором, що тільки коли , значення числа є натуральним. Тоді шукане число дорівнює 36 [107, 32].

Наступний метод, який вивчається в 7 класі, є метод рівнянь. Початкові відомості про цей метод учні отримують у 5 класі при вивченні теми "Рівняння". В процесі вивчення цієї теми учні розв'язують нескладні текстові задачі, використовуючи залежності між величинами і записуючи ці залежності у вигляді формул. Сам метод рівнянь, його правила-орієнтири та операційний склад вивчаються у 7 класі в кінці розділу "Рівняння" у темі "Розв'язування задач за допомогою лінійних рівнянь". Повторення і закріплення проводиться в процесі вивчення матеріалу розділу "Системи лінійних рівнянь з двома змінними". Відповідно, повернення до методу рівнянь проводиться у 8 класі в темі "Квадратні рівняння", у 9 класі при вивченні теми "Розв'язування текстових задач за допомогою систем рівнянь".

Доцільно в 7 класі ввести і поняття про графічний метод. Перші уявлення про координатну пряму і прямокутну систему координат на площині подаються учням в курсі математики 6 класу. А в 7 класі при вивченні теми "Системи лінійних рівнянь з двома змінними" учням пропонується розв'язувати системи графічно. Тому якраз у цій темі доцільно дати уявлення про графічний метод та сформулювати його алгоритм (що вимагається програмою). Надалі цей метод використовується при вивченні теми "Функція" у 8 класі та розгляді конкретних функціональних залежностей: квадратична функція (9 клас); тригонометричні функції, степенева, логарифмічна та показникова функції (10 клас) [37].

Надалі графічний метод учні застосовуватимуть і в дев'ятому класі (при вивченні функцій та їх графіків) і у старших класах після вивчення похідної.

У курсі алгебри 8-го класу слід подати метод інтервалів: початкові відомості про метод при вивченні розділу "Нерівності", а формулювати суть методу та його алгоритм у процесі вивчення теми "Розв'язування рівнянь і нерівностей другого степеня та їх систем"

З методом доведення від супротивного учні знайомі ще з сьомого класу (з курсу планіметрії). У 8 класі цей метод доцільніше вивчати (з формулюванням алгоритму і операційного складу) у темі "Тотожні перетворення раціональних виразів". В дев'ятому класі його використовують для доведення нерівностей.

Іншим відомим методом доведення математичних тверджень є метод повної індукції. Наприклад: нехай потрібно встановити, що кожне натуральне парне число n у межах $4<n<20$ представляється у вигляді суми двох простих чисел. Для цього візьмемо всі такі числа і випишемо відповідні розклади:

$$4=2+2;\ 6=3+3;\ 8=5+3;\ 10=7+3;\ 12=7+5;$$
$$14=7+7;\ 16=11+5;\ 18=13+5;\ 20=13+7.$$

Ці дев'ять рівностей показують, що кожне з даних чисел дійсно представляється у вигляді суми двох простих доданків. Таким чином, загальне твердження доводиться тут перебором усіх можливих окремих випадків.

Крім того, у 8 класі слід застосовувати векторний метод, який використовується не тільки в геометрії, а й при вивченні деяких питань шкільного курсу алгебри. При цьому розв'язання спрощуються у порівнянні з розв'язаннями, які виконані традиційними методами [81]. Наприклад: треба довести, що для довільних чисел і справедлива нерівність:

. Використаємо векторну нерівність Коші-Буняковського і її наслідок: Введемо вектори:

і . Для них маємо:

EMBED Equation.3 ,

(1)

, (2).

Тоді .

А з (1) та (2) і нерівності Коші-Буняковського слідує вірність нашої початкової нерівності.

Кращих учнів на факультативних заняттях доцільно ознайомити з методом послідовних наближень (для знаходження наближеного значення кореня). Також після вивчення теми "Квадратні корені і дійсні числа" добре встигаючим учням слід показати, як розв'язуються ірраціональні рівняння методом рівносильних перетворень (метод складання мішаних систем рівнянь і нерівностей). Цей метод в деяких випадках дає змогу встановити, що рівняння не має дійсних коренів (не розв'язуючи саме рівняння) та не потребує безпосередньої перевірки коренів.

Метод математичної індукції в школі подається в старших класах. Хоча, на нашу думку, його доцільніше подавати в 9-му класі під час вивчення розділу "Числові послідовності", тоді в учнів буде сформульовані певні спеціальні математичні (алгебраїчні) навички і вміння, як компоненти операційного складу методу.

Для розв'язування рівнянь та нерівностей учням слід дати метод мішаних систем, який вперше був введений Н. І. Новосьоловим у 1952 році [139, 75].

Також добре встигаючим учням та у класах з поглибленим вивченням математики доцільно дати метод невизначених коефіцієнтів, який має широке застосування при розв'язуванні алгебраїчних задач. Цей метод використовується: для розкладання многочленів на множники; для розв'язування різноманітних рівнянь та нерівностей; для побудови графіків функцій; для звільнення дробу від ірраціональності в знаменнику і т. д.

При вивченні наближених обчислень в 9 класі учні користуються лише методом нестрогого врахування – правилом підрахунку правильних цифр. Але існують і інші методи: метод меж – метод строгого врахування похибок та метод врахування границь похибок, які можна подати на факультативному занятті.

В 10-му та 11-му класах здебільшого іде повторення, закріплення та систематизація раніше вивчених методів розв'язування задач. Але вивчаються і нові методи. В старших класах учням слід подати метод невизначених коефіцієнтів (наприклад при розв'язуванні задач на розкладання многочленів на множники), сформулювати його алгоритм та операційний склад. Для дослідження функцій і побудови графіків функцій дається метод, що спирається на використання похідної (для заданої функції знаходиться похідна і за її допомогою знаходяться проміжки зростання і спадання функції).

Використовуються також: метод границь, метод інтегралів, методи диференціального та інтегрального числення (для доведення різноманітних тотожностей, рівностей, нерівностей та ін.), використання методів теорії ймовірностей і математичної статистики для розв'язування відповідно задач теорії ймовірностей і математичної статистики.

Поряд із основними методами слід дати учням старших класів ряд "нестандартних" (або нетипових) методів розв'язування алгебраїчних задач.

Взагалі, термін "нестандартні" методи розв'язування задач в методиці математики не визначений, але багато авторів в своїх роботах використовують цей термін. Наприклад, в роботі: Олехник С. Н., Потапов М. К., Пасиченко П. И. „Нестандартные методы решения уравнений и неравенств" [232] відмічено, що серед шкільних задач є багато таких, для розв'язання яких використовуються незвичні для школярів міркування. Це задачі, які для школярів вважаються задачами підвищеної складності і потребують нестандартних методів розв'язування. Ці методи ілюструють широкі можливості використання добре засвоєних шкільних знань та прищеплюють учням навички використання нестандартних методів міркувань при розв'язуванні задач.

В посібнику Письменного Д. Т. [239] вказано, що розв'язати задачу нестандартно – це придумати "свій метод", проявити певну кмітливість, здогадатись щось додати чи відняти, на щось розділити або помножити.

Під нестандартними методами розуміють незвичні для школярів міркування при розв'язуванні певних задач. За іншими поглядами, до нестандартних методів і способів розв'язування задач відносяться ті методи (і способи), які не вивчаються в курсі загальноосвітньої школи та не наводяться в шкільних підручниках і посібниках (метод оцінювання; метод, який засновано на принципі Діріхле; метод Гауса (метод послідовного виключення невідомих); метод Крамера; метод нескінченого спуску; метод хорд; метод дотичних; метод ітерацій та ін.). Але, повертаючись назад, до нестандартних задач відносять ті задачі, для яких відсутні загальні правила їх розв'язання. Тобто нестандартні методи – це методи розв'язування нестандартних задач. Але знання цих методів буде корисне для школярів – майбутніх студентів при вступі до вузу і надалі при навчанні у вузі.

З кожним методом розв'язування задач пов'язані відповідні йому спеціальні математичні дії, вміння та навички та загально-навчальні. Тому залежно від того, на якому етапі навчання (тобто який обсяг теоретичних знань мають учні) знаходяться учні, вони або можуть використовувати конкретний метод або ні. Все залежить від того мінімуму теоретичних знань, вмінь та навичок, якими володіє учень, щоб засвоїти даний метод та вміти використовувати його при розв'язування задач та рівня сформованості загально-навчальних вмінь.

Навчаючи школярів розв'язувати алгебраїчні задачі, навчаючи методам розв'язування цих задач, слід не обмежуватись метою, щоб учень просто розв'язав задачу (тобто знайшов відповідь), а намагатись, щоб він отримав від цієї задачі користь, тобто просунувся на одну сходинку по довгій драбині оволодіння самим предметом алгебри. Мета не у відповіді, а у процесі розв'язання, його методі чи способі. Добре продумана система задач та методи і способи їх розв'язування мобілізують розумову діяльність школярів для розкриття теоретичних положень та абстрактних закономірностей. І якщо ми дійсно хочемо навчити учнів розв'язувати задачі, то необхідно не тільки показувати їм розв'язання різноманітних задач та навчати їх методам та способам, але і залучати їх до самостійного пошуку розв'язань. Разом з тим не слід забувати, що для кожного методу існує алгоритм (або правито-орієнтир) або деяка евристична схема. Також не слід забувати про операційний склад кожного з методів і способів. Тобто одночасно із вивченням методу і способу слід чітко формулювати його алгоритм або правило-орієнтир та операційний склад.

Є. І. Лященко в своїй роботі [192, 7] зазначає, що з кожним методом розв'язування задач окремого виду пов'язані відповідні йому: 1) математичні дії або вміння (встановлення області визначення конкретних функцій, виконання арифметичних операцій, виділення повного квадрату із квадратного тричлену і т. д.); 2) учбово-пізнавальні дії або вміння (виконання аналізу і синтезу конкретної задачі, моделювання змісту задачі, конкретизація і т. д.). Тому, щоб розкрити конкретний метод чи спосіб розв'язування задач, необхідно розкрити набір дій та зв'язків між ними.

Для того, щоб учні краще зрозуміли та засвоїли певний метод або спосіб розв'язування алгебраїчних задач і вправ, потрібно, в першу чергу, дати учням його операційний склад, тобто систему розумових операцій, дій, і практичних в тому числі, які в сукупності і складають даний метод чи спосіб. При цьому учні будуть пригадувати теоретичний матеріал, методи, способи та прийоми розв'язування задач, аналізувати їх з точки зору застосовуваності до даної ситуації, накопичувати певний досвід у використанні одних і тих же знань до різних питань. Все це буде активізувати учбову діяльність школярів, прищеплювати інтерес до математики (зокрема алгебри).

Одна з головних причин труднощів учнів, які вони зазнають при розв'язуванні задач , полягає в тому, що алгебраїчні задачі (і математичні взагалі), які є в основних розділах шкільних підручників, як правило, обмежені однією темою. Їх розв'язання потребує від учнів знань, навичок та вмінь з деякого одного питання програмного матеріалу та не вимагає широких зв'язків між різними розділами шкільного курсу алгебри. Роль та значення таких задач закінчуються на протязі того періоду, який відводиться на вивчення або повторення того чи іншого питання програми. Функція таких задач частіше за все зводиться до ілюстрації того теоретичного матеріалу, який саме зараз вивчається, до роз'яснення його змісту. Тому учням легко знайти метод чи спосіб розв'язування даної задачі. Вони іноді підказуються назвою розділу підручника або збірника задач, темою, яка вивчається на даному уроці, вказівками вчителя і т. д. Самостійний же пошук методів і способів розв'язування учнем тут мінімальний. Відповідно при розв'язуванні задач на повторення, які потребують знань декількох тем, в учнів виникають труднощі. Тому вивчення операційного складу даного методу чи способу розв'язування задач і відповідно інших методів та способів, є важливим в формуванні навичок і вмінь розв'язувати алгебраїчні задачі. Знаючи операційний склад і порівнюючи його зі змістом задачі, учень може самостійно вибрати найбільш раціональний шлях розв'язування даної задачі. Зауважимо, що раціональні методи і способи розв'язування не з'являються самі, за одним тільки бажанням. Раціональним методам і способам розв'язувань треба навчати.

Підводячи підсумок, слід зазначити, що виділення окремих методів і способів та їх систематизація особливо актуальні зараз, коли обсяг і складність навчального матеріалу весь час зростають, а час, відведений для його вивчення, навпаки, зменшується.

Проведений аналіз показує, що введення в практику навчання алгебри поняття про операційний склад методу (чи способу) розв'язування задач і вправ систематизує та поглиблює теоретичні знання учнів і способи їх діяльності. На основі уявлень про операційний склад, стає можливою реалізація системного підходу до навчання методам та способам розв'язування алгебраїчних задач, при якому кожен наступний метод чи спосіб в певній мірі і часто спирається на попередній вивчений матеріал. Системний підхід означає, що сукупність методів і способів розглядається як система, охоплена причинно-наслідковими зв'язками, обумовленими переходами від операційного складу попереднього до операційного складу методу (способу) наступного. Відповідно, вивчення кожного наступного методу (способу) стає можливим після засвоєння попереднього методу (способу) та ознайомлення із операційним складом наступного методу (способу).

Одночасно з'являється можливість розв'язати важливе питання – які алгебраїчні методи та способи і в якій послідовності (в залежності від вивченого теоретичного матеріалу) необхідно вивчати в середній загальноосвітній школі. Учні ж на основі порівняльного аналізу операційного складу певного методу (способу) зможуть оцінити рівень своїх знань, навичок та вмінь, виявити слабкі місця та прогалини в теоретичній і практичній підготовці з відповідного розділу алгебри.

Висновки до розділу 1

1. Історико-методичний аналіз є самостійним, специфічним методом наукового дослідження. Він повинен бути основою при теоретичному та світоглядному осмисленні методики розв'язування алгебраїчних задач. Користуючись сукупністю прийомів історичного аналізу, з'ясовуються закономірності розвитку методів і способів розв'язування задач з алгебри, алгебри і початків аналізу, виділяється спільне та особливе, необхідне та випадкове у цьому розвитку.

2. Аналіз першоджерел і шкільної практики показує, що для того, щоб навчитись розв'язувати алгебраїчні задачі (та і математичні взагалі), треба перш за все уважно їх вивчити, проаналізувати; встановлювати кожен раз умови та вимоги, які є в задачі; з'ясувати, які об'єкти, їх характеристики та відношення входять в умову та вимоги; що означають вимоги задачі. Тільки на основі такого аналізу пошук методів та способів розв'язування задач буде ефективним . Про сформованість методу (способу) розв'язування задач можна судити за наявністю в учнів умінь аналізувати свої дії та оцінювати їх. При цьому треба пам'ятати, що розв'язання задачі зводиться до знаходження таких спільних положень алгебри (математики), застосовуючи які до умов задачі або до їх наслідків, можна задовольнити її вимоги.

3. Поняття методу та способу розв'язування алгебраїчних задач в навчальній і методичній літературі на сьогодні є неповними і розпливчастими, а сама сукупність методів і способів розв'язування задач і вправ з алгебри потребує подальшої систематизації та класифікації, з'ясування їх операційного складу. При цьому необхідно, на основі аналізу змісту теоретичного матеріалу курсу шкільної алгебри, виділити методи і способи, обов'язкові для вивчення в середній загальноосвітній школі та бажані. На сьогодні в діючих програмах і відповідних підручниках відсутня єдина точка зору на цю проблему, немає належного рівня її розв'язання.

4. Проведений аналіз показує, що навчання учнів методам і способам розв'язування задач слід здійснювати на основі вивчення ними відповідних алгоритмів, правил-орієнтирів чи евристичних схем, виділяючи при цьому операційний склад методу (способу). Введення в практику навчання алгебри цих понять систематизує та поглиблює теоретичні знання учнів, сприяє самостійному пошуку розв'язання задач.

Розділ 2
ІСТОРИЧНИЙ ОГЛЯД ТА СУЧАСНИЙ СТАН РОЗВИТКУ МЕТОДІВ І СПОСОБІВ РОЗВЯЗУВАННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ ЗАДАЧ

2.1. Історія виникнення та розвитку методів і способів розв’язування задач з алгебри

Історію галузі математики, яку називають алгеброю, можна розбити на декілька періодів. Сучасна алгебра визначається як наука про системи об’єктів тієї чи іншої природи, в яких визначені операції, за своїми властивостями більш-менш схожі із додаванням та множенням чисел [34,50]. Такий погляд на алгебру виник доволі пізно – десь у 30-і роки ХХ ст. У своєму розвитку алгебра пройшла різні етапи, протягом яких її розуміли по-різному. Змінювались погляди на предмет цієї науки, на її методи та її мету. Навряд чи якась інша галузь математики мала в своєму розвитку таку кількість метаморфоз, як алгебра.

2.1.1. Історія розвитку методів та способів розв’язування задач стародавньої алгебри.

Процес пізнання людиною навколишнього світу можна порівняти з радісним торжеством, бо кожна розкрита таємниця зміцнює віру її в свої сили. Але на шляху переможної людської думки виникали величезні, здавалося б нездоланні, перешкоди – задачі, перед якими були безсилі найвитонченіші міркування [159,5]. Вчені боляче переживали такі невдачі і докладали багато зусиль, щоб виявити механізми (тобто методи та способи) розв’язання таких загадок.

Вже біля чотирьох тисяч років тому назад вавілоняни та єгиптяни розв’язували різні задачі землеробства, будівництва та військової справи за допомогою методу рівнянь. Рівняння першого та другого степеня вміли розв’язувати в давнину також китайські та індійські вчені. Задачі, які розв’язувалися за допомогою рівнянь, зустрічаються у багатьох математичних текстах глибокої давнини.

Розглянемо задачу та її розв’язання з папірусу Ахмеса: “Кількість та її четверта частина дають разом 15.” У наш час для розв’язання цієї задачі складається рівняння і знаходиться результат. У папірусі Ахмеса розв’язання починається так: “Рахуй з 4; від них ти повинен взяти чверть, а саме 1; разом 5”. Далі 15 ділиться на 5, частка множиться на 4 і отримуємо невідоме 12. Близький до описаного метод розв’язування задач був відомий ще в ІІ тисячорічччі до н.е. математикам Стародавнього Єгипту. У збережених до наших днів математичних папірусах містяться не тільки задачі, що приводять до рівнянь першого степеня з одним невідомим, але і задачі, що приводять до рівнянь виду ах2

Ще більш складні задачі вміли розв’язувати на початку ІІ тисячоріччя до н.е. у Древньому Вавилоні: у математичних текстах, виконаних клинописом на глиняних пластинках, є квадратні і біквадратні рівняння, системи рівнянь із двома невідомими і навіть найпростіші кубічні рівняння. При цьому вавілоняни не використовували букв, а наводили розв'язання "типових" задач, з яких розв'язання аналогічних задач одержували заміною числових даних. У числовій формі наводилися і деякі правила тотожних перетворень. Якщо при розв'язанні рівняння треба було добувати квадратний корінь з числа а, що не є точним квадратом, знаходили наближене значення кореня х: ділили а на х і брали середнє арифметичне чисел х і а/х.

В IV ст. до н. е. була створена загальна теорія пропорцій для будь-яких величин. Пропорціями користувалися для розв'язування різноманітних задач і в давні часи, і в середні віки. Окремі типи задач легко і швидко розв'язуються і сьогодні за допомогою пропорцій [88 , 82].

З глибокої давнини і до XIX ст. в роботах з математики займало значне місце так зване правило хибного положення або спосіб припущень. Він відігравав велику роль до XVII ст., замінюючи застосування рівнянь першого степеня при розв'язанні задач, які приводили до таких рівнянь. Магніцький називає розділ своєї "Арифметики", який трактує це питання, "про правила фальшиві або ворожіння". У російській навчальній літературі "фальшиве правило" є в усіх роботах XVIII ст. та в значній частині підручників XIX ст. [111,315]. Треба зазначити, що цей спосіб розв'язування задач не втратив своєї актуальності і зараз, оскільки він використовується у молодшій школі при розв'язуванні задач арифметичними способами.

Перші загальні твердження про тотожні перетворення виразів зустрічаються в давньогрецьких математиків, починаючи з VI ст. до н.е. Серед математиків Стародавньої Греції було прийнято виражати всі алгебраїчні твердження в геометричній формі. Замість додавання чисел говорили про додавання відрізків, добуток двох чисел тлумачили як площу прямокутника, а добуток трьох як об'єм прямокутного паралелепіпеда. Алгебраїчні формули приймали вид співвідношень між площами й об'ємами. Наприклад, говорили, що площа квадрата, побудованого на сумі двох відрізків, дорівнює сумі площ квадратів, побудованих на цих відрізках, збільшеній на подвоєну площу прямокутника, побудованого на цих відрізках. Відтоді і йдуть терміни "квадрат числа" (тобто добуток величини на саму себе), "куб числа", "середнє геометричне". Геометричну форму прийняло в греків і розв'язання квадратних рівнянь - вони шукали сторони прямокутника за заданими периметром і площею.

Більшість задач розв'язувалося в Стародавній Греції шляхом побудов циркулем і лінійкою. Але не всі задачі піддавалися такому розв'язанню. Наприклад, "нерозв'язними" вважалися задачі подвоєння куба, трисекції кута, задачі побудови правильного семикутника. Вони приводили до кубічних рівнянь виду х3 , 4х3 - 3ха і х3 + х2 - 2х - 10 відповідно. Для розв'язання цих задач був розроблений новий метод, пов'язаний з відшуканням точок перетину конічних перерізів (еліпса, параболи і гіперболи).

Геометричний підхід до алгебраїчних проблем сковував подальший розвиток науки, тому що, наприклад, не можна було складати величини різних розмірностей (довжини і площі, площі й об'єми), не можна було говорити про добуток більш ніж трьох множників і т. д. Відмова від геометричного трактування намітилась у Діофанта Олександрійського, що жив в III ст. н. е. У його книзі "Арифметика" з'являються задатки буквеної символіки і спеціальні позначення для степенів невідомого аж до 6-го. Були в нього і позначення для степенів з від'ємними показниками, позначення для від'ємних чисел, а також знак рівності (особливого знака для додавання ще не було), короткий запис правил множення додатніх і від'ємних чисел. На подальший розвиток алгебри сильний вплив зробили розібрані Діофантом задачі, що приводять до складних систем алгебраїчних рівнянь, у тому числі до систем, де число рівнянь було менше числа невідомих. Для таких рівнянь Діофант шукав лише додатні раціональні розв'язки.

З VI ст. н. е. центр математичних досліджень переміщується в Індію і Китай, країни Близького Сходу і Середньої Азії. Китайські вчені розробили метод послідовного виключення невідомих для розв'язання систем лінійних рівнянь, дали нові методи наближеного розв'язання рівнянь вищих степенів. Індійські математики використовували від'ємні числа й удосконалили буквену символіку. Однак лише в працях вчених Близького Сходу і Середньої Азії алгебра оформилася в самостійну галузь математики, що трактує питання, пов'язані з розв'язуванням рівнянь.

Багато арифметичних задач у всіх народів розв'язувалися потрійним правилом (або правило трьох). Спосіб розв'язування задач на потрійне правило зведенням до одиниці походить з Індії. Поза Індією перші сліди цього способу знаходимо у Миколи Рабдаса з Смирни в його “політичній арифметиці” (XIVст.). Візантійські тексти XVст. називають потрійне правило пророчицею обчислювального мистецтва. Сама назва “потрійне правило” має індійське походження. Найпростіші задачі на потрійне правило розв'язувались в VI ст. (Аріабхата) і в VII ст. (Брамагупта). У IX ст. Махавіра в своєму математичному трактаті присвячує окремі глави різним випадкам застосування цього правила – до відсоткових, комерційних і вимірювальних розрахунків.

Інші індійські математики (Шрідхара і Бхаскара) в XII ст. розглядали складне потрійне правило. У цей же час були встановлені правила записування даних в задачах, після чого розв'язування задач звелось до механічних множень і ділень. Араби повністю перейняли індійські правила розв'язування задач на потрійне правило, а від них ці правила перейшли в книгу Леонардо Пізанського (1228 р.). У цій книзі правила викладені майже так, як і в підручниках нового часу.

У посібниках з XV по XVIII ст. потрійне правило займає центральне місце, і відповідні автори називають це правило золотим: “це правило перевершує інші правила так, як золото перевершує всі інші метали”. Відмітимо, що задачі з використанням потрійного правила, розв'язуються чисто механічно, і тільки у XVI ст. з'являється розуміння того, що всі ці задачі можуть бути розв'язані пропорціями. Пізніше, у XVIII ст. формулюється доведення цих правил. Математик Відман (XVI ст.) наводить 28 видів задач, які можуть бути розв'язані потрійним правилом і дає цим задачам особливі назви. Н. Тарталья (1556 р.) зробив спробу виділити основні типи цих задач, звідки виникли наступні правила: відсотків, обліку, строків, складних відсотків, товариства, обміну і зміщення. Для практичних цілей багато авторів тих часів збирали і узагальнювали різні прийоми записування умови задачі і обчислень, які спрощували розв'язування задач [111, 311].

У IX ст. узбецьким математиком і астрономом Мухаммедом ал-Хорезмі було написано трактат “Китаб аль-джебр валь-мукабала”, де він дав загальні правила для розв'язання рівнянь першого степеня. Слово„алъ-джебр" (відновлення), від якого нова наука алгебра одержала свою назву, означало перенос від'ємних членів рівняння з однієї його частини в іншу зі зміною знака. Учені Сходу вивчали і кубічні рівняння, хоча не зуміли одержати загальної формули для їхніх коренів.

При розв'язуванні різноманітних практичних задач часто доводилося порівнювати однорідні величини між собою і знаходити відношення величин, які виражені цілим або дробовим числом. У стародавні часи і протягом середніх віків під числом розуміли тільки натуральне число, зібрання одиниць, яке отрималося у результаті рахунку. Відношення ж не вважалося числом. І тільки вперше у XVII ст. І. Ньютоном було дано нове означення поняття числа.

2.1.2. Формування методів розв'язування алгебраїчних задач у середні віки. У Західній Європі вивчення алгебри почалося в XIII ст. Одним з великих математиків цього часу був італієць Леонардо Пізанський (Фібоначчі) (біля 1170 – після 1228). Його “Книга абака” (1202) – трактат, що містив знання про арифметику й алгебру до квадратних рівнянь включно.

Першим великим самостійним досягненням західноєвропейських вчених було відкриття в XVI ст. формули для розв'язання кубічного рівняння. Це було заслугою італійських алгебраїстів С. дель Ферро, Н. Тарталья і Дж. Кардано. Учень останнього – Л.

Феррарі розв'язав і рівняння 4-го степеня. У 1545 році Кардано опублікував книгу "Велике мистецтво", у якій дав повне розв'язання рівнянь-багаточленів 3-го та 4-го степенів і тих задач, що до них зводяться. Такий спосіб розв'язування кубічних рівнянь одержав назву "формули Кардано". Можна було сподіватися, що такий прийом дозволить надалі розв'язувати будь-яке рівняння-багаточлен. Але ця гіпотеза не виправдалася. Через 300 років після відкриття С. дель Ферро його колеги - норвежець Н. Абель і француз Е. Галуа - довели, що корені деяких многочленів п'ятого степеня не виражаються через їхні коефіцієнти за допомогою арифметичних дій. Виявилося, що в алгебрі (як і в геометрії) існують задачі, що не розв`язуються тими методами, які використовували винахідники цих задач!

Вивчення деяких питань, пов'язаних з коренями кубічних рівнянь, привело італійського алгебраїста Р. Бомбеллі до відкриття комплексних чисел.

Відсутність зручної і добре розвиненої символіки зупиняло подальший розвиток алгебри: найскладніші формули доводилося викладати в словесній формі. Але в XVI столітті такі думки не приходили в голову математикам. Їм важливо було розібратися у способах та методах розв'язування тих задач, що не піддавалися зусиллям окремих умільців. Як зробити ці методи та способи загальнодоступними? В алгебрі цю проблему вдало вирішив Ф. Вієт - перший великий математик Франції.

Наприкінці XVI ст. французький математик Ф. Вієт увів літерні позначення не тільки для невідомих, але і для довільних сталих. Символіка Ф. Вієта була удосконалена багатьма вченими. Остаточний вигляд їй надав на початку XVII ст. французький філософ і математик Р. Декарт, що ввів (уживані і понині) позначення для показників степенів.

Розвиток буквеної символіки дозволив встановити загальні твердження, що стосуються алгебраїчних рівнянь: теорему Безу про подільність багаточлена P (x) на двочлен x - a, де a – корінь цього багаточлена; співвідношення Вієта між коренями рівняння і його коефіцієнтами; правила, що дозволяють оцінювати число дійсних коренів рівняння; загальні методи виключення невідомих із систем рівнянь і т.д.

Поступово розширювався запас чисел, над якими можна було виконувати дії. Почали використовувати від'ємні числа, потім – комплексні, учені стали вільно застосовувати ірраціональні числа. При цьому виявилося, що, незважаючи на таке розширення запасу чисел , раніше встановлені правила алгебраїчних перетворень зберігають свою силу. Нарешті, Р. Декарту вдалося звільнити алгебру від невластивої їй геометричної форми. Усе це дозволило розглядати питання розв'язання рівнянь у самому загальному вигляді, застосовувати рівняння до розв'язання геометричних задач. Наприклад, задача про відшукання точки перетину двох ліній звелася до розв'язання системи рівнянь, яким задовольняли точки цих ліній. Такий метод розв'язання геометричних задач одержав назву аналітичного.

Переворотом як в геометрії, так і в алгебрі XVII ст. була робота Р. Декарта – "Геометрія". В цій роботі Р. Декарт дає основи символічної буквеної алгебри, тобто метод, при якому шляхом введення системи координат стає можливим виражати геометричні образи та залежності аналітично, за допомогою рівнянь. Цей метод використовувався і раніше (значний розвиток він отримав у Ферма), але у Р. Декарта він прийняв більше значення, так як за допомогою цього методу Р. Декарту вдалося змінити загальний напрямок у подальшому розвитку математичних досліджень [24,43]. Виклад методу координат був вперше опублікований у "Геометрії" Р. Декарта в 1637 р. Терміни "абсциса", від латинського abscissus – який відсікає (відрізок на вісі іксів), "ордината" від латинського ordinatus – впорядкований (відрізок на вісі ігреків) сходять до латинського перекладу творів великого старогрецького математика Аполонія і були введені у застосування у 70-80-ті рр. XVII ст. Г. Лєйбніцем. Він же абсцису разом з ординатою назвав координатами.

Великий внесок в теорію рівнянь Р. Декарт вніс своїм методом визначення додатніх та від'ємних коренів рівнянь. Цей метод виражається "правилом знаків". В "Геометрії" Р.

Декарта міститься також введений ним метод невизначених коефіцієнтів.

У XVII ст. Б. Паскаль застосував методи інтегрування для знаходження площ, об'ємів та площ поверхонь, і сформулював принцип математичної індукції. Взагалі, метод математичної індукції вперше почали застосовувати у XVI – XVII ст. Б. Паскаль, Д. Бернулі та інші математики. Але широко відомим він став тільки у XIX ст.

В той же час у працях І. Ньютона вперше зустрічаються способи виключення невідомих з систем рівнянь: спосіб порівняння невідомих та спосіб підстановки.

У XVII ст. продовжуються роботи з алгебри та тригонометрії, були створені різноманітні методи наближених обчислень, розв'язані окремі складні задачі теорії чисел. За одне це століття алгебра збагатилася більшим числом нових методів, ніж за попередні.

На початку XVIII ст. ще продовжує працювати покоління творців аналізу (І. Ньютон, Г. Лейбніц). Методи і алгоритми нових обчислень, які розробив Г. Лейбніц, стали швидко розповсюджуватись серед його сучасників. Але загальний стиль досліджень поступово змінюється. На початок XVIII ст. розвиток нових галузей математики, які створилися у XVII ст., досяг того рівня, при якому подальший рух став вимагати в першу чергу мистецтва в опануванні математичним апаратом та винахідливості у знаходженні обхідних розв'язань важких задач [148, 54].

Однією з основних проблем алгебри XVIII ст. була проблема розв'язування рівнянь в радикалах [128,84]. Ця проблема мала два аспекти: загальноалгебраїчний (функціональний) та арифметичний (числовий). Усі спроби розв'язати рівняння вищих степенів тими методами , що були придатні для розв'язання рівнянь нижчих степенів, закінчувалися невдачею. Багато хто з математиків займався цією проблемою. Одним з них був І. Ньютон.

Найбільш видатними дослідниками, які займалися розв'язанням чисельних рівнянь, є Ф. Вієт, І. Ньютон, Ж. Фур'є, В. Хорнер. Ще до Ф. Вієта Дж. Кардан використовував до кубічних рівнянь індуське правило "хибного положення", але його метод був грубим. Та Ф. Вієт придумав процес, який за принципом своїм співпадав з пізнішими методами І. Ньютона та В. Хорнера [176,257].

Поряд з проблемою розв'язання рівнянь центральне місце займає так звана основна теорема алгебри. В той час І. Ньютон читав лекції, з яких виникла відома і дуже важлива "Універсальна арифметика (Загальна арифметика)" (1707) [66,42]. Ця книга є продовженням та завершенням праць Ф. Вієта, Р. Декарта та інших вчених у справі переходу від риторичної та геометричної алгебри до символічної, сучасної алгебри. Основною метою книги являлось чисельне розв'язання задач за допомогою складання рівнянь. Після цього автори підручників вже розглядають алгебру як загальну арифметичну дисципліну, математики займаються вивченням і подальшим розвитком чисельних методів розв'язування алгебраїчних рівнянь. Щоб розв'язати задачу, пише І. Ньютон, потрібно лише "перевести її із звичайної мови на мову символічних виразів", мову алгебри. Переклад цей означає складання рівняння, розв'язання якого веде до розв'язку поставленої задачі [88, 96]. І. Ньютон сформулював основну теорему алгебри про число коренів рівняння: "Рівняння може мати стільки коренів, який у нього вимір, але не більше". Вперше ця теорема була висловлена П. Роте, А. Жираром та Р. Декартом у формулюваннях, які відрізняються від сучасного. До І. Ньютона приєднався в своїй "Алгебрі" (1748) К. Маклорен, але лише Л. Ейлер у 1743 сформулював цю теорему точно так, як це роблять і нині.

Для сум степенів коренів І. Ньютон встановив рекурентні формули, які і досі називають його іменем. Але ясно він вивів формули тільки до п'ятого степеня включно. Загальний закон їх утворення був вперше доведений К. Маклореном у "Алгебрі" та Л. Ейлером в другому томі "Творів різного змісту" (1750). Професор Г. Берман, Ж. Лагранж та Грунерт пізніше дали інші доведення. Після того, як Р. Декарт висловив своє правило знаків, І. Ньютон провів самостійне дослідження цього питання. У результаті він не тільки встановив це правило для рівнянь, усі корені яких дійсні, але і намагався вперше дати правило, яке дозволило б визначити число уявних коренів.

Також І. Ньютон торкнувся ще одного питання, яке в наш час стало важливим, а саме – проблеми зведеності рівнянь. Для випадку лінійних множників він впорався з цим питанням, а для множників вищих степенів дав перший натяк на відповідне правило. Спосіб Ньютона для лінійних множників співпадав з прийомом, який дав ще Я. ван-Вессенер в першому латинському виданні "Геометрії" Р. Декарта (1649), і в ньому можна було побачити попередника методу, який потім застосовував Л. Кронекер і розглянув всі взагалі відомі дільники.

У 1770-1771 рр. вийшли мемуари Ж. Лагранжа "Міркування про алгебраїчне розв'язання рівнянь", в якому аналізувалися усі відомі до того часу методи розв'язання в радикалах рівнянь перших чотирьох степенів. Ж. Лагранж показав, що ні один з цих методів не підходить для розв'язування рівнянь п'ятого степеня. Він дав (1769 р., опубліковане у 1771р.) загальне розв'язання невизначених рівнянь другого степеня.

Метод розв'язання систем лінійних рівнянь та виключення невідомих, який намітив Г. Лейбніц, був потім знову відкритий через декілька десятків років. К. Маклорен в своєму курсі алгебри при розв'язанні систем двох, трьох та чотирьох рівнянь з таким же числом невідомих відмітив, що всі вони виражаються дробами з одним і тим же знаменником, та був близький до встановлення правила утворення чисельника, але все ж далі цього не пішов. Загальний алгоритм розв'язання визначених систем з будь-якою кількістю невідомих і виключення невідомих з $n + 1$ рівняння з n невідомими за допомогою визначників розробив професор університету в Женеві Г. Крамер (1750), учень і друг Йогана Бернулі.

Поширенню методу визначників сприяв парижський професор математики, академік Е. Безу. Він намагався звести розв'язання будь-яких рівнянь до двочленних і прийшов до проблеми виключення невідомих. Цій проблемі Е. Безу присвятив декілька своїх цінних робіт [128,67].

Також треба згадати про прийом виключення одного невідомого з двох рівнянь. Цей прийом застосовував ще П. Ферма, але І. Ньютон замість того, щоб виключати постійні члени, усуває вищі степені невідомого, завдяки чому і отримує рівняння нижчого степеня [66 , 43]. Це – той же метод, який був у другому виданні декартової "Геометрії" (1659) Гудде і який знову досліджував у "Введенні в аналіз нескінчених" (1748) Л. Ейлер. У цій роботі Л. Ейлер на прикладах описав два прийоми виключення. Цьому питанню він присвятив ще декілька статей, в яких виклав метод, що і досі носить його ім'я.

Пройшов деякий час і визначники самі стали предметом дослідження. В цьому напрямку перші кроки були зроблені парижським академіком А. Т. Вандермондом, П. Лапласом і Ж. Лагранжем. Їхні результати зараз викладені майже у всіх роботах з теорії визначників. Алгоритмам Крамера та Безу невистачило відповідної символіки. У "Мемуарі про виключення" А. Вандермонд ввів, подібно до Г. Лейбніца, подвійну індексацію коефіцієнтів – за місцем у рівнянні та за номером рівняння. Декілька сторінок відведено визначникам і у великій статті П. Лапласа "Дослідження з інтегрального числення…" (1772 (1776)). Лаплас називав визначники результантом і, як і Вандермонд, розглядав властивості, які пов'язані з перестановкою рядів або співпаданням відповідних елементів. У своїх дослідженнях він вивів теорему, яка носить його ім'я (про вираження визначника у вигляді суми добутків мінорів на відповідні ад'юнкти). Ж. Лагранж також дав розклад визначника за елементами будь-якого ряду і довів, що сума добутків елементів ряду на ад'юнкти, відповідні елементам паралельного ряду, дорівнює нулю [128].

На початку XIX ст. теорією визначників займався польський філософ і математик Ю. Вронський. Новими успіхами у XIX ст. теорія визначників зобов'язана перш за все О. Коші, а потім К. Г. Якобі, А. Келі і Дж. Сільвестеру. Ці успіхи поклали основу розвитку нових важливих галузей математики: лінійної алгебри, матричного числення, алгебраїчної теорії форм та їх інваріантів.

У XVIII ст. була видана робота Л. Ейлера (1770 р.) “Алгебра” і її можна вважати завершенням розробки елементарної алгебри. Майже всі методи та способи розв’язування задач з елементарної алгебри на цей час були відомі. Надалі математики займалися розробкою методів вищої математики та впровадженням тих чи інших методів до навчання у школах.

Невдалі спроби розв’язати рівняння вище четвертого степеня не змогли похитнути переконання математиків XVIII ст. про розв’язність усіх алгебраїчних рівнянь у звичайних ірраціональностях. Великий Л. Ейлер теж дотримувався цієї точки зору. Він вказував, що розв’язання рівнянь другого, третього і четвертого степенів зводиться до рівнянь першого, другого і третього степенів; ці останні рівняння він називав “розв’язне рівняння”.

За допомогою розкладання в неперервні дроби Л. Ейлер довів (1737р., опубліковане у 1744 р.) ірраціональність числа e та $e2$, а німецький вчений М. Ламберт (1766 р., опубліковане у 1768 р.) – ірраціональність числа π. І. Ньютон, Л. Ейлер та французький математик Е. Безу розвивали теорію подільності многочленів та теорію виключення. Дж. д’Аламбер довів (1748), що модуль многочлена не може мати мінімуму, відмінного від нуля, вважаючи це за доведення існування кореня у будь-якого алгебраїчного рівняння. Формули математиків А. Муавра і Л. Ейлера, які пов’язують показникову та тригонометричну функції комплексних аргументів, привели до подальшого розширення застосування комплексних чисел. І. Ньютон, Дж. Стірлінг і Л. Ейлер заклали основи обчислення скінчених різниць. Лаплас дав загальні методи розв’язання різницевих рівнянь [148,57].

Багато уваги у XVIII ст. приділялося числовим наближеним методам. Першим вченим , до якого прийшла думка систематично розв’язувати числові рівняння наближеним шляхом, був Ф. Вієт. Ньютон, у всіх роботах якого на першому плані стояли інтереси практики, звернув увагу на це питання ще на початку своєї математичної діяльності. Тоді ж він розробив метод, котрий і досі носить його ім’я. У застосуванні до числових рівнянь метод Ньютона переробив вже Е. Галлей. Але в тому вигляді, в якому він використовується і досі, його вперше опублікував Л. Ейлер (метод із застосуванням для створення підстановок ряду Тейлора). Іншим наближеним методом, що базувався на зовсім іншій основі, ніж спосіб Ньютона, був спосіб рекурентних рядів, який повідомив Д. Бернулі (1728(1732)). Окрім методу Бернулі, який зберігся до нашого часу у формі, що надав йому Ж. Лагранж, XVIII століття принесло ще два оригінальних методи І. Г. Ламберта. Обидва вони були викладені у статті “Різноманітні зауваження про чисту математику” (1758).

Ідеї І. Ламберта отримали розвиток і у Ж. Лагранжа, який опублікував статтю “Новий метод розв’язання буквених рівнянь за допомогою рядів”. Крім відкриття ряду, який можна було застосовувати для розв’язання алгебраїчних і трансцендентних рівнянь, Ж. Лагранжу належало ще і відкриття нового наближеного методу, який ґрунтувався на розкладанні у ланцюгові дроби.

У Росії та в Україні деякі результати в галузі алгебри були і в допетровські часи, але вони не були систематизовані. З початку XVIII ст., – після того як були організовані державні школи різних типів, в яких навчання математики грало важливу роль, – з’являються друковані роботи з математики взагалі або з окремих її галузей. В ці роботи зразу ж включаються і відомості з алгебри [285, 238]. Але все одно навчання алгебри носило в більшій кількості випадків допоміжний характер. Алгебра була підготовчим курсом до аналізу. До того ж, окрім робіт Л. Ейлера, спеціальних наукових робіт з алгебри в Росії не з’являлося. Алгебраїстів не було ні серед російських математиків XVIII ст., ні серед працюючих тут іноземців.

