НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені М.П. ДРАГОМАНОВА

На правах рукопису

ТРУНОВА Олена Василівна

УДК 373.5.016: 519.2

НАВЧАННЯ ПОЧАТКІВ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І ВСТУПУ ДО СТАТИСТИКИ В ЛІЦЕЯХ І КЛАСАХ З ПОГЛИБЛЕНИМ ВИВЧЕННЯМ МАТЕМАТИКИ

13.00.02 – теорія та методика навчання математики

Дисертація на здобуття наукового
ступеня кандидата педагогічних наук

Науковий керівник –
Слєпкань Зінаїда Іванівна,
доктор педагогічних наук, професор

Київ - 2007

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. У останній редакції Закону України „Про освіту" і Національній доктрині розвитку освіти України у XXI столітті визначено напрямок розвитку національної системи освіти в країні, спрямований на підвищення інтелектуального потенціалу нації, виховання творчої особистості, здатної до активної участі в розбудові української держави. Навчання повинно будуватися так, щоб його зміст і методи визначалися сучасним і майбутнім рівнем науки. [94, 139]

Вивчення математики в сучасних умовах набуває особливої актуальності. Зумовлено це тим, що все більше спеціальностей потребують застосувань математичних знань, практичних навичок і умінь високого рівня. Розбудова національної школи України включає в себе удосконалення математичної освіти, основними напрямками якої є оновлення змісту і технології навчання математики. Особистісно орієнтоване навчання, рівнева і профільна диференціація, які ґрунтуються на розробках стандартів математичної освіти, є основою для створення умов досягнення кожним учнем достатнього рівня математичних знань і умінь, загального та математичного розвитку.

Сучасне і насамперед майбутнє суспільство наполегливо вимагає від працівників знань основ математичного аналізу, математичної логіки, теорії ймовірностей, інформатики, статистики.

Учні, які зацікавлені математикою, можуть одержати сучасну підвищену і поглиблену підготовку в основному в школах і класах з поглибленим її вивченням та в школах нового типу, де передбачається високий рівень математичної підготовки для здібних та обдарованих дітей (гімназіях, ліцеях, профільних класах різного спрямування), які набули останнім часом поширення в Україні. Ефективну діяльність таких шкіл і класів можна забезпечувати лише за умови: розробки відповідної методичної системи навчання, зокрема уточнення цілей, завдань і змісту навчання; наявності сучасних підручників для учнів і методичних посібників для вчителів з математики та інформаційних технологій.

Сучасна реформа математичної освіти в школі привела до появи в навчальних програмах відносно нових змістових ліній: "Елементи теорії множин. Комбінаторика", "Початки теорії ймовірностей і вступ до статистики". Із введенням стохастичної лінії ставляться за мету вимоги, що стосуються вмінь аналізувати випадкові фактори, оцінювати ймовірність, висувати гіпотези, прогнозувати розвиток ситуації і, нарешті, приймати рішення в ситуаціях, які мають імовірнісний характер. А це передбачає формування ймовірнісно-статистичних уявлень, знань, умінь і розвитку мислення учнів. Вивчення нових для школи тем сприяє реалізації прикладної спрямованості навчання математики.

Якщо до введення нового освітнього стандарту, початки теорії ймовірностей і вступу до статистики розглядалися тільки в класах і школах з поглибленим вивченням математики, то в сучасний період вони стали базовими знаннями і уміннями для учнів. Разом з тим, зазначені теми найменше розроблені в методиці навчання математики і не забезпечені досвідом учителів незважаючи на тривалу історію їх упровадження в шкільному курсі математики.

Так, не визначена в повній мірі структура теоретичного матеріалу і практичних умінь в умовах диференціації навчання в школах нового типу, не розроблена методика формування знань і вмінь у процесі вивчення початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в ліцеях і класах з поглибленим теоретичним і практичним вивченням математики, не створені сучасні навчальні посібники з початків теорії ймовірностей і вступу до статистики для зазначених класів різного профілю, не розроблена на рівні сучасних вимог система задач з прикладною спрямованістю, не досліджувалося питання наступності між основною і старшою школою, існує мало методичних посібників для вчителів із зазначених тем. Перелік невирішених і недостатньо вирішених питань можна було б продовжувати з огляду на те, що проблема вивчення початків теорії ймовірностей і вступу до статистики є багатоаспектною.

Тому одна із актуальних на сьогодні **проблем** полягає в тому, щоб, враховуючи сучасний розвиток математики та методики навчання математики, через призму прикладної і диференційованої спрямованості навчання, виходячи із специфіки початків теорії ймовірностей і вступу до статистики, розкрити можливості ефективної реалізації підвищеної і поглибленої математичної підготовки учнів загальноосвітніх та профільних шкіл, розвитку їхніх математичних здібностей, зокрема необхідних для успішного навчання у ВНЗ за різними спеціальностями, пов'язаними з математикою.

Вище названі чинники зумовили вибір теми нашого дослідження "Навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики".

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Напрям дисертаційного дослідження пов'язаний з держбюджетною темою науково-дослідної роботи кафедри математики і методики викладання математики Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова „Розробка науково-методичної системи математичної підготовки учнів середніх закладів освіти в умовах впровадження освітніх стандартів" (номер державної реєстрації 0198 №001666), яка виконувалась у 1999-2001 рр. і є її безпосереднім продовженням.

Тему дисертаційного дослідження затверджено Вченою радою Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова (протокол №4 від 29 листопада 2001р.) та узгоджено в Раді з координації наукових досліджень у галузі педагогіки і психології в Україні (протокол №1 від 29 січня 2002р.).

Об'єктом дослідження є процес навчання математики в ліцеях і класах з поглибленим її вивченням.

Предметом дослідження є методична система навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в умовах особистісно орієнтованого навчання, зокрема рівневої і профільної диференціації.

Мета дослідження полягає в уточненні цілей і змісту, розробці найбільш ефективних, методів, форм і засобів навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики на сучасному етапі розбудови освіти в Україні.

Гіпотеза дослідження. Якщо уточнити цілі, завдання та зміст, розробити ефективні форми, методи і засоби навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики, орієнтовані на розв'язування прикладних задач, враховуючи сучасні технології навчання та інформаційні технології, то можна забезпечити той рівень математичної підготовки із зазначених тем, який вимагається нормативними документами.

Мета і предмет та висунута гіпотеза дозволили визначити **основні завдання** дослідження:

1) проаналізувати психолого-педагогічну, навчальну, математичну і методичну літературу, яка має відношення до проблеми дослідження та вивчити сучасний стан навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики;

2) виявити психолого-педагогічні передумови та методичні вимоги до структури змісту теоретичного матеріалу та системи задач з початків теорії ймовірностей і вступу до статистики;

3) розробити компоненти методичної системи навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в ліцеях і класах з поглибленим теоретичним і практичним вивченням математики;

4) експериментально перевірити ефективність розробленої методичної системи та внести необхідні корективи в методичні рекомендації.

Методологічна основа дослідження: теорія пізнання, діяльнісна концепція навчання, системний, комплексний, диференційований та особистісно-орієнтовані підходи (П.Я. Гальперін [43], В.В. Давидов [68], З.І. Калмикова [100], З.І. Слєпкань [185] та ін.), теорія проблемного та розвивального навчання (В.В. Давидов [68], Л.В. Занков [142], Є.М. Кабанова-Меллер [98], І.С. Якиманська [235] та ін.), принцип наступності у процесі навчання (П.П. Блонський [16], О.С. Дубинчук [78], Г.С. Костюк [111], О.М. Леонтьєв [122], В.О. Сухомлинський [195], А.М. Фрідман [220] та ін.), психологічні теорії стохастичного мислення (Т. Варга [28], Л.С. Виготський [39], А. Енгель [238], Б.В. Гнєденко [54], С.Л. Рубінштейн [172] та ін.), стохастичні уявлення (Д. Грін [239], Б. Інельдер [151], Ж. Піаже [150], А.А. Пінський [152], О.С. Шуригіна [231], Е. Фішбейн [244] та ін.), результати досліджень з проблеми навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики (К.Р. Велскер [35], Б.В. Гнєденко [59], А.Я. Дограшвілі [74], М.В. Єремєєва [82], А.В. Колмогоров [105], К.Н. Куриндіна [120], Д.В. Маневич [129], В.Д. Селютін [179] та ін.), принцип прикладної спрямованості (А. Плоцкі [157], В.В. Фірсов [216] та ін.), положення методики математики про роль задач та їх функції у навчанні математики, методики їх розв'язування (Г.П. Бевз [15], М.І. Бурда [24], Г.В. Дорофєєв [75], Д. Пойя [159], З.І. Слєпкань [184] та ін.), наукові здобутки з методики навчання математики та сучасні концепції комп'ютерної підтримки навчального процесу (Ю.К. Бабанський [12], Ю.В. Горошко [164], М.І. Жалдак [88], Г.О. Михалін [87], М.І. Шкіль [228] та ін.), Закон України „Про освіту", Державна національна програма „Освіта" (Україна XXI століття), Національна доктрина розвитку освіти України у XXI столітті, Концепція шкільної математичної освіти в Україні, Державний стандарт базової і повної середньої освіти в Україні (Освітня галузь „Математика").

Для досягнення мети і розв'язання поставлених завдань були використані такі науково-педагогічні методи дослідження:

теоретичні: системний і порівняльний аналіз психолого-педагогічної і науково-методичної літератури з проблем дослідження (1.1-2.3 (тут і далі підрозділи дисертації)); аналіз програм, підручників і навчальних посібників (1.3); порівняння, узагальнення і систематизація науково-теоретичних положень (1.1-2.3); моделювання педагогічних процесів (2.2-2.3), обробка результатів педагогічного експерименту методами математичної статистики (2.5).

емпіричні: діагностичні (анкетування, тестування, бесіди з учителями, учнями та викладачами вищих навчальних закладів) (1.3,1.4,2.4-2.5), обсерваційні (спостереження навчального процесу у ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики, аналіз уроків, письмових робіт учнів, результатів вивчення рівня знань і умінь школярів органами освіти, узагальнення передового педагогічного досвіду) (1.3,2.4-2.5); експериментальний (організація і проведення констатуючого, пошукового і формуючого експерименту) (2.5).

Наукова новизна дослідження полягає в теоретичному і експериментальному обґрунтуванні методики навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики, в умовах рівневої і профільної диференціації, яка забезпечує формування стохастичного мислення учнів через моделювання стохастичних явищ, в основі яких лежать імовірнісно-статистичні задачі прикладного змісту.

Теоретичне значення дослідження полягає у виділенні психолого-педагогічних і методичних передумов, уточненні змісту навчання, визначенні цілей і завдань, доборі методів, організаційних форм та засобів навчання та контролю успішності учнів, що сприяють поглибленому вивченню початків теорії ймовірностей і вступу до статистики з урахуванням потреб рівневої і профільної диференціації.

Практична значимість результатів дослідження визначається тим, що:

- впровадження в практику розробленої методичної системи навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики буде сприяти підвищенню ефективності вивчення нової змістової лінії і шкільної математики в цілому, загальному та математичному розвитку учнів;
- підготовлені методичні рекомендації та дидактичні матеріали допоможуть організувати на належному рівні вивчення теоретичного матеріалу і процес

формування вмінь розв'язувати ймовірнісні задачі, в тому числі і прикладного змісту;

- розроблені дидактичні матеріали забезпечать організацію контролю рівня успішності та математичного розвитку учнів ліцеїв і класів з поглибленим вивченням математики.

Апробація положень дисертації. Розроблена в дисертації методика навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики була апробована в школах №3 (довідка № 01-44-02 від 29.05.07р.), школі з поглибленим вивченням математики №12 (довідка № 01-44-95 від 27.04.07р.), ліцеї №15 (довідка № 242 від 29.05.07р.), військовому ліцеї м. Чернігова (довідка № 566 від 30.05.07р.); гімназії м. Козелець Чернігівської області (довідка № 01-44-80 від 24.05.07р.); ліцеї м. Славутича Київської області (довідка № 01-44-82 від 25.05.07р.).

Основні результати дослідження доповідались, обговорювались і знайшли схвалення у період з 1999 по 2005 роки на конференціях, семінарах, нарадах різного рівня, зокрема на Всеукраїнській конференції „Актуальні проблеми вивчення природничо-математичних дисциплін у загальноосвітніх навчальних закладах України" в м. Києві 1999р.; на Всеукраїнській науково-практичній конференції „Проблеми вищої педагогічної освіти у світі рішень II Всеукраїнського з'їзду працівників освіти і виступу президента Л.Д. Кучми" в м. Києві 2003р; на Всеукраїнському методичному семінарі „Актуальні проблеми навчання математики" в НПУ імені М.П. Драгоманова (м. Київ 2004р.); на науково-практичних конференціях НПУ ім. М.П. Драгоманова (2001р.); на VIII, IX, X Міжнародній конференції імені академіка М.Кравчука (м.Київ, 2001, 2004, 2005 рр.); на Міжнародній науково-методичній конференції „Евристичне навчання математики" (м. Донецьк, 2005р.); на курсах підвищення кваліфікації вчителів м. Чернігова (2003 р.).

Особистий внесок здобувача полягає у формуванні та реалізації конкретних завдань дослідження, власному підході до проблеми, розробці окремих компонентів методичної системи навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики, одноосібній розробці методичних рекомендацій, апробованих у процесі педагогічного експерименту.

Вірогідність і обґрунтованість одержаних у ході дослідження наукових результатів і висновків дисертації забезпечується опорою на вихідні положення психолого-педагогічних і методичних досліджень, методологічну основу, відповідністю методів педагогічного дослідження його меті і завданням, кількісним та якісним аналізом значного обсягу теоретичного та емпіричного матеріалу, репрезентативністю та повнотою результатів педагогічного експерименту.

Основні результати дисертації опубліковані в 11 роботах: у навчальному посібнику [209], статтях у наукових виданнях [202, 206, 207, 208], у тезах наукових конференцій [199, 200, 201, 203, 204, 205].

Структура дисертації. Дисертація складається зі вступу, двох розділів, загальних висновків, списку використаних джерел (245 найменуваннь) та додатків. Обсяг основного тексту становить 183 сторінки і містить 18 ілюстрацій і 12 таблиць, обсяг додатків - 27 сторінок, 2 схеми .

РОЗДІЛ 1. ПРЕДМЕТ І ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ПРОБЛЕМИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Мета і завдання навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в ліцеях та класах з поглибленим вивченням математики в умовах диференціації навчання

У проекті „Концепції математичної освіти 12-річної школи" значення математичної освіти обумовлюється тим, що якість підготовки з математики - це індикатор готовності суспільства до соціального і економічного розвитку, його мобільності в освоєнні і впровадженні високих технологій. Математична освіта важлива складова загальноосвітньої підготовки. Місце математики в системі шкільної освіти визначається її роллю в інтелектуальному, соціальному, моральному розвитку особистості, в розумінні будови і використання сучасної техніки, інформаційних технологій, формуванні наукової картини світу і сучасного світогляду. Математика – один з опорних предметів природничого наукового циклу [109].

На сучасному етапі розвитку суспільства приоритетною є особистісна орієнтація освіти, яка передбачає рівневу і профільну диференціацію навчання, однаково рівний доступ до якісної математичної освіти, створення реальних умов для інтелектуального, соціального і морального розвитку особистості, посилення практично-діяльнісної і творчої складових у змісті математичної освіти.

Ефективність інтелектуального розвитку учнів у нових типах шкіл досягається завдяки диференціації та індивідуалізації навчання. С.У.Гончаренко визначає диференційоване навчання (від лат. *difference* – різниця) як розподіл навчальних планів і програм у старших класах середньої школи. Диференційоване навчання може будуватися як за науково-теоретичними профілями (фізико-математичні, хіміко-біологічні, економічні та ін.). Комплектування школи за напрямками чи профілями здійснюється згідно з нахилами та інтересами учнів [61]. У практиці навчання існують два основних види диференціації: рівнева (за здібностями учнів) і профільна (типи навчальних закладів, профілі навчання).

Учень за порадами дорослих обирає тип навчального закладу (клас, школу, гімназію, ліцей, колегіум, і т.п.) і тим самим визначає стратегію свого інтелектуального, творчого розвитку. Згідно з положенням про мережу навчальних закладів кожен з них має свою особливу мету діяльності [145, с.64]. Тенденція позитивного впливу типу закладу на стратегічний розвиток особистості міцніє і в цілому прогресує. Щоправда і досі типи закладів остаточно не диференціювались і учень із загальнокультурними, гуманітарними здібностями, обравши гімназію, потрапляє у математичний клас.

У ліцеях профільне навчання починається з 5 класу. Так зручно для педагогів, але дуже шкідливо для учнів, особливо обдарованих [145]. Підлітковий вік – вік опанування основами наук з орієнтацією на інтереси особистості. А вже на основі цього фундаменту, з 8-9 класу може, будуватися профільне навчання.

Тільки у разі правильного вибору профільного навчання ефективно відбувається інтелектуальний розвиток, вірніше, не гальмується.

Ідея створення фізико-математичних шкіл і інтернатів була висунута провідними вченими СРСР, серед яких були М.А.Лаврентьєв, А.М.Колмогоров, С.Л.Соболєв та інші.

При цьому ставилося декілька цілей:

1. Дати можливість школярам розвинути свої здібності, використовуючи великий потенціал наукових центрів, особливо це важливо для школярів із сіл, невеликих міст, райцентрів.
2. Дати вже зі шкільної лави відчутні уявлення про спеціальність дослідника і тим самим підвищити ефективність підготовки наукових кадрів.
3. Провести педагогічний експеримент щодо напрацювання нових методів навчання, який найбільш відповідає вимогам сучасності [174].

Класи з поглибленим вивченням математики є майже в кожному районі великих міст і районних центрах усіх областей України, школи з поглибленим вивченням математики в основному в обласних центрах.

Ліцей (грец. Λύχειον) - колишня назва гаю біля храму Аполлона поблизу Афін, де Аристотель (384-322рр. до н.е.) навчав своїх учнів; в царській Росії – привілейований тип навчального закладу для майбутніх державних чиновників. Сьогодні ліцеї повинні готувати своїх випускників до активної науково-технічної і виробничо-економічної діяльності в провідних, найбільш складних інтелектуальних галузях народного господарства. В Україні є свій досвід у функціонуванні шкіл-ліцеїв із фізико-математичною спеціалізацією. Це спеціалізована школа-інтернат фізико-математичного профілю в м. Києві (з 1992р. Український фізико-математичний ліцей). В ньому навчаються обдаровані учні, відібрані на конкурсній основі з усіх областей України. Поряд з ним працюють ліцей «Лідер» м. Києві, Рішельєвський ліцей в м. Одесі та інші. У кожному обласному центрі існує ліцей. Так в м. Чернігові функціонують три ліцеї з поглибленим вивченням математики.

Головна мета закладів нового типу – забезпечити широку загальноосвітню підготовку учнів, реалізувати індивідуальні творчі здібності, підготовити до вступу у вищі навчальні заклади.

Найактуальнішою проблемою освіти є добір її змісту. Традиційний зміст забезпечував досить високий рівень математичної підготовки учнів. Але зміни в галузі техніки, виробництва, освіти, комунікацій ставлять нові вимоги до математичної підготовки професійних кадрів і підводять до переосмислення традиційного змісту, з'ясування тенденцій подальшого його розвитку з дотриманням наступності. При цьому дедалі зростає роль формально-логічного апарату математики, алгоритмів і евристик, математичного моделювання, статистико-імовірнісних методів в економіці, менеджменті, управлінні високоточними технологічними процесами.

Основою нової філософії шкільної математичної освіти є відповідність змісту навчання суспільно-економічним запитам суспільства і запитам особистості.

Одна з найбільш очевидних загальних тенденцій сучасної математики та її застосування виявляються в стрімкому підвищенні значення теорії ймовірностей та математичної статистики, які аналізують явища, що мають „випадковий” характер. Справа в тому, що поняття випадкової події та її ймовірності відіграє важливу роль практично у всіх галузях науки і практичної діяльності людини. Імовірнісно-статистичний стиль мислення, знання з теорії ймовірності і статистики потрібні вченому, інженеру, економісту, менеджеру, соціологу, лікарю, військовому та іншим спеціалістам.

Такий небувалий підйом теорії ймовірностей та математичній статистиці пророкував великий український математик М.В.Остроградський. Починаючи сьогодні вивчати теорію ймовірності в загальноовітніх закладах освіти, слушно було б урахувати поради мудрого педагога [93]:

1. Щоб навчання було дійовим і привабливим, необхідно “зацікавити дитячий розум…”
2. Необхідно теорію ймовірностей не лише викладати “як науку абстрактну, а й переходити якомого частіше до різноманітних її застосувань”.
3. Навчання має поєднуватися з вихованням спостережливості, уваги.

Все більш зростаючі можливості застосування методів теорії ймовірності і статистики викликають і нові вимоги до навчання молоді основ цієї науки.

Особливо великі можливості у відношенні проблеми навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики пов’язані з вивченням у школі конкретних застосувань математики. Саме вони дають розвиток системи підвищеної математичної підготовки учнів, яка б забезпечувала у школі багатий запас безпосередніх практичних ілюстрацій курсу математики. Це один з найкращих каналів для проникнення прикладного змісту в середню освіту. Теоретичне обґрунтування важливості вивчення прикладної математики в рамках поглибленого навчання математики обґрунтовано Шварцбурдом С.І. [216].

Розвиток теорії ймовірностей і розширення сфер її застосувань, впливає на формування ймовірнісно-статистичної лінії при вивченні багатьох предметів, насамперед математики, вже протягом понад століття. Історичні аспекти введення початків теорії ймовірностей та вступу до статистики в шкільне навчання в Європі та на пострадянській території докладно розглядалися в дисертаційному дослідженні К.Р. Велскера [35]. Ще у царський Росії неодноразово робилися спроби включити теорію ймовірностей до шкільного курсу.

Пропозиції щодо необхідності включення початків теорії ймовірностей у шкільні програми з математики висловлювалися ще в XIX та на початку XX ст.. Цей матеріал, як і елементи статистики, вже тоді вивчався в школах різних країн Західної Європи, за виключенням Франції. Ці теми також вивчалися тоді в курсі алгебри російських шкіл, зокрема вони були включені в підручники Щеглова М.Т. [113] і Краєвича К.Д. [113]. Слід зазначити, що першим російським підручником з теорії ймовірностей була книга «Основи математичної теорії ймовірностей» (1846р.) академіка Петербурзької АН, почесного члена багатьох російських університетів і вчених товариств, українця за походженням В.Я.Буняковського. Крім оригінального викладу самої теорії ймовірностей праця містила історію виникнення і розвитку цієї науки, її застосування до страхування, демографії тощо.

В Україні професор Київського політехнічного інституту В.П.Єрмаков у 1878 р. видав перший український підручник з теорії ймовірностей. У 1896 р. для читачів, не обізнаних з вищою математикою, видається посібник М.М.Філіпова «Елементарна теорія ймовірностей».

На початку XX ст. у Росії, у зв’язку з міжнародним рухом за реформу шкільної математичної освіти, директор Урюпінського реального училища П.С.Фролов склав програму курсу теорії ймовірностей, а в 1907 р. разом з П.О.Некрасовим розробив проект програми з математики для гімназій, в яку було включено елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і статистики. Цей проект викликав жваву полеміку на I і II Всеросійських з’їздах викладачів математики (1912, 1913 рр.), але Міністерство народної освіти його не прийняло. Разом з тим таку пропозицію підтримувала значна частина передових учителів. 17 травня 1914 р. Міністерство торгівлі та промисловості затвердило програму з теорії ймовірностей для комерційних училищ, а в 1915 р. виходять два підручники за цією програмою. В Україні (Галичина) у 8-х класах гімназій починають вивчати комбінаторику, елементи теорії ймовірностей і статистику із застосуванням у теорії страхування життя.

У 20-30 рр. вивчення елементів теорії ймовірностей впроваджується в школах Франції, Англії, США, Австрії, Голландії, Швеції, Швейцарії, країнах Балтії. У Росії з 1919 р. елементи теорії ймовірностей були включені в програму єдиної трудової школи і вивчалися до 1935 р. У 1935 р. у програмі залишилася лише комбінаторика.

З кінця 50-х років у шкільній освіті починається другий період руху за реформу шкільної освіти. Більш гостро постає питання не лише про зміст, а й про методи навчання [186].

В цьому аспекті теми з теорії ймовірностей і статистики виявилися, безперечно в числі необхідних для включення в шкільну математику. Це відображалося не тільки в громадській думці, а й в рекомендаціях і резолюціях Міжнародних конференцій, конгресів, симпозіумів [91].

Результатом другого періоду руху за реформу шкільної освіти стала програма з математики, затверджена Міністерством освіти СРСР у 1968 році. Вона містила багато нових прогресивних ідей, поступове впровадження яких школою сприяло підвищенню загального рівня навчання, зміцненню зв’язків математики з життям і виробництвом. У програму були включені елементи теорії множин, поняття похідної, інтеграла з їх геометричним і фізичним змістом. Однак програма не містила початків теорії ймовірностей і вступу до статистики, які мають важливе загальноосвітнє і практичне значення. Елементи теорії ймовірностей були включені лише в програму факультативних занять, хоча в проекті даної програми йшла мова про вивчення елементів теорії ймовірностей у 9 класі. Але, враховуючи такі фактори, як відсутність на той час підручників, методичних посібників, відповідного досвіду вивчення цього розділу математики вчителями (більшість учителів середніх шкіл на той час не вивчали у вищій школі теорію ймовірностей, тим більше методику навчання цього розділу), вивчення елементів теорії ймовірностей було виключене з програми з математики у її другому остаточному проекті. У зв'язку з цим академік А.М. Колмогоров підкреслював: „Рішення про виключення із обов'язкової програми навіть самих початкових відомостей з теорії ймовірностей, мабуть, правильне з огляду на підготовленість нашої школи до їх введення. Але члени комісії були одностайні в співчуттях з приводу цього факту" [103].

За цей час склалася певна традиція навчання теорії ймовірностей, початковим моментом є попереднє знайомство з комбінаторними поняттями і твердженнями. Такий підхід застосовано у нових підручниках [5, 6]. Цей підхід є некоректним, оскільки спирається на некоректне класичне означення ймовірності. У світовій практиці існує інший підхід, введення поняття ймовірності аксіоматично, як імовірнісної міри. Його притримуються Жалдак М.І., Михалін Г.О. [87, 88]. Разом з тим у [87], [88] показується, що статистична ймовірність (відносна частота) має ті ж основні визначальні властивості, що і аксіоматично введена ймовірність, тому статистична ймовірність є ймовірнісною мірою, тобто ймовірністю. Статистична ймовірність вводиться не аксіоматично, вона набагато зрозуміліша і доступніша, учні з нею працюють свідомо. Тому пропонується вивчати не ймовірності, а статистичні ймовірності, здійснюючи тим самим пропедевтику до вивчення аксіоматичної побудови теорії ймовірностей. Наша робота ґрунтується саме на цьому підході.

Ці два підходи до вивчення теорії ймовірностей існували з її народження. Перший з них пов'язаний з теоретичним осмисленням азартних ігор, а другий бере свій початок від „наївних" статистичних методів. Отримавши міцну математичну базу і мову метричної теорії функцій, і сучасна теорія ймовірностей стала багатогранною математичною дисципліною, яка багата як теоретичною глибиною, так і практичним змістом.

Свого часу А.М.Колмогоров, даючи рекомендації учителям щодо вивчення факультативу з теорії ймовірностей, відзначав, що: “… є розумним почати безпосередньо з комбінаторних підрахунків кількості випадків, які сприяють тій чи іншій події. Такі задачі можуть бути… цікавими за змістом. Вони є гарною психологічною підготовкою до самого введення поняття ймовірності”. Далі він зауважив, що “…досить часто замість…”класичного” означення ймовірності доводиться використовувати “статистичне”. Але на перших кроках ознайомлення з теорією ймовірностей розумно поставитися з довірою до “класичного” означення. З точки зору чистої математики немає ніякої “нестрогості” [104]. Якщо математично обґрунтовано підійти, то так, проте, на жаль, в існуючих посібниках обґрунтованості немає, як і розумного ставлення.

Початки теорії ймовірностей і вступу до статистики – розділ, який є надзвичайно яскравим, цікавим і своєрідним. Він традиційно був складовою частиною програм факультативних курсів з математики, програм шкіл (класів) з поглибленим вивченням математики та спеціалізованих шкіл фізико-математичного профілю (1968-1969р.н.). У сучасний період вони стали базовими знаннями для учнів загальноосвітніх шкіл. На вивчення в звичайних класах початків теорії ймовірності відводиться 12 годин, а на вступ до статистики – 4 години. Зрозуміло, що за цей час ґрунтовно оволодіти знаннями і особливо уміннями за цією темою практично неможливо.

В ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики програма передбачає таку кількість годин: початки теорії ймовірностей – 25-30, елементи статистики – 10-12 годин. Це практично в 3 рази більше, ніж у звичайних класах. Тому постає питання: який зміст вкласти в цей відведений час? Досвід навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики, здобутий у школах з поглибленим вивченням математики, підтвердив той факт, що введення в традиційний курс математики нового ізольованого розділу програми, який відноситься до „чистої” теоретичної математики, вимагало від багатьох педагогів значних зусиль для його опанування і це призвело до того, що деякі з них взагалі виражають сумнів у тому, що його необхідно поглиблено вивчати. В пояснювальній записці до програми для класів з поглибленим вивченням математики підкреслюється, що вчитель може варіювати кількість годин, які відводяться для вивчення певної теми, доповнити зміст тем деякими додатковими теоретичними і практичними питаннями [166].

При доборі змісту навчального матеріалу необхідно врахувати такі фактори:

- загальноосвітню значимість;
- світоглядний потенціал запропонованих тем;
- прикладну спрямованість навчального процесу.

Тому важливо правильно оцінити, які знання і способи діяльності потрібні сучасній людині як у повсякденному житті, так і в професійній (можливо, майбутній) діяльності, що з них буде потрібне для вивчення інших предметів, для продовження освіти, для формування різних сторін інтелекту учня. Необхідно потурбуватися також про те, щоб запропонований зміст забезпечував можливість органічного поєднання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики з традиційним матеріалом, сприяв розвитку міжпредметних зв'язків. З одного боку зміст повинен бути поглибленим, щоб процес навчання можна було проводити на високому рівні труднощів, швидким темпом, при провідній ролі теоретичних знань, (за Л.В.Занковим). З іншого – не доцільно перенавантажувати програму [142].

Передбачений програмою [166] обсяг матеріалу з "Початків теорії ймовірностей" є недостатнім. До цього питання необхідно поставитись дуже ретельно. Можливих варіантів доповнення може бути велика кількість, але вони дійсно повинні бути доступні учням. Якщо зміст програми не доповнити проведенням стохастичних експериментів (від реальних до уявних), що надасть змогу будувати імовірнісні моделі, то початки теорії ймовірностей і вступу до статистики так і будуть існувати як стороння частина, яка в кращому разі є своєрідним продовженням комбінаторики або аналізом статистичних даних. Навички здобуті учнями при вивченні алгебри і початків аналізу, найкращим чином можуть закріпитися саме при вивченні нової змістової лінії. Ми не згодні з існуючою думкою Я.Бродського, О.Павлова про те, що “Початки теорії ймовірностей” недоцільно розпочинати вивчати в 11 класі, оскільки учні 11 класу не мають відповідних мотивів до вивчення цього матеріалу, адже він не входить до програми вступних іспитів. Але, не треба забувати, що мета закладів нового типу включає не тільки підготовку до вступу в вищі навчальні заклади, а насамперед забезпечення широкої загальноосвітньої підготовки учнів, розвиток творчих здібностей. Учителям, які працюють в міських спеціалізованих класах, часто нав’язується роль безкоштовного репетитора. У більшості випадків вони займаються питаннями підготовки до вузу. А це окрема система роботи. Оскільки програма для вступу до вузу з математики не містить розділів з початків теорії ймовірностей і вступу до статистики, то бувають випадки, коли їх просто не вивчають. Інша справа - фізико-математична школа (ліцей) при університеті. Він дає пільги при вступі: випускників зараховують за результатами випускних іспитів. Тому вчителі фізико-математичних шкіл, ліцеїв при університетах „можуть дозволити” собі поглиблений курс нової змістової лінії [21].

Сучасні потреби суспільства до математичної підготовки вимагають формування в учнів стохастичного (теоретико-імовірнісного і статистичного) мислення. Але зміст початків теорії ймовірностей і вступу до статистики при поглибленому вивченні можна остаточно визначити, сформулювавши мету і завдання навчання цих початків.

Головною метою навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики довгий час вважали засвоєння нових знань (Єремєєва М.В. [82], Самігуліна З.П. [173], Шонія В.Н. [229]). На значення необхідності розвитку здібностей мислення вперше увага була звернута лише у Л.М. Кабехової [99].

Цілі навчання теорії ймовірностей вичерпно сформулював Б.В. Гнєденко: „... необхідність систематичного розвитку в учнів ідеї наявності в природі закономірностей більш широкої природи, ніж строгий, класичний детермінізм, а саме статистичних закономірностей” [54].

Процес досягнення цих цілей забезпечується формуванням стохастичного мислення.

Якщо розділити дійсність на 1) простоту; 2) неорганізовану складність; 3) організовану складність (Сачков В.Н.), то розглядають відповідно три типи мислення: детерміністичний, статистичний і кібернетичний [176, 177]. Оскільки в галузі неорганізованої складності домінує випадковість, то стохастичним називають тип мислення, який її враховує. Він відображає якісні зв'язки і відношення об'єктів і явищ неорганізованої складності. Тобто стохастичний тип мислення потрібен не тільки при вивченні математичних дисциплін, а й дисциплін, що відображають неорганізовану складність (фізика, хімія, біологія, історія та ін.). Оскільки стохастичний тип мислення є частиною математичного, то його необхідно розвивати. Безперечно, можна розвивати стохастичний стиль мислення у процесі вивчення всіх предметів, що пов'язані з областю неорганізованої складності. На необхідність і можливість ознайомлення зі статистичними методами в різних дисциплінах, розвиваючи в учнів стохастичне мислення вказували, Б.В.Гнєденко [53] і американський вчений В. Мунен [216]. Це і потрібно систематично і послідовно проводити на уроках математики при навчанні початків теорії ймовірностей і вступу до статистики.

Розвиток стохастичного типу мислення служить таким цілям:

1) навчання учнів більш глибоко пізнавати об'єктивну реальність;
2) набуття навичок для використання статистичних методів при вивченні інших дисциплін;
3) формування світогляду.

Але не секрет, що навіть в умовах просунутого курсу теорії ймовірностей у ВНЗ не завжди вдається досягти цих цілей. Наявні певні методичні труднощі, які лише поглиблюються при переході до навчання початків теорії ймовірності у школі. Ми вважаємо, що ці труднощі мають не локальне значення, а безпосередньо пов'язані з процесом навчання. Диференціація, індивідуалізація та прикладна спрямованість цього процесу будуть сприяти реалізації цієї мети.

Розпочинати диференційоване навчання варто тільки після діагностики рівня навченості і математичних здібностей учнів:

1. Під час діагностики учнів не обмежуватися „зовнішніми критеріями” (бажанням батьків, анкетуванням), але враховувати „внутрішні критерії”: схильності, здібності, інтереси учня.
2. Здібності слід вивчати комплексно, поєднуючи педагогічні методи і психологічні тести.
3. Результати вивчення здібностей не можуть бути константою, треба вивчати їх у динаміці, наприклад, раз у півроку.
4. Вивчення здібностей учнів та диференціацію слід проводити за допомогою психологів, класних керівників, соціального педагога. Це вимагає від учителів постійного поглиблення знань у галузі педагогіки і психології.

А. Реньї [168] вважав, що вибір головних цілей вивчення теорії ймовірностей, зрозуміло, може варіюватися залежно від типу навчального закладу, але мотиви будуть незмінними:

- теорію ймовірностей необхідно вивчати тому, що вона відіграє важливу роль у розвитку мислення;
- теорію ймовірностей необхідно вивчати тому, що її висновки знаходять застосування в повсякденному житті, науці, техніці, тощо;
- теорію ймовірностей необхідно вивчати тому, що вона має важливе, ні з чим незрівнянне значення для математичної освіти.

Навчання будь-якого розділу математики сприяє розумовому розвитку учнів, оскільки прищеплює їм навички якісного, логічного мислення, що оперує чітко визначеними поняттями. Все сказане про вивчення будь-якого розділу математики в повному обсязі стосується і вивчення теорії ймовірностей, але вивчення нової змістової лінії відіграє дещо більшу роль і виходить за межі звично означених традиційних тем. У процесі навчання елементів стохастики учень пізнає, як застосувати прийоми логічного мислення в тих випадках, коли необхідно мати справу з невизначеністю. А такі випадки часто виникають в житті. Навчання теорії ймовірностей впливає і на характер учнів. Учні стають більш сміливими, толерантними і доброзичливими отже легше вписуються в життя нового суспільства.

У повсякденному житті нам постійно доводиться зустрічатись з випадковістю, і теорія ймовірностей вчить нас, як раціонально діяти з урахуванням ризику, пов’язаним з прийняттям окремих рішень. Гарним прикладом застосування теорії ймовірностей у повсякденному житті може бути гра „Лото Забава” і різні форми страхування, планування сімейного бюджету, коли доводиться оцінювати певні витрати.

Вивчення елементів стохастики може органічно ввійти в курси практично всіх наук, які вивчаються у школі, особливо при поглибленому вивченні. Біологія, фізика, хімія, географія дають чисельні приводи говорити про статистичні закономірності, які зустрічаються при вивченні природних явищ.

При вивченні біології учень повинен отримати уявлення про техніку проведення експерименту і опрацювання його результатів. І тут він буде мати справу зі застосуванням теорії ймовірностей і ймовірнісним характером біологічних закономірностей. Вивчаючи питання спадковості, учні ознайомляться з імовірнісно-статистичними законами Менделя і ймовірнісними процесами спадковості.

У фізиці і хімії статистичні уявлення відіграють виключно важливу роль у зв’язку з вивченням молекулярної будови матерії. Класичне уявлення про панування в природі строго детерміністичних закономірностей є лише першим наближенням до того, що реально відбувається. У дійсності справа набагато складніша, оскільки в силу молекулярної будови матерії має місце взаємовплив великої кількості часток, які рухаються і стикаються хаотично. Мета фізичних досліджень і полягає якраз в тому, щоб на базі цього хаосу виявити ті закономірності, до яких він обов’язково приводить, а також можливі відхилення від цих закономірностей. Зрозуміло, це потребує поглиблених знань як з фізики, так і з математики. Така ж сама картина має місце у хімічних реакціях. Глибоке розуміння хімічних процесів, а також опрацювання результатів експерименту неможлива без широкого і повноцінного використання стохастичних методів.