Для Росії важливим роком в історії математичної освіти є 1703 рік. В цьому році вийшла книга “Арифметика” Л. Магніцького. На протязі півстоліття ця книга була посібником для всіх людей, які прагнули до математичної освіти. У зв’язку із зростанням кількості шкіл потрібно було розв'язати проблему підручників математики [178,13]. Ще у 1699 році в Амстердамі був надрукований твір І. Копієвського "Коротке і корисне руковведення у арифметику, або в навчання та пізнання всілякого рахунку, в поєднанні всіляких речей". Класична література з математики користувалася у XVIII столітті увагою педагогічної громадськості. У 1703 р. були видані таблиці логарифмів Влакка (перевидані у 1715 р.). "Початки" Евкліда перекладалися три рази. У 1739 р. вийшов переклад "Евклідових елементів" А. Таке, під редакцією Е. Фархварсона. Цією книгою користувалися як підручником у Морському корпусі. Також алгебру культивували і інші математики. У 1752 р . була видана Російською академією робота Н. Є. Муравйова "Початкове заснування математики". Далі слід назвати "Універсальну арифметику" Н. Г. Курганова, яка вийшла у 1757 р., перевидана у 1794 р. Вона являє собою підручник арифметики і алгебри. Д . С. Анічков у 1765 р. видав "Теоретичну і практичну арифметику", де ввів приклади і задачі, змінив деякі доведення, зробив курс більш живим та змістовним.

У 1767 р. була написана (вірніше, продиктована) "Універсальна арифметика" Л. Ейлера. На російській мові вона вийшла в перекладі В. Є. Ададурова в Петербурзі у 1787 – 1788 рр., і у неповному перекладі – вже у XIX ст. – у 1812 р. Були і інші підручники та рукописи, за якими вивчали математику. У школах Львова, Луцька, Перемишля та інших математику вивчали за рукописами з філософії, в яких багато уваги приділено питанням математики. Рукопис "Філософія" Теофіла, яка написана латинською мовою у 1775 р., складався з трьох частин. Одна з частин – "Практична арифметика та алгебра" являла собою конспект лекцій, які читав Теофіл у Луцькому колегіумі. Аналіз цієї роботи показав, що основою для написання цього рукопису послужили в першу чергу праці І . Ньютона і Л. Ейлера. У рукописі зібрані всі найновіші тогочасні досягнення західноєвропейських математиків [219, 38].

Потім книга Евкліда „Початки" була перекладена у 1769 р. та у 1784 р., і останнє видання повторене у 1789 р. У 1787 р. вийшов "Практичний і теоретичний курс чистої математики" Є. Войтяховського. Ця книга є практично-теоретичним керівництвом, 4-й том якого присвячений алгебрі. Також у Львівській кафедральній школі використовувався рукопис "Арифметика, Геометрія, Тригонометрія, Перспектива", написаний у Львові в 1790 р. І. Леським. Цілий ряд відомостей з вищої алгебри було викладено в "Новій алгебрі" магістра філософії і вільних мистецтв Московського університету А. Барсова. В академічному університеті математики спочатку навчали за курсом Хр. Вольфа в перекладі С . К. Котельникова під назвою "Скорочення перших основ математики" (1770-1771). Потім підручник Хр. Вольфа був на деякий час замінений "Початковими основами математики" А. Г. Кестнера (1-е видання 1758-1760). У 90-х роках XVIII ст. цей підручник був перекладений на російську мову академіком А. Б. Іноходцевим; там теж є алгебраїчна частина.

Крім названих, як підручник використовувалися: "Курс математики" Т.Осиповського , українського математика, який працював на посаді професора математики в Петербурзькому педагогічному інституті та праця Феофана Прокоповича під заголовком "Арифметика і геометрія, два перші і найбільш плодовиті початки математичних наук, пояснені в Києво-Могилянській академії..." яка збереглася в двох примірниках латинською мовою.

Алгебра (та і взагалі математика) XVIII ст., спираючись на ідеї XVII ст., за розмахом робіт далеко перевершила попередні століття. Цей розквіт був пов'язаний із діяльністю академій та університетів. Всі математики, починаючи з Ейлера, писали підручники та великі трактати, які включали в себе окремі дослідження. Також алгебра XVIII ст. збагатилася багатьма методами розв'язування рівнянь вищих степенів та наближеними методами. Але чіткі уявлення про основні початки алгебри сформувалися лише у дев'ятнадцятому столітті. В той час була поширена думка, що між арифметикою та алгеброю немає різниці [176, 263].

Математика XVIII ст. в значній мірі недооцінювала навчальне значення задач; пропагандистом нових ідей в методиці математики став В. О. Латишев. В своїй основній роботі “Руководство к преподаванию арифметики” Латишев приходить до висновку про єдність теорії і практики, висуває принцип свідомого навчання.

2.1.3. Розвиток методів і способів розв’язування алгебраїчних задач (XIXст. – 20-і роки XXст.). На початку XIX ст. предмет алгебри (як і всіх математичних предметів) почав змінюватись. Дві нові ідеї розширили її межі. Перша полягала в тому, що не обов’язково обмежувати себе числом та формою, вона може з успіхом займатися вивченням деяких елементів. Друга – стверджувала, що математику можна розглядати як логічне дослідження, яке не має відношення ні до чого конкретно та просунула процес абстрагування ще на крок уперед.

Зрозуміло, що нові ідеї в алгебрі, які з’явилися на початку XIX ст., народилися на основі того, що було відомо до того часу. Одним із стимулів до розвитку виявилося поняття квадратного кореня з „–1” – величина, яку зазвичай позначають через і. Це поняття в XVII-XVIII ст. використовувалось при розв’язуванні широкого кола задач, але ніхто не міг задовільно тлумачити його як число. На початку XIX ст. були запропоновані два напрями розв’язання цієї проблеми. У першому з них використовувався так званий абстрактний метод , в якому і представлялось як ряд досить довільних операцій над парами чисел. У другому напрямку і одержало конкретну інтерпретацію і ототожнювалось з геометричною операцією: поворот на прямий кут на площині.

Обидва з зазначених напрямків показали шлях подальших досліджень. Введення і в елементарну алгебру привело до відкриття у 1843 році кватерніонів (У. Р. Гамільтон). Відкриття кватерніонів справило велике враження на математиків тих часів, воно вважалось останнім словом в алгебрі і ідеальним методом розв’язання більшості алгебраїчних проблем. В дійсності кватерніони були скоріше першим, а не останнім словом.

Почала розвиватись алгебра, яка відкинула деякі з основних понять стародавньої алгебри. Поняття “алгебра” поступово розширилось настільки, що стало включати в себе будь-яку систему робочих символів разом з правилами їх запису. На кінець XVIII ст. алгебра була не просто мистецтвом виконувати обчислення з числами, буквами і загадковими величинами [200,66]. Алгебра містила сукупність правил і формул та вміння правильно їх тлумачити. Комплексні числа були вже майже всіма визнані, існувала певна теорія лінійних рівнянь, вже намітились деякі принципи, початки теорії рівнянь довільного степеня від одного невідомого. Але поряд з досягненнями математичного аналізу це було дуже і дуже мало, алгебра знаходилась в той час десь на околицях математики.

По відношенню до попередніх етапів XIX ст. слід назвати періодом великих відкриттів та перетворень в галузі алгебри. Перетворення алгебри виявилось настільки фундаментальним, що порівняно з початком століття сам предмет алгебри, її основні поняття і методи, її місце в математиці докорінно змінились.

На початок XIX ст. зміст алгебри суттєво розширився і збагатився новими поняттями і теоріями. Нові алгебраїчні поняття і алгебраїчний підхід охопили майже всю математику, з’явилась певна тенденція алгебраізації математики. Виникли нові розділи науки: алгебраїчна теорія чисел, алгебраїчна геометрія, теорія груп, теорія полів та лінійних просторів [202, 39].

Метод найменших квадратів, який використовував ще К. Гаусс у 1794(1795) р., знову був запропонований А. Лежандром у 1805(1806) р. Але строге математичне обґрунтування застосовуваності цього методу було дано А. Марковим та А. Колмогоровим [204, 390].

У той же час розробляється теорія диференціальних рівнянь із частинними похідними і особливо теорія потенціалу. В цьому напрямі працює більшість крупних аналітиків початку та середини століття: німецький математик К. Гаусс, французький математик Ж. Фур'є, С. Пуасон, О. Коші, німецький математик П. Діріхле, англійський математик Дж. Грін, український математик М. Остроградський. М. Остроградський заклав основи варіаційного числення для функцій декількох змінних, знайшов (1828 р., опубліковане у 1831р.) формулу перетворення потрійних інтегралів у подвійні, удосконалив теорію заміни змінних у кратних інтегралах (1836 р., опубліковане у 1838 р.), отримав результати, які пізніше були отримані німецьким математиком К. Якобі (1841 р.). У 1844 р. М. Остроградський вперше запропонував метод виділення раціональної частини невизначеного інтеграла, який назвали методом Остроградського. Також українські математики М. Остроградський та В. Буняковський займалися в той час застосуванням теорії ймовірностей до приймального контролю та статистики. П. Чебишев дає строге обґрунтування елементів теорії ймовірностей і доводить свою знамениту теорему, яка об'єднала в одному формулюванні відомі раніше форми закону великих чисел (1867 р.) [148, 72].

У 1821 і 1823 рр. О. Коші опублікував свої лекції, які містили в собі строгий виклад теорії границь, теорії рядів, означення поняття неперервності функції та заснований на теорії границь виклад диференціального та інтегрального числення. Деякі додатки до цього викладу, а також теорема про існування та єдиність розв'язків диференціальних рівнянь були опубліковані пізніше. У 1826 р. О. Коші опублікував роботу, в якій дав методи січної та дотичної у загальному вигляді. Надалі Е. Люка подав у геометричному вигляді два основних методи знаходження розв'язків неозначуваного рівняння третього степеня – метод дотичної та метод січної. А у 1835 р. обробляючи експериментальні дані про дисперсію світла, отримані І. Фраунгофером, О. Коші прийшов до методу наближення функцій, який він назвав "новим методом інтерполяції".

М. Лобачевський у 1834 р., а пізніше Діріхле у 1837 р. сформулювали означення функції як довільної відповідності. Також у 1834 р. М. Лобачевський, а незалежно від нього К. Грєфє у 1837 р. запропонували метод для одночасного обчислення коренів багаточлена. Цей метод називають методом Лобачевського або методом Грєфє.

На основі точного розуміння природи комплексних чисел виникає теорія функцій комплексного змінного. К. Гаусс дуже багато знав в цій області, але майже нічого не опублікував. Відповідно, загальні основи теорії були закладені О. Коші; теорія еліптичних функцій була розвинута Н. Абелем і К. Якобі. Вже на цьому етапі є характерним, на відміну від чисто алгоритмічного підходу XVIII ст., зосередження уваги на своєрідній поведінці функцій в комплексній області. В період захоплення теорією функцій комплексного змінного видатним представником інтересу до конкретних питань теорії функцій в дійсній області став П. Чебишев. Як результат цього інтересу з'явилась створена П. Чебишевим теорія найкращих наближень. Ця теорія пізніше набула широкого застосування в теорії машин і механізмів.

На суттєво новий рівень піднімається в XIX ст. і розробка старих задач теорії чисел, пов'язаних з найпростішими властивостями звичайних цілих чисел. К. Гаус розробляє теорію представлення чисел квадратичними формами (1801р.); П. Чебишев одержує основні результати про густину розміщення простих чисел в натуральному ряду (1848 р., 1850р.); П. Діріхле доводить теорему про існування нескінченого числа простих чисел в арифметичних прогресіях (1837 р.).

Подальші успіхи теорії алгебраїчних чисел були пов'язані як з законами взаємності, так і з великою теоремою П. Ферма. Спроби довести цю теорему привели Е. Куммера до вивчення арифметики полів. Останній в 1844-1847 рр. відкрив, що для цілих чисел таких полів не виконується закон однозначності розкладання на прості множники, якщо під простим числом розуміти нерозкладне ціле число цього поля. Ці роботи Е. Куммера, зокрема його ідеальні множники, склали ядро комутативної алгебри.

В першій половині XIX ст. продовжувався також розвиток лінійної алгебри. В "Арифметичних дослідженнях" К. Гаусса наведене ґрунтовне дослідження цілочисельних квадратичних форм від двох змінних, яке суттєво вплинуло на розвиток лінійної алгебри. Робота О. Коші "Про рівняння, з допомогою якого визначають вікові нерівності руху планет" (1826 р.) була неявно присвячена власним числам матриці довільного порядку. Пізніше, у 1834 р. з'явилась робота К. Якобі, в якій явно досліджувались квадратичні форми та їх приведення до канонічного виду. Той же К. Якобі у 1841 р. надав більш скінчений вигляд теорії визначників.

Розв'язання рівнянь завжди привертало увагу математиків. У загальних методах розв'язання рівнянь шукали ключ до розв'язання найбільш важких математичних проблем, і саме на шляху розв'язання рівнянь було зроблено багато великих відкриттів. На кінець XVIII ст. і початок XIX ст. однією із головних задач алгебри стала задача розв'язання алгебраїчних рівнянь в радикалах. Алгебру, як відомо, називали наукою про розв'язування рівнянь. Ставилася задача, щоб знайти способи виражати розв'язки рівнянь виду anxn+…+a1x+a0=0 через коефіцієнти за допомогою чотирьох арифметичних операцій та операції добування кореня довільної степені. Вважали, що найбільшим успіхом було б знайти способи розв'язування рівнянь довільної степені з довільними коефіцієнтами, але багаточисельні пошуки такого способу були безрезультатними.

Ще від Діофанта ведуть початок синтетичні методи розв'язування рівнянь. Застосування цих методів відобразилося у поглядах на природу рівнянь. Методи розв'язання рівнянь, які використовувались Діофантом, дуже різноманітні. У розв'язаннях, які він наводить, слід відмітити дуже типову рису: Діофант всюди оперує з невідомими числами як з відомими, і, по суті, замінює одні рівняння іншими, їм рівносильними.

Діофантові рівняння у всі часи привертали увагу математиків. Ними займалися: П. Ферма (1601-1665), Л. Ейлер (1707-1783), Ж. Лагранж (1736-1813), К. Гаус (1777-1855), П. Чебишев (1821-1894) та ін.

Формули для розв'язання рівнянь третього і четвертого степеня були знайдені раніше і у XIX ст. почалися пошуки формул, які б виражали корені рівняння п'ятого та більш високих степенів через коефіцієнти цих рівнянь за допомогою радикалів. Ще у 1799 р. П. Руфіні у творі "Загальна теорія рівнянь…" зробив спробу довести нерозв'язуваність у радикалах рівнянь степеня більшого за четвертий, посилаючись на результати Ж. Лагранжа. Задовільне розв'язання цієї проблеми належить норвезькому математику Н. Абелю у 1826 р. Але ж існують скільки завгодно рівнянь степеня вищого за четвертий, які в радикалах розв'язуються. Н. Абель здійснив ряд досліджень з цього питання, але не зміг відшукати загального критерію розв'язуваності в радикалах рівнянь вищих степенів з числовими коефіцієнтами. Це здійснив французький математик Е. Галуа [65,142]. Здобуті Е. Галуа результати визначили основний напрям розвитку алгебри в майбутньому – вона стала вивчати абстрактні алгебраїчні структури, першим представником яких є поняття групи, започатковане самим Е. Галуа. Виходили роботи, які були присвячені чисельному розв'язанню рівнянь вищих степенів. Так, Н. В. Бугайов запропонував оригінальний ітераційний процес (1896-1897), а Д. Граве у 1883 р. застосував до розв'язування тричленних рівнянь з дійсними коефіцієнтами видозмінений спосіб Гаусса.

Пошуки формул для розв'язання рівнянь вищих степенів не привели до позитивних результатів. Це призвело до розробки різноманітних методів наближеного розв'язання рівнянь. У наближеному обчисленні коренів чисельних рівнянь широке застосування знаходять два методи, які збереглися в математичній практиці із стародавніх часів до наших днів: метод підбору та метод "хибного положення". Який би з методів наближеного обчислення ми не розглядали – метод Ньютона або Горнера, чи метод Лагранжа (за допомогою неперервних дробів), або метод ітерацій – всі вони представляють собою розв’язування рівнянь за допомогою підбору.

В той же час розвивались і методи розв’язування диференціальних рівнянь. Перші застосування символічних методів в теорії лінійних диференціальних рівнянь належать Б. Брісону і відносяться до XIX ст. Б. Брісону належить ідея двох основних методів. Перший метод – метод факторизації, другий метод – метод розкладання. Після Б. Брісона методи в теорії диференціальних рівнянь отримали розвиток у багатьох роботах математиків XIX ст. Важливі результати були отримані О. Коші. Великий вклад внесли англійські математики: Д. Грегорі, Дж. Буль та О. Хевісайд. О. Хевісайд застосував символічне числення або, як його назвали у Англії, операційне числення до розв’язання прикладних задач. В роботах О. Хевісайда операційні методи розв’язання задачі Коші для рівнянь з постійними коефіцієнтами, знайшли і друге народження, і в той же час завершення [237, 88]. Ці проблеми залишаються актуальними і в XX ст.

В той же час з’явилося декілька робіт про відокремлення дійсних коренів рівняння, і серед них статті А. Маркова (1886), П. Назімова про метод Штурма (1886) і В. Стєклова (1893). У 1884 у дисертації А. Васильєва був викладений і доповнений метод характеристик Л . Кронекера.

Для розв’язування лінійної системи рівнянь з великим числом невідомих зручний метод послідовних наближень дав німецький математик П. Зейдель (1874). П. Нєкрасов знайшов декілька практично вигідних правил збіжності цього методу (1892) [338, 538].

В кінці XIX ст. – на початку XX ст. алгебраїчні методи отримали все більш широке застосування в геометрії, математичному аналізі, а потім і в фізиці, так що можливо говорити, що відбулася алгебраізація математики [199,122].

На початку XIX ст. алгебра, як дисципліна більш абстрактна, опинилася під сильним впливом формальних схоластичних залежностей, які панували в органах міністерства народної освіти. Програма курсу алгебри для середніх навчальних закладів в першій половині XIX ст. була громіздкою: після ділення дробів ішло розкладання дробів у ланцюги; дії над коренями складалися із таких вправ, як добування квадратного кореня з многочлена, добування кореня кубічного та вищої степені з многочлена, добування квадратного кореня з біному ; потім вивчалися дії над уявними кількостями; після логарифмів вивчалися неперервні або ланцюгові дроби, якими закінчувалася перша частина алгебри. Рівняння (першого степеня, квадратні і вищих степенів) відносилися до другої частини, кубічні рівняння розв’язувалися трьома способами (за формулою Кардано, за дільниками останнього члену, і за наближенням); далі вивчалися арифметична та геометрична прогресії. Програма була схожа як для гімназій, так і для інших учбових закладів (морський корпус та ін.) [178, 95].

Перші офіційні учбові плани, а значить, і офіційно рекомендовані шкільні підручники , датуються 1804 р. В той час шкільні знання були енциклопедичними і поверхневими, хоча підручники (наприклад, перекладений підручник А. Г. Кестера або підручники Т. Ф. Осиповського та Н. І. Фусса) включали дуже широкий учбовий матеріал, який явно перевищував гімназійний курс [156, 72].

У 1825 р. був представлений рукопис М. І. Лобачевського “Алгебра”. Він включав в себе розрахунок неперервних дробів, неозначені рівняння, уявні степені і корені та логарифми. В період з 1828 по 1864 рр. з’явилися підручники математики авторів Ф. І. Буссе, П. С. Гур’єва, Д. М. Перевощікова, К. Д. Краєвича та ін.

В історії навчання алгебри роль задач змінювалась разом з еволюцією її методів. На початку XIX ст. при пануванні догматичного методу навчання задачі з алгебри майже не розв’язувались, задачників не було, а в підручниках наводились лише декілька прикладів для роз’яснення загальних правил. Перший збірник задач з алгебри з’явився у 1845 р., коли в гімназійний курс алгебри ввели вправи (Практичні вправи, складені за останнім розподілом викладання математики в гімназіях А. Больманом). Цей задачник був пристосований до поширеного тоді підручника алгебри П. Погорєльського [92, 21]. З розвитком методів навчання, вивчення алгебри стало неможливим без розв'язування задач. З'явились товсті підручники алгебри, які включали в себе велику кількість прикладів і задач, тобто являли собою і підручник, і задачник.

Друга половина XIX ст. характеризується інтенсивною роботою зі створення підручників алгебри. В цей період створюються найбільш популярні підручники: Г. Сомов "Початкова алгебра" (1860), А. Давидов "Початкова алгебра" (1866), Є. Пржевальський "Початкова алгебра" (1867), Ф. Бичков "Збірник прикладів і задач" (1868), А. Малінін та К. Бурєнін "Керування алгебри" (1875) та ін. Викладач морського кадетського корпусу О. М. Страннолюбський у 1868 році випустив "Курс алгебри", в якому алгебраїчні поняття вводяться шляхом поступового узагальнення арифметичних задач. Це була перша російська книга з методики алгебри.

У 60 – 80-ті роки найбільшою популярністю користувалася "Початкова алгебра" А. Давидова, яка включала статті, більша частина яких була виключена з програм гімназій лише у 1890 р.: добування кубічного кореня з алгебраїчних виразів, поширення біному Ньютона на показники від'ємні і дробові, рівняння третього і четвертого степенів, невизначені рівняння першого степеня із багатьма невідомими, невизначені рівняння другого степеня, розкладання у ряди за методом невизначених коефіцієнтів [178, 96].

Наступником книги А. Давидова стала "Елементарна алгебра" А. П. Кисельова, перше видання якої вийшло в 1888 р. До 1917 р. було надруковано 33 видання книги А. Кисельова. Підручник А. Кисельова за простотою і загальною доступністю викладу більше відповідав програмам гімназій 1890 р., що і дозволило йому витіснити з середньої школи книгу А. Давидова.

Для викладачів у 1887 і 1888 рр. двома частинами вийшла "Елементарна алгебра" М. Маракуйєва. На той час це був один з найбільш повних і розроблених курсів, який служив "довідковою книгою" протягом багатьох років. В цьому підручнику для розв'язування алгебраїчних задач пропонуються: арифметичний спосіб; метод складання рівнянь; спосіб еквівалентних перетворень рівнянь.

Для розв'язування системи рівнянь першого степеня з двома невідомими використовувались методи виключення, зокрема: спосіб вирівнювання коефіцієнтів при невідомих; спосіб підстановки; спосіб порівняння величин невідомих; метод невизначених коефіцієнтів (метод Безу).

При розв'язуванні нерівностей та систем нерівностей першого степеня з декількома невідомими пропонувались наступні способи: спосіб піднесення до степеня; спосіб розкладання на множники; спосіб перетворення полінома у суму квадратів; спосіб порівняння величин невідомих; спосіб вирівнювання коефіцієнтів.

Слід відмітити, що методи та способи розв'язування задач в тексті підручника виділені окремо. Для кожного з методів та способів розглядається теоретична основа як прообраз операційного складу. Вказується, на основі яких теорем та висновків з них пропонується той чи інший метод. Наприклад, метод невизначених коефіцієнтів наводиться в підручнику після вивчення теореми Безу та наслідків з неї [332].

У 1887 р. під назвою "Методичний збірник алгебраїчних задач" вийшов в світ задачник М. А. Шапошникова і М. К. Вальцова. Цей збірник до 1917 р. витримав 24 видання.

Одним із кращих задачників кінця XIX ст. став комплекс із чотирьох збірників задач О. І. Гольдберга. Гольдберг підтримував ідею, що задача – не ціль, а засіб навчання, і на цьому принципі формував свої задачі. В цей же час працював і С. І. Шохор-Троцький – творець методу доцільних задач, або конкретно-індуктивного методу в алгебрі. За Шохор-Троцьким "із задач починається урок, задача стає вихідним текстом, з якого починається вивчення нового математичного уявлення". Особливо важливе значення Шохор-Троцький надає простим задачам, які вважає засобом формування нових понять та підвищення рівня навчально-пізнавальної діяльності учнів [178].

Спостерігались випадки складання підручників за іноземними зразками. Директор Петербурґського реального училища М. Білібін випустив свою "Алгебру", використавши як зразок підручники Бертрана, Тодгентера і Комбетта. Ця книга не пішла далі третього видання і фактично себе не окупила. Поодинокі видання іноземних підручників не знайшли поширення, і взагалі, іноземна навчальна література з алгебри була повністю витіснена.

Це сталося тому, що в роботу над підручниками, крім вчених-математиків широко включились і рядові педагоги: А. Веребрюсов (Харків, 1889), П. Матковський (Київ, 1890), Д. Хмиров (Орел, 1891), Б. Чиханов (Люблін, 1899) та багато інших [178, 111].

В кінці XIX ст. на Галичині з'явились перші українські підручники з математики (О. Савицького, П. Огоновського, В. Левицького). Ці підручники містили багато цікавого матеріалу, який актуальний і сьогодні, якщо не на уроках, то принаймні для гурткової роботи . Зокрема В. Левицький у 1908-1912 рр. видав у Львові підручники з алгебри для середніх і старших класів гімназій.

Початок нового століття вніс істотні зміни у навчання алгебри. Передова педагогічна думка визнала, що в курс алгебри потрібно включити: ідеї змінної величини, поняття функції , вивчення процесу зміни простіших функцій та графічний метод зображення функціональної залежності. Учбова література XIX ст. не визнавала цих ідей. Підручники дотримувались формального викладення курсу.

В кінці XIX ст. і на початку XX ст. в Європі та Росії відбулась реформа математичної освіти, основними характеристиками якої були:

1) наближення навчального предмету математики до математичної науки;
2) оновлення змісту шкільної математики;
3) об'єднання теоретичної і прикладної математики;
4) наближення між собою окремих предметів шкільного курсу математики.

Але повному проведенню реформи завадив початок I Світової війни [21]. На початку XX ст. з'являються підручники нового типу, які прагнуть заповнити основний недолік навчання алгебри. До них відносяться книги: М. Маракуйєва "Елементарна алгебра" (1903), К. Лєбєдінцева "Курс алгебри для середніх учбових закладів" (1909 – I ч. і 1919 – IIч.), "Концентричне керівництво алгебри" (1914 – I і II чч.), "Систематичний збірник задач по курсу алгебри" (1910 – I і II чч.); А. Глаголєва "Елементарна алгебра і збірник вправ і задач" (1911); Д. Лєвітуса "Курс елементарної алгебри для середніх учбових закладів" (1911 – I ч. і 1912 – II ч.).

Широко розроблялися ідеї про включення функціональної залежності у шкільний курс математики (роботи К. Лєбєдінцева, А. Глаголєва, Д. Лєвітуса та ін.) З'являються нові оригінальні підручники: В. Фрідман "Концентричний підручник алгебри" (1912 – I ч. і 1913 – II ч.); Д. Бем, А. Волков та Р. Струве "Збірник вправ і задач з елементарного курсу алгебри" (1916 – I ч. і II ч.) та ін. До жовтня 1917 р., таким чином, були закладені основи методики оновленого курсу шкільної алгебри [178, 139].

2.1.4. Вивчення і використання методів розв'язування алгебраїчних задач в період з 20 -их років XXст. до кінця XXст. XX ст. – це етап становлення та розвитку абстрактної алгебри , яка будувалась на основі аксіоматики і теорії множин. Проблема дослідження та розв'язання визначених рівнянь відійшла на другий, якщо не на третій план. Проблема розв'язання невизначених рівнянь злилася з однієї сторони з теорією чисел, а з іншої – з алгебраїчною геометрією [34, 65]. У цей час зусилля математиків були спрямовані на обґрунтування операційних методів, а також на розробку аналогічних методів для розв'язання диференційних рівнянь з змінними коефіцієнтами [237, 90].

На цьому етапі велику роль відіграють внутрішні потреби алгебри, що стала великим та розгалуженим розділом математики, який має багаточисельні зв'язки з іншими розділами математики і не тільки математики.

Після революції 1917 року зникло розділення шкіл на початкові, вищі навчальні училища, гімназії, реальні училища, ремісничі, технічні, комерційні училища та всі види інших шкіл. Натомість з'явилася єдина трудова школа, яка розділялася на два ступені: I – для дітей від 8 до 13 років (п'ятирічний курс) і II – від 13 до 17 років (чотирирічний курс). У 1918 році був опублікований проект плану занять з математики єдиної трудової школи I ступеня та розроблений проект програми з математики для школи другого ступеня. Програма була складена за роками навчання. В основу цієї програми був закладений принцип: існують проблеми, які вимагають використання математики. Для шкіл першого ступеня рекомендувалося, наприклад: на другому році навчання – складання рівнянь виду

на числах, розв'язання яких ведеться за догадливістю, або перетворення на числах; більш складна алгебраїчна пропедевтика давалася у третьому класі; у четвертому класі розвивалася планіметрія разом із стереометрією; а у п'ятому – давалися початки

тригонометрії із виводом формули: . Орієнтовна програма з математики для шкіл другого ступеня (фізико-технічної групи) містила такі розділи: ірраціональні числа; диференціювання показникової та логарифмічної функцій; геометрична та механічна інтерпретація похідної та інтеграла; друга та вищі похідні; ряди Тейлора та Маклорена; збіжність рядів та ознаки збіжності д'Аламбера; диференціальні рівняння; вираження теорем механіки, термодинаміки та електротехніки у формі диференціальних рівнянь; основи теорії імовірностей; комплексні числа та дії над векторами.

В пояснювальній записці до орієнтовних планів занять з математики у середніх школах другого ступеня було написано: "У зв'язку з розширенням загального кругозору учнів розширюється галузь застосування математики як знаряддя дослідження світу, разом з тим математичний метод – метод дедуктивного міркування – найбільш економний спосіб мислення, повинен стати звичним методом учнів… Так, квадратна функція в плані з'являється з досліджень тіла, яке падає, лінійна – з аналізу рівномірного руху, і у всіх останніх випадках в основу вивчення нового математичного факту повинен бути покладений який-небудь конкретний факт, живе явище…" [21].

Вивчення теоретичного матеріалу з математики було віднесено на другий план. Тому центр тяжіння був зміщений з підручників на задачники.

У 1919 р. виникає питання про особливу середню школу – рабфак, - яка готувала робочу молодь до вступу у радянські вузи. У 1920 р. виходять орієнтовні "Навчальні плани єдиної трудової школи I і II ступеня". Програми були складені в дусі петроградських програм з розбивкою за традиційними дисциплінами предмету математики: арифметики, алгебри, геометрії, тригонометрії [21, 14-28].

На початку XX ст. встановився наступний обсяг теоретичних відомостей щодо рівнянь в середній школі: рівняння першого степеня з одним невідомим і системи рівнянь першого степеня з двома невідомими, їх розв'язання і дослідження; розв'язання і дослідження розв'язків рівнянь другого степеня з одним невідомим; розв'язання системи рівнянь другого степеня з двома невідомими; розв'язання простіших двочленних рівнянь; розв'язання рівнянь вищих степенів, які зводяться до рівнянь другого степеня або до простіших двочленних рівнянь; ірраціональні рівняння. Із трансцендентних рівнянь в навчальну програму входили показникові і логарифмічні рівняння.

У підручниках алгебри початку XX ст. існувало дві точки зору на визначення рівнянь. Домінуюче положення в шкільному викладанні продовжувала займати статистична точка зору внаслідок широкого розповсюдження підручників А. Давидова і А. Киселева [140], [141

]. Підручники останнього автора на певний час займали монопольне положення в школі. Надалі питання рівносильності рівнянь займають все більше місця в процесі навчання. В одному з перших підручників А. Глаголєва доводяться дві основні теореми про рівносильність рівнянь, розглядаються на прикладах випадки появи сторонніх розв'язків та

втрати розв'язків. Автор спеціально займається розв'язанням дробових рівнянь виду , де A і B многочлени, цілі відносно x. Для систем рівнянь першого степеня з двома невідомими доводяться дві теореми про еквівалентність, на яких засновується розв'язування систем рівнянь (використовується метод підстановки). Приблизно так само формується теорія рівносильності і розв'язання рівнянь в більшості підручників першої половини XX століття. Також багато уваги приділяється геометричному тлумаченню рівнянь та їх розв'язків в курсі алгебри середньої школи.

У зв'язку із переміщенням центру тяжіння із підручників на збірники задач у 1919 – 1922рр. з'явився ряд нових задачників з алгебри (і математики) із оновленим змістом [21,28] :

1) П. Казанцева "Схема задачника для сельской школы I ступени";
2) Е. Сумеркин "Образцы упражнений по курсу математики школ первой ступени";
3) Я. Перельман "Веселые задачи";
4) А. Бем, А. Волков, Р. Струве "Сокращенный сборник упражнений и задач по элементарному курсу алгебры";
5) К. Ростовский, Я. Розенталь "Практический задачник по математике" (Посібник для проведення занять за принципом методу дослідження);
6) А. Ланков "Алгебраический задачник на основе техники и экономики" (ч. I і II);
7) И. Гордон, А. Зарецкий, М. Зарецкий, П. Ковалевский, С. Остапенко, Р. Пономарев, Д. Синцов, О. Шехтон "Математический задачник для школ рабочей молодежи".

З 1923 року було прийнято рішення (на основі необґрунтованих експериментів) про перехід від предметного вивчення матеріалу до комплексних програм.

Недоліки (слабка математична підготовка учнів) шкільної математичної освіти виявилися через декілька років при вступі випускників до вузів. Тому у 1931 році школа повернулась до уроку як основної форми навчання і вивчення предметів загальноосвітнього циклу за науково обґрунтованими програмами і стабільними підручниками. При навчанні алгебри в школі основними були підручники А. П. Кисельова [140]. Підручники А. П. Кисельова перевидавали при Радянській владі до 50-х років XX ст. У них одним із перших згадується спосіб підстановки при розв'язуванні системи рівнянь та спосіб алгебраїчного додавання, як варіанти методу рівносильних перетворень. Способи, для яких не можна подати загального правила (алгоритму), у Кисельова названі штучними, але їх можна віднести до групи способів рівносильних та нерівносильних перетворень. Також виділено графічний метод розв'язування рівнянь та системи рівнянь. Для розв'язування нерівностей першого степеня з одним невідомим подається алгоритм розв'язання, що приводить до межі для невідомого, що обмежує значення невідомого або зверху, або знизу. Також у Кисельова подані неозначені рівняння та способи їх розв'язування.

Проміжок, впродовж якого в школі діяли на постійній основі підручники математики А. П. Кисельова (1938-1956), виявився періодом стабільності вітчизняної школи і формування фундаментальних математичних знань у молодого покоління.

В 1956 р. змінилась шкільна програма з математики і в якості стабільних були прийняті нові підручники: арифметики – І. Н. Шевченко, алгебри – В. Л. Гончарова та А. Н. Барсукова. Перехід на нові підручники був здійснений без особливих труднощів, так як їх автори не відходили далеко від підручників А. П. Кисельова, запозичивши їх кращі традиції.

У шестидесятих роках XX ст. в шкільному курсі алгебри вивчаються два основні методи розв'язування задач: синтетичний та аналітичний, а також графічний метод розв'язування рівнянь та нерівностей [208].

В окремих джерелах [254] розглядаються такі методи та способи: складання рівнянь; введення додаткового невідомого; графічне розв'язування рівнянь та систем рівнянь; розв'язування систем рівнянь способом підстановки, способом додавання; розкладання рівняння на множники.

В ті роки в методичній літературі пропонується вивчати основні методи розв'язування алгебраїчних задач на самому початку курсу алгебри – у 6 класі [2]. Це стосувалось графічного методу та методу рівнянь. Після вивчення теоретичного матеріалу рекомендується перевірити і визначити рівень знань і вмінь школярів, а потім вивчити сам метод. Також згадується про корисність розв'язування рівняння або системи рівнянь графічним і аналітичним методами з наступним порівнянням результатів.

Необхідно відмітити перший український навчальний посібник з алгебри для IX – XI класів авторів З. І. Слєпкань та О. С. Дубинчук [114]. Його виділяє послідовний, детальний виклад кожної з тем. Для розв'язування задач і вправ використовуються метод рівнянь, математичної індукції і графічний метод та ряд способів: підстановки, додавання, заміни змінних та ін. При викладі методів застосовується наступний підхід: спочатку пояснюється принцип та теоретичні основи методу (подається операційний склад), потім описується послідовність дій при розв'язуванні задач цим методом (алгоритм чи правило-орієнтир). В кінці учням пропонується провести аналіз імовірних розв'язків.

Для розв'язування рівнянь та нерівностей у посібнику пропонуються наступні способи: рівносильні перетворення; розкладання на множники; почленне множення та почленне додавання. Для систем рівнянь та нерівностей подаються способи: підстановки; алгебраїчного додавання; графічний спосіб; введення нового невідомого; домноження на спільний множник; комбінації попередніх способів. Але і цей посібник не позбавлений характерних для того часу недоліків (графічний метод називається і методом і способом).

Суттєві зміни програми і підручників з математики почалися з 1970 р. у зв'язку з переходом масової школи на новий зміст навчання математики. Запозичений з заходу теоретико-множинний підхід до побудови курсу математики, ідея підвищення теоретичного рівня навчання збуджували загальноосвітню школу впродовж десяти наступних років.

У 1966-67 рр. були опубліковані варіанти нової програми з математики, побудовані на теоретико-множинному підході. Зміни у змісті шкільного курсу математики були дуже радикальні: замість арифметики 5-6 класів ввели курс математики, який починався з вивчення елементів теорії множин. Курс алгебри основної школи був побудований на ідеях множини, відповідності і функції. Програма виявилась настільки незвична, а підручники (які не пройшли експериментальної перевірки) настільки важкими і недосконалими, що учням важко давалися навіть такі прості поняття, як функція, рівняння, рівність. За 10 років реформування різко знизився рівень математичної підготовки випускників (це стало помітно на вступних екзаменах до вищих навчальних закладів). Тому в грудні 1978 року на загальних зборах відділення математики АН СРСР було прийняте рішення, в якому діючі шкільні програми і підручники математики було визнано незадовільними. Президія АН СРСР прийняла спеціальну постанову про стан навчання математики в середніх школах і запропонувала:

1) терміново розробити нові програми і відповідні підручники;
2) тимчасово повернутись до старих підручників з математики [156, 73-74], [154].

У 1978-1987 рр. було проведено ряд конкурсів підручників з математики; зокрема для основної школи з алгебри пройшли підручники за ред. С. А. Теляковського та А.

Н. Тихонова, авторів Ш. А. Алімова, Ю. М. Колягіна та ін. Для старших класів у конкурсі перемогли підручники з алгебри і початків аналізу за ред. А. М. Колмогорова, М. І. Башмакова, Ш. А. Алімова, Ю. М. Колягіна та ін.

Для 7 – 9-х класів найбільш поширеними були підручники з алгебри за редакцією С. А. Теляковського, за редакцією С. М. Нікольського, підручники за редакцією А. Н. Тихонова та підручники за редакцією Г. В. Дорофєєва.

Перший з названих підручників – це підручник "для всіх" із звичними для багатьох поколінь вчителів навчальними текстами і завданнями. Тут реалізований функціональний підхід до викладення алгебраїчного матеріалу, що відображається і в термінології: вирази із змінними, рівняння із змінними. Збережено перевірений часом порядок вивчення понять: вираз – рівняння – функція.

В підручниках алгебри для 7-9 класів, виданих у 1990-1994 рр. за ред. С. А. Теляковського, як основні методи розв'язування алгебраїчних задач, розглядаються метод рівнянь та графічний метод. Для методу рівнянь у підручнику 7 класу [11] подається вже відомий план реалізації методу:

1) позначають деяке невідоме число буквою;
2) виходячи з умови задачі, складають рівняння;
3) розв'язують це рівняння;
4) знайдене значення невідомого тлумачать відповідно до умови задачі.

У цьому ж підручнику вказується, що за графіком функції можна знайти відповідне значенню аргумента значення функції і робиться висновок про можливість розв'язування оберненої задачі. Але наступного кроку – переходу до графічного методу розв'язування алгебраїчних задач не зроблено.

В підручнику для 8 класу [12] використовуються ті ж самі основні методи – рівнянь і графічний, але без будь-яких пояснень: їх використання показується на прикладах. Така ж ситуація спостерігається і в підручниках для 9 класу [13], [14], тільки додається ще один метод – інтервалів. Але і попередні, і нововведений метод пояснюються на прикладах, без плану, алгоритму і операційного складу.

Більше уваги в цих підручниках надається способам розв'язування систем рівнянь та нерівностей, але при цьому присутній попередній недолік: усі способи подаються на прикладах, без аналізу, плану чи алгоритму.

Підручники за редакцією А. Н. Тихонова виникли на хвилі критики перших результатів реформи 60-70-х рр. Виклад матеріалу в цілому має алгоритмічну спрямованість, велика увага приділяється практичному використанню теоретичного матеріалу. Ці підручники виділяються простими навчальними текстами, введення нових понять проводиться через відповідну мотивацію. Пояснення нового матеріалу часто починається з аналізу розв'язання задачі практичного змісту. Подібно до попередньої серії у 7 класі вводяться метод рівнянь і графічний метод [17]. План використання методу рівнянь включає два пункти:

1) складання рівняння за умовами задачі;
2) розв'язання отриманого рівняння.

Графічний метод подається як один із способів розв'язування системи рівнянь поряд із способами додавання і підстановки. Алгоритм способу включає:

1) побудову графіків;
2) пошук точок перетину графіків та їх координат.

Тут пропущено важливий етап визначення функції, графік якої буде будуватися.

Метод інтервалів вводиться у 8 класі, але без будь-яких пояснень і методичних рекомендацій типу алгоритму чи операційного складу, на прикладах [18]. Також на прикладах розглядаються методи рівнянь та графічний.

Підручник А. М. Колмогорова з алгебри і початків аналізу для 10-11-х класів – самий перший підручник для старшої школи, написаний після реформи 60 –70-х років. Цей підручник відрізняється простотою навчальних текстів, має достатнє число пояснювальних прикладів. Але послідовність вивчення деяких тем могла б бути кращою. Наприклад, логарифми вводяться на другому році навчання, тому тема "Похідна" виявляється розірваною.