В економіці, при дослідженні зміни курсу деякої валюти, скажімо гривні, потрібно з’ясувати вплив багатьох економічних і соціальних факторів як внутрішніх, так і зовнішніх, що можуть істотно змінювати курс національної валюти щодо долара, німецької марки тощо.

При вивченні географії треба відмітити, що стохастичні закономірності відіграють важливу роль в метеорологічних явищах. Зміна погоди, кількість опадів, число сонячних днів, зміна температури є явищами випадкового порядку.

Таким чином, при вивченні в шкільному курсі фізики, хімії, біології, географії можна (і потрібно) використовувати елементи стохастики. Це переконує учня у тому, що ознайомлення з «законами випадку» необхідні кожному. Застосування теорії ймовірностей в науці і техніці, економіці і навіть у повсякденному житті набуває зростаючого значення. На жаль, досить часто у фахівців тільки в процесі роботи виникає потреба у вивченні теорії ймовірностей. Тому хибною є думка про те, що не треба турбуватися про тих випускників школи, які не будуть вчитися на математичних факультетах в університеті, а в першу чергу навчати початків теорії ймовірностей випускників, які будуть отримувати математичну освіту. Загальновідомо, що на сучасному етапі розвитку науки лікарям, юристам, біологам, геологам та іншим спеціалістам необхідно володіти початками теорії ймовірностей. Однак спеціалісти вищезазначених професій у вузах часто не вивчають теорії ймовірностей. Тому вивчення елементів теорії ймовірностей в загальноосвітній школі частково заповнить ці прогалини у підготовці висококваліфікованих спеціалістів. А спеціалістам, пов’язаним з економікою, технікою, інформатикою, необхідні фундаментальні знання з теорії ймовірностей, і цьому сприятиме поглиблена підготовка ще в школі.

Вивчення теорії ймовірностей сприяє кращому розумінню взаємозв’язків між дійсністю і математичними моделями дійсності. Людина, яка не має уявлення про ймовірнісні моделі, вважає, що математичні методи можна застосовувати лише при простих і точних залежностях між величинами, які можна виміряти і обчислити. Тобто за словами Б.В.Гнєденка [57], людина знайомиться тільки з детерміністичним підходом, не маючи тим самим змоги знайомитись з найбільш загальними закономірностями, що завоювали у сучасній науці і практичній діяльності лідируючі позиції. Вивчення теорії ймовірностей наближає до сучасного сприйняття математики.

На сучасному етапі розвитку суспільства при оновленні освіти виникає потреба уточнити мету і завдання вивчення початків теорії ймовірностей і елементів математичної статистики. Мета безпосередньо пов'язана з головною метою школи – розвитком особистості. Основні цілі навчання елементів стохастики з поглибленим вивченням математики можуть бути сформульовані таким чином:

1) забезпечення свідомого і міцного оволодіння системою знань, навичок і умінь з даної змістової лінії, які потрібні в повсякденному житті, майбутній професійній діяльності, і яких буде достатньо для вивчення інших предметів, продовження освіти, формування навичок моделювання випадкових явищ під час досліджень природи і суспільства;
2) розвиток імовірнісно-статистичного (стохастичного) мислення учнів, математичної інтуїції і культури, формування самостійності, ініціативі, творчості, здатності адаптуватися до умов, що змінюються;
3) формування наукового світогляду, поваги до національної культури і традицій України, позитивних рис характеру, доброзичливості, толерантності, сміливості, обґрунтованості суджень; економічне, екологічне, трудове виховання, професійна орієнтація

У якості критерію досягнення цих цілей В.В. Фірсов [216] розглядав вміння розв'язувати якісні статистичні задачі, тобто робити якісні статистичні висновки на базі наявних статистичних даних, керуючись правдоподібними міркуваннями, які ґрунтуються на інтуїції і логіці. Зрозуміло, що це вміння є не єдиним показником наявності імовірнісно-статистичного мислення. Але в умовах нерозвиненого математичного апарату, розв'язання якісних імовірнісних і статистичних задач правильно вказує на тенденцію курсу початків теорії ймовірностей і вступу до статистики у школі, його орієнтацію на практичну спрямованість і застосування окремих знань. Тут можна провести певну аналогію з умінням розв’язувати якісні фізичні задачі, які теж можуть бути одним з найважливіших показників наявності фізичного мислення.

А. Плоцкі вважає, що досягнення цих цілей полягає у вмінні будувати математичні (імовірнісні) моделі реальних ситуацій, які розв’язуються математичними методами [157].

Вміння робити правильні якісні висновки на рівні правдоподібних міркувань, будувати імовірнісні моделі, свідчить про правильну математичну інтуїцію учня в галузі імовірнісних ситуацій, що є необхідною передумовою будь-якого просунутого навчання.

Для реалізації поставленої мети при поглибленому навчанні початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в шкільному курсі математики повинні виконуватись такі завдання, які розв’язуються в нашому дослідженні:

1) ознайомлювати учнів з математикою випадкових явищ і величин;
2) забезпечувати внутрішній зв’язок курсу математики з іншими загальноосвітніми дисциплінами;
3) реалізувати прикладну спрямованість;
4) формувати науковий світогляд;
5) підвищувати загальну математичну підготовку учнів;
6) сприяти розвитку стохастичного мислення і творчого потенціалу;
7) наближати шкільний курс математики до сучасного рівня математичної науки;
8) готувати молодь до успішного продовження навчання у вищій школі, а також до роботи в умовах сучасного виробництва, технічна, наукова та інформаційна база якого розширюється з кожним днем.

1.2. Місце, зміст і структура навчального матеріалу з початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики

З введенням нової змістової лінії може послабитися протиріччя між детерміністською картиною світу і сучасними науковими уявленнями, які ґрунтуються на імовірнісно-статистичних законах. Звідси випливає висновок про те, що елементи стохастики не повинні бути в шкільному навчанні окремим ізольованим курсом, а повинні складати наскрізну змістово-методичну лінію, яка б забезпечила формування і систематизацію, розвиток уявлень про стохастичну природу явищ оточуючого світу.

Щодо досвіду навчання імовірнісно-статистичного матеріалу у школах Великобританії, Угорщини, Німеччини, Польщі, Франції, США, Швеції, Японії і цілого ряду інших зарубіжних розвинутих країн, можна зробити висновки:

- імовірнісно-статистичний матеріал починають вивчати у початковій школі;
- імовірнісно-статистичний матеріал вивчається протягом всіх років навчання, до того ж він входить до обов'язкового курсу математики у всіх розвинених країнах у вигляді окремої змістової лінії;
- ця лінія розпадається на імовірнісну і статистичну складові, тісно пов'язані між собою;
- велику роль відіграють задачі прикладного характеру, аналіз реальних ситуацій;
- у процесі навчання багато уваги і часу відводиться задачам, що потребують роботи у малих групах, самостійного збирання даних, узагальнення роботи малих груп, проведення самостійних дослідів, робіт практичного характеру, постановки експериментів, проведення невеликих лабораторних робіт, підготовка дострокових курсових завдань – це все диктується своєрідністю матеріалу, що вивчається, його зв'язку з практичною діяльністю;
- все більшу роль у вивченні імовірнісно-статистичного матеріалу у вітчизняних і зарубіжних загальноосвітніх школах відіграє комп'ютер.

У нашій країні сьогодні також відбувається процес впровадження елементів стохастики як рівноправної складової в обов'язкову шкільну освіту. Всі державні освітні документи останніх років містять імовірнісно-статистичну лінію у курсі математики. Програма з математики для класів з поглибленим вивченням математики 8-11 класи [166], розроблена на основі “Проекту освітнього стандарту” передбачає вивчення нової змістової лінії у 11 класі протягом 25-30 годин; вона закладає основи імовірнісно-статистичних підходів до аналізу явищ повсякденного життя. В останні роки з'явилися нові шкільні підручники, у яких представлені вступ до статистики, теорії ймовірностей і в цілому всієї науки про випадкове [3, 5, 6, 14]. У них, насамперед, збирання і реєстрація статистичних даних, таблиці, діаграми, найпростіші статистичні характеристики, імовірності і т.д. Багато вчителів уже працюють за цими підручниками. У ряді шкіл елементи стохастики вивчають за рахунок варіативної частини навчального плану.

Сучасна концепція шкільної математичної освіти орієнтована перш за все на урахування індивідуальності дитини, її інтересів і нахилів. Цим визначаються критерії добору навчального матеріалу, розробка і впровадження нових методик інтерактивного навчання, змін у вимогах до математичної підготовки учнів.

З цієї точки зору, з позиції „математики з людським обличчям”, коли мова йде не тільки про навчання математики, а й про формування особистості за допомогою математики, необхідність розвитку у всіх школярів імовірнісної інтуїції і стохастичного мислення стає насущним завданням. До того ж мова сьогодні йде про вивчення елементів стохастики у рамках змістово-методичної лінії протягом усіх років навчання, тому в ліцеях і класах з поглибленим навчанням математики елементи стохастики повинні носити більш глибокий науковий і прикладний характер.

А.В. Скороход [181] вважає, що “…теорія ймовірностей посідає серед математичних наук особливе місце, …теорія ймовірностей виступає до всієї іншої математики як споживач. Спеціалісти з теорії ймовірностей широко використовують у своїй роботі різноманітні математичні методи. Проте спеціалісти з інших математичних наук за незначними винятками не знайомі з азами теорії ймовірностей. Теорія ймовірностей неначе відокремлена від іншої математики напівнепроникною плівкою – результати інших дисциплін легко проникають через цю плівку, а зворотного руху поки що не видно. Беручи до уваги, що живе існування науки – в людській свідомості, легко прийти до висновку, що ця плівка знаходиться у свідомості, причому в свідомості "неймовірнисників" . На його думку теорія ймовірностей має такі особливості:

1. Найбільш інтуїтивна серед математичних наук.
2. Досить складний математичний апарат, що використовується для розв'язування задач з простими формулюваннями.
3. Більшість задач можуть бути сформульовані в комбінаторному варіанті (наближено) і розв'язані комбінаторними методими.

Елементи стохастики у шкільній освіті це не окремий, ізольований курс, він має вигляд наскрізної змістово-методичної лінії, яка забезпечує формування, систематизацію і розвиток уявлень про імовірнісну природу більшості явищ оточуючого світу.

Побудова стохастичної змістово-методичної лінії шкільного курсу математики базується на наступних основних принципах:

- прикладної спрямованості;
- інтегрованості;
- міжпредметних зв'язків;
- довготривалості;
- диференціації.

За довгі роки склалася певна традиція навчання теорії ймовірностей, відправним моментом якої є зв'язок з комбінаторними поняттями і твердженнями. Цей підхід приводить до схеми рівноможливих випадків і до класичного означення імовірності. Приваблюючи своєю уявною простотою, якої насправді немає навіть в існуючих посібниках, він закріпився не тільки у вузах, а й встиг зайняти певне місце у школі [129]. У цьому впевнює багаторічна практика проведення занять на факультативах і класах з поглибленим вивченням математики.

Як виявилося при такому однобічному підході залишається поза увагою світоглядний аспект теорії ймовірностей, який визначає цілі формування статистичного мислення в учнів. Дійсно, переважний розгляд теоретичних імовірнісних понять, формул і правил не приводить до формування методологічно правильних поглядів на природу і суспільство, які відповідають сучасній науковій картині світу. Вивчення математичних моделей випадкових явищ у чистому вигляді, у відриві від практичних застосувань, не сприяє осмисленню учнями статистичних закономірностей оточуючого світу.

Імовірнісні моделі абстраговані від конкретних закономірностей у масі випадковостей і від флуктуацій, які є у реальній дійсності, але не проявляються у математичних моделях. Тому достатньо впевнене оперування людиною в межах імовірнісної моделі, далеко не означає наявності у нього того специфічного стилю мислення, без якого неможливе розуміння світу недетермінованих явищ.

Сучасна теорія ймовірностей являє собою гілку метричної теорії функцій, своєрідну не тільки за методами математичного дослідження, а за постановкою задачі. Імовірнісна модель по суті нічим не відрізняється від інших математичних структур, отже, навчання, що будується на вивченні лише імовірнісної моделі, не може призвести до досягнення поставленої мети – формування стохастичного мислення учнів, якщо не вміти будувати імовірнісні моделі.

У зв’язку з цим, все більше визнання отримує ідея необхідності прикладної орієнтації навчання теорії ймовірностей [216].

Прикладна спрямованість навчання математики полягає у реалізації цілеспрямованого, змістовного і методологічного зв’язку математичної галузі з практикою. Реалізація прикладної спрямованості навчання математики передбачає три основних етапи практичного використання математичного апарату:

1) формалізація – створення математичної моделі початкової ситуації, що вивчається. На цьому етапі відбувається перехід з мови, що характеризує реальну ситуацію, на математичну мову.
2) внутрішньомодельний розв'язок – математичне розв'язання задачі і отримання відповіді на математичній мові.
3) інтерпретація – переклад відповіді на мову початкової ситуації. На цьому етапі проводиться аналіз результатів розв'язування, їх трактування у термінах початкової ситуації і прийняття рішення за проблемами даної реальної нематематичної ситуації.

Саме проблемам виявлення специфіки прикладної спрямованості у математики, як необхідної умови досягнення цілей навчання теорії ймовірностей у школі присвячена дисертація В.В. Фірсова [216].

У безпосередній практиці традиційного навчання замість реальних об'єктів вивчаються відповідні їм поняття та інші продукти пізнання, отриманих не учнями, а спеціалістами, вченими або авторами учбового матеріалу. Вивчення учнями відомостей про „чужі" знання часто не супроводжується формуванням особистих знань про реальний світ.

Ситуація погіршується при вивченні основ науки про випадкове, оскільки аксіоматична побудова теорії ймовірностей вимагає абстракцій високого порядку, а обчислення ймовірностей лише за допомогою комбінаторних правил не сприяє розумінню, звідки взялися ці ймовірності і навіщо вони потрібні.

Класичне означення ймовірності, що базується на гіпотезі рівноможливості випадків, і повторні незалежні випробування, це єдині імовірнісні моделі, що розглядаються. При такому навчанні деякі поняття (імовірність, математичне сподівання і т.п.) сприймаються як штучні та інорідні по відношенню як до самої математики, так і до життя. Не випадково багато учнів відчувають внутрішній психологічний протест до цієї науки.

Розв'язати дану проблему можливо лише шляхом зміни методології навчання за допомогою попереднього ознайомлення учнів з різними реальними імовірнісними ситуаціями, що є об’єктами пізнання, як у межах математики, так і інших предметів. Для досягнення цілей формування імовірнісно-статистичного мислення учнів, теорія ймовірностей повинна вивчатись не як чисто математична, а як прикладна дисципліна при явному залученні етапу формалізації і інтерпретації у процес розв’язування задач, зміст яких відображає реальні ситуації.

Саме при такому вивченні відпрацьовуються вміння розв’язувати імовірнісні задачі, які пропонуються практикою, що є критерієм досягнення поставлених цілей. Прикладом таких задач є задача про безповторну вибірку (гіпергеометричний розподіл), яка використовується для контролю якості промислової продукції [51].

„Вивчаючи об’єкт реального світу, учень за допомогою учителя відкриває знання про нього, тобто відкриває ідеальні теоретичні конструкції – факти, поняття, закономірності. Усвідомлюючи створені ним знання і способи пізнання, учень фіксує їх у вигляді особистого освітнього продукту, що дозволяє потім застосувати їх для наступного пізнання реального світу. Освітня діяльність учня виступає зв’язуючою ланкою ідеального і реального світу – рівноправних атрибутів гармонійної людини” [120]. Таким чином, елементи стохастики і в ідеалі весь шкільний курс математики повинен розглядатися як зразок прикладної науки, з характерними для неї видами діяльності. Побудова математичної моделі реальної ситуації і інтерпретація отриманого результату повинні бути включені у процес навчання. Тоді учні навчаться застосовувати отримані знання, що є дуже важливим для їх подальшої діяльності. Все це дає підґрунтя розглядати прикладну спрямованість навчання стохастики не тільки в якості необхідної умови досягнення поставлених цілей, але і як одного з принципів побудови нової змістово-методичної лінії шкільного курсу математики. Цей принцип виражає прикладну спрямованість навчання стохастики.

Виникає питання про право стохастики претендувати на самостійне місце серед шкільних дисциплін за аналогією, скажімо, з інформатикою. На це звертали увагу дослідники. Так Д.В. Манєвич пропонував організувати навчання комплексно: як шляхом впровадження елементів стохастики у шкільну математику, так і за допомогою міжпредметних зв'язків і окремого курсу або розділу [129, с.253]. Однак А. Плоцкі прийшов до висновку, що „стохастика не повинна бути окремою галуззю шкільної математики, а скоріше повинна бути інтегрованою частиною математики..." [157, с.38].

Досвід навчання елементів стохастики на факультативах і в класах з поглибленим вивченням математики, підтверджує, що спроби розв'язати проблему формування стохастичного мислення шляхом введення у школу нового ізольованого курсу або розділу скоріше за все має не багато шансів на успіх.

Бажано, щоб при вивченні традиційних розділів математики формувалися поняття і навички, на базі яких народжувалися імовірнісно-статистичні поняття, уявлення і методи. Наприклад, якщо при вивченні довжин, площ, об'ємів, мас частіше звертатися до їхніх основних властивостей, якими користуються на практиці, то це сприятиме розумінню ймовірності події, як величини (міри) сподівання, що задовольняє добре відомим властивостям. Після того, як учні ознайомилися з побудовою ліній у декартовій системі координат, можна розглядати криві імовірнісних розподілів.

З іншого боку, розгляд багатьох імовірнісно-статистичних понять сприяє ґрунтовному засвоєнню матеріалу „звичайних" тем математики. Наприклад: використання різних способів знаходження середніх характеристик і показників розсіювання даних допомагає розвитку обчислювальних навичок; знаходження геометричних імовірностей сприяє засвоєнню понять площі, простору; розгляд стохастичних залежностей розширює уявлення про сферу застосування елементарних функцій, що вивчаються і т.д.

Стохастика представлена не окремим курсом або ізольованою темою, а розчинена у всій математичній освітній галузі, органічно вплітається у канву традиційного матеріалу, що вивчається. Вона надає якісно інший характер внутрішній логіці математики як учбового предмету. Тобто, крім розширення і поглиблення математичних знань вивчення імовірнісно-статистичної лінії створює нові сприятливі можливості для посилення внутрішньопредметних зв'язків.

Звідси випливає **принцип інтегрованості** побудови елементів стохастики. Відповідно до цього принципу, нова лінія, є однією з рівноправних самостійних змістово-методичних ліній шкільного курсу математики, таких як лінія числа, функціональна лінія або тотожних перетворень і т.д.. Вона повинна сприяти поглибленню внутрішньопредметних зв'язків.

При вивченні стохастики велику роль відіграють не тільки внутрішньопредметні, але й міжпредметні зв'язки, оскільки імовірнісно-статистичні методи проникають у всі галузі людського знання. Стохастичні теорії міжнаукові і стали провідними у сучасному природознавстві. Завдяки їм вдалося побудувати наукову картину світу. Тому саме імовірнісно-статистична лінія сприяє виникненню нових, глибоко обґрунтованих міжпредметних зв'язків. З одного боку, ці зв'язки забезпечують багатий запас завдань збирання даних, їх опрацювання, проведення експериментів і т.д. З іншого боку, вони сприяють більш глибокому розумінню матеріалу різних предметів.

Вивчення інших предметів створює сприятливі можливості для проведення спостережень і отримання первинних статистичних даних. Так, при вивченні біології проводиться спостереження за розподілом біологічних видів, виміру їх розмірів і маси і т.д. Не менші можливості у цьому відношенні з'являються при вивченні фізики, географії, хімії. Велика кількість статистичних даних зустрічається при вивченні економіки, а також дисциплін суспільно-гуманітарних освітніх галузей.

Генеровані при вивченні різних предметів статистичні дані являють собою незамінний матеріал для мотивації і вивчення стохастичних понять на уроках математики, де вони підлягають математичному опрацюванню з використанням комп'ютера, з метою узагальнення і виявлення тенденцій у явищах, що спостерігаються. Математизуючи різні реальні імовірнісні ситуації, що відповідають різним сферам пізнання, учні отримують цілісне уявлення про світ випадкових явищ і методи його вивчення. Особливе значення має зв'язок стохастики з інформатикою. Використання комп'ютера полегшить розв'язання багатьох імовірнісно-статистичних задач. Він забезпечує доступ до баз даних, є дієвим засобом для зберігання, опрацювання і подання введених в нього статистичних даних. Комп'ютер можна використовувати і для генерації випадкових даних, і для побудови моделей реальних ситуацій з елементами випадковості, і для перевірки статистичних гіпотез. Комп'ютерна візуалізація статистичних закономірностей, зіставлення діаграм і графіків знімає багато рутинних труднощів технічного характеру, дозволяючи зосередити увагу учнів на ідейній сутності методів аналізу стохастичних ситуацій.

З іншого боку, крім загальних цілей світоглядного характеру, знайомство з елементами стохастики створює можливість для більш глибокого вивчення матеріалу різних предметів. Тут зазвичай виникає необхідність у використанні математичних методів аналізу результатів спостережень.

При виконанні лабораторних і практичних робіт з фізики, хімії, біології учень повинен уміти оформити результати спостережень і дослідів; на уроках географії, економіки, історії, суспільствознавства йому необхідно користуватися таблицями і довідниками, сприймати дані, що надані у графічній формі. Вивчення багатьох тем природничих і суспільно-гуманітарних освітніх галузей особливо потребує залучення імовірнісно-статистичних уявлень.

Вплітаючись у канву більшості шкільних предметів, впровадження елементів стохастики створює можливість розподіляти між цими предметами функції з організації статистичних дослідів. Ті кроки статистичного дослідження, які пов'язані зі збиранням статистичних даних, їх систематизацією і оформленням у багатьох випадках можуть проводитись при вивченні відповідних предметів. На уроках математики учні дізнаються, як ці дані можна подати геометрично за допомогою комп'ютера, як обчислити основні характеристики відповідних розподілів статистичних ймовірностей, який їх зміст і т.д. Інтерпретація стохастичних моделей дає змогу робити висновки і приймати рішення. Всього цього вони вчаться при навчанні, як математики, так і інших дисциплін.

Єдиний статистичний підхід до навчання учнів різних дисциплін розглядався у дослідженні К.М. Куриндіної [120] як новий шлях здійснення глибоких міжпредметних зв'язків. Завдяки стохастиці ці зв'язки допомагають розв'язати завдання формування імовірнісно-статистичного мислення учнів комплексно, в умовах взаємодії різних освітніх галузей. Звідси випливає **принцип міжпредметних зв'язків** побудови стохастичної змістово-методичної лінії, який виражає необхідність максимально реалізувати міжпредметні зв'язки для взаємозбагачення математики та суміжних дисциплін і формування єдиної наукової картини світу. Цей принцип тісно пов'язаний з принципом інтегрованості, оскільки вивчення стохастики розширює сфери інтеграції на шкільні дисципліни.

Багато дослідників звертали увагу на необхідність ранньої і довготривалої пропедевтики початкових понять теорії ймовірностей і математичної статистики. Без наявності достатнього багажу життєвого статистичного досвіду, звичок, інтуїції, ідей, уявлень, обумовлених спілкуванням зі світом випадковостей, вивчення теорії ймовірностей натикається на деяке психологічне відчуження, внутрішнє несприйняття учнями. Д.В. Манєвич [129] у своєму дослідженні порушує питання про те, що розуміння класичного означення імовірності ускладнене, оскільки воно вводиться штучно, а тому є асоціацією невпевненості.

На наш погляд, вивченню імовірнісних понять повинен передувати процес накопичення інтуїтивних уявлень про конкретні випадкові явища оточуючого світу. До того ж такий процес не повинен бути стихійним і короткотерміновим. А. Плоцкі, наприклад, стверджує: „Вивчення стохастики у школі повинне бути її пропедевтикою. Це довгий період часу формування інтуїтивних основ понять і методів, утворення деяких ідей і розвитку особливої інтуїції, як нового важливого аспекту математичної культури." [157, с.39]. „З-за своєї специфіки стохастика може бути математикою, яку розуміє кожен учень, як математика відкрита самим” [157, с.42]. У цьому контексті необхідно підкреслити також важливість робіт А. Енгеля [238], Г. Фройденталя [219], Т. Варги [28, 29, 30] та інших.

Д.В. Манєвич [129] також приходить до висновку, що формування стохастичного мислення у школярів „повинно бути зведене до тривалого вивчення стохастики у надрах шкільних предметів”, що таке навчання „в основному повинно відбуватися мимоволі, носити допоміжний характер”.

Звідси випливає принцип побудови імовірнісно-статистичної лінії шкільного курсу математики, що виражає необхідність довготривалого цілеспрямованого періоду формування статистичного досвіду дітей, їх імовірнісної інтуїції. Назвемо його **принципом довготривалості**.

Змістово-методична лінія повинна передбачати диференціацію навчання.

Кожна дитина характеризується своїми задатками, здібностями і можливостями, а також її індивідуальні особливості визначаються соціальним середовищем, навчанням, вихованням, діяльністю. Тому різні учні мають неоднакові можливості щодо рівня якості засвоєння програмного матеріалу. Звичайно, врахувати всі варіанти відмінностей школярів у психічному і пізнавальному планах неможливо. Але виділивши найголовніші, характерні, можна поділити учнів на типологічні групи, проте єдиного підходу до такого поділу не існує.

Слєпкань З.І. [187] і Забранський В.Я. [89] розглядають здатність до навчання, темп навчання і рівень пізнавального інтересу. Калмикова З.І. [100] в основу типологічного групування школярів пропонує покласти рівень научуваності і рівень засвоєння знань (навченість). Менчинська Н.О. [131] головним критерієм вважає научуваність.

Проаналізувавши різні підходи до типології учнів за їх індивідуальними можливостями, ми в своєму дослідженні в основу поділу поклали рівень навченості, научуваності і пізнавального інтересу. Научуваність розуміємо за З.І. Калмиковою [100, с.30]: це система „...інтелектуальних властивостей особистості, якостей розуму, що формуються. Навченість визначається наявністю в учня певних знань, умінь і навичок”.

При вивченні імовірнісного матеріалу в умовах рівневої диференціації в класах з поглибленим вивченням математики доцільно орієнтуватися на три рівні научуваності.

Високий рівень научуваності: програмний матеріал сприймається свідомо, досягається його повне розуміння в процесі первинного сприйняття; легко засвоюються загальні схеми розв’язання завдань, часто учні пропонують нестандартні спроби розв’язування, самостійно розв’язують змінені та ускладнені завдання.

Достатній рівень научуваності: Засвоєння програмного матеріалу не викликає особливих ускладнень, але через нестійку увагу, невміння зосередитись засвоюється не глибоко, потребує додаткових пояснень; для засвоєння учнями способів розв’язування завдань виникає необхідність наведення двох-трьох зразків, а при розв’язуванні змінених, ускладнених завдань – учні потребують допомоги вчителя.

Середній рівень научуваності: виникають труднощі при засвоєнні програмного матеріалу; набуті знання дозволяють учням розв’язувати завдання після тривалих тренувань, а змінені і ускладнені завдання, як правило, не розв’язуються.

За «Концепцією математичної освіти 12-річної школи» [109] математична підготовка забезпечується двомірною моделлю диференціації навчання, основні поняття якої – курс математики і рівень вимог (табл. 1.1), де

Таблиця 1.1

Двомірна модель диференціації навчання

Рівні	Курси			
	А	В	С	Д
1. Середній	А1	В1	С1	Д1
2. Достатній	А2	В2	С2	Д2

3. Високий	А3	В3	С3	Д3

Курс А (загальноосвітній).

Курс В (прикладний).

Курс С (загальнокультурний).

Курс Д (поглиблений).

Тому початки теорії ймовірностей і вступу до статистики в школі можуть мати різну інформаційну і інтелектуальну ємність, діагностико-прогностичну спрямованість та соціальну ефективність (обсяг стохастичних знань має бути достатнім для успішної майбутньої трудової і навчальної діяльності), а також різнитися способами упорядкування матеріалу, ступенем узагальнення знань, співвідношеннями між теоретичними і емпіричними знаннями.

Рівень вимог до учнів, які вивчають стохастику, включає переліки опорних уявлень, знань, навичок, умінь і способів математичної діяльності. Останні відображають розвиток особистісних якостей учня.

У диференційованому навчанні математики ми дотримуємося концепції єдності рівневої і профільної диференціації. Кожен із цих двох різновидів диференціації один без одного неповноцінні. Розкриємо внутрішню єдність двох названих видів диференціації.

По-перше, «високий» рівень навчання математики в школі не може бути повною мірою здійснено, якщо він не спрямований на профільну диференціацію. Профільна диференціація є найважливішим засобом здійснення рівневой диференціації.

По-друге, профільна диференціація є ефективним засобом варіативності рівнів навчання предмету, і незалежно від того, чи ведеться навчання математики в математичному, технічному, гуманітарному, природничо-біологічному, або звичайному класі, без профільної диференціації неможлива ефективна рівнева диференціація.

По-третє, вибір профільності навчання зовсім не знижує значимості рівневої диференціації, а змінює лише можливості її здійснення.

У реальності рівнева і профільна диференціація – нерозривні елементи єдиного процесу диференціації навчання. Взагалі, розчленування диференціації на два види корисно для того, щоб більш різнобічно й глибоко, детально й повно вивчити проблему диференційованого навчання і забезпечити належний рівень навчання математики.

Застосування диференціації навчання може бути використане на різних етапах уроку, а саме на етапі введення нового матеріалу, на етапі самостійної роботи учнів з вивчення нового й самостійної роботи із застосуванням вивченої теорії до розв'язування задач, можливості поділу самостійної роботи за ступенями допомоги з боку вчителя учням, на етапі роботи з підручником, диференційований контроль підготовленості до уроку, диференціація домашнього завдання, диференціація оцінки знань.

На основі результатів раніше проведених дослідів, а також висунутих принципів побудови імовірнісно-статистичної змістової лінії виділимо її основні складові:

- імовірнісна.
- статистична;

Імовірнісна складова, орієнтована на побудову імовірнісних моделей простих ситуацій. Вона забезпечує розуміння того, що аналіз багатьох явищ може бути здійсненим не тільки експериментальним шляхом, але виходячи з деяких теоретичних міркувань шляхом проведення уявного експерименту до проведення реального експерименту. Учні оволодівають методом математичного моделювання випадкових явищ і процесів.

На перших кроках вони вчаться будувати різні простори елементарних подій, що можуть погоджуватись або не погоджуватись з гіпотезою рівноможливості. Вони впевнюються, що їх побудову можна провести не тільки шляхом проведення експерименту, але і простими розмірковуваннями звичайного змісту. Так приходять до обчислення статистичних ймовірностей.

Дещо пізніше учні знайомляться з іншими способами обчислення ймовірностей, зокрема геометричним.

Учні поступово впевнюються, що різні ситуації можуть описуватись однією і тією ж імовірнісною моделлю. Наприклад, нормальний розподіл ймовірностей $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, описує такі різні явища: (див. схему 1.1), де x - змінна, a – математичне сподівання, σ - середнє квадратичне відхилення .

З іншого боку, особливо важливо, коли учень знайомиться з ситуаціями, для яких можливо побудувати більше, ніж одну модель, і отримати кілька відповідей. Наприклад, корисно обговорити з учнями ситуацію оцінювання стандарту деталей при повторній і безповторній вибірках .

Дана складова сприяє формуванню вмінь, які допомагають людині орієнтуватися в оточуючому світі, приймати адекватні рішення у розповсюджених ситуаціях.

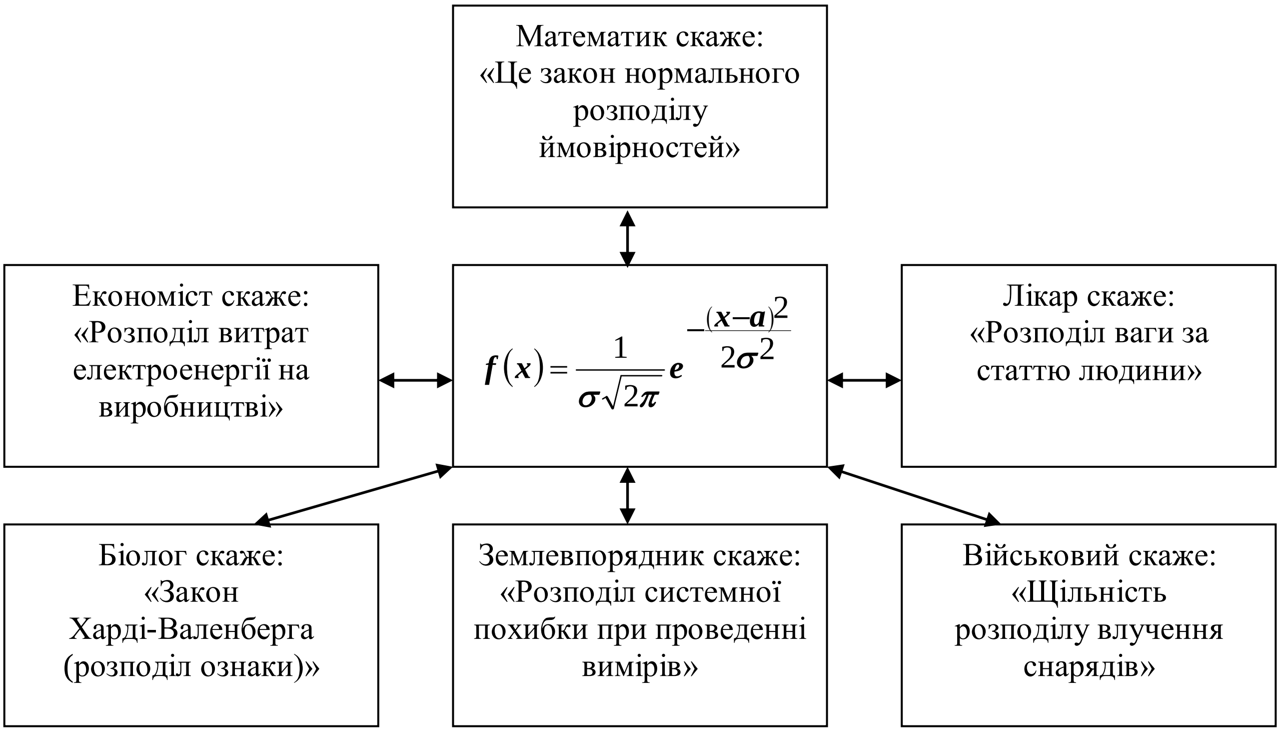


Схема 1.1. Нормальний розподіл ймовірностей

Статистична складова виконує три основні функції: інформаційну, прогностичну й аналітичну. Інформаційна функція полягає в збиранні, узагальненні та представленні вірогідних даних про актуальні соціально-економічні процеси, що відбуваються в країні, про природні умови та різні сторони діяльності людини.

Прогностична функція полягає в оцінці ймовірності тих чи інших значень важливих економічних, соціальних і природних показників умов життя населення; діяльності виробництва; економічних параметрів під час прогнозування різних умов розвитку суспільства, техніки, економіки і науки.

Аналітична функція полягає, по-перше, у кількісному дослідженні тенденцій розвитку та зміни будь-яких масових природних, економічних, соціальних, технологічних процесів; по-друге, у вивченні варіації суспільних явищ у статиці та динаміці; по-третє, у вимірюванні та моделюванні економіко-статистичних зв'язків між явищами, факторами науки і виробництва; по-четверте, у дослідженні структурних процесів, що відбуваються в суспільстві.

При доборі і структуруванні змісту навчального матеріалу з елементів стохастики, який вивчається у класах з поглибленим вивченням математики протягом 8-11 класів, слід брати до уваги суспільну значимість і світоглядний потенціал нової змістово-методичної лінії. Важливо правильно оцінити, перш за все, які знання потрібні людині у повсякденному житті і діяльності, що з них потрібно учневі при вивченні різних шкільних предметів, який внесок можуть надати ці знання у формуванні різних сторін інтелекту учня, а також для продовження вивчення математики. Не забуваючи про реалії сучасного життя школи, необхідно подбати, щоб ці вимоги забезпечували можливості органічного узгодження нового матеріалу з традиційним, не привели до перевантаження дітей.

Наведемо примірний зміст навчання стохастики в ліцеях різних профілів, який ми пропонуємо (див. додаток А).

Ліцеї і класи математичного спрямування. Початки теорії ймовірностей. Поняття стохастичного (випадкового) експерименту та простору елементарних подій. Події як підмножини простору елементарних подій. Відбування події. Вірогідні та неможливі події. Порівняння подій. Операції над подіями. Основні властивості подій. Поняття статистичної ймовірності, як міри сподівання певного результату експерименту. Основні властивості статистичної ймовірності. Ймовірність суми випадкових подій. Умовні статистичні ймовірності, залежні і незалежні події. Події незалежні в сукупності. Формула повної статистичної ймовірності і формула Байєса.

Поняття дискретного розподілу статистичних ймовірностей. Полігон відносних частот (многокутник розподілу статистичних імовірностей). Поняття неперервного розподілу статистичних ймовірностей. Гістограма неперервного розподілу статистичних імовірностей. Щільність розподілу статистичних ймовірностей. Функція дискретного і неперервного розподілу статистичних ймовірностей. Числові характеристики дискретного і неперервних розподілів статистичних імовірностей: математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення, мода, медіана.

Імовірнісні простори. Поняття ймовірності та її зв'язок з довжиною, площею, об’ємом, масою. Скінченний простір рівноможливих елементарних подій. Нескінченний простір рівноможливих елементарних подій. Схема Бернуллі як математична модель повторних незалежних випробувань. Поняття випадкової величини. Відносна частота як випадкова величина. Прості випадкові величини. Числові характеристики простих випадкових величин: математичне сподівання, дисперсія і середньоквадратичне відхилення, їх властивості. Закон великих чисел для статистичних ймовірностей: теореми Чебишова і Бернуллі. Рівномірний, біноміальний, гіпергеометричний, Пуассона, нормальний розподіли статистичних імовірностей.

Відповідно до критеріїв оцінювання навчальних досягнень учнів, зміст і вимоги до засвоєння імовірнісно-статистичного матеріалу, запропонованого нами, розподілений на три рівні складності: високий, достатній, середній. Рівні відрізняються незначним розширенням теорії, та кількістю і складністю задач (див. додаток Б).

Відповідно табл.1.1: середній рівень - Д1, достатній рівень - Д2, високий рівень - Д3. Зрозуміло, що уявлення, знання та уміння вищого рівня включають обсяг нижчих рівнів.

1.3 Аналіз стану досліджуваної проблеми в літературних джерелах та шкільній практиці

Перша хвиля робіт, пов'язаних з вивченням учнями елементів стохастики, була пов'язана саме з першим періодом руху за введення початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в шкільний курс математики (див. 1.1). В них досліджуються можливості побудови курсу теорії ймовірностей як окремої теми шкільної математики. Серед них роботи М.В.Єремеєвої [82], В.Н. Шоніа [229].

Результатом другого періоду руху за введення початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в шкільний курс математики були роботи, присвячені проблемам навчання теорії ймовірностей і комбінаторики на факультативних заняттях і математичних гуртках. Відмітимо серед них роботи Б.В. Гнєденка [54], А.Я. Дограшвілі [74], І.Г. Журбенка [58], А.М. Кабехової [99], З.П. Самігуліної [173], А.П. Шихової [226]. У 90-і роки ХХ ст., основними результатами проведених досліджень стала пропозиція включення нової змістової лінії у курс загальноосвітньої школи як прикладної дисципліни, що включає три складові. Серед них дисертаційні роботи Ж. Кудратова [118], Л.О. Бичкової [25] і А. Плоцкі [157].

Д.В. Манєвич (1990р.) присвятив свою докторську дисертаційну роботу удосконаленню змісту загальної середньої освіти на основі теорії ймовірностей і статистики [129]. В дослідженні висвітлено питання про психологічний механізм сприйняття елементів теорії ймовірностей. Автор вважає, що формування стохастичного мислення у школярів повинно бути зведено до тривалого вивчення статистики у надрах шкільних предметів. На наш погляд, це є малоефективним, оскільки неможливе формування стохастичного мислення без побудови імовірнісних моделей.

Серед наукових праць необхідно відзначити докторську дисертацію математика і методиста А.Плоцкі (1992р.), яку він захистив у Росії в Санкт-Петербурзі. Результати дослідження справили помітний вплив на розвиток методичної думки і поклали початок новому етапу у дослідженні ролі і місця стохастики у системі загальної середньої освіти. А.Плоцкі розглядає стохастику «як становлення і відкриття знань по-новому», «як математику у стадії творення». Вперше при навчанні стохастики пропонується розв'язувати задачі, які не зовсім є математичними. У дослідженні робиться наголос на вивчені стохастики всіма школярами незалежно від типу профілю навчання. Основним недоліком є те, що більшість прикладів базується на азартних іграх [157].

Стан методичної готовності вчителя математики до введення стохастичної лінії в шкільному навчанні розглянутий у докторській дисертації В.Д. Селютіна (2002р.) [179]. В ній розроблені: теоретичні основи імовірнісно-статистичної змістової лінії шкільного курсу математики; концепція формування статистичних уявлень школярів при вивченні математики; теоретичні основи оволодіння спеціальною методикою навчання стохастики в школі; методичне забезпечення готовності вчителя до навчання стохастики. Незважаючи на те, що робота написана в сучасний період, в ній не розглядається ні проблема диференціації, ні індивідуалізації навчання школярів.

Серед дисертаційних робіт виділяється робота А.Я. Дограшвілі [74], націлена на формування в учнів восьмирічної школи вмінь і навичок в галузі теорії ймовірностей, у рамках існуючої програми. У роботі показано, що матеріал курсу восьмирічної школи містить значну частку вправ, зміст яких може бути поєднаним з імовірнісною лінією, або може бути приведеним до нього шляхом незначних модифікацій. Поставлене завдання розв'язується автором в умовах жорсткого обмеження: у рамках існуючої програми, не виділяючи для вивчення теорії ймовірностей окремого часу. Важливість і корисність такого підходу не викликає сумнівів. З плином часу теорія ймовірностей отримала „права громадянства” у загальноосвітній школі і відповідно результати роботи А.Я. Дограшвілі повинні отримати подальший розвиток.

У процесі навчання теорії ймовірностей було зроблено висновок, що досягнення основної мети навчання, формуванню стохастичного мислення не можливе без третьої складової – статистики. Поєднанню початків теорії ймовірностей з елементами статистики присвячені роботи Н.М. Авдєєвої [1], К.Р. Велскера [35], К.М. Куриндіної [120], Д.В. Манєвича [129].

У роботі К.Р. Велскера [35] рекомендується доповнити курс математики загальноосвітньої школи поняттями теорії ймовірностей і математичної статистики. Теорія ймовірностей і математична статистика повинні складати цілісний цикл, який би входив до програми 1-10 класів. У 8 класі необхідно, як вважає автор, ввести коротку і загальну тему „Випадкові події і ймовірність події”. Курс математики 10 класу пропонується доповнити темою „Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики”. До того ж розгляд деяких понять статистики бажано об’єднати з традиційними темами шкільної математики. У цьому курсі необхідно знайомити учнів з поняттям як математичної, так і стохастичної моделі. При навчанні теорії ймовірностей і математичної статистики необхідно мати на увазі розвиток стохастичного мислення і наслідувати виховні цілі, головна з яких – формування світогляду. При доборі задач з даної теми слід враховувати можливість використання додаткових відомостей, набутих при вивченні інших предметів. У зв’язку з цими змінами, з метою розширення змісту, необхідно розробити нову тематику з теорії ймовірностей і математичної статистики для факультативних занять.

Єдиний статистичний підхід до навчання школярів різних дисциплін розглядався у дослідженні К.М. Куриндіної [120] як новий шлях здійснення глибоких міжпредметних зв’язків. Завдяки статистиці ці зв’язки допомагають розв’язати задачу формування стохастичного мислення школярів комплексно, в умовах взаємодії різних освітніх галузей. У роботі К.М. Куриндіної, орієнтованій на десятирічну школу, на нашу думку, недостатньо враховані реальні обмеження на шляху впровадження стохастичної лінії: мотиваційний рівень навчання, перевантаженість шкільних програм, рівень готовності педагогічних кадрів. Будь-яка спроба розширити і поглибити матеріал навчання, повинна здійснюватись обережно і з оглядкою. К.М. Куриндіна вважає необхідним доповнити зміст традиційного курсу такими статистичними методами, як перевірка статистичних гіпотез і кореляційний аналіз. В роботі пропонується використання цього апарату, який автор називає „простейшим" у 6-9 класах при вивченні предметів природничо-наукового циклу. Наприклад, у курсі географії при дослідженні взаємозв'язку основних показників клімату у 7 класі пропонують використовувати поняття рангового коефіцієнту кореляції. Навряд чи повинні включати початкові відомості з теорії ймовірностей для всіх школярів таке спеціальне поняття, як коефіцієнт рангової кореляції. Ще більш необґрунтованим нам здається пропозиція, пов'язана з теорією статистичної перевірки гіпотез, яку б ми не стали відносити до найпростішого математичного апарату, коло понять цієї теорії також виходить за межі тих, з якими більшість учнів навіть ліцеїв і класів з поглибленим вивченням математики не буде зустрічатись у практичній діяльності. Ця критика пов'язана не тільки з ідеєю суцільного і обов'язкового впровадження стохастичної лінії у масовій школі. На нашу думку, введення цих понять у програму шкіл (класів) з поглибленим вивченням математики, тим більше до програми загальноосвітньої школи, недоречне. А от для факультативних занять, математичних гуртків, спецкурсу у профільних економічних або технічних класах подібні пропозиції можуть бути корисними.

Все більше визнання знаходить ідея необхідності прикладної орієнтації навчання теорії ймовірностей. Проблемне виявлення специфіки прикладного спрямування у математиці, як необхідної умови досягнення мети навчання теорії ймовірностей у школі, присвячена дисертація В.В. Фірсова [216]. У дослідженні обґрунтована необхідність прикладної спрямованості курсу теорії ймовірностей у загальноосвітній школі з метою формування стохастичного мислення в учнів. Розроблені змістово-методичні принципи і практичні рекомендації, пов'язані із здійсненням прикладної орієнтації курсу теорії ймовірностей у школі. Теоретично і експериментально обґрунтована можливість навчання теорії ймовірностей у школі як прикладної дисципліни.

У роботі Ж. Кудратова [118] була обґрунтована необхідність включення елементів теоретико-імовірнісних знань у загальну освіту. Наукова новизна дослідження полягає в тому, що вперше питання про формування стохастичного мислення учнів досліджується у плані введення нової імовірнісно-статистичної лінії (з урахуванням міжпредметних зв'язків) у загальне навчання за умови включення в обов'язкові програми з математики теоретико-імовірнісного циклу. Були виявлені протиріччя, що стоять на шляху виховання стохастичного мислення учнів, і намічені шляхи їх подолання. Запропоновано включити в обов'язкові програми з математики теоретико-імовірнісний цикл у об'ємі 40 годин, що складає 3% від загального об'єму математики. Навчання стохастики повинно проводитись: при старанному доборі матеріалу; з використанням інтуїтивного методу навчання; за науково обгрунтованою методикою введення основних понять випадкової події, імовірності, випадкової величини, яка надається у роботі з повторним звертанням у старших класах до основних положень на більш глибокому і високому рівні; при використанні міжпредметних зв'язків для створення наочних уявлень і практичного досвіду учнів, з яких „виростають" центральні поняття імовірностей. Навчання повинно починатися не дуже рано, коли у достатній мірі будуть сформовані згадані вище уявлення і досвід. У віці 13 років основна маса школярів готова сприйняти початки теорії ймовірностей і вступу до статистики, цей висновок зроблено на основі аналізу зарубіжного і вітчизняного досвіду. В роботі підкреслюється, що максимальне використання міжпредметних зв'язків для навчання школярів розв'язування задач, які виникають на практиці, склало б баланс між знаннями і вміннями. При цьому особливо важливим є етап математичної формалізації, тобто переведення задачі з мови предметної галузі на мову теорії ймовірностей.

Л.О. Бичкова присвятила свою кандидатську дисертацію [25] виявленню можливостей і шляхів формування імовірнісно-статистичних уявлень як компонента загальноосвітньої підготовки, направленого на формування наукового світогляду і розвитку стохастичного мислення учнів.

Розв’язанню конкретних науково-методичних проблем професійної підготовки майбутніх вчителів математики при навчанні статистики присвячені дисертаційні дослідження І.Б. Ларіної [121], Е.А. Мірошниченко [133], С.А. Самсонової [175] та інших.

В Україні питанням навчання теорії ймовірностей і математичної статистики була присвячена дисертаційна робота Г.В. Степенко [192]. У роботі характеризуються провідні напрями у навчанні курсу математичної статистики і теорії ймовірностей у середніх школах Японії. Розглядаються особливості змісту цього курсу. Наводяться задачі і приклади з японських підручників математики для загальноосвітніх шкіл. На думку Г.В. Степенко, основні поняття ймовірності і статистики мають велике значення практично у всіх галузях природничих наук і повинні включатися до шкільних програм вже на ранньому етапі. До того ж цей матеріал є необхідним для реалізації цілей навчання математики, оскільки „нова” математика, саме у силу свого „скінченного” характеру, більш доступна для починаючих, ніж класичний математичний аналіз, вона скоріше може зацікавити учня і викликати менше труднощів, оскільки підходить для навчання на ранніх стадіях.

Цікавою є і робота В.О. Петрук [149], присвячена ігровим формам навчання теорії ймовірностей і математичної статистики у ВЗО. В ній підкреслюється необхідність формування стохастичного мислення ще в шкільні роки. Запропоновані ігри можуть бути використані при навчанні стохастики в класах економічного і технічного спрямування.

В Україні існує практичний досвід вивчення елементів стохастики у республіканській фізико-математичній школі-інтернаті при Київському державному університеті ім.. Т.Г. Шевченка. Його результати були опубліковані в журналі „Математика в школі” [31, 32]. Л.І. Ващенко розробила програму факультативного курсу і теми курсових робіт; методику введення теоретико-множинним шляхом поняття випадкової події і поняття імовірності випадкової події в обов'язковому курсі середньої школи. Розроблена методика підкріплена розглядом прикладів і задач, доступних для учнів.

За цей час, а саме 60-90-х років XX ст., накопичився певний досвід у вивченні елементів стохастики. Були випущені учбові і методичні посібники, призначені для факультативних занять і для класів з поглибленим викладанням математики.

Спроби введення елементів стохастики були відображені вперше в учбовому посібнику алгебра і початки аналізу за редакцією А.М. Колмогорова [9]. У подальшій редакції глави з комбінаторики і початків теорії ймовірностей були вилучені.

Довгі роки навчання в класах і школах з поглибленим вивченням математики проходило за учбовим посібником «Алгебра і математичний аналіз» для 10 класу авторів І.Я. Віленкіна, О.С. Івашева-Мусатого, С.І. Шварцбурда [7] 1993 року видання, який містив елементи комбінаторики і елементи теорії ймовірностей. Але ці учбові посібники так і не набули статусу підручника.

У книзі В.Г. Тарнопольського і В.Г. Васильченко [197] просто і дохідливо викладено елементи теорії ймовірностей, розглянуто велику кількість прикладів, до яких надано відповіді. Книга призначена для вчителів. Проте вона буде корисною і для учнів. Тим більше у сучасний період.

Досвід С.В. Лютікаса знайшов оформлення у вигляді книги [124], яка була рекомендована головним навчально-методичним управлінням загальної середньої освіти Державного комітету СРСР з народної освіти, як учбовий посібник для 8-10 класів середньої школи. В ній доступно розкриті елементарні відомості з теорії ймовірностей. Автор ставить за мету навчити юного читача використовувати їх при розв'язуванні практичних задач. Для того, щоб ця мета була досягнута, автор намагався виходити з можливих інтересів школярів. У посібнику відсутні розділи, пов'язані зі статистикою, але на початку книги розглядається зв'язок між статистикою і теорією ймовірностей. Теоретичний матеріал, який містить такі розділи, як „Випадкові події” і „Випадкові величини” закінчується розглядом цікавих прикладних імовірнісних задач.

У книзі А. Плоцкі „Вероятность в задачах для школьников” [155] за допомогою імовірнісних задач автор навчає читача приймати обґрунтовані рішення в ситуаціях з випадковими подіями, оцінювати степінь ризику, показує моделі раціональної поведінки, знайомить з переконливими засобами аргументації. Необхідний теоретичний матеріал подається як інструмент розв’язування цих задач. Багато наведених задач, які містяться у книзі – зовсім не є математичними. Їх сутність зводиться до того, щоб розв’язувати життєві ситуації, пов’язані зі стохастикою: чи є справедливою дана гра; який замок купити; чи є мотиви, щоб підозрювати людину в наклепі; чи є даний факт результатом знань, таланту або випадку. Роль учня у цих задачах зводиться до того, щоб перевести нематематичні проблеми на мову математики. У книзі наводяться приклади розв’язування складних стохастичних задач більш простими способами. Книга розрахована на всіх учнів. І навіть на тих, хто не любить математику. Наприкінці книги розміщені вказівки, які призначаються вчителю. Основним недоліком даної книги, на наш погляд, є розгляд великої кількості задач, безпосередньо пов’язаних з азартними іграми.

Всі ці учбові видання були розраховані на вивчення стохастики в класах з поглибленим вивченням математики або на факультативних заняттях. У більшості з них не розглядалася статистика, у крайньому випадку наводився приклад статистичного дослідження при введенні означення імовірності. Розглянуті приклади в своїй більшості базувалися на підкиданні монети, посібники практично не містили прикладних задач, не враховували диференціацію у навчанні.

З введенням нової змістової лінії „Елементи теорії множин і комбінаторика”, „Елементи стохастики” у програму загальноосвітньої школи з новою гостротою постало питання навчання елементів стохастики у ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики.

В останні роки з’явилися нові шкільні підручники, у яких розглянуті питання імовірнісно-статистичного змісту. Серед них необхідно виділити такі, які містять елементи стохастики. В пробному підручнику Г.П. Бевза для 7-9 класів [14] в останньому розділі “Елементи прикладної математики” вміщено параграф “Перші відомості про статистику”, що складає 2% від загального обсягу. На жаль, наданий статистичний матеріал не пов’язаний з іншими предметами. Після теоретичного матеріалу запропоновано лише 8 завдань, які, як і весь підручник, не мають поділу на рівні.

У підручнику з алгебри для 8 класу за редакцією Ю.І. Мальованого [3] 2002 року видання останнім підпунктом заключного параграфу „Функції” запропоновано „Статистичні дані і їх зображення” (2,5% від загального обсягу). Цей теоретичний матеріал і задачі (яких запропоновано 7) до нього, на думку авторів, відповідають високому рівню навчальних досягнень учнів з алгебри. Необхідно відмітити вдале поєднання теоретичного матеріалу з географічними даними України.

Останніми параграфами підручника алгебра 9 авторів Г.М. Возняк і Г.М. Литвиненко 2001 року видання [4] є „Елементи статистики”, „Елементи комбінаторики” і „Елементи теорії ймовірностей”, це складає 21%. Всі параграфи завершуються запитаннями для перевірки і варіантами письмових робіт. Більшість задач, які пропонуються, є задачами обов’язкового рівня (всього 124).

Незважаючи на те, що у підручниках [3,4,14] зроблено спробу передати матеріал статистики і теорії ймовірностей, хотілося б, щоб вони були більш цікавими для учнів, тобто містили матеріал, який би був пов’язаний з іншими предметами, давав можливість бачити необхідність його використання в майбутньому житті. Бажано чітко виділити рівні завдань після кожного пункту.

Перші посібники з алгебри для 8, 9 класу з поглибленим вивченням математики, які були видані в Україні у 1990 році, на жаль не містили ні початків теорії ймовірностей, ні вступу до статистики.

Перейдемо до підручників для старшої школи.

Підручник «Алгебра і початки аналізу» [6], хоча і є підручником для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів, використовується вчителями (за результатами нашого анкетування) в 63% випадків для викладання елементів стохастики в ліцеях і класах з поглибленим викладанням математики. Його автори М.І. Шкіль, З.І. Слєпкань, О.С. Дубинчук. Він затверджений Міністерством освіти і науки України. Підручник встановлює систематичні зв'язки з практикою, проте оскільки підручник не призначений для шкіл і класів з поглибленим вивченням математики, то він не забезпечує повністю матеріалом існуючу програму для зазначених класів з початків теорії ймовірностей і вступу до статистики. Три його останні розділи це: „Елементи комбінаторики" (6% від загального обсягу), „Початки теорії ймовірностей" (14%), „Вступ до статистики" (6%), пов'язані між собою.

Пропонований підручник [6] ставить за мету забезпечити диференційоване навчання алгебри і початків аналізу. В ньому представлений матеріал для трьох рівнів складності (всього 136 задач). Рівень А – обов'язковий (рівень освітнього стандарту), Б – підвищений, В – поглиблений. Рівні Б і В запропоновані для тих учнів, які мають бажання і можливості засвоїти алгебру і початки аналізу в ширшому і глибшому обсязі. Перші два рівні складають базовий рівень навчання. Наприкінці кожного параграфа пропонуються запитання і завдання для повторення одного рівня, наводяться історичні довідки. Основною відмінністю даного підручника від усіх діючих, є те, що в ньому показаний зв'язок між випадком і закономірністю на реальних прикладах, які учень може перевірити експериментально. Запропоновані задачі якщо не є прикладними, то ілюструють прикладні ситуації.

Наступний підручник - Алгебра і початки аналізу, підручник для 11 класу з поглибленим вивченням математики в середніх закладах освіти, автори М.І. Шкіль, Т.В. Колесник, Т.М. Хмара, допущений Міністерством освіти України [5]. Його заключні розділи містять основні відомості з теорії комбінаторики (10% від загального обсягу), елементи математичної статистики

(4%), елементи теорії ймовірностей (15%). У цьому підручнику теорія, як правило, засвоюється і осмислюється у процесі розв’язування задач, тому 192 вправи є органічною складовою і доповненням теоретичної частини підручника. Але, на жаль, не кожен відповідний параграф супроводжується системою вправ трьох рівнів складності, запропонованих в підручнику. Вправи першого рівня (А) передбачають відтворення викладеного матеріалу і забезпечують засвоєння нових математичних понять та способів дій. Другий рівень (Б) – застосування засвоєних понять та способів дій до розв’язування нестандартних задач. Завдання третього рівня (В) за своєю складністю відповідають конкурсним завданням і вимагають творчого підходу. Саме вони відсутні в параграфах „Початки теорії ймовірностей” і „Випадкові величини”. А завдання до початків математичної статистики не поділені за рівнями. Контрольні запитання і завдання двох рівнів: А і Б, подані після завершення кожної теми, призначені для встановлення і аналізу логічних зв’язків курсу, систематизації і узагальненню знань. У підручнику зроблено перший крок до введення випадкових величин.

Таблиця 1.2

Порівняння змісту підручників

Теми та їх послідовність	Кількість задач та їх відсоток			
	рівень А	рівень Б	Рівень В	Всього
М.І. Шкіль, З.І. Слєпкань, О.С. Дубинчук. Алгебра і початки аналізу, підручник для 11 класу загальноосвітніх шкіл.				
1. Елементи комбінаторики	13 36%	11 31%	12 33%	36 26%
2. Початки теорії ймовірності	19	58	17	94

	20%	62%	18%	70%
3. Вступ до статистики	не поділені на рівні			6 4%
М.І. Шкіль, Т.В. Колесник, Т.М. Хмара. Алгебра і початки аналізу, підручник для 11 класу з поглибленим вивченням математики в середніх закладах освіти.				
1. Елементи комбінаторики	42 54%	23 30%	13 16%	78 40%
2. Початки математичної статистики	не поділені на рівні			9 5%
3. Початки теорії ймовірності	59 60%	41 40%	-	100 52%
4. Випадкові величини	3 60%	2 40%	-	5 3%

При порівнянні підручників [5] і [6] (див. табл.1.2) можна зробити висновки, що відповідні параграфи „Вступ до статистики" і „Початки математичної статистики" мають різну назву, різне розташування, мають однаковий зміст, але однаково не поділені на рівні. Незважаючи на те, що підручник [5] призначений для шкіл і класів з поглибленим вивченням математики, він не містить для розділів „Початки теорії ймовірностей" і „Випадкові величини" рівня В. За розподілом учбового матеріалу стохастики за складовими можна зробити висновки, що комбінаторна складова підручника [5] на 14 % більша, ніж підручника [6], і, навпаки, для імовірнісної складової підручник [5] містить матеріалу на 15% менше. Статистичні складові практично рівні, але дуже невеликі за обсягом, що пояснюється тим, що загальноосвітній школі на вивчення статистики відводиться всього 4 год.

Хотілося б відмітити посібник для шкіл та класів з поглибленим вивченням математики авторів Л.М. Вивальнюк, З.Г.Шефтель, Е.В. Рафаловський [36], який рекомендується Міністерством освіти України. Стохастичні розділи підручника розробив З.Г. Шефтель. В ньому наведені приклади розв’язування складних імовірнісних задач. І хоча посібник 1998 року видання, він не містить розділу статистика і завдання не поділені на рівні складності.

Оскільки шкільний підручних одночасно є збірником задач і методичним посібником, зрозуміло, що в ньому неможливо, при всьому бажанні, розкрити у подробицях методику навчання того чи іншого питання.

Книга „Комбінаторика і теорія ймовірностей у школі” авторів В.Ф. Процай і Ю.В. Новикова 1997 року видання є навчальним посібником з комбінаторики та теорії ймовірностей у їхньому прикладному аспекті для вчителів та учнів загальноосвітніх та спеціалізованих шкіл [167]. Головна мета посібника полягає у тому, щоб сприяти глибокому засвоєнню початків теорії ймовірностей та комбінаторики учнями загальноосвітньої школи, розвитку їх конкретного математичного мислення, критичного ставлення до матеріалу, що вивчається. У посібнику наведено розв’язання понад 200 задач. Від базового (А) рівня до ускладненого (В) рівня. Серед них є значна кількість задач, відповіді яких мають характер парадоксів. Саме класичні парадокси відіграли вирішальну роль у народженні та розвитку теорії ймовірностей як науки. На початку кожного параграфа наводяться теоретичні відомості, що викладені у формі, яка дозволяє використовувати посібник як автономний засіб вивчення комбінаторики і початків теорії ймовірностей. Вивчення теорії ймовірностей проводиться через побудову моделей (класичну, геометричну, Бернуллі). На жаль, матеріалами для написання стали в основному задачі та вправи з діючих підручників [6, 7]. Така робота є надзвичайно шкідливою як для вчителів, так і особливо для учнів. Не можна стверджувати, що на цей час „це єдине видання підготовлене для школи, що відповідає діючій програмі”. Тим більше, що в ньому відсутній розділ статистики, не показаний зв’язок між трьома основними складовими нової змістової лінії. Більшість прикладів розглядається з використанням кубиків або монет. Мало задач з практичним змістом і відсутні прикладні задачі. Те ж саме можна сказати і про книгу О.В. Середкіної, О.О. Борисенко, Т.О. Ужакової [17]. Такі роботи позбавляють вчителя і учнів мотивації самостійно розв'язувати задачі з шкільних підручників і підривають тим самим основи впровадження не тільки стохастики в шкільний курс, а й шкільної математичної освіти взагалі.

Книга О.С. Істера [97], видана 1998 році, містить близько 700 задач, з яких близько 400 – розв'язані. Серед задач є як задачі з відомих збірників, так і оригінальні авторські. В кожному параграфі задачі розміщені (на думку автора) в порядку зростання складності за винятком тих випадків, коли на початку параграфа розв'язується загальна задача і виводиться формула, що потім застосовується, і тих випадків коли параграф складається з кількох самостійних частин (тоді принцип від легкого до важкого діє в кожній такій частині). Багато задач розв'язується не з числами, а з буквами (а, в, р), замінивши які на числа, вчитель отримає багатий дидактичний матеріал. На жаль, олімпіадні задачі надані лише для глави „Комбінаторика без повторень".

Необхідно виділити посібник М.І. Жалдака, Г.О. Михаліна „Елементи стохастики з комп'ютерною підтримкою" [88] та серію статей [85, 86, 135, 136]. На думку авторів він містить мінімум відомостей з теорії ймовірностей та математичної статистики, який можна прийняти базовим для середніх навчальних закладів. На відміну від більшості посібників, так чи інакше орієнтованих на формування такого мінімуму, матеріал подається не тільки на інтуїтивному рівні, а й паралельно формується уявлення про сучасний, тобто аксіоматичний метод побудови теорії ймовірностей. У зв'язку з цим відсутні елементи комбінаторики, оскільки на думку авторів, вони не потрібні для формування початкових знань з теорії ймовірностей і математичної статистики. Не згадується класичне означення, замість цього використовується статистичний або емпіричний підхід.

Безперечно, корисним і необхідним при навчанні початків теорії ймовірностей і елементів статистики буде використання збірника прикладних задач з алгебри і початків аналізу для 10-11 класів Л.О. Соколенко [189] та нова редакція збірника задач з алгебри для 6-8 класів Н.Н. Шунди [230].

На жаль, як показують опитування вчителів, багато з них знайомі з цією літературою лише поверхово, крім, звичайно, підручників, а у значній частині – не знайомі зовсім. У наш час для більшості вчителів математики українських шкіл основним (а під час і єдиним) джерелом готовності до навчання дітей елементів стохастики є перш за все публікації М.І.Жалдака і Г.О.Михаліна [85, 86,88, 135, 136] та інших вітчизняних авторів [2, 31, 32, 37, 40, 92, 232, 233, 234], а також закордонний досвід навчання школярів елементів науки про випадкове [28, 29, 30, 47, 154, 155, 156, 168], методичні посібники окремих українських авторів [36, 97], особистий досвід вивчення теорії ймовірностей. Тому, на жаль, цей досвід не забезпечує високого рівня оволодіння методикою навчання школярів стохастики.

Необхідною умовою успішного навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики у ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики є розробка якісного навчально-методичного забезпечення. Воно повинно містити розділи підручника, збірник задач, дидактичні матеріали, збірник тестів, посібник для вчителя, який би описував такі своєрідні засоби навчання, як ігри, експерименти, спостереження, лабораторні роботи, давав би змогу підвищити вчителю свій рівень, підвищити якість уроків, зекономити час підготовки до них.

Успіх навчання елементів стохастики в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики значною мірою залежить від всебічної готовності вчителя до цієї роботи: психологічної, математичної, методичної. Отже, необхідна відповідна система підготовки майбутніх вчителів і перепідготовки тих, які працюють зараз. Досвід показує, що навіть успішне засвоєння вузівського курсу теорії ймовірностей і математичної статистики є необхідною але недостатньою умовою підготовки вчителя, здатного якісно працювати в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики.

Але незважаючи на накопичений досвід, методиці навчання початків теорії ймовірностей і елементам статистики не приділяється належної уваги у курсі методики навчанняматематики у вузах, тому нашим вчителям доводиться задовольнятися тією малочисельною навчально-методичною літературою, до якої вони мають доступ.

Стан методичної готовності вчителя визначається багатьма факторами. Провідне значення має фундаментальна підготовка, що забезпечує певний обсяг знань, умінь і навичок, що відносяться до фактів і закономірностей тієї науки, основи якої повинні засвоїти учні. Теорія ймовірностей є базовою для всіх інших стохастичних теорій. Вона вивчається у педагогічних вузах на фізико-математичних факультетах з 1969 року. Елементи теорії ймовірностей цього ж року були включені в загальноосвітній курс вищої математики фізичного і біологічного факультетів.

Розрив стохастики педагогічного університету з реальною дійсністю, з практикою дуже великий. „Студенти не відчувають необхідності у глибокому і детальному розгляді основних розділів стохастики, пам’ятаючи про те, що під час їх навчання у школі як правило не приділялося належної уваги з боку вчителів до цієї науки. У результаті, в школу зазвичай приходить учитель з поверховим знанням теорії ймовірностей, що має туманні уявлення про практичну цінність теорії ймовірностей у всіх сферах нашого життя, не розуміючи важливості її ролі у конструюванні фундаментальних понять нашого світогляду. Як наслідок, відповідні знання набуває його учень – потенційний студент” [175].

А. Плоцкі стверджує: „Випускники вузів, що прослухали курс формальної стохастики, мають у більшості випадків відносно низьку стохастичну культуру”, що підтвердили його дослідження „У оцінках інтуїтивного характеру вони допускають ті ж помилки, що і люди, які не мають будь-яких стохастичних уявлень” [157].

По відношенню до стану готовності українських вчителів навчати школярів елементів стохастики в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики (за проведеним анкетуванням див. додаток В) можна виділити такі групи:

- вчителі, діяльність яких після вузівського навчання ніяким чином не стосувалась стохастики. Таких вчителів більшість (у нашому експерименті 58%-60%); більша частина з них, особливо з великим стажем педагогічної діяльності, з обачністю і недовірою ставляться навіть до введення стохастики;
- вчителі, що підтримують шляхом самоосвіти певний рівень теоретичних знань і навичок розв'язування імовірнісних задач. Зокрема, вчителі, до яких звертаються студенти – заочники, які проходять дистанційне навчання у віддалених учбових закладах (10%). Ця категорія вчителів характеризується впевненістю у своїх можливостях при навчанні дітей. Однак, їм лише тільки здається, що вони мають готовність, але вона має однобокий характер, оскільки, крім спрощеного варіанту вузівського навчання теорії ймовірностей, інших підходів вони не уявляють;
- вчителі, що мають деякий досвід навчання школярів елементів стохастики на факультативних заняттях, в класах з поглибленим вивченням математики, спеціалізованих класах і так далі, ще до введення нової змістової лінії. Таких вчителів небагато (у нашому експерименті 4%), оскільки у більшості випадків цей учбовий матеріал для школярів був не обов'язковим і обирався за бажанням вчителів. Вони виказують незадоволення, констатуючи факт інорідності і ізольованості даної теми від інших розділів шкільної математики. Їх педагогічний досвід сприяє закріпленню стереотипу, що початки теорії ймовірностей і вступу до статистики сприймаються як додаток до комбінаторики;
- вчителі, знайомство яких з новою імовірнісно-статистичною лінією обмежується прочитаними публікаціями в журналах і газетах і переглянутою методичною літературою (12%). Як правило, вони позитивно ставляться до змін, які повинні відбутися, не уявляючи всіх труднощів на цьому шляху;

- вчителі, які працюють за новими шкільними підручниками, в основу яких покладена концепція формування стохастичних уявлень. Таких вчителів поки що мало, але з кожним роком їх число збільшується (у нашому експерименті з 6% до 36% з 1999 по 2003р.). Вони вже мали змогу відчути специфіку методики навчання елементів стохастики, однак відчувають деяку розгубленість перед нестандартністю підходів до аналізу випадкових явищ і незвичайністю імовірнісних умовиводів. Будучи не озброєними теоретичною концепцією навчання школярів елементів стохастики, добре не уявляючи собі цілей, не знаючи математичних основ учбового матеріалу, який пропонується вивчати дітям, ці вчителі відчувають великий розрив між стохастикою як наукою і шкільною реальністю.

У реальній практиці навчання математики як завжди робиться акцент на засвоєння учнями готових відомостей, а не на пізнання навколишньої дійсності методами математики, на відшукання єдиної, наперед заданої відповіді, а не на варіативність і багатоманітність пізнання, на використання репродуктивних, а не креативних способів діяльності. Відповідно до формування основних понять стохастики вчителі орієнтовані на прокладений шлях класичної сенсуальної механічної психології, коли поняття вводяться шляхом означення, а потім ілюструються серією прикладів і задач обчислювального характеру. Те, що при навчанні елементів стохастики альтернативу обчисленням складають інші, більш важливі форми математичної діяльності, для багатьох залишається невідомим. У цьому і полягає важлива перешкода при поглибленому навчанні початків теорії ймовірностей і елементів математичної статистики у школі. Таким чином, на основі аналізу навчання теорії ймовірностей у вузах, аналізу доступної вчителям методичної літератури, опитувань і бесід з вчителями і вивчення досвіду навчання елементів стохастики у школах і класах з поглибленим вивченням математики, власного досвіду цієї роботи, приходимо до висновку, що в наш час стан підготовки більшості шкільних вчителів математики (і не тільки) до навчання стохастики не відповідає вимогам навчання нової змістово-методичної лінії, як у звичайних класах, так і з поглибленим вивченням предмету.

„Готовність” більшості сучасних українських вчителів спрямована на набуття формальних знань у світі математичної абстракції і розвитку техніки обчислень. Вона характеризується переусвідомленням цілей навчання стохастики, ролі прикладної спрямованості навчання, змісту (ототожнюють його з вузівським), специфіки диференціації навчання, стохастичній методології, специфіки методики навчання. Орієнтувальне поле сучасної підготовки вчителів до реалізації нової стохастичної лінії не відповідає результатам навчання школярів, які передбачаються.

На наш погляд особливу увагу треба звернути на курс теорії ймовірностей і математичної статистики для майбутніх вчителів, який повинен бути пронизаним педагогічною спрямованістю, а це означає:

1) ретельний добір змісту;
2) підсилення прикладної спрямованості;
3) підсилення міжпредметних зв’язків;
4) природно вплетені методичні рекомендації.

Бажано проводити імовірнісно-статистичну підготовку майбутніх вчителів і у загальному курсі методики навчання математики, доповнити його темами з поглибленого шкільного курсу елементів стохастики. Тематика курсових і дипломних робіт з методики навчання математики повинна містити теми, пов’язані з новою змістовою лінією, з урахуванням профільної і рівневої диференціації навчання.

Велике значення саме для профільної освіти має застосування стохастики в навчанні інших предметів. Це викликає необхідність забезпечити підготовку вчителів з відповідних предметів.

Поряд з підготовкою молодих вчителів, актуальною є проблема підвищення кваліфікації вчителів математики та інших предметів, які працюють зараз або будуть працювати у ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики. Головним завданням системи підвищення кваліфікації є надання допомоги вчителям в оволодінні сучасними педагогічними ідеями, технологіями, педагогічним досвідом.

За результатами нашого дослідження були виявлені такі протиріччя у навчанні елементів стохастики:

1) програми для шкіл і класів з поглибленим вивченням математики не в повній мірі відповідають сучасному рівню розвитку математики і сучасним вимогам суспільства;
2) обсяг і рівень складності матеріалу з елементів стохастики у ряді педагогічних досліджень, навіть для ліцеїв і класів з поглибленим вивченням математики, є завищеним у відношенні навіть до рівня необхідного при поглибленому навчанні. Надмірний обсяг і невиправдана складність перешкоджають розумінню і розвивають в учнів невіру у свої сили;
3) існує розрив між знаннями, навичками і вміннями: процес формалізації практичної задачі, пов'язаної з випадковим явищем, викликає великі труднощі навіть при наявності теоретичних знань;
4) більшість учнів не можуть розв'язувати навіть прості імовірнісні задачі, оскільки не чітко уявляють, що таке елементарна подія і випадкова подія. Дуже часто плутають поняття незалежність і несумісність випадкових подій. А це в свою чергу призводить до неправильного використання теореми додавання і множення ймовірностей;
5) учні іноді не можуть відрізняти імовірність перетину випадкових подій від умовної ймовірності;
6) не завжди правильно розуміють імовірнісний зміст числових характеристик випадкових величин, не говорячи про економічний, технічний.

1.4. Психолого-педагогічні передумови і методичні вимоги до навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в ліцеях і класах з

поглибленим вивченням математики

Загальна мета вивчення початків теорії ймовірностей і вступу до статистики у середній школі визначена наприкінці 60-х років XX сторіччя академіком Б.В. Гнєденком: „ознайомлення школярів із закономірностями більш широкого типу, ніж класичний детермінізм, а саме – зі статистичними закономірностями” [54]. З того часу завдання розвитку у школярів статистичних закономірностей прийнято називати у методичній літературі задачею формування стохастичного мислення учнів. На наш погляд співвідношення між поняттями мислення, математичного мислення і його компонентами, зокрема стохастичного мислення. можна надати у вигляді схеми (див. додаток Д).

Критеріями розв’язання завдання формування стохастичного мислення є: розуміння сутності понять і законів стохастики; вміння розв’язувати якісні стохастичні задачі, тобто вміння робити якісні висновки на базі наявних статистичних даних керуючись провідними міркуваннями, що базуються на інтуїції.

Вміння робити якісні висновки на основі правдоподібних міркувань свідчить про правильну математичну інтуїцію учня у імовірнісних ситуаціях; що є необхідною передумовою успішності навчання” [129].

Треба зазначити, що навчання теорії ймовірностей, яке базується лише на вивченні конкретних імовірнісних моделей, може не призвести до розв’язання завдання – формування статистичного мислення учнів. За умови достатнього знайомства з певною імовірнісною моделлю учень зможе формально оперувати з нею достатньо впевнено, проте з точки зору завдань навчання це не є достатнім, оскільки таке оперування ще не свідчить про сформованість стохастичного мислення, оскільки учень може бути безпорадним при побудові нових, навіть досить простих імовірнісних моделей.

Достатньо глибоке проникнення у ймовірнісні моделі неможливе, якщо не існує фундаменту для цього. Звідси випливає необхідність формування стохастичних уявлень та розвитку імовірнісної інтуїції учнів протягом всього навчання.

Думки педагогів і методистів про причини складності навчання школярів початків теорії ймовірностей і вступу до статистики практично збігаються. У якості головної причини вказують невисокий рівень стохастичних уявлень і стохастичного мислення учнів, а також слабкий розвиток логічного апарату. Закономірно виникає питання - хто, коли і яким чином повинен починати формування цих структур розумового апарату, оскільки, очевидно, самі вони не утворюються.