В підручниках для 10 – 11-х класів "Алгебра і початки аналізу" за редакцією А. М. Колмогорова [7], [8], виданих у 1991 та 1994 рр. методи розв'язування задач взагалі не розглядаються. Перевага надається способам розв'язування рівнянь та нерівностей: заміна змінних; заміна рівняння рівносильним; спосіб підстановки; додавання рівнянь (для систем рівнянь). Графічний метод використовується для дослідження степеневої та логарифмічної функцій, але без ніяких пояснень.

Основна лінія підручника М. І. Башмакова – дослідження функцій. Вона викладена досить детально і забезпечує розв'язування всіх традиційних типів задач. В кожному з розділів викладається теорія, при цьому автор часто опускає подробиці і тонкощі доведень, інколи просто повідомляє факти без всяких доведень. Вимоги до результатів вивчення подані в підручнику у вигляді таблиць, які містять розділи: оволодіння теорією, застосування алгоритмів до розв'язування задач та додатки. Ці вимоги розбиті на три рівні: мінімальний, обов'язковий та поглиблений. Фіксація мінімального рівня дозволяє автору виділити головне у змісті матеріалу, що вивчається. Поглиблений рівень націлює зацікавлених учнів на подальше вивчення предмету алгебри. Розбиття на рівні дещо умовне, але воно конкретизується номерами завдань підручника, що дає можливість учню орієнтуватися в матеріалі. Підручник також містить контрольні завдання трьох рівнів складності, лабораторні роботи, задачі на повторення, історичні відомості та ін.

В підручнику М. І Башмакова "Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10 – 11 класів СШ" [33] для графічного методу частково дається алгоритм використання у вигляді окремих вказівок у тексті. Для методу інтервалів наведений короткий (3 пункти) алгоритм використання при розв'язуванні нерівностей; всі інші способи розглянуті на прикладах. У цьому ж підручнику узагальнені методи розв'язування рівнянь та нерівностей і серед них графічний метод, метод підбору, метод Гаусса, наближені методи. Але відсутній поділ на методи і способи. В одному переліку згадуються заміна змінного і графічний метод; метод Гаусса і спосіб підстановки.

В експериментальному підручнику для 9 класу авторів В. Г. Коваленко, В. Я. Кривошеєва та О. В. Старосельцева [10] згадуються методи інтервалів та графічний, при відсутності алгоритму та операційного складу. Для методу інтервалів наведено доведення його правильності, в якому можна виділити порядок дій, як натяк на алгоритм.

В посібнику для 11 класу, автори Н. Я. Віленкін, О. С. Івашев-Мусатов та С. І. Шварцбурд [5], наведений метод послідовних наближень при розв'язуванні рівнянь, в тексті описана послідовність дій по застосуванню методу. Згадуються метод інтервалів, графічний метод та метод рівнянь як методи розв'язування задач, але без будь-яких пояснень, на основі прикладів. Також не розділені поняття способу і методу: заміна змінних, заміна рівняння рівносильним чи підстановка називаються методами.

Підручники з алгебри С. М. Нікольського та ін. починаються в сьомому класі темою "Дійсні числа", яка підводить підсумок попередньому вивченню арифметики і закладає фундамент для наступного вивчення математики, зокрема алгебри. Це єдиний підручник, в якому дійсні числа вивчаються перед вивченням функцій і всього алгебраїчного матеріалу. Це дає можливість в подальшому проводити більш строгі міркування, пов'язані з побудовою графіків функцій, визначення коренів і т. д.

Підручники цих же авторів [317] з алгебри і початків аналізу для старших класів націлені на підготовку учнів до вступу в вуз та навчання в вузі. Підручники двохрівневі, призначені для навчання в звичайних класах, у яких додаткові питання не вивчаються і пропускаються складні задачі, а також у класах з поглибленим вивченням математики. Виклад матеріалу в цих підручниках детальний, з великим числом розв'язань типових задач. Підручник для одинадцятого класу закінчується розділом, в якому розглядаються загальні способи розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем: заміна змінних; підстановка; алгебраїчне додавання; виділення повного квадрату; розкладання на двочлени.

В посібнику С. М. Нікольського і М. К. Потапова [229] згадуються методи рівнянь, графічний, інтервалів, повної індукції та ряд способів і прийомів. Графічний метод називається способом і пояснюється на прикладах; теоретичне обґрунтування дається тільки для графічного розв'язування нерівностей і систем нерівностей. Спосіб виділення повного квадрату називається методом. При викладі методів інтервалів та повної індукції наводиться теоретичне пояснення (основа) методу, але метод повної індукції в тексті називається "принцип" і т. д.

У підручниках з алгебри за редакцією О. І. Маркушевича [15], [16] містяться посилання на графічний метод та метод складання рівнянь за умовою задачі. Але у підручниках відсутні будь-які пояснення щодо порядку використання цих методів, та і самі методи ніяк не названі. Про використання того чи іншого методу чи способу можна здогадатись вивчаючи послідовність розв'язання конкретної задачі. Серед способів розв'язування задач згадуються: рівносильні перетворення; розкладання на множники; виділення повного квадрату; введення нової змінної; спосіб підстановки.

У методичній літературі в різні роки пропонувався геометричний метод розв'язування алгебраїчних задач (журнал "Математика в школі" [104], [257]). Суть методу полягає в тому, що зв'язки між величинами, які розглядаються в задачі, зображають у вигляді діаграми, геометричної фігури, графіка чи графічної схеми. Перевага геометричного методу розв'язання полягає в його наочності; рисунок допомагає краще і глибше зрозуміти умову задачі. Багато текстових задач, особливо на рух, роботу простіше розв'язувати графічно. Оскільки розв'язання задачі базується на точних геометричних співвідношеннях між елементами побудови, звідси і назва методу – геометричний. Цей метод використано для розв'язання рівнянь і систем рівнянь, доведення нерівностей. Автори Двояковський П., Руновська Л. та ін. вважають, що геометричний метод доцільно використовувати на уроках в класах з поглибленим вивченням математики та при підготовці учнів до математичних олімпіад.

Слід відмітити навчальний посібник з алгебри і початків аналізу для середніх ПТУ, авторів М. І. Шкіль, З. І. Слєпкань, О. С. Дубинчук [324]. Як приклад підходу до вибору методу (способу) розв'язування задачі пропонується одне і те саме рівняння розв'язати різними способами чи методами з наступним порівнянням розв'язань.

Відомо, що далеко не всі підручники, в тому числі і підручники математики, є якісними. Про це свідчить і шкільна практика, і публікації в періодичній літературі. Відмітимо одну з важливих вимог до шкільних програм і підручників – їх стабільність. Тільки в умовах стабільності підручника (і програми) вчитель буде мати час досконало його вивчити і неодноразово перевірити на практиці, виявивши всі переваги і недоліки. Тільки за таких умов вчитель може проявити повноцінну творчу ініціативу при викладанні [156, 74].

У процесі реформи 70-х років змінено систему задач та методи їх розв'язання. Замість традиційних арифметичних методів використовують метод складання рівнянь та систем рівнянь. У шкільну програму ЗОШ був включений метод математичної індукції. Основними методами і способами доведення та розв'язання задач були: синтетичний; аналітичний; від супротивного; застосування рівнянь до розв'язування задач (метод рівнянь); графічний метод; математичної індукції, повної індукції; розв'язування рівнянь на основі залежностей між компонентами і результатами дій; за теоремами про рівносильність рівнянь [40].

Проведемо аналіз використання методів та способів розв'язування задач в тогочасних збірників задач і вправ з алгебри, алгебри і початків аналізу. Почнемо з видань, які самими авторами визначені як збірники для учнів (які використовуються в навчальному процесі). Незалежно від того, для якої школи призначений збірник (основної чи старшої), в кожному із видань в тій чи іншій формі згадуються 2-3 методи з визначених нами як основних для вивчення в курсі алгебри загальноосвітньої школи.

У збірнику для 6 – 8-х класів [157] метод складання рівнянь для текстових задач пропонується в матеріалі для 6-го класу; графічний метод – відповідно у 7 класі. Збірник задач для старших класів [306] О. І. Худобіна (з співавторами) оперує тими самими методами: складання рівнянь та графічний.

В цих же збірниках для розв'язання рівнянь, нерівностей та їх систем пропонуються наступні способи та прийоми: виділення повного квадрату; групування; підстановки; алгебраїчного додавання; розкладання на множники; введення нової змінної.

Більш пізній збірник задач з алгебри для 6 – 8-х класів [329] Н. М. Шунди метод рівнянь і графічний метод пропонує розглядати і використовувати в 6-му класі; в 7 – 8 класах ці методи повторюються.

В збірнику С. Є. Ляпіна з співавторами [191] до попередніх двох методів додається метод математичної індукції як метод доведення. Як теоретична основа методу подається трьохетапний план доведення; далі пропонується застосовувати метод математичної індукції до розв'язування задач.

Відомий автор підручників та посібників з алгебри С. Т. Завало у 1975 році видав практикум із розв'язування задач [118], у якому виділив метод невизначених коефіцієнтів. При цьому послідовно розглядається теоретична основа методу і його зміст, далі проводиться аналіз прикладів розв'язання задач і вправ. Але під заголовком "деякі загальні методи розв'язування рівнянь" автор перераховує способи, вказані вище: заміна невідомих, розкладання на множники, заміна рівняння рівносильним, підстановки, додавання.

В. Н. Литвиненко і А. Г. Мордкович з різницею у п'ять років видали "Практикум з алгебри" [185] і "Практикум з розв'язування задач шкільної математики" [186]. У першому посібнику згадуються метод математичної індукції (пояснюється на прикладах), метод інтервалів при розв'язуванні нерівностей та графічне розв'язання рівнянь і нерівностей. Але відсутній бодай короткий аналіз особливостей названих методів; одні і ті ж способи на різних сторінках називаються і методами і способами. Автори згадують методи хорд та дотичних як наближені методи розв'язування рівнянь та систем рівнянь.

У наступному практикумі авторів Литвиненко В. Н. та Мордкович А. Г. [186] як основний, автори розглядають метод інтервалів. Тут цей метод подається в логічному порядку: спочатку вивчаються теореми про рівносильність, потім приклади вправ на доведення рівносильності, далі приклади розв'язання нерівностей. Подібним чином подається графічний метод розв'язування рівнянь і нерівностей: аналіз переваг і особливостей методу; пояснення особливостей його застосування для рівнянь і нерівностей, потім приклади. Як метод розв'язування нестандартних задач автори пропонують метод підбору.

Посібник для учнів "Як навчитись розв'язувати задачі" авторів Л. М. Фрідмана та Є. Н. Турецького [301] називає три основних методи: складання рівнянь, графічний та повної індукції. Для розв'язання нестандартних задач автори пропонують такі способи і прийоми: складання рівнянь (якщо задача текстова); розбиття задачі на підзадачі; зведення нестандартної задачі до стандартної; заміну змінних.

На сторінці 73 цього посібника виділено заголовком "Методи розв'язування задач", але розглядаються не методи, а типи задач та способи їх розв'язання: розкладання на множники, підстановка, складання рівнянь; в цей перелік включено і графічний метод.

У навчальному посібнику з алгебри для класів з поглибленим вивченням математики [80] (автори М. Л. Галицький, А. М. Гольдман, Л. І. Зварич) використовуються три основних методи: складання рівнянь, графічний та метод математичної індукції. Але ці методи вводяться без пояснення, без алгоритму і операційного складу, тобто вважається, що учні їх повинні знати. Крім того, відсутня єдність та однозначність в термінології: способи розв'язування називаються методами (метод множення, метод заміни змінних і т. д.). Така ж ситуація має місце і в наступному посібнику з алгебри для учнів [54] (О. М. Бровченко "Алгебра. Як розв'язувати задачі"). Графічний метод розглядається з дуже коротким поясненням, а методи рівнянь і математичної індукції вказуються без будь-яких пояснень. У збірнику [275] також виділено два із основних методів – складання рівнянь і графічний.

У збірниках та посібниках із розв'язування задач для вчителів спостерігається аналогічна ситуація: згадуються два-три основних методи, в основному графічний, складання рівнянь і математичної індукції [334], [316], [291], [48], [163]. Впадає в очі відсутність системного підходу до подання методів; один з методів (математичної індукції) подається з поясненнями і теоретичною основою [291], інший тільки пропонується. Також має місце неоднозначність термінології: спосіб називається методом ([334], метод заміни змінних), а метод способом [48].

Подібна ситуація має місце і в інших виданнях пізніше, у 1973-80-х рр. [306], [31], [264], [185], [326], [147]. Методи або тільки вказуються, або розглядаються на прикладах, з яких незрозуміло, чому вибрано саме цей метод і які його особливості та переваги.

Наприклад, в посібнику Ф. А. Бартенева [31] на сторінці 67 говориться про важливість розв'язування задач різними методами і способами, далі розглядаються п'ять прикладів, з яких зовсім незрозумілі принципи вибору розглянутих способів.

Збірник задач Л. В. Кованцової та І. Г. Малишева [147] відрізняється тим, що в перелік із трьох основних методів включено метод інтервалів.

В одному із останніх радянських посібників із розв'язування задач для вчителів [79], автори О. Г. Гайштут та Г. М. Литвиненко, як основні, подаються методи інтервалів, невизначених коефіцієнтів та графічний. На відміну від попередніх видань, ці методи подаються або з поясненнями на конкретних прикладах, або з алгоритмом. Зокрема, для графічного методу пропонується алгоритм використання, який складається з п'яти етапів.

Окремою групою у посібнику виділені способи розв'язування рівнянь і систем рівнянь: введення допоміжного невідомого; зведення рівняння до однорідного; доповнення до повного квадрату; похідної пропорції; піднесення до квадрату; підстановки; порівняння; спосіб визначників; домноження; почленне додавання; заміна рівняння рівносильним. Але на жаль, і в цьому виданні має місце типова вада – неоднозначність термінології.

Статистичний аналіз частоти використання переважних методів розв'язування алгебраїчних задач в збірниках та посібниках різних років видання проводився за умови, що вся сума посилань на методи складає 100%. Тоді відсоткове співвідношення частоти для виділених нами основних методів виглядає як :

1. графічний метод – 38%;
2. складання рівнянь – 32%;
3. математичної індукції – 18%;
4. інтервалів – 8%;
5. невизначених коефіцієнтів – 4%.

Серед способів розв'язування рівнянь і систем рівнянь найбільш поширені:

1. розкладання на множники – 20%;
2. підстановки – 17%;

3. введення нової змінної – 17%;
4. алгебраїчного додавання – 14%;
5. домноження – 11%;
6. заміна рівняння рівносильним – 10%.

Крім цих способів, є посилання на доведення від супротивного, виділення повного квадрату, порівняння та ін.

У 1974 році в Мінську було видано навчальний посібник О. Б. Василевського [60] для студентів математичних спеціальностей педвузів, присвячений методам розв'язування математичних задач, зокрема задач з алгебри, алгебри і початків аналізу. Розглядалися задачі, наведені в шкільних підручниках, а також олімпіадні задачі і задачі з вступних екзаменів у вузи. Першими в посібнику наводяться метод математичної індукції та метод залишків. Виклад кожного з методів починається коротким (в декілька рядків) теоретичним обґрунтуванням методу, настільки коротким, що сутність методу, його можливості та особливості зрозуміти дуже важко. Не виділені в посібнику і алгоритми чи правила-орієнтири методів та способів розв'язування задач, які використовуються. Далі, теж коротко, на прикладі однієї задачі, розглядається доведення методом від супротивного.

При визначенні цілих коренів рівнянь та систем рівнянь згадується спосіб розкладання виразів на множники. До числа методів аналізу функцій автор відносить і метод спроб. При доведенні нерівностей використовуються метод математичної індукції, метод похідної, спосіб заміни змінних та метод інтервалів. Завершується перелік графічним методом розв'язування рівнянь та нерівностей. Як бачимо, і в цьому посібнику відсутні аналіз, систематизація та обґрунтування методів і способів розв'язування алгебраїчних задач. Тобто, апріорі вважається, що студент повинен знати основні методи та способи і вміти їх використовувати. Але в школі цілеспрямовано методи і способи розв'язування алгебраїчних задач не вивчаються, усе залежить від індивідуальних знань, підготовки та ерудиції самого вчителя.

Зазначимо, що в цей період методи і способи розв'язування алгебраїчних задач в методичних посібниках подаються в основному через приклади, тобто на прикладі розв'язування конкретних задач. Тому вчителям, і відповідно учням, незрозуміло, чому вибрано цей метод чи спосіб, а не інший; чому даним методом розв'язується ця, а не інша задача; їм важко перенести цей метод на іншу задачу.

Реформа шкільної освіти, проведена у 80-х роках, нічого не змінила в підходах до вивчення методів і способів розв'язування задач в курсі алгебри, алгебри і початків аналізу середньої загальноосвітньої школи.

Розв'язування задач іде переважно за шаблоном. Відсутня цілеспрямована робота вчителя з формування навичок і вмінь учнів критично оцінювати хід розв'язання задачі і здійснювати перевірку одержаного розв'язку, не кажучи вже про вибір раціонального способу розв'язання. Задачі використовуються переважно для закріплення теоретичних знань. При аналізі плану розв'язання задачі пропонується використати знайомий (вам) метод чи прийом; вибрати один із відомих учням методів, але самі методи не розглядаються і навіть не називаються [150]. Вказується на метод розбиття задачі на декілька простіших задач. Розглядається багатоваріантність розв'язування задач і наводиться на прикладі розв'язання однієї задачі декількома способами, серед яких: арифметичний спосіб; метод хибного положення; метод пропорцій; метод рівнянь.

В основі викладання матеріалу на той час лежать теоретико-множинні поняття. У 80-ті роки виходять посібники, присвячені розв'язуванню задач, в яких пропонується розв'язувати задачі такими методами та способами: спосіб підбору, графічний метод, спосіб підстановки, доведення методом від супротивного, спосіб розкладання на множники, винесення спільного множника за дужки та групування, спосіб алгебраїчного додавання, спосіб рівносильних перетворень, спосіб нерівносильних перетворень, метод послідовного виключення невідомих, метод проміжків, метод повної індукції, метод математичної індукції , метод інтервалів, спосіб, заснований на принципі Діріхле [61], [208], [247].

В останньому десятирічччі ХХ ст. в загальноосвітній школі склалась практика вивчення математики, зокрема алгебри, алгебри та початків аналізу за програмами, в основу яких було покладено певний підручник. Різне авторське бачення курсу алгебри в поєднанні з індивідуальними особливостями вчителя приводять в результаті до великих розбіжностей в теоретичних знаннях, навичках і вміннях учнів, зокрема при розв'язуванні задач з алгебри, алгебри і початків аналізу.

2.2. Аналіз стану використання методів і способів розв'язування задач з алгебри, алгебри і початків аналізу в сучасній загальноосвітній школі

В процесі навчання математики важливу роль для загального і математичного розвитку учнів відіграє практична діяльність – розв'язування задач. Математика сформувалась завдяки практичним потребам людства і її вивчення часто відбувається таким же шляхом – від практичних задач до теоретичних узагальнень і наступного використання теоретичних положень для практичних потреб. Сказане стосується і алгебри та алгебри і початків аналізу, як складових шкільного курсу математики [338].

Розглянемо стан вивчення методів і способів розв'язування задач з алгебри, алгебри і початків аналізу за сучасними підручниками та посібниками, які використовуються в загальноосвітній школі як базові.

У підручнику Бевза Г. П. [38] для основної школи розглядаються два основні методи – складання рівнянь і графічний метод. Перший метод у підручнику називається "розв'язування задач за допомогою рівнянь", другий – подається без пояснень та алгоритму (в тексті описана послідовність дій на прикладі графічного розв'язання системи рівнянь). Із способів розв'язування задач у підручнику використовуються: рівносильні перетворення; розкладання многочленів на множники; спосіб групування; спосіб підстановки; почленне додавання; виділення повного квадрату. Переважна більшість цих способів розглядається на прикладах. З одного боку, це ускладнює для учнів вибір алгоритму дій, з іншого – сприяє розвитку евристичних вмінь і навичок.

У блоці підручників з алгебри для 7-9 класів авторів Г. М. Возняк, Г. М. Литвиненко [73], [74], [72] використовуються три основних методи: метод рівнянь, графічний метод, метод інтервалів.

Метод рівнянь в цих підручниках подається досить широко: спочатку розглядаються простіші уміння, якими потрібно володіти, щоб успішно користуватись даним методом. Окремі елементи цих умінь розглядаються на конкретних прикладах; далі, як висновок, наводиться схема застосування методу. Графічний метод і метод інтервалів розглядаються на прикладах.

Із способів розв'язування задач у підручниках наводяться: рівносильні перетворення; спосіб групування; винесення спільного множника; спосіб підстановки; спосіб алгебраїчного додавання; виділення повного квадрату.

І при вивченні цих способів відсутня єдність у підходах: для способів групування, алгебраїчного додавання, винесення спільного множника, підстановки наводяться алгоритми ; для інших – або пояснення на конкретному прикладі, або тільки вказівки.

Проаналізуємо серію пробних підручників з алгебри для 7-9 класів загальноосвітньої школи за редакцією З. І. Слєпкань видання 2002-2003 рр. [168], [166], [167] з точки зору вивчення методів та способів розв'язування алгебраїчних задач.

У 7 класі пропонуються до вивчення: розв'язування задач за допомогою рівнянь та графічне розв'язання лінійних рівнянь і систем рівнянь. До кожного з методів дається алгоритм (правило-орієнтир) (3-4 пункти).

В підручнику для 8 класу пропонуються ці самі методи, а в 9 класі розглядається розв'язування нерівностей методом інтервалів. Після прикладу, як висновок, подається короткий алгоритм застосування методу та аналізуються його особливості і межі застосування.

Із способів розв'язування рівнянь та систем рівнянь у підручнику для 7 класу подаються спосіб підстановки та спосіб почленного додавання. У підручниках для 8 і 9 класу до них додаються: рівносильні перетворення; розкладання на множники; виділення квадрата двочлена; заміна змінних.

Ці самі способи пропонуються і для розв'язання нерівностей та систем нерівностей, причому в підручнику для 9 класу подаються узагальнені алгоритми розв'язування нерівностей та систем нерівностей.

Зупинимось на експериментальних підручниках з алгебри і початків аналізу для 10-11 класів з поглибленим вивченням математики авторів М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, Т. М. Хмара [322], [323]. У посібнику [322] для 10 класу наведені: метод математичної індукції; метод невизначених коефіцієнтів; метод інтервалів; графічне розв'язання рівнянь і систем рівнянь.

Але поряд з цими методами до основних "методів" розв'язування рівнянь та нерівностей автори відносять: розкладання на множники; заміна змінної; підстановка (але це способи).

Підручник для 11 класу [323] містить посилання на методи: складання рівнянь за умовою задачі і графічний метод. Як і у попередньому виданні, до основних методів розв'язання рівнянь, нерівностей та їх систем автори відносять: рівносильні перетворення; введення нової змінної; метод підстановки; алгебраїчне додавання; графічний; тобто має місце змішування понять методу і способу розв'язування задач.

Методи розв'язування систем лінійних рівнянь тут поділяються на точні і наближені. До точних автори відносять формули Крамера і метод Гаусса. Але невідомо, які методи віднесені до наближених.

Підручник з алгебри і початків аналізу для 10-11 класів авторів М. І. Шкіль. З . І. Слєпкань, О. С. Дубинчук [325] містить три основні методи: графічне розв'язання рівнянь , нерівностей та їх систем; метод математичної індукції; метод інтервалів.

Всі ці методи розглядаються на прикладах, з яких не зовсім зрозумілі переваги та особливості методів та межі їх використання. Із способів і прийомів розв'язування задач з алгебри і початків аналізу, і тому числі розв'язання рівнянь і систем рівнянь, наводяться: розкладання на множники; зведення до найпростішого (нормального) вигляду; введення нової змінної; зведення до спільного показника або до спільної основи; спосіб підстановки; спосіб алгебраїчного додавання.

З точки зору методичного забезпечення, єдності і неперервності навчання посібники з математики повинні об'єднати все краще, що є в підручниках і посібниках для загальноосвітньої школи. На жаль, це не завжди вдається. Про що свідчить зміст відповідного посібника, виданого у Харкові у 2002 році [201]. З основних методів наводиться тільки метод інтервалів; способи також називаються методами: заміна змінних; підстановки; розкладання на множники; рівносильні перетворення.

Зважаючи на об'єм посібника (більше 1000 сторінок), перелік використаних, а отже пропонованих, методів і способів розв'язування задач з алгебри, алгебри і початків аналізу досить обмежений.

Останні роки було надруковано ряд розв'язників до конкретних авторських підручників, посібників та збірників задач з математики, зокрема з алгебри. Аналіз почнемо із розв'язника задач з математики групи В відомого збірника М. І. Сканаві [94]. З основних методів у розв'язнику використано метод невизначених коефіцієнтів (без пояснень і посилань). Згадується “метод наслідків”, але з викладу незрозуміло, в чому полягає зміст методу, які його складові і т. д. Із способів розв’язування рівнянь, нерівностей пропонується: заміна змінних; рівносильні перетворення; схема Горнера; розкладання на множники; використання теореми Вієта.

У розв’язнику Мазура К. І. [193] конкурсних задач збірника за редакцією М. І. Сканаві в частині, присвяченій многочленам, рівнянням і системам рівнянь використовується тільки один із основних методів – графічний. Спектр використання способів досить широкий: розкладання на множники; виділення спільного множника; застосування теореми Безу; використання схеми Горнера; рівносильні перетворення; групування; порівняння; введення нової змінної; підстановки; алгебраїчного додавання; спосіб визначників (формули Крамера).

У розв’язнику [120] за підручником Г. П. Бевза з алгебри для 7-9 класів [38] з основних наводяться такі методи: складання рівнянь за умовою задачі і графічний. Із способів розв’язування задач і вправ використовуються: винесення спільного множника; виділення повного квадрату; використання теореми Вієта; почленне додавання та множення; розкладання на множники; заміна змінних.

Цікаво порівняти два розв’язники [9] і [132] до підручника авторів М. І. Шкіля, З . І. Слєпкань, О. С. Дубинчук „Алгебра і початки аналізу 10-11 класи”. У першому наводяться чотири методи: графічне розв’язування рівнянь; складання рівнянь за умовою задачі; метод інтервалів; метод математичної індукції. Але система вивчення цих методів відсутня, тобто відсутні (у першу чергу) алгоритми, чи бодай короткі пояснення до застосування методів. Метод інтервалів взагалі не названий і можна тільки здогадатись, про що ідеться. Перелік способів спрощення виразів, розв’язування рівнянь і нерівностей досить широкий, в нього входять: виділення повного квадрату; почленне додавання і множення; додавання виразу, множення на вираз; доповнення до повного квадрату чи кубу; заміна змінних; групування (названий методом); піднесення обох частин рівняння до квадрату; підстановки.

У розв’язнику [132] перелік використаних методів і способів розв’язування задач і вправ суттєво вужчий. Згадуються графічне розв’язання рівнянь і систем рівнянь, використання графіків при розв’язуванні нерівностей та систем нерівностей, а також метод інтервалів. Із способів у тексті наявні вказівки на тотожні перетворення, зведення до нормального вигляду, заміну змінних та рівносильні перетворення.

У 2005 році була видана нова програма з математики для 12-річної загальноосвітньої школи [250]. У частині програми “Старша школа” в темі 7 “Рівняння, нерівності та їх системи” до вивчення у 12 класі пропонуються питання: „Загальні методи розв’язування рівнянь з однією змінною: розкладання на множники, заміна невідомої. Функціональні методи; нерівності з однією змінною, методи їх розв’язання; системи рівнянь, методи їх розв’язання”. Серед загальних методів розв’язування задач називаються не методи, а способи розв’язування. Крім того, незрозуміло, що мається на увазі під терміном “функціональні методи”; ні в пояснювальній записці, ні в інших додатках до програми цей термін не розкрито.

Реалізація практичної спрямованості шкільного курсу алгебри, алгебри та початків аналізу визначається не тільки якісним і кількісним складом задач і вправ, які запропоновані у підручниках і збірниках задач, але і цілим рядом інших факторів. До їх числа входять і попередня математична підготовка учнів, і кваліфікація та досвід вчителя, забезпеченість підручниками, задачниками, посібниками та засобами навчання. Важливе місце серед цих факторів займають знання основних алгебраїчних методів і способів розв’язування задач і вправ, вміння співставити ці методи і способи із змістом конкретної задачі та вибрати найбільш зручний (раціональний) з них.

З метою визначення впливу останніх факторів на навчально-пізнавальну діяльність учнів нами було вирішено розробити анкети для статистичного аналізу використання методів і способів розв’язування алгебраїчних задач в процесі вивчення алгебри в середній загальноосвітній школі. Форма та зміст анкети розроблялись, виходячи із сучасних уявлень про технологію навчання, зокрема технологію розв’язування задач.

В цілому методика розв’язування задач включає в себе три складові: визначення цілей задачі, відшукання (вибір) методу розв’язання, застосування методу. А сам процес розв’язування складається з 4 етапів [274, 128].

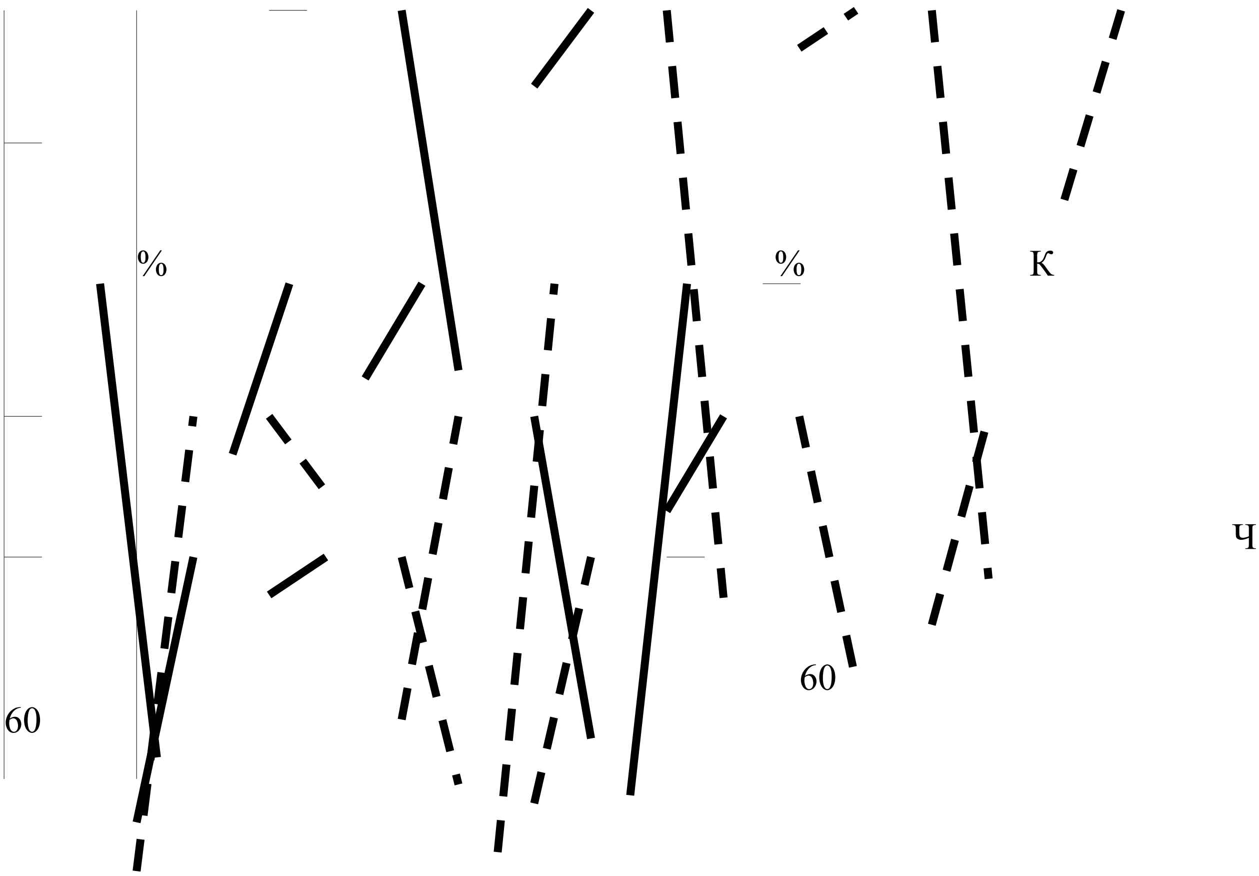
Відповідно, запропонована анкета включає чотири групи питань: 1) розробленість теми; 2) підготовка учнів; 3) використання у навчанні алгебри; 4) перспективи у використанні.

Питання кожної з груп формувалися таким чином, щоб відповідь на дане питання була інформативною і для сусідніх груп. В результаті обсяг анкети для учнів був обмежений дев’ятьма питаннями (остаточний вигляд анкети та анкета для вчителів наведені у додатку А та додатку Б). Зв’язок між питаннями анкети та відповідними групами наведено на схемі.

Для спрощення заповнення анкети для всіх питань, крім “2” і “3”, передбачені відповіді “так” або “ні”. Крім того, на питання “1, 4-9” передбачено авторський варіант відповіді. З метою підвищення достовірності статистичних результатів анкетування проводилося анонімно. Анкетуванням було охоплено учнів випускних класів середніх загальноосвітніх шкіл м. Києва, м. Чернігова та Чернігівської області, разом 479 чол. Анкети були піддані статистичній обробці: перераховувалось число позитивних і негативних відповідей, їх доля в сукупності даних. Некоректні відповіді, відповіді, які дозволяють довільне трактування, в загальний результат не враховувались. Для коректності результатів обробка анкет проводилась згідно статистичних методів обробки даних [260], підрахунок проміжних та кінцевих результатів відбувався із врахуванням ваги окремих груп даних, за методом обрахунку вибірок змінного

об’єму: де: – середнє значення шуканої величини; xi – значення окремого показника у вибірці; fi – частота повторення показника xi; n – розмір вибірки.

Анкети київських школярів відрізнялись впевненістю у відповідях, але в цілому розподіл позитивних і негативних відповідей на питання анкети має однаковий вигляд (див. рис. 2.1). Середня варіація розкиду відповідей складає 10,6 %, що свідчить про задовільне співпадання результатів анкетування.



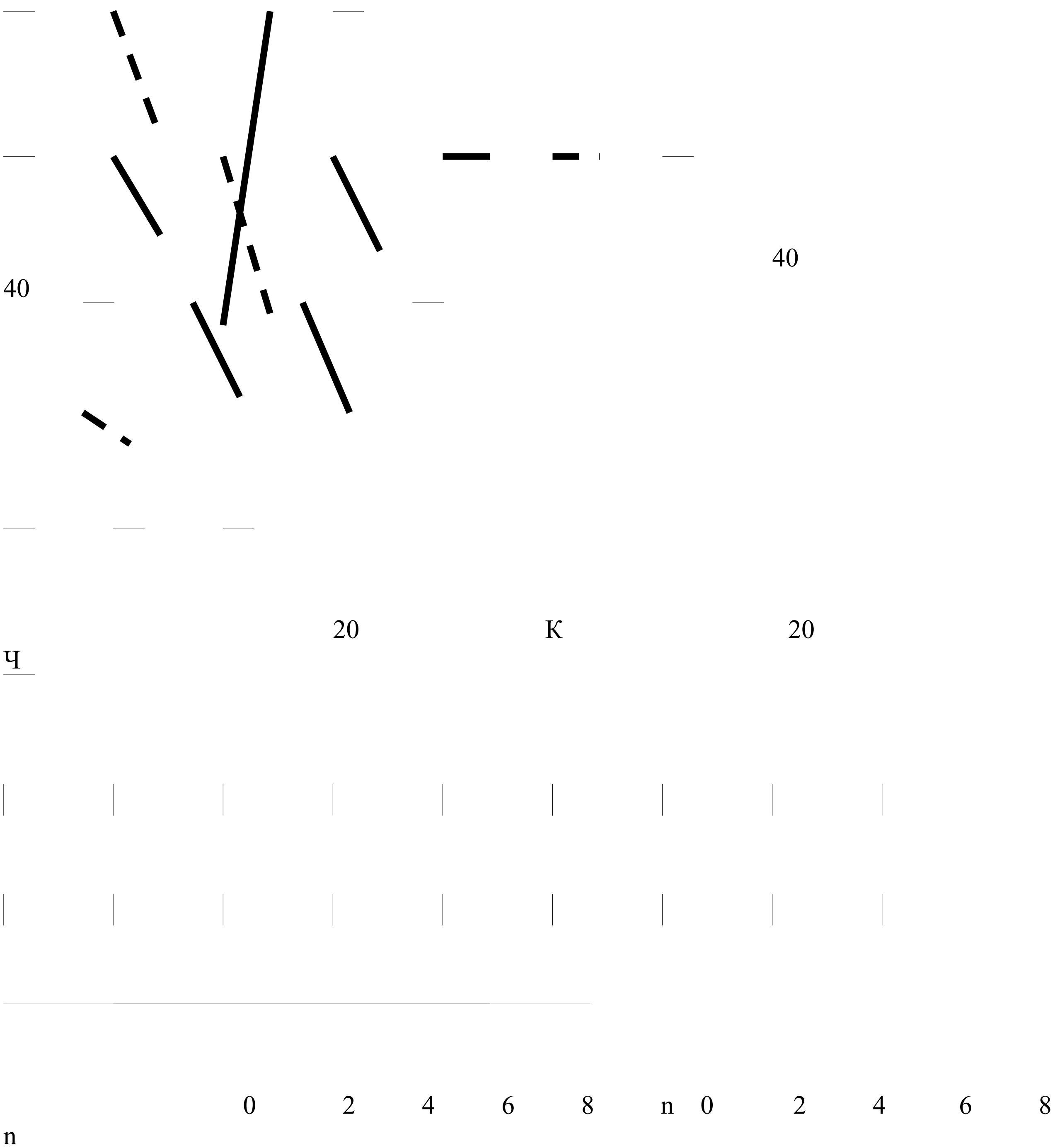


Рис. 2.1. Діаграма розсіяння відповідей на питання учнівських анкет

(а – позитивні; б – негативні відповіді. К ( ) – Київ; Ч ( ) – Чернігів.)

Нижче в таблиці наведені сумарні результати анкетування учнів у системі “так” чи “ні”.

Таблиця 2.1

Результати анкетування школярів
середніх загальноосвітніх шкіл

n, № п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9
“так” %	42	60	33	28	58	73	25	20	78
“ні” %	52	36	67	65	36	21	70	76	18

Проведено аналіз цих відповідей у відповідності з метою дослідження.

До половини опитаних цікавляться фактами з історії математики і, зокрема алгебри. В анкетах є пропозиції більше включати історичних даних у навчальний матеріал, і не тільки історично-визначні задачі, але і факти з життя вчених, історичні відомості про формування понять алгебри.

Позитивні відповіді на питання про відомі учням методи і способи розв’язування алгебраїчних задач дали 60% опитаних, але детальний аналіз анкет показав, що значна частина учнів не розрізняє понять “метод” , “спосіб” та “прийом”. Нерідко прийоми включають до групи методів і способів. Найбільш відомі учням метод математичної індукції та метод рівнянь (27-25%), графічний метод, метод доведення від супротивного та метод інтервалів. По три методи навели в анкетах в середньому 20% респондентів, що свідчить про недостатнє володіння учнями методами і способами розв’язування алгебраїчних задач. В цілому в анкетах названо до десяти методів та способів, які вивчаються або згадуються в курсі алгебри загальноосвітньої школи. Серед опитаних 25% взагалі не змогли назвати жодного методу чи способу розв’язування алгебраїчних задач.

Таблиця 2.2

Співвідношення відомих учням методів і способів
розв’язування задач з алгебри, алгебри і початків аналізу

№ п/п	Назва методу (способу)	% опитаних
1	Математичної індукції	27,0
2	Рівнянь	25,0
3	Графічний	13,0
4	Інтервалів	12,0
5	Доведення від супротивного	9,0
6	Введення нової змінної	9,0
7	Підстановки	5,6
8	Підбору	5,6
9	Невизначених коефіцієнтів	1,8

Ще менш відоме учням середніх загальноосвітніх шкіл поняття алгоритму методу. На це питання анкети дали позитивні відповіді тільки 33% опитаних. Аналіз окремих відповідей показав, що більшість учнів не розрізняють понять “метод” та “алгоритм методу”, змішують алгоритм методу і алгоритм розв’язання задачі.

Слабкі знання учнів щодо методів та способів розв’язування алгебраїчних задач, які не передбачені шкільною програмою. На це питання (№4 анкети) відповіли тільки 19% анкетованих. Найчастіше серед опитаних згадувалися методи Гаусса (6%) і Крамера (3%), інші ж методи: Діріхле, Якобі, схема Горнера, метод оцінки і т. д. згадувалися епізодично.

Незважаючи на недостатню обізнаність щодо методів і способів розв'язування алгебраїчних задач, учні прагнуть розв'язувати задачі різними методами та способами (58% відповідей "так" проти 36 % "ні"). Також учням подобається в процесі навчання алгебри розв'язувати творчі задачі з елементами нового (і в суміжних галузях знань), про що вказали 73% опитаних.

Складанням алгебраїчних задач в різні періоди навчання займалися до 25% респондентів. Це вказує на недостатній рівень алгоритмізації та систематизації знань учнів. Відсутність відповідних знань не дозволяє учням сформулювати проблемну ситуацію і виразити її у вигляді алгебраїчної задачі. Відповідно, і низький рівень участі учнів у математичних олімпіадах, вікторинах та інших заходах, де розв'язують оригінальні алгебраїчні задачі (20%).

Опитування показало також, що мікрокалькуляторами і комп'ютерною технікою при розв'язуванні задач користуються до 78% учнів. Це означає, що існують добрі передумови і перспективи розробки і впровадження в навчальний процес комп'ютерної підтримки навчання алгебри і проведення уроків з алгебри в комп'ютерних класах і кабінетах з використанням персональних ЕОМ.

Крім того, було проведено анкетування паралельних класів: звичайних та з поглибленим вивченням математики. Відхилення статистичних показників анкетування для класу з поглибленим вивченням математики від звичайного та від середніх показників у цілому лежить в межах 5-10%. Але чітко виділяється різниця у відповідях на блок питань "2-4". Учні класу з поглибленим вивченням математики дали більше позитивних відповідей на питання блоку "2-4". У відповідях на питання "2" називаються не 1-2, а 3-4 методи та способи розв'язування алгебраїчних задач: підстановки; введення нової змінної; інтервалів; математичної індукції. Серед позитивних відповідей на питання "4" про методи, не передбачені шкільними програмами, частіше зустрічається узагальнююча: "нестандартні методи розв'язування алгебраїчних задач".