Дослідження психологів Ж. Піаже [150, 151] і Є. Фішбейна [244] показують, що людина початково погано пристосована до імовірнісної оцінки, до усвідомлення та імовірнісної інтерпретації імовірнісно-статистичних даних. Експериментально встановлено, що навіть ґрунтовні знання і розуміння інших розділів математики (які, як правило, мають учні в ліцеях і класах з поглибленим вивченням предмету) ще не забезпечує розвитку стохастичного мислення і не позбавить навіть від тривіальних імовірнісних забобонів і оман.

Методичною аксіомою можна вважати те, що стохастичне мислення у більшій мірі можна сформувати, але не відразу, не в одну мить. Однак питання про вік, найбільш сприятливий для ефективного розвитку стохастичного мислення, розв’язується не так одностайно [25].

Досвід показує, що в учня початкової школи недостатньо сформоване уявлення про світ, не вистачає математичного апарату (перш за все звичайних дробів) для формування уявлень про імовірність. Водночас знайомство з простими випадковими експериментами та їх результатами – елементарними подіями, формування поняття випадкової події та її абсолютної частоти, основи описової статистики, таблиці, діаграми є можливим і навіть необхідним для введення в початкову школу [193].

Також встановлено, що починати навчання основ теорії ймовірностей у старших класах – малоефективно. Напрацьоване до цього часу прагнення до швидкої формалізації знань, сформоване традиційним курсом математики, бажання засвоїти на уроці перш за все певний набір правил, алгоритмів і методів обчислення фактично замінює формування імовірнісних уявлень формальним вивченням формул комбінаторики і обчисленням імовірностей за класичною моделлю Лапласа.

Обговорення, на якісному рівні імовірнісних ситуацій з учнями старших класів, що засвоїли формальний курс основ теорії ймовірностей, показує, що знання лише комбінаторики і однієї класичної імовірнісної моделі не сприяє розвитку імовірнісної інтуїції і вичерпанню традиційних імовірнісних забобонів.

Навіть у ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики навчання теорії ймовірностей традиційним шляхом дає в основному негативний результат. Навіть для учнів даних класів матеріал здавався складним, формальним, погано засвоювався.

Змальована ситуація схожа на проблеми вивчення геометрії в школі, де на сьогодні, загальновизнаним є необхідність періоду „наочної геометрії" і попередньої роботи з учнями стосовно формуванню просторових уявлень ще до систематичного вивчення курсів планіметрії і стереометрії.

«Уявлення - процес і результат відтворення у вигляді образу якого-небудь об'єкта, події, явища» [140].

Роль і характер уявлень учнів змінюються зі зміною їх віку. П.П. Блонский, розділяючи уявлення за походженням на індивідуальні і загальні, показав, що якщо в молодших класах в уявленнях на перший план виступає дія з предметом, то у середніх класах предмет фігурує в уявленнях у складному контексті різноманітних зв'язків, а в старших класах на перший план виступає вже не сам предмет, а ті зв'язки і відносини, у яких він існує. «З віком уявлення стає, по-перше, ширше, по-друге, детальніше, складається з більшої кількості ознак, змістовніше» [16, с.196].

З віком в учнів змінюється характер уявлень: образ інтерпретується інакше, узагальнюється, диференціюється [131].

Уявлення не виникають самі по собі, вони формуються і розвиваються тільки в процесі деякої діяльності.

За змістом розрізняють уявлення: географічні, математичні, технічні, музичні і т.п. У цю класифікацію ми включаємо і стохастичні уявлення.

У дослідженнях закордонних психологів розглядаються деякі аспекти проблеми розвитку ймовірнісно-статистичних уявлень у дітей. У роботах Ж.Піаже і Б.Інельдера [151] встановлюється зв'язок між імовірнісними уявленнями дитини і здатністю виконувати формальні логічні операції. Д.Грін [239], Е.Фішбейн [244] приділяють увагу рівневі розвитку імовірнісних уявлень у дітей різного віку.

На жаль, у вітчизняній психології мало приділяється уваги дослідженням закономірностей формування імовірнісно-статистичних уявлень. Однак у працях багатьох авторів, що вивчали різні сторони психічних процесів, маються положення, що можуть бути основою для розв’язування завдань формування стохастичних уявлень. Крім того, у психології з'ясовані загальні закономірності формування різних уявлень: просторових, топографічних, музичних і т.п. Ми виходимо з того, що загальні закономірності формування і розвитку уявлень про істотні взаємозв'язки дійсності зберігають своє значення й у формуванні стохастичних уявлень.

У роботах з методики навчання математики й інших предметів термін «стохастичні уявлення» використовується досить широко. Найбільш докладно розроблено це питання в роботах А.А. Пінського і Л.С. Шуригіної [152], які показують, що стохастичні уявлення - це «уявлення про гнучкий «імовірнісний» світ з нежорсткими зв'язками між явищами і величинами, що їх характеризують».

Зупинимося на характеристиці стохастичних уявлень. Методологічною основою цього питання є філософське вчення про діалектичну єдність випадкового і необхідного. Необхідність має причину в собі самій. Вона з неминучістю випливає з внутрішніх зв'язків слідування явища. Випадкове може з'явитися в результаті перетину різних причинно - обумовлених необхідних явищ, коли зв'язки між ними є не стійкими. «Випадок - інша назва нерегулярних, несталих причин» [119, с.10].

Зустрівшись з конкретними проявами випадковості, людина поступово одержує уявлення про них. Властивості випадкових явищ розкриваються лише тоді, коли організоване їх масове спостереження: якщо розглядати кожен окремий випадок, у якому панує випадковість, то внутрішній закон, який прокладає собі дорогу через ці випадки і регулює їх, стає видимим лише тоді, коли вони охоплюються у великих масах.

На відміну від закону твердої детермінації статистична закономірність припускає мимовільні, безладні відхилення (флуктуації) окремих явищ від тієї закономірності, що характеризує рівновагу всього процесу. О.С. Кравець пояснює це розходження особливою «імовірнісною структурою» стохастичних явищ, специфічні риси якої полягають у єдності: а) ірегулярності і стійкості; б) автономності і залежності; в) безладдя і порядку в класі подій [112, с.56].

Можна сказати, що стохастичні уявлення пов'язані з філософською категорією «випадковість» і співвідношенням її з іншою філософською категорією - «необхідність». У ході вивчення реальних явищ і процесів, що є наслідками нерегулярних, несталих причин, і відбувається формування імовірнісно-статистичних уявлень.

Математичні моделі випадкових явищ і процесів розглядає теорія ймовірностей, вивчення якої при дотриманні принципу прикладної спрямованості сприяє формуванню і розвитку стохастичних уявлень. Однак, як показано в ряді робіт [120, 215], саме це вивчення має потребу в деякому запасі попередньо накопичених уявлень. Ці уявлення називають початковими стохастичними уявленнями.

Для того щоб усі теоретико-імовірнісні висновки і конструкції були ясними і зрозумілими учням, необхідно систематизувати стихійно виникаючі інтуїтивні уявлення. Це вимагає, як говорить А.Плоцкі, «умілого введення учня в процес вивчення теорії, розгорнутої пропедевтики теоретичного матеріалу» [157, с.17].

Для успішного засвоєння таких математичних понять як «подія» і «імовірність події» необхідні уявлення про неоднозначність і мінливість явищ реальної дійсності, випадкові, вірогідні і неможливі події, «більш можливі», «менш можливі» і «рівноможливі» події.

Усе це дозволяє до початкових статистичних уявлень віднести уявлення про:

1) неоднозначності і мінливості явищ, випадкові, вірогідні і неможливі події;

2) «більш можливі», «менш можливі» і «рівноможливі» події;

3) статистичні сукупності і варіаційні ознаки;

4) конкретні прояви статистичної стійкості частот масових, випадкових явищ;

Виділений склад первісних стохастичних уявлень повинен визначати як зміст відповідного навчального матеріалу, так і відповідну методику його вивчення.

Реальні випадкові події широко представлені в навколишньому світі. Пізнання дитиною навколишнього світу починається від сприйняття одиничних предметів і явищ до утворення конкретних уявлень і від узагальнення останніх до формування понять. Тому, початком формування стохастичних уявлень треба вважати сприйняття дітьми конкретних, випадкових явищ, знайомство з конкретними статистичними сукупностями: „Я досі пам’ятаю, як одного разу, коли я був ще дитиною, мій батько привів мене на край міста, де на березі стояли верби, і велів мені зірвати навмання сотню листочків верби. Після відбору листя з пошкодженими кінчиками у нас залишилося 89 цілих листочків, коли ми повернулися додому, ми розташували їх у ряд у порядку зростання, як шеренгу солдат. Потім мій батько крізь кінчики листків провів криву і сказав:

„Це і є крива Кетле. Подивись на неї, ти бачиш, що посередності завжди складають більшість і лише дехто піднімається вище або так і залишається внизу.” [27, с.84]

Сьогодні ми знаємо цього хлопчика як чудового математика Б.Л. Ван дер Вардена. Його курс математичної статистики наповнений реальними живими прикладами з фізики, хімії, астрономії, геодезії і метеорології, біології і психології, медицини і гігієни, статистики населення, економічної статистики, технічних додатків.

Розрізняють такі три етапи формування стохастичних уявлень школярів:

1)знайомство з найпростішими стохастичними ситуаціями;

2)нагромадження систематизованих уявлень про явища стохастичної природи;

3)створення науково-теоретичної основи стохастичних уявлень.

Перші два етапи пов'язані з формуванням початкових стохастичних уявлень, третій - з вивченням елементів стохастики.

Формування уявлень у процесі навчальної діяльності багато в чому визначається змістом навчання, і в цьому відношенні стохастичні уявлення не є виключенням.

У вітчизняній психології психічна діяльність розглядається як перетворена зовнішня, практична діяльність [44, 122, 196]. «Психічна діяльність є результат перенесення зовнішніх матеріальних дій у план відображення, у план сприйняття, уявлення, поняття» [44]. Це повною мірою відноситься до формування стохастичних уявлень.

Найпростіші уявлення про випадки, у початковій стадії їх формування, утворюються у свідомості дітей за допомогою почуттів. Кількаразові спостереження конкретних випадкових явищ перетворюють почуттєві сприйняття у форми, що не залежать від конкретного, і переводять їх у форму абстрактних узагальнень. Розумова дія неминуче проходить етап оперування з предметом або його замінником, під час якого виділяються і пізнаються характерні якості випадкового явища.

Кращим засобом виділення специфічних рис випадкового явища служить безпосереднє спостереження самого цього явища. Адже, як відзначає С.П.Баранов, «найбільш висока якість відображення дійсності в образі досягається тоді, коли дитина уявляє предмет, явище в реальних умовах його існування» [13, с.45]. Це дозволяє розкрити випадкове явище немовби в чистому вигляді, таким, яким воно об'єктивно існує в дійсності.

Якщо учень тільки спостерігає за випадковим явищем, а не бере участі у процесі його зародження, то це явище може виявитись для нього чужим, далеким і недостатньо зрозумілим. Треба, щоб учень був поставлений віч-на-віч з самим явищем, а для цього він повинен виконувати певні предметні дії, що призводять до появи випадкових явищ. Він повинен своїми руками виконувати відповідні дії і операції генерування різних випадкових витоків [123]. „Більш того, - як відмічав І.Я. Лернер, - у світі сучасних уявлень педагогічної психології, засвоєння нового взагалі не може мати місця без предметних дій, і, відповідно, без образу об’єкту і знань про способи дій” [123].

Виходячи з цього, необхідно включити в процес формування початкових стохастичних уявлень предметні дії учнів з різними об’єктами, які б забезпечували чуттєву основу пізнання світу випадків. Як наслідок такого підходу, виникає завдання визначення особливих предметних дій учнів на початкових етапах формування статистичних уявлень.

Щоб розв’язати цю проблему, звернемося до історії зародження теорії ймовірностей.

Як відзначає Д.Пойа, «розібравшись у тім, як придбав визначені знання і концепції людський рід у цілому, ми можемо краще судити про те, як може придбати ці знання дитина» [161, с.325].

Багато задач практики, що служили основою для зародження теорії ймовірностей, як науки, були занадто складними, щоб помітити в них закони випадкового, тоді як в азартних іграх випадок виступає досить чітко і не затушовувалися занадто великим числом факторів, що їх ускладнюють. Крім того, азартні ігри дозволяють спостерігати випадкові явища велике число раз, тобто задовольняють основній вимозі, при дотриманні якої можливий прояв законів випадкових явищ, а саме - їх масовості.

Ця своєрідна роль азартних ігор у виникненні теорії ймовірностей як науки відбилася й у її вивченні. Дотепер, при вивченні початків теорії ймовірностей, у методичних цілях, часто звертаються до прикладів, пов'язаних з підкиданням монети, грального кубика, гральними картами, урнами, рулетками і т.п., за допомогою яких легко проілюструвати поняття випадкової події та її ймовірності і способи підрахунку ймовірностей різних подій.

Однак застосування азартних ігор може мати негативний вплив на моральне виховання школярів. Саме така гра характеризується прагненням будь-що виграти, а при невдачі відігратися. Чи треба дивуватися, що в гравців у всі часи виявлялися тіньові грані характеру. Історія азартних ігор багата спокусами, підробками і злочинами, що знайшло відповідне відображення в літературі і мистецтві. Причиною такого явища служить матеріальний стимул, що закладений в основу правил азартних ігор. Може здаватися, що коли виключити матеріальний зиск й установити інші стимули, то азартні ігри, звільнившись від свого пороку, можуть бути використані в школі. Однак цього неможливо зробити, тому що правила азартних ігор такі, що рано або пізно гра призводить до необхідності встановлення якого-небудь матеріального стимулу, без якого вона стає безглуздою. Тому не може бути і мови про використання азартних ігор у школі.

У зв'язку з цим виникає завдання визначення видів предметної діяльності, що відповідають вікові учнів, у яких були б:

1) використані максимальні можливості для формування стохастичних уявлень;

2) збережені позитивні риси азартних ігор, що полягають в наочному, простому і прозорому відображенні випадкових явищ і в можливості їх масового спостереження ;

3) усунуті недоліки азартних ігор, що полягають у негативному впливі на

виховання дітей.

У практиці навчання елементів стохастики визначені такі організаційні засоби розвитку первісних стохастичних уявлень учнів [179]:

- стохастичні ігри;
- стохастичні експерименти (експерименти з випадковими витоками);
- стохастичні дослідження; уявні стохастичні експерименти; імітація (моделювання).

Завдяки даним організаційним засобам процес навчання школярів стохастики зближується з дослідницьким процесом.

Стохастичною грою, або експериментом у формі гри, з великим інтересом займуться школярі 7-9 класів, тобто учні підліткового віку. Середній шкільний вік характеризується інтенсивним зростанням інтелектуальних і моральних сил, можливостей учня, становленням характеру. Саме в цьому віці підвищується пізнавальна активність і розумовий розвиток, прагнення пізнавати невідоме, зазирнути в майбутнє. Учні цього віку вже здатні до досить складного аналітико-синтетичного сприйняття предметів і явищ дійсності. Вони можуть самостійно думати, робити відносно глибокі висновки і узагальнення, у них формується абстрактне мислення. Відбувається процес розвитку не лише логічного мислення, зростає вміння логічно обробляти матеріал для вільного запам’ятовування.

Юнацькій вік – це період, коли учень стає (у крайньому разі повинен стати) справжнім суб’єктом своєї діяльності в учбово-виховному процесі.

При цьому учні ще зберегли матеріальну залежність від батьків. Головним у їх житті стає підготовка до майбутнього самостійного дорослого життя, підготовка до праці, вибір життєвого шляху, професії.

У ці роки особливої значимості набуває ціннісно-орієнтована діяльність. Учень намагається провести глибоку самооцінку своєї особистості, своїх здібностей. Зростає, розвивається рефлексія, пізнавальний інтерес до філософських проблем, юнак намагається з’ясувати смисл життя, оцінити явища, які спостерігає. На уроках математики ці учні проявляють особливу цікавість до методологічних проблем математики, до питань її історії.

Особливо необхідно виділити ті прагнення учнів старшого шкільного віку до автономії, до емоційної і ціннісної самостійності, до самоповаги.

Саме в цьому віці, коли вже можливе філософське осмислення Світу і його двох складових Порядку і Хаосу, необхідно перейти до стохастичних уявних експериментів та моделювання імовірнісних ситуацій.

Виявлені нами способи організації навчальної діяльності і змістова база формування систематизованих початкових стохастичних уявлень учнів при навчанні математики полягають в органічній єдності, що відповідає одному з основних положень педагогіки: «Навчання являє собою ціле, де викладання і учіння, змістова і процесуальна сторони існують у єдності, і визначають один одне» [72].

„Всі наші задуми, всі пошуки і побудови перетворюються у тлін, якщо немає в учнів бажання навчатися”, писав В.А. Сухомлинський [195]. Тому вчитель повинен викликати в учнів таке бажання, а це означає, що він повинен сформувати у них відповідну мотивацію. Під мотивацією розуміють сукупність спонукань до діяльності. Про мотивацію в навчанні елементів стохастики дуже влучно висловлювався А. Реньї [168]. Одним з шляхів досягнення основної мети навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики є активізація процесу навчання, під якою розуміють цілеспрямовану діяльність вчителя, спрямовану на розробку методів і прийомів, засобів навчання, які сприяють підвищенню інтересу, активізують творчу самостійну діяльність учнів у засвоєнні знань, формуванні умінь і навичок, використовуючи їх на практиці.

Цілі навчання досягаються з використанням різних форм, тобто способів організації навчання. Сучасна дидактика визначає такі форми навчання: урок, семінар, диспут, дидактична гра, практикум, екскурсія, домашні завдання, залік, колоквіум, лабораторні роботи, форуми, роботи в мережі Internet, виконання проектних розробок, дистанційне навчання.

У ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики застосовуються уроки різних типів, у тому числі і нестандартні. З'явилися нові типи уроків: інтегровані, міжпредметні, бінарні, із різновіковим складом учнів [145]. Цікавими елементами цих уроків можуть бути стохастичні ігри, стохастичні експерименти, статистичні дослідження. Це дасть змогу розбудити природні задатки, розвинути здібності дитини, підняти рівень творчості, сприяти розвиткові особистості, виростити інтелектуального учня, плекати талановиту особистість. Наприклад, спрямувати діяльність учнів до «відкриття» поняття ймовірності та математичного сподівання можна, організувати наступний стохастичний експеримент у формі гри. Учні класу розподіляються за парами і кожна пара проводить досліди з підкиданням металевої канцелярської кнопки. Якщо кнопка впаде гострим кінцем донизу, то один з гравців записує собі 2 очка, а другий 1 очко. Якщо кнопка впаде гострим кінцем догори, то, навпаки, перший записує 1 очко, а другий 2 очка. Порівнюючи суми очок, вони визначають переможця. Все це проводиться в рамках позакласної діяльності.

На уроці розглядають таблиці частот, які склала кожна з пар гравців. Учням необхідно запропонувати уявити, що число випробувань при проведенні цього експерименту достатньо велике, наприклад 100000. Такий експеримент проводити досить важко, однак ми можемо уявити, які значення частот при цьому найбільш можливо очікувати. Цьому допомагає і огляд таблиці об'єднаних результатів випробувань всіх учнів класу.

Є підстави вважати, що при досить великій кількості випробувань частота появи кнопки гострим кінцем донизу буде наближатись до деякого числа P (наприклад $P \approx 0.4$, якщо відповідні частоти дорівнюють 0.391; 0.412; 0.398; 0.397; 0.401 і т.д.). Вчитель повідомляє, що теоретичне значення частоти яке очікують називають імовірністю випадання кнопки гострим кінцем донизу.

Аналогічне міркування проводиться для випадіння кнопки гострим кінцем угору.

Далі перед учнями ставлять питання про середній виграш. Наприклад, середнє арифметичне виграшів першого і другого гравців відповідно до наведених таблиць дорівнюють:

$$2 \cdot 0.595 + 1 \cdot 0.405 = 1.595$$
$$1 \cdot 0.595 + 2 \cdot 0.405 = 1.405$$

Порівнюючи середнє арифметичне, обчислене за результатами експерименту для кожної пари, робимо висновок, що практично у всіх парах перші гравці у середньому вигравали більше число очок, ніж другі. Складаються дві послідовності значень середніх арифметичних. Члени кожної з цих послідовностей, за рідким винятком, будуть близькі один до одного. Імовірно, числа першої послідовності будуть наближатися до 1.6, а другої – до 1.4. Прогнозуючи результати експериментів з великим числом випробувань, учні самі висувають гіпотезу про існування деяких теоретично очікуваних чисел M_1 і M_2, до яких наближаються середні арифметичні відповідних послідовностей при збільшенні числа випробувань. Від учителя вони взнають, що прийнято говорити так: число M_1 – це математичне сподівання виграшу першого гравця; число M_2 - математичне сподівання виграшу другого гравця.

Реалізація концепції формування стохастичних уявлень учнів в умовах особистісно-орієнтованого навчання, ставить учня в центр уваги вчителя. Саме в тандемі вчитель-учень провідним є не викладання, а пізнавальна діяльність учня. Вчитель повинен виступати більше в ролі організатора самостійної активної пізнавальної діяльності учнів, консультантом і помічником, а не тільки компетентним джерелом знання.

Учні класів з поглибленим вивченням математики помітно відрізняються індивідуальними психологічними особливостями, підвищеним рівнем знань з усіх навчальних предметів, широтою кругозору, різносторонніми інтересами. У них, як правило, гарна научуваність і з решти шкільних предметів.

Щодо питання про вибір методів та прийомів навчання, то в залежності від поставленої мети і змісту навчального матеріалу, доцільно варіювати їх як джерелами знань, так і за видами діяльності вчителя і учнів.

У класах з поглибленим вивченням математики перевага віддається організації самостійної діяльності учнів у здобутті нових знань, дослідницькому методу вивчення навчального матеріалу. Клас з поглибленим вивченням математики відрізняється від звичайного загальноосвітнього класу чи не єдиною, проте досить суттєвою ознакою: разом навчаються учні з досить повним і стійким інтересом до математики.

Не дивлячись на позитивний досвід функціонування класів з поглибленим вивченням математики, для школи залишаються актуальними питання, пов’язані з організацією навчально-виховного процесу. В таких класах цей процес специфічний і має свої особливості.

Проведення ряду стохастичних дослідів і експериментів передбачає роботу в малих групах, об’єднання індивідуально отриманих даних і сумісне обговорення результатів спостережень. Самовизначення учнів і прийняття ними рішень про ефективні способи дій відбуваються безперервно. Результати статистичних досліджень [178] можна тлумачити як створення учнями освітнього продукту, в процесі отримання якого задовольняються потреби у самореалізації і складаються сприятливі умови для розвитку відповідних особистісних якостей: когнітивних, креативних, оргдіяльнісних та ін.

За твердженням В.Л. Гончарова, для виховного навчання потрібна основа [62]. При навчанні стохастики таку основу складають специфічні умовиводи.

При навчанні початків теорії ймовірностей і вступу до статистики необхідно прищеплювати критичне ставлення до статистичних висновків і узагальнень, вміння правильно тлумачити статистичний матеріал, самостійно викривати різного роду фальсифікації, ретельно замасковані під личиною витончено дібраних „правдоподібних” відомостей. Корисно показати учням конкретні ситуації, в яких тенденційно дібрані статистичні показники можуть служити основою для хибних висновків про події, що відбуваються у політичному і економічному житті суспільства. Розвиток у майбутніх дорослих громадян критичного мислення, вміння розуміти скритий смисл того або іншого повідомлення, протистояти маніпулюванню свідомості індивіда з боку засобів масового інформування.

Розглянемо такий приклад. Господар одного приватного підприємства звільнив більшу частину робітників, а тим що залишилися, знизив заробітну плату (табл. 1.3). Після чого він заявив, що середній заробіток працівників на його підприємстві підвищився. Чи так це?

Таблиця 1.3

Зміна заробітної плати

	Зарплата до звільнення		Зарплата після звільнення	
	1000 грн.	400 грн.	800 грн.	320 грн.
Кількість робітників	200	800	200	120

Обчислення середніх характеристик підтверджують, що середні характеристики дійсно збільшилися. До звільнення:

$$\bar{x} = \frac{1000 \cdot 200 + 400 \cdot 800}{1000} = 520(\textit{грн}),$$

мода дорівнює 400 грн., медіана дорівнює 400 грн.

Після звільнення:

$$\bar{x} = \frac{800 \cdot 200 + 320 \cdot 120}{320} = 620(\textit{грн}),$$

мода дорівнює 800 грн., медіана дорівнює 800 грн.

Однак з таблиці видно, що життя робітників не стало кращим, а навпаки, не говорячи про тих, хто втратив роботу. Оманлива думка про підвищення зарплати складається через звільнення значної частини робітників з низькою зарплатою. Висновки з розв’язання задачі суперечать здоровому глузду

Наслідком неправильних або суперечливих висновків може бути і неадекватний вибір критеріїв, за якими інтерпретуються статистичні дані. У зв’язку з цим доречно нагадати наступне оповідання.

Кожна з двох фірм, що спеціалізуються з виготовлення взуття відправили до деякої африканської країни свого агента для з’ясування ситуації стосовно реалізації своєї продукції. Агент першої фірми телеграфував: «Чудовий ринок з реалізації взуття – тут 90% населення ходять босоніж». Агент другої фірми сповістив : «Ринок взуття тут відсутній – 90% населення не носять черевиків».

Організаційні засоби формування стохастичних уявлень вимагають більшої уваги самостійної роботи школярів. Тим більше, що одним з головних завдань для старшої школи є завдання навчити учня самостійно навчатися, бо це є сходинка до вузу. І тому треба переходити від проблемно-пошукових до дослідницьких методів. Треба так організувати навчальну діяльність, щоб учень міг максимально розкрити свої здібності, нахили. Лекції, заліки, уроки дослідження, творчі домашні та класні завдання, участь у МАН, навчання за індивідуальними програмами.

Диференціація та індивідуалізація навчання повинні забезпечувати творчий розвиток кожного учня, враховуючи особливості його інтелектуальної, емоційно-вольової та дієво-практичної сфер, фізичного і психічного стану. Цей принцип найбільш повно реалізується в закладах нового типу через профільне і спеціалізоване навчання, створення альтернативних програм різної складності, зменшення наповненості класів.

Для учнів середнього і старшого віку крім профільної диференціації особливу роль відіграє рівнева диференціація, яка може навіть полягати у прискореному вивченні окремих тем курсів.

Індивідуалізація навчання означає перехід дитини на власний план і програму роботи, відповідні навчальні посібники – це є майбутнє нашої школи.

Диференціація навчання вимагає широкого використання різних форм і засобів, нових навчальних технологій.

Один з принципів психологічної педагогіки полягає у творчому характері розвитку особистості. При вивченні стохастики цей принцип реалізується шляхом використання найбагатших можливостей проявів творчості учнів. Імовірнісно-статистична лінія забезпечує умови створення учнями індивідуально-творчих продуктів діяльності, що сприяє розвитку креативних якостей людини. Евристичний характер стохастичних умовиводів вимагає так організувати математичну діяльність учнів, щоб вивчення понять і методів доведення тверджень і розв’язування задач відбувалося у формі відкриттів нових специфічних інструментів пізнання оточуючого світу. Особливу роль відіграє тут аналіз імовірнісних парадоксів і несподіванок, що створює сприятливий ґрунт для евристичної діяльності.

Все вище сказане дозволяє виділити такі методичні вимоги до навчання елементів стохастики в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики:

1) чітке визначення цілей і завдань навчання нової змістової лінії у зазначених класах;
2) зміст повинен забезпечувати наявність системи теоретичних імовірнісно-статистичних знань, відображати сучасний стан розвитку науки і техніки;
3) забезпечення формування міцних навичок і вмінь при розв’язуванні стохастичних задач;
4) спрямування на встановлення тісного зв’язку імовірнісних моделей з предметним світом, організацію побудови і тлумачення моделей як провідних форм діяльності учнів;
5) навчання повинно бути націленим на використання творчих можливостей школярів як послідовності самостійних „відкриттів”, тобто повинно мати евристичний характер;
6) у навчанні повинні встановлюватися і реалізовуватися міжпредметні зв’язки у якості взаємодії між шкільними дисциплінами, особливо профільними (за профілем ліцею, класу);
7) навчання повинно здійснюватись на основі профільної і рівневої диференціації;
8) поряд з традиційними засобами навчання мають набути широкого використання засоби іформаційно - комунікаційних технологій.

Висновки до першого розділу

Сучасний етап навчання початкам елементів стохастики характеризується такими протиріччями:

1) програми для шкіл і класів з поглибленим вивченням математики не в повній мірі відповідають сучасним вимогам суспільства і потребам особистості учнів;
2) обсяг і рівень складності навчального матеріалу з елементів стохастики у ряді педагогічних досліджень, зокрема [25, 74, 118, 173], для ліцеїв і класів з поглибленим вивченням математики є завищеним по відношенню до рівня, необхідного при поглибленому навчанні. Надмірний обсяг і невиправдана складність перешкоджає розумінню і розвиває в учнів невіру у свої сили;
3) існує наявний розрив між знаннями, навичками і вміннями: процес формалізації практичної задачі, пов'язаної з випадковим явищем, викликає великі труднощі навіть при наявності теоретичних знань;
4) більшість учнів не можуть розв'язувати навіть прості імовірнісні задачі, оскільки не чітко уявляють, що таке випадкове явище, випадковий експеримент, елементарна подія, випадкова подія та її ймовірність. Дуже часто плутають поняття незалежність і несумісність випадкових явищ. А це в свою чергу призводить до неправильного використання теорем додавання і множення ймовірностей;
5) учні іноді не можуть відрізнити імовірність перетину випадкових подій від умовної ймовірності;
6) не завжди правильно розуміють імовірнісний зміст числових характеристик випадкових величин, не говорячи про економічний, технічний.

Для подолання цих протиріч нами були уточнені мета, цілі, завдання, зміст навчання елементів статистики в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики з врахуванням особистісно-орієнтованого підходу, рівневої та профільної диференціації.

Основні результати першого розділу висвітлені в роботах [199, 200, 201, 202].

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА НАВЧАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ СТОХАСТИКИ В ЛІЦЕЯХ І КЛАСАХ З ПОГЛИБЛЕНИМ ВИВЧЕННЯМ МАТЕМАТИКИ

2.1 Наступність вивчення елементів стохастики між основною і старшою школою та пропедевтика стохастичної лінії в основній школі

Найактуальніше на сьогодні завдання методики навчання шкільної математики –добір змісту освіти з врахуванням соціальних потреб суспільства і потреб особистості та цілей і завдань, які ставлять перед вивченням того чи іншого предмета. Особливого значення тут набуває проблема цілісного змісту, яка враховує:

- правильне відображення провідних ідей науки в програмах, підручниках і психолого-дидактичне обґрунтування та методичне опрацювання цього відображення;
- спільні наукові підходи до трактування понятійного апарату;
- дотримання концентричного розвитку змістово-методичних ліній і забезпечення їх наступності на різних ступенях навчання та ін.

За визначенням у педагогічному словнику [61, с.227]: "Наступність у навчанні – послідовність і системність у розміщенні навчального матеріалу, зв'язок і узгодженість ступенів і етапів навчально-виховного процесу. Здійснюється при переході від одного уроку до наступного. Досягнення наступності в шкільній практиці забезпечується методично і психологічно обґрунтованою побудовою програм, підручників, дотриманням послідовного руху від простого до складнішого в навчанні та організацією самостійної роботи учнів і взагалі всією системою методичних засобів". В нашому дослідженні будемо притримуватись саме цього означення.

Наступність – зв'язок між явищами у процесі розвитку, коли нове, замінюючи старе, зберігає в собі деякі його елементи. Наступність це один з проявів діалектики (заперечення заперечення і переходу кількісних змін у якісні).

Визначаючи зміст, структуру і особливості навчальної діяльності, добираючи організаційні форми, методи, прийоми і засоби навчання учнів 8-12 класів, ми спиралися на дослідження дидактів і методистів Л.В. Занкова [142], В.Ф. Паламарчук [145] та математиків-методистів Г.П. Бевза [15], М.І. Бурди [24], О.С. Дубинчук [78], З.І. Слєпкань [185] та інших.

Перелічимо основні складові взаємозв’язків наступності у процесі навчання:

- всі дослідники розглядають наступність як зв’язок попереднього матеріалу з наступним;
- наступність передбачає розгляд і поглиблення знань на новому більш високому рівні;
- наступність передбачає розвиток старих знань під впливом нових;
- наступність пов’язується з повторенням учбового матеріалу.

Наступність як закономірність процесу навчання проявляється:

- на різних рівнях (ступеневих переходах) – наприклад, на рівнях основна школа – старша школа;
- в різних аспектах – наприклад, у освітньому просторі: у предметній галузі (навчальні плани, програми, навчально-методичне забезпечення); в діяльнісному просторі (методи, технології, форми навчання); в соціальному просторі (взаємодія „вчитель-учень”, „учень-вчитель” і „учень-учень”); у соціокультурному середовищі, у тому числі предметному;
- в організаційній формі (формі управління освітнім процесом).

Проблема наступності стала особливо актуальною на сучасному етапі оновлення і вдосконалення шкільної математичної освіти. На теперішній час з’явилися нові альтернативні підручники, які відображають різні авторські задуми та дидактичні підходи до навчання [3, 4, 14]. На жаль, є і такі, що не містять матеріалу з початків теорії ймовірностей і елементів статистики, що ускладнює проблему дотримання наступності даної змістової лінії, наприклад діючий навчальний посібниках для шкіл та класів з поглибленим вивченням математики у 8-9 класах [101].

Перспективність і гострота цієї проблеми обумовлюється і переходом шкіл на новий термін навчання та на 12-бальну систему оцінювання учбових досягнень учнів.

Без вирішення проблем наступності при доборі змісту, організаційних форм і методів навчання може бути порушена цілісність шкільної математичної освіти, її системність і комплексність.

Слід звернути увагу на те, що недоцільно витрачати час на вивчення вже відомого учням матеріалу, замість того, щоб спираючись уже на відомі факти, поглиблювати і розширювати знання учнів, щоб не відбувалася марна трата часу, коли учні втрачають зацікавленість, інтерес до уроку і предмету. Тому справедливо зазначає З.І. Калмикова, що "...багаторазове повернення до вивченого матеріалу в зв'язку з новими знаннями, для більш глибокого їх засвоєння, може бути здійсненим лише при системному підході до навчання, коли питання про доцільність і місце повернення до раніше вивченого розв'язується на основі аналізу всієї сукупності засвоюваних одиниць матеріалу і взаємозв'язків між ними, ... нагадує рух по спіралі" [100, с.186].

Програмними документами передбачена узгодженість та наступність основних цілей і змісту навчання елементів стохастики, але для конкретизації цілей і змісту в програмах та підручниках, методиках навчання початків теорії ймовірності необхідна більш обґрунтована і детальна концепція реалізації наступності навчання.

На основі аналізу програм і навчальних посібників для шкіл і класів з поглибленим вивченням математики та результатів констатуючого експерименту можна зробити висновок про те, що імовірнісний матеріал вивчається нерівномірно, відсутня чітка система його вивчення, деякі поняття вивчаються однобічно або зовсім не вивчаються (наприклад, закон великих чисел, нормальний розподіл, який має велике теоретичне і практичне значення).

Наступність у вивченні елементів стохастики як цілісна проблема залишається не розробленою. На наш погляд особливо потребує удосконалення наступність навчання між основною і старшою школою, оскільки саме при навчанні в школі учні набувають знання, виробляють уміння і навички, необхідні для успішного вивчення систематичних курсів теорії ймовірностей та математичної статистики у вищій школі.

Не були предметом спеціальних досліджень і питання узгодженості змістового (змістово-методичні лінії розміщення матеріалу, рівні програмових вимог до підготовки учнів, означення ймовірнісних понять) і процесуально-операційного (структура уроків, особливості навчальної діяльності, формування навичок і вмінь та ін.) аспектів навчання початків теорії ймовірностей та вступу до статистики у 8-12 класах.

Прагнення вчителя підняти школяра на нову вищу ступінь пізнання, розширити і поглибити його знання та уміння не повинно переступати межі допустимого. Якщо учня перевантажувати знаннями та вміннями, то вони перетворюються із передумови розвитку особистості в його гальмо, зауважує І.О. Менчинська [131]. Категорії доступності і наступності у навчанні тісно пов'язані між собою. "Доступність навчання – відповідність змісту і об'єму виучуваних знань віковим особливостям учнів, а також наявним у них знанням і уявленням" [131]. Наприклад, потрібно, на наш погляд, вводити в загальноосвітній школі аксіоматичне означення ймовірності, так як це зроблено у [88]. Введення поняття площі та об'єму у шкільному курсі математики подається як аксіоматичне, хоча увага на тому, що воно аксіоматичне не акцентується. Так само й імовірності. При введенні цього поняття завжди звертають увагу на три основні властивості. Ці властивості не будуть викликати труднощів.

Доцільно донесення до свідомості учнів основних властивостей подій (пов'язання їх з властивостями фігур, що мають площі або об'єми) та основних властивостей ймовірностей – як міри сподівання (пов'язати їх з властивостями площ та об'ємів). Обов'язково прагнути до опанування тим, що

1_s) вірогідна подія завжди є подією;

2_s) протилежна до події завжди є подією;

3_s) сума подій завжди є подією,

а також:

1_p) $P(A) \geq 0$;

2_p) $P\left(\sum_k A_k\right) = \sum_k P(A_k)$, коли A_k попарно несумісні події;

3_p) $P(\Omega) = 1$ [88].

Це по суті аксіоматичне означення ймовірності – будь-яка функція, визначена на сукупності S підмножини Ω, яка задовольняє властивості 1_p-3_p. Усі інші властивості треба доводити за допомогою основних властивостей.

Для формування стохастичного мислення важливо донести до розуміння учня, що на одній і тій самій сукупності подій можна різними способами визначити ймовірності. При підкиданні грального кубика ймовірність випадання «6» може дорівнювати $\frac{1}{6}$, а може й $\frac{k}{6}$ (наприклад, $\frac{5}{6}$), коли на k гранях, $k \in \overline{0,6}$, є цифра «6» (або шість крапок).

Тільки враховуючи вікові і психологічні особливості учня можна сприяти досягненню ним високих результатів у вивченні будь-якого, в тому числі і стохастичного матеріалу. Але, водночас, не можна вважати, що рамки доступності є раз і назавжди встановленими, незмінними для учнів даного віку, тим більше в класах з поглибленим вивченням математики. Вони значною мірою визначаються методами та засобами навчання.

Міцності і стійкості, глибшому засвоєнню знань з початків теорії ймовірностей сприяють узагальнення і систематизація. Розрізнені, не пов'язані між собою факти учень не спроможний активно і усвідомлено сприймати. Він вивчає їх пасивно, зазубрює. Тому принципи систематичності і послідовності лежать в основі побудови навчальних програм. Принцип систематичності випливає з асоціативно рефлекторної теорії. На основі цієї теорії шлях розвитку починається від найпростіших локальних асоціацій, що характеризують окремі ізольовані елементи знань, через частково-системні і внутрішньопредметні до найскладніших міжпредметних асоціацій. А завдання вчителя – “вести учня до все більш складної глибокої системи знань” [72, с.51]. Нові знання розкриваються на основі одержаних раніше. Для цього в попередньому матеріалі потрібно виділити головне, повторити, узагальнити найважливіші факти і поняття. В такому випадку набуті знання стануть дійсно діючими, сприятимуть засвоєнню нових знань.

Протягом всього шкільного періоду центром навчального процесу повинна виступати особистість учня.

Основними складовими взаємозв’язків наступності у процесі навчання вважають:

1. Пропедевтика і наступність.
2. Наступність і повторення.
3. Наступність та міжпредметні та внутріпредметні зв’язки.
4. Наступність і перевивчення.

Розглянемо їх докладніше.

Пропедевтика і наступність. Пропедевтика – важлива робота з вивчення попередніх тем, що готує до введення нового поняття.

Питання про пропедевтику виникає тоді, коли виникають значні труднощі при формуванні деякого поняття або при дуже концентрованому вивченні деякої теми. Тоді і необхідно розподілити матеріал на більший проміжок часу. Якщо це зробити з виділенням початкового концентра, то отримаємо пропедевтичний курс: якщо це зробити неперервним чином, включаючи частину матеріалу в іншу тему, отримаємо пропедевтику деякого поняття. Формування математичних понять є однією з найважливіших і найскладніших проблем у методиці навчання математики. Рівень сформованості математичних понять в учнів і вміння оперувати ними при розв’язуванні задач, доведенні теорем, в різних стандартних і нестандартних життєвих ситуаціях, визначає рівень розвитку математичних здібностей, мислення.

Поняття випадкової події та її ймовірності, випадкової величини та її математичного сподівання по суті і психологічно є надзвичайно складними. Навіть великі математики минулого неодноразово помилялися при розв’язуванні конкретних імовірнісних задач, оскільки неправильно тлумачили основні поняття. А суперечки про зміст цих понять тривали до XX ст. Тому формувати у дітей правильне розуміння цих понять слід дуже обережно й поступово, і не заучуванням напам’ять величезної кількості незрозумілих означень, а розв’язуванням і обговоренням ретельно дібраних цікавих і змістовних задач. Помилки і парадокси виникають зокрема і тому, що відсутні чіткі означення відповідних понять.

Правильно розв’язати питання про пропедевтику деякого поняття можна лише при повному врахуванні всіх вимог наступності.

Розуміння наступності допоможе виділити суттєві частини теми і розмістити їх так, щоб було встановлено зв’язки між окремими частинами і етапами вивчення цих частин.

Реалізація нового змісту у діючих підручниках здійснюється по різному (див. 1.3.).

У сучасному російському посібнику [128] пропонується реалізація нової змістової лінії від комбінаторних задач з використанням поняття графа до нормального розподілу. Безумовно, розглянутий матеріал є дуже корисним і цікавим, але навіть для поглибленого курсу математики завеликий за обсягом.

Виходячи з вікових психологічних особливостей учнів, пропедевтику початків теорії ймовірностей і елементів статистики доцільно розпочинати ще в 5-6 класах. Більшість учнів зазначених класів українських шкіл навчаються за підручниками [125, 132, 236]. Покажемо, як можливо працювати з цими підручниками з метою реалізації пропедевтики нової змістової лінії. Для цього необхідна адаптація традиційного змісту до цілей, які вводяться у шкільні програми знань про випадкове.Учителю треба чітко знати наявність основних неозначуваних понять як в теорії ймовірностей, як науці, так і в шкільному курсі елементів стохастики, щоб правильно організувати навчання дітей.

Перш ніж говорити про випадкову подію, бажано розтлумачити, що у математиці випадкова подія завжди є сукупністю результатів випадкового експерименту (досліду). Задачі, пов'язані з випадковими експериментами та їх результатами, бажано розглядати навіть у початковій школі. Абсолютна частота появи (відбування) елементарної події – це натуральне число або нуль, з якими можна оперувати у молодших класах, вирішуючи, зокрема, яка подія відбувається частіше у порівнянні з іншою.

Не слід поспішати з підрахунками відносних частот, а тим паче з висновками (сумнівними) про стабілізацію відносної частоти. Спочатку слід сформувати поняття (математичне) випадкової події, для чого доцільно на кожному уроці (у 5-х, 6-х, 7-х, і т.д.) розв'язувати задачі, пов'язані із стохастичними експериментами (дослідами) та їх результатами (елементарними подіями, як сукупностями можливих наслідків досліду), подіями їх відбуваннями чи невідбуваннями, виділення кожного разу вірогідної та неможливої події, які теж є випадковими подіями. Не потрібно протиставляння типу: є вірогідна подія, є неможлива подія, а є ще й випадкова подія. Можна сформувати уявлення про те, що кожна елементарна подія сприяє чи ні певній події, що одна подія може спричинювати іншу, про рівні події, про суму та добуток подій, про сумісні та несумісні події, про різницю подій та протилежну до даної подію. Для цього не потрібні ніякі обчислення, і без цього стохастичного мислення не сформувати.

Для пропедевтики основних понять елементів стохастики з наведених вище підручників можуть бути використані такі вправи:

- випадковий експеримент (дослід) - № 280, 295, 348, 394, 458, 769, 927 [132], 421, 1244, 1245 [236];
- елементарна подія, простір елементарних подій - № 280, 348, 394, 458, 769, 927 [132], 444, 863 [236];
- випадкова подія - № 295, 650 [132], 76, 77, 157 [236];

- відбування події, порівняння подій, шанс (ймовірність) - № 80, 81, 82, 83, 459, 460 [125], 732, 741, 1024, 1025 [132];
- статистичні таблиці – № 624, 741 [125], 215, 219, 248 [132];
- відхилення - № 622, 623, 624 [125];
- середнє значення - № 845 [125].

У 5-6-х класах є можливість, звертаючись до життєвого досвіду та досвіду проведення і участі у різноманітних іграх і жеребкуваннях, говорити про більш або менш можливі події, неможливі та вірогідні події. Так, після вивчення звичайних дробів (5-й кл.) можна один урок присвятити темі „Звичайні дроби та підрахунок шансів на успіх”, на якому розв’язувати задачі на підрахунок „шансів” на виграш. Введення поняття „шанс” розглянуте у посібнику для вчителів З.І. Слєпкань, І.С. Соколовської [186].

Учні ознайомлюються зі способами підрахування статистичних даних у вправах 624, 741 [125], № 215 [132]; аналіз табличних даних - № 219, 248 [132]. Однак, таких вправ мало. Ми пропонуємо їх доповнити.

Після того, як школярі в 5 класі познайомилися з нерівностями і наближенням натуральних чисел та звичайних дробів, їм можна запропонувати таку задачу.Приклад 1. Яке розташування кораблів у грі «Морський бій» з перелічених на рис. 2.1-2.6 здається вам більш вдалим, щоб мати більшу можливість для виграшу? Зіграйте з товаришами в цю гру.

Роздуми учнів необхідно спрямувати так. У ході гри у «Морський бій» кожен гравець намагається «вбити корабель» супротивника навмання, вказуючи можливе розташування корабля. На рис. 2.1 кораблі зосереджені у його лівій частині. Супротивник може швидко помітити, що спроби «нанесення удару» в ліву частину приносять успіх і розгадати їх задум. На кожному з рис. 2.1-2.5 можна помітити деяку закономірність, яку теж може розгадати супротивник. Найбільш хаотично розташовані «кораблі» на рис. 2.6. Тому саме такому розташуванню треба віддати перевагу рис. 2.6. Це лише припущення, яке не обов’язково може підтвердитись у ході реальної гри. Однак саме при такому розташуванні «кораблів» більше шансів на перемогу, тобто більше можливостей виграшу.

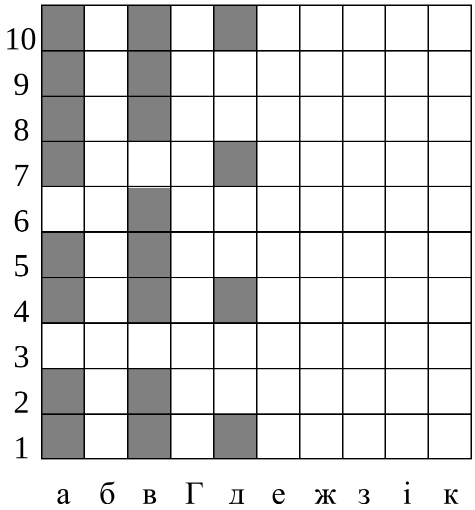


Рис. 2.1

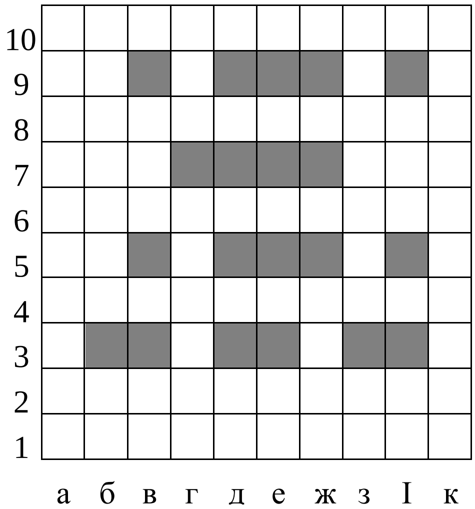


Рис. 2.2

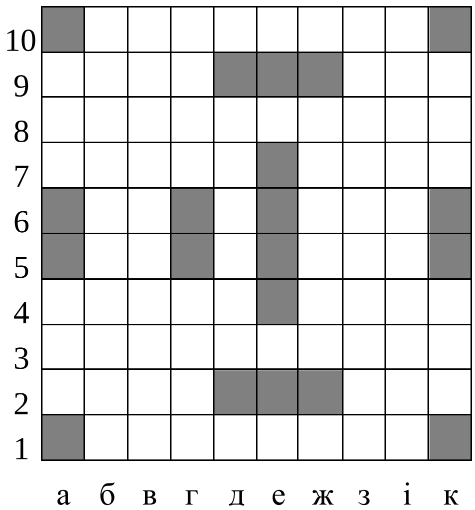


Рис. 2.3

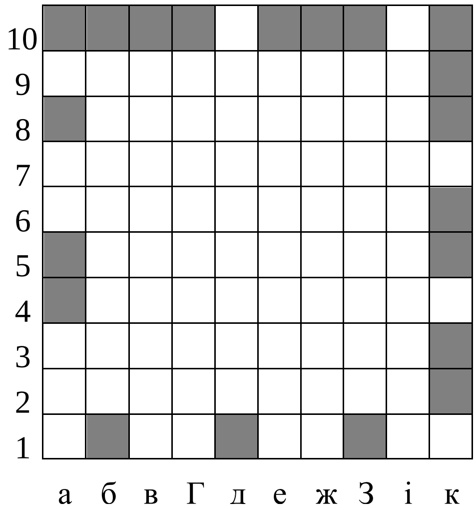


Рис. 2.4

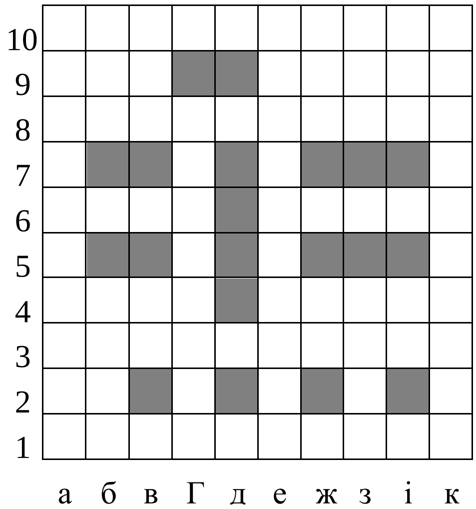


Рис. 2.5

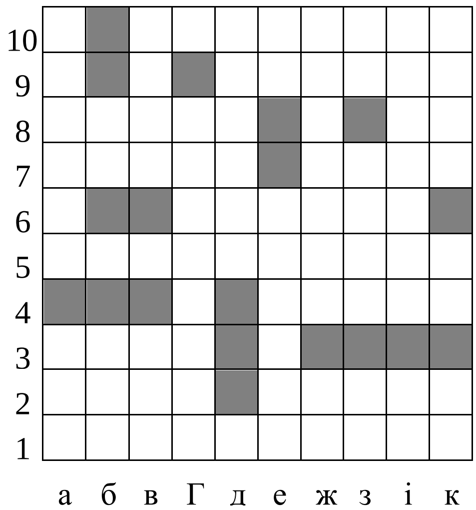


Рис. 2.6

Потім учням пропонують знайти площі «кораблів Морського бою», рахуючи одну клітину зошита одиницею виміру площі. Вони відповідають на такі запитання:

1. Яку частину площі квадрата займають всі «кораблі»?
2. Яку частину всієї площі займають чотирипалубні, трипалубні тощо?
3. Для якого типу кораблів ця частина більше?
4. Для яких типів кораблів ці частини рівні?

Для формування стохастичних уявлень в учнів 5-6 класів у підручнику не вистачає завдань, які дають змогу фіксувати, підраховувати і систематизувати дані, що збираються. Цей недолік легко компенсувати наступною практичною роботою вчителя з класом. У 6-их класах можна провести експерименти з випадковими результатами (наприклад, підкидання монети, грального кубика) які дають уявлення про статистичну ймовірність або відносну частоту події та можливу її «стабілізацію» (при великій кількості випробувань) навколо деякого числа.

Приклад 2. Після перевірки чергової контрольної роботи вчитель показує, як він аналізував її результати, попередньо заповнюючи таблицю (див.табл.2.1).

Таблиця 2.1

Оцінка	Підрахунок випадків	Кількість оцінок
1		-
2		-
3	|	1
4	||	2
5	||	2
6	|||||||||	9
7	||	2
8	|||||	5
9	|	1

<table>
<tr><td>10</td><td>||</td><td>2</td></tr>
<tr><td>11</td><td>|</td><td>1</td></tr>
<tr><td>12</td><td></td><td>-</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Всього 25</td></tr>
</table>

Таблиці зручні для фіксації даних, але зробити їх наочними можна лише на прикладі стовпчастої діаграми, яку учні будують шляхом замальовування клітинок, це дуже зручно робити в зошитах.

Стовпчасту діаграму (див. рис.2.7) учні будують в класі за допомогою вчителя, а потім відповідають у ході роботи на такі запитання:

- яка оцінка зустрічається частіше всього, яка найрідше?
- скільки учнів отримали оцінку «8», оцінку «4»?
- чому дорівнює доля кожної з оцінок, їх сума? Дуже важливо показати, що вона дорівнює 25, тобто числу учнів що писали роботу.

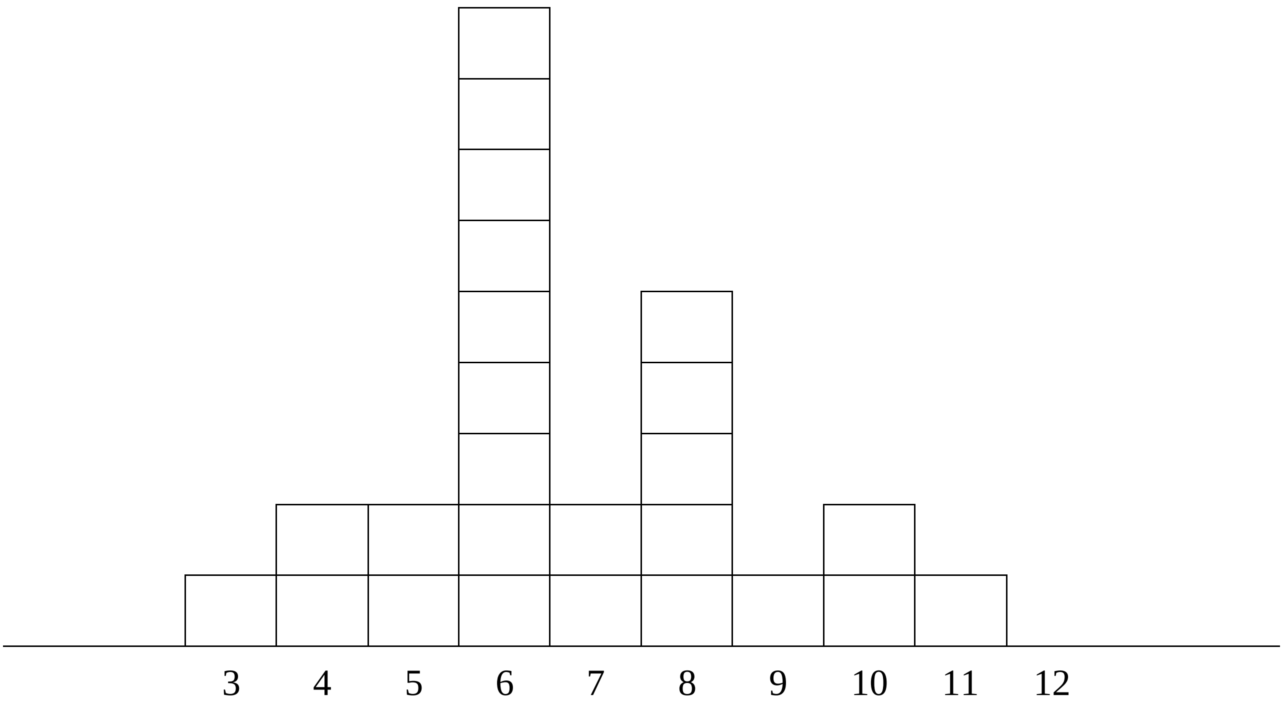


Рис.2.7

Необхідно зауважити, що таблиця погано пристосована для огляду даних, оскільки вона займає багато місця і порівнювати за нею складніше. Інша справа діаграма – за нею зразу видно, над якою оцінкою стовпчик вищий. За допомогою стовпчастих діаграм бажано показати учням подання даних у вигляді: лінійних діаграм (рис. 2.8) і полігонів (рис. 2.9)

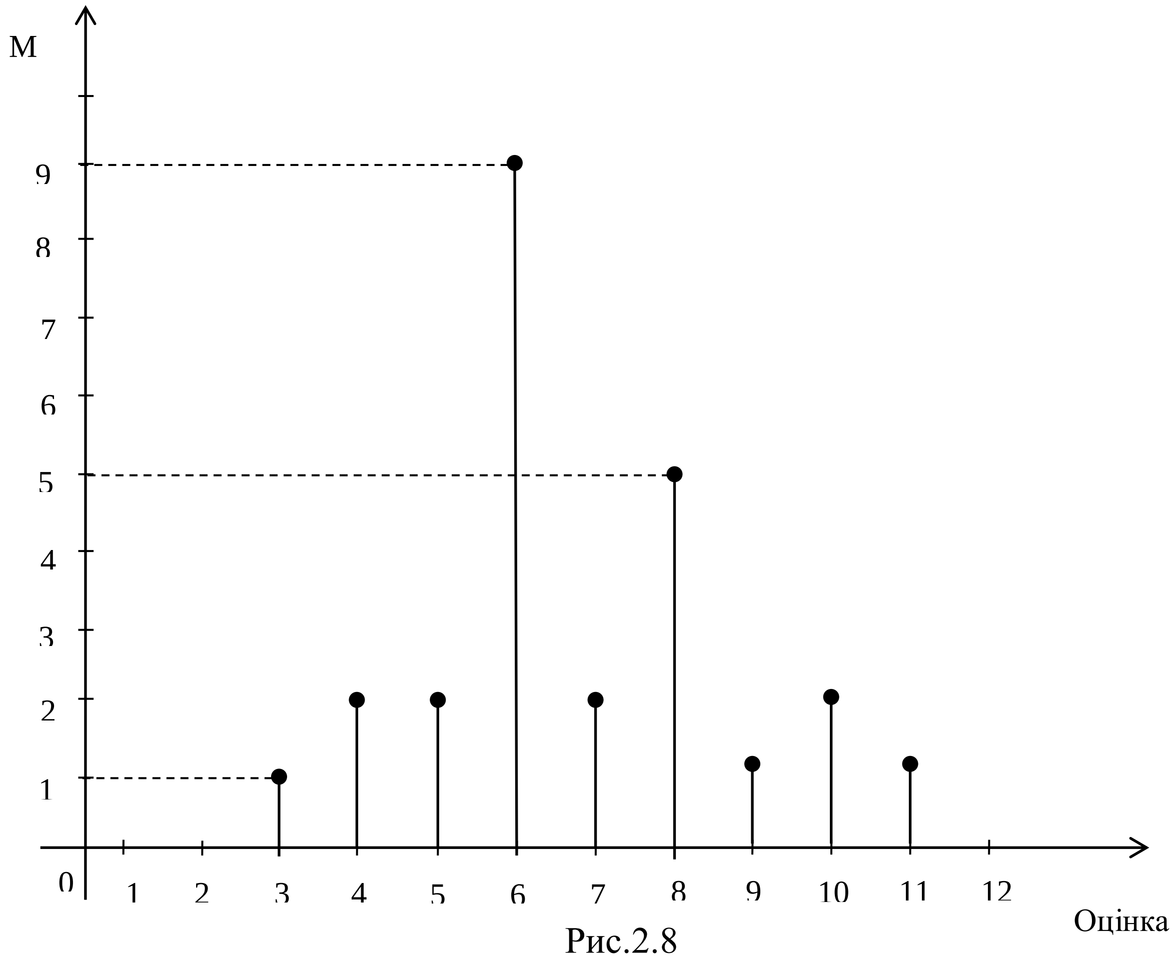


Рис.2.8

Такі уявлення учні можуть сприймати і активно використовувати при аналізі даних відразу після введення поняття шкали, однак самостійну побудову лінійних діаграм і полігона учням краще пропонувати після ознайомлення з координатною прямою.

Можна дати учням завдання підрахувати долю кожної оцінки, їх суму у вибірці, яка повинна дорівнювати одиниці. Якщо вчитель працює у сильному класі, він може провести пропедевтику поняття „частоти” після вивчення поняття звичайного дробу.

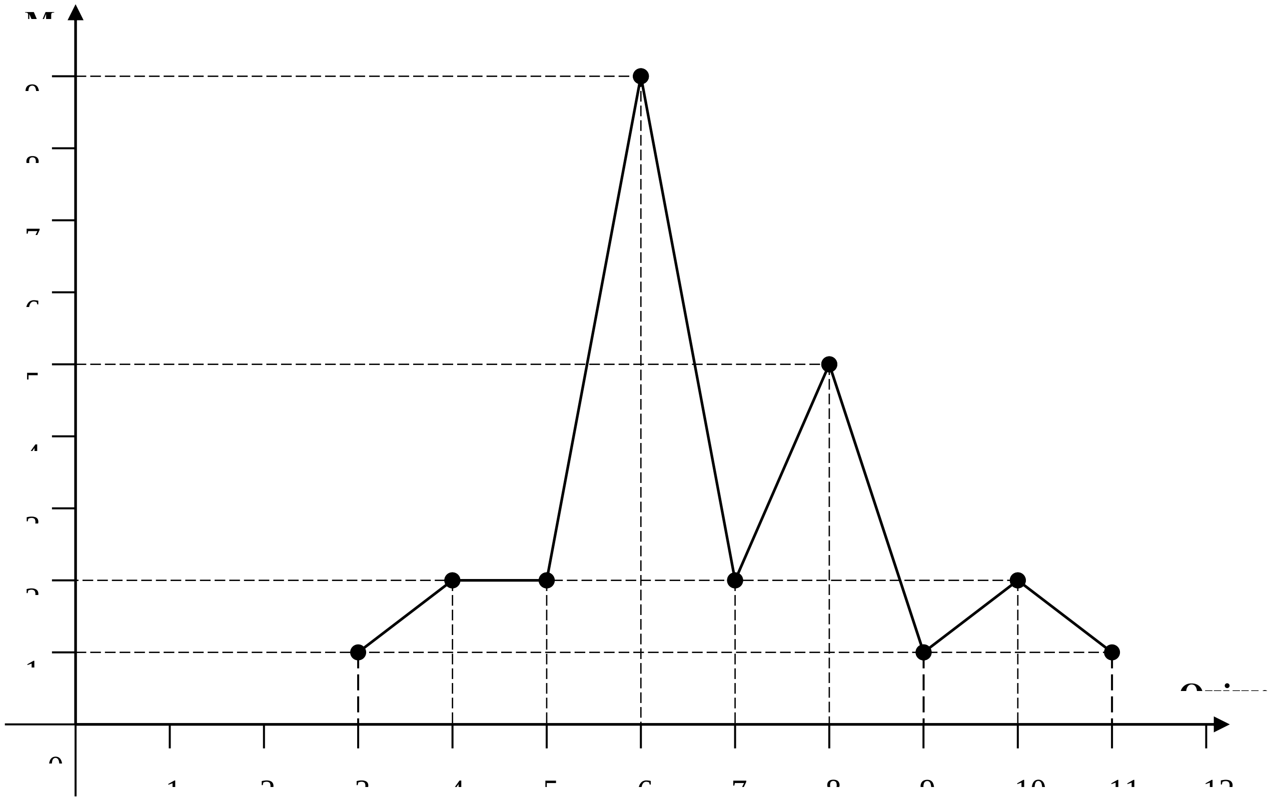


Рис.2.9

Тематика аналогічних практичних робіт може бути такою:

- опитування учнів класу з метою виявлення улюбленого учбового предмету, місяця року і т. п.
- спостереження за природою і підрахунок ясних і похмурих, дощових і сніжних днів протягом місяця або року.
- дослідження кількості часу, який витрачають учні на подорож від домівки до школи.

Зауважимо, що учням 5-6 класів ще не треба пропонувати проводити дослідження, пов'язані зі збиранням даних на вибірках, об'єм яких більше ніж 25. Бажано обмежитися вибірками з доступною для огляду дітей кількістю даних, наприклад, числом учнів у класі.

Із необхідністю використання транспортира, а також знаходженням частини від числа і числа за його частиною може бути розглянута така задача.

<u>Приклад 3.</u> У зимовий вихідний день школярі вирішили піти класом на прогулянку. Одні взяли з собою лижі, інші – санчата, а 4 учні ковзани. На

круговій діаграмі (рис.2.10) зображені ці дані. Скільки школярів у класі? Скільки з них взяли лижі? Санчата? Побудуйте відповідну діаграму.

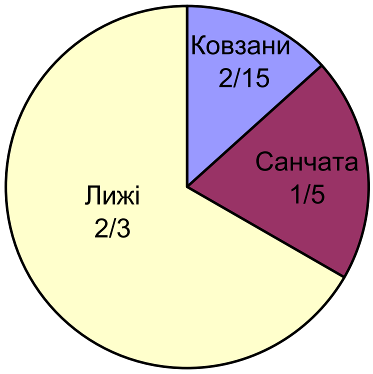


Рис. 2.10

Епізодичне проведення випадкових експериментів скоріше за все не дасть позитивних результатів у справі формування стохастичного мислення. Приклади вказаних типів бажано наводити протягом усього навчального року. Підстави для цього завжди можна знайти.

Наступність і повторення. К.Д. Ушинський писав: “Введіть невпинне повторення, що запобігає забуванню” [212]. Мається на увазі така побудова курсу, при якій повторення сприяє наступності у вивченні поняття або системи понять та дає можливість проявитися основним якостям наступності. На кожному новому етапі це не буде повторенням тих самих вправ, що виконуються вже вивченими способами. У вправах на повторення обов’язково повинно з’являтися нове, відмирати старе, несуттєве з точки зору логіки розвитку поняття, що вивчається, з дотриманням підвищення рівня освіти учнів. Наприклад, при вивченні геометрично заданої ймовірності (імовірнісної міри) розглядається: 1) ймовірність влучення в відрізок; 2) імовірність влучення в фігуру на площині; 3) ймовірність влучення в просторову фігуру. Пункти 1 і 2 можуть бути розглянуті в основній школі у зв’язку з вивченням планіметрії. В той же час пункт 2 – в старшій школі розглядається у зв’язку з вивченням площі криволінійної трапеції. Пункт 3 – теж вивчається в старшій школі у зв’язку з вивченням стереометрії.

Таким чином, наступність вимагає повторення, але такого, яке б забезпечувало неперервний розвиток системи понять, а не повторення заради повторення, заради збереження на досить високому рівні деяких набутих навичок учнів.

Важливим засобом забезпечення наступності у навчанні є концентричний розвиток змісту стохастичного матеріалу. Для успішного засвоєння матеріалу в 10-12 класах вважаємо доцільним забезпечення належного рівня змістової лінії у 8-9 класах, обмежуючи, кожну тему тим мінімумом навчального матеріалу, який, на нашу думку, є достатнім для формування основних ймовірнісних уявлень про оточуючий світ.

Наведемо поурочне планування в класах з поглибленим вивченням математики.

8 клас.

Випадкові події та їх імовірності.

1. Випадковий експеримент (дослід) та його результати – елементарні події.
2. Поняття події. Вірогідна і неможлива події. Порівняння подій. Операції над подіями.
3. Основні властивості подій.
4. Статистичні ймовірності та їх основні властивості.
5. Статистична ймовірність суми довільних подій.
6. Розв’язування задач.

9 клас.

Статистика.

1. Таблиця розподілу випадкових значень експерименту.
2. Полігон частот.
3. Числові характеристики вибірки.
4. Експериментальні дані та статистична ймовірність подій.

5. Самостійна робота.

Випадкові події та їх імовірності.

1. Статистичне означення ймовірності.
2. Розв'язування задач.
3. Контрольна робота.

Введення понять повинно здійснюватись поступово з повторним звертанням до них у старших класах на більш високому рівні розкриття. Ми пропонуємо таку диференціацію за рівнями розкриття понять теорії ймовірностей для різних вікових груп учнів:

У 8 класі (тут і нижче нумерація класів відповідає передбаченій Концепції математичної освіти 12-річної школи [106]), поняття випадкової події залишається без формального означення: дається уявлення про подію як про множину сприятливих їй результатів досліду, співвідношення між подіями та операціями над подіями(сума, добуток і т.д.) у 8 класі дається описовою мовою, а після вивчення операцій над подіями у 9-му, а потім і у 12-му класах уточнюється поняття випадкової події і виділяється три основні властивості подій:

1) Ω є подією;
2) якщо A подія, то $\overline{A}$ - також подія;
3) якщо A_i події, то $\sum A_s$ - також подія.

Якщо до цих властивостей звертатися багато разів при вивченні «кількостей елементів», «довжин», «площ», «об'ємів», то ці властивості сприйматимуться більшістю учнів.

У 8 класі можна ввести поняття відносної частоти (статистичної ймовірності).

У 9 класі доцільно глибше розкрити емпіричні основи теорії ймовірностей, розкривши сутність закону великих чисел.

У 12 класі повторюються основні властивості подій та ймовірності, співвідношення між подіями та операцій над подіями дається теоретико-множинною мовою. Розглядається статистичне та аксіоматичне означення ймовірності.

Наведемо деякі означення двома мовами:

Таблиця 2.2

Означення співвідношень між подіями та операцій над подіями

Описова	Теоретико-множинна
1. Якщо подія В відбувається завжди, коли відбувається подія А, то кажуть, що подія А спричиняє подію В і пишуть $A \subset B$.	Якщо всі елементарні події з А, сприяють події В, то говорять, що подія А спричиняє подію В і пишуть $A \subset B$.
2. Якщо А спричиняє В і В спричиняє А, то події А і В називають рівними і пишуть А=В.	Якщо А спричиняє В і В спричиняє А, то події А і В називають рівними і пишуть А=В.
3. Сумою двох подій А і В називають подію С, що полягає в настанні принаймні однієї з подій А або В, і позначають $C = A \cup B$ або $C = A + B$.	Сумою двох подій А і В називають подію С, утворену з усіх елементарних подій, що належать принаймні одній з подій А або В і позначають $C = A \cup B$ або $C = A + B$.
4. Добутком двох подій А і В називають подію С, що полягає у настанні обох подій: А і В і позначають $C = A \cap B$ або $C = AB$.	Добутком двох подій А і В називають подію С, утворену з усіх елементарних подій, що належать одночасно обом подіям А і В і позначають $C = A \cap B$ або $C = AB$.

5. Дві події А і В називаються несумісними, якщо $A \cap B = \varnothing$ тобто вони не можуть відбутися одночасно.	Дві події А і В називаються несумісними, якщо вони не містять жодного спільного елементу, тобто $AB = \varnothing$
6. Різницею двох подій А і В (А мінус В) називається подія С, що полягає в тому, що подія А - відбудеться, а подія В - не відбудеться і позначають $C = A \setminus B$або$C = A - B$.	Різницею двох подій А і В називається подія С, що складається з усіх елементарних подій події А, які не належать до В.
7. Подією, протилежною до події А, називають подію $\overline{A} = \Omega \setminus A$. Вона настає (не настає) завжди, коли подія А не настає (настає).	Дві події А і В називаються взаємно протилежними, якщо будь-яка елементарна подія $\omega \in \Omega$ належить одній і тільки одній з цих подій, тобто $AB = \varnothing$ і $A + B = \Omega$. При цьому позначають $B = \overline{A}$ і $A = \overline{B}$.

У 9 класі розглядають поняття дискретного та неперервного розподілів статистичної імовірності, щільність розподілу, функції дискретного і неперервного розподілу статистичних імовірностей.

У 12 класі надається означення випадкової величини, розглядають її види, зокрема просту випадкову величину та її числові характеристики (статистичне математичне сподівання, статистичну дисперсію, статистичне середнє квадратичне відхилення, моду, медіану) та їх властивості. Щільність розподілу ймовірностей її, зв’язок з функцією розподілу ймовірностей. Нормальний розподіл (аналітичне завдання щільності). Імовірнісний зміст параметрів розподілу.

У 8-9 класах проявлення закону великих чисел у масових випадкових явищах.

У 12 класі поняття про закон великих чисел, як сукупність теорем, що встановлюють умови, за якими має місце стійкість середніх. Теореми Бернуллі і Чебишова. Прикладна інтерпретація теорем.

Якщо ми хочемо, щоб наступність здійснювалась по суті, а не формально, то повторення повинно бути органічно включене у нову тему і за мірою розвитку теми повинно відповідним чином змінюватись, не зводитися до механічного повторення.

Наступність та міжпредметні та внутріпредметні зв’язки. Дослідження зв’язків наступності процесу навчання основ наук у школі включає, зокрема, розподіл зв’язків на внутріпредметні і міжпредметні.

Розв’язання проблеми наступності зв’язків спрямоване на встановлення стану і можливостей внутріпредметних і міжпредметних зв’язків у школі. У зв’язку зі зростанням ролі математики у сучасній науці і техніці надзвичайно велике число майбутніх фізиків, хіміків, біологів та інших фахівців потребує грунтовної математичної підготовки, яка дала б можливість імовірнісно-математичними методами досліджувати велике коло різних проблем, застосовувати сучасну обчислювальну техніку, використовувати теоретичні досягнення на практиці.

А.М. Колмогоров вважав дуже важливим привести загальні логічні основи сучасної математики у такий стан, щоб була можливість навчати їх у школі підлітків віком 14-15 років, а також усунути розходження між „строгими” методами „чистих” математиків і „нестрогими” прийомами математичних міркувань, що використовуються прикладними математиками, фізиками і техніками [104].

Здавалося б, що вивчення елементів стохастики повинно значною мірою залежати від потреб інших предметів: фізики, біології. Тобто, учні повинні вчасно вивчати математичні поняття і прийоми, щоб потім уміло їх застосовувати у разі виникнення такої потреби.

Але на жаль, це не відповідає дійсності. У фізиці, біології, основах економіки, екології практично всі теми пов'язані, з імовірнісними поняттями, вивчаються до розгляду їх у курсі математики. Тобто учень зустрічається з ними вперше, і, можливо, в останнє, якщо програма цього не передбачає. Зрозуміло, що вимагати при такій ситуації зворотного зв'язку практично неможливо.

З цього приводу необхідно вказати на широке використання нормального розподілу ймовірностей у фізиці (швидкість теплового руху молекул, амплітуда сили струму і т. д.); у біології (набір генів у хромосомах, статистичний характер успадкування ознак, спадкові хвороби і т. д.), але на жаль даний закон не розглядається за діючою програмою.

Розглянемо приклад необхідності знаходження коренів квадратного рівняння, що виникає при розв'язанні наступної імовірнісної задачі.

<u>Приклад 4.</u> Дві електричні лампочки ввімкнені в ланцюг паралельно. Ймовірність того, що при деякому підвищенні напруги у ланцюгу вище номінальної перегорить тільки одна лампочка, дорівнює 0.18. Знайти ймовірність перегоріти для кожної з цих лампочок, якщо ці ймовірності перевищують 0.7 і рівні між собою.

<u>Розв'язування.</u>

Випробування полягає у перевірці роботи електричної лампочки. Загальне число випробувань $n = 2$. Випробування є незалежними. Подія A, яка може відбутися, або не відбутися в кожному випробуванні, полягає в тому, що при підвищенні напруги в ланцюгу лампочка не перегорить. Відома ймовірність того, що не перегорить тільки одна лампочка (без вказівки яка саме). Оскільки ймовірності настання події A в кожному випробуванні рівні між собою, то відома ймовірність $P_2(1)$, що визначається за формулою Бернуллі. За умовою $P_2(1) = 0.18$. Необхідно знайти ймовірність p настання події A у кожному випробуванні.

За формулою Бернуллі отримаємо:

$$P_2(1) = C_2^1 p^1 q^1 = 2p(1-p) = 0.18.$$

Звідки випливає, що невідома ймовірність p може бути знайдена як корінь квадратного рівняння $p^2 - p + 0.09 = 0$. Це рівняння має два корені: $p_1 = 0.9$ і $p_2 = 0.1$. За умовою $p > 0.7$, тому задачі задовольняє лише перший корінь. Таким чином імовірність того, що кожна з лампочок не перегорить, дорівнює $p = 0.9$.

Проілюструємо зв'язок стохастики з українською літературою.

<u>Приклад 5.</u> Учням пропонується провести дослідження, у ході якого визначити, як часто зустрічаються букви *а, н, п, ч* у вірші Т.Г.Шевченка «Заповіт»:

Як умру, то поховайте
Мене на могилі,
Серед степу широкого,
На Вкраїні милій…

Після підрахунку кількості букв вони заповнюють таблицю частот і з'ясовують, яка буква зустрічається частіше і у скільки разів?

Таблиця 2.3

Буква	*А*	*Н*	*п*	*ч*	Інші букви
Частота					

Наступність і перевивчення. Учневі набагато легше засвоїти зовсім нове поняття, ніж змінити неправильно сформоване поняття і перейти від попередньої точки зору до нової.

Безумовно, неправильне формування поняття є порушенням важливого дидактичного принципу науковості у навчанні, і тому воно неприпустиме ні за яких обставин. Однак це не треба змішувати з різними формами тлумачення одного і того самого поняття; що насправді викликає сумнів, так це надмірне опікування учнів від зустрічі з протиріччями. Виникнення протиріч і їх подолання пов’язане з ломкою закоренілих уявлень, які характеризують природний процес розвитку.