Було також проведене анкетування вчителів і викладачів математики середніх загальноосвітніх шкіл і інших середніх навчальних закладів м. Чернігова та Чернігівської області. Їхні анкети включали 11 питань з проблеми використання методів і способів розв'язування задач при навчанні алгебри (див. додаток А). Більшість вчителів (58, 5%) регулярно звертаються до спеціальної літератури в пошуках нових методів розв'язування алгебраїчних задач, використовують метод доцільних задач у навчанні учнів алгебри, алгебри та початків аналізу (80%). Але до 40% опитаних вчителів не розрізняють понять "метод" та "спосіб" розв'язування задач.

Серед названих вчителями і викладачами методів і способів розв'язування алгебраїчних задач фігурують: метод рівнянь (назвали 28% опитаних); графічний метод (24, 5%); введення нової змінної (21%); метод оцінки; спосіб підстановки; метод інтервалів та ін. Тільки 47% вчителів назвали по 3 і більше методів та способів розв'язування задач, що разом із попередніми даними свідчить про відсутність у частини вчителів системи знань про методи і способи розв'язування алгебраїчних задач і порядок їх вивчення в курсі шкільної алгебри.

Це саме стосується і знань вчителів математики щодо алгоритмів та евристичних схем методів розв'язування задач з алгебри. Всього 18,6% респондентів змогли сформулювати 2 і більше алгоритми розв'язування алгебраїчних задач. Серед названих алгоритм розв'язування квадратних рівнянь (26% опитаних), алгоритм Евкліда (11%), схема Горнера (11%), алгоритм розв'язування рівнянь за допомогою введення нової змінної (9,4%). Серед методів і способів, які виходять за межі шкільної програми названі такі, як спосіб оцінки, спосіб похідної пропорції та ін. Знання двох і більше методів розв'язування алгебраїчних задач поза межами шкільної програми показали 28,5 % вчителів.

Результати анкетування свідчать, що переважна більшість вчителів (73%) додатково працюють із здібними та обдарованими учнями в плані пошуку нових методів та способів розв'язування задач, здійснюють індивідуалізацію та диференціацію у процесі навчання учнів розв'язуванню задач з алгебри (92%). Біля половини опитаних (51%) користуються засобами обчислювальної та комп'ютерної техніки у процесі розв'язування алгебраїчних задач. До 75% респондентів вважають, що нові інформаційні технології зможуть підвищити рівень умінь учнів розв'язувати алгебраїчні задачі.

Підсумкові результати анкетування вчителів і викладачів математики наведені в наступних таблицях.

Таблиця 2.3

Підсумки опитування вчителів

та викладачів математики

№ пит	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Так %	100,0	83,0	77,0	58,5	71,5	47,0	77,0	73,5	92,0	51,0	75,0
Ні %	0	13,0	15,0	39,5	18,5	53,0	22,5	22,5	7,5	49,0	19,0

Таблиця 2.4

Співвідношення відомих вчителям методів і способів розв'язування алгебраїчних задач

№ п/п	Назва методу (способу)	% опитаних
1	Математичної індукції	37
2	Оцінки	34,0
3	Рівнянь	28,3
4	Графічний	24,5
5	Введення нової змінної	21,0
6	Аналітичний	17,0
7	Інтервалів	13,6
8	Підбору	5,6
9	Підстановки	5,6
10	Невизначених коефіцієнтів	1,8

Таким чином, результати анкетування свідчать про недостатній рівень знань методів і способів розв'язування задач з алгебри, алгебри і початків аналізу як в учнів, так і у вчителів. На низькому рівні також вміння і навички застосовувати ці методи на практиці. Як бачимо, учні загальноосвітніх шкіл недостатньо знайомі із методами і способами розв'язування алгебраїчних задач, навіть з тими, які передбачені шкільною програмою з алгебри, алгебри і початків аналізу. Тому, необхідно навчати учнів не тільки знати основні методи розв'язування задач, але і вміти використовувати ці методи на практиці, формувати навички вибору найбільш раціонального методу чи способу для даної задачі або для даного типу задач. Причому одночасно із вивченням методу слід чітко формулювати його алгоритм або правило-орієнтир та операційний склад. І вчителів, і учнів доцільно озброїти методичними матеріалами, які включали б особливості і переваги методу, алгоритм чи правило-орієнтир та операційний склад, найбільш типові приклади розв'язування задач, що розкривають суть методу.

2.3. Розв'язування алгебраїчних задач з використанням комп'ютерно-орієнтованих засобів навчання

Широке впровадження в навчальний процес сучасних засобів збирання, зберігання, опрацювання, подання, передавання інформації відкриває широкі перспективи щодо гуманітаризації змісту освіти і гуманізації навчального процесу, поглиблення та розширення теоретичної бази знань і надання результатам навчання практичного значення, активізації пізнавальної діяльності, створення умов для повного розкриття творчого потенціалу дітей з урахуванням їхніх вікових особливостей і набутого досвіду, індивідуальних нахилів, запитів і здібностей.

Суттєві зміни, якісні та кількісні, в забезпеченні сучасного суспільства інформацією привели до перегляду традиційних методів і засобів навчання. Поряд із класичним підходами в практику школи впроваджуються комп'ютерно-орієнтовані засоби навчання. Інформаційні технології сприяють інтенсифікації й оптимізації навчально-виховного процесу, розвивають творчі здібності та навчально-пізнавальну діяльність учнів, сприяють вирішенню інших завдань шкільної освіти, зокрема індивідуалізації і диференціації навчання.

На сьогоднішній день не є новиною використання у школі при вивченні математики комп'ютерно-орієнтованих засобів, зокрема педагогічних програмних засобів (ППЗ), які дозволяють поєднати високі обчислювальні можливості при дослідженні різноманітних об'єктів з унаоченням результатів на всіх етапах розв'язування задач. На сучасному етапі розвитку науки і освіти інформаційні технології навчання базуються на діяльнісному підході до навчання і покликані стати потужним засобом удосконалення навчально-виховного процесу. Під інформаційними технологіями розуміється сукупність методів та технічних засобів збирання, організації, зберігання, обробки, передавання і представлення інформації, які розширюють знання людей та розвивають їх можливості з управління технічними та соціальними процесами [108]. Головне тут – це комп'ютер із відповідними технічним і програмним забезпеченням.

Найбільш ефективним виявилось використання комп'ютерних навчаючих програм в наступних напрямах:

- організація практичних занять, в яких за допомогою програми здійснюється зв'язок "учень – комп'ютер – вчитель";
- збільшення інтенсивності навчальної діяльності як на уроці, так і вдома за рахунок передання комп'ютеру одноманітних операцій, які не несуть навчаючого навантаження;
- розширення класу задач з одночасним збільшенням наочності навчання;
- можливість контролю за всіма фазами навчальної діяльності учня;
- можливість оцінки та самооцінки результатів навчання з одночасним аналізом діяльності учня.

Відмітимо наступні позитивні сторони комп'ютерно-орієнтованих засобів навчання:

- новизна роботи з комп'ютером викликає в учнів підвищений інтерес і до самого процесу навчання, поглиблює мотивацію навчання;
- колір, мультиплікація, музичне і звукове супроводження розширюють можливості представлення інформації;

- комп'ютер дозволяє реалізувати індивідуальний підхід до навчання на основі особистості учня з урахуванням його попередніх знань, особливостей пам'яті, сприйняття та мислення, темпу просування у навчанні;
- робота з комп'ютером змушує учнів активно включатися у навчальний процес, дозволяє їм зосередити увагу на найбільш важливих моментах матеріалу, який вивчається;
- з використанням комп'ютерно-орієнтованих засобів навчання учням забезпечується доступ до раніше недоступних об'ємів інформації, набагато зростає перелік і рівень учбових задач та вправ.

При навчанні алгебри, алгебри і початків аналізу проявляються наступні можливості сучасних комп'ютерів:

1. Представлення інформації в графічній формі. За своїми графічними можливостями персональні комп'ютери дозволяють (при наявності відповідного програмного забезпечення) зобразити практично всі задачі алгебри (з графічним змістом) загальноосвітньої школи.
2. Швидкість і надійність обробки інформації.
3. Зберігання і відображення великих масивів інформації. Сучасний персональний комп'ютер може зберігати на одному CD-диску всі таблиці і довідкові дані курсу математики середньої школи і не тільки.

Однак комп'ютерно-орієнтовані засоби навчання, зокрема навчання розв'язуванню задач в алгебрі, не позбавлені і недоліків. У першу чергу це стосується техніко-економічних факторів і факторів психологічного характеру. Техніко-економічні фактори приводять до того, що в різних школах навіть одного регіону може існувати великий розрив між потенціальними і реальними можливостями реалізації комп'ютерно-орієнтованого навчального процесу (відсутність у деяких школах комп'ютерів, відсутність у школах спеціалістів по роботі з комп'ютером та ін.). Психологічні проблеми діалогу "людина-машина" відомі давно; в нашому випадку ґрунтовне володіння персональним комп'ютером необхідне для того, щоб проблеми використання комп'ютера не ставали на заваді основній меті – вивченню методів розв'язування задач з алгебри, алгебри і початків аналізу і самому розв'язанню.

Наступна проблема полягає в заміні комп'ютерно-орієнтованих засобів навчання, зокрема навчання алгебри, алгебри і початків аналізу, механічним використанням певних програм для розв'язування задач. Учень, не розуміючи суті методу, не знаючи алгоритму методу чи правила-орієнтиру, шляхом натискання на кнопки введе в пам'ять комп'ютера умову задачі та запустить програму і одержить на екрані монітора або виході друкуючого пристрою бажаний результат. Отже, ефективне використання комп'ютерно-орієнтованих засобів навчання можливе за виконання як мінімум двох умов: оволодіння учнями теоретичним матеріалом певного розділу алгебри і практичні навички роботи з персональним комп'ютером. Перша умова повинна обов'язково включати алгоритми і правила-орієнтири (евристичні схеми) методів і способів розв'язування задач.

Ще однією проблемою є проблема вибору задач. Які задачі потрібно розв'язувати саме з допомогою комп'ютера? Тобто, для розв'язання яких задач доцільно використовувати комп'ютер? Існуючі навчальні підручники, посібники та дидактичні матеріали для загальноосвітніх шкіл містять такий задачний матеріал, для розв'язання якого достатньо умінь, знань та традиційних засобів, які використовуються в школі. А відповідно, використання комп'ютера для розв'язування таких задач в більшості випадків не є доцільним

. З іншого боку, використання комп'ютера дає можливість розширити коло задач, що можуть розглядатися на уроках математики. Це можуть бути задачі з реальними даними, задачі підвищеної складності, олімпіадні задачі та ін.

Проблемою впровадження комп'ютерно-орієнтованих засобів навчання в практику вивчення математики в загальноосвітніх школах в Україні плідно займаються Вінниченко Є. Ф., Горошко Ю. В ., Жалдак М. І., Жильцов О. Б., Забара І. М., Морзе Н. В., Олійник Т. О., Пеньков А. В. та ін. Існує велика кількість як професійних програмних засобів, так і програмних засобів, що призначаються для комп'ютерної підтримки шкільного курсу математики. Це такі програмні засоби, як Derive, DG, Eureka, Maple, Mathematica, MathCad, Macsyma, Numeri, Reduce, Statgraph, Term та пакет GRAN, що включає три програми GRAN1, GRAN2D, GRAN3D і інші.

Частина з них генерують навчальні дій (учбові тексти, задачі, питання, підказки). Такі системи, як правило, враховують правильність відповіді і спосіб розв'язання, можуть його оцінити, а деякі – вдосконалювати стратегію навчання, враховуючи накопичений досвід. Існують системи, які можуть обговорювати з учнями правильність розв'язання і можливі варіанти розв'язання, причому мовою, близькою до природної [116]. Це стосується і розв'язування задач з алгебри, алгебри та початків аналізу. З точки зору систематизації методів та способів розв'язування задач інформаційні, комп'ютерні технології розв'язування задач можливо представити як специфічний (нестандартний і алгоритмічний) метод чи спосіб розв'язування алгебраїчних задач. Тоді алгоритм методу буде включати в себе програму розв'язання задачі (або певного виду задач), а в операційний склад методу будуть входити вміння та навички володіння комп'ютером та відповідним програмним забезпеченням.

Щоб розв'язування задач за допомогою комп'ютера, з однієї сторони, сприяло розвитку мислення, а з іншої – не викликало додаткових труднощів, які виникають через обмежені можливості комп'ютера, програми, що використовуються на уроках, повинні бути зручні для: а) аналізу та описання умови задачі; б) планування розв'язання; в) здійснення учнем розв'язання задачі; г) контролю правильності розв'язання в цілому та окремих його етапів.

Використання різних програм дає можливість учневі розв'язувати окремі задачі, не знаючи відповідного аналітичного апарату, методів і формул, правил перетворення виразів тощо. Наприклад, учень може розв'язувати рівняння і нерівності та їх системи, не знаючи формул для відшукання коренів, методу виключення змінних, методу інтервалів тощо, обчислювати похідні та інтеграли, не пам'ятаючи їх таблиць, досліджувати функції, не знаючи алгоритмів їх дослідження, відшукувати оптимальні розв'язки найпростіших задач лінійного і нелінійного програмування, не використовуючи симплекс-метод, градієнтні методи і т.д. Але це може стати недоліком і привести до підміни комп'ютерно-орієнтованих засобів навчання використанням програм за зразком.

Разом з тим, завдяки можливостям графічного супроводу комп'ютерного розв'язування задачі, учень чітко і легко буде розв'язувати досить складні задачі. Використання програмних засобів зазначеного типу дає можливість у багатьох випадках зробити розв'язування задачі настільки ж доступним, як просте розглядання рисунків чи графічних зображень.

Комп'ютерні програми доцільно використовувати на уроках алгебри при вивченні системи координат на прямій і на площині, понятті функції, елементарних функцій та їхніх властивостей, методів і способів розв'язування рівнянь та нерівностей і їхніх систем, числових послідовностей, диференціального та інтегрального числень і їхніх застосувань, а також при вивченні елементів статистики.

Зрозуміло, що окрім програм зазначеного типу вчитель при необхідності може використовувати різного роду тренажери, програми для контролю знань, збирання статистичних даних стосовно навчального процесу і їх опрацювання, тощо. Використання таких програм дає змогу вчителеві значно інтенсифікувати спілкування з учнями й учнів між собою, більше уваги приділити задачам на доведення, на постановку задач, побудову їхніх математичних моделей, розробку розв'язання задач, дослідження розв'язків, логічний аналіз умов задач, пошук нестандартних підходів до розв'язування задач, виявленню закономірностей, яким підкоряються досліджувані процеси і явища [116, 6].

Серед великої кількості програмних засобів особливу увагу привертають вітчизняні пакети GRAN і Term.

Програмний засіб Term призначений для підтримки курсу алгебри в 7-9 класах, містить готові набори задач, над якими працювала група розробників (педагогів, методистів, психологів). Вчитель лише вирішує питання про те, чи використовувати цей програмний засіб на уроці чи ні. Term є простим у застосуванні, але програмний засіб GRAN є більш гнучким і дозволяє вчителю самому підбирати задачі і не обмежує у використанні засобу для розв'язання задач різних типів.

Цей засіб призначений насамперед для розв'язування певних класів задач різними методами і способами і відноситься до програм-розв'язувачів. Він сприяє формуванню та розвитку творчого мислення учнів при вивченні ними окремих тем курсу алгебри, алгебри і початків аналізу. Його можна використовувати при розв'язуванні задач і вправ таких тем і розділів: границя числової послідовності (GRAN1 може бути використаний як ефективний засіб графічного аналізу функції); границя функції неперервного аргументу; неперервність функції в точці; розв'язування рівнянь та нерівностей, систем рівнянь та систем нерівностей (GRAN1 дає змогу розв'язувати всі типи рівнянь і нерівностей, які зустрічаються в шкільному курсі математики); розв'язування задач на порівняння і т. д. [268, 14-16].

З огляду на все вище перераховане розглянемо використання даної програми при розв'язуванні алгебраїчних задач. Програма GRAN1 вибрана тому, що вона дозволяє починаючи з сьомого класу впроваджувати в методику навчання графічний метод розв'язування задач, який на сьогодні є не досить поширеним в курсі алгебри загальноосвітньої школи (див. результати анкетування). Вже у сьомому класі названа програма дозволяє навчати учнів графічному розв'язанню рівнянь та систем рівнянь першого степеня.

Необхідно розв'язати рівняння , тобто в області задання залежності знайти всі значення аргументу такі, що відповідні їм значення дорівнюють нулю. При графічному поданні залежності знайти розв'язок рівняння значить – знайти всі точки на графіку залежності , ординати яких дорівнюють нулю. Іншими словами, потрібно знайти точки, що належать одночасно графіку залежності і осі абсцис , рівняння якої , тобто точки, що лежать як на лінії (прямій чи кривій), рівняння якої , так і на лінії, рівняння якої [115]. Також графічний метод поширюється на дробові рівняння, а також рівняння з модулем. Ця програма дозволяє графічно розв'язувати нерівності та системи нерівностей, причому її перевагами є наочність.

При вивченні лінійної функції програма дозволяє наочно показати вплив коефіцієнта EMBED Equation.3 на нахил та розташування прямої, яка описується рівнянням , до осі . У дев'ятому класі вивчається квадратична функція , та її властивості. Програма GRAN1 дозволяє вивчити вплив коефіцієнтів , та на форму і розташування параболи.

Цю програму можна використовувати при формуванні в учнів уявлень про геометричні перетворення графіків функцій: паралельне перенесення, розтягування або стиснення, симетрія відносно точки та координатних осей –

коли порівнюють з графіками функцій

[69,26].

В курсі алгебри 10 класу програма GRAN1 з успіхом використовується при вивченні тригонометричних функцій, степеневих функцій, показникових та логарифмічних функцій. Відповідно, програма дозволяє побудувати графіки всіх цих функцій, накладати їх, тобто реалізувати графічний метод розв’язання названих рівнянь та систем рівнянь. Недоліком програми є те, що при розв’язуванні тригонометричних рівнянь вона не враховує періодичності тригонометричних функцій. Відповідно, у розв’язок цей показник треба вводити додатково.

Під час вивчення похідної (11 клас) програма GRAN1 наочно показує, як січна послідовно наближається до дотичної при зменшенні , тобто цей машинний експеримент дозволяє визначити геометричний зміст похідної. В темі “Інтеграл” ця програма ілюструє геометричний зміст інтеграла та дозволяє визначати площі криволінійних трапецій. Також ця програма може застосовуватись і при вивченні елементів статистики.

Слід зазначити, що на розв’язання задачі за допомогою комп’ютера витрачається близько 2 –х хвилин, тобто задача розв’язується набагато швидше і з досить великою точністю. Разом з тим, завдяки можливостям графічного супроводу комп'ютерного розв'язування задачі, учень чітко і легко розв'язуватиме досить складні задачі, впевнено володітиме відповідною системою понять і правил.

З допомогою GRAN1 можна розв’язувати задачі різних типів, але нашу увагу привернули задачі з параметрами. Одним із яскравих прикладів, на якому можна продемонструвати використання комп’ютера для розв’язування задач, що мають кілька розв’язків – це розв’язування задач з параметрами. Використовуючи відповідні побудови, перетворення, зміну параметрів, можна відносно легко одержувати результати, які на перший погляд є важкодоступними. В школі дане питання висвітлюється дуже мало. Навіть сильні учні підчас не мають уявлення як про самі задачі, так і про шляхи їх розв’язування. Саме тому такі задачі досить часто використовуються в олімпіадах різних рівнів або на вступних іспитах у вищі навальні заклади. З використанням відповідного програмного забезпечення можна значно легше сформувати в учнів уявлення про задачі з параметрами та навчити розв’язувати хоча б деякі з них [68, 122].

Приклад1. Розв’язати рівняння [98, 225].

Для використання програми замінимо дане рівняння рівносильним (тобто перенесемо всі дані в ліву частину) і створимо об’єкт „Явна: Y=Y(X)” з використанням параметра: . Параметр задамо в межах [-10; 10] і встановимо приріст

Змінюючи значення параметра в програмі та спостерігаючи за графіком функції (рис.: 2.2, 2.3, 2.4), робимо певні висновки.

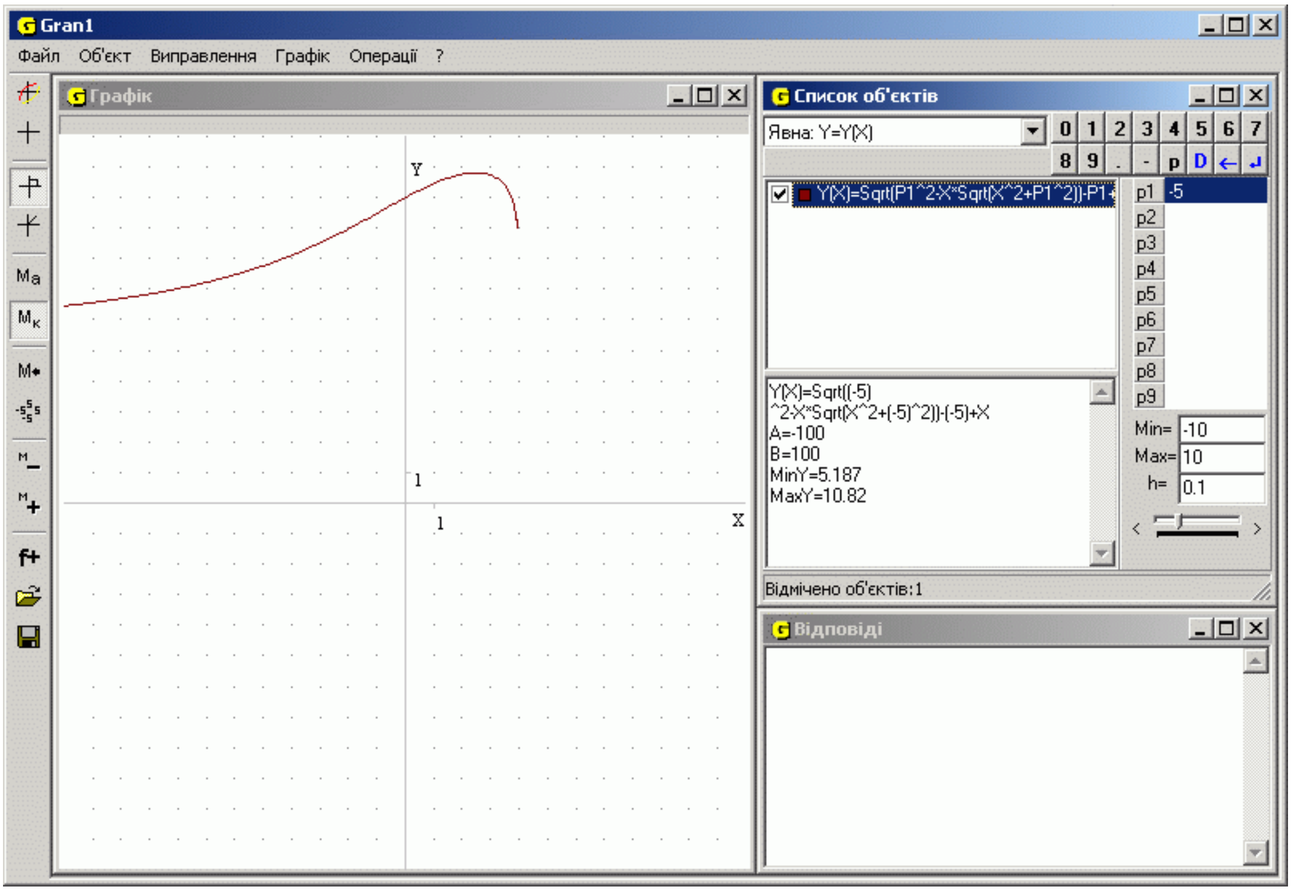

Gran1
Файл Об'єкт Виправлення Графік Операції ?
Графік
Y
1
1
X
Список об'єктів
Явна: Y=Y(X)
0 1 2 3 4 5 6 7
8 9 . - p D
Y(X)=Sqrt(P1^2-X*Sqrt(X^2+P1^2))-P1+
p1 -5
p2
p3
p4
p5
p6
p7
p8
p9
Y(X)=Sqrt((-5)
^2-X*Sqrt(X^2+(-5)^2))-(-5)+X
A=-100
B=100
MinY=5.187
MaxY=10.82
Min= -10
Max= 10
h= 0.1
Відмічено об'єктів:1
Відповіді

Рис. 2.2

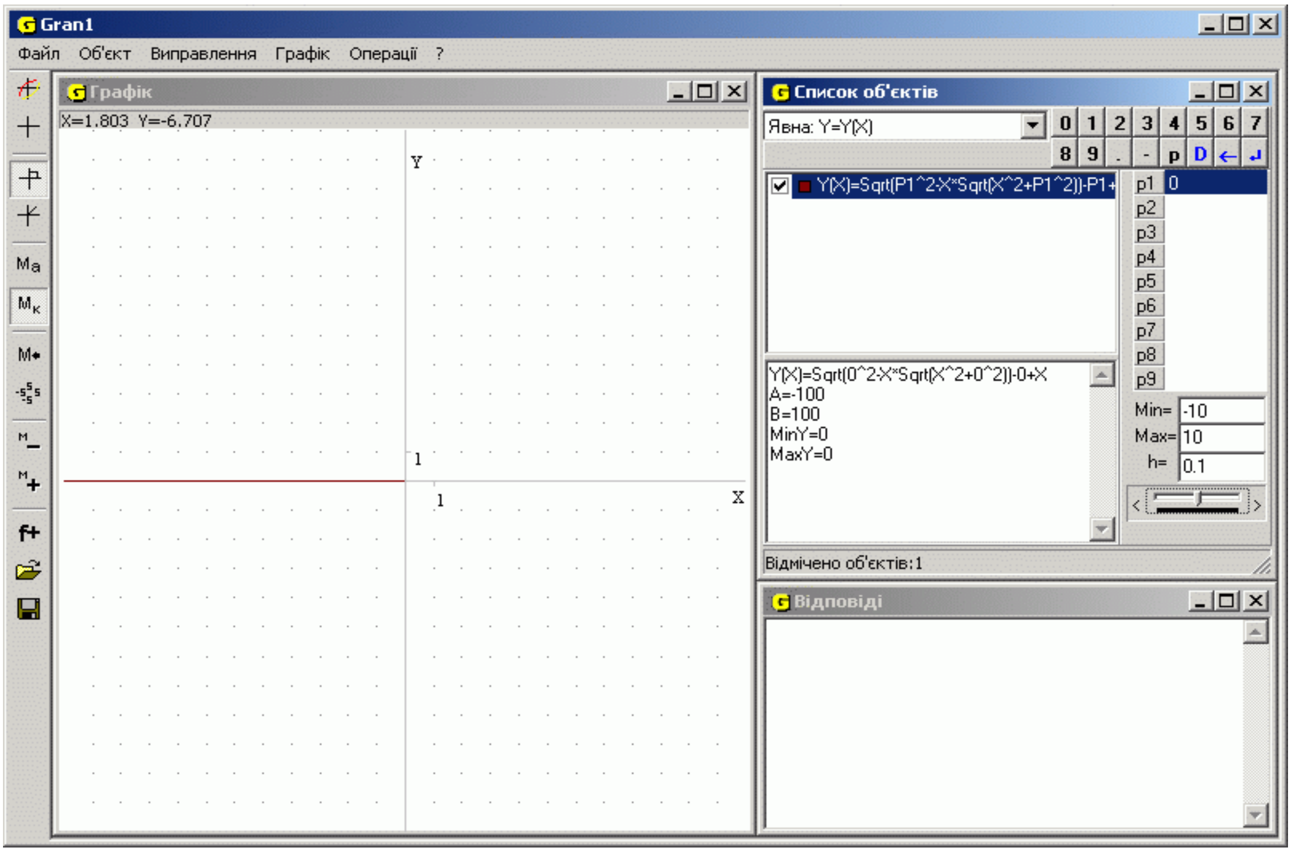

Gran1
Файл Об'єкт Виправлення Графік Операції ?
Графік
X=1.803 Y=-6.707
Y
1
1
X
Список об'єктів
Явна: Y=Y(X)
0 1 2 3 4 5 6 7
8 9 . - p D
Y(X)=Sqrt(P1^2-X*Sqrt(X^2+P1^2))-P1+
p1 0
p2
p3
p4
p5
p6
p7
p8
p9
Y(X)=Sqrt(0^2-X*Sqrt(X^2+0^2))-0+X
A=-100
B=100
MinY=0
MaxY=0
Min= -10
Max= 10
h= 0.1
Відмічено об'єктів:1
Відповіді

Рис 2.3

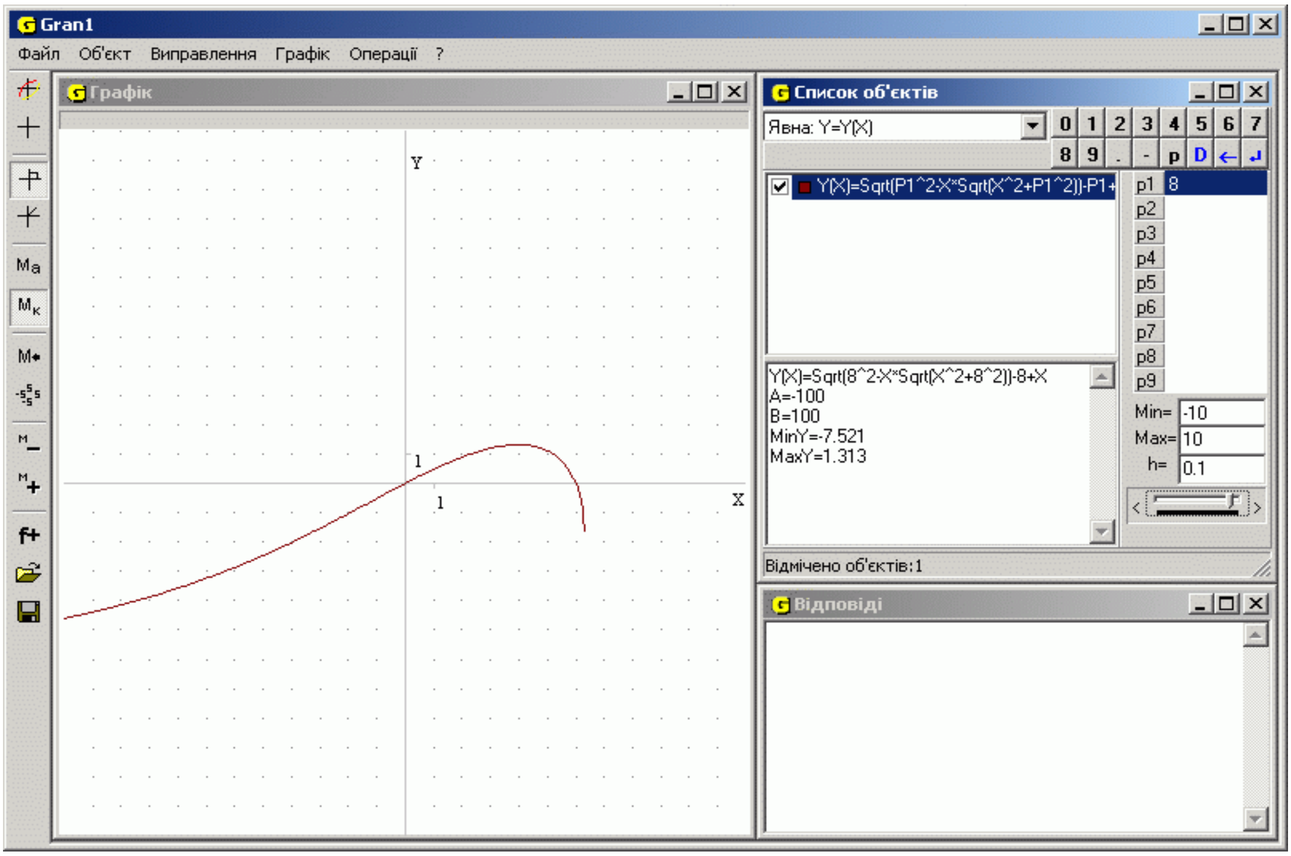


Рис. 2.4

Бачимо, що рівняння:

– не має розв’язків, якщо параметр (рис. 2.2);

– має безліч розв’язків при (рис. 2.3);

– має два розв’язки і при (рис. 2.4).

Приклад 2: Визначити кількість розв’язків системи залежно від

параметра a [98, 266].

Перепишемо рівняння цієї системи так, щоб їх можна було ввести в

програму GRAN1 . Задамо кожне з рівнянь як об’єкт, значення якого залежить від змінних та , тобто неявно задана залежність („Неявна: 0=G(X,Y)”), один з яких створюється з використанням параметра, параметру буде відповідати параметр в програмі GRAN1. Властивості параметру задамо такі: , , . Побудувавши графіки перших двох рівнянь системи, побачимо: графіками є фігури, що складаються з двох променів, які утворюють між собою гострий кут. Графіком третього рівняння буде коло, діаметр якого змінюється в залежності від значення параметра .

Після побудови графіків змінюємо значення параметру у вказаних межах та спостерігаємо за тим, як змінюється вигляд графіків, та, відповідно, кількість точок їх перетину, що і визначає кількість розв’язків системи (рис. 2.5, 2.6, 2.7).

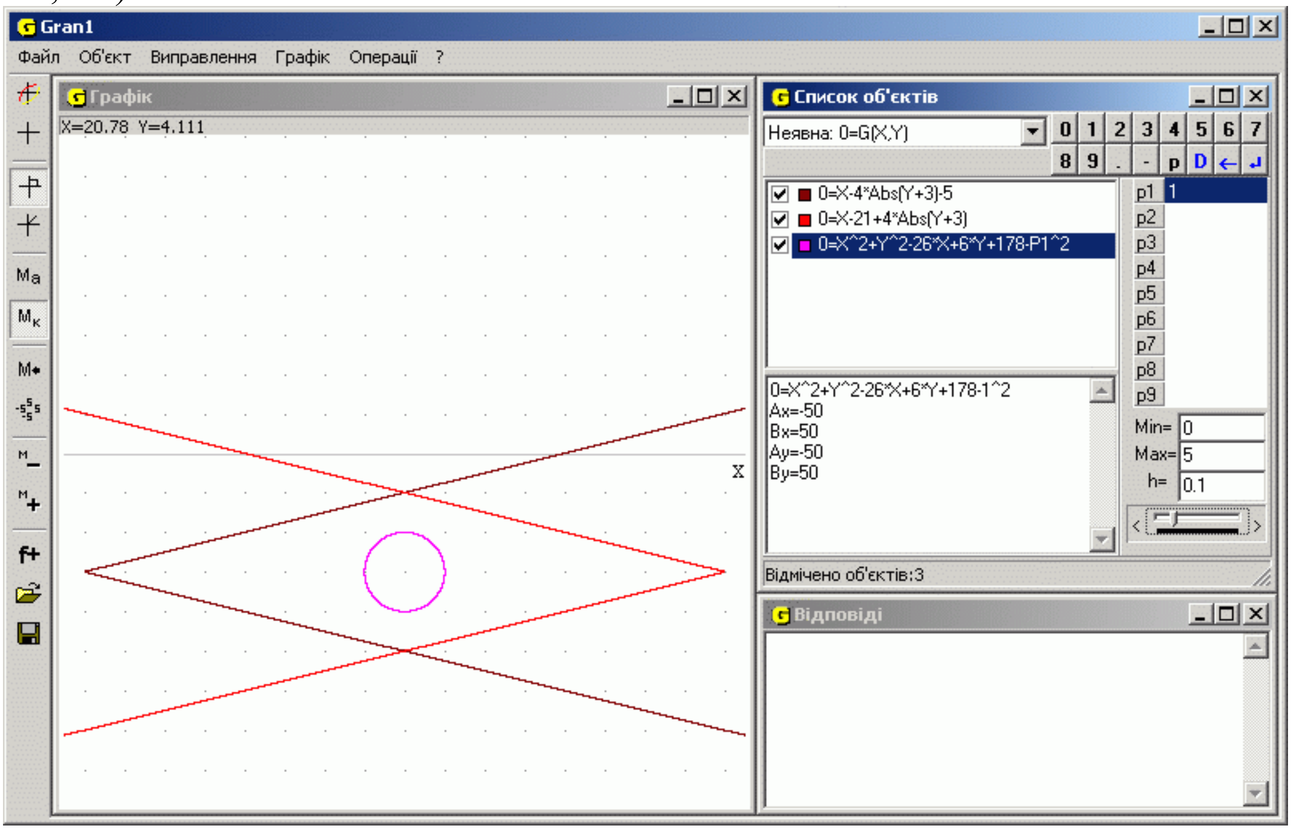


Рис. 2.5

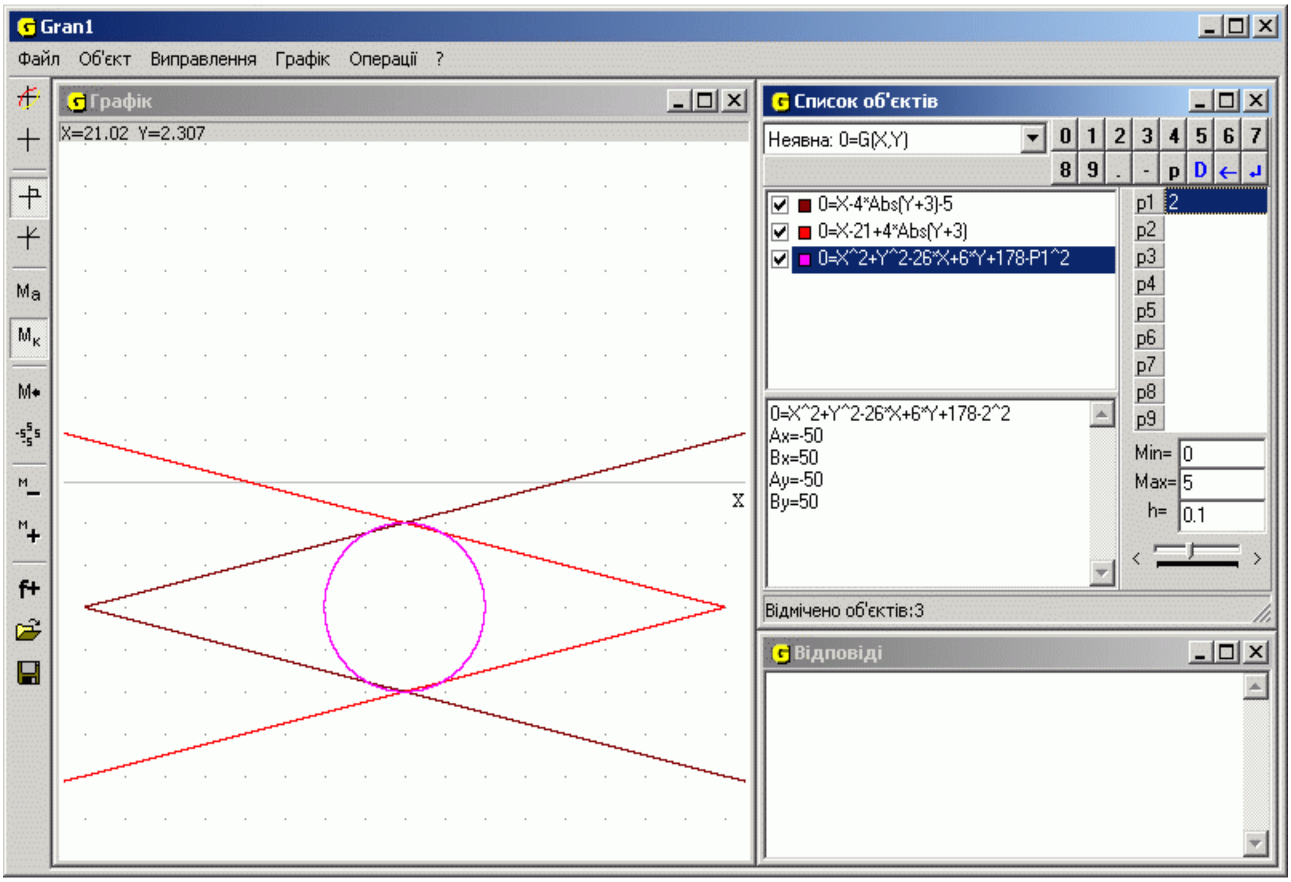

Gran1
Файл Об'єкт Виправлення Графік Операції ?
Графік
X=21.02 Y=2.307
X
Список об'єктів
Неявна: 0=G(X,Y)
0=X-4*Abs(Y+3)-5
0=X-21+4*Abs(Y+3)
0=X^2+Y^2-26*X+6*Y+178-P1^2
0=X^2+Y^2-26*X+6*Y+178-2^2
Ax=-50
Bx=50
Ay=-50
By=50
p1 2
Min= 0
Max= 5
h= 0.1
Відмічено об'єктів:3
Відповіді

Рис. 2.6

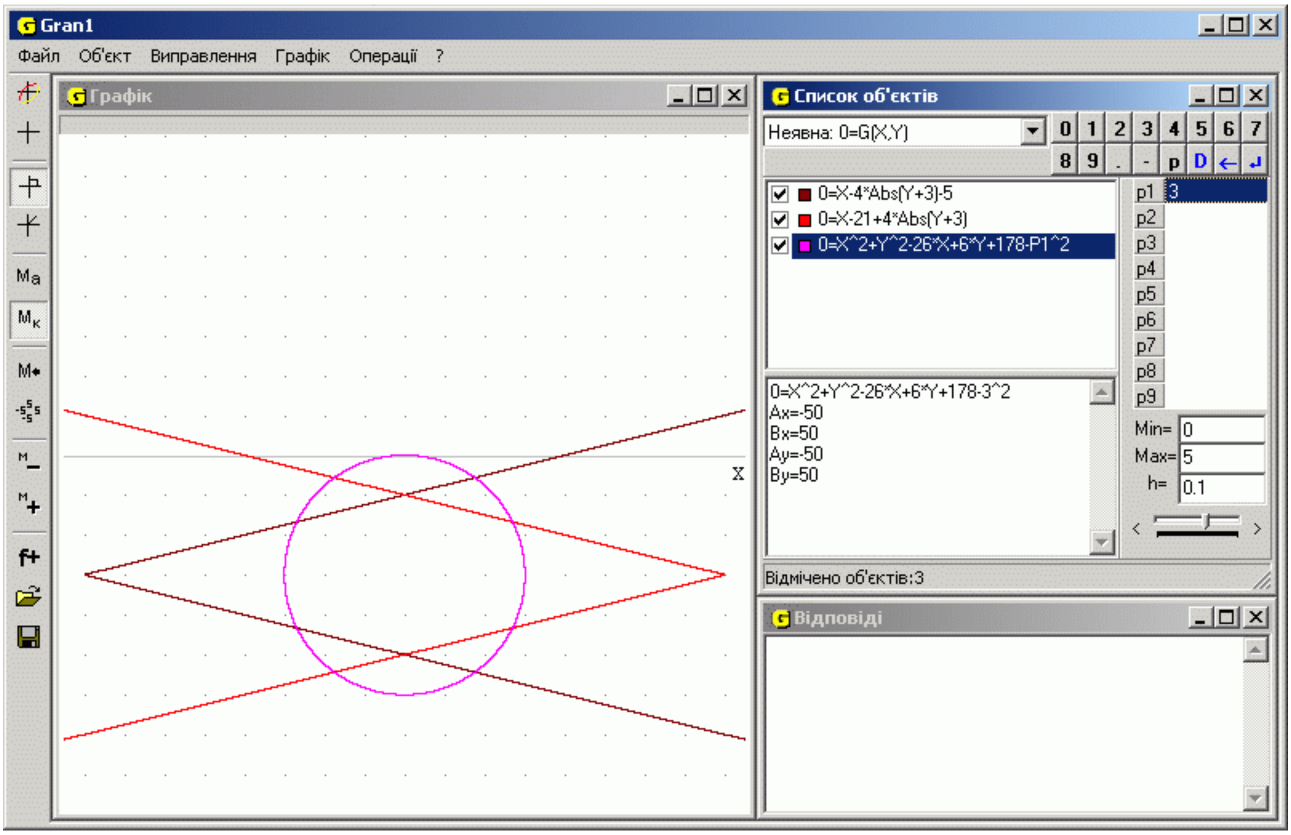

Gran1
Файл Об'єкт Виправлення Графік Операції ?
Графік
X
Список об'єктів
Неявна: 0=G(X,Y)
0=X-4*Abs(Y+3)-5
0=X-21+4*Abs(Y+3)
0=X^2+Y^2-26*X+6*Y+178-P1^2
0=X^2+Y^2-26*X+6*Y+178-3^2
Ax=-50
Bx=50
Ay=-50
By=50
p1 3
Min= 0
Max= 5
h= 0.1
Відмічено об'єктів:3
Відповіді

Рис. 2.7

Аналізуючи отримані графіки, можна зробити висновки:

- коли і , то система розв'язків не має. Бо нема таких точок, в яких би перетиналися усі три графіки;
- коли , то система має розв'язок.