Наступність покращується, якщо забезпечуються методичні засади:

1) узгодженість у трактуванні понятійного апарату;
2) поступове ускладнення програмних вимог до імовірнісно-статистичної підготовки учнів;
3) концентричний розвиток навчального матеріалу за спільними змістово-методичними лініями;
4) врахування особливостей розумової діяльності учнів;
5) доступність навчального матеріалу, поступове його узагальнення і систематизації;
6) індивідуалізація і рівнева та профільна диференціація.

Дотримання наступності при вивченні елементів статистики сприяє підвищенню рівня знань і умінь учнів. Проведена експериментальна робота дозволила нам сформулювати деякі рекомендації для забезпечення наступності в процесі вивчення імовірнісних понять.

Насамперед доцільно дотримуватися таких вимог: обмеженість рамками змісту навчання, конкретність у визначенні основних понять, практична значущість для подальшого застосування, наочність для більш ефективного формування стохастичного мислення.

2.2 Методика структурування і вивчення теоретичного матеріалу в умовах диференціації навчання

Вивчення досвіду навчання теорії ймовірностей у вищих закладах освіти (ВЗО) дозволяє виділити два основних методичних підходи: неаксіоматичний [49, 116] і аксіоматичний [45, 102, 105, 106]. Традиційний неаксіоматичний підхід має багаторічну історію і до недавнього часу був самим розповсюдженим. Навчання починається з описання за допомогою прикладів понять випадкових, вірогідних і неможливих подій і операцій над ними. Далі розглядаються повні групи подій, вводяться поняття рівноможливих і сприятливих подій.

Так зване «класичне означення ймовірності» (яке насправді не є означенням) посідає центральне місце в неаксіматичному підході. Воно використовується при доведенні теорем множення і додавання ймовірностей, при розв'язуванні великої кількості задач на підрахунок імовірностей за допомогою формул комбінаторики. У ряді випадків «класичному» означенню передує фрагмент, присвячений статистичній стійкості частот, і тоді статистичне означення імовірності з'являється раніше за класичне. При цьому на деякий час у свідомості учнів фіксується сутність емпіричного походження імовірності, однак при відсутності у них, як правило, інтуїтивного статистичного досвіду дидактичний результат виявляється недовготривалим. Надалі істинний „імовірнісний зміст імовірності" відходить на другий план і вона виглядає як звичайний детермінований дріб, у якого, як і повинно бути, є чисельник і знаменник, тільки чисельник знаходиться як число сприятливих елементарних подій, а знаменник – як загальне їх число. На сутності емпіричного походження ймовірності і слід робити акцент, тривалість дидактичного результату при цьому залежить виключно від учителя. Якщо він не зводить навчання до бездумного обчислення ймовірностей, а цілеспрямовано формує стохастичне мислення учнів, то емпіричний підхід є позитивним.

Геометрична ймовірність вводиться спочатку як відношення площ, а потім узагальнюється на випадок міри. Потім розглядаються методи знаходження деяких імовірностей за відомими ймовірностями: формули повної ймовірності і Байеса, схема Бернуллі, асимптотичні теореми Лапласа. Питання, хто задав ці ймовірності і з якою метою, залишається як завжди за кадром. При такому підході не будуються і не вивчаються імовірнісні моделі, а розв'язується більш вузька задача: за ймовірностями одних подій визначити імовірності інших.

Поняття випадкової величини вводиться описово, пояснюється практичними прикладами, дається означення функції розподілу ймовірностей випадкової величини, ряду розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини і щільності розподілу імовірностей неперервної випадкової величини. Розв'язування практичних задач базується на використанні готових розподілів, які невідомо звідки взялися, які явища описують і зводиться до знаходження невідомих параметрів і числових характеристик.

Закон великих чисел – одна з тем, що важко засвоюється в теорії ймовірностей. Існуюча методика навчання залишає у стороні філософський зміст цього закону. Сукупність математичних теорем з абстрактним доведенням, який називають законом великих чисел, складно співставити з реальною дійсністю, з практикою.

Аксіоматичний підхід до навчання теорії ймовірностей закріпився у вузах протягом двадцяти останніх років. За А.М. Колмогоровим, розглядають подію, як деяку сукупність елементарних подій (результатів експерименту) з простору усіх елементарних подій, пов'язаних з даним стохастичним експериментом (дослідом), а імовірність події – як абстрактну міру цієї множини. Спочатку вводиться поняття випадкового досліду (експерименту, випробування) та простору Ω елементарних подій, що є множиною всіх можливих результатів цього досліду, а випадкові події – це деякі його підмножини, що утворюють σ - алгебру множин з простору Ω. Далі вводяться аксіоми, що приписують подіям ймовірності. Імовірнісний простір визначається як впорядкована трійка, компонентами якої є: простір елементарних подій Ω, σ - алгебра підмножин множини Ω, і імовірнісна міра P, задана на σ - алгебрі подій, що задовольняє всім аксіомам теорії ймовірностей.

Доведення перших наслідків з аксіом служить впевненим підтвердженням високого рівня математичної строгості дедуктивної побудови теорії ймовірностей, універсальності аксіоматичного методу. Теорія ймовірностей сприймається по суті справи, як теорія нормованих мір, а її мова – як мова теорії множин. Класична схема з'являється як частинний випадок імовірнісного простору, з скінченим числом елементарних подій, яким приписують рівні імовірності.

Вивчення основних формул і теорем при аксіоматичному підході суттєво відрізняється від традиційного. Принципова відмінність спостерігається при введенні поняття випадкової величини як вимірної функції, що індукує ймовірнісну міру на σ - алгебрі борелівських підмножин числової прямої. Але вже при введенні поняття функції розподілу імовірностей випадкової величини підходи зближуються і в подальшому, аж до розгляду числових характеристик, практично не спостерігається відмінності від вивчення при неаксіоматичному підході. Кожна практична задача розв'язується шляхом математизації її умови (побудови математичної моделі, імовірнісної моделі). Саме цього слід вчити учнів, а не бездумно обчислювати ймовірності.

Можливість визначення числових характеристик мовою теорії міри за допомогою інтеграла Лебега використовується не завжди. Як і при не аксіоматичному підході багато викладачів, виходячи з опитування і аналізу найбільш поширених методичних посібників [49, 116], окремо розглядають числові характеристики для дискретних і для неперервних випадкових величин. Сингулярний випадок, а також мішані випадки залишаються нерозглянутими. Там, де використовують апарат інтегрування за Лебегом, отримують виграш не лише в універсальності теорії, що викладають, а й у часі, що витрачають на її вивчення. Наприклад, порівняння підходів до доведення нерівності Чебишова безперечно говорить на перевагу використання інтеграла Лебега.

Курс теорії ймовірностей для вузів завершується як правило вивченням елементів математичної статистики. При цьому мова теорії міри, як правило, не використовується.

Було б по меншій мірі дивно, якщо хтось-би став наполягати на вивченні у школі у класах з поглибленим вивченням математики тих поглядів на теорію ймовірностей, які пропонують сучасні підручники, що використовуються для ВЗО, тим більше студентів математичних спеціальностей. Завдання полягає у тому, щоб основи сучасної науки подати на доступному учням рівні.

Проте можна не говорити про множини елементів довільної природи, про σ - алгебри, про абстрактні міри, про аксіоми ймовірностей, і при цьому, фактично аксіоматично (не акцентуючи на цьому уваги), ввести поняття випадкової події та її ймовірності. У школі не підкреслюється, що йдеться мова про аксіоматичне означення площі та об'єму, про кількість елементів, про масу тіла, але більшість учнів знають, що ці величини: 1) невід'ємні; 2) є еталон, міра якого (площа, об'єм, маса) дорівнює одиниці; 3) міра (площа, об'єм, маса) суми частин (без спільних точок) дорівнює сумі мір цих частин. Завдання вчителя – сформувати в учнів переконання, що ймовірність – це характеристика аналогічна площі, об'єму, довжини, маси, кількості елементів. В цьому і полягає сила математики, що одна і та сама математична модель охоплює об'єкти і явища самої різної природи, на перший погляд аж ніяк не пов'язані одне з одним.

Пізнання у процесі навчання є науковим у тому розумінні, що воно спирається на відомості сучасної науки. Але воно суттєво не відрізняється від пізнання у самій науці. Ця обставина диктує необхідність проведення глибокої „диференціації" розкриття окремих питань, що входять у програми навчання [76].

На наш погляд, диференціації як профільній так і рівневій повинні підлягати різні питання програми (див. 1.2).

Зупинимося на стилі подання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в класах різних профілів. Вибір цього стилю є досить істотним. Тут треба йти шляхом розумного компромісу між строгістю, доступністю й прикладною спрямованістю, не забуваючи про жодну. Якого рівня строгості дотримуватися, що і як доводити?

У технічних, економічних, природничих класах доцільно акцентувати увагу на прикладній і практичній спрямованості змістової лінії. Методика навчання повинна бути спрямована на формування вмінь моделювати реальні імовірнісні процеси, розвиток умінь, імовірнісного мислення, посилення міжпредметних зв'язків.

У математичних класах подання матеріалу носить досить абстрактний характер з високим ступенем формальних доведень, залишаючи більшу частину матеріалу, що вивчається, для самостійної роботи. Більшу ефективність дає лекційна форма роботи з наступними семінарськими заняттями.

Для реалізації основних цілей диференційованого навчання в школі необхідні якісно інші підходи до вивчення теоретичного матеріалу і системи задач та вправ, які й повинні виступати як засіб інтеграції різних тем початків теорії ймовірностей і елементів статистики, що буде сприяти ліквідації перевантажень учнів навчальним матеріалом.

Коли йдеться про принципи добору змісту елементів стохастики, відзначимо, що найважливішою особливістю сучасного етапу розвитку школи є розвиток і широке впровадження рівневої і профільної диференціації, що припускає максимальну гнучкість як у визначенні самого обсягу навчального матеріалу, так і у вимогах до рівня оволодіння ним різними учнями.

Найчастіше в підходах до диференціації навчання враховуються властивості особистості, що відбивають індивідуально надбаний досвід: знання, уміння, навички, научуваність, як темп просування у навчанні, досвід емоційно-оціночних відносин і різноманітної діяльності. Ці властивості особистості легше вивчаються й дійсно визначають можливості диференціації в навчанні, тому що відбивають й актуальний рівень і найближчий можливий рівень. Однак ці якості можуть підказати рівневу диференціацію в навчанні на певному етапі, але не завжди відбивають можливості школяра в профільній диференціації.

Враховуючи вище сказане, за варіативну основу пропонуємо взяти такий календарний план з розподілу годин з початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики.

Початки теорії ймовірностей і вступ до статистики

(47 годин)

№№ уроків	Зміст уроку	Форми проведення
1	Предмет теорії ймовірностей. Поняття випадкового експерименту та його результатів. Простір елементарних подій.	Лекція
2	Поняття події, порівняння подій та операції над подіями. Основні властивості подій.	Комбінований урок
3	Статистичні ймовірності. Основні властивості статистичних імовірностей.	Лекція
4	Розв’язування задач.	Семінар
5	Імовірнісні простори. Уточнення поняття випадкової події та її ймовірності.	Лекція
6	Скінчений простір рівноможливих елементарних подій.	Комбінований урок
7	Розв’язування задач.	УФНіВ
8	Нескінчений простір рівноможливих елементарних подій. Задача Бюффона. Парадокс Бертрана.	Комбінований урок
9	Розв’язування задач.	УФНіВ
10-11	Умовні статистичні ймовірності. Залежні та	Лекція

	незалежні події. Імовірність добутку подій. Події незалежні в сукупності. Приклад Бернштейна.	
12	Розв’язування задач.	УФНіВ
13	Самостійна робота.	
14	Формула повної статистичної ймовірності. Формула Байєса.	Комбінований урок
15	Розв’язування задач.	УФНіВ
16	Тематична контрольна робота.	
17	Поняття дискретного розподілу статистичних ймовірностей. Полігон відносних частот.	Інтегрований урок
18	Поняття неперервного розподілу статистичних ймовірностей. Гістограма. Щільність розподілу статистичних ймовірностей.	Інтегрований урок
19	Розв’язування задач.	УФНіВ
20	Лабораторна робота.	
21	Функція дискретного ряду розподілу статистичних ймовірностей.	Інтегрований урок
22	Функція неперервного ряду розподілу статистичних ймовірностей.	Інтегрований урок
23-24	Розв’язування задач.	УФНіВ
25-26	Лабораторна робота.	
27	Числові характеристики дискретного розподілу статистичних ймовірностей.	Інтегрований урок

28	Числові характеристики неперервного розподілу статистичних ймовірностей.	Інтегрований урок
29-30	Розв’язування задач.	УФНіВ
31	Лабораторна робота.	
32	Схема Бернуллі. Найімовірніше число успіхів у схемі Бернуллі.	Інтегрований урок
33	Закон рідкісних явищ.	Інтегрований урок
34-35	Розв’язування задач. Самостійна робота.	УФНіВ
36-37	Прості випадкові величини (ПВВ) та їх характеристики. Математичне сподівання та дисперсія ПВВ. Основні властивості математичного сподівання та дисперсії. Нерівність Чебишова	Комбінований урок
38	Розв’язування задач.	Семінар
39-40	Закон великих чисел для статистичних ймовірностей.	Лекція
41	Тематична контрольна робота.	
42-43	Закон розподілу статистичних ймовірностей ПВВ. Біноміальний розподіл. Гіпергеометричний розподіл.	Інтегрований урок
44	Нормальний розподіл статистичних ймовірностей. Правило „трьох сигм”.	Інтегрований урок
45	Первинні уявлення про задачі математичної	Лекція

	статистики (вибір між двома гіпотезами, перевірка статистичної гіпотези та ін.).	
46-47	Залікові заняття.	Залік

Інтуїтивні уявлення про імовірність пов'язані з проведенням дослідів, які підтверджують існування закономірностей у масових випадкових явищах. При цьому доцільно спиратися на конкретний життєвий досвід учнів.

Проведення експериментів дає змогу розглянути поняття стохастичного експерименту та його можливих результатів – елементарних подій, події, як певної сукупності результатів експерименту, розкрити зміст слів „подія відбувається”, „подія не відбувається”, „результат випробування належить множині наслідків, що сприяють події чи ні”, „елементарна подія сприяє події чи ні” [136].

Поряд з широко відомими стохастичними експериментами, запропонованими у [5, 6, 28, 29, 88, 179], можна провести такий:

Учням пропонується провести експеримент, описаний задачею. „Перед грою у футбол у дворі діти обирають капітана команди. Антон і Валентин за загальною думкою є кращими гравцями і обидва можуть бути капітанами команд. Почувши розмову членів футбольної команди, пенсіонер Віктор Петрович, запропонував визначити капітана таким чином. Він кладе до сумки 4 шахових пішаки: 2 чорних і 2 білих. Потім виймає навмання 2 пішаки. Необхідно обрати один з двох варіантів для обрання капітана: 1-й – пішаки одного кольору; 2-й – пішаки різного кольору.

У алфавітному порядку має право обирати першим Антон. Який з варіантів краще рекомендувати Антону, щоб саме він став капітаном?”

Задачу розв'язують експериментально. Кожен учень з класу може провести принаймні по 30 дослідів. При проведенні експерименту учні помічають, що 1-й варіант, як правило, зустрічається приблизно у два рази рідше, ніж другий. Цей факт дивує і викликає недовіру, але він дає підстави вважати, що Антону краще обрати другий варіант. Учитель або сильний учень на дошці може провести розрахунки, які дадуть можливість передбачити експериментально отриманий результат.

В основу побудови простору елементарних подій покладемо те, що білих і чорних пішаків однакова кількість. Можуть бути такі результати експерименту: 1) два білих - $б_1б_2$; 2) два чорних –$ч_1ч_2$; 3) $б_1ч_1$; 4) $б_1ч_2$; 5) $б_2ч_1$; 6) $б_2ч_2$. За результатами його побудови пішаки різного кольору можна вибрати 4-ма способами, а пішаки чорного кольору 1-м способом і білого кольору теж 1-м способом, тобто пішаки одного кольору можна вибрати двома способами. Таким чином теоретичні розрахунки допомагають з більшою впевненістю рекомендувати Антону другий варіант.

На даному етапі важливим є пояснення зв’язку емпіричних і теоретичних значень, чим вони відрізняються.

На наш погляд необхідно виділити в окремий пункт розгляд операцій над подіями.

Основну мету вивчення співвідношень між подіями ми бачимо в тому, що ці нові поняття будуть необхідні для наступного вивчення основних теорем, необхідні для демонстрації учням операцій над подіями, та в необхідності з’ясувати зв’язок цих законів з правилами додавання і множення ймовірностей.

Від того, як будуть засвоєні основні операції над подіями, залежить і осмислення цих правил.

Ми вважаємо, що виділення спеціального питання, яке стосується вивчення операцій над подіями, методично виправдане, оскільки таке розташування матеріалу сприяє послідовному і більш повному сприйняттю нових понять.

При розгляді співвідношень між подіями широко використані діаграми Ейлера-Венна, які дозволяють учням більш наочного і доступно сприймати дії над подіями.

Після введення операцій над подіями можна уточнити, які підмножини простору Ω можна вважати подіями, а які не можна. Нехай Ω - простір елементарних подій, який відповідає певному випадковому (стохастичному) експерименту, а S-деяка сукупність підмножин Ω, що задовольняє умови:

1s) $\Omega \in S$;

2s) Якщо $A_i \in S$, $i = 1,2,...$, то й $\bigcup_i A_i \in S$;

3s) Якщо $A \in S$, то й $\overline{A} \in S$.

Тоді кожну підмножину $A \in \Omega$, що належить до сукупності S, називають випадковою, а сукупність S називають простором подій, що відповідає даному простору елементарних подій.

Необхідно підкреслити, що у загальному випадку не кожна підмножина A простору елементарних подій Ω є подією [88].

Якщо простір елементарних подій Ω скінченний або зчисленний, то його називають дискретним, і для нього простором подій найчастіше вважають сукупність усіх можливих підмножин простору Ω.

Якщо простір не є дискретним, але може бути поданий у вигляді проміжку $\langle a;b \rangle$, то його називають неперервним і для нього простір подій найчастіше не збігається з множиною всіх підмножин простору Ω.

У шкільній практиці, на наш погляд, доречно спочатку розглядати статистичне означення ймовірності, яке буде випливати з результатів проведення дослідів.

Серйозної уваги, з цього приводу, вимагає досвід угорського педагога Т.Варга [28, 29, 30], який проводив з учнями своєрідні лабораторні роботи, технічним озброєнням яких служили кульки для пінг-понгу, оснащені різними зафарбованими кольорами, різнокольорові ґудзики або будь-які інші предмети. Кожен учень кладе їх до коробки або до шухляди столу, ретельно перемішує і, не дивлячись, вилучає один або кілька предметів (в залежності від типу завдання і задачі. яку обговорюють). Виникає можливість порівнювати частоти настання подій і його імовірності, обчисленої за допомогою статистичного означення. Подібні заняття мають велике виховне значення, вказуючи на те, що й там, де хазяйнує випадок, маються свої закономірності.

Імовірність події A це число p, навколо якого при зростанні числа випробувань. зосереджуються більшість значень статистичної ймовірності (відносної частоти) події A, тобто у певному розумінні $P(A) \approx P_N^*(A)$, де $P_N^*(A) = \frac{m_N}{N}$ - статистична ймовірність події A [5].

Статистична ймовірність є імовірнісною мірою і відповідає більш ґрунтовному означенню ймовірності яке можна розглянути в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики.

Означення. Будь-яку числову функцію $P(A)$, $A \in S$, яка задана на сукупності S подій і задовольняє вимоги [88]:

1р) $P(A) \geq 0$, $A \in S$;

2р) якщо $A_i \in S$, $i = 1,2,\dots$, $A_i A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то $P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$;

3р) $P(\Omega) = 1$;

називають імовірністю події.

Властивості функції $P(A)$, $A \in S$, називаються основними, чи визначальними. З них випливають всі інші властивості ймовірності.

При цьому сукупність подій S повинна задовольняти основні вимоги 1s)-3s) [88]:

«Класичне означення» можна розглядати як один із прикладів застосувань сучасної теорії ймовірностей, яка будується на базі теоретико-множинних уявлень, якщо простір елементарних подій Ω є скінченним: $\Omega = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$, причому $P(E_k) = P(\{E_k\}) = \frac{1}{n}, \forall k \in 1,\dots n,$ тобто всі елементарні події є рівно можливими (рівноймовірними).

Тоді для довільної події $A \in S$ можна скористатися «класичним означенням» ймовірності $P(A) = \frac{N(A)}{N}$, де $N(A)$- кількість елементарних подій, що сприяють події A, а N - кількість усіх елементарних подій у просторі Ω.

При встановленні рівноможливості (якщо про це не сказано в задачі) необхідно спиратись на здоровий глузд, на особливості проведення досліду, наприклад, на симетричність гральної кістки, монети і т.п., або на несиметричність канцелярської кнопки.

Помилки в означенні рівноймовірності припускалися навіть видатними вченими. Так, Даламбер вважав, що якщо монету підкинути 2 рази, то ймовірність появи цифри принаймні один раз дорівнює $\frac{2}{3}$. (З учнями доцільно розглянути відповідний випадковий експеримент та знайти усі можливі його результати.)

Він міркував таким чином, що при підкиданні монети можливі такі результати (елементарні події):

1) при першому підкиданні з’явилося число. Гра припиняється, оскільки друге підкидання проводити непотрібно.
2) при першому підкиданні з’явився герб, а при другому – число.
3) при першому підкиданні з’явився герб і при другому – теж герб.

„Всього відбулося, - міркував Даламбер, - три події, серед яких дві події сприяють тому, щоб випала цифра. Тому ймовірність появи числа принаймні один раз дорівнює $\frac{2}{3}$”. Таке розв’язання неправильне, оскільки при розв’язуванні не знайдені всі можливі результати експерименту.

Дійсно, при двох підкиданнях монети можуть бути лише такі елементарні події: 1) герб, число; 2) число, герб; 3) число, число; 4) герб, герб. З чотирьох елементарних подій три сприяють появі цифри, тому, вважаючи результати рівноможливими, дістанемо, що шукана ймовірність дорівнює $\frac{3}{4}$, а не $\frac{2}{3}$.

Велике враження на учнів справляє розв’язання задачі де Мере [6].

Парадокс де Мере полягав у тому, що при підкиданні трьох гральних кубиків де Мере помітив, що сума в 11 очок випадає частіше, ніж сума в 12 очок. А його математичні розрахунки давали однаковий результат.

Б. Паскаль знайшов помилку парадокса де Мере, яка полягала у тому, що де Мере неправильно побудував сукупність усіх можливих результатів відповідного експерименту.

Якщо простір елементарних подій Ω є зчисленним: $\Omega = \{E_1, E_2, ..., E_n, ...\}$, то тоді елементарні події не можуть бути рівноможливими (рівноймовірними). Уявлення про це можна сформулювати на прикладі експерименту з підкидання монети до першого випаду герба [88].

На практиці часто корисно скористатися геометричним заданням ймовірності $P(A) = \dfrac{mes_g}{mes_G}$, де mes_g - міра області сприятливих для події A, а mes_G - міра множини всієї області.

При цьому доцільно розглянути задачу Бюффона та парадокс Бертрана [209].

Для математичних класів можливо згадати розгляд означення ймовірності за Р. Мізесом.

$$P = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n},$$

де m - кількість появ події A в n однакових експериментах. Він вважав, що лише таке означення є правильним. Однак, такий підхід є надто жорстким, оскільки ми не можемо проводити нескінченну кількість експериментів. Але з іншого боку наука оперує такими поняттями, як, наприклад, температура чи розміри предметів, хоча їх неможливо точно виміряти.

У подальшому багато авторів робили спроби підправити теорію Мізеса, однак подолати її протиріччя не вдалося. Короткий огляд різних підходів до цієї проблеми наведено у [147].

Імовірність суми подій спочатку розглядають для випадку двох несумісних подій, тобто $P(AB) = 0$ і тоді $P(A + B) = P(A) + P(B)$ – за основною властивістю 2р) імовірності $P(A)$, $A \in S$. А потім, як наслідок з властивості 2р), для двох довільних події A і B дістають рівність $P(A + B) = P(A) + P(B) – P(AB)$, оскільки $A+B=A+(B-AB)$, а $B=(B-AB)+B$ і тому $P(B)=P(B-AB)+P(B)$, а $P(A+B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

На наш погляд, при вивченні умовної ймовірності та теореми множення ймовірностей. краще почати з проведення такого експерименту, який дає можливість доступно ввести поняття умовної ймовірності. Гральний кубик підкидається двічі. Знайти імовірності таких подій: подія A – сума очок, що випали при двох підкиданнях дорівнює 5; подія B – сума очок, що випали при двох підкиданнях дорівнює 5, за умови, що першою випала цифра 2 [209].

Теорема про ймовірність добутку подій A і B є простим наслідком означення умовної ймовірності: $P(AB)=P(A)\cdot P(B)=P(B)\cdot P(A)$. Поняття, незалежнсті двох подій A і B, фактично є правилом множення ймовірностей двох незалежних подій A і B: $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$.

На наш погляд, обов’язково повинен бути розглянутий приклад Бернштейна [36], який проілюструє, що не всі попарнонезалежні події є незалежними в сукупності.

Розгляду формули повної ймовірності передує практичний приклад, який ставить питання про необхідність розгляду зазначеної теми.

Розглянемо таку ситуацію: для приймання заліку в учнів 11 класу вчитель заготовив 50 задач: 20 задач на знаходження похідної й 30 задач на знаходження первісної. Для отримання заліку учень повинен розв‘язати першу навмання вибрану задачу.

Якою є ймовірність отримання учнем заліку, якщо він уміє розв‘язати 18 задач на знаходження похідної та 15 задач на знаходження первісної?

Приймемо позначення: подія B_1 – випала задача на знаходження похідної; B_2 – випала задача на знаходження первісної. Зрозуміло, що ймовірності цих подій відповідно дорівнюють: $P(B_1) = \frac{20}{50} = 0,4$ і $P(B_2) = \frac{30}{50} = 0,6$. Якщо подія A означає, що залік учнем складено (вибрана задача розв'язана), то можемо знайти умовні ймовірності настання події A при здійсненні кожної із зазначених подій B_1 та B_2: $P_{B_1}(A) = \frac{18}{20} = 0,9$ і $P_{B_2}(A) = \frac{15}{30} = 0,5$. Як же знайти ймовірність події A? [5].

Формула повної імовірності доводиться. Формула Байєса також не викликає значних методичних труднощів при її доведенні.

Методика навчання описової статистики докладно розглянута в [87,88]. На наш погляд вона повинна розглядатися в тісному зв'язку з інформатикою. Як показує досвід використання ППЗ GRAN1 або Microsoft Excel, на заняттях з вступу до статистики не виникає жодних проблем, пов'язаних з вивченням теоретичного матеріалу. Співвідношення витрат часу схиляється на сторону комп'ютерного варіанту. При цьому з'являється можливість основну увагу зосередити на засвоєнні теоретичного матеріалу. Обчислення основних характеристик описової статистики можуть бути дубльовані в курсі інформатики і закріплені в ході проведення лабораторних робіт.

При цьому повинні бути розглянуті питання згідно наведеного календарного плану п.17-31 (див. С.108-109) [88].

Числові характеристики необхідно доповнити формулами для обчислення моди і медіани:

$$Mo = y_i + h_i \frac{m_i - m_{i-1}}{2m_i - m_{i-1} + m_{i+1}},$$

$$Me = y_{1i} + h_i \frac{\frac{n}{2} - \sum_{k=1}^{i-1} m_k}{m_i}.$$

Наступним розглядають повторні незалежні випробування, зокрема схему незалежних випробувань, або схему Бернуллі. Такою називають серію з n випробувань, кожне з яких відповідає фіксованій імовірнісній моделі (Ω, S, P) даного випадкового експерименту.

Якщо зафіксувати подію $A \in S$, ймовірність якої $P(A) = p \in (0;1)$, то в даній серії з n випробувань ця подія може відбутися k рази, $k \in \overline{0,n}$. Тому подія A визначає нові події A_k, кожна з яких полягає в тому, що у даній серії з n випробувань подія A відбулася k разів. Подія A_k є підмножиною нового простору елементарних подій Ω_1, елементами якого є набори (x_1, x_2, ..., x_n), де $x_i = 1$ ($x_i = 0$), коли подія A відбувається (не відбувається) в i-му випробуванні.

Чітко формулюються умови схеми Бернуллі: 1) випробування повинні бути повторними і незалежними; 2) при кожному з яких подія А може наступити, а може й не наступити; 3) імовірність успіху одна й таж сама в кожному експерименті і дорівнює $p = const$.

Доводиться біномна формула [116]: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Аналізуються окремі випадки використання схеми Бернуллі [5, 6]. Доречним буде розгляд найімовірнішого числа успіхів у схемі Бернуллі, який є прообразом моди (Mo) для біноміального розподілу.

Якщо у схемі Бернуллі ймовірність $p = P(A)$ події А досить мала, а кількість випробувань n досить велика, причому $np \approx \lambda$, то має місце формула Пуассона:

$$P_n(k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^n (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Для класів технічного і математичного профілів дана формула доводиться. Доведення спирається на використання схеми Бернуллі і теорії границь.

І функції, і щільність розподілу ймовірностей, і числові характеристики розподілів імовірностей можна (і слід) розглядати на множині значень випадкової величини *X*, так і на множині Ω (яку у багатьох випадках можна вважати підмножиною множини дійсних чисел). Тому відповідні факти можна і доцільно ввести ще до вивчення поняття випадкової величини. Отже уявлення про них матимуть й учні тих класів, в яких поняття випадкової величини взагалі не вивчається.

Означення. Випадковою величиною називають функцію $X = X(E)$, визначену на просторі Ω елементарних подій і таку, що множини розв'язків нерівностей $X(E) < x$ є подіями для будь-якого числа x.

Отже, випадкова величина є S – вимірною функцією, визначеною на просторі елементарних подій. При використанні такого означення випадкової величини з'являється нагода розв'язувати рівняння та нерівності, що є можливістю для підготовки до вступних іспитів.

Дискретною називають випадкову величину, множина значень якої майже скінчена або майже зчисленна. Якщо ця множина скінчена, тобто $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, $m \in N$, де числа x_k попарно різні, то випадкову величину називають простою.

Неперервною називають випадкову величину, що може набувати всіх значень з деякого скінченого або нескінченного проміжку.

Цікавим прикладом є величини, які не відносяться ні до одного з двох типів. Найпростішим прикладом такої випадкової величини є час роботи електричної лампочки. Придбана лампочка може з ненульовою ймовірністю виявитися бракованою, тобто час її роботи буде дорівнювати нулю, і в цьому смислі його необхідно віднести до дискретних випадкових величин. Якщо ж лампочка буде „робочою”, то ми не зможемо перелічити всі моменти часу, в яких вона може відмовити, і тоді час безвідмовної роботи природно вважати неперервною випадковою величиною. Для даного прикладу можна сказати, що ми маємо справу з „сумішшю” дискретної і неперервної випадкових величин.

Дискретна випадкова величина чи неперервна залежить від характеру функції $F_x(x)$ розподілу ймовірностей випадкової величини *X*.

Означення. Функцією розподілу ймовірностей випадкової величини X називається функція $F(x)$, яка для довільного числа x задає ймовірність того, що випадкова величина X набуває значення, менше x, тобто:

$$F_x(x) = P_x((-\infty; x)) = P(\{E : X(E) < x\}) = F\left(X^{-1}(-\infty; x)\right) \qquad (2.1)$$

Необхідно звертати увагу на те, що міра P_x генерується випадковою величиною з імовірнісного простору (Ω, S, P), P_x визначена на $B(R^1)$, а P на S, $X^{-1}(-\infty; x) \in S$ - подія, прообраз множини $(-\infty; x)$. Бажано було б розглянуть імовірнісні міри на Ω і на R^1 (точніше на S і на $B(R^1)$), куди функція *X* відображає елементи з Ω. Це різні множини точок, з різними розподілами ймовірностей на них [88].

Для дискретної випадкової величини ймовірність P_x зосереджена у точках розриву функції $F_x(x)$, а для неперервної – функція $F_x(x)$ є неперервною.

Формула 2.1 пов’язує один з важливих розділів математики, що вивчає функції дійсного аргументу, з теорією ймовірностей, де вивчаються ймовірності випадкових подій.

На відміну від випадкової події, настання якої можна лише передбачити, також як і появу певного значення випадкової величини, значення функції дійсного аргументу завжди можна однозначно визначити.

Формула 2.1 являє собою своєрідний „міст” між математичним аналізом функцій дійсного аргументу і теорією ймовірностей, між функціями дійсної змінної і випадковими величинами. Ця формула дає змогу при дослідженнях у теорії ймовірностей використовувати апарат математичного аналізу, без якого важко було б отримати непогані результати.

Означення. Щільністю розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини Х називається похідна (за умови її існування) від функції розподілу ймовірностей на тій же множині: $f_x(x) = F'_x(x)$.

Формальним означенням статистичного математичного сподівання і статистичної дисперсії простих випадкових величин передує евристична бесіда, що містить наочні приклади як у [124] або розгляд певної прикладної задачі.

Задача 1. Відомі закони розподілу простих випадкових величин *X* і *У* – числа очок, що вибиваються 1-м і 2-м ліцеїстом під час проведення польових стрільб.

X:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i^*	0,15	0,11	0,04	0,05	0,04	0,10	0,10	0,04	0,05	0,12	0,20

У:

y_j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_j^*	0,01	0,03	0,05	0,09	0,11	0,24	0,21	0,10	0,10	0,04	0,02

Необхідно з’ясувати, хто з двох ліцеїстів стріляє краще. Розглядаючи ряди розподілів випадкових величин *X* і *У,* відповісти на це запитання досить не просто через безліч числових значень. До того ж у першого ліцеїста достатньо великі ймовірності (наприклад, більше 0,1) мають крайні значення числа очок, які вибиваються (*X* = 0, 1 і *X* = 9, 10), а у другого ліцеїста – проміжні значення (*У* = 4, 5, 6).

Хто на вашу думку стріляє краще?

Доцільно вважати, що з двох ліцеїстів краще стріляє той, хто в середньому вибиває більшу кількість очок. Таким середнім значенням простої випадкової величини є її математичне сподівання.

Назва терміна пов'язана з початковим періодом виникнення теорії ймовірностей, коли її область застосування обмежувалась азартними іграми. Гравця цікавило середнє значення виграшу, який він чекав.

Означення. Статистичним математичним сподіванням простої випадкової величини X називається сума добутків всіх її значень на відповідні їм ймовірності:

$$M_n^*(X)=\sum_{i=1}^{m}x_i P_n^*\left(X^{-1}(x_i)\right).$$

Для школярів запис може бути спрощеним і мати такий вигляд:

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{X})=\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{x_i}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x_i})$$

Розглянемо його імовірнісний зміст і основні властивості.

Нехай проведено n послідовних випробувань, в яких випадкова величина X набуде значення $x_1, x_2, ..., x_m$, до того ж значення x_1 з'явилось m_1 раз, x_2 - m_2 середнє арифметичне всіх цих значень і позначимо його $\bar{x}$, маємо:

$$\bar{x}=\frac{x_1m_1+x_2m_2+...+x_km_k}{m_1+m_2+...+m_k},\ \text{або}\ \bar{x}=\sum_{i=1}^{m}x_i\frac{m_i}{n}.$$

Зауважимо, що дріб $\frac{m_i}{m}$ є не що інше, як відносна частота того значення x_i, що з'явиться в m випробуваннях, тобто статистична ймовірність. Позначимо цей дріб $\frac{m_i}{m}=p_i$ і запишемо тепер середнє арифметичне таким чином: $\bar{x}=\sum_{i=1}^{m}x_i p_i$.

Тобто імовірнісний зміст одержаного результату такий: статистичне математичне сподівання дорівнює середньому арифметичному спостережних значень випадкової величини. Обов'язково проводиться доведення властивостей математичного сподівання [6].

Обчислимо $M_n^*(X)$ і $M_n^*(Y)$ в задачі про стрільців:

$M_n^*(X) = 0\cdot 0.15 + 1\cdot 0.10 + 2\cdot 0.04 + ... + 9\cdot 0.12 + 10\cdot 0.20 = 5.36$;

$M_n^*(Y) = 0\cdot 0.01 + 1\cdot 0.03 + 2\cdot 0.05 + ... + 9\cdot 0.04 + 10\cdot 0.02 = 5.36$.

Тобто статистичне математичне сподівання числа очок, які вибивають два ліцеїсти однакове.

Отже, статистичне математичне сподівання теж не може в достатній мірі характеризувати дискретну випадкову величину. Але, як говорилося вище, у першого ліцеїста значні ймовірності мають крайні значення, які сильно відмінні від $M_n^*(X)$, а у другого навпаки. – значення, близькі до $M_n^*(Y)$.

Хто з них стріляє краще?

Вважають, що краще стріляє той ліцеїст, у кого при однакових математичних сподіваннях числа вибитих очок менше відхилення (розсіювання) цього числа відносно статистичного математичного сподівання. У якості такої характеристики розглядають дисперсію. Слово дисперсія означає „розсіювання”.

У якості характеристики розсіювання неможливо брати статистичне математичне сподівання відхилення випадкової величини від її статистичного математичного сподівання, оскільки за властивостями статистичного математичного сподівання ця величина дорівнює нулю для будь–якої випадкової величини. Саме тому використовують квадрат відхилення.

Означення. Статистичною дисперсією $D_n^*(X)$ простої випадкової величини X називається статистичне математичне сподівання квадрата її відхилення від статистичного математичного сподівання:

$$D_n^*(X) = M_n^*\left[X - M_n^*(X)\right]^2 = \sum_{i=1}^{m}\left(x_i - M_n^*(X)\right)^2 P_n^*\left(X^{-1}(x_i)\right).$$

Для школярів запис може бути спрощеним і мати такий вигляд:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{M}[\boldsymbol{X} - \boldsymbol{M}(\boldsymbol{X})]^2 = \sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{M}(\boldsymbol{X}))^2 \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}_i)$$

Для обчислення значення статистичної дисперсії часто користуються такою теоремою.

Теорема. Статистична дисперсія простої випадкової величини дорівнює різниці між статистичним математичним сподіванням квадрату простої випадкової величини та квадратом статистичного математичного сподівання, тобто $\boldsymbol{D}_n^*(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{M}_n^*(\boldsymbol{X}^2) - [\boldsymbol{M}_n^*(\boldsymbol{X})]^2$ ($\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{X}^2) - [\boldsymbol{M}(\boldsymbol{X})]^2$).

Доведення даної теореми для всіх профілів обов'язкове.