Приклади, які розглянуто, ілюструють застосування програми GRAN1 до розв'язування алгебраїчних задач. Багато дітей вважають математику складною й навіть нецікавою. Використання комп'ютера може допомогти вчителю показати, якими цікавими та доступними можуть бути задачі. А також сприяє експериментуванню, проведенню дослідження самими учнями, прискоренню перевірки правильності висунутих гіпотез та самостійному "відкриттю" учнями деяких важливих властивостей, правил, теорем. Багато прикладів легше розв'язувати саме з допомогою комп'ютера, оскільки математичні розрахунки дуже складні й довготривалі, а так обчислення проходить дуже швидко й учень наочно бачить графічне розв'язання. До того ж комп'ютер цікавий дітям сам по собі, тому математика на комп'ютері для них теж буде цікавою.

Відповідно, використанням комп'ютерів повинне супроводжуватись і вивчення методів розв'язування алгебраїчних задач. Спочатку як підтвердження правильності дій вчителя (6-8 класи), а пізніше як самостійний засіб розв'язання задач з алгебри. В цьому і полягає використання комп'ютерних технологій при вивченні методів та способів розв'язування алгебраїчних задач: формування стійкого інтересу в учнів до комп'ютерно-орієнтовних засобів навчання при розв'язуванні задач та на основі цієї орієнтації вивчення адаптованих до рівня загальноосвітньої школи, зокрема до курсу алгебри, алгебри та початків аналізу, програмних засобів. При цьому комп'ютерні технології представляються як специфічний, алгоритмічний метод розв'язування, в якому алгоритм методу включатиме покрокове користування комп'ютерною програмою для розв'язання задачі. Відповідно, до операційного складу методу повинні входити вміння та навички володіння персональним комп'ютером.

2.4. Організація, проведення та результати експерименту

2.4.1. Мета і завдання експерименту. Перевірка ефективності методики навчання учнів розв'язуванню алгебраїчних задач, а також використання методів та способів розв'язання задач в процесі навчання здійснювалася шляхом педагогічного експерименту, який проводився протягом чотирьох років (2001-2005) в загальноосвітніх школах міста Києва, міста Чернігова та Чернігівської області. Частина результатів експерименту відображена в параграфі 2.3. В даному параграфі зупинимося на питаннях організації, проведення та аналізу результатів експериментальної частини дослідження.

Проведений експеримент включав в себе три етапи: констатуючий, пошуковий та формуючий. В ході всього експериментального дослідження систематично аналізувалися отримані результати, вносилися необхідні корективи, уточнювалася методика. При цьому використовувались такі методи дослідження: 1) теоретичний аналіз програм з математики, вивчення психолого

-педагогічної та методичної літератури; 2) вивчення і аналіз практики навчання та результатів навчання алгебри, алгебри та початків аналізу; 3) інтерв'ювання та анкетування учнів і вчителів; 4) спостереження за ходом проведення уроків алгебри, алгебри та початків аналізу; 5) бесіди з вчителями з досліджуваної проблеми; 6) проведення та аналіз письмових контрольних робіт.

Констатуюча частина експериментальної роботи проводилася в двох напрямках: 1) теоретичний аналіз в історичному плані проблеми навчання учнів методам та способам розв'язування алгебраїчних задач в середній загальноосвітній школі, спрямований на дослідження стану проблеми в психолого-педагогічній та методичній літературі; 2) експериментальна частина, мета якої полягала в тому, щоб встановити рівень знань учнів щодо методів та способів розв'язування задач з алгебри, алгебри та початків аналізу та вмінь використовувати їх на практиці, а також з'ясувати думку вчителів математики про стан даної проблеми в загальноосвітній школі.

З цією метою було проведено анкетування учнів загальноосвітніх шкіл (№204, №258, №81 м. Києва; №29 м. Чернігова; Дягівської ЗОШ Чернігівської області, Гончарівської гімназії Чернігівської області та Павлівської ЗОШ Чернігівської області). Метою опитування було виявити: рівень знань учнів щодо основних методів і способів розв'язування алгебраїчних задач, вміння співставити ці методи із змістом конкретної задачі та вибрати найбільш раціональний.

Запитання анкети формулювалися таким чином, щоб охопити якомога більший інформаційний простір технологій і методики розв'язування алгебраїчних задач. Одночасно була розроблена подібна анкета для вчителів математики загальноосвітньої школи та викладачів математики вищих навчальних закладів щодо використання методів і способів розв'язування алгебраїчних задач в практиці навчання, на якій зупинимося пізніше.

Результати обробки даних анкетування наведено у параграфі 2.2, тому зупинимося на загальних висновках.

Більшість учнів проявляє інтерес до історії розвитку алгебри та її методів, прагне розв'язувати алгебраїчні задачі різними методами і способами та відшукувати серед них найбільш раціональні для розв'язування конкретної задачі. Їх цікавлять задачі з елементами нового. Біля трьох четвертих опитаних володіють певними методами та способами розв'язування задач з алгебри, алгебри та теорії чисел, але тільки 25% анкетованих назвали по три і більше методів. А 25% опитаних не назвали жодного методу чи способу розв'язування алгебраїчних задач. Шоста частина опитаних не розрізняють понять "метод", "спосіб", "алгоритм методу" і т. д.

В цілому результати анкетування свідчать про недостатню увагу до вивчення методів та способів розв'язування алгебраїчних задач в загальноосвітній школі і, відповідно, недостатній рівень знань учнів щодо методів і способів розв'язування задач з алгебри. Цим пояснюється і низький рівень вмінь та навичок учнів щодо практичного застосування методів.

Основним джерелом знань для учнів загальноосвітньої школи є вчитель, тому якраз вчитель повинен в першу чергу володіти системою методів і способів, як стандартних, так і “нестандартних”(як загальних, так і часткових (п. 1.3)) , з точки зору шкільної програми з алгебри [153]. Саме вчитель повинен вміти використовувати методи і способи розв’язування задач як засіб свідомого засвоєння і закріплення теоретичного матеріалу, як інструмент при розв’язанні практичних задач. Тому з метою виявлення труднощів і недоліків у вивченні методів і способів розв’язування алгебраїчних задач було проведене анкетування вчителів математики середніх загальноосвітніх шкіл та викладачів вищих навчальних закладів I – IV рівнів акредитації (див. додаток Б).

Результати опитування свідчать про недосконалість системи навчання учнів методам та способам розв’язування алгебраїчних задач, їх вибору і використання при вивченні певних розділів алгебри, алгебри і початків аналізу.

Перед проведенням пошукового експерименту були поставлені такі завдання:

- розробити та випробувати методичні рекомендації, які б сприяли більш ефективному вивченню і використанню методів та способів розв’язування алгебраїчних задач в загальноосвітній школі;
- провести аналіз результатів педагогічного експерименту з використанням методів математичної статистики.

На другому, пошуковому, етапі експерименту було розроблено і запропоновано для практичної перевірки і обговорення у колі вчителів математики порядок вивчення основних методів і способів розв’язування алгебраїчних задач. Основою і підставою для вибору цих методів (і способів) стали результати констатуючого експерименту. У параграфі 1.4 (стор. 76) наведено пропозиції щодо порядку вивчення найбільш поширених в шкільній практиці методів і способів в середніх та старших класах загальноосвітньої школи.

Повертаючись до проблеми “вчитель – джерело знань”, наступним завданням є озброєння самого вчителя знаннями про методи і способи розв’язування алгебраїчних задач, їх історичне походження та історичний розвиток, алгоритм методу або правило-орієнтир, його операційний склад, тобто мінімум теоретичних знань, необхідних для свідомого засвоєння методу та його ефективного використання в практичній діяльності.

Відповідно на другому етапі пошукового експерименту були вибрані найбільш відомі в шкільній практиці методи та способи: рівнянь, доведення від супротивного, графічний, інтервалів, невизначених коефіцієнтів та метод математичної індукції. Для кожного з них були розроблені методичні рекомендації (детально див. додаток В), які включали в себе історію виникнення та розвитку методу, його операційний склад, застосування методу до розв’язування задач. Ці рекомендації були надані вчителям перед початком формуючого експерименту для використання при проведенні самого експерименту.

Постійне відвідування і спостереження уроків в експериментальних класах, їх детальне обговорення з вчителями і аналіз, систематичні перевірки зошитів учнів давали можливість судити про міру впливу рекомендацій на підвищення пізнавальної активності учнів на уроках, зміни у їх відношенні до розв’язування задач, про рівень оволодіння школярами методами та способами розв’язування задач з алгебри, алгебри та початків аналізу і їх використання при самостійному розв’язанні задач.

Експериментальна перевірка доступності та ефективності розроблених методичних рекомендацій навчання учнів методам та способам розв’язування алгебраїчних задач здійснювалася в ході формуючого експерименту. Оскільки дослідження проводилися в міських та сільських (де немає паралельних класів) школах, то вони здійснювалися двома способами.

Для оцінки ефективності розроблених рекомендацій та їх впливу на результативність і якість навчання в міських школах, де проводився експеримент, були виділені дві групи учнів: експериментальна та контрольна, в кожну з яких були включені учні 7-х, 8-х, 9-х, 10-х та 11-х класів. В експериментальних та контрольних класах уроки проводив один вчитель. Єдиною відмінністю в експериментальних та контрольних групах учнів була методика навчання: в перших – розроблена нами, у других – традиційна. Для проведення уроків в експериментальних класах вчителі були озброєні методичними рекомендаціями та відповідними задачами.

В таблиці 2.5 наведено розподіл учнів за класами та контрольними і експериментальними групами.

Таблиця 2.5

Статистика залучення учнів до формуючого експерименту

Класи	7-8 класи	9 класи	10 класи	11 класи	Всього
Експериментальні	86	60	57	104	307
Контрольні	94	58	70	119	341
Всього	180	118	127	223	648

Поділ учнів на експериментальні та контрольні групи проводився самим вчителем. В якості статистичного критерію однорідності розподілу учнів за рівнем успішності між контрольними та експериментальними групами використовувався середній бал успішності та його квадратичне відхилення за контрольний період часу. На основі квадратичного відхилення розраховувався довірчий інтервал значень середнього балу, виходячи з імовірності 0,997 і нормального розподілу (розподілу Гаусса) індивідуальних значень у вибірці. Середнє квадратичне відхилення розраховувалось згідно [260], далі для заданої імовірності розраховувався довірчий інтервал , де . В останньому виразі коефіцієнт для імовірності 0,997 рівний 3.

Порядок проведення експерименту розглянемо на прикладі вивчення методу складання рівнянь при розв'язуванні задач (7 клас).

В контрольних класах цей метод подавався у відповідності до підручника [38, 14], а в експериментальних класах вивчення методу проводилося у відповідності з розробленими нами методичними рекомендаціями. До операційного складу уміння розв'язувати задачі методом рівнянь відносяться такі розумові дії: аналіз задачі; встановлення суттєвих зв'язків між відомим та шуканим; виділення величин, значення яких прирівнюватимуться, позначення невідомої і подання потрібних величин через введену невідому; складання рівняння і його розв'язання; перевірка розв'язання задачі [276, 91].

Відповідно на початковій стадії вивчення учні були ознайомлені із сутністю методу; далі було подано операційний склад методу та проведено повторення необхідного теоретичного матеріалу, зокрема: складання простих виразів з невідомою; повторення основних видів задач, які розв'язуються кожною арифметичною дією, їх буквений запис; повторення основних функціональних залежностей та ін.

На наступному етапі вивчення методу розглядалися дві евристичні схеми. Перша застосовується до розв'язування нескладних задач і включає в себе: 1) позначається через х шукана невідома (або одна з шуканих); 2) виражаються через х інші величини, про які йдеться в змісті задачі; 3) спираючись на залежність між відомими і невідомими величинами, складається рівняння. Друга евристична схема зручна для розв’язування складніших задач: 1) з’ясувати, виходячи зі змісту задачі, значення яких величин можна прирівняти; 2) вибрати невідому і позначити її через х; 3) виразити через х значення величин, які прирівнюватимуться; 4) скласти рівняння [276, 90]. Теоретичні вміння і навички, подані на попередніх етапах вивчення методу рівнянь, закріплювалися на конкретних прикладах.

Для перевірки ефективності запропонованих рекомендацій по даному методу і відповідно рівня його засвоєння учнями в контрольних та експериментальних групах проводилися контрольні роботи. Результати контрольних робіт з вивчення методу рівнянь у сьомих класах наведено в таблиці 2.6.

Таблиця 2.6

Результати контрольних робіт на етапі формуючого експерименту (7-і класи)

Оцінка	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Середній бал
Експ.	-	-	1	4	5	6	7	7	8	4	1	-	7,2
Контр.	-	1	3	7	6	6	8	6	4	3	1	-	6,4

Середнє квадратичне відхилення, як характеристика розсіяння, складає для експериментальної групи 1,9; для контрольної відповідно 2,2. Тобто на фоні підвищення середнього балу має місце тенденція до ущільнення результатів (яка спостерігається і в таблиці) із переходом відстаючих учнів у групу “середняків”.

Аналогічно проводився експеримент у наступних групах учнів, з порівнянням результатів експериментальних і контрольних груп. Практично в усіх експериментальних групах спостерігається тенденція підвищення середнього балу успішності і зменшення середнього квадратичного відхилення.

В сільських малокомплектних школах за відсутності паралельних класів експеримент проводився в наступному порядку. Вибирався один клас (7-9 клас) і методичні рекомендації з вивчення методів та способів розв’язування алгебраїчних задач використовувались в процесі навчання алгебри, алгебри та початки аналізу впродовж наступних років. Успішність з предмету в експериментальному класі порівнювалась з середньостатистичними оцінками успішності з алгебри усіх інших класів.

Таблиця 2.7

Результати формуючого експерименту (Дягівська ЗОШ)

Роки / Класи	2001	2002	2003	2004	Середній бал
11	8,2	6,8	8,1	8,5	7,7
10	5,4	7,0	7,5	6,4	6,3
9	7,2	6,8	7,3	7,5	7,3
8	5,8	6,2	6,0	7,5	6,6
7	6,1	5,1	6,8	6,7	6,2
Середній бал	6,5	6,3	7,0	7,0	6,7

В таблиці 2.7 наведені дані розрахунків середнього балу за роками і за класами для Дягівської ЗОШ Менського району Чернігівської області. Виділені значення (по діагоналі) відповідають експериментальному класу. Відповідно цій таблиці середній бал успішності з алгебри за час експерименту знаходиться в інтервалі: 6,7±0,46. За цей же період в експериментальному класі середній бал виріс із 6,8 до 8,5.

Отже, результати експерименту свідчать про ефективність і, відповідно доцільність вивчення методів і способів розв'язування алгебраїчних задач як системи у органічній єдності і взаємозв'язку із теоретичним матеріалом.

2.4.2. Методичні рекомендації щодо використання методів і способів розв'язування задач в процесі навчання алгебри, алгебри і початків аналізу. На сьогодні в загальноосвітніх школах існує практика навчання математики, зокрема алгебри, при якій методи і способи розв'язування задач не є предметом окремого вивчення. Той чи інший вчитель, у залежності від потреб, використовує певний метод (або методи) як засіб закріплення теоретичних знань. При цьому практичні навички і вміння (використання методів і способів розв'язування алгебраїчних задач) формуються спонтанно, від вчителя до вчителя, в залежності від підготовки вчителя, його досвіду та інших, часто не контрольованих факторів. До останніх відносяться наявність підручників та посібників, методичне забезпечення навчального процесу та ін. Звідси і великі відмінності у знаннях учнів щодо методів і способів розв'язування алгебраїчних задач, невміння вибирати найбільш раціональний метод або спосіб для розв'язання конкретної задачі.

Історико-методичний аналіз процесу формування і розвитку методів розв'язування алгебраїчних задач показав, що цей процес відбувався у нерозривній єдності і тісному взаємозв'язку з розвитком теоретичного курсу алгебри, формуванням її теоретичних положень (див. п. 2.1). На основі цієї єдності був сформований початковий варіант гіпотези, як висновок з проведеного історико-методичного аналізу: порядок вивчення методів і способів розв'язування алгебраїчних задач повинен бути не прерогативою вчителя, а історично і методично зумовленим процесом, пов'язаним із попереднім і наступним матеріалом курсу алгебри, алгебри і початків аналізу. Тобто вивчення методів і способів розв'язування алгебраїчних задач повинно являти собою чітко орієнтовану, історично і методично зумовлену систему.

Вивчення методів і способів розв'язування алгебраїчних задач як системи знань і вмінь (тобто разом із операційним складом методу, алгоритмами та правилами-орієнтирами) передбачає їх вивчення, закріплення і повторення протягом всього курсу алгебри, алгебри і початків аналізу у нерозривному зв'язку з теоретичним змістом курсу. При вивченні конкретного методу необхідно сформулювати суть методу, підкреслити його історичне підґрунтя, походження та першоджерела, орієнтацію на види задач, для яких цей метод або спосіб може бути використаний. Систематизації знань сприятиме вивчення порядку застосування методу розв'язування задачі у вигляді алгоритму, правила-орієнтиру (або евристичної схеми).

Формування вмінь і навичок щодо використання даного методу для розв'язання алгебраїчних задач неможливе без засвоєння учнями операційного складу методу. Під операційним складом методу розуміємо систему розумових операцій, дій, і практичних в тому числі, які в сукупності і складають даний метод чи спосіб, необхідних для свідомого і активного засвоєння і практичного використання їх.

Наступним етапом у формуванні системи знань про методи, способи (та прийоми) розв’язування алгебраїчних задач є розв’язування задач різними методами та способами; навчання учнів пошуку найбільш раціональних (простих і ефективних) з них. У цю складову навчального процесу входить і використання нестандартних для середньої загальноосвітньої школи методів і способів розв’язування алгебраїчних задач. Відомо, що для багатьох задач можна вказати не один, а декілька методів і способів їх розв’язання. Тому важливо навчити учнів вибрати той, який швидше і простіше приведе до досягнення мети. Нагадаємо, що процес розв’язання задачі включає чотири етапи, останнім з яких є аналіз розв’язання. Якраз на цьому етапі учень повинен відповісти на питання: Чи можливо розв’язати дану задачі іншими методами? Який із них буде найбільш раціональний? Найпростіший підхід при виборі методу або способу розв’язування задачі полягає у порівнянні відомих учневі методів і способів. Це порівняння повинне охоплювати кількісну і якісну сторони, тобто порівнюється кількість операцій або дій та їх складність.

Відповідно до критеріїв вибору методу (або способу) розв’язування задачі віднесемо:

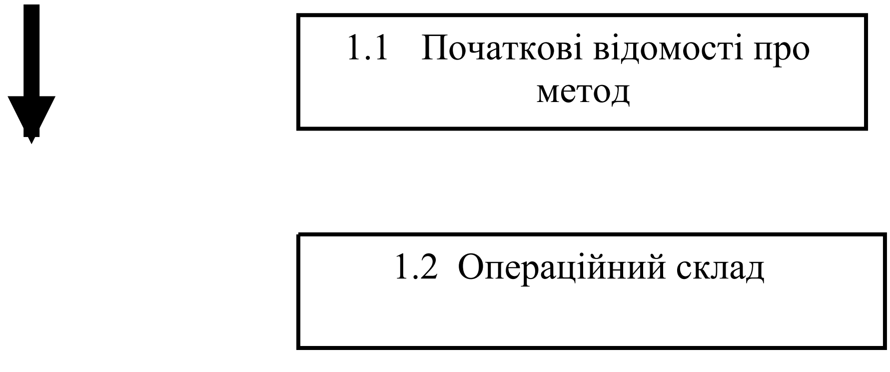
1) готовність учнів до їх використання (рівень засвоєння відповідного теоретичного матеріалу, рівень засвоєння операційного складу методу та його алгоритму чи правила-орієнтиру;
2) складність і громіздкість плану розв’язання (кількість кроків алгоритму чи евристичної схеми);
3) складність відповідних математичних розрахунків.

Зазначимо, що такий підхід можливий, якщо учень володіє усіма складовими методів і способів розв’язування алгебраїчних задач. Наприклад, якщо учень не вміє знаходити точки за їх координатами, то він ніколи не вибере графічний метод, навіть якщо той зручніший і простіший, і швидше приведе до досягнення мети.

Одним із варіантів формування в учнів вмінь та навичок вибору раціонального методу розв’язання є використання запропонованої автором (Скафа О. І. [272]) комп’ютерної програми “задача-метод”. Суть програми полягає в тому, що для розв’язання задачі або набору задач пропонується декілька методів або способів їх розв’язування. Учню необхідно вибрати вірний і найбільш раціональний, на його погляд, спосіб для кожної із задач. Далі розглядається програма корекції з акцентом на пошук розв’язання задачі. При цьому працюють евристики: аналіз, перебір варіантів, порівняння і т. д.

Підвищенню ефективності навчання методам і способам задач з алгебри, алгебри і початків аналізу сприяє використання спеціальних комп’ютерних програм, як одного із специфічних методів розв’язування алгебраїчних задач у старшій школі.

Порядок вивчення методів і способів розв’язування алгебраїчних задач можна представити у вигляді схеми (рис. 2.8).



1.3 Алгоритми, правила-орієнтири

1.4 Вибір раціонального методу чи способу

1.5 Використання ІТН

Рис. 2.8. Схем ія алгебраїчних

Відповідно, результатом вивчення методів розв’язування задач з алгебри повинно бути свідоме переміщення учня в межах схеми. Але реалізація цих завдань неможлива у першу чергу без озброєння вчителя всіма необхідними компонентами системи. Тому наступним етапом експерименту стала розробка методичних рекомендацій щодо вивчення методів та способів розв’язування алгебраїчних задач (див. додаток В). Підставою для розробки і експериментального впровадження рекомендацій стали також і результати анкетування вчителів та викладачів математики, а також студентів фізико-математичного факультету педагогічного ВНЗ за спеціальністю “математика”.

Відповідно до запропонованої схеми вивчення методів і способів розв’язування задач з алгебри, алгебри та початків аналізу кожна з методичних рекомендацій присвячувалась окремому методу (способу). Самі рекомендації включали:

- конкретне призначення та його суть;
- операційний склад методу, способу;
- алгоритм методу (способу) або правило-орієнтир (евристичну схему);
- історичне походження та першоджерела методу або способу;
- приклади розв’язування алгебраїчних задач за даним методом (способом);
- рекомендації щодо використання методу (способу) в практиці розв’язування алгебраїчних задач.

На основі аналізу результатів анкетування та сучасних програм для загальноосвітніх шкіл були виділені наступні найбільш поширені в шкільній алгебрі методи:

- метод складання рівнянь;

- графічний метод;
- метод доведення від супротивного;
- метод інтервалів;
- метод математичної індукції;
- метод невизначених коефіцієнтів.

Для кожного з цих методів були розроблені (за вищевказаним планом) методичні рекомендації і запропоновані для використання в шкільному експерименті. Крім того, були розроблені методичні рекомендації щодо використання нестандартних (не передбачених шкільною програмою) методів розв'язування алгебраїчних задач у курсі алгебри, алгебри і початків аналізу в загальноосвітній школі.

Задачі, для яких відсутні загальні правила, що визначають план їх розв'язання, назвемо нестандартними. При розв'язуванні таких задач, в першу чергу, слід виділити в них складові підзадачі стандартного типу або звести задачу до стандартної. Розв'язування таких задач спирається на уміння, якими можна оволодіти в результаті систематичної і цілеспрямованої роботи, це уміння поєднувати різні прийоми розв'язування задач.

Ефективність роботи учнів при розв'язанні нестандартних задач визначається рівнем реалізації наступних положень:

1. Треба так сформулювати задачу, щоб в учнів виникло бажання працювати над її розв'язанням і бажання досягнути результату.
2. Після початкового аналізу необхідний певний час для проникнення в умову і вимоги задачі, чіткого визначення відомих і невідомих компонентів. Тільки тоді висуваються пропозиції про можливі напрямки пошуку розв'язання.
3. Надалі слід перейти до розробки плану розв'язання, складання цього плану і власне розв'язання.
4. Після завершення процесу розв'язання слід здійснити перевірку, співставити результати з умовою задачі, виявити особливі випадки, спробувати знайти інші способи розв'язання.

Поряд із поняттям нестандартних задач в методичній літературі використовується термін "нестандартні методи" розв'язування задач. Повної єдності в тлумаченні цього поняття немає, але багато авторів ним користуються [232], [295]. Під нестандартними методами розуміють незвичні для школярів міркування при розв'язуванні певних задач. За іншими поглядами, до нестандартних методів і способів розв'язування задач відносяться ті методи (і способи), які не вивчаються в курсі загальноосвітньої школи та не наводяться в шкільних підручниках і посібниках. Але, повертаючись назад, до нестандартних задач відносять ті задачі, для яких відсутні загальні правила їх розв'язання. Тому можна сказати, що нестандартні методи – це методи розв'язування нестандартних задач.

Коло питань алгебри, в тому числі і шкільної, постійно розширюється. Тому, крім обов'язкових, визначених програмою методів і способів розв'язування алгебраїчних задач, в практику навчання алгебри необхідно вводити і нестандартні задачі, і нестандартні методи їх розв'язання. Принаймні в класах з поглибленим вивченням математики або на факультативних та індивідуальних заняттях із здібними учнями.

При вивченні методів розв'язування алгебраїчних задач як системи і частини теоретичного курсу алгебри, у єдності з попереднім і наступним матеріалом підвищується пізнавальна активність учнів на уроках, зростає їх самостійність при виконанні домашніх завдань. Одночасно поглиблюється практична спрямованість самого курсу алгебри, підвищується рівень практичних навичок і вмінь учнів щодо розв'язування алгебраїчних задач, вибору раціональних методів розв'язання.

Нижче розглянуто найбільш уживані в шкільному курсі алгебри методи розв'язування задач разом з їх операційним складом.

1.МЕТОД СКЛАДАННЯ РІВНЯНЬ, НЕРІВНОСТЕЙ ТА ЇХ СИСТЕМ. Цей метод є одним з центральних методів розв'язування задач як в алгебрі, так і в інших науках (геометрія, фізика і т. д.). Розв'язування задач методом рівнянь сприяє розвитку логічного мислення, кмітливості і спостережливості, вміння самостійно здійснювати простіші дослідження. Завдяки своїй спільності, метод рівнянь охоплює задачі з самими різноманітними структурами і тим самим розвиває гнучкість мислення учнів, вчить їх перекладати конкретну ситуацію задачі в абстрактну алгебраїчну модель, придатну для розв'язання задач з іншим конкретним змістом, але з тією ж структурою. Метод рівнянь є одним з сильних засобів здійснення внутрішньопредметних та міжпредметних зв'язків у процесі навчання математики в середній школі. При цьому перше місце займає розкриття прикладної спрямованості шкільного курсу математики: учні засвоюють визначені елементи математичних знань, навичок та вмінь, які відносяться до всіх основних етапів процесу розв'язання.

Метод рівнянь не є алгоритмічним методом. Для нього існує евристична схема. В методиці навчання алгебри відомі дві евристичні схеми пошуку рівняння до задачі [276, 90]. Перша застосовується до розв'язування нескладних задач, друга евристична схема застосовується для розв'язування складніших задач.

1 схема:

1) позначити через шукану величину (або одну з шуканих);
2) виразити через інші величини, про які йдеться в змісті задачі;
3) спираючись на залежність між відомими і невідомими величинами, скласти рівняння.

2 схема:

1) з'ясувати, виходячи з змісту задачі, значення яких величин можна прирівняти;
2) вибрати невідому і позначити її через ;
3) виразити через значення величин, які прирівнюватимуться;
4) скласти рівняння.

З цим методом учні починають знайомитись в шостому класі та з його допомогою розв'язують найпростіші задачі. Щоб скористатися методом рівнянь, потрібно мати певний мінімум знань, навичок та вмінь. Для того, щоб учні засвоїли метод рівнянь та змогли надалі їм користуватися, вони повинні опанувати таким операційним складом:

- Схематичний і символічний запис умови задачі.
- Встановлення відношень, в яких можуть знаходитися різні величини і розуміти реальний зміст цих відношень (наприклад, відношення: "пізніше на", "старше у стільки-то разів", "більше у стільки-то разів", "більше на стільки-то", "менше у стільки-то разів", "менше на стільки-то" "пізніше", "раніше", "одночасно" та ін.).
- З'ясування якими саме математичними діями, властивостями або яким зв'язком (залежністю) між компонентами та результатом дій може бути описане те або інше конкретне співвідношення.
- Запис формул, які виражають функціональну залежність між величинами.
- Переклад тексту задач з рідної мови на мову алгебраїчних символів, виразів і рівнянь.

Щоб подолати труднощі при розв'язанні задач шляхом складання рівнянь , слід підвищити увагу і збільшити час на формування навичок та вмінь при розв'язанні арифметичних задач, проводити підготовчу роботу перед введенням методу рівнянь. Тобто, щоб покращити ефективність розв'язання задач, необхідно виконувати підготовчі вправи, в процесі застосування яких учні засвоять операційний склад даного методу.

2. ГРАФІЧНИЙ МЕТОД. О дним з важливих методів є графічний метод. Цей метод використовується для: розв'язування рівнянь, розв'язування нерівностей, а також їх систем та ін. З графічним розв'язанням рівнянь учні середньої школи знайомляться у восьмому класі (хоча, на нашу думку, з цим методом учнів можна познайомити в сьомому класі при розв'язуванні систем рівнянь), а потім використовують його у дев'ятому класі при вивченні функцій і графіків. Суть графічного методу полягає в тому, що для розв'язування рівняння (або нерівності чи) на координатній площині будують графіки функцій і , знаходять значення змінної , для яких (у випадку нерівностей відшукують область тих значень змінної , для яких точки графіка функції розміщені вище (або нижче) відповідних точок графіка функції) [223,34].

Відповідно правило-орієнтир (алгоритм) даного методу виглядатиме так:

- Позначаємо функції, які входять до складу рівняння.
- Будуємо графік(и) функції (або та , якщо в умові задано чи , або задано систему рівнянь чи нерівностей).
- За графіком визначаємо множину розв'язків рівняння (нерівності або системи рівнянь чи системи нерівностей).

На практиці побудова графіків (користуючись відомими властивостями функції і таблицею її значень), а також вимірювання відрізків (лінійкою або на міліметровому папері) можуть бути виконані лише наближено. Графічний метод розв'язування задач в чистому вигляді не дає великої точності і може використовуватись лише для наближених розв'язань.

Графічний метод відіграє незамінну роль як допоміжний засіб, застосовуваний при наближеному розв'язуванні рівнянь, нерівностей, тощо. Результати, здобуті графічним методом, піддаються подальшій перевірці та уточненню обчислювальними методами (метод Ньютона, метод спроб з використанням теореми Коші про нуль неперервної на сегменті функції, метод лінійної інтерполяції, метод ітерації і т. д.).

Для використання графічного методу при розв'язуванні рівнянь учні повинні опанувати таким операційним складом:

- Встановлення характеру поданої у задачі функції.
- Виявлення властивостей даної функції (парність, непарність, періодичність і т. д.) та вміти скласти таблицю її значень.
- Накреслення графіку даної функції (сюди ж відноситься і ретельність побудов та достатня їхня точність).

- Уміння правильно визначати координати точки перетину отриманих ліній і т. д.
- Використання комп'ютера для побудови графіків функцій і знаходження розв'язків.

Графічний метод хоча і є наближеними методом розв'язування задач, але він сприяє поглибленню знань учнів не тільки про рівняння взагалі, а також і про функції і про їх практичне застосування.

3. МЕТОД ДОВЕДЕННЯ ВІД СУПРОТИВНОГО. Цей метод часто використовується для доведення різноманітних теорем як з курсу алгебри, так і з курсу геометрії. З ним учні знайомляться у сьомому класі в курсі планіметрії (при доведенні тверджень з перших параграфів планіметрії), надалі, у дев'ятому класі, метод від супротивного використовується для доведення нерівностей та різноманітних алгебраїчних тверджень. Взагалі, цей метод використовується для доведення неможливості чого-небудь і єдиності чого-небудь, а також інколи при доведенні обернених тверджень.

Логічною основою методу від супротивного є закон виключеного третього: з двох супротивних тверджень завжди одне правильне, друге – неправильне, а третього бути не може. Завдяки цьому закону замість доведення певного твердження під час використання методу доведення від супротивного доводять, що супротивне йому твердження – неправильне, і на цій підставі роблять висновок, що правильне доводжуване твердження [276, 261].

Правило-орієнтир даного методу складається з трьох пунктів:

1) припустити супротивне тому, що треба довести;
2) користуючись припущенням, відомими аксіомами і доведеними раніше твердженнями, шляхом міркувань дійти висновку, який суперечить або умові твердження, яке доводиться, або відомій аксіомі, або доведеному раніше твердженню, або припущенню;
3) зробити висновок, що припущення неправильне, а правильне те, що треба довести.

Рекомендовано учням оформляти доведення за даним правилом-орієнтиром як у письмовому вигляді, так і усно.

Для того, щоб учні могли засвоїти метод від супротивного та вміти його використовувати, вони повинні опанувати таким операційним складом:

- Оволодіння певною системою теоретичних знань та вмінь (поняття та їх означення, аксіоми, теореми і т. д.).
- Виконання аналізу формулювання доводжуваного твердження, тобто відокремлення умови від висновку.
- Запис умови і висновку теореми (задачі) та логічного зв'язку між ними у символічній формі.
- Грамотне сформулювання заперечення теореми.
- Обґрунтовування заперечення даного твердження, тобто, що знайдуться об'єкти, що умова виконується, а висновок – ні.
- Вміння припустити супротивне тому, що треба довести.

– Виведення можливих наслідків з припущення.
– Знаходження супротивних тверджень, які були б суперечливими.

Треба зауважити, що у школі доведення методом від супротивного завжди допустимі; вони такі ж самі строгі, як і інші доведення, не пов’язані з законом виключеного третього [41,45]. Треба зауважити, що недоліком даного методу є складна логічна основа.

4. МЕТОД ІНТЕРВАЛІВ.

Одним з важливих методів розв’язання нерівностей є метод інтервалів. Виходячи з ідей методу інтервалів, розв’язання будь-якої нерівності можна звести до розв’язання одного або декількох рівнянь. Цей метод застосовується і при побудові графіків деяких функцій (в тому числі тих, які мають аргумент під знаком модуля). Технічна сторона та операційний склад методу інтервалів є простим, тому цей метод можна вивчати задовго до його теоретичного обґрунтування.

Метод інтервалів в школі використовується для розв’язування нерівностей. З цим методом учнів доцільно ознайомити у дев’ятому класі.

В основі цього методу лежить така властивість двочлена : точка ділить числову вісь на дві частини – справа від точки двочлен додатній, а зліва від точки – від’ємний.

Многочлен з дійсними коефіцієнтами степеня вище першого подається як добуток лінійних двочленів і квадратних тричленів з від’ємним дискримінантом:

де і – невід’ємні цілі числа. Розглянемо, як розв’язується нерівність:

. (1)

Оскільки двочлен (x – і завжди більший нуля при ,а квадратний тричлен з від’ємним дискримінантом теж більший нуля при всіх дійсних значеннях x, то нерівність (1) можна спростити шляхом ділення на многочлен:

.

Тобто, шляхом рівносильних перетворень задану нерівність зводимо до виду

. (2)

Дослідимо перший множник . При

Цей результат зображаємо на числовій прямій, акцентуючи увагу на тому, що в точці функція приймає значення, рівне нулю і відбувається зміна знака функції. Далі зображаємо на числовій прямій результати досліджень другого двочлена , третього і т.д. Нехай отримані корені розміщуються на числовій прямій у наступному порядку: . (3)

Вони розбивають числову вісь на (к + 1) областей:

З умови (3) випливає, що при всі лінійні двочлени приймають додатні значення, відповідно їх добуток теж буде більшим від нуля. Це відмічаємо «змійкою» на числовій прямій (рис. 2.9).

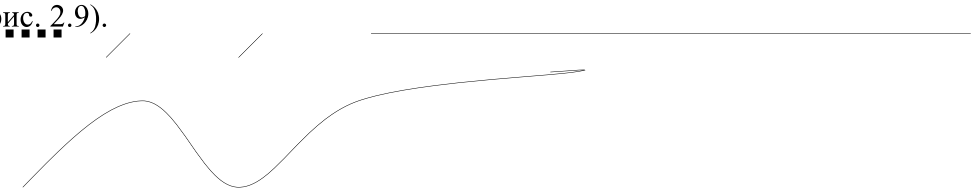


Рис. 2.9. Розв'язки нерівності виду (2) на числовій прямій

В інтервалі один із двочленів, а саме приймає від'ємне значення, всі інші – додатне, тому їх добуток буде від'ємним за знаком.

Цей результат відмічаємо „змійкою" під числовою прямою.

В інтервалі вже два двочлени від'ємні, останні додатні, отже їх добуток стає більший від нуля і „змійка" переходить у верхню півплощину. Досліджуючи знак добутку в кожному інтервалі, виділимо інтервали, в яких та інтервали, на яких .

Запишемо правило-орієнтир методу інтервалів для розв'язання раціональних нерівностей:

1. Звести нерівність до виду: або
EMBED Equation.3 ;

2. Знайти:

а) корені двочленів, які входять в дану нерівність: ;

б) проміжки знакосталості виразу: ;

в) знак виразу на проміжках.

3. Якщо , то розв'язок нерівності – об'єднання проміжків із знаком "+"; в протилежному випадку – із знаком "-".

Для того, щоб учні могли користуватися методом інтервалів, їм потрібно опанувати такі елементи операційного складу:

- Проведення різноманітних рівносильних перетворень виразів для зведення виразу , що в умові, до вигляду: .
- Розв'язування лінійних рівнянь з одним невідомим (це рівняння виду), тобто знаходити його корінь.
- Знати, що така числова пряма та вміти відкладати на ній точки з координатами, які відповідають даним кореням рівняння (нерівності).
- Визначення знаку виразу на кожному з інтервалів.

5. МЕТОД МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ. Цей метод заснований на принципі математичної індукції, є одним з складних питань, які вивчаються та застосовуються в шкільному курсі алгебри (математики). Він, у порівнянні з іншими методами, має свою специфіку.

При вдалому використанні методу математичної індукції стають логічно стрункими ряд питань шкільної програми (числові послідовності та функція, елементи комбінаторики, похідна та ін.). Цей метод має пряме відношення як до методу "повної індукції", так і до "неповної індукції", хоча він є дедуктивним методом.

Алгоритм методу випливає з принципу математичної індукції, який формулюється так: якщо твердження , формулювання якого залежить від натурального числа n, виконується для або і з припущення того, що воно виконується і для натурального числа , де , випливає, що воно виконується і для , то це твердження виконується для будь-якого натурального числа ( ).

Навчальний алгоритм цього методу складається з таких кроків:

1. Перевірити правильність твердження для або .
2. Припустити, що твердження правильне при , де .
3. Довести, використовуючи дане припущення, що твердження є правильними і при .
4. Зробити висновок, що твердження правильне для будь-якого натурального на підставі принципу математичної індукції.

З цим методом учнів доцільно ознайомити при вивченні числових послідовностей у 9-му класі(хоча в школі він вивчається в старших класах), і застосування його зручно починати з простих прикладів на знаходження спільного члена числової послідовності. Потім можна розглядати приклади на доведення нерівностей та доводити різні твердження, що стосуються подільності натуральних чисел і т. д.

Щоб скористатися цим методом, учні повинні опанувати таким операційним складом:

- Засвоєння принципу математичної індукції та вміння ним користуватися.
- Пам’ятати, що потреба в доведенні методом математичної індукції частіше за все виникає там, де передбачувана послідовність обумовлюється характеристикою змінної .
- Проводення як індуктивних, так і дедуктивних міркувань.
- Відшукування гіпотези та на основі отриманих результатів формулювання загальних висновків.
- Знаходження залежності між елементами задачі та її результатом.

Як характеристику методу можна навести слова академіка А. М. Колмогорова: "Вміння застосовувати метод математичної індукції є добрим критерієм логічної зрілості, яка цілковито необхідна математику" [149, 9].