Обчислимо статистичну дисперсію і статистичне середнє квадратичне відхилення для задачі про стрільби. Зручно буде спочатку визначити статистичні математичні сподівання квадратів випадкових величин:

$M_n^*(X^2) = 0^2 \cdot 0.15 + 1^2 \cdot 0.10 + 2^2 \cdot 0.04 + ... + 9^2 \cdot 0.12 + 10^2 \cdot 0.20 = 42.34$.

Тоді за формулою $D_n^*(X) = 42.34 - 5.36^2 = 13.61$, а $\sigma_n^*(X) = 3{,}69$.

Аналогічно: $D_n^*(Y) = 4.17$, а $\sigma_n^*(Y) = 2.04$.

Отже, при рівності середніх значень числа очок, які вибивають ліцеїсти ($M_n^*(X) = M_n^*(Y)$), їх дисперсії, тобто характеристики розсіювання відносно середнього значення відрізняються. У другого ліцеїста менше: $D_n^*(X) < D_n^*(Y)$. Зрозуміло, що для отримання більш високих результатів стрільби у порівнянні з першим ліцеїстом, необхідно змістити „центр" розподілу числа очок, які вибиваються, тобто збільшить $M_n^*(Y)$, навчиться краще цілитись у мішень.

Розглянемо приклади, необхідні для роз'яснення змісту статистичного математичного сподівання як середнього значення простої випадкової величини і дисперсії як міри „розсіювання" відносно середнього.

У класі технічного профілю залучається механічна аналогія. У цій аналогії статистичне математичне сподівання відповідає абсцисі центра мас.

Уявимо собі стержень (відрізок осі абсцис), на якому в точках x_i нанизані кулі масою p_i (рис. 2.11). Використовуючи шкільні знання з фізики можна вивести, формулу центра мас такої системи, яка знаходиться у точці з координатою, що дорівнює $M_n^*(x)$.

$$M_n^*(X) = x_{ц.м.} = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_m p_m}{p_1 + p_2 + ... + p_m}$$

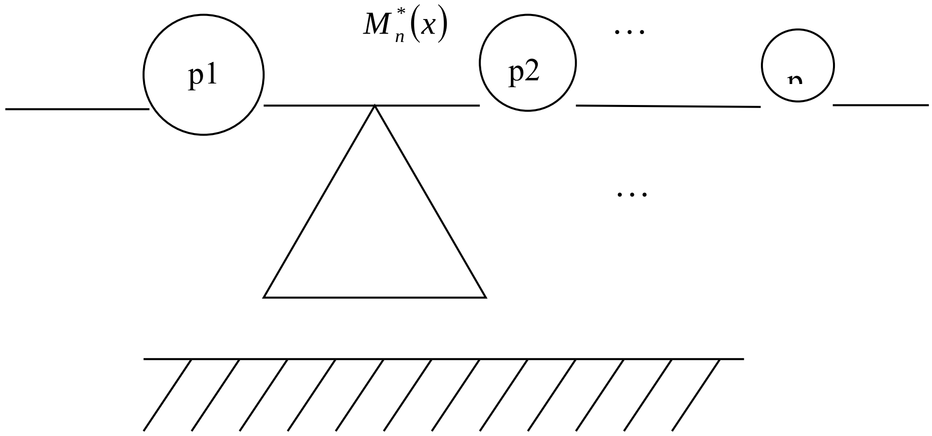


Рис.2.11

В класі економічного профілю розглянемо числові характеристики з економічної точки зору. Розглянемо будь-яку операцію, прибуток від якої буде простою випадковою величиною *X*, тоді середній очікуваний прибуток - це статистичне математичне сподівання. А статистичне середнє квадратичне відхилення $\sigma_n^*(X)$ - це міра розсіювання можливих значень прибутку, який вважають мірою ризику.

Закон великих чисел пропонуємо розглянути в такому вигляді. Подія A_k полягає в тому, що відносна частота події *A* в даній серії з *n* випробувань дорівнює $P_n^*(A) = \frac{k}{n}$. Виявляється, що для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ має місце нерівність

$$\tilde{P}_n\left(\left\{\left|P_n^*(A) - p\right| > \varepsilon\right\}\right) \le \frac{1}{n\varepsilon^2},$$

коли *n* – досить велике, тобто $n > n_0(\varepsilon)$.

Нерівність $P\left(\left\{\left|P_n^*(A)-p\right|>\varepsilon\right\}\right)\leq\frac{1}{n\varepsilon^2}$ означає, що для серії з n випробувань $\left|P_n^*(A)-p\right|=\left|P_n^*(A)-P(A)\right|>\varepsilon$, ймовірність виконування нерівності не перевищує $\frac{1}{n\varepsilon^2}$. Із цього й випливає закон великих чисел: $\lim\limits_{n\to\infty}\widetilde{P}_n\left(\left|P_n^*(A)-P(A)\right|\right)=0$, тобто для фіксованого $\varepsilon>0$ і досить великого числа n малоймовірно, щоб $P_n^*(A)$ досить сильно відрізнялося від $p=P(A)$. Саме в цьому розумінні відносна частота $P_n^*(A)$ досить мало відрізняється від імовірності $p=P(A)$, коли число n випробувань у даній серії досить велике.

Методиці вивчення теми закон великих чисел у курсі математики присвячене детальне дослідження [82]. Перевага розробленої методики на наш погляд полягає у розподілі матеріалу, що вивчається, неодноразовому повторному звертанні до теми на більш високому рівні розкриття. Поділяючи цей підхід ми вважаємо доцільним запропонувати наступні зміни до рекомендацій, наданих у [82, 120, 129]. При цьому ми керуємося наступними міркуваннями:

1) при обов'язковому включенні теоретико-ймовірнісного матеріалу в шкільну програму з математики, навчання основних теоретико-ймовірнісних фактів необхідно почати з 8 класу;
2) навчання повинно бути простим і доступним.

На наш погляд необхідно особливу увагу приділити розподілам статистичних імовірностей. Однією з найважливіших стохастичних задач з використанням апарату комбінаторики є задача на безповторну вибірку, або гіпергеометричний закон розподілу ймовірностей.

Гіпергеометричний закон визначається трьома параметрами: *M, R, m*. Використовується при статистичному управлінні якістю промислової продукції. Ідею статистичного приймального контролю розглядав ще М.В. Остроградський [90].

На наш погляд буде доцільно розглянути задачу про „Спортлото” [18].

Цікавим для учнів буде той факт, що завдяки використанню закону розподілу в територіальному управлінні спортивних лотерей свого часу, була розкрита група злочинців, які, використовуючи службове положення, здійснювали великі розкрадання з лотереї „Спортлото”. Технологія злочину полягала в тому, що вони підробляли виграшні картки після проведення тиражу розіграшу. Поштовхом для розкриття злочину стала теоретико-ймовірністна експертиза, яка полягала в перевірці гіпотези про випадковий розподіл числа збігів. Статистичний аналіз виграшів показав значне відхилення від теоретичного розподілу. Особливо великі відхилення в галузі великих виграшів. Таким чином, гіпотезу про випадковий розподіл виграшів на підставі перевірки довелося відкинути, але ця обставина не може бути підставою для порушення кримінальної справи. За даними теоретико-ймовірнісної експертизи у відповідному місті було встановлено спостереження і злочинці були викриті.

На завершення, в обов’язковому порядку, розглядається нормальний закон розподілу. Методика його вивчення розглядається у роботах [35, 118].

Робиться висновок про те, що математичне сподівання нормально розподіленої випадкової величини співпадає з точкою максимуму щільності розподілу.

При навчанні стохастики доцільно використовувати ППЗ GRAN1 [64, 163]. Зокрема, розглядаючи біноміальний і нормальний розподіли, можемо зробити висновок про те, що біноміальний розподіл є дискретним аналогом нормального, оскільки при досить великій кількості випробувань многокутник біноміального розподілу досить близький до графіка функції $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{npq}}e^{-\frac{(x-np)^2}{2npq}}$. Для цього за допомогою GRAN1 можуть бути розглянута така задача.

Задача 2. Митний пост дає статистичну оцінку того, що 50% усіх осіб, що повертаються з-за кордону, не декларує весь товар, на який накладається податок. Якщо випадково вибрати осіб, то яка ймовірність того що 0; 1; 2; 3; 4;

5; 6; 7; 8 з них не задекларують весь товар. Визначити числові характеристики то побудувати полігон розподілу.

Розв’язування.

Експеримент полягає в тому, що особи послідовно і незалежно будуть проходити митний пост.

$P_8(0) = C_8^0 \cdot 0.5^0 \cdot 0.5^8 = \frac{1}{256}$; $P_8(5) = C_8^5 \cdot 0.5^5 \cdot 0.5^3 = \frac{56}{256}$;

$P_8(1) = C_8^1 \cdot 0.5^1 \cdot 0.5^7 = \frac{8}{256}$; $P_8(6) = C_8^6 \cdot 0.5^6 \cdot 0.5^2 = \frac{28}{256}$;

$P_8(2) = C_8^2 \cdot 0.5^2 \cdot 0.5^6 = \frac{28}{256}$; $P_8(7) = C_8^7 \cdot 0.5^7 \cdot 0.5^1 = \frac{8}{256}$;

$P_8(3) = C_8^3 \cdot 0.5^3 \cdot 0.5^5 = \frac{56}{256}$; $P_8(8) = C_8^8 \cdot 0.5^8 \cdot 0.5^0 = \frac{1}{256}$.

$P_8(4) = C_8^4 \cdot 0.5^4 \cdot 0.5^4 = \frac{70}{256}$;

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P_n^*(x_i)$	$\frac{1}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{70}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{1}{256}$

Відповідний многокутник розподілу статистичних ймовірностей можна зобразити традиційним способом у зошиті. При цьому числа 0, 1, 2,…,8 – це можливі кількості осіб з не задекларованим товаром у 8 випробуваннях, а $P_n^*(x_i)$ - відповідні значення відносної частоти (статистичної ймовірності). Виявляється, що найбільше значення $P_n^*(x_i)$ припаде на значення x_i близьке до $np = 4$, а найбільше значення статистичної ймовірності $\tilde{P}_n^*\left(\frac{x_i}{m}\right) = P_n^*(x_i)$ появи значення припаде на значення $\frac{x_i}{m}$, близьке до p.

Розглянемо дану задачу, якщо об’єм вибірки дорівнює 256, за допомогою GRAN1 (див. рис.2.12).

При цьому многокутник розподілу статистичної ймовірності $\tilde{P}_n^*\left(\frac{x_i}{m}\right)$ на множині точок $\left\{\frac{0}{n};\frac{1}{n};\frac{2}{n};...;\frac{m}{n}\right\}$ при досить великому m близький до графіка функції $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 1{,}4}e^{-\frac{(x-4)^2}{2\cdot(1{,}4)^2}}$ (рис.2.13).

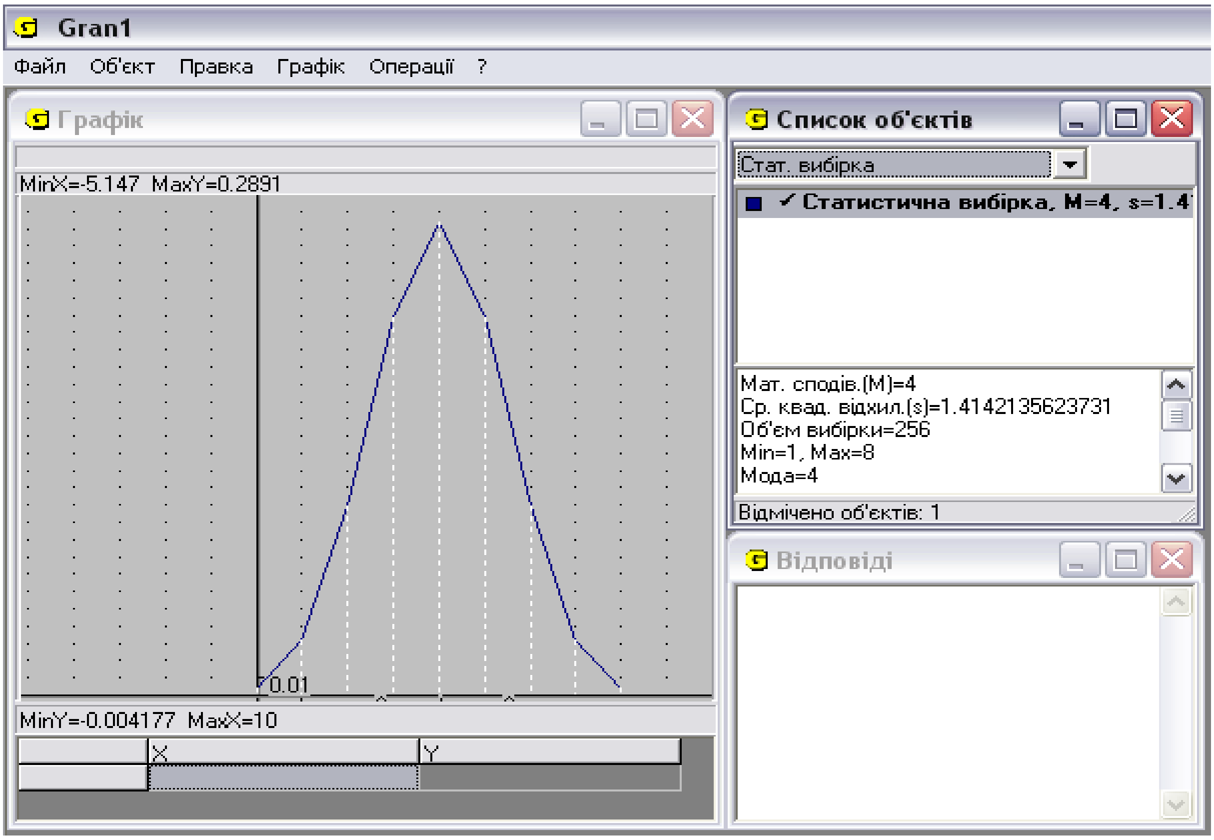


Рис.2.12 Полігон частот.

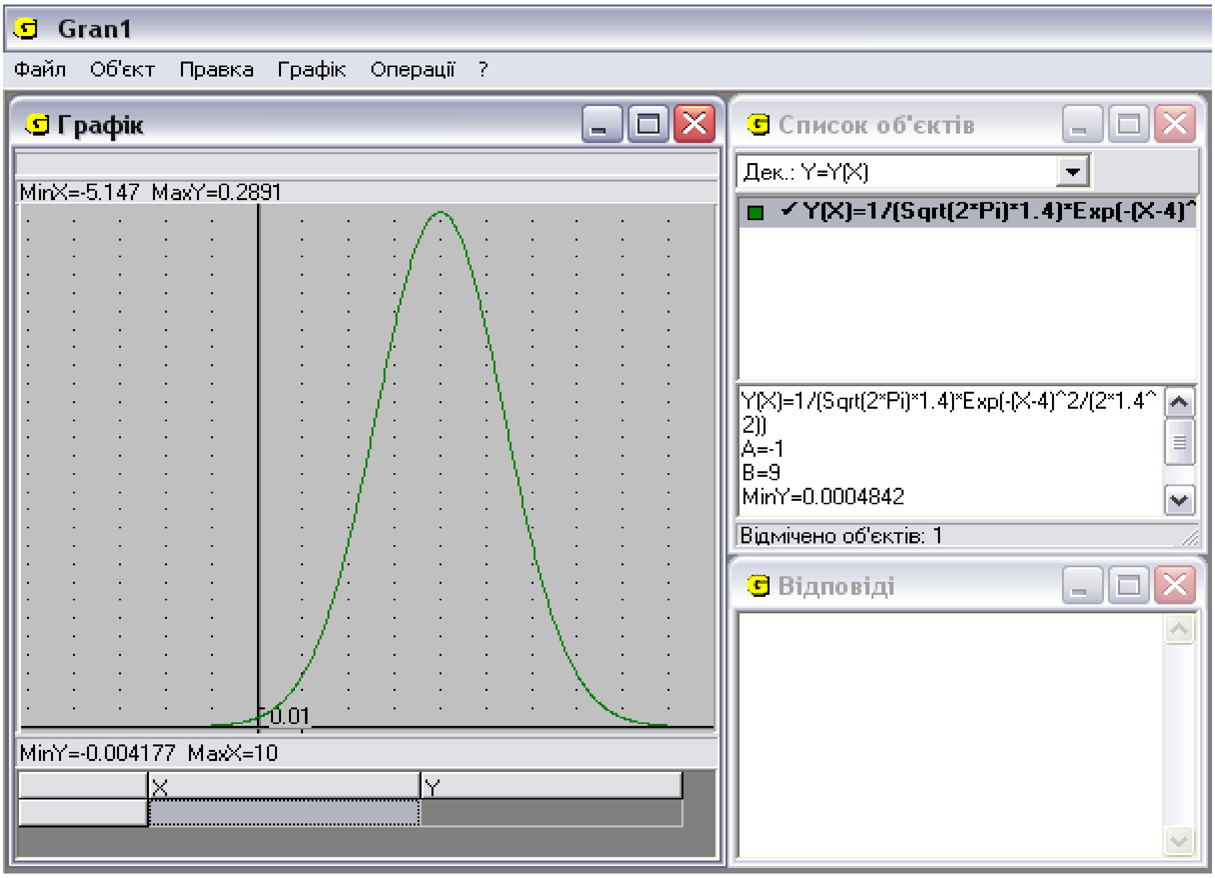


Рис.2.13 Графік функції нормального розподілу.

При вивченні теми „Випадкові величини” на всіх рівнях розкриття необхідно постійно мати на увазі дуже розповсюджену оману, яка полягає в тому, що результат будь-якого вимірювання і спостереження є випадковою величиною або, більше того, нормальною випадковою величиною. Подібні омани зустрічаються зокрема тоді, коли нема чітких означень чи тлумачень навіть у науковій літературі.

Відмічена омана не повинна потрапити в середовище учнів, тому необхідно невпинно звертати увагу на використання теорії ймовірностей лише при статистичній стійкості.

Ми не згодні з думкою авторів [120] про вивчення в загальноосвітній школі теми „Перевірка статистичних гіпотез”, оскільки коло питань цієї теорії виходить за межі тих, з якими більшість школярів зустрінуться у практичній діяльності.

2.3 Система задач з теорії ймовірностей та вступу до статистики та методика навчання їх розв’язування

У результаті аналізу психологічної, педагогічної й методичної літератури нами виділені такі основні типи загального означення задачі:

- задача як об'єкт дій суб'єкта; вимога, поставлена перед суб'єктом;
- задача як ситуація, що включає мету й умови її досягнення;
- задача як словесне формулювання такої ситуації.

Перші два типи характеризуються також підходом до задачі, як до системи.

До поняття математичної задачі, як і до загального поняття задачі, існують різні підходи. У результаті аналізу методичної літератури нами виділені наступні основні типи визначення математичної задачі:

- задача, всі об'єкти якої є математичними (числа, фігури, функції й т.д.);
- задача, об'єкти якої можуть бути описані в математичних термінах (тобто можлива побудова математичної моделі), а розв’язок може бути знайдений за допомогою математичних засобів.

Ми будемо дотримуватися загального означення математичної задачі, як усякої задачі, що допускає переклад її умови на математичну мову (створення математичної моделі) і одержання відповіді на питання задачі (розв’язання) за допомогою математичних засобів. У шкільній практиці до задач у широкому розумінні відносять не лише текстові, а й різного характеру вправи, приклади [182].

У результаті аналізу психологічної, педагогічної й методичної літератури нами виділені три основних підходи до класифікації задач:

- пов'язаний зі структурою задачі;
- пов'язаний з розумовою діяльністю суб'єкта, що розв’язує задачу;

- пов'язаний з функціями, які виконують задачі.

У рамках першого підходу задачі розглядаються у зв'язку з деякою сукупністю характеристик. Характеристиками в подібних класифікаціях виступають визначеність умови, число об'єктів, що фігурують у задачі, і зв'язків між ними.

У рамках другого підходу задачі розглядаються у зв'язку з тим, яка діяльність учнів стимулюється, засвоюється або контролюється в процесі розв’язування цих задач, також у рамках другого підходу задачі розглядаються у зв'язку з тим, як вони сприймаються конкретним суб'єктом, на якому рівні він володіє обсягом знань, умінь, потрібних для розв’язання даної задачі. У рамках третього підходу задачі розглядаються щодо виконуваних ними функцій, основними з яких є дидактичні функції: навчальна, розвиваюча, виховна, контролююча і коректуюча.

Залежно від цих факторів одна і та сама за об'єктивною характеристикою задача може бути віднесеною до різних видів, виділених при даному підході до класифікації задач для різних суб'єктів або для одного суб'єкта, але на різних щаблях навчання або в інших умовах.

При вивченні елементів стохастики, як і при вивченні будь-якої змістової лінії алгебри і початків аналізу, найбільші труднощі викликає використання теорії для розв’язування практичних і прикладних задач.

При розробці методики формування імовірнісно-статистичного мислення учнів у процесі розв’язування задач з елементів стохастики необхідно вказати, що однією з основних проблем при цьому є добір до кожної теми відповідних видів задач, які найбільш доречні з точки зору формування стохастичного мислення, формування відповідних умінь і, разом з тим, доступних учням.

Оскільки шкільний підручник одночасно є збірником задач і методичним посібником, то в ньому неможливо, при всьому бажанні, розкрити у подробицях методику навчання того чи іншого питання.

Як було показано у підрозділі 1.2, існує дуже мало навчальних посібників з початків теорії ймовірностей і елементів статистики, які б у повній мірі знайомили учнів з методами і способами розв'язування задач й допомагали їм набути необхідні навички.

При проведенні формуючого експерименту робота в класах помітно стримувалась у зв'язку з відсутністю навчального посібника. Тому досить багато часу йшло на лекційне подання матеріалу, виникали проблеми з добором завдань для індивідуальної роботи учнів. Відсутність учня на уроці не могла бути скомпенсована домашньою роботою з підручником. Організація колективної роботи в класі також ускладнювалась відсутністю готових друкованих тестів.

Тобто постало питання про створення навчально-методичного посібника, який повинен доповнити підручник „Алгебра і початки аналізу", не претендуючи на те, щоб його замінити .

Мета навчально-методичного посібника – забезпечити ґрунтовне засвоєння теоретичного матеріалу курсу, ознайомити учнів з елементами математичного моделювання реальних стохастичних станів або процесів під час розв'язування задач, сприяти формуванню вмінь і навичок у застосуванні відомих імовірнісно-статистичних методів у різних галузях природознавства, економіки, техніки. Він повинен давати приклади отримання одного й того ж результату різними шляхами й спонукати читача до подібних самостійних дій, до самостійного розв'язування прикладних задач, розвитку стохастичного мислення, розвитку гнучкості і критичності мислення.

Такий посібник нами був створений для ліцеїв і класів з поглибленим вивченням математики [209]. Він має 8 розділів.

1. Випадковий експеримент, простір елементарних подій, події.
2. Простір подій. Відносна частота події. Поняття ймовірності події та її властивості.
3. Геометричне задання ймовірності.

4. Теореми додавання і множення ймовірностей.
5. Формула повної ймовірності. Формула Байєса.
6. Схема незалежних випробувань. Закон великих чисел.
7. Випадкові величини.
8. Розподіли статистичних ймовірностей.

Теоретичний матеріал, необхідний для розв'язування задач, поданий у діючих підручниках [5, 6, 88]. Додатковий теоретичний матеріал вміщений у посібнику. Всі параграфи посібника містять кілька типів базисних задач і алгоритми їх розв'язування. У посібнику подані вправи, де використовуються такі поняття і теореми теорії ймовірностей, а саме: статистична ймовірність, основні властивості статистичної ймовірності, ймовірність суми подій, умовна ймовірність, імовірність добутку подій, формулу повної статистичної ймовірності, формулу Байєса, схему Бернуллі, прості випадкові величини, числові характеристики розподілів ймовірностей на множині значень випадкової величини, закон великих чисел, основні види розподілів.

Систематизація задач і надання вказівок щодо математичного апарату, який необхідно використовувати при розв'язуванні, виконані з метою полегшення роботи учнів під час опрацювання теми.

Даний посібник містить систему задач з елементів стохастики.

До системи задач, призначених для вивчення елементів стохастики, поряд з традиційними типами задач, увійшли задачі, які відсутні у діючих шкільних підручниках, але мають важливе значення в процесі вивчення даної змістової лінії. Тематика традиційних типів задач дещо розширена, фабула переважної більшості змінена.

Система побудована за принципом взаємозамінності і мінімальності, але не виключається можливість її розширення.

Задачі системи відрізняються не тільки за фабулою (практичним змістом задачі) та математичним апаратом, що використовується при їх розв'язанні, а й за складністю. Вони поділені за трьома рівнями складності.

Деякі з них можна використовувати для мотивації нового навчального матеріалу, інші – для з'ясування рівня засвоєння учнями основних понять змістової лінії. Більшість задач, крім відповідей, має короткі вказівки щодо розв'язання. Надані також розв'язання задач підвищеної складності. Включені прикладні задачі, які будуть сприяти активізації пізнавальної діяльності учнів та підвищенню їхнього інтересу до предмету, до своєї майбутньої спеціальності.

Система задач, запропонована у посібнику, задовольняє основні дидактичні принципи та специфічні вимоги.

На підставі аналізу відповідної психолого-педагогічної й методичної літератури, з урахуванням особливостей навчання елементів стохастики в умовах профільної й рівневої диференціації, а також особистого досвіду роботи в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики, нами були виділені принципи**,** згідно з якими здійснювався добір задач до посібника. Вони дозволяють задовольнити запити різних профільних класів і забезпечити успішне засвоєння навчального матеріалу в необхідні терміни.

Зміст кожного із принципів полягає в наступному.

1. Принцип доступності. Кожна нова задача повинна відповідати програмним вимогам. Однак це не означає, що задачі повинні бути абсолютно простими: у процесі розв'язання імовірнісних задач повинні вдосконалюватися математичні знання, уміння і навички учнів. Новий матеріал буде опанований учнями краще й швидше, якщо вдасться знайти зв'язки або аналогії з уже відомим матеріалом, який може служити підґрунтям для нового. У цьому випадку учні можуть засвоювати нові відомості з певною часткою самостійності, що приводить до більш міцного й свідомого оволодіння новим матеріалом. Поняття і терміни задач повинні бути відомі або інтуїтивно зрозумілі учням. Задачі повинні мати реальні числові дані, що не ведуть до громіздких обчислень.

2. Принцип індивідуалізації та диференціації навчання. Необхідно прагнути навчити й "слабких" й "сильних" учнів, не створюючи непереборних труднощів першим і не даючи нудьгувати й розслаблюватися іншим. Варто підвищувати рівень математичного й загального розвитку учнів, допомагати розкриттю їхніх здібностей. Також необхідно враховувати, що різним дітям потрібен різний час для засвоєння того самого матеріалу в силу їхніх індивідуальних особливостей.

Добір задач повинен базуватися на двовимірній моделі диференціації навчання, основними вимірами якої є навчальний матеріал і рівень вимог до опанування цим навчальним матеріалом. При доборі навчального матеріалу для профільних класів ми користувалися: критерієм наукової й практичної значимості та критерієм відповідності змісту профілю навчання.

У математичних класах, де більш ефективною є лекційна форма і більшість задач розв’язується учнями самостійно, матеріал задач може бути побудований з погляду доказовості, строгості й складності викладу на високому рівні. Увага буде приділена і прикладним задачам з різних галузей.

У класах природничого, технічного, економічного профілів, військових ліцеях одна із цілей - навчити учнів правильно ставити та розв’язувати задачі, пов'язані з реальною ситуацією, тобто навчити застосовувати процес математичного моделювання. У класах зазначених профілів розподіл навчального часу відбувається на користь збільшення практичних знань, при цьому акцентується увага на розв’язуванні задач прикладного характеру. Методика навчання повинна бути спрямована на формування вмінь моделювати реальні ймовірнісні процеси, розвиток імовірнісного мислення, посилення міжпредметних зв'язків. Для класів технічного та економічного профілів найбільш відповідними навчальними завданнями є ті, у яких поняття імовірності повинне вводитися в нерозривному зв'язку з її використанням у відповідних галузях. Уже підхід до початків теорії ймовірностей і елементів статистики повинен бути пов'язаний з прикладним змістом. Повинна бути велика кількість задач на міжпредметні зв'язки й використання обчислювальної техніки. У сучасних посібниках майже немає задач на геометрично задані ймовірності, що впливають на розвиток конструкторських навичок. Важливі за ступенем професійної значимості задачі на застосування похідної при вивченні числових характеристик неперервних випадкових величин. У нашому посібнику ми приділили їм, на наш погляд, належну увагу.

Успішність й ефективність навчання розв’зання задач залежить від їхньої постановки, від засвоєння учнями курсу шкільної математики, від систематизації задач, з урахуванням вікових і психологічних особливостей школярів. Вимоги до добору задач проілюстровано на схемі 2.1, де відбувається поділ заданого матеріалу за рівнями складності і за профілями.

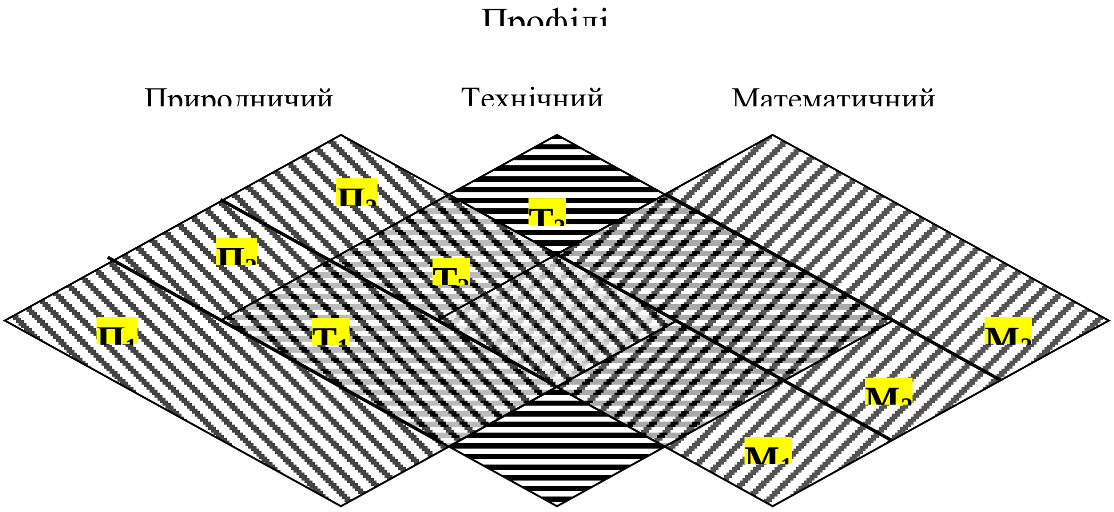


Схема 2.1 Вимоги до добору задач за рівнями складності і за профілями.

3. **Принцип однотипності.** Для формування міцних навичок та умінь, вироблення міцних і стійких асоціацій необхідні однотипні задачі в розумній кількості. Як показує досвід, ефективність навчання елементів стохастики істотно підвищується, якщо в процесі навчання розглядаються базові задачі, тобто такі задачі, спираючись на які можна розв’язувати багато інших задач. При розв’язуванні базових задач використовується алгоритмічний підхід.

Відзначимо, що принцип подання матеріалу, при якому у якості прикладів використаються базові задачі, лежить в основі діючих підручників [5,6].

Однак й у цьому випадку треба проявити помірність, розумність У психології встановлено, що виконання однотипних завдань приводить до ряду негативних явищ: учні починають розв'язувати задачі шаблонно, за аналогією з попередніми, не аналізуючи умови даної задачі, опускаючи при цьому окремі істотні міркування. Треба відзначити, що послідовність міркувань, що повторюються при розв'язуванні задач, може згортатися до асоціації, що надалі, якщо буде потреба, повинна легко розгорнутися в первинний ланцюг міркувань. Згортання міркувань - природний процес, однак не у всіх учнів зворотний процес - розгортання - проходить без втрат яких-небудь істотних елементів міркувань, саме тому до системи задач включені різні за змістом задачі, розв'язування яких зводиться до побудови однієї і тієї ж моделі .

4. **Принцип різноманітності**. Однотипні задачі, незважаючи на важливість, приводять до зниження інтересу, уваги, активності. Для нейтралізації негативних наслідків однотипності, треба одночасно використати й інші вимоги, однією із яких є наявність в достатній кількості задач, різноманітних за формою й змістом, а також і за способом розв'язування, існує можливість розв'язування деяких задач різними способами. Важливе систематичне використання "провокуючих" вправ, які сприяють розвитку уваги й самостійності, підвищенню точності. Досить цінною в методичному відношенні групою задач є ті, які є результатом розвинення якоїсь однієї задачі.

Навчання школярів розв'язуванню імовірнісних задач, як правило, здійснюється при розв'язуванні тих з них, які сформульовані вчителем, узяті з підручника або з навчального посібника, з іншої літератури. Однак істотну роль при цьому відіграє діяльність учнів що до їх складання. Справа в тому, що складання задач часто вимагає від учнів такої розумової роботи, що не мала місця при розв’язуванні "готових" задач. Складання задач можна розглядати як творчу діяльність учнів, вкрай важливу для їхнього розвитку.

Один з аспектів діяльності стосовно складання задач - це складання й розв’язування задач, породжених даною задачею, або, інакше кажучи, складання й розв’язування задач, в яких розвивається тема даної задачі. Такого роду задачі можна одержати з даної (початкової) різними шляхами:

1) шляхом заміни частини даних у даній задачі іншими даними без заміни висновку задачі;

2) шляхом спеціалізації даних або невідомих даної задачі;

3) шляхом узагальнення умов або висновків даної задачі, зокрема шляхом додавання нових висновків при збереженні даних у початковій задачі;

4) шляхом заміни місцями умов і висновків (частина даних приймається за невідомі, а деякі невідомі вважаються даними), тобто шляхом перетворення задачі або складання задачі, оберненої до даної.

Подібного роду заміни часто призводять до застосування різноманітних способів, прийомів і методів розв’язування отриманих задач, здавалося б близьких за змістом з даними задачами (див. приклади 4, 5, 6 даного параграфу). У цьому випадку здійснюється не відпрацьовування якого-небудь одного способу розв’язування задач, а засвоєння широкого спектра таких способів. Заміну значень даних в умові бажано здійснювати не безладно, а дотримуючись певного логічного плану.

Складання й розв’язування задач, породжених даною, - це творча діяльність учнів. Місце цієї діяльності не обмежується часом, рівнем підготовки, але особливу увагу їй потрібно приділити на стадії завершального, узагальнюючого навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики. Напевно не варто вводити системи спеціальних уроків або позакласних занять для цих цілей. Краще систематично, час від часу, звертатися до складання задач, споріднених даній, при вивченні різних тем у класах різних рівнів і профілів.

Ми зупиняємося ще на такому виді задач, як задачі на доведення. Такого роду вправи в курсі початків теорії ймовірностей і елементів статистики вважаються одними із найскладніших, та й теоретична база для розв’язування таких задач іноді дійсно виявляється недостатньою. Тим часом, задачі на доведення у новій змістовій лінії мають ряд переваг.

1) вони розвивають логічне мислення учнів;

2) є дієвим засобом для неформального й глибокого засвоєння понять і методів елементів стохастики;

3) допомагають глибше розкрити зв'язки нових понять із раніше відомими, а також розкрити зв'язки між їхніми властивостями й відносинами;

4) дозволяють глибоко зрозуміти й засвоїти імовірнісну модель, що розглядається;

5) сприяють удосконаленню навичок розв’язування задач;

6) вони допомагають навчатися імовірнісного мислення.

Оскільки задачі на доведення в елементах стохастики, як уже згадувалося, досить складні, то необхідно добрати такого роду задачі для роботи в класах з поглибленим вивченням математики. Це і зроблено нами у посібнику [209].

5. Принцип повторення та послідовного зростання труднощів. Включення задач на вивчені раніше теми дозволяє не тільки актуалізувати знання, набуті у минулому, не тільки підкреслити особливості досліджуваного матеріалу, але й показати його зв'язок з раніше вивченими темами, допомагає підтримувати увагу учнів на високому рівні, сприяє нейтралізації негативних наслідків принципу однотипності. Ще один клас задач, які допомагають зробити роботу різноманітнішою й зацікавити учнів різних рівнів - це задачі на описову статистику. Ці вправи корисні й для учнів із не досить високим рівнем математичної підготовки і для школярів, що цікавляться математикою, тому що ці задачі змушують уявити ту модель, якою описується той чи інший процес.

Учитель сам повинен визначити міру підказки учневі й частку допомоги при визначенні моделі. Варто поступово ускладнювати навчальні задачі з метою забезпечення усвідомленості при розв’язуванні, збереження інтересу й уваги, дотримання принципу доступності. Разом з тим розв'язувані задачі повинні вести учня до більш високого рівня оволодіння матеріалом, сприяти розвитку його розумових і математичних здібностей. Своє місце повинні посідати при цьому нестандартні, дослідницькі й цікаві задачі.

6. Принцип прикладної спрямованості та міжпредметних зв’язків. Задачі, пов'язані з практикою, допомагають формувати в школярів уміння застосовувати отримані знання в житті. Вони підвищують інтерес до досліджуваного предмета й усвідомлене його вивчення, розвивають математичне мислення й практичну кмітливість. Крім того розгляд таких задач дає можливість ознайомити учнів з поняттям математичної моделі й роллю математичного моделювання в різних науках й на практиці.

При розв’язанні задач прикладного характеру учні одержують уявлення про необхідність і універсальність математики та її методів. Задачею прикладного характеру називають ту, що виникла позаматематичною ситуацією і розв’язування якої відбувається в три етапи: формалізація (побудова математичної моделі), розв’язування внутрішньомодельної математичної задачі й інтерпретація одержаного результату [189].

Цінність імовірнісних задач визначається не стільки тим апаратом, який використовується при їх розв’язуванні, скільки можливістю продемонструвати процес використання математики для розв’язування життєвих задач [189]. Ці задачі повинні знайомити учнів з реальним використанням стохастики, її ідей і методів.

Реальні задачі прикладного змісту в шкільному курсі математики зустрічаються не часто, оскільки етап формалізації потребує великих знань і математичної культури. Реальні прикладні задачі досить складні і розраховані саме на учнів шкіл (класів) з поглибленим вивченням математики. У методиці для спрощення реальної ситуації зменшують кількість змінних, вводять додаткові припущення і так далі. У розробленому нами посібнику здійснено добір задач прикладного характеру для кожної теми шкільного курсу стохастики.

Розширення кола прикладних задач при вивченні стохастики позитивно впливає на ставлення учнів до математики тому, що розв'язування цих задач:

- підвищує мотивацію навчання;
- виховує потребу в розширенні математичних знань;
- підводить до „математичного відкриття";
- сприяє раціональному вибору адекватного математичного апарату для розв'язування позаматематичних задач.