Розглянемо також ряд "нестандартних" методів і способів, які доцільно використовувати в загальноосвітній школі, зокрема класах з поглибленим вивченням математики та на факультативах.

1. ПРИНЦИП ДІРІХЛЕ та його використання при розв’язуванні задач

Розв’язання деяких, навіть досить складних задач з математики, спрощується, якщо застосувати принцип Діріхле, названий ім’ям відомого німецького математика, який уперше застосував його до розв’язування задач.

Суть способу сформулюється так: якщо n+1 предмет розкладено в n ящиків, то принаймні в одному ящику буде щонайменше два предмети. Використовуючи цей принцип, можна довести, наприклад, що внаслідок ділення 41 на 61 дістанемо нескінченний десятковий періодичний дріб.

Розглянемо застосування цього способу на конкретних задачах.

Задача 1: Довжина декількох пофарбованих дуг кола менша довжини півкола. Довести, що існує діаметр з непофарбованими кінцями.

Розв'язання: Зрозуміло, що загальна довжина пофарбованих дуг, і дуг, що симетричні пофарбованим дугам відносно центра кола, менша довжини кола. Тому знайдеться незафарбована точка. Діаметр, що пройде через цю точку і буде шуканим.

Задача 2: В класі навчається 25 учнів. Довести, що принаймні троє з них народилися в одному місяці.

Розв'язання: Справді, нехай 12 місяців – це ящики, а 25 учнів – це предмети які треба розкласти в ящики. Тоді за принципом Діріхле знайдеться ящик, в якому буде не менше 3-х предметів, бо $2 \cdot 12 = 24 < 25$. Тобто, знайдеться такий місяць, в якому народилося троє з учнів класу.

2. ПРИНЦИП "КРАЙНЬОГО"

У багатьох задачах на доведення нерівностей присутні невідомі, які є в певному розумінні рівноправними. Тому буває зручно розпочати розв'язування задачі з розгляду крайнього елемента – найбільшого або найменшого числа. Такий підхід прийнято називати принципом (правилом) крайнього.

Розвитком принципу крайнього є принцип впорядкування, сенс якого полягає в тому, щоб розташувати числа в якому-небудь порядку, наприклад, у порядку зростання. Найчастіше принцип крайнього застосовують для скінченного числа дійсних величин, оскільки з будь-якого набору дійсних чисел можна вибрати найменше (найбільше) число. Проте зустрічаються задачі з нескінченною кількістю величин, в яких також можливо застосувати принцип крайнього, оскільки в будь-якій непорожній множині натуральних чисел можна вибрати найменший елемент.

Можна зауважити, що принцип математичної індукції також можна вважати одним із варіантів принципу крайнього. Це виглядає так. Нехай для кожного натурального n треба довести деяке твердження T(n). Для доведення методом математичної індукції вимагається:

а) Перевірити базу, тобто істинність твердження T(1).

б) Для кожного натурального n довести індуктивний перехід $T(n) \to T(n+1)$.

Правило-орієнтир принципу крайнього для доведення T(n) виглядатиме так:

1) Розглянемо множину M тих натуральних значень n, для яких T(n) не виконується, і припустимо, що вона є непорожньою.

2) Тоді в множині M існує найменший елемент, позначимо його n0. Якщо n0=1, то дістанемо суперечність із пунктом а).

3) Якщо n0>1, то застосуємо б) у формі . Це означає, що твердження T(n0-1) не виконується, що суперечить вибору n0. Таким чином, множина M є порожньою.

Розглянемо застосування цього принципу для розв'язування задач.

Задача 1: Довести, що для будь-яких додатніх чисел виконується

нерівність: .

Розв'язання: Сума S не зміниться, якщо виконати циклічну перестановку індексів (вважаємо, що за числом an йде число a1).

Тому нехай . Виберемо - найбільше з чисел у знаменнику

дробу, де чисельником є . Далі, нехай - найбільше з чисел у знаменнику дробу з чисельником , і взагалі - найбільше з чисел у знаменнику дробу з чисельником . Процес будемо повторювати до тих пір, поки всі номери будуть різні. Якщо номери розташувати по колу, то номери та (а також та) будуть

знаходитися поруч або через один. Тому, . Згідно, з означенням послідовності ( ), а також з огляду на те, що знаменник дробу з чисельником не перевищує , доходимо висновку, що сума , про яку йдеться в умові задачі, є більшою, ніж

. Скориставшись нерівністю Коші, маємо:

, тобто . Тоді . Що нам і треба було довести.

4. СПОСОБИ ДЕКОМПОЗИЦІЇ І СУПЕРПОЗИЦІЇ

Розглянемо нерівність в канонічному вигляді Fv0, де вираз в лівій частині містить трансцендентні функції невідомого і, можливо, числові параметри; символ „v" означає один із знаків „>" „<" „≤" „≥".

Суть способу декомпозиції полягає в представленні лівої частини наведеної нерівності у вигляді добутку і частки певних базових функцій, які не містять цієї трансцендентної функції. Отримана рівносильна нерівність звичайно є більш зручною для розв'язання, наприклад, методом інтервалів. Область застосування способу декомпозиції визначається набором базових функцій: поповнюючи цей набір, ми розширюємо область використання методу .

Спосіб суперпозиції базується на використанні принципу суперпозиції функцій, суть якого полягає в тому, що коли – корінь рівняння , то є також коренем рівняння . Але звідси ще не випливає, що рівняння не може мати інших коренів. Їх відсутність можна довести на основі монотонності функцій. Проте навіть якщо такі корені існують, використання суперпозиції може полегшити їх знаходження. Розглянемо задачу.

Задача: Доведіть, що якщо - такий квадратний тричлен, що рівняння не має дійсних коренів, то й рівняння також не має дійсних коренів.

Розв'язання: Хоч функція і не є монотонною, але для квадратичної функції виконання при кожному нерівності означає, що для всіх або або . Тоді відповідно і або . А отже, рівняння також не має дійсних коренів.

5. СПОСІБ ОЦІНЮВАННЯ

Розглянемо наступний спосіб розв'язування задач – спосіб оцінювання. Суть способу полягає в тому, що ми оцінюємо обидві частини рівності або нерівності на основі відомої рівності або нерівності.

Використаємо рівності та нерівності скалярного добутку векторів при розв'язуванні задач з алгебри. Скалярний добуток векторів можна успішно використовувати не тільки при розв'язуванні задач з геометрії, а і при відшуканні розв'язання алгебраїчних задач. Його можна використовувати при розв'язуванні рівнянь та систем рівнянь, доведенні нерівностей та розв'язуванні задач на відшукання екстремуму [133].

Наведемо приклади.

Задача 1: Довести, що при будь-яких – справджується нерівність

.

Розв'язання. Застосуємо відомі нам рівності та нерівності скалярного добутку двох

векторів. Тобто, , , то . та , то

і | |= , ≤ · .

Введемо такі вектори: і . Для них маємо =

.

Причому = , | |= та | |·| |= .

Звідси ≥ .

Задача 2:Знайти найбільше значення функції .

Розв'язання. З умови робимо висновок, що функція визначена на проміжку [-15;17].

Розглянемо вектори і , тоді , ,

, тоді . На основі властивості

можемо сказати, що ,звідси 8 досягається при

, тоді і y(-15)=4 , y(17)=4 . З цього слідує, що 8.

6. ЗАСТОСУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ІНТЕРПРЕТАЦІЇ

Суть даного методу полягає в тому, що за поданим рівнянням визначають геометричну фігуру, залежність між елементами якої може бути виражена даним виразом. Далі, використавши властивості одержаної фігури, обчислюють потрібні її елементи та роблять висновки. Геометрична інтерпретація значно спрощує розв'язання досить складних задач і дозволяє отримувати результат навіть у випадках, коли інші методи не спрацьовують [214]. Даний підхід можна використовувати при підготовці учнів до олімпіад та в класах з поглибленим вивченням математики. Розглянемо це на прикладах.

Задача 1: Довести нерівність:

Розв'язання: Вираз розглянемо як довжину відрізка AB, де

, . Аналогічно, вирази та

розглядаємо як довжини відрізків BC та AC відповідно, де C . Тому нерівність, яку потрібно довести, можна записати у вигляді AB+BC≥AC. Одержану нерівність доводимо, використавши аксіому вимірювання відрізків та нерівність трикутника.

Задача 2: Розв'язати систему:

Розв'язання: Розглянемо вектори Тоді з першого рівняння випливає, що

Крім того, ліва частина другого рівняння є скалярним добутком цих векторів. Проте,

а тому скалярний добуток більший від добутку довжин, що неможливо (нерівність Коші-Буняковського). Отже, ця система не має розв'язку.

7. МЕТОД НЕСКІНЧЕННОГО СПУСКУ

Цей метод може бути сформульований так: нехай к – деяке невід'ємне ціле число. Припустимо, що з того, що P(m) – істинне твердження для цілого числа m>к, випливає, що існує менше ціле число j, m>j>k, для якого P(j) – істинне твердження. Тоді P(n) є хибне твердження для всіх натуральних n>k [339].

Дійсно, якби існувало таке натуральне число n, для якого P(n) було б істинне твердження, то ми змогли б отримати нескінченно спадну послідовність n>n1>n2>…натуральних чисел, які мали б бути більшу за число к і для кожного з яких P(ni) було б істинним твердженням, що не є можливим для невід'ємних цілих чисел(це суперечить такій аксіомі натуральних чисел: в кожній непорожній множині натуральних чисел існує найменший елемент).

У деяких випадках зручно використовувати ще й таку форму спуску: якщо n0 – найменше додатнє ціле число, для якого P(n0) – істинне твердження, тоді P(n) є хибні твердження при всіх натуральних n< n0.

Розглянемо застосування методу спуску на прикладах.

Задача1: Розв'язати рівняння в невід'ємних цілих числах x,y,z.

Розв'язання: Доведемо, що – єдиний розв'язок даного рівняння. Якщо одне із невідомих дорівнює нулю, то одержимо суперечність з тим , що числа і – ірраціональні. Нехай – розв'язок даного рівняння, де , і – натуральні числа. Тоді . Звідси випливає, що , тобто . А це означає, що , де EMBED Equation.3 . Далі одержуємо, що , тобто . Звідси випливає, що , де . Далі аналогічно, одержуємо, що , де EMBED Equation.3 та , тобто – новий розв'язок даного рівняння, причому , і . Міркуючи аналогічно, одержуємо, що дане рівняння має безліч розв'язків в натуральних числах , де , а це суперечить тому, що не існує нескінченної послідовності невід'ємних цілих чисел .

8. МЕТОД ГРАФІВ

Суть даного методу [223] полягає в тому, що об'єкти умови задачі можна зобразити точками, а відношення між ними – відрізками або стрілками. Таке схематичне зображення умови задачі допомагає визначити її логічні можливості, класифікувати їх, знайти зв'язки між даними та шуканими.

Задача 1:Іван, Дмитро і Володимир навчаються в школах Москви, Києва та Санкт-Петербурга. Вони люблять хімію, фізику і біологію. Відомо, що Іван навчається не в Москві, А Дмитро не в Санкт-Петербурзі, москвич любить не фізику, санкт-петербуржець любить хімію, Дмитро любить не біологію. У якому місті кожен з них навчається і який предмет любить?

Розв’язання: Для побудови графа, що відповідає умові задачі, зобразимо елементи трьох множин (імен, навчальних предметів, міст) точками. Дві точки різних множин з’єднаємо штриховою лінією, якщо вони характеризують ознаки різних людей, і – суцільною лінією у протилежному випадку. Отже, розв’язання задачі зводиться до побудови трьох трикутників із суцільними сторонами і вершинами, що є точками різних множин.

Оскільки С не відповідає Д, то Д не відповідає х, тому хД – штрихова лінія, фД – суцільна лінія. Міркуючи аналогічно, будуємо штрихову лінію МД. Отже, МВ, ДК, фК – суцільні лінії. Оскільки І не з М, то він із С, тому ІС – суцільна лінія. Отже, хІ – суцільна лінія. Тепер залишається з’єднати суцільною лінією В і б, б і М (рис. 2.10).

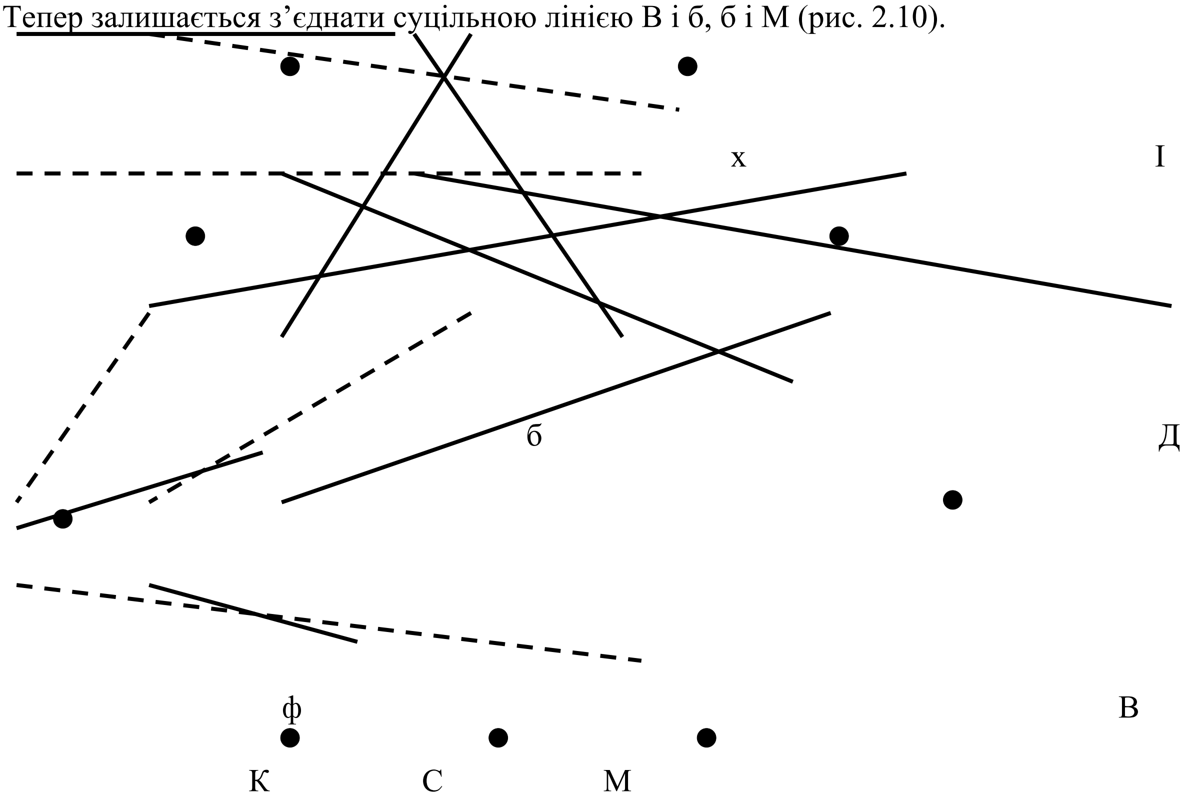


Рис. 2.10. Ілюстрація до задачі

Вершини суцільних трикутників дають відповідь на запитання задачі.

Ми розглянули лише деякі нестандартні методи та способи. Хоча їх досить багато (метод біноміальних перетворень при розв’язуванні показникових рівнянь у цілих числах, метод допоміжних моделей і конструкцій і т. д.), деякі з них з’явились досить недавно і ще навіть не названі, але вони є найпостішими при розв’язуванні окремих задач.

Отже, завдання вчителя полягає в тому, щоб не тільки навчити учнів розв’язуванню задач, але і навчити їх аналізу розв’язання. Потрібно пропонувати, якщо це можливо, різні варіанти розв’язання однієї задачі, оцінювати їх та вибирати найраціональніший. Але для цього вчитель в першу чергу повинен бути озброєний достатнім набором методів, способів та прийомів доведень та розв’язувань задач, щоб він вільно міг оперувати ними як методичними інструментами вивчення алгебри. Всі ці методи, способи та прийоми повинні являти собою систему, безпосередньо пов’язану з теоретичним курсом алгебри, алгебри та початків аналізу. Це означає, що і конкретно кожен метод, спосіб чи прийом повинен спиратися на відповідний операційний склад як теоретичну базу методу. Тоді порядок вивчення і використання конкретного методу зокрема, і методів розв’язування алгебраїчних задач в цілому, не буде залежати від індивідуальних навичок та здібностей вчителя, а буде являти собою систему, органічно пов'язану з теоретичним матеріалом курсів алгебри, алгебри і початків аналізу.

Висновки до розділу 2

1. Історико-методичний аналіз проблеми дослідження показав, що у своєму розвитку алгебра пройшла ряд етапів, протягом яких методи і способи розв'язування алгебраїчних задач розвивались і вдосконалювались в нерозривній єдності з теоретичними положеннями алгебри.

2. В XVII ст. остаточно сформувався курс елементарної алгебри; у XIX ст. алгебра ввійшла у шкільні програми як окремий предмет. Разом із теоретичними положеннями учні вивчали методи і способи розв'язування алгебраїчних задач. Вже тоді піднімались питання про теоретичне обґрунтування запропонованого учням методу.

3. Події 1917 року і наступна низка необґрунтованих реформ загальноосвітньої школи, в тому числі і в навчанні алгебри, привели до послаблення зв'язку між теорією та практикою. В окремі періоди часу при вивченні алгебри увага приділялась тільки практичній або тільки теоретичній стороні предмету. При цьому методи і способи розв'язування алгебраїчних задач, як зв'язок між теорією і практикою, випали із системи навчання алгебри.

4. На сьогодні у навчанні алгебри склалася ситуація, коли методи і способи розв'язування задач в загальноосвітній школі цілеспрямовано не вивчаються. Вони спеціально не виділяються, не повторюються, не приводяться в систему, не згадуються при повторенні і систематизації провідних тем курсу алгебри і при підсумковому повторенні. Випускник школи приходить на математичний факультет педагогічного вузу і вважається, що він знає основні методи та способи розв'язування задач. Далі молодий вчитель повертається в школу і коло замикається. Про це свідчать результати анкетування учнів старших класів загальноосвітніх шкіл та першокурсників педагогічного вузу спеціальності "математика", вчителів. Значна частина учнів не розрізняють понять "метод", "спосіб" та "прийом". На низькому рівні вміння і навички застосовувати ці методи на практиці, учні недостатньо володіють навіть методами і способами, передбаченими шкільною програмою.

5. Проведений експеримент підтвердив, що формування вмінь і навичок володіння методами та способами розв'язування алгебраїчних задач поліпшується, якщо їх вивчати як систему у порядку, визначеному операційним складом кожного з методів. Сам операційний склад усвідомлюється на основі теоретичних знань учнів, отриманих в процесі навчання алгебри.

6. Для озброєння вчителів системою знань про основні методи і способи розв'язування алгебраїчних задач та їх операційний склад розроблено і апробовано в процесі експерименту методичні рекомендації з наступних методів:

- метод складання рівнянь;
- графічний метод;
- метод доведення від супротивного;
- метод інтервалів;

- метод математичної індукції;
- метод невизначених коефіцієнтів;
- нестандартні методи та способи розв’язування алгебраїчних задач.

Кожен методичний матеріал включає в себе історичні відомості про метод, суть, особливості і операційний склад методу, межі застосування та приклади використання при розв’язуванні алгебраїчних задач.

7. В ході експерименту встановлено, що комп’ютерно-орієнтовані засоби навчання підвищують інтерес учнів до предмету, активізують їх навчально-пізнавальну діяльність і сприяють в цілому свідомому і активному оволодінню методами і способами розв’язування алгебраїчних задач.

8. Експериментально підтверджено, що вивчення методів і способів розв’язування алгебраїчних задач як системи з відповідним операційним складом, алгоритмами та правилами-орієнтирами, активізує навчально-пізнавальну діяльність учнів, поглиблює їх теоретичні знання, практичні навички та вміння з розв’язування задач.

Загальні висновки

1. На основі історико-методичного аналізу, як специфічного методу наукового дослідження, встановлено, що методи та способи розв’язування

алгебраїчних задач і вправ формувалися і розвивалися у нерозривній єдності з розвитком теоретичних положень алгебри.

2. Аналіз першоджерел показав, що ще до початку XX ст. разом з алгеброю, як окремим предметом, в практику навчання математики ввійшли і методи та способи розв'язування задач. В тогочасних підручниках та посібниках є спроби обґрунтування методів та пропонується їх вивчення у поєднанні з відповідними теоретичними положеннями. Багаточисленні та необґрунтовані реформи у навчанні математики, після подій 1917 року, привели до послаблення взаємозв'язків між практичною і теоретичною сторонами алгебри. При цьому методи і способи розв'язування алгебраїчних задач фактично випали із системи навчання математики.

3. Виходячи з єдності цілей, завдань і методів та засобів навчання були розроблені анкети для учнів і вчителів, призначені для аналізу існуючого стану вивчення методів та способів розв'язування алгебраїчних задач в загальноосвітній школі. Констатуючий експеримент показав, що запропоновані анкети можуть успішно використовуватись для перевірки рівня знань, навичок та вмінь учнів з розв'язування алгебраїчних задач та відповідної підготовки вчителів.

4. Встановлено, що сьогодні методи і способи розв'язування задач в курсі алгебри, алгебри і початків аналізу загальноосвітньої школи вивчаються неявно , в залежності від здібностей та досвіду вчителя, наявності підручників та інших, часто випадкових факторів. Відповідно, частина учнів не розрізняють понять “метод” і “спосіб” розв'язування задач, не розуміють понять “алгоритм методу”, „правило-орієнтир”, „евристична схема”. Учні недостатньо володіють методами, передбаченими шкільною програмою, мають слабкі навички і вміння оцінити метод по відношенню до задачі, вибрати серед відомих найраціональніший.

5. На основі досліджень, зокрема аналізу першоджерел та результатів проведеного експерименту, запропоновано вивчення методів та способів розв'язування алгебраїчних задач у загальноосвітній школі за схемою:

- основні, обов'язкові для вивчення в курсі загальноосвітньої школи методи і способи розв'язування задач та рекомендовані програмою;
- методи і способи, рекомендовані для вивчення в класах з поглибленим вивченням математики та використання на факультативних заняттях;
- місце і методика вивчення методів і способів розв'язування алгебраїчних задач в курсі алгебри загальноосвітньої школи;
- вивчення операційного складу кожного методу, алгоритму чи правила-орієнтиру як теоретичної основи методу.

6. Проведений аналіз показує, що навчання учнів методам і способам розв'язування задач неможливе без вивчення ними відповідних алгоритмів, правил-орієнтирів чи евристичних схем, а також без усвідомлення операційного складу методу (способу). Введення в практику навчання алгебри цих понять систематизує та поглиблює теоретичні знання учнів, сприяє самостійному пошуку розв'язання задач. На основі уявлень про операційний склад, стає можливою реалізація комплексного, системного, діяльнісного та

особистістно-орієнтовного підходу до навчання методам та способам розв’язування алгебраїчних задач.

7. В системі стандартних і нестандартних методів розв’язування задач, комп’ютерні технології виступають як специфічний (нестандартний і алгоритмічний) спосіб. При цьому його алгоритм (явно чи неявно) включає в себе програму розв’язання задачі, а до операційного складу способу входять вміння і навички користування персональним комп’ютером.

8. В ході експерименту розроблено методичні рекомендації для вчителів математики з основних методів розв’язування задач, які вивчаються і використовуються в курсі алгебри загальноосвітньої школи:

- метод складання рівнянь;
- графічний метод;
- метод доведення від супротивного;
- метод інтервалів;
- метод математичної індукції;
- метод невизначених коефіцієнтів;
- нестандартні методи та способи розв’язування алгебраїчних задач.

Встановлено, що при вивченні методів розв’язування алгебраїчних задач як системи, покращується рівень знань, практичних вмінь і навичок учнів при розв’язуванні задач, формуються елементи аналізу та самоаналізу у навчальній діяльності, вміння оцінити метод та вибрати раціональний. Розв’язування задач і вправ різними методами є одним із засобів активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів.

9. Методичні рекомендації успішно апробовані в ході експерименту та схвалені вчителями математики та викладачами-методистами. Рекомендації впроваджені в навчальний процес підготовки вчителів математики Чернігівського державного педагогічного університету та використовуються вчителями математики шкіл м. Чернігова та регіону.

10. Органічним продовженням даного дослідження є розроблення проблеми методу в алгебрі в більш глибокому змісті, із залученням нових, навіть ще не названих методів і способів, та включення їх у систему.

Список публікацій автора за тематикою дослідження

1. Нак М. М., Мошель М. В., Юцевич Т. П. Використання алгебраїчних методів у розв’язуванні фізичних задач //Вістник ЧДПУ, сер. пед. науки. Том І. – Чернігів: ЧДПУ, 2002. – С. 91-93.
2. Нак М. М. Використання нестандартних методів та способів при розв’язуванні алгебраїчних задач //Дидактика математики: проблеми і дослідження. Випуск 19. – Донецьк: Фірма ТЕАН, 2003. – С. 150-156.

3. Нак М. М. Історично визначні задачі з алгебри як засіб активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів //Наукові записки КДПУ, сер. пед. науки. Частина I. – Випуск 51. – Кіровоград: РВЦ КДПУ ім. В. Вінниченка, 2003. – С. 145-148.
4. Нак М. М. Методи розв’язування алгебраїчних задач в сучасній загальноосвітній школі: точка зору учнів //Вістник ЧДПУ, сер. пед. науки. Випуск 19. – Чернігів: ЧДПУ. – 2003. – С. 70-72.
5. Нак М. М. Співвідношення алгоритмічного та евристичного підходів при розв’язуванні алгебраїчних задач //Дидактика математики: проблеми і дослідження. Міжнародний збірник наукових робіт. Випуск 24. – Донецьк: ДонНУ, 2005. – С. 212-217.
6. Нак М. М. Історичний аналіз розвитку методів розв’язування алгебраїчних задач //Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія №5. Педагогічні науки: реалії та перспективи: Зб. наукових праць. – Випуск 3. – Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2006 . – С. 120-124.
7. Нак М. М. Використання елементів історизму при викладанні алгебри в середній школі //Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: Збірник наукових праць: В 3-х томах. Т. 1: Теорія та методика навчання математики. – Кривий Ріг: Видавничий відділ НацМетАУ, 2002. – С. 253-258.
8. Нак М. М. Проблема методу при розв’язуванні алгебраїчних задач //Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: Збірник наукових праць. Випуск 4: В 3-х томах. Т. 1: Теорія та методика навчання математики. – Кривий Ріг: Видавничий відділ НацМетАУ, 2004. – С. 143-152.
9. Нак М. М. Використання різних способів розв’язування задач //Математика, 2003. – №17. – С. 15-17.
10. Нак М. М. Алгебраїчні та арифметичні методи розв’язування алгебраїчних задач //Матеріали IX-ої Міжнародної наукової конференції ім. Академіка М. Кравчука (16-19 травня 2002 р., Київ). – К.: НТУУ “КПІ”, 2002. – С. 526.
11. Нак М. М. Методи розв’язування задач як складова навчання алгебри //Матеріали X Міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука (13-15 трав. 2004 р., Київ) – К.: Задруга, 2004. – С. 711.
12. Нак М. М. Алгоритмічний та евристичний підходи при розв’язуванні алгебраїчних задач //Збірник тез доповідей міжнародної науково-практичної конференції „Евристичне навчання математики” (15-17 листопада 2005, Донецьк). – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2005. – С. 82-83.

Список використаних джерел

1. Авраменко Н. И. Уроки алгебры и начал анализа в 10-11 классах: Пособие для учителя. – К.: Рад. шк., 1989. – 320 с.
2. Алгебра в 6 класі: Навч.-метод. Посібник. Пер. з рос. /Ю. М. Макаричев, Н. Г. Миндюк, К . С. Муравін та інші. – К.: Рад. школа, 1979. – 231 с.
3. Алгебра в 7 класі: Метод. посібник для вчителів /Ю. М. Макаричев, Н. Г. Миндюк , К. С. Муравін та інші. Пер. з рос. – К.: Рад. школа, 1980. – 256 с.
4. Алгебра и математическая логика. Алгебраические исследования. [Сборник статей. Ред. коллегия: проф. А. А. Калужнин и др.]. – К.: Изд-во Киевского ун-та, 1966. – 140 с.
5. Алгебра и математический анализ для 11 кл.: Учебное пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изучением математики /Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд. – М.: Просвещение, 1993. – 288 с.
6. Алгебра і початки аналізу в 10 класі: Посібник для вчителів. /Б. М. Івлєв, З. І. Мойсеєва , С. М. Саакян, С. І. Шварцбурд; За ред. С. І. Шварцбурда; Пер. з рос. Г. Д. Шиманська. – К.: Рад. школа, 1979. – 236 с.
7. Алгебра і початки аналізу. Підручник для 10-11 кл. СШ /За ред. А. М. Колмогорова. – К.: Рад. школа, 1991. – 336 с.
8. Алгебра і початки аналізу. Підручник для 10-11 кл. СШ /За ред. А. М. Колмогорова. – К.: Рад. школа, 1994. – 350 с.
9. Алгебра і початки аналізу. Розв’язання вправ до підручника М. І. Шкіля, З. І. Слєпкань, О. С. Дубинчук 10-11 кл. /Л. М. Бра люк, А. Р. Гальперіна, Є. М. Драшпуль та ін. – Харків: Торнадо, 2001. – 320 с.
10. Алгебра. Експериментальний навчальний посібник для 9 класу шкіл із поглибленим вивченням математики /В. Г. Коваленко, В. Я. Кривошеєв, О. В. Старосельцева. – К.: Освіта, 1992. – 272 с.
11. Алгебра. Підручник для 7 кл. СШ /За ред. С. О. Теляковського. – К.: Освіта, 1992. – 286 с.
12. Алгебра. Підручник для 8 кл. СШ /За ред. С. О. Теляковського. – К.: Рад. школа, 1992. – 208 с.
13. Алгебра. Підручник для 9 кл. СШ /За ред. С. О. Теляковського. – К.: Рад. школа, 1990. – 238 с.
14. Алгебра. Підручник для 9 кл. СШ /За ред. С. О. Теляковського. – К.: Рад. школа, 1994. – 288 с.
15. Алгебра. Пробний підручник 7 клас За ред. О. І. Маркушевича. – К.: Рад. школа, 1972. – 174 с.
16. Алгебра. Пробний підручник 8 клас За ред. О. І. Маркушевича. – К.: Рад. школа, 1972. – 370 с.
17. Алгебра. Учебник для 7 кл. СШ /Под ред. А. Н. Тихонова. – М.: Просвещение, 1993. – 191 с.
18. Алгебра. Учебник для 8 кл. СШ /Под ред. А. Н. Тихонова. – М.: Просвещение, 1991. – 239 с.
19. Алгебра. Учебник для 9 кл. СШ /Под ред. А. Н. Тихонова. – М.: Просвещение, 1992. – 223с.
20. Алексеев В. М. Элементарная математика: Решение задач: [Учеб. пособие для подгот. отд -ний вузов]. – 2-е изд., перераб. и доп. – К.: Вища школа, 1989. – 382 с.
21. Андронов И. А. Полвека развития школьного математического образования в СССР. – М. : Просвещение, 1967. – 180 с.

22. Антонова А. О., Трофименко В. І. Математика. Задачі на складання рівнянь: Навчально-методичний посібник. – К.: КМУЦА, 2000. – 88 с.
23. Артемьева Т. И. Методологический аспект проблемы способностей. – М.: Наука, 1977. – 184 с.
24. Байбулатов Р. С. Краткий обзор истории математики с древнейших времен до наших дней: Учебное пособие. – Уфа: Изд-во БГПУ, 2001. – 95 с.
25. Байдак В. А., Ефимов В. И., Лапчик М. П. Формирование алгоритмической культуры у учащихся //Повышение эффективности обучения математике в школе: Книга для учителя . Из опыта работы. – М.: Просвещение,1989. – 239 с.
26. Балк М. Б., Балк Г. Д. Поиск решения. – М.: Дет. лит., 1983. – 143 с.
27. Балл Г. О. Про деякі основні поняття розв'язування задач //Зб. "Проблеми філософії". Вип. 27. – К.: Вид-во Київського ун-ту, 1973. – С. 106-112.
28. Баранова И. В., Ляпин С. Е. Задачи на доказательство по алгебре: Пособие для учителя. – Л.: Учпедгиз. Ленингр. отд-ие, 1954. – 160 с.
29. Барановський В. Метод повної математичної індукції та його використання у шкільній практиці //Зб. "Математика в школі". Випуск 4. – К.: Рад. школа, 1951. –С. 125-140.
30. Баринова О. В. Дифференцированное обучение решению математических задач //Начальная школа, 1999. – №2. – С. 41-44.
31. Бартенев Ф. А. Нестандартные задачи по алгебре и элементарным функциям. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1973. – 448 с.
32. Бартенев Ф. А. Нестандартные задачи по алгебре. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1976. – 95 с.
33. Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10-11 кл. СШ. – М.: Просвещение, 1992. – 351 с.
34. Башмакова И. Г. Основные этапы развития алгебры. //История и методология естественных наук, в. XXXII. – М.: Изд. МГУ, 1986. – С. 50-65.
35. Башмакова И. Г. Становление алгебры. – М.: Знание, 1979. – 64 с.
36. Бевз В. Г., Бевз Г. П. Алгебра у VII класі: Метод. посібник для вчителів. – К.: Український Центр духовної культури, 2000. – 128 с.
37. Бевз В., Мерзляк А., Слєпкань З. Програма з математики для загальноосвітніх навчальних закладів, 5-11 класи //Математика в школі. – 2003. – №6. – С. 1-14.
38. Бевз Г. П. Алгебра: Підручник для 7-9 кл. – 4-те вид. – К.: Школяр, 2002. – 303 с.
39. Бевз Г. П. Методи навчання математики. – Х.: Вид. Група "Основа", 2003. – 96 с.
40. Бевз Г. П. Методика викладання математики. – К.: Вища школа, 1977. – 376 с.
41. Бевз Г. П. Методика викладання математики: Навч. посібник. 3-тє вид., перероб. і допов. – К.: Вища школа, 1989. – 367 с.
42. Бевз Г. П. Методика розв'язування алгебраїчних задач у 6-8 класах: Посібник для вчителів. – К.: Рад. школа, 1975. – 240 с.
43. Белобородова С. В. Об историко-генетическом методе //Математика в школе. – 1999. – №6. – С. 7-10.
44. Беляев В. А., Перминов В. Я. Философские и методологические проблемы математики. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – 215 с.
45. Березанская Е. О составлении уравнений из условий задач //Математика в школе. – 1940. – №2. – С. 17-18.
46. Бескин Н. М. Роль задач в преподавании математики //Математика в школе. – 1992. – №4-5. – С. 3-5.

47. Беспалько В. П. Слагаемые педагогической технологии. – М.: Педагогика, 1989. – 190 с.
48. Богданов И. М.. Петраков И. С. Сборник задач по алгебре. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1971. – 183 с.
49. Богданович М., Заїка А. Учням про задачу і процес її розв’язування //Початкова школа. – 1998. – №3. – С. 22-26.
50. Болгарский Б. В. Очерки по истории математики /Под ред. В. Д. Чистякова. – Минск: Вышейш. школа, 1974. – 288 с.
51. Болтянский В. Г. Нужна ли проверка при решении текстовых задач на составление уравнений? //Математика в школе. – 1971. – №3. – С. 42-45.
52. Бородін О. І. та ін. Основні поняття сучасної алгебри. – К.: Рад. школа, 1976. – 104 с.
53. Брадис В. М. Методика преподавания математики в средней школе. Под ред. А. И. Маркушевича. Изд. 3-е. – М.: Просвещение, 1954. – 504 с.
54. Бровченко О. М. Алгебра. Як розв’язувати задачі //Бібліотека школяра. – К.: Логос, 1998. – 160 с.
55. Брунер Дж. Психология усвоения. Пер. с англ. – М.: Прогресс, 1977. – 412 с.
56. Бургін М. С. Початкові етапи розв’язування задач //Зб. Методика викладання математики і фізики. Вип. 5. – Київ: Рад. школа, 1988. – С. 77-84.
57. Бурда М. І. та ін. Використання елементів історизму при викладанні математики в старших класах //Педагогіка і психологія. – 1997. – №1. – С. 59-64.
58. Бычков Б. П. Уравнения в русских учебниках алгебры XX века (1900- 1917 г. г.) //Сб. Ученые записки. Том 86 (Математический-методический сборник). – Кишинев, 1966. – С. 15-35.
59. Вайман В. Урок однієї задачі //Математика в школі. – 2000. – №3. – С. 30-31.
60. Василевский А. Б. Методы решения задач. – Минск: Вышейшая школа, 1974. – 238 с.
61. Василевский А. Б. Обучение решению задач по математике: Учеб. пособие для пед. ин-тов . – Минск: Вышейшая школа, 1988. – 255 с.
62. Васильева Н. Л. История развития метода уравнений //Сб. Преподавание математики в средней школе. – Л.,1972. – С. 215-237.
63. Васютинский Н.А. Золотая пропорция. – М.: Молодая гвардия, 1990. – 238 с.
64. Великодний С. Математичне моделювання при розв’язуванні задач //Математика в школі . – 2005. – №9. – С. 15-20.
65. Вивальнюк Л. М., Ігнатенко М. Я. Елементи історії математики: Навч. посібник. – К.: ІЗМН, 1996. – 180 с.
66. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. Перевод с нем. под ред. А. П. Юшкевича. – М.: Изд-во физико-математической литературы,1960. – 468 с.
67. Виленкин Н. Я., Мордкович А. Г., Смышляев В. К. Алгебра и начала анализа 9-10. – М.: Просвещение, 1981. – 384 с.
68. Вінниченко Є. Ф. Розвиток творчих здібностей старшокласників у процесі навчання інформаційних технологій розв’язування математичних задач: Дисс. на соиск. учен. степ. канд. пед. наук. 13.00.02 /Національний педагогічний ун-т ім. М. П. Драгоманова. – К., 2006. – 234 с.
69. Вінниченко Є., Горошко Ю. Розв’язування задач із параметрами за допомогою програми „GRAN – 1” //Математика в школі. – 2006. – №4. – С. 25-28.
70. Власенко О. І. Методика викладання математики: Загальні питання. – К.: Вища школа, 1974. – 208 с.

71. Возняк Г. М., Возняк О. Г. Алгебра: Довідник для учня 7-9 класів. – Тернопіль: Підручники і посбники, 1997. – 72 с.
72. Возняк Г. М., Литвиненко Г. М. Алгебра. Підручник для учнів 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів. – Тернопіль: Навчальна книга, 2001. – 200 с.
73. Возняк Г. М., Литвиненко Г. М. Алгебра. Пробний підручник для 8 класу середньої школи. – Львів: Світ, 2001. – 204 с.
74. Возняк Г. М., Литвиненко Г. М., Мальований Ю. І. Алгебра. Підручник для 7 класу середньої школи. – Харків: ББН, 2001. – 178 с.
75. Вопросы преподавания алгебры и начал анализа в средней школе: Сб. статей /Сост. Е. Г. Глаголева, О. С. Ивашев-Мусатов. – М.: Просвещение, 1980. – 256 с.
76. Вороной А. Н. Функциональные уравнения и метод неопределенных коэффициентов //Математика в школе. – 2004. – №8. – С. 62-66.
77. Выгодский М. Я. Арифметика и алгебра в древнем мире. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
78. Габович И. Г. Алгоритмический подход к решению геометрических задач: Книга для учителя. – К.: Рад. шк., 1989. – 160 с.
79. Гайштут О. Г., Литвиненко Г. М. Розв'язування алгебраїчних задач. – К.: Рад. школа, 1991. – 224 с.
80. Галицкий М. Л., Гольдман А. М., Зварич Л. И. Сборник задач по алгебре для 8-9 классов: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. – М.: Просвещение, 1992. – 271 с.
81. Гальперин И. М., Габович И. Г. Использование векторного неравенства Коши-Буняковского при решении задач по алгебре //Математика в школе. – 1991. – №2. – С. 54-57.
82. Гастева С. А., Крельштейн Б. И., Ляпин С. Е., Шидловская М. М. Методика преподавания математики в восьмилетней школе /Под общей редакцией С. Е. Ляпина. – М.: Просвещение, 1965. – 744 с.
83. Гельфанд М. Б. Основні питання викладання алгебри в IX-XI класах. – К.: Рад школа, 1963. – 208 с.
84. Гельфанд М. Б. Формування математичних понять у процесі викладання алгебри і початків аналізу. – К.: Рад. школа, 1976. – 143с.
85. Генденштейн Л. Е. та ін. Наочний довідник з алгебри та початків аналізу з прикладами для 7-11 класів. – Харків: Гімназія, 1997. – 96 с.
86. Герлингер В. А., Лизогуб П. П. Метод рационализации логарифмических, показательных и степенно-показательных неравенств //Сб. Вопросы математики, алгебры и геометрии. – Новосибирск: Новосибирский гос. пед. ин-т, 1973. – С. 174-176.
87. Германович П. Ю. Сборник задач по математике на сообразительность. Пособие для учителей. – М.: Учпедгиз, 1960. – 224 с.
88. Глейзер Г. И. История математики в школе: IV – VI кл.: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1981. – 239с.
89. Глейзер Г. И. История математики в школе: IX – X кл. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1983. – 351с.
90. Глейзер Г. И. История математики в школе: VII – VIII кл. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1982. – 240с.
91. Глобин А. И. Методика обучения решению текстовых алгебраических задач с применением графов (6-8 кл.): Дисс. на соиск. учен. степ. канд. пед. наук. 13.00.02. – методика преподавания математики. – К., 1988. – 213 с.
92. Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики в России. – М.-Л.: ОГИз, 1946. – 247 с.

93. Голайдо И. Н. О методах решения задач //Математика в школе. – 1949. – №3. – С. 23-25.
94. Горнштейн П. И. И др. Решение конкурсных задач по матемаике из сборника под редакцией М. И. Сканави. Группа В. – К.: РИА Текст, 1992. – 246 с.
95. Горчакова І. А. Система математичних задач як засіб формування евристичної діяльності учнів основної школи: Дис. на здобут. наук. ступеня канд. пед наук: 13.00.02. /Донецький нац. ун-т. – К., 2002. – 232 с.
96. Готман Э. Г., Скопец З. А. Задача одна – решения разные. – К.: Рад. школа, 1988. – 175 с.
97. Граціанська Л. М. Нариси з народної математики України. – К.: Вид-во Київського університету, 1968. – 99 с.
98. Грималюк В. П. Математика для вступників до вузів. Арифметика, алгебра, задачі з параметрами, початки аналізу: Навч. посібник. – К.: ІЗМН, 1998. – 300 с.
99. Груденов Я. И. Изучение определений, аксиом, теорем: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1981. – 95 с.
100. Груденов Я. И. Психолого-дидактические основы методики обучения математике. – М.: Педагогика, 1987. – 158 с.
101. Гурова Л. Л. Некоторые психологические аспекты решения задач //Сб. “Теория задач и способов их решений” /Отв. ред. Г. А. Балл.- К.: Институт кибернетики АН УССР, 1973 . – С. 79-83.
102. Гурова Л. Л. Психологический анализ решения задач. – Воронеж: Изд. Воронеж. ун-та , 1976. – 327 с.
103. Дадаян А. А., Новик И. А. Алгебра и начала анализа /Под. ред. А. А. Дадаяна. – Мн.: Выш. шк., 1980. – 368 с.
104. Двояковский П. Г. О геометрическом решении алгебраических задач //Математика в школе. – 1980. – №3. – С. 33-35.
105. Девенпорт Дж., Сире И., Турнье Э. Компьютерная алгебра: Пер. с франц. – М.: Мир, 1991. – 352 с.
106. Декарт Р. Міркування про метод, щоб правильно спрямовувати свій розум і відшукувати істину в науках /В. Андрушко, С. Гатальська (пер. з фр.). – К.: Тандем, 2001. – 101 с.
107. Демидов А. И. Метод перебора //Математика в школе. – 1993. – №1. – С. 32-34.
108. Демчук Л. В. Використання комп’ютера на уроках математики //Математика. – 2003. – №18. – С. 1-2.
109. Денишева Л., Карюхина Н., Михеева Т. Учимся решать уравнения и неравенства //Математика. – 2000. – №12. – С. 27-30.
110. Депман И. Рассказы о старой и новой алгебре. – Л.: Детская литература, 1967. – 144 с.
111. Депман И. Я История арифметики: Пособие для учителей. Изд. второе испр. – М.: Просвещение, 1965. – 416 с.
112. Довідник зі змісту, типів та методів розв’язування екзаменаційних завдань з математики. Ч. І. Алгебра і початки аналізу. – Тернопіль: Підручники і посібники, 1998. – 112 с.
113. Дробышева И. В. Мотивация: дифференцированный подход //Математика в школе. – 2001. – №4. – С. 46-47.
114. Дубинчук О. С., Слєпкань З. І. Алгебра і елементарні функції. Навчальний посібник для IX – XI кл. вечірньої і заочної школи. – К.: Рад. школа, 1968. – 580 с.
115. Жалдак М. І. Комп’ютер на уроках математики. Посібник для вчителів. – К.: Техніка, 1997. – 303 с.

116. Жалдак М. І., Горошко Ю. В., Вінніченко Є. Ф. Математика з комп'ютером. Посібник для вчителів. – Київ: РННЦ "ДІНГ", 2004. – 254 с.
117. Жовнір Я. М., Євдокимов В. І. 500 задач з методики викладання математики: Навч. посібник для студ. вузів. – Х.: Основа, 1997. – 391с.
118. Завало С. Т. Алгебра: Практикум з розв'язування задач. – К.: Вища школа, 1975. – 196 с.
119. Зайцева Г. Д. О решении задач различными методами //Математика в школе. – 1982. – №5. – С. 50-52.
120. Зельберт М. И. Алгебра: Решение к учебнику Бевза Г. П. 7-9 классы. – Донецк: ПКФ БАО, 2000. – 560 с.
121. Зильберг Н. И. Методы доказательства неравенств: Методическое пособие. – Псков: ПОИПКРО, 2001. – 97 с.
122. Иванов В. В. Методологические основы исторического познания. Учебное пособие по исторической социологии. – Казань: Изд-во Казанского ун-та,1991. – 152 с.
123. Иванов В.В. Методология исторической науки: Учеб. пособие для студ. вузов, обучающихся по специальности «История». – М.: Высш. шк., 1985. – 169 с.
124. Иванова Т. А. Графическое решение системы линейных уравнений //Сб. Методика преподавания математики в средней школе. Вып. 2. – Свердловск: Свердловкий гос. пед. ин-т, 1975. – С. 46-64.
125. Избранные задачи из журнала "American mathematical monthly" /Пер. с англ. Ю. А. Данилова /Под ред. и с предисл. В. М. Алексеева. – М.: Мир, 1997. – 597 с.
126. Избранные отрывки из математических сочинений Лейбница. //Успехи матем. наук. – 1948. – №3. – С. 165-204.
127. Ипатова Л. Г. Численные методы решения уравнений //Сб. Актуальные вопросы методики обучения математики в средней школе: Учебное пособие в помощь учителю математики. – Новосибирск: Новосибирский гос. пед. ин-т, 1973. – 66 с.
128. История математики с древнейших времён до начала XIX столетия. Том III: Математика XVIII столетия. Под ред. А. П. Юшкевича. – М.: Наука, 1972. – 496 с.
129. История отечественной математики, Т2. – К.: Наук. думка, 1967. – 616 с.
130. История отечественной математики, Т3. – К.: Наук. думка, 1968. – 728 с.
131. Ігнатенко М. І. Методологічні та методичні основи активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів старших класів при вивченні математики: Дис…д-ра пед. наук: 13.00.02/ Український державний педагогічний ун-т ім. М. П. Драгоманова. – К., 1997. – 335 с.
132. Іляшенко М. С. Розв'язання до підручника М. І. Шкіля, З. І. Слєпкань, О. С. Дубинчук "Алгебра і початки аналізу 10-11 кл.".– Донецьк: ТОВ ВКФ "БАО", 2002. – 512 с.
133. Казиев И. Решение алгебраических задач с помощью скалярного произведения //Математика в школе. – 2000. – №4. – С. 6-8.
134. Калинин С. И. К вопросу о решении уравнений посредством неравенств //Математика в школе. – 2005. – №5. – С. 68-72.
135. Каллаур Н. А. Обучение старшеклассников алгебре и началам анализа через задачи.: Автореф. дис. канд. пед. наук: 13.00.02 /Минск. гос. пед. ин-т им. А. М. Горького. – Минск, 1986. – 17 с.
136. Карп А. П. Даю уроки математики…: Кн. для учителя: Из опыта работы. – М.: Просвещение, 1992. – 191 с.
137. Касьяненко М. Д. Організація творчої діяльності учнів у процесі розв'язування задач //Рад. школа. – 1976. – №5. – С. 33-37.

138. Кипнис И. М. Задачи на составление уравнений и неравенств: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1980. – 62 с.
139. Кирилецький І. М. Метод мішаних систем при розв'язуванні рівнянь та нерівностей. У зб. Методика викладання математики і фізики. Вип. 4.- К.: Рад. школа, 1987. – С. 72-78.
140. Кисельов А. П. Алгебра, ч. І. Підручник для семирічної і середньої школи. – К.: Радянська школа, 1949. – 128 с.
141. Кисельов А. П. Алгебра, ч. ІІ. Підручник VIII – Х класів середньої школи. – К.: Радянська школа, 1954. – 239 с.
142. Клейман Я. М. Решение задач различными способами [VI кл.] //Математика в школе. – 1987. – №6. – С. 23-28.
143. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии: В 2-х томах. Т. I: Пер. с нем. /Под. ред. М. М. Постникова. – М.: Наука, 1989. – 456 с.
144. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: Лекции в Геттинген. ун-те: [В 2 т.] /Пер. с нем. Д. А. Крыжановского; Под. ред. В. Г. Болтянского. Т. 1. – М.: Наука, 1987– 431 с.
145. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: Лекции в Геттинген. ун-те: [В 2 т.] /Пер. с нем. Д. А. Крыжановского; Под. ред. В. Г. Болтянского. Т. 2. – М.: Наука, 1987– 416 с.
146. Клименко Д. В. К вопросу психологии мышления учащихся при решении задач //Математика в школе. – 1997. – №3. – С. 26-29.
147. Кованцова Л. В., Малышев И. Г. Сборник задач по математике. – К.: Вища школа, 1980. – 288 с.
148. Колмогоров А. Н. Математика в её историческом развитии /Под. ред. В. А. Успенского. – М.: Наука, 1991. – 224 с.
149. Колмогоров А. Н. О профессии математика /Изд. 3-е, дополненное/. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1959. – 32 с.
150. Колягин Ю М. и др. Методика преподавания математики в средней школе. – М.: Просвещение, 1980. – 367 с.
151. Колягин Ю. М. Задачи в обучении математике: В 2 ч. – М.: Просвещение, 1977. – Ч. 1. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. – 110 с.; Ч. 2. Обучение математике через задачи и обучение решению задач. – 144 с.
152. Колягин Ю. М. Методические проблемы применения задач в обучении математике //Сб. "Преподавание алгебры и геометрии в школе"/Сост. О. А. Боковнев. – М.: Просвещение, 1982. – С. 116-136.
153. Колягин Ю. М. Основные аспекты методики обучения учащихся решению математических задач //Роль и место задач в обучении математике. Сборн. научн. трудов. Вып. IV. – М.: Науч.-исслед. ин-т школ Министерства просвещения РСФСР, 1977. – С. 4-23.
154. Колягин Ю. М. Русская школа и математическое образование: Наша гордость и наша боль. – М.: Просвещение, 2001. – 318 с.
155. Колягин Ю. М. Функции задач в обучении математике и развитии мышления школьников //Сов. педагогика. – 1974. – №6. – С. 56-61.
156. Колягин Ю. М. Школьный учебник математики: в прошлом и настоящем //Математика в школе. – 2003. – №2 – С. 72-75.
157. Колягин Ю. М., Макарычев Ю. Н., Миндюк Н. Г. Сборник задач и упражнений по алгебре для 6-8 классов: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1976. – 246 с.

158. Колягин Ю. М., Оганесян В. А. Учись решать задачи: Пособие для учащихся VII – VIII кл. – М.: Просвещение, 1980. – 96 с.
159. Конфорович А. Г. Математичні софізми і парадокси. – К.: Рад. школа, 1983. – 208 с.
160. Конфорович А.Г. Визначні математичні задачі. – К.: Рад. школа, 1981. – 189 с.
161. Кордемский В. А. Увлечь школьников математикой. – М.: Просвещение, 1981. – 112 с .
162. Коржуев А. В., Богатырева Н. Е. Обучение решению текстовых задач с неравенствами //Математика в школе. – 1993. – №3. – С. 54-55.
163. Кострикина Н. П. Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7-9 классов: Книга для учителя. – М.: Просвещение, 1991. – 239 с.
164. Котенко В. П. История науки. Класичесские модели //История науки и техники. – 2002. –№6. – С. 62-68.
165. Котенко В. П. История науки. Некласичесские модели //История науки и техники. – 2003. –№7. – С. 17-25.
166. Кравчук В., Підручна М., Янченко Г. Алгебра. Пробний підручник для 8 класу /За ред. Слєпкань З. І. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2002. – 216 с.
167. Кравчук В., Підручна М., Янченко Г. Алгебра. Пробний підручник для 9 класу /За ред. Слєпкань З. І. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2003. – 240 с.
168. Кравчук В., Янченко Г. Алгебра. Пробний підручник для 7 класу /За ред. Слєпкань З. І . – Тернопіль: Підручники і посібники, 2002. – 176 с.
169. Крайзман М. Л. Решение задач различными способами //Математика в школе. – 1990. – №1. – С.17-19.
170. Крамор В. С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. – М.: Просвещение, 1990. – 416 с.
171. Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников. – М.: Просвещение, 1968. – 432 с.
172. Кулюткин Н. Ю., Сухобская Г. С. Мотивационные механизмы решений //Сб. “Теория задач и способов их решений” /Отв. ред. Г. А. Бал. – К.: Институт кибернетики АН УССР, 1973. – С. 70-78.
173. Кулюткин Ю. Н. Информационная характеристика “эвристик” //Сб.: “Материалы III Всесоюзного съезда общества психологов СССР”, Т.1. – М.: Академия пед. наук СССР, 1968. – С. 231-233.
174. Кулюткин Ю. Н. Эвристические методы в структуре решений. – М.: Педагогика, 1970. – 232 с.
175. Кушнир И. А. Математическая энциклопедия: Для школьников, абитуриентов, преподавателей школ, лицеев, колледжей и вузов. – К.: АСТРАТ, 1995. – 767 с.
176. Кэджори Ф. История элементарной математики с указанием на методы преподавания. Пер. с англ. И. Ю. Тимченко. – Одесса: Типография Акцион, 1910. – 368 с.
177. Ланда Л. Н. Алгоритмизация в обучении. – М.: Просвещение, 1966. – 523 с.
178. Ланков А. В. К истории развития передовых идей в русской методике математики. – М.: Учпедгиз, 1951. – 151 с.
179. Лапчик М. П. Обучение алгоритмизации. Учебное пособие. – Омск: Изд-во ОГПИ, 1977. – 102 с.
180. Латышев В. А. Руководство к преподаванию арифметики. – СПБ., 1904.
181. Левин А. Применение методов синтеза и анализа в школьном курсе математики //Сб. Вопросы методики математики в средней школе. – Алма-ата: Алмаатинский гос. пед. ин-

т, 1957. – С. 3-16.
182. Легошина С. Решение неравенств первой и второй степени с параметрами //Математика. – 2000. – №6. – С. 15-17.
183. Лейфура В. М. Принцип крайнього в задачах на доведення нерівностей //Математика в школах України. – 2005. – №5 (89). – С. 8-10.
184. Ленін В. І. Повне зібрання творів. – Т. 49. – 706 с.
185. Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г. Практикум по алгебре. – М.: Просвещение, 1976. – 215 с.
186. Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г. Практикум по решению задач школьной математики. – М.: Просвещение, 1981. – 127 с.
187. Ліба О. Активізація пізнавальної діяльності учнів //Математика в школі. – 2001. – №2. – С. 44-46.
188. Логачевська С. Диференційоване навчання на уроках математики //Початкова школа. – 2001. – №3 (травень). – С. 18-22.
189. Лурье А. М., Людмилов Д. С., Дышинский Е. А. К методике решения задач //Математика в школе. – 1975. – №5. – С. 38-39.
190. Ляпин М. П. Сборник задач по элементарной математике (с решениями): Пособие для подгот. отд-ний и курсов /М. П. Ляпин. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1975. – 696 с.
191. Ляпин С. Е., Баранова И. В., Борчугова З. Г. Сборник задач по элементарной алгебре. – М.: Просвещение, 1973. – 351 с.
192. Лященко Е. И. Методические аспекты проблемы учебной задачи //Сб. Методика преподавания математики в средней школе. – Свердловск: Свердловский гос. пед. ин-т, 1984. – С. 3-11.
193. Мазур К. И Решебник всех конкурсных задач по математике сборника под редакцией М. И. Сканави. Вып. 2. – К.: Изд. Украинская энциклопедия, 1993. – 411 с.
194. Малыгин К. А. Хронология по истории школьного курса математики //Сб. Вопросы преподавания математики в средней школе. Выпуск 70. Ч. 2. – Куйбышев: Куйбышев. гос . пед. ин-т, 1969. – С. 3-84.
195. Малыгин К.А. Элементы историзма на уроках алгебры в средней школе. Пособие для учителей. Изд. 2-е. – М.: Учпедгиз, 1963. – 240с.
196. Мальований Ю. І., Слєпкань З. І. Уроки алгебри в VI класі: Посібник для вчителів. – К .: Рад. школа, 1974. – 189 с.
197. Мальований Ю. І., Слєпкань З. І. Уроки алгебри в VII класі: Посібник для вчителів. – К.: Рад. школа, 1977. – 152 с.
198. Маркова А. К., Матис Т. А., Орлов А. Б. Формирование мотивации учения: Кн. для учителя /А. К. Маркова, Т. А. Матис, А. Б. Орлов. – М.: Просвещение, 1990. – 192 с.
199. Математика в поняттях, означеннях і термінах. У 2-х ч. /[Мантуров О. В., Солнчев Ю К., Сорокін Ю. І., Федін М. Г.; Пер. з рос. Журавель Л. М.]. – К.: Рад. школа, 1986. – Ч.1. – 383с., Ч. 2. – 360 с.
200. Математика в современном мире. Сборник статей. Перевод. с нем. Н. Г. Рычковой. – М.: Мир, 1967. – 205 с.
201. Математика для вступників до вузів. Навчальний посібник. – Харків: Компанія СМІТ, 2002. – 1120 с.
202. Математика XIX века: Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей. Под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича. – М.: Наука,1978. – 256 с.
203. Математика: Справочник школьника /Сост. Г. М. Якушева. – М.: Филолог. об-во «Слово», компания «Ключ-С», Центр гуманит. наук при фак. журналистики МГУ им. М.

В. Ломоносова., 1996. – 576 с.
204. Математический энциклопедический словарь /Гл. ред. Ю. В. Прохоров; Ред. кол.: С. И . Адян, Н. С., Бахвалов, В. И. Битюцков, А. П. Ершов, Л. Д. Кудрявцев, А. Л. Онищик, А. П. Юшкевич. – М.: Сов. энциклопедия, 1988. – 847 с.
205. Математична хрестоматія: Алгебра і початки аналізу. Під. ред. М. І. Кованцова. – К.: Рад. школа, 1977. – 216 с.
206. Мацько Н. Д. Навчання учнів VI класу методу доведення від супротивного //Зб. Методика викладання математики і фізики. Вип. 3. – К.: Рад. школа, 1986. – С. 42-45.
207. Медвєдь Т. Г. Ще раз про нестандартні способи розв'язування квадратних рівнянь //Математика в школах України. – 2005. – №9 (93) травень. – С. 13-15.
208. Методика викладання математики. Практикум /За ред. Г. П. Бевза. – К.: Вища школа, 1981. – 200 с.
209. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика. Учеб. пособие для студентов физ-мат фак. пед. институтов /В. А. Оганесян, Ю. М. Колягин, Г . Л. Луканкин, В. Я. Саннинский. – М.: Просвещение, 1975. – 463 с.
210. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов /В. А. Оганесян, Ю. М. Колягин, Г. Л. Луканкин, В. Я. Саннинский. – 2-е изд., пераб. и доп. – М.: Просвещение, 1980. – 368 с.
211. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика. Учеб. пособие для студентов пед. институтов по спец. 2104 «Математика» и 2105 «Физика». /А. Я. Блох, Е. С. Канин, Н. Г. Килина и др. Сост. Р. С. Черкасов, А. А. Столяр. – М .: Просвещение, 1985. – 336 с.
212. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. /А. Я Блох, В. А. Гусев, Г. В. Дорофеев и др.; Сост. В. И. Мишин. – М.: Просвещение, 1987. – 416 с.
213. Методологические основы научного познания. Под ред. профессора П. В. Попова. Учеб. пособие для студентов вузов. – М.: Высшая школа, 1972. – 272 с.
214. Минка Г. Застосування геометричної інтерпретації в алгебрі //Математика в школі. – 1999. – №1. – С. 34-36.
215. Мисечко О. Є. Історичний та логічний принципи як методи педагогічного дослідження //Педагогіка і психологія. – 1996. – №3. – С. 49-57.
216. Моденов В. П. Грани математики: координатно-параметрический метод. – М.: Изд-во УНЦ ДО МГУ, 1999. – 32 с.
217. Моденов П. С. Сборник задач по математике с анализом решений. – М.: Сов. наука, 1959. – 480 с.
218. Молодший В.Н. Основы учения о числе в XVIII в. – М.: Учпедгиз, 1953. – 180 с.
219. Морокішко Є. П. Питання алгебри в галицьких рукописах XVIII ст. //Нариси з історії природознавства і техніки, в. XV. – К.: Наук. думка, 1971. – С. 37-41.
220. Мостовой А. И., Шарипов Т. А., Наконечный М. Н. О создании проблемных ситуаций при решении задач различными способами //Математика в школе. – 1979. – №1. – С. 20-23.
221. Музикант В. Ю. Урок однієї задачі. – Суми: ВВП "Мрія – 1" ЛТД, 1999. – 100 с.
222. Муравин К. С., Крейдлин Е. Г. Сборник задач по алгебре для 6-8 классов. – М.: Просвещение, 1964. – 296 с.
223. Мурач М. М. Загальні та часткові методи розв'язування задач. – Чернігів: ЧДПІ, 1982. – 62 с.

224. Муртазин З. Г. Сочетание графического метода с аналитическим в целях развития мыслительной деятельности и познавательной активности учащихся на уроках алгебры //Сб. Вопросы истории и методики преподавания математики. №1. – Казань: Казан. гос. пед. ин-т, 1968. – С. 59-98.
225. Нагибин Ф. Ф. Графическое и численное решение уравнений в курсе алгебры средней школы //Сб. Вопросы обучения математике в школе. – Киров: Кировский гос. пед. ин-т, 1962. – С. 81-102.
226. Нагибин Ф.Ф. Проблема учебных задач //Сб. Методика преподавания математики в средней школе. – Свердловск: Свердловский гос. пед. ин-т, 1978. – С. 134-146.
227. Нешков К. И., Семушин А. Д. Функции задач в обучении //Математика в школе. – 1971. – №3. – С. 4-7.
228. Никифоровский В. А. Из истории алгебры XVI – XVII вв. – М.: Наука, 1979. – 208 с.
229. Никольский С. М., Потапов М. К. Алгебра. Пособие для самообразования. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
230. Новик И. А. Практикум по методике преподавания математики: [Для физ.-мат. фак. пед. ин-тов]. – Минск.: Вышейш. шк., 1984. – 175 с.
231. Новосьолов С. Й Спеціальний курс елементарної алгебри. – К.: Радянська школа, 1953 . – 535 с.
232. Олехник С. Н., Потапов М. К., Пасиченко П. И. Нестандартные методы решения уравнений и неравенств. Справочник. – М.: Изд. МГУ, 1991. – 144 с.
233. Олійник Г. Ф. Розв'язування задач як засіб розвитку дослідницьких здібностей учнів //Методика викладання математики. Вип. 8. – К.: Радянська школа, 1972. – С. 107-112.
234. Очерки истории математики и механики. Сборник статей. – М.: Издательство академии наук СССР, 1963. – 272 с.
235. Петров В., Коновалова Л. Про багатоваріантність розв'язування задач //Математика в школі. – 2001. – №3. – С. 13-17.
236. Петров К. Сборник задач по алгебре: Книга для учителя. Пер. с болг. – М. : Просвещение, 1984. – 208 с.
237. Петрова С. С. Дж. Буль и развитие символических методов в теории дифференциальных уравнений. В сб. Историко-математические исследования. Вып. 29. – М.: Наука, 1985. – С. 88-102.
238. Петряев К. Д. Вопросы методологии исторической науки. – К.: Вища школа,1976. – 179 с.
239. Письменный Д. Т. Математика (пособие для старшеклассников). – К.: Станица, 1997. – 288с.
240. Плужников И. Десять способов решения квадратных уравнений //Математика. – 2000. – №40. – С. 24-31.
241. Пойа Дж. Как решать задачу. Пер. с англ. – М.: Учпедгиз, 1961. – 207с.
242. Пойа Дж. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавние /Пер. с англ. В. С. Бермана; под ред. И. М. Яглома. – М.: Наука, 1976. – 448 с .
243. Попов В. Уравнения и неравенства с параметрами в курсе алгебры девятилетней школы: алгоритмический подход //Математика. – 2000. - №10. – С. 6-10.
244. Поппер К. Р. Нищета историцизма. Пер. с англ. – К.: Абрис, 1994. – 192 с.
245. Потапов М. К. Математика: Методы решения задач: Для поступающих в ВУЗы /М. К. Потапов, С. Н. Олехник, Ю. В. Нестеренко. – М.: Изд-во Дрофа, 1995. – 336 с.

246. Потоцкий М. В. Как помочь школьнику решать задачи //Математика в школе. – 1974. – №1. – С. 29-32.
247. Практикум із розв’язування задач з математики. Під ред. В. І. Михайловського. – К.: Вища школа. – 423 с.
248. Преподавание алгебры и геометрии в школе /Составитель О. А. Боковнев. – М.: Просвещение, 1982. – 223 с.
249. Притуло Ф. Ф. Математические предложения и методы доказательств в средней школе. – Дзауджикау: Гос. изд. Сев. – Осет. АССР, 1952. – 48 с.
250. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5-12 класи. – К.: ЗАТ “Київська книжкова фабрика”, 2005. – 65 с.
251. Програми для середніх загальноосвітніх шкіл. Математика, 5-11 класи. – К.: Перун, 1996. – 46 с.
252. Проколиенко Л. Н. Особенности рассуждений учащихся 8-10 классов при обосновании способа решения задачи //Сб. “Вопросы психологии”. “Материалы II Закавказской конференции психологов”. – Ереван: Ереванский гос. пед. ин-т, 1960. – С. 303-306.
253. Ракитов А. И. Историческое познание: Системно-гносеологический подход. – М.: Политиздат, 1982. – 303 с.
254. Репьев В. В. Методика преподавания алгебры в восьмилетней школе. – М.: Просвещение, 1967. – 275 с.
255. Рижняк Р. Я. Формирование у учащихся 5-6 классов умение решать задачи по математике с использованием персональных компьютеров: Дисс. на соиск. учен. степ. канд. пед. наук: 13.00.02 /НИИ педагогики УССР. – К., 1990. – 181 с.
256. Рузин Н. К. Задача как цель и средство обучения математике //Математика в школе. – 1980. – №4. – С. 13-15.
257. Руновська Л. Про геометричний спосіб доведення нерівностей //Математика в школі. – 1998. – №3. – С. 29-30.
258. Рыбников К. А. Возникновение и развитие математической науки: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1987. – 159 с.
259. Рыбников К. А. Очерки методологии математики. (Новое в жизни, науке, технике. Сер. «Математика, кибернетика»; №9). – М.: Знание, 1982. – 64с.
260. Рябушкин Т. В. и др. Статистические методы и анализ социально-экономических процессов. – М.: Наука, 1990. – 293 с.
261. Саввина О. А. Эстетический потенциал истории математики //Математика в школе. – 2001. – №3. – С. 69.
262. Самовол П. І. Методична система роботи із здібними та обдарованими з математики учнями в середній школі: Дис. на соиск. учен. степ. канд. пед. наук: 13.00.02 /УДПУ ім. М . П. Драгоманова. – К., 1995. – 221с.
263. Самовол П. Метод допоміжних моделей і конструкцій //Математика в школі. – 2005. – №8. – С. 51-55.
264. Сборник задач по алгебре для 6-8 класов. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1975. – 208 с.
265. Седякін В. Філіповський Г. Різні способи доведення алгебраїчних нерівностей //Математика в школі. – 2000. – №3. – С. 26-29.
266. Секкей Л. Знание и мышление //Сб. “Психология мышления” /Под. ред. А. М. Матюшкина. – М.: Прогресс, 1965. – С. 65-72.

267. Семенец Н. И. Применение метода интервалов при решении уравнений, неравенств и при построении графиков функций //Сб. “Математика и методика ее преподавания”. – Ростов-на-Дону: Рост. н/Д гос. пед. ин-т, 1972. – 178 с.
268. Семенець С. П. Використання педагогічних програмних засобів під час вивчення курсу алгебри і початків аналізу //Математика в школі. – 2000. – №2. – С. 14-17.
269. Семенець С. П. Розвиток продуктивного мислення учнів при вивченні алгебри і початків аналізу. Дис. на соиск. учен. степ. канд. пед. наук. 13.00.02 /НПУ ім. М. Драгоманова. – К., 1998. – 220 с.
270. Семенов П. В. Рациональные неравенства и метод неопределенных коэффициентов //Математика в школе. – 2004. – №8. – С. 67-69.
271. Скалкова Я. Методология и методы педагогического исследования: [Пер. с чеш.] /Я. Скалкова и коллектив. – М.: Педагогика, 1989. – 219 с.
272. Скафа Е. И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология. Монография. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2004. – 439 с.
273. Слепкань З. И. Методика преподавания алгебры и начал анализа. – К.: Рад. школа, 1978. – 224 с.
274. Слепкань З. И. Психолого-педагогические основы обучения математике. – К.: Рад. школа, 1983. – 192 с.
275. Слєпкань З І., Горохольська А. В., Волянська О. Є. Збірник задач з алгебри і початків аналізу: Навчальний посібник для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2003. – 240 с.
276. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.
277. Слєпкань З. І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. – 240 с.
278. Смоляков А. Применение свойств пропорции к решению задач //Математика. – 2000. – №46. – С. 29-32.
279. Соминский И. С. Метод математической индукции. – М.: Наука, 1965. – 56 с.
280. Сорокин Г. А. Применение свойств експоненты к решению некоторых задач //Математика в школе. – 1993. – №3. – С. 51-53.
281. Столин А. В. Комплексные упражнения по математике с решениями. 7-11 классы. – Х .: ИМП «Рубикон», 1995. – 240 с.
282. Столяр А. А. Педагогика математики. Курс лекций. – Минск: Вышейш.школа, 1969. – 368 с.
283. Стройк Д. Коротка історія математики /Пер. з англійської і доповнення С. М. Кіро. За ред. Б. В. Гнеденка. – К.: Рад. школа, 1960. – 307 с.
284. Струманський В. П. Методологія і методика історико-педагогічного дослідження //Педагогіка і психологія. – 1996. – №2. – С. 141-146.
285. Сушкевич А. К. Материалы к истории алгебры в России. //Историко-математические исследования. Под. ред. Г. Ф Рыбкина и А. П. Юшкевича. Выпуск IV. – М.-Л.: Государственное изд-во технико-теоретической лит-ры, 1951. – С. 237 – 449.
286. Тарасенкова Н. А. Теоретико-методичні основи використання знаково-символьних засобів у навчанні математики учнів основної школи: Дис…д-ра пед. наук: 13.00.02/ Черкаський держ. ун-т ім. Богдана Хмельницького. – Черкаси, 2003. – 630 с.
287. Теория задач и способов их решения /Отв. ред. Г. А. Балл/. – К.: Институт кибернетики АН УССР, 1974. – 109 с.

288. Тестов В. А., Уханова Л. Д. Развитие познавательных способностей у школьников в условиях уровневой дифференциации //Начальная школа. – 1999. – №2 – С. 32-37.
289. Тонких А. П., Демидова Т. Е. Алгебраические решения на языке арифметики //Математика в школе. – 1999. – №4. – С. 66-68.
290. Трапезнікова Є. А. Статистика: Курс лекцій. – Чернігів: ЧДІЕУ, 2001. – 327 с.
291. Туманов С. И. Поиски решения задачи. – М.: Просвещение, 1969. – 280с.
292. Учебно-методический сборник статей по математике (методы решения и составления задач) /Под ред. М. К. Магомедбекова. Вып. 1. – Махачкала: Дагучпедгиз, 1978. – 172 с.
293. Учебные алгоритмы по алгебре и элементарным функциям (Методические рекомендации для учителей и студентов выпускных курсов пединститута) /Сост. доценты: Я. М. Жовнир, И. А. Наумов, В. С. Крамор и ст. преп. В. Д. Рябчинская – Харьков: Харьков. гос. пед. ин-т, 1980. – 87 с.
294. Федак І. В. Розв’язування задач підвищенної складності з математики //Математика в школах України. – 2005. – №13 (97) травень. – С. 12-14.
295. Федяков В. Е. Нестандартные методы решения математических задач. – Йошкар-Ола: Марийский гос. пед. ин-т, 2000. – 56 с.
296. Формирование алгоритмической культуры школьника при обучении математике. /[В. М. Монахов, М. П. Лапчик, Н. Б. Демидович, Л. П. Червочкина]. Пособие для учителя. – М.: Просвещение, 1978. – 94 с.
297. Фридман Л. М. Алгоритм решения рациональных неравенств. /Вопросы истории и методики элементарной математики: Учёные записки. Том 47. Выпуск 2. – Душанбе: Ирфон, 1965. – С. 137 – 145.
298. Фридман Л. М. Логико-психологический анализ школьных учебных задач. – М.: Педагогика, 1977. – 208 с.
299. Фридман Л. М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе. – М .: Просвещение, 1983. – 160 с.
300. Фридман Л. М. Учитесь учиться математике: Кн. для учащихся. – М.: Просвещение, 1985. – 112 с.
301. Фридман Л. М., Турецкий Е. Н. Как научиться решать задачи: Кн. для учащихся ст. классов сред. шк. – 3-е изд., дораб. – М.: Просвещение, 1989. – 192 с.
302. Фройденталь Г. Математика как педагогическая задача. Ч. I. Пособие для учителей /Под. ред. Н. Я. Виленкина; Сокр. пер. с нем. А. Я. Халамайзера. – М.: Просвещение, 1982 . – 208 с.
303. Фройденталь Г. Математика как педагогическая задача. Ч. II. Пособие для учителей /Под. ред. Н. Я. Виленкина; Сокр. пер. с нем. А. Я. Халамайзера. – М.: Просвещение, 1983 . – 192 с.
304. Фуше А. Педагогика математики. Перевод с французского М. З. Рабиновича. Под ред. проф. И. А. Андронова. – М.: Просвещение, 1969. – 128 с.
305. Храмова В. Л. Новая парадигма современных историко-научных исследований //Наука та наукознавство. – 2002. – №4. – С. 90-97.
306. Худобін О. І., Худобін М. І., Шуршалов М. П. Збірник задач з алгебри і елементарних функцій: Посібник для учнів 9-10 класів. – К.: Рад. школа, 1969. – 428 с.
307. Цыпкин А. Г., Пинский А. Й. Справочник по методам решения задач по математике: Для средней школы – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1989. – 547 с.
308. Чада Б. Развивать алгоритмическую культуру учащихся //Математика в школе. – 1983 . – №2. – С. 62-63.

309. Черненко Н. А. Мотиваційна функція задач у навчанні математики //Зб. "Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики". Т. 1: Теорія та методика навчання математики. – Кривий Ріг: Видавничий відділ НацМетАУ, 2002. – 444 с.
310. Чистяков В.Д. Старинные задачи по элементарной математике. 3-е изд. испр.– Минск: Вышейш. школа, 1978. – 270 с.
311. Чистяков І. І. Методика викладання алгебри. – Київ-Харків: ОНТИ, 1936. – 260 с.
312. Шапиро И. М. Использование задач с практическим содержанием в преподавании математики: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1990. – 96 с.
313. Шапошников Н. А. Основания общей арифметики и алгебры /Сост. Н. А. Шапошников. – М.,1886. – 104 с.
314. Шарыгин И. Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач. Учеб. пособие для 10 кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1989. – 252 с.
315. Шатохин М. Рациональные методы решения примеров и задач на уроках математики. – Орел: Орловское книжное издательство, 1962. – 48 с.
316. Шахно К. У. Сборник задач по элементарной математике повышеной трудности. – Минск: Вышейшая школа, 1967. – 478 с.
317. Шевкин А. От реформы до реформы. Попытка обзора школьных учебников по математике //Школьное обозрение. – 2002. – №5. – С. 33-40.
318. Шевченко А. В. Метод математичної індукції – К.: Четверта хвиля, 1996. – 48 с.
319. Шереметевский В. П. Очерки по истории математики. – М.: Государственное учебно-педагогическое издательство наркомпроса РСФСР, 1940. – 180 с.
320. Шестаков С., Галицкий М. Уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции //Математика. – 2000. – №13. – С. 18-22.
321. Шестаков С., Галицкий М. Уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции //Математика. – 2000. – №14. – С. 19-23.
322. Шкіль М. І., Колесник Т. В., Хмара Т. М Алгебра і початки аналізу. 10 кл. Експериментальний навчальний посібник для шкіл з поглибленим вивченням математики . – К.: Освіта, 1993. – 336 с.
323. Шкіль М. І., Колесник Т. В., Хмара Т. М Алгебра і початки аналізу. Пробний підручник для 11 класу шкіл і класів з поглибленим вивченням математики. – К.: Освіта, 1994. – 304 с.
324. Шкіль М. І., Слєпкань З. І., Дубинчук О. С. Алгебра і початки аналізу /Навч. посібник для середніх ПТУ. – К.: Вища школа, 1992. – 479 с.
325. Шкіль М. І., Слєпкань З. І., Дубинчук О. С. Алгебра і початки аналізу 10-11 класи. Пробний підручник. – К.: Зодіак-ЕКО, 1995. – 608 с.
326. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
327. Шолохович В. Ф. Информационые технологии обучения //Информатика и образование. – 1998. – №2. – С. 5-13.
328. Шохор-Троцкий С.И. Методика арифметики. – СПб., 1903. – 316 с.
329. Шунда Н. М. Збірник задач з алгебри для 6-8 класів. Методичний посібник. – К.: Рад. школа, 1987. – 192 с.
330. Шустеф Ф. М. Методика преподавания алгебры. Курс лекций. – Минск: Вышейш. школа, 1967. – 224 с.
331. Шушара Т. Шляхи і засоби активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів на уроках математики //Рідна школа. – 2004. – №3 (березень). – С. 17-19.

332. Элементарная алгебра: курс систематический. В двух томах /Составил Н. Н. Маракуевъ. Том 1. – М.: Типо-литография т-ва И. Н. Кушнеревъ и Ко, 1903. – 956 с.
333. Энгельс Ф. – В. Боргиусу. Лондон, 25 янв. 1894 г. //Маркс К., Энгельс Ф. Соч. – 2-е изд. – Т. 39. – С. 176.
334. Эрдниев П. М. Методика упражнений по арифметике и алгебре: Пособие для учителей. – М. : Просвещение, 1965. – 327 с.
335. Эрдниев П. М. Методика упражнений по математике. Изд. 2-е, доп. и переработ. Пособие для учителя. – М.: Просвещение, 1970. – 319 с.
336. Эсаулов А. Ф. Психология решения задач. Методическое пособие – М.: Высшая школа, 1972. – 216 с.
337. Эфендиев У. Г. Функционально-операционные основы изучения уравнений и неравенств в неполной средней школе: Дисс. на соиск. учен. степ. канд. пед. наук. 13.00. 02 /Азерб. гос. пед. ин-т им. В. И. Ленина. – Баку, 1987. – 146 с.
338. Юшкевич А. П. История математики в России до 1917 года. – М.: Наука, 1968. – 592 с.
339. Ясінський В. Метод нескінченного спуску в олімпіадних задачах з теорії чисел //Математика в школі. – 2005. – №5. – С. 49-52.

Додаток А

Анкета для вчителів та викладачів

1. Як часто Ви звертаєтесь до спеціальної літератури у пошуках нових методів розв’язування алгебраїчних задач?

а) часто б) іноді в) ніколи не звертаюся

2. Чи знайомі Ви з практикою використання методу доцільних задач на уроках алгебри та алгебри і початків аналізу в середній школі?

а) так б) ні в) Ваш варіант ________________________

____

3. Чи використовуєте Ви метод доцільних задач у навчанні алгебри та початків аналізу?

а) так б) ні в) Ваш варіант ________________________

____

4. Як Ви трактуєте поняття: метод розв'язування алгебраїчних задач та спосіб розв'язування алгебраїчних задач? _________________________

____

____

____

5. Які методи розв'язування алгебраїчних задач Вам відомі?

____

____

6. Назвіть алгоритми відомих Вам методів розв'язування алгебраїчних задач.

____

____

____

7. Чи відомі Вам методи розв'язування алгебраїчних задач, крім тих, які передбачені шкільною програмою?

а) так (які саме?) б) ні в) Ваш варіант _____________________________

____

8. Чи працюєте Ви додатково з здібними та обдарованими учнями в плані пошуку методів та способів розв'язування алгебраїчних задач?

а) так б) ні в) Ваш варіант _______________________

____

9. Чи здійснюєте Ви диференціацію та індивідуалізацію навчання при розв'язуванні алгебраїчних задач?

а) так б) ні в) Ваш варіант _______________________

____

10. Чи користуєтесь Ви засобами обчислювальної та комп'ютерної техніки у процесі розв'язування алгебраїчних задач?

а) так б) ні в) Ваш варіант _______________________

____

11. Чи вважаєте Ви можливим підвищити рівень умінь учнів розв'язувати задачі за допомогою нових інформаційних технологій навчання?

а) так б) ні в) Ваш варіант _______________________

____

Додаток Б

Анкета для учнів та студентів

1. Чи цікавитесь Ви фактами з історії розвитку алгебри?

а) так б) ні в) Ваш варіант ____________________

____

2. Назвіть відомі Вам методи і способи розв'язування алгебраїчних задач.

____

____

____

3. Назвіть алгоритми відомих Вам методів розв'язування алгебраїчних задач.

____

____

____

4. Чи відомі Вам методи розв'язування задач, які не передбачені шкільною програмою?

а) так (які саме) б) ні в) Ваш варіант ______________

____

____

5. Чи прагнете Ви розв’язувати алгебраїчні задачі різними методами та способами?
а) так б) ні в) Ваш варіант ______________________
____

6. Чи подобається Вам розв’язувати творчі задачі, в яких Ви відкриваєте для себе дещо нове?
а) так б) ні в) Ваш варіант ______________________
____

7. Чи доводилося Вам самим складати алгебраїчні задачі?
а) так б) ні в) Ваш варіант ______________________
____

8. Чи берете Ви участь у математичних олімпіадах, вікторинах та брейн-рингах, де розв’язують оригінальні алгебраїчні задачі?
а) так (в яких саме) б) ні в) Ваш варіант _________
____

9. Чи користуєтесь Ви мікрокалькуляторами та комп’ютерами у процесі розв’язування алгебраїчних задач?
а) так б) ні в) Ваш варіант ______________________
____

Додаток В
ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ СКЛАДАННЯ РІВНЯНЬ ПРИ РОЗВ’ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ
/методичні рекомендації/

ЗМІСТ

Вступ 234
Історія розвитку методу рівнянь 235
Операційний склад методу рівнянь 240
Методика складання рівнянь за умовою задачі 247
Використання наочності при розв’язуванні задач 252
Метод рівнянь при розв’язуванні задач з фізичним змістом 255

ВСТУП

… Складання рівняння даної задачі
є основний прийом, за допомогою
якого математика застосовується до
природознавства та техніки. Без рівняння
нема математики як засобу пізнання природи.
П. С. Алєксандров

Задачі на складання рівнянь, або текстові алгебраїчні задачі, являють собою традиційний розділ елементарної математики. Розв'язування задач методом рівнянь сприяє розвитку логічного мислення, кмітливості і спостережливості, вміння самостійно здійснювати невеликі дослідження. Завдяки своїй загальності, метод рівнянь охоплює задачі з самими різноманітними структурами і тим самим розвиває "гнучкість" мислення учнів, вчить їх перекладати конкретну ситуацію задачі в абстрактну алгебраїчну модель, придатну для розв'язання задач з іншим конкретним змістом, але з тією ж структурою. Метод рівнянь є одним з сильних засобів здійснення внутрішньопредметних та міжпредметних зв'язків у процесі навчання математики в середній школі. При цьому перше місце займає розкриття прикладної частини шкільного курсу математики. Учні засвоюють елементи математичних знань, вмінь та навичок, які відносяться до всіх основних етапів процесу розв'язання.

Але як в учнів, так і у вчителів виникають деякі труднощі, головним чином пов'язані з тим, що не може бути складене деяке спільне правило (алгоритм), яке можна було б покласти в основу процесу складання рівнянь за умовою задачі. Труднощі у міркуваннях учнів при складанні рівнянь пов'язані також з усвідомленням змісту задачі, вибором невідомих величин, які найбільш раціонально позначити буквами, з складанням алгебраїчних виразів та об'єднанням їх в одне або декілька рівнянь.

Хоча у підручниках з алгебри є зразки розв'язання задач і деякі вказівки до складання рівнянь, ці роз'яснення не дають учню достатньо міцної основи до оволодіння розв'язуванням задач. Необхідно відмітити і те, що в практиці деяких вчителів переважає прийом довгого словесного роз'яснення розв'язання задачі методом складання рівнянь.

До причин незадовільного розв'язування задач слід віднести слабкі навички учнів в схематичному і символічному запису умови, що не сприяє аналізу та синтезу задачі, більш яскравому вираженню залежностей між величинами, які входять в задачу. Також багато учнів слабо уявляють функціональну залежність між величинами, які входять до задачі, не вміють виражати цю залежність в символах і тому погано переводять словесні тексти на абстрактний язик математики. Ще до причин можна віднести незадовільне оволодіння учнями евристичної схеми щодо складання рівняння.

ІСТОРІЯ РОЗВИТКУ МЕТОДУ РІВНЯНЬ

Нема нічого більш важливого, ніж
виявити джерело нового відкриття. Це,
на мій погляд, цікавіше самого відкриття
Г. Лейбніц

Розв'яжемо задачу: "Віки трьох братів 30, 20 і 6 років. Через скільки років вік старшого буде дорівнювати сумі віків обох молодших братів?" Позначивши шукане число років через x, складемо рівняння: 30 + xx) + (6 + x) звідки xax2

Ще більш складні задачі вміли розв'язувати на початку II тисячоріччя до н.е. у Древньому Вавілоні; у математичних текстах, виконаних клинописом на глиняних пластинках, є квадратні і біквадратні рівняння, системи рівнянь із двома невідомими і навіть найпростіші кубічні рівняння. При цьому вавілоняни також не використовували букв, а приводили розв'язання "типових" задач, з яких розв'язання аналогічних задач одержували заміною числових даних. У числовій формі приводилися і деякі правила тотожніх перетворень. Якщо при розв'язанні рівняння треба було добувати квадратний корінь з числа а, що не є точним квадратом, знаходили наближене значення кореня x: поділяли а на x і брали середнє арифметичне чисел x і а/x.

Розв'язування рівнянь завжди привертало увагу математиків. У загальних методах розв'язання рівнянь шукали ключ до розв'язання найбільш важких математичних питань, і саме на шляху розв'язання рівнянь було зроблено багато великих відкриттів. Але зміст поняття рівняння в історії математичної думки визначився не одразу. Збережені рукописи древньої культури говорять про те, що за п'ять тисячоліть до нашого часу халдеї вміли

розв'язувати системи рівнянь, які мали вигляд:

Як розв'язувалися ці системи, точно невідомо. Мабудь, що їх розв'язання проводилося шляхом простого підбору чисел. Розв'язання рівняння методом підбору показує, що символ означає не конкретне число, а служить для вираження деякої змінної величини, функції змінної x. А вавілонські вчені вже за дві тисячі років до нашої ери вміли розв'язувати квадратні рівняння.

В епоху занепаду грецької геометрії (IV ст. н. е.) була написана "Арифметика" Діофанта. Шість книг, які дійшли до нашого часу, присвячені рівнянням. Діофантом були розглянуті найпростіші види рівнянь з цілими коефіцієнтами, які розв'язуються в натуральних, цілих або раціональних числах. Методи розв'язання рівнянь, які використовувались Діофантом, дуже різноманітні. У розв'язаннях, які він наводить, слід відмітити дуже типову рису: Діофант всюди оперує з невідомими числами як з відомими, і, по суті, замінює одні рівняння іншими, їм рівносильними. Ще від Діофанта ведуть початок синтетичні методи розв'язування рівнянь. Застосування цих методів відобразилося у поглядах на природу рівнянь. Діофант розглядає розв'язування і квадратних рівнянь, але загального правила для розв'язання рівнянь другого степеня він не дає.

В цьому відношенні вперед вийшли індійці. Вони покращили і узагальнили способи розв'язування квадратних рівнянь, які були відомі грекам. Індійці вже знаходять два корені квадратного рівняння, але в тому випадку, коли корені дійсні.

Надалі алгебра виділилася в самостійну математичну дисципліну. Цьому сприяли роботи середньоазіатських вчених Мухамеда ібн-Муси ал-Хорезмі та Омар ал-Хайяма. Метод розв'язування рівнянь, який запропонував М. ал-Хорезмі, називається "Алджебр вал-мукабала" і полягає в перенесенні членів які віднімаються, з однієї частини рівняння в другу і відкиданні від обох частин рівняння однакових членів. Можна вважати, що цим математиком були виявлені перші властивості рівнянь. М. ал-Хорезмі розглядає розв'язання шести типів рівнянь, які мають вигляд:

ax2=bx; ax2=c; bx=c;

x2+bx=c; x2+c=bx; x2=bx+c.

Причому, для стародавніх математиків останні три рівняння є різними, тоді як для нас це одне рівняння виду: x2+bx=c. Всі коефіцієнти та корені рівнянь допускалися тільки додатні. Для знаходження розв'язків рівнянь автор використовує геометричні методи, які подібні розв'язанням Евкліда, Діофанта, Герона та інших античних математиків.

Великим досягненням у знаходженні розв'язків кубічних рівнянь стали алгебраїчні роботи вченого, філософа та поета Омара Хайяма. Він вивчав рівняння перших трьох степенів. Так як можливі геометричні образи тільки трьох вимірів, то Хайям вважав можливими величини тільки трьох перших вимірів – корінь, квадрат, куб.

О. Хайям дає класифікацію рівнянь і розглядає розв'язання рівнянь в множині додатніх чисел. Його метод розв'язання геометричний, а для рівнянь першого і другого степенів О. Хайям подає і числові доведення. Прийоми розв'язування квадратних рівнянь Хайям розглядає на прикладах М. ал-Хорезмі, вводячи нові побудови. Розглянувши 25 типів рівнянь (двочленні, трьохчленні, чотирьохчленні), він розглядає рівняння, які містять степені величини, оберненої до невідомої. Ці рівняння Хайям розв'язує після введення "долі речі",

тобто підстановкою він приводить їх до раніше розглянутих типів рівнянь. По відношенню до рівнянь четвертого і вищих степенів Хайям заявляє, що вони не мають розв'язків.

Європейські математики дізналися про роботи О. Хайяма лише в XVII ст. На цей час в алгебру вже були введені буквені позначення, уявні величини, від'ємні числа, Знайдені методи розв'язування рівнянь третього і четвертого степенів в радикалах. На європейський грунт відомості про рівняння були перенесені Л. Фібоначчі.

Після введення єдиної буквеної символіки (1591) стало можливим записати розв'язання задач у вигляді загальної формули, де під буквами розуміються будь-які дійсні числа (якщо нема відповідних зауважень).

Введення в математику змінної величини і прямокутної системи координат (Р. Декарт "Геометрія",1637), застосування рівнянь до вивчення геометричних образів і, головне, застосування геометричних образів до вивчення рівнянь виявило істинну суть змісту поняття про рівняння. "Динамічна" природа рівняння завдяки його геометричному трактуванню стала виявлятися все яскравіше і знайшла відображення в роботах Декарта та Ньютона (

наприклад, метод наближеного розв'язання рівнянь). Працями Декарта алгебра була вдосконалена: він покращив систему алгебраїчних позначень, запропонував записувати рівняння в такому вигляді, як записуємо ми їх зараз (0 справа). Він же дав правило для визначення числа додатніх і від'ємних коренів рівняння.

Ньютон теж дав для алгебри, зокрема для теорії рівнянь досить багато: він вперше чітко сформулював сукупність теорем про рівносильність, дав методику розв'язування задач на складання рівнянь, вказав способи розв'язування системи рівнянь (виключенням невідомих за способом підстановки і способом порівняння невідомих), дав метод наближеного розв'язування рівнянь. Продовжувачем справи Ньютона був петербургський академік Л. Ейлер. Рівняння Ейлер описує як рівність, яка зв'язує відомі і невідомі величини.

Формули для розв'язування рівнянь третього і четвертого степенів були відкриті у XVI ст. В XVII і XVIII ст. спільними зусиллями вчених відбувалась розробка загальної теорії рівнянь. Почались пошуки формул, які б виражали корені рівнянь п'ятого і більш високих степенів через коефіціенти цих рівнянь за допомогою радикалів.

В XVIII ст. в алгебру проникли методи аналізу нескінчено малих величин. Приклади диференціального числення в чистому вигляді застосовуються для наближеного обчислення коренів; похідні використовуються для визначення кратності коренів.

На рубежі XVIII і XIX ст. німецький математик К. Гаус довів основну теорему алгебри про існування коренів рівняння з числовими коефіцієнтами.

Як відомо, пошуки формул для розв'язування в радикалах рівнянь високих степенів не привели до позитивних результатів. Це привело до розробки методів наближеного розв'язання рівнянь. У наближеному обчисленні коренів чисельних рівнянь широке застосування знаходять два методи, які збереглися в математичній практиці із стародавніх часів до наших днів: метод підбору та метод "хибного положення". Який би з методів наближеного обчислення ми не розглядали – метод Ньютона або Горнера, чи спосіб Лагранжа (за допомогою неперервних дробів), або метод ітерацій – всі вони являють собою розв'язування рівнянь за допомогою підбору.

ОПЕРАЦІЙНИЙ СКЛАД МЕТОДУ РІВНЯНЬ

Для успішного розв'язування задач
необхідно домогтися, щоб учні добре
знали ті функціональні залежності,
які лежать в основі задач, щоб вони
могли використовувати їх
в конкретних умовах.
В. В. Рєп'єв

Велике значення для складання рівнянь за умовою задачі мають навички із запису алгебраїчних виразів, рівностей, нерівностей з метою з'ясування основних понять і співвідношень: рівно, більше на стільки-то, більше в стільки-то разів, відсоток, відношення та ін.

Щоб подолати деякі труднощі в розв'язанні задач шляхом складання рівнянь, слід підняти рівень вмінь та навичок в розв'язанні арифметичних задач. Як покращити ці вміння та навички? Основним засобом, який підвищує рівень розв'язання задач, є підготовчі вправи. Спільна мета цих вправ полягає в послідовному та поступовому подоланні труднощів в розв'язанні різних видів арифметичних задач, в доцільному збагаченні другої сигнальної системи новими необхідними сигналами, в розвитку серії нових корисних умовних рефлексів .

Крім того, в процесі виконання підготовчих вправ корисно розвивати навички в складанні числових виразів. Такі навички в майбутньому спростять складання буквених виразів та рівнянь.

Успіх в діяльності по розв'язуванню текстових задач залежить від того, чи знають учні, в яких відношеннях взагалі можуть знаходитися різні величини, і чи розуміють вони реальний зміст цих відношень (наприклад, відношення: "пізніше на", "старший у стільки-то разів" та ін.). Іноді учні 6 – 7-х класів не можуть скласти рівняння за текстом задачі або отримують неправильне рівняння тому, що не розуміють задачі, вкладають хибне значення в її текст. Кожному вчителю доводиться спостерігати, як деякі учні неправильно тлумачать такі вирази: "більше у два рази", "більше на два", "менше у три рази", "менше на три". Буває й таке, коли деякі учні невірно розуміють такі слова: "пізніше", "раніше", "одночасно" та ін. Якщо вираз "заплатили стільки ж" дорослі сприймають як короткий вираз рівності вартостей , то діти при відсутності терміна "дорівнює" не зразу починають розуміти, що тут дається вказівка на можливість з'єднання знаком рівності алгебраїчні вирази, які представляють вартості двох покупок. Тому потрібно виконувати вправи по перефразуванню подібного роду виразів, які входять в умови задач. Наприклад, вирази " заплатили стільки ж", " пройшли ту ж саму відстань" замінити відповідними виразами "вартість першої покупки дорівнює вартості другої покупки", " відстань, пройдена …, дорівнює відстані, пройденій …" та ін.

Далі потрібне буде розуміння, якими саме математичними діями або властивостями, або яким зв'язком (залежністю) між компонентами та результатом дій може бути описане те чи інше конкретне співвідношення.

Для обробки цих понять та співвідношень між ними необхідні систематичні вправи на записування алгебраїчних виразів у всіх класах середньої школи. Дуже важливо, щоб вправи носили не тільки абстрактний характер, але й характер практично доцільних задач.

Корисно, щоб кожен учень набув вміння та навички запису під диктовку вчителя алгебраїчних виразів, які відповідають суті основних понять, залежностей та співвідношень. Велике значення має запис формул, які виражають функціональну залежність між величинами. Вправи такого роду важливі для розуміння учнями суті функціональної залежності, аналітичного виразу цієї залежності, розвитку функціонального мислення.

В основі кожної математичної задачі лежить одна, а частіше декілька функціональних залежностей. Знання функціональних залежностей, які лежать в сюжетах алгебраїчних задач, дає ключ до розв'язання, а відсутність цих знань є великою перешкодою.

Учні часто не знають функціональних залежностей, які лежать в основі задач на складання рівнянь. Тому необхідно вивчати ці залежності. Взагалі, число цих залезностей дуже велике, і може здатися, що всі їх охопити неможливо. Дійсно, залежностей багато, але їх використання обмежується видом рівнянь або систем, які на даному етапі навчання доцільно застосовувати.

Тому дуже важливо і доцільно на початку розв'язання задачі нового для учнів типу розглянути функціональну залежність між величинами, яка існує в задачах даного типу; записати формули залежності; виразити значення величин через інші; скласти з простих задач складну і тільки потім переходити до розв'язання задач із підручника або збірника.

Задача, яка розв'язується шляхом складання рівняння або системи рівнянь, виглядає як ряд суджень на визначену тему, що виражені на рідній мові учнів. В процесі роботи ці судження доводиться перекладати на мову алгебраїчних виразів і рівнянь. Цей переклад, на думку вчителів і методистів, є дуже важким для учнів. Як виявлення залежностей між величинами, так і переклад їх на математичну мову вимагає напруженої аналітико-синтетичної розумової діяльності. Якщо вчитель бажає добитися, щоб школярі добре складали рівняння або системи рівнянь, він повинен навчити їх перекладати судження з рідної мови на мову алгебраїчних символів та навпаки.

Зрозуміло, що тільки при умові постійних підготовчих вправ в подібних перекладах можливо розраховувати на те, що учні зможуть швидко записувати тексти задач за допомогою алгебраїчної символіки, правильно тлумачити алгебраїчні вирази і рівняння та читати їх на рідній мові. Такі переклади повинні знайти місце у підготовчих вправах.

Підготовчі вправи корисно виконувати з усіх розділів шкільної математики (оскільки метод рівнянь використовується не тільки при розв'язуванні алгебраїчних задая) у відповідності із вивченням поточного матеріалу.

Перед розв'язанням складних задач корисні вправи, які поступово ускладнюються; в кінцевому результаті вони приводять до задач даного типу. Головним в цих вправах треба вважати виявлення закономірностей, встановлення функціональної залежності, вираження цієї залежності формулою.

Розглядаючи зміст і методику підготовчих вправ, треба відповісти на такі запитання:

Які вправи треба виконувати?

Навіщо їх виконувати?

Коли їх виконувати?

Як при цьому будуть працювати діти, які якості при цьому у них виховуються?

Основними цілі підготовчих вправ:

- вони повинні допомогти дітям зрозуміти тексти задач і вкладати в них правильне значення;
- при їх виконанні учні повинні навчитися перекладати тексти задач з рідної мови на мову алгебраїчних символів, виразів і рівнянь;
- в процесі їх розв'язання школярі повинні освоїтися з найбільш поширеними функціональними залежностями, навчитися правильно їх розуміти та вправно користуватися ними;
- при виконанні вправ діти повинні оволодіти тими елементарними операціями, які є складовими елементами методу розв'язування задач шляхом складання рівнянь або систем рівнянь.

За допомогою підготовчих вправ учні повинні оволодіти поняттями, які потім допоможуть при складанні рівнянь та при розв'язанні складніших задач. Такими поняттями є: різницеве та кратне відношення чисел, залежність між компонентами та результатами дій, зміна результатів дій в залежності від зміни компонентів, залежність між ціною, кількістю товару та його вартістю, структура цілого числа в десятковій системі числення, структура звичайного дробу та зміна її в залежності від зміни чисельника та знаменника, залежність між шляхом, швидкістю та часом при рівномірному русі, залежності, які пов'язані з роботою, наповненням басейнів, вираз визначеного числа відсотків від будь-якого числа, відсотків від відсотків, знаходження числа за його відсотками, деякі метричні залежності геометрії. Так як метод рівнянь використовується не тільки при розв'язуванні алгебраїчних рівнянь, то до підготовчих вправ слід включати вправи на розрахунок шківів, важелів та ін.

Для кращого розуміння учнями при виконанні підготовчих вправ доцільно робити короткі записи у формі таблиць на дошці (кожен учень записує у себе в зошиті). Кожен раз вчитель дає форму таблиці, яка заповнюється при виконанні вправ.

Наприклад, виконуються підготовчі вправи на різницеве та кратне відношення чисел:

Лінійка коштує а коп., а трикутник у 2 рази дорожче лінійки. Скільки потрібно заплатити за лінійку та трикутник разом?

Друге число менше першого на 5. Знайти добуток цих чисел, позначивши перше число через х.

Перше число більше другого на с. Написати частку від ділення першого числа на друге.

Придумайте задачі, які схожі на попередні, щоб їх розв'язання приводило до виразів: а) b+4b, б) b+(b+4).

Одна річ коштує а грн., друга – на 5 грн. дорожче, а третя – у 5 разів дорожче першої. Скільки коштують разом всі речі?

Знайти добуток трьох чисел, з яких друге дорівнює m, перше більше другого у n разів, а третє менше другого на n.

При виконанні вправ заповнюється таблиця:

№п.п.	1-е число	2-е число	3-е число	Результат
1.	a	2a	-	a+2a
2.	x	x-5	-	x(x-5)
…	…	…	…	…

В залежності від обставин число вправ та ступінь їх складності можуть бути змінені. Одні з них можуть пропонуватися у формі диктантів, інші – і вигляді усних вправ і т. д.

Взагалі, таблиці дуже часто використовуються як при виконанні підготовчих вправ, так і при розв'язуванні текстових задач. Розглянемо один з прикладів які сприяють тому, щоб учні оволоділи ідеєю функіональної залежності між величинами, які входять до задачі, методами та технікою розрахунків.

Задача. При випіканні житнього хліба припік складає 0,3 маси взятого борошна. Скільки борошна треба взяти, щоб отримати 26 кг печеного хліба?

В цій задачі важливо встановити функціональну залежність між вагою борошна, вагою печеного хліба та припіком. Дуже корисно буде скласти таблицю, яка відобразить цю функціональну залежність.

Маса борошна (Рб кг)	Припік (в частинах)	Припік (в кг)	Маса хліба (Рх кг)
1	0,3	1·0,3=0,3	1+0,3=1,3
2			1,3·2
3			1,3·3
…			…
Рб			Рх=1,3·Рб

В другому та подальших випадках результати записуються на основі пропорційності ваги хліба та ваги борошна.

В результаті проведеного дослідження отримується загальна формула для розв'язання задачі. Якщо підставити вагу хліба (26 кг), то ми дізнаємось скільки борошна потрібно взяти,

щоб отримати 26 кг хліба. Так як , то . Тобто кг борошна треба взяти, що отримати 26 кг хліба.

Враховуючи особливості мислення учнів при складанні ними рівнянь, необхідно звернути увагу на те, щоб навчити учнів послідовному співставленню відомих і невідомих величин, визначенню шуканих, результативних величин через інші невідомі величини, знаходженню схожих ознак в цих виразах і об'єднанню їх в рівняння. З цією метою важливо підібрати систему підготовчих вправ, яка допоможе учням правильно зрозуміти суть тих виразів, які входять в умову задачі. Ці вправи повинні сприяти виробленню у учнів вміння правильно перекладати умови спочатку неважких, а потім і важких задач в алгебраїчні вирази.

Взагалі, підготовчі вправи, незалежно від їх прямих цілей, мають широке значення при навчанні основам алгебри: вони цікаві з точки зору політехнічного навчання, є сильним засобом для розвитку мислення та потужним засобом в боротьбі з формальним засвоєнням матеріалу.

МЕТОДИКА СКЛАДАННЯ РІВНЯННЯ ЗА УМОВОЮ ЗАДАЧІ

Розв’язування математичної задачі,
як правило,припускає винайдення спеціально
ведучих до поставленої мети міркування
і тим самим стає – нехай вельми
скромним – творчим актом.
А. Я. Хінчін

Всі задачі шкільної математики зводяться до невеликого числа залежностей, які приводять до декількох типів рівнянь. Багато авторів відмічають наступні види рівнянь, до яких зводиться розв’язання задач методом складання рівнянь першого степеня.

І-й тип задач. Задачі, які приводять до рівнянь виду: Наприклад, .

Задачі цього типу тісно пов’язані з арифметичними задачами на залежність між компонентами і результатами дій. Сюди відносяться і задачі на ділення з остачею.

ІІ-й тип задач. Задачі, які приводять до рівнянь виду: Наприклад,

Це задачі алгебраїчного характеру.

ІІІ-й тип задач. Задачі, які приводять до різницевого та кратного порівняння величин шляхом співставлення значень двох алгебраїчних виразів однорідних величин. Розв’язання таких задач приводить до рівнянь виду:

а) Наприклад,

б) Наприклад,

Деякі автори третій тип задач розглядають як варіанти другого типу.

Задачі шкільної математики, які приводять до квадратних рівнянь, в своїй основі мають комбінації двох лінійних функцій та їх добутку.

В методичній літературі є чимало пропозицій відносно найбільш раціональної побудови методики складання рівнянь. Складність полягає в тому, що неможливо вказати загальних шляхів, загальних прийомів або алгоритму, за якими треба діяти при розв’язуванні задач шляхом складання рівнянь або систем рівнянь.

Для нього доцільно скласти евристичну схему. В методиці навчання алгебри відомі дві евристичні схеми пошуку рівняння до задачі. Слєпкань З. І. подає одну схему для розв’язування нескладних задач, друга еврістична схема застосовується для розв’язування складних задач.

Велику роль у полегшенні навчання складання рівнянь відіграє раціональна класифікація задач, за умовами яких складаються рівняння. В методичній літературі приводиться декілька варіантів класифікацій. Є варіанти, засновані на одному і тому ж принципі – розбивати задачі на групи за видом рівнянь, які отримуються при складанні. Але треба мати на увазі, що задачі, які приводять до рівнянь одного і того ж виду, але різного змісту, потребують диференційованого підходу та специфічної підготовчої роботи. Наприклад, задачі на зустрічний рівномірний рух мають особливості, які відрізняються від особливостей задач на рух в одному і тому ж напрямку; і ті і інші відрізняються від задач на рух, де доводиться знаходити суму чи різницю швидкостей. А всі задачі на рух, в свою чергу, відрізняються від задач на знаходження числа за співвідношенням між його цифрами і т. д. Ці відмінності визначаються різномаїттям груп величин, які розглядаються в задачі, пов'язаних між собою функціональними залежностями. Тому можна класифікувати задачі за видом функціональної залежності, яка пов'язує величини задачі. Ще один підхід – класифікувати задачі за їх змістом, а потім вже всереддені кожного розділу задач, отриманого в результаті такої класифікації, провести повторне групування за ступенем складності складання рівнянь або за видом рівнянь, до яких приводять такі задачі.

Для розв'язання задачі методом рівнянь необхідно:

- провести аналіз задачі з метою вибору основного невідомого та виявлення залежності між величинами, а також вираження цих залежностей на математичній мові у формі алгебраїчних виразів;
- знайти дані для з'єднання цих виразів знаком "=" і скласти рівняння;
- знайти розв'язки отриманого рівняння; з'ясувати, чи нема серед них роз'язків, сторонніх для задачі; встановити, чи вичерпують розв'язки рівняння всі розв'язки задачі.

Аналіз задачі є дуже важливим етапом. Починаючи розв'язувати задачу на складання рівняння, учень повинен перерахувати, з яких складових складається розв'язувана ним задача. Наприклад, якщо в задачі говориться про декілька рухів, про работу декількох людей і т. д., то він повинен перерахувати всі окремі рухи, виконувані роботи, тощо. Розчленувавши задачу на її складові частини, учень повинен вказати для кожної частини, якою рівністю пов'язані між собою величини, про які в ній іде мова.

Наступний етап – вибір невідомого або невідомих, які позначають буквою. Як правило, краще за все за основну невідому прийняти одну з шуканих в задачі величин. Але часто зустрічаються виключення з загального правила. Вміння робити вдалий вибір невідомої прищеплюється в ході розв'язування задач. Вчитель повинен наводити приклади найбільш раціонального вибору невідомої, а іноді просто вказувати на можливість такого вибору.

Для прикладу розглянемо задачу, при розв'язанні якої стає зрозумілим, що при виборі основної невідомої величини не завжди корисно керуватися питанням задачі. Ця задача та її розв'язок належать Діофанту.

Задача. Знайти три числа так, щоб найбільше перевищувало середнє на одну третю найменшого; середнє було більше найменшого на одну третю найбільшого; найменше – на 10 більше одної третьої середнього.

Якщо в задачі позначити одне з чисел через x, а інші виразити через нього, то отримується рівняння , хід складання і розв'язання якого будуть дещо громіздкими.

А якщо покласти, що найменше число дорівнює x+10, тоді середнє стає рівним 3x. Так як середнє дорівнює найменшому плюс одна третя більшого, то одна третя більшого дорівнює середньому без меншого, тобто 2x-10. Звідси більше дорівнює 6x-30. Але більше дорівнює середньому плюс одна третя меншого, тобто одна третя меншого дорівнює більшому без середнього, або 3x-30. Значить, найменше дорівнює 9x-90, звідки отримуємо рівняння: x+10=9x-90.

Ця задача досить складна і може бути розглянута тільки на факультативі, але вона ясно показує, що раціональний вибір невідомого часто вимагає винахідливості та кмітливості

.

Дуже часто в учнів виникають труднощі при складанні рівнянь, коли зв'язок між значеннями деякої величини виражається словами: більше, вище, дорожче, менше, легше, дешевше і т. д. В умовах деяких задач подаються прямі вказівки на рівність значень будь-якої величини: рівні відстані, зошитів стало порівну і т. д. В цих випадках складання рівняння дуже легко усвідомлюється. Але часто в умові задачі вказівки на рівність значень величин даються словесними виразами, в яких відсутній термін дорівнює. В цьому випадку і виникають деякі труднощі. Тому потрібні вправи по перефразуванню подібних задач. Так, замість пройшли ту ж саму відстань можна сказати, що відстань, яку пройшли, дорівнює відстані … і т. д.

Після того, як було складене та розв'язане рівняння, треба зробити перевірку коренів рівняння за змістом задачі. Не обов'язково розв'язок рівняння є розв'язком самої задачі. Треба перевіряти, чи задовольняють корені рівняння умові та вимогам задачі із урахуванням усіх обмежень для значень величин, з якими доводиться зустрітися у ході даної перевірки. Тільки після цього задачу можна вважати розв'язаною.

У багатьох випадках невідповідність кореня рівняння змісту задачі стає очевидною по закінченню розв'язання рівняння. Наприклад, якщо значення невідомої х, яка входить в рівняння по змісту задачі, повинно виражати кількість людей, то її значення $x=2,7$, являючись навіть коренем рівняння, не є розв'язком задачі. В таких випадках достатньо такої перевірки: при значенні невідомого, рівному кореню рівняння, обчислювати по порядку значення величин, які входять у задачу. Якщо значення деякої величини буде за межами її допустимих значень за змістом задачі, то даний корінь не може служити розв'язком задачі. Корінь рівняння буде розв'язком задачі, якщо він задовольняє обмеженням значень усіх величин, які введені в задачу.

В свій час багато розмов було про доцільність перевірки при розв'язуванні текстових задач методом рівнянь. В. Г. Болтянський в своїй статті (в журналі "Математика в школі" за 1971 рік) підкреслює, що перевірка обов'язково повинна завершувати розв'язання текстової задачі на складання рівнянь. "Перевірка розв'язання за змістом задачі – необхідний елемент розв'язання. Її нічим неможна замінити і тим більш відмінити". Просто іноді вчитель може дозволити не робити перевірки, попередивши, що її необхідно то взагалі робити, але зараз не будемо витрачати час. Це – питання методики і педагогічного такту вчителя.

Всяке рівняння, як відомо, виражає залежність між деякими величинами або їх частковими значеннями. Всіх видів функціональної залежності є нескінчена множина, значить, і типів задач на складання рівнянь – необмежене число. Завдання методики – виявити при цій різноманітності методи, спільні для всієї множини, диференціювати питання про складання рівнянь так, щоб кожна частина мала свої конкретні, строго обмежені цілі, ясні і доступні кожному початківцю. З'єдналя цих частин в єдине ціле дасть загальний план (правило-орієнтир) складання рівнянь. У відповідності з планом необхідно встановити певну форму записів, яка підкреслює та підсилює цей план.

ВИКОРИСТАННЯ НАОЧНОСТІ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ

Усі математичні поняття є

поняття абстрактні. Ця абстракція
виникає як наслідок абстрагування
речей, матеріального оточення, яке ми
сприймаємо органами чуття. Тому
наочність при викладанні математики
є необхідним матеріалом для формування
математичних понять.
Г. Ф. Олійник

Наочність допомагає створенню у учнів просторової уяви і розвиває конструктивні здібності. Наочність також допомагає розвивати і деякі практичні навички учнів. Велике місце наочність займає при графічному зображенні залежності між величинами.

Починаючи з початкових класів дітей вчать аналізувати задачу із широким застосуванням засобів наочності. У підручниках для молодших класів умови багатьох задач подаються за допомогою картинок.

Поступово іде перехід до представлення умов задач за допомогою таблиць, графіків і т. д. Графічний запис умови задачі на рух, на порівняння величин значно полегшує аналіз змісту та вибір шляху розв’язання. Ілюстрації та додаткові підмальовки (стрілки, знаки, символи і т. д.) сприяють більш виразному зіставленню відношень між частинами задачі, зв’язків між величинами, порядком цих зв’язків і часто приводять безпосередньо до бажаного результату. Наприклад:

а)

Ціна одного предмету	Число предметів	Вартість
8 грн. 3 грн.	4 x	 50 грн.

б)

Було – x м
Відрізали – по 8 м
2 рази
Залишилось – 7 м

Всі такі форми запису називаються схемами задачі. Навички у складанні схем задач за їх умовами, а також в складанні задач за готовими схемами повинні закріплюватись та розвиватись упродовж всього курсу математики.

Схематичний (табличний) запис умови задачі сприяє формуванню вмінь складати вирази, які входять у рівняння. Наприклад, якщо в задачі задіяні швидкість, час та відстань, то для розв’язання таких задач дітям потрібно вміти вільно знаходити значення однієї величини за заданими значеннями двох інших. І тут на перших порах важливу роль грає табличний запис умови задачі.

Задача. Дві команди лижників йшли на зустріч одна одній з однаковою швидкістю. Перша команда пройшла до зустрічі 36 км за 4 години, а інша 18 км.Скільки часу була в дорозі друга команда?

Таблично умову цієї задачі можна записати так:

Швидкість	Час	Відстань

Однакова	4 години х годин	36 км 18 км

Як можливо виразити швидкість команд через відстань та час?

I – 36 : 4 (км за год)

II – 18 : х (км за год)

Знаючи, що швидкості команд однакові, можна скласти рівняння: 18 : х = 36 : 4.

Взагалі, схеми грають велику роль у начанні розв'язуванню задач. Аналіз складної задачі можливий лише при достатньо високому рівні розвитку аналітико-синтетичного мислення. Вміння користуватися аналізом та синтезом повинно розвиватися із використанням цих методів дослідження у простих життєвих ситуаціях. Щоб учень міг усвідомити, наскільки вдало він використовує ці методи в конкретних умовах, йому потрібно бачити весь процес дослідження. Схема (таблиця) задачі якраз і дає таку видиму модель результатів розумової роботи, на якій проявляються у єдності та взаємозв'язку складові частини задачі. Таблиця є засіб, знаряддя мислення при розчленуванні задачі на важливі складові частини, а також і при синтезі цих частин, необхідному для складання рівняння. Кожен рядок таблиці за своїм змістом є логічна цілісна частина задачі. За своєю психологічною дією частина таблиці є сигналом для мислення, який вказує на те, що окрема частина роботи вже виконана, етап пройдений, і можна подумати про те, що зроблено і що потрібно зробити далі. В закінченному вигляді таблиця дає можливість охопити одним поглядом співвідношення між елементами всієї задачі, побачити задачу з метою пошуку її розв'язання.

Психолого-педагогічна цінність схем (таблиць) дуже велика. Коли учень не знає методу чи способу розв'язання всієї задачі, то часто він починає розв'язувати часткові, більш прості задачі вважаючи, що прийде думка про розв'язання даної важкої задачі. При цьому табличний запис полегшує відбір з ряду часткових задач тих, які потрібні для розв'язання даної задачі. Таблиця, схема набагато простіша і легша для дітей, ніж текстове пояснення ходу розв'язання задачі.

Різні варіанти схем однієї і тієї ж задачі допомогають учню зрозуміти, що можливі різні шляхи руху думки – більш або менш складні – до загального результату.

Складати схему або таблицю тоді, коли учні можуть обійтись і без неї, зрозуміло, не слід. Значення схем в тому і полягає, щоб підготувати учнів до логічного виконання аналізу задачі.

МЕТОД РІВНЯНЬ ПРИ РОЗВЯЗУВАННІ ЗАДАЧ З ФІЗИЧНИМ ЗМІСТОМ

Міркування при складанні рівнянь
потребує від учнів …вміння читати алгебраїчні
формули, розуміти їх і записувати за допомогою
алгебраїчних виразів основні функціональні
залежності. Ці залежності можуть бути
чисто математичними, …, а можуть бути
залежності, які відносяться до інших, відмінних
від математики областей знань або практики…
Є. Березанська

Дуже часто на уроках фізики учні не можуть виразити різні величини з заданих формул, в той час як на попередньому уроці математики вони справлялися із знаходженням невідомих компонентів. Вивчення цього явища привело до висновку, що деяка частина учнів психологічно пов’язує вивчений матеріал не тільки з предметом, на якому цей матеріал вивчається, а і з учителем, який навчає цій дисципліні. Тому вчителям, які користуються математичними розрахунками, треба на своїх уроках самим роз’ясняти учням особливості застосування математичного апарату у даній дисципліні, пов’язуючи математичні терміни і символи з термінами та символами іншої дисципліни. А вчителям математики, необхідно в свою чергу, давати математичне тлумачення символів із інших дисциплін.

Вчителі математики в ряді випадків з успіхом можуть використовувати розв’язування задач з фізичним змістом для вивчення теоретичних питань математики. Природньо, що підхід до розв’язання задач на уроках фізики буде дещо іншим, ніж на уроках математики. Вчителя фізики буде цікавити більше фізична суть задачі, а вчителя математики – математичне відображення фізичних процесів. Для користі справи вчителю математики доцільно розглядати функціональні залежності між фізичними величинами, а вчителю фізики використовувати математичний апарат для осмислення і дослідження фізичних процесів та явищ.

Наприклад, вивчаючи квадратні рівняння, вчитель математики може використати з фізики формулу рівноприскореного руху: , і повідомити учням, що рівноприскорений рух описується квадратним рівнянням, де роль змінної відіграє час руху. Вчитель фізики, аналізуючи формули, що містять ті чи інші величини у другій степені, може показати учням, що даний вираз являє собою квадратне рівняння і тому розв’язується і досліджується так, як розв’язується і досліджується квадратне рівняння в математиці.

Всяку формулу в фізиці слід тлумачити як рівняння, в якому в якості невідомого можна взяти будь-яку із фізичних величин, крім тих, які виражають константи або постійні величини в даному процесі.

Досить доцільно для поглиблення міжпредметних зв’язків на уроках математики при розв’язуванні задач з фізичним та технічним змістом частіше використовувати форми записів, які застосовуються вчителями фізики.

Досвід показує, що учні часто не вміють розв’язувати задачі тому, що “не вчитуються” в умову задачі, не знають, як читати задачу, як її аналізувати. Наступною причиною незадовільного розв’язування задач з фізичним змістом є те, що учні не вміють виявляти в змісті задачі ті залежності, які описуються в тексті, ті закономірності, яким підкоряються описані в тексті процеси або явища, і вибирати відповідні формули. Це означає невміння виділити і сформулювати математичну основу для розв’язання задачі. Іноді формули, необхідні для розв’язання задачі, не засвоєні учнями, а іноді учні знають їх, але не розуміють необхідності використання їх в даній задачі. Виходячи з цього, важливо направити зусилля учнів при розв’язуванні задач на шлях математичного тлумачення фізичних термінів, на математичний запис усіх формул, пов’язаних з процесами, які описуються в задачі. З часом такий підхід навчить учнів вибирати відповідну формулу для розв’язання задачі з меншою затратою сил та часу. Важливо, щоб перед учнями завжди стояли питання про те, які фізичні закономірності описуються в задачі, якими формулами ці закономірності виражаються.

Невміння учнів розглядати фізичні формули з позицій функціональної залежності і рівняння, проводити смисловий аналіз одержаних результатів також є однією з причин незадовільного розв’язування задач з фізичним змістом. Тому важливо систематично виробляти в учнів уміння і навички в проведенні смислового аналізу розв’язання задачі, смислового аналізу формул, спрямованого на встановлення допустимих значень величин, які входять в формулу, на можливі оригінальні значення цих величин.

При розв’язуванні складних задач корисні підготовчі вправи. Доцільно систематично тренувати учнів в читанні і записуванні математичних виразів, що містять фізичні величини. Наведемо декілька прикладів таких вправ.

Записати формулу шляху рівномірного руху, прочитати її з погляду функціональної залежності і виразити кожну величину, що входить в формулу, через інші.

Записати формулу швидкості рівноприскореного руху і прочитати її з погляду функціональної залежності між величинами, що в неї входять. Виразити кожну величину через інші.

Записати закон Ома для повного кола постійного струму. Виразити кожну з величин, що входять в закон, через інші.

При розв’язуванні задач з фізичним змістом доцільні два підходи у відношенні дій з величинами, що мають певні одиниці вимірювання. В першому випадку в формули підставляють тільки значення величин, а одиниці вимірювання (найменування) ставлять тільки у відповіді. В другому випадку у формули разом із числовими значеннями величин записують і їх одиниці вимірювання. Практика показала, що в задачах з невеликою кількістю величин, які входять в одну і ту ж формулу, доцільно використовувати перший прийом. При розв’язуванні складніших задач перевагу слід віддавати другому прийому, який одночасно є і перевіркою правильності аналітичного розв’язання.

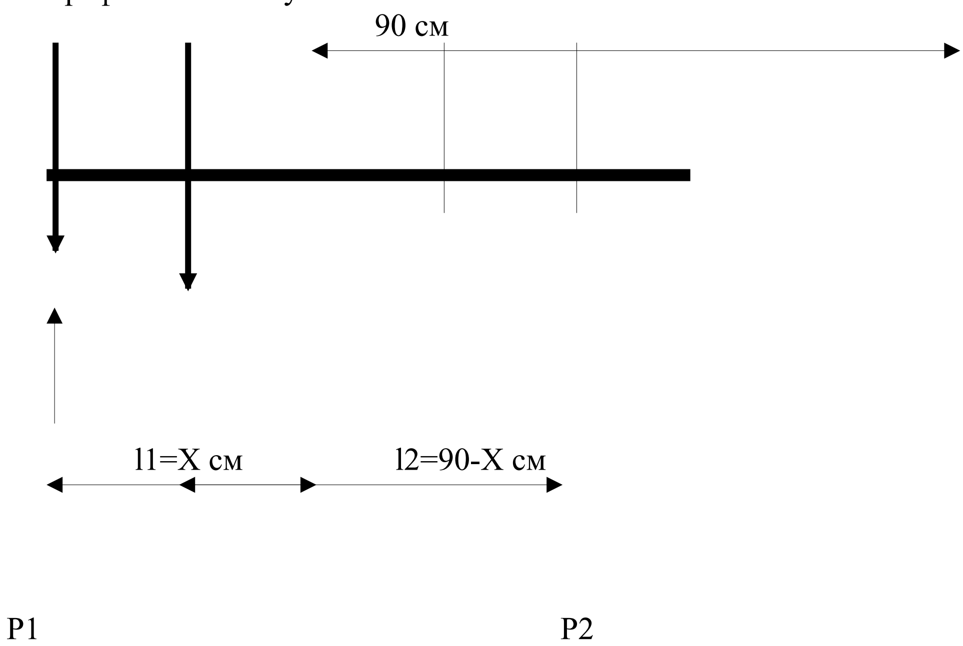
Розглянемо приклад розв’язання задачі із фізичним змістом.

Задача. На важіль, що знаходиться у рівновазі, діють дві сили величиною 8 і 10 Ньютон. Віддаль між точками прикладання сил дорівнює 0.9 м. Знайти довжину плеч важеля , якщо напрям сил однаковий.

I. Аналіз та запис умови: досліджується рівновага важеля. Процесів два: дія першої сили і дія другої сили. Величини: перша сила P1, відповідне їй плече l1, друга сила P2, відповідне їй плече l2.

Формула залежності $P1 \cdot l1 = P2 \cdot l2$

Графічний запис умови:



II. Основа для рівняння: умова рівноваги важелів

$P1 \cdot l1 = P2 \cdot l2$.

III. Рівняння: $8 \cdot X = 10(90-X)$.

IV. Розв’язання рівняння: X=50 см, тобто l1=50 см.

Тоді l2=90-50=40 см.

V. Перевірка розв’язання: $8 \cdot 50 = 10 \cdot 40$. (вірно)

VI. Відповідь: $l_1=50$ см; $l_2=40$ см.