Якщо проблема взята з реального життя, а не з задачника, підручника, навчального посібника, то найважчим і найскладнішим є сформулювати відповідну задачу математичною мовою. При доборі прикладних задач необхідно вимагати, щоб поняття і терміни, які використовуються у формулюванні задачі, не потребували спеціальних громіздких пояснень. Досвід проведення експерименту підтвердив, що в прикладних задачах з елементів стохастики найбільшу складність при розв'язуванні викликає процедура формалізації, створення математичної моделі. Основною причиною є відсутність універсальних алгоритмів формалізації реальних проблем. Тільки завдяки практичній діяльності можна здобути навички розв'язування таких задач.

Починати розв'язування будь-якої задачі необхідно із з'ясування, чи всі необхідні дані наявні, які саме з даних необхідні, а які непотрібні для розв'язання. Необхідно проаналізувати властивості описаного реального об'єкту, зіставити їх з означеннями і властивостями абстрактних математичних об'єктів. Спробувати створити математичну модель, що базується на словесному описі, яка відображає найбільш важливі сторони.

У багатьох задачах знаходження ймовірності не є кінцевою метою розв'язування. Більш важливо навчитися створювати імовірнісну модель задачі, яка сформульована технічною, і навіть побутовою мовою.

Прикладні задачі демонструють практичне застосування імовірнісно-статистичних ідей і методів, та ілюструють матеріал суміжних предметів, різних галузей життя, відповідають різним профілям навчання.

Ілюстрація міжпредметних зв'язків при розв'язанні задач на уроках математики сприяє більш міцному засвоєнню шкільного курсу математики, розкриває його практичну й наукову значимість, розширює кругозір школярів, підвищує їхню активність і зацікавленість у навчанні, певною мірою допомагає у виборі майбутньої професії, сприяють міжпредметному узагальненню набутих знань і вмінь.

7. **Принцип експериментально-дослідницький.** Він пов'язаний з проведенням експериментів і статистичних досліджень, з встановленням статистичних закономірностей, перш за все, шляхом стохастичного експерименту.

Аналіз співвідношень між імовірнісною моделлю та її емпіричним прототипом повинен стати обов'язковим атрибутом розв'язування багатьох задач з стохастики в школі. Крім співвідношення типу „частота ↔ ймовірність", необхідно широко висвітляти такі типи: „середнє арифметичне ↔ математичне сподівання", „лінія накопичення частот ↔ графік функції розподілу", „гістограма ↔ графік щільності розподілу", „коефіцієнт кореляції ↔ теоретичний коефіцієнт кореляції". Вказані співвідношення розглядають при розв'язуванні багатьох типів задач. При реалізації даного принципу буде доцільним використання комп'ютера.

Наведемо приклад реалізації цих принципів при розв'язуванні задач з теми „Ймовірностей суми і добутку подій". Зауважимо, що позначки ^{0}, *, ** відповідають середньому, достатньому і високому рівням.

Аналіз і розв'язування задач доцільно проводити за правилом-орієнтиром:

1. Усвідомити, в чому полягає розглянуте в задачі випробування.
2. Позначити буквами події, розглянуті в умові задачі.
3. За допомогою введених позначень виразити подію, ймовірність появи якої необхідно знайти.
4. Якщо необхідно знайти ймовірність суми подій, з'ясувати сумісні чи несумісні розглянуті події. Якщо необхідно знайти ймовірність добутку події, з'ясувати залежні чи незалежні розглянуті події.
5. Вибрати відповідну умові задачі формулу і виконати необхідні обчислення.

<u>Ймовірність суми подій</u>

Чи відомо, що події несумісні?

- <u>так:</u>
  - для двох подій: $P(A+B)=P(A)+P(B)$
  - для трьох подій: $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)$
  - для n подій: $P(A_1+A_2+..+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)$

  За основною властивістю $2_р$
- <u>ні:</u>
  - для двох подій: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
  - для трьох подій:

    $$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$
  - для n подій:

    $$P(A_1+A_2+..+A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i\prec j\le n}P(A_iA_j)+\sum_{1\le i\prec j\prec k\le n}P(A_iA_jA_k)-...+(-1)^{n-1}P(A_1A_2...A_n)$$

<u>Ймовірність добутку подій</u>

Чи відомо, що події незалежні?

- <u>так:</u>
  - для двох подій: $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$

- для трьох подій: $P(A_1A_2A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)$
- для n подій: $P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot ...\cdot P(A_n)$

- ні:
  - для двох подій: $P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B)$
  - для трьох подій: $P(A_1A_2A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)$
  - для n подій: $P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\cdot ...\cdot P(A_n/A_1A_2...A_{n-1})$

Приклад 1^0. У цеху працюють 7 чоловіків і 3 жінки. За табельними номерами навмання вибирають трьох осіб. Знайти ймовірність того, що відібрані будуть всі чоловіки.:

Розв'язування.

1 спосіб.

Подія A – відібрані будуть всі чоловіки, а події A_i – i-м відібраний чоловік ($i=1,2,3$). Тоді $A=$ A_1, A_2, A_3 і за формулою множення ймовірностей маємо:

$$P(A)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)=\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}=\frac{7}{24}.$$

2 спосіб.

Нехай подія A з першого способу. З 10 робітників, що працюють у цеху, групу з 3 робітників можна скласти C_{10}^3 способами. Таким чином, загальна кількість результатів експерименту буде дорівнювати $C_N^n=C_{10}^3$.

Події A сприяють стільки результатів експерименту, скількома способами 7 чоловіків можуть утворити трійки без участі в них жінок. Тому будь-яка сприятлива трійка може бути утворена C_7^3 способами.

Таким чином, вважаючи усі результати експерименту рівно можливими, дістанемо: $P(A)=\dfrac{C_7^3}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{24}\approx 0{,}29.$

Узагальнюючи цю задачу, можна замінити число 7 на M, число 3 – на n, а іншу трійку – на m. Тоді можна скористатися таблицею 2.4. А розв'язок узагальненої задачі має вигляд:

Таблиця 2.4

Всього		Вибрали
M+m=N=10	Робітників	N=3
M=7	Жінок	M=3
m=N-M=3	Чоловіків	n-m=0

$P(A)=\dfrac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$, а саме $P(A)=\dfrac{C_7^3 \cdot C_3^0}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{24}\approx 0{,}29$.

Приклад 2. Два автобуси, для яких ймовірності вчасного приходу на фіксовану зупинки дорівнюють відповідно 0,7 і 0,8, виїхали на маршрут. Знайти ймовірність таких подій:

a^0) A – обидва автобуси приїдуть вчасно на цю зупинку;

b^0) B – обидва автобуси запізняться;

c*) C – тільки один автобус приїде вчасно;

d*) D – принаймні один автобус прийде вчасно.

Розв'язування.

Нехай подія A_i – i-й автобус приїхав на зупинку вчасно, тоді подія $\overline{A_i}$ - i-й автобус запізнився. За умовою: $P(A_1)=0{,}7$, $P(A_2)=0{,}8$, а ймовірності протилежних подій: $P(\overline{A_1})=1-0{,}7=0{,}3$; $P(\overline{A_2})=1-0{,}8=0{,}2$.

a) Подія A – обидва автобуси приїдуть вчасно, тобто $A=A_1A_2$. Враховуючи незалежність цих подій A_1 і A_2 одержимо:

$$P(A)=P(A_1A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)=0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}56.$$

b) Подія B – обидва автобуси запізняться, тобто $B = \overline{A}_1\overline{A}_2$. Оскільки події $\overline{A}_1$ і $\overline{A}_2$ незалежні, то:

$$P(B) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2) = P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2) = 0{,}3\cdot 0{,}2 = 0{,}06.$$

c) Подія C є сумою двох подій: $A_1\overline{A}_2$ - перший приїхав вчасно і другий запізняться, та $\overline{A}_1 A$ - перший запізнився і другий приїхав вчасно, тобто $C = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2$. Тоді, враховуючи несумісність подій $A_1\overline{A}_2$ і $\overline{A}_1 A$ та незалежність подій співмножників, дістанемо:

$$P(C) = P(A_1\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1 A_2) = P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2) = 0{,}7\cdot 0{,}2 + 0{,}3\cdot 0{,}8 = 0{,}38.$$

d) Подія D – принаймні один автобус приїде вчасно. Вона є сумою подій A і C, тобто $D = A + C$. Тому, враховуючи несумісність подій А і С маємо:

$$P(D) = P(A) + P(C) = 0{,}56 + 0{,}38 = 0{,}94.$$

Ймовірність події D можна знайти використовуючи теорему про появу принаймні однієї з двох незалежних подій. Подія D відбудеться тоді, коли відбудеться або подія A_1, або подія A_2, тобто $P(D) = P(A_1 + A_2) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2) = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$.

Приклад 3. Троє друзів складають тематичний залік з математики. Імовірність того, що перший учень складе тематичний залік, дорівнює 0,9; другий – 0,9; третій – 0,8. Знайти ймовірність того, що тематичний залік: a^0) складе тільки другий учень; b^0) складе тільки один учень; c^0) складуть всі три учня; d^*) складуть принаймні два; e^0) не складе жоден учень; f^*) складе принаймні один учень.

Розв’язування.

Позначимо подію A_i – i-й учень складе тематичний залік ($i=1, 2, 3$). Тоді, подія $\overline{A}_i$ - i-й учень не складе тематичний залік. За умовою: $P(A_1) = 0{,}9$, $P(A_2) = 0{,}9$, $P(A_3) = 0{,}8$; а ймовірності протилежних подій відповідно дорівнюють: $P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$; $P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$; $P(\overline{A}_3) = 1 - P(A_3) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

a) Подія A – тільки другий учень складе тематичний залік. Зрозуміло, що $A = \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3$ - сумісне виконання трьох подій, які полягають у тому, що тільки другий учень складе залік, а два інших не складуть. Враховуючи, що події $\overline{A}_1, A_2, \overline{A}_3$ незалежні, отримаємо:

$$P(A) = P(\overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3) = P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A}_3) = 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}2 = 0{,}018.$$

b) Подія B – тільки один учень з трьох складе залік. Тобто, подія B відбудеться, якщо тільки перший учень складе залік, або тільки другий учень складе залік, або тільки третій учень складе залік. Отже, враховуючи, що три останні події попарно-несумісні, дістанемо:

$$P(B) = P(A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3) = 0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}8 = 0{,}044.$$

c) Нехай подія C – всі три учня складуть залік. Тоді:

$$P(C) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}648.$$

d) Нехай подія D – принаймні два учні складуть тематичний залік („не менше двох” учнів). Зрозуміло, що подія D означає, що залік складуть або два учні, або всі три. Тоді:

$$P(D) = P(A_1 A_2 \overline{A}_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3) =$$
$$= 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}2 + 0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}8 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 + 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}954$$

e) Нехай подія E – жоден з учнів не складе заліку. Тоді:

$$P(E) = P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}002.$$

f) Нехай подія F – принаймні один учень складе тематичний залік (іншими словами – „не менше ніж один” учень складе залік). Подія F являє собою суму подій B (яка включає три доданків) і D (чотири доданка), таким чином $F = A_1 + A_2 + A_3 = B + D$ (сім доданків). Однак простіше знайти ймовірність події F, якщо перейти до протилежної події $\overline{F} = E$ - жоден з учнів не складе заліку, яка включає лише один варіант. Тоді:

$$P(F) = P(A_1 + A_2 + A_3) = 1 - P(\overline{F}) = 1 - P(E) = 1 - 0{,}002 = 0{,}998$$

Приклад 4*. Імовірність того, що за результатами чотирьох незалежних випробувань подія A відбудеться принаймні один раз дорівнює 0,4. Знайти ймовірність того, що подія A відбудеться у першому випробуванні. Імовірність відбування події А у кожному випробуванні однакова.

Розв'язування.

A_i - подія A відбулася в i-му випробуванні, відповідно $P(A_i) = p$;

$\overline{A_i}$ - подія A не відбулася в i-му випробуванні, відповідно $P(\overline{A_i}) = 1 - p$;

B - подія A відбулася принаймні один раз, у 4-х випробуваннях $P(B) = 0{,}4$;

$\overline{B}$ - подія A не відбулася, у 4-х випробуваннях жодного разу $\overline{B} = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}$.

Тоді:

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})P(\overline{A_4}) =$$
$$= 1 - (1-p)(1-p)(1-p)(1-p) = 1 - (1-p)^4;$$
$$1 - (1-p)^4 = 0{,}4;$$
$$(1-p)^4 = 0{,}6;$$
$$1 - p = \sqrt[4]{0{,}6};$$
$$p = 1 - \sqrt[4]{0{,}6} \approx 1 - 0{,}88 \approx 0{,}12.$$

Приклад 5**. Пакети акцій, які маються на ринку цінних паперів, можуть дати прибуток власнику з імовірністю 0,5 для кожного пакета, не залежно від інших пакетів. Скільки пакетів акцій різних фірм необхідно придбати, щоб з імовірністю, не меншою 0,999, можна було чекати прибуток принаймні по одному пакету акцій?

Розв'язування. Нехай подія A_i - прибуток по i-му пакету акцій ($i=1, 2, \ldots, n$), а подія $\overline{A_i}$ - відсутність прибутку по i-му пакету акцій. Відповідні ймовірності дорівнюють: $P(A_i) = 0{,}5$; $P(\overline{A_i}) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

Подія A – прибуток принаймні по одному з n пакетів акцій: $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$. Тоді $P(A) = P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n)$. Використаємо теорему про ймовірність настання принаймні однієї з n незалежних подій:

$$P(A)=P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_n)=1-P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot\ldots\cdot P(\overline{A}_n)=$$
$$=1-\underbrace{0{,}5\cdot 0{,}5\cdot\ldots\cdot 0{,}5}_{n}=1-0{,}5^n$$

За умовою задачі $P(A)\ge 0{,}999$, отже $1-0{,}5^n\ge 0{,}999$, $0{,}5^n\le 0{,}001$. Логарифмуємо обидві частини нерівності, за основою 10, враховуючи $10>1$: $\lg 0{,}5^n\le \lg 0{,}001$, $n\lg 0{,}5\le -3$, оскільки $\lg 0{,}5\le 0$, то $n\ge\dfrac{-3}{\lg 0{,}5}$, $n\ge 9{,}96$ тобто $n\ge 10$. Отже, необхідно придбати не менше 10 пакетів акцій різних фірм.

Приклад 6**. Дано значення: $P(\overline{\overline{A}\overline{B}})=0{,}7$; $P(A\overline{B})=0{,}4$; $P(\overline{A}B)=0{,}2$. Довести, що події A і B залежні. Обчислити $P(A/B)$ та $P(B/A)$.

Розв'язування.

Події залежні, якщо $P(AB)\ne P(A)\cdot P(B)$.

Оскільки події $AB, A\overline{B}, \overline{A}B, \overline{A}\overline{B}$ утворюють повну групу подій, то $P(AB)+P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)+P(\overline{A}\overline{B})=1$

Звідси, враховуючи що $P(A\overline{B})=0{,}4$; $P(\overline{A}B)=0{,}2$ і $P(\overline{A}\overline{B})=1-P(\overline{\overline{A}\overline{B}})=1-0{,}7=0{,}3$ отримаємо $P(AB)=0{,}1$.

Оскільки $A=AB\cup A\overline{B}$, до того ж AB і $A\overline{B}$ несумісні події, то $P(A)=0{,}1+0{,}4=0{,}5$.

Оскільки $B=AB\cup\overline{A}B$, до того ж AB і $\overline{A}B$ несумісні події,то $P(B)=0{,}1+0{,}2=0{,}3$.

Отже $0{,}1=P(AB)\ne P(A)\cdot P(B)=0{,}5\cdot 0{,}3$, тобто події A і B залежні.

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0{,}1}{0{,}3}=\frac{1}{3};$$

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0{,}1}{0{,}5}=\frac{1}{5}.$$

Для кожної теми нами розроблена система індивідуальних задач, яка відповідає визначеним принципам. Дана система може бути використана як при виконанні домашніх завдань, так і для самостійних робіт (див. додаток Е).

Задачі для самостійного розв’язування можна використовувати для індивідуальної роботи з обдарованими дітьми або учнями, які цікавляться математикою (див. додаток Ж).

При розв’язуванні задач розділу „Вступ до статистики” розглядають два різні підходи до процесу розв’язування стохастичних задач. Перший відповідає традиційному (ручному) розв’язуванню („класичний” спосіб), він широко представлений в літературі. Другий – передбачає використання ППЗ GRAN1 або Microsoft Excel. Безумовно, отримані результати будуть ідентичні, але, беззаперечно, при використанні комп’ютера буде заощаджено час, якого, до речі, не так вже і багато (12 годин). Підвищиться рівень зацікавленості та активності учнів.

Розглянемо таку задачу. Протягом кожного з 7-ми місяців кількість реалізованих туристичною фірмою путівок за періоди до і після початку активної рекламної кампанії можна подати у вигляді такої таблиці:

Таблиця 2.5

Кількість реалізованих путівок

Після реклами	До реклами
162	135
156	126
144	115
137	140
125	121
145	112
151	130

Необхідно знайти середні значення і стандартні відхилення цих даних.

Розв’язання подібної задачі класичним способом і за допомогою ППЗ GRAN1 докладно розглянуте Т. Задорожньою та Ю. Красюк [92]. Наведемо розв’язання цієї задачі за допомогою Microsoft Excel, оскільки цей табличний редактор є стандартним компонентом офісних програм, які встановлюються майже на всі сучасні комп'ютери у школі, вдома або на підприємстві. Це розширює можливість практичного застосування набутих знань як в період навчання, так і в майбутніх життєвих ситуаціях. Відповідний алгоритм має вигляд (див. додаток З):

1. Для проведення статистичного аналізу перш за все необхідно ввести дані в робочу таблицю. Відкрийте нову робочу таблицю. Введіть в чарунок А1 слово Реклама, потім в чарунки А2:А8 — відповідні значення числа реалізованих путівок. В чарунок В1 введіть слова Без реклами, а у В2:В8 - значення числа реалізованих путівок до початку рекламної кампанії. Відзначимо, що дані групи даних із статистичної точки зору є вибірками.
2. При статистичному аналізі перш за все необхідно визначити характеристики вибірки, і найважливішою характеристикою є середнє значення. Для визначення середнього значення в контрольній групі необхідно встановити табличний курсор у вільний чарунок (А9). На панелі інструментів натиснути кнопку Вставка функції (f(x)). В діалоговому вікні Майстра функцій вибрати категорію Статистичні і функцію СРЗНАЧ, після чого натиснути кнопку ОК. В діалоговому вікні функції СРЗНАЧ ввести діапазон даних контрольної групи для визначення середнього значення (А2:А8). Натиснути кнопку ОК. В чарунку А9 з'явиться середнє значення вибірки — 145,714.
3. Для закріплення цих вмінь визначити в чарунку В9 середнє значення числа реалізованих путівок без активної реклами. В чарунку В9 з'явиться середнє значення вибірки - 125,571.
4. Наступною за важливістю характеристикою вибірки є міра розсіювання елементів вибірки від середнього значення. Такою мірою є середнє квадратичне або стандартне відхилення. Для визначення стандартного відхилення в контрольній групі необхідно встановити табличний курсор у вільний чарунок (А10). На панелі інструментів натиснути кнопку Вставка функції (f(x)). В діалоговому вікні Майстра функцій вибрати категорію Статистичні і функцію СТАНДОТКЛОН, після чого натиснути кнопку

ОК. В діалоговому вікні СТАНДОТКЛОН ввести діапазон даних контрольної групи для визначення стандартного відхилення (А2:А8). Натиснути кнопку ОК. В чарунку А10 з'явиться стандартне відхилення вибірки — 12,298. Існує правило, згідно якому за відсутності артефактів дані повинні лежати в діапазоні М + 3σ (в прикладі 145,7+36,9).

5. Для закріплення цих вмінь визначити в чарунку В10 стандартне відхилення числа проданих путівок до початку рекламної кампанії. Для цього встановити табличний курсор в чарунок В10. В чарунку В10 з'явиться стандартне відхилення вибірки — 10,277.

Як показує досвід, використання комп'ютера при опануванні змістової лінії елементів статистики створювало сприятливий психологічний клімат серед учнів. Успіх, який вони відчули в результаті надання навчально-пізнавальній діяльності творчого, дослідницького характеру, дав значний імпульс підвищенню пізнавальної активності.

При роботі з навчально-методичним посібником ми пропонуємо наступну **методичну** схему добору задач:

- чітке визначення рівня знань, умінь та навичок (що відповідає вимогам до математичної підготовки учнів різного профілю навчання й відображеним у програмах з математики для відповідних профілів навчання), якого повинні досягти учні після вивчення теми, у тому числі визначення базових задач, які повинні розв'язувати учні в результаті вивчення, зазначеної теми;

- фіксування рівня знань, умінь та навичок учнів на початку вивчення теми;
- виявлення наявних у школярів прогалин у знаннях, навичках і уміннях, необхідних для успішного засвоєння теми, і поступове усунення цих прогалин;
- уточнення шляхів і способів усунення таких прогалин, виходячи із профілю навчання, індивідуальних особливостей учнів, наявних у розпорядженні вчителя дидактичних, технічних й інших засобів, а також кількості уроків, що відводиться на дану тему;

- добір задач відповідно до принципів, виділених вище, для досягнення цілей, поставлених при вивченні теми, тобто задач, у процесі розв'язання яких учні опановують певними базисними діями, що ведуть до досягнення вміння вирішувати задачі заданого рівня (базисних задач);
- постійний контроль якості засвоєння матеріалу за результатами розв'язання виділених проміжних базисних задач;
- фіксація досягнення наміченого рівня знань, умінь, навичок у тому числі по успішному розв'язанню учнями базових задач.

2.4 Організація самостійної роботи та її контролю. Тематичний контроль успішності учнів

Розбудова системи освіти в Україні потребує суттєвого оновлення змісту і технології навчання математики і зокрема елементів стохастики. І в першу чергу ця система має бути спрямована на особистість учня, на створення умов для досягнення кожним учнем якомога більшого для нього рівня знань, навичок і умінь, тобто особистісно-орієнтованого навчання.

Ситуація, що склалася, вимагає від вчителів розробки системи заходів для забезпечення учням відповідного рівня математичної підготовки, зокрема з початків теорії ймовірностей і вступу до статистики.

З цією метою в ліцеї КПІ м. Славутича, військовому ліцеї м. Чернігова, багатопрофільному ліцеї № 15 м. Чернігова впроваджені елементи модульно-розвиваючої системи навчання, за якою ми і працювали при проведенні експериментального навчання.

Ця система адаптована до умов ліцеїв і класів з поглибленим вивченням математики і дає змогу створити належні умови для роботи як учня, так і вчителя [180].

Принцип модульного навчання полягає в тому, що учень може самостійно працювати із запропонованою йому навчальною програмою.

Модуль – цілісна функціональна одиниця, що в найбільшій мірі сприяє психо-соціальному розвитку учня і кваліфікаційному вдосконаленню вчителя.

Функціонування навчального модуля має два етапи. Перший етап полягає в первинному сприйнятті, ознайомленні та осмисленні змістового модуля. Другий етап – у відпрацюванні навичок і вмінь. Кожна з цих фаз містить по три етапи (міні-модулі), які в логічній єдності і становлять повний функціональний цикл навчального модуля (за А. Фурманом) [180].

Весь навчальний матеріал поділяється на блоки (модулі) залежно від умов, у яких працює навчальний заклад. Під кожний модуль складається відповідний методичний комплекс.

1. Модуль учителя (урок) (детальне планування уроку) функціонує за наявності:

- міні-модулів, тобто певних етапів уроку;
- часу, що запланований на кожен міні-модуль;
- навичок і вмінь, якими учні повинні опанувати на даному етапі;
- нових понять і термінів, з якими учні повинні ознайомитися;
- обов’язковий контроль.

2. Модуль учня (план роботи) здійснюється за наявності:

- переліку питань, що вивчаються;
- списку літератури;
- вказівок, у якому підручнику або посібнику, на якій сторінці знайти відповідь на поставлене запитання;
- переліку прикладів і задач, які потрібно вміти розв’язувати (з вказівкою на рівень складності);
- переліку видів та форм контролю, який є обов’язковим для учня під час атестації.

Вище зазначені позиції можуть варіюватись учителем.

3. Навчально-методичний комплекс функціонує за наявності:

- базового підручника [5, 6];
- рекомендованого дидактичного матеріалу (навчально-методичного посібника, наочності, завдань для учнів) [36, 87, 88, 97, 124, 155, 167, 186, 209];
- опорних конспектів вчителя і учня.

Методичний комплекс –складений згідно з такими вимогами до навчання, як науковість, доступність, індивідуалізація та диференціація.

Про ефективність впровадження елементів модульно-розвиваючої системи навчання свідчать:

1) раціональна організація роботи вчителя і учня;
2) можливість глибше побачити діяльність кожного учня крізь обов’язкові контрольні зрізи;
3) підвищення показників якості знань та розвитку учнів.

Модуль „Початки теорії ймовірностей і вступ до статистики”, 35-40 годин містить:

1. Модуль учителя.
2. Модуль учня.
3. Індивідуальний практикум.
4. Орієнтовні тексти: тестів, математичних диктантів, самостійних робіт, індивідуальних робіт, лабораторних робіт, контрольних робіт.

Протягом роботи з модулем учень зобов’язаний пройти через кілька видів обов’язкового контролю, що зазначені в плануванні (під час уроку або в позаурочний час).

Будь-яка повноцінна діяльність складається з трьох частин: орієнтувальної, виконуючої і контрольної. Відсутність третьої частини перетворює діяльність у сукупність нерегульованих дій. При цьому втрачається ціль діяльності і уявлення про її досягнення. Під контролем в учбовій діяльності мається на увазі контроль , який здійснюється самим учнем, але він може здійснюватись і іншим суб'єктом, який з ним взаємодіє. В учбовому процесі розрізняють три типи контролю:

1) зовнішній контроль, що здійснюється вчителем над діяльністю учня;

2) взаємний контроль, що здійснюється учнями між собою над їх учбовою діяльністю;

3) самоконтроль, що здійснюється учнем над своєю самостійною діяльністю.

Третій тип тісно пов'язаний з поняттям рефлексії і притаманний учням старшого шкільного віку.

За своїм призначенням і характером усі форми і методи перевірки та дидактичні оцінки рівня засвоєння учнями певної сукупності знань, навичок, вмінь і професійно важливих рис розподіляються на попередні, поточні, контрольні (періодичні), підсумкові.

Попередній контроль проводиться в основному з діагностичною метою перед вивченням нової теми на початку уроку для ознайомлення із загальним рівнем підготовлености учнів з предмета і планування подальшої організації навчально-пізнавальної діяльності. Результати цього контролю суттєво впливають на цілеспрямоване визначення змістового компонента.

Короткочасність орієнтувально-мотиваційного етапу навчальної діяльності, на якому реалізується попередній контроль і необхідність залучення до цієї діяльності усіх учнів, детермінує вибір тестування як найбільш доцільної форми контролю на цьому етапі.

Поточний контроль здійснюється паралельно з опануванням учнями новими знаннями, навичками, вміннями на операційно-пізнавальному етапі навчального процесу. Основна мета поточного контролю полягає у діагностиці темпу і рівня формування в учнів знань, навичок і умінь, попередженні виникнення помилок, наданні необхідної допомоги і здійснення поточної пооопераційної корекції знань, умінь і навичок, що формуються.

В. Оконь [143, с.360] визначає поточний контроль як виховний і, безперечно, має рацію, тому що такий контроль, по-перше, охоплює весь дидактичний процес, має постійно вдосконалювати його, по-друге, покликаний стимулювати в учнів прагнення систематично, самостійно працювати над навчальним матеріалом, підвищувати свою професійну майстерність і розвивати мотивацію учня та водночас підштовхувати педагога до підвищення якості дидактичних заходів і вдосконалення цієї педагогічної майстерності, по-третє, має сформулювати в учнів навички і вміння самоконтролю і самооцінки.

Самоконтроль – це одна з найважливіших психологічних якостей особливості учня, характеризує можливість самостійно спостерігати за своїми знаннями, навичками, вміннями порівнювати результати навчання з вимогами певних норм і правил. Самоконтроль є невід'ємним компонентом діяльності учня. Ступенями оволодіння самоконтролю є: усвідомлення учнями мети діяльності; ознайомлення зі зразком кінцевого результату і способами його досягнення; порівняння прийомів розв'язування кінцевого результату зі зразком; оцінка виконаної роботи; виявлення помилок, їх аналіз і причини виникнення; внесення вдосконалення в свою діяльність. Найважливішим моментом у навчанні учнів самоконтролю є засвоєння зразка. Зразок – готове розв'язання, послідовність розв'язання задачі або їх сукупність. Наведемо приклад роботи за зразком при вивченні теми „Формула повної ймовірності. Формула Байєса".

При обчисленні ймовірності події за формулою повної ймовірності і формулою Байєса можна користуватися правилом-орієнтиром:

1. Розглянути випробування, що описуються у задачі.
2. Позначити подію, ймовірність настання якої необхідно знайти буквою A.
3. Скласти множину гіпотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Переконатися, що ці гіпотези попарно несумісні і в сумі дають простір елементарних подій, що розглядаються.

4. Обчислити ймовірність кожної з гіпотез (їх сума повинна дорівнювати одиниці) і умовні ймовірності настання події A за кожною з умов, що відбулася подія H_i, ($i=1, 2, \ldots, n$) (якщо вони не надані в умові задачі).
5. За формулою $P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+\ldots+P(H_n)\cdot P(A/H_n)$ (2.2) обчислити ймовірність події A.
6. Якщо з умови задачі відомо, що подія A вже відбулась, то за формулою Байєса $P(H_i/A)=\dfrac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{P(A)}$ (2.3) необхідно обчислити умовну ймовірність гіпотез, за умови що подія A відбулась.

Приклад 1. У торгівельну фірму надійшли телевізори від трьох постачальників у відношенні 1:4:5. Практика показала, що телевізори, які надійшли від 1-го, 2-го і 3-го постачальників, не потребують ремонту протягом гарантійного терміну відповідно у 98, 88 і 92% випадків. Знайти ймовірність того, що: а) телевізор, який надійшов у торгівельну фірму не потребує ремонту протягом гарантійного терміну; б) телевізор, який було реалізовано, потребував ремонту протягом гарантійного терміну. Визначити, від якого постачальника ймовірніше за все надійшов відповідний телевізор?

Розв’язування.

а) Подія A – телевізор не потребує ремонту протягом гарантійного терміну.

Гіпотеза H_i – телевізор надійшов від i-го постачальника ($i=1, 2, 3$)

За умовою:

$$
\begin{aligned}
&P(H_1)=\frac{1}{1+4+5}=0{,}1 \qquad && P(A/H_1)=0{,}98\\
&P(H_2)=\frac{4}{1+4+5}=0{,}4 \qquad && P(A/H_2)=0{,}88\\
&P(H_3)=\frac{5}{1+4+5}=0{,}5 \qquad && P(A/H_3)=0{,}92\\
&\overline{\phantom{P(H_3)=\frac{5}{1+4+5}}}=1 &&
\end{aligned}
$$

За формулою (2.2)

$$P(A)=0{,}1\cdot 0{,}98+0{,}4\cdot 0{,}88+0{,}5\cdot 0{,}92=0{,}91$$

б) Подія $\overline{A}$ - телевізор потребує ремонту протягом гарантійного терміну. Ймовірність даної події можна знайти таким чином:

I спосіб (якщо не розглянуто попередній пункт).

$$\begin{array}{ll} P(H_1)=0{,}1 & P(\overline{A}/H_1)=1-0{,}98=0{,}02 \\ P(H_2)=0{,}4 & P(\overline{A}/H_2)=1-0{,}88=0{,}12 \\ P(H_3)=0{,}5 & P(\overline{A}/H_3)=1-0{,}92=0{,}08 \\ \overline{\qquad\quad}=1 & \end{array}$$

$$P(\overline{A})=0{,}1\cdot 0{,}02+0{,}4\cdot 0{,}12+0{,}5\cdot 0{,}08=0{,}002+0{,}048+0{,}04=0{,}09.$$

II спосіб (враховуючи пункт 1).

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0{,}91=0{,}09.$$

За формулою Байєса (2.3)

$$P(H_1/\overline{A})=\frac{P(H_1)\cdot P(\overline{A}/H_1)}{P(\overline{A})}=\frac{0{,}1\cdot 0{,}02}{0{,}09}=0{,}022$$
$$P(H_2/\overline{A})=\frac{P(H_2)\cdot P(\overline{A}/H_2)}{P(\overline{A})}=\frac{0{,}4\cdot 0{,}12}{0{,}09}=0{,}533$$
$$P(H_3/\overline{A})=\frac{P(H_3)\cdot P(\overline{A}/H_3)}{P(\overline{A})}=\frac{0{,}5\cdot 0{,}08}{0{,}09}=0{,}444$$

Такий шлях має ряд переваг: учні самостійно шукають розв'язок (практичні, теоретичні відомості), знаходять і виправляють помилки, виділяється лідерство, конкуренція, немає необхідності розв'язувати всі задачі, взявши інше завдання учень самостійно шукатиме способи його розв'язання, використовуючи посібник, підручник або іншу додаткову літературу. Учні, які володіють самоконтролем, як правило, успішно складають іспити без підказок і списувань.

На етапі поточного контролю ми пропонуємо проведення тестування, математичних диктантів, самостійних робіт (див. додаток К).

Завдання з позначкою ^{0} відповідають початковому і середньому рівню; з позначкою * - достатньому рівню; з ** - високому рівню.

Періодичний контроль є зазвичай плановим, заздалегідь визначеним, він полягає у визначенні рівня та обсягу набуття учнями знань, навичок та вмінь за певний період з метою виявлення рівня оволодіння ним.

Тематичний контроль різновид періодичного.

Тематичний контроль навчальних досягнень учнів під час вивчення початків теорії ймовірностей та вступу до статистики є заключним етапом здійснення періодичного контролю. Він функціонує на контрольно-оцінювальному етапі навчального процесу, завершуючи дидактичний цикл опанування учнями навчальною темою.

Пріоритетними цілями на цьому етапі є виявлення міри досягнення запланованих результатів навчання, рівня опанування учнями знань, навичок, умінь. Оскільки на контрольно-оцінювальному етапі навчальної діяльності передбачається виявлення, вимірювання, оцінювання та корекція результатів опанування учнями матеріалом навчальної теми, то відповідно визначаються загальні цілі тематичного контролю:

1) проконтролювати сформованість в учнів системи знань, умінь та навичок;
2) виявити рівень навчальних досягнень учнів в опануванні матеріалом теми, встановити повноту і глибину отриманої системи знань, умінь, навичок;
3) виявити міру співпадання досягнутих результатів навчання із запланованими;
4) здійснити корекцію знань, умінь та навичок учнів.

Ефективну реалізацію тематичного контролю результатів навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики забезпечує великий вибір його методів, форм і засобів. Останні в достатній мірі розроблені науковцями, досвідченими вчителями-практиками і висвітлені у відповідній літературі. [77, 224] Проте, за нашими спостереженнями, тематичний контроль з початків теорії ймовірностей та елементів статистики, як правило, здійснюється шляхом проведення тематичної контрольної роботи.

Можливі інші способи реалізації тематичного контролю, наприклад, залік з теоретичних питань, залік із розв’язування задач, тестування тощо. Під час здійснення тематичного контролю учителю доцільно комбінувати різні форми.

Це забезпечить об'єктивність і надійність результатів контролю.

При розв'язанні проблем планування й організації контролю ми спираємося на досвід дисертаційного дослідження Дремової І.А. [77].

Оскільки, під час вивчення початків теорії ймовірностей і вступу до статистики учні мають засвоїти відповідний теоретичний матеріал і набути певних практичних (загальних і предметних) навичок та умінь, то у нашому дослідженні ми здійснювали тематичний контроль у три етапи. При цьому використовували комбінацію таких форм контролю: на першому етапі – залік із теоретичних питань або тестування; на другому – залік із розв'язування задач і на третьому – тематична контрольна робота.

У розробленій методиці проведення заліків з теорії й розв'язування задач під час вивчення початків теорії ймовірностей і вступу до статистики використано методику, що запропонована в дисертаційному дослідженні В.О. Швеця [227].

Метою проведення заліку з теоретичних питань є контроль опанування учнями математичною термінологією, понятійним апаратом навчальної теми, властивостями математичних об'єктів, зв'язків і відношень між ними. Учитель заздалегідь повідомляє учням перелік питань до заліку для того, щоб мати можливість обговорити ці питання з ними під час поточного опрацювання навчального матеріалу. Напередодні заліку він разом з учнями здійснює корекцію знань учнів, узагальнення і систематизацію теоретичного матеріалу, акцентує їхню увагу на суттєвих моментах, готуючи їх тим самим до заліку.

Залік з теоретичних питань проводиться учителем на уроці переважно у письмовій формі. Біля кожного питання картки доцільно записати максимальну кількість балів, яку може отримати учень у разі правильної відповіді на нього. Зауважимо, що розподіл балів учитель виконує самостійно, керуючись перш за все цілями вивчення теми й критеріями оцінювання. Питання підвищеного рівня також доцільно виділити шрифтом або кольором. Усе це значно полегшить учителю процес оцінювання робіт, забезпечить об'єктивність контролю, учням дозволить зорієнтуватися у рівні власних навчальних досягнень.

Зауважимо, що ми не виключаємо можливості реалізації заліку в усній формі або шляхом комп'ютерного тестування. Останнім часом науковцями і методистами приділяється багато уваги дослідженням доцільного та ефективного використання комп'ютера у навчально-виховному процесі (Ю.В. Горошко [64], М.І. Жалдак [164] та інші). На сьогодні вже накопичений багатий теоретичний і практичний досвід застосування сучасних інформаційно-комунікаційних технологій у навчанні учнів, які у сукупності складають фундаментально відпрацьовану концепцію інформатизації навчального процесу.

Оскільки залік з теорії передбачає перевірку опанування учнями понятійного апарату і логічними зв'язками між математичними об'єктами, що вивчаються (знання означень, формул, властивостей тощо), то його доцільно реалізувати шляхом тестування. Здійснюване під час підсумкового контролю, воно має відмінності від попереднього і поточного тестування. Зокрема, обираючи програмний засіб для підсумкового тестування ми передбачили такі можливості:

- задавати випадковий порядок слідування запитань. Оскільки кількість питань обмежена і учень може бачити зображення на моніторі сусіда, це зменшить імовірність „списування”.
- пропустити питання з подальшим поверненням до роботи над ним. Це може бути доцільним, коли учень дає відповіді на прості запитання, а потім у час, що залишиться, продовжить роботу над складними запитаннями.
- обмежити час роботи над текстом у цілому. Це дає змогу учням закінчити роботу одночасно, організує і дисциплінує їх.
- тести повинні бути закритими.
- протоколювати роботу кожного учня і виводити результати. Це забезпечує якість зворотного зв'язку, дозволяє обґрунтовано здійснювати корекцію знань

учнів.

Усі зазначені можливості реалізуються програмним педагогічним засобом Vega [245]. Саме цю програму ми і використовували для поточного і підсумкового контролю.

З огляду на це ми пропонуємо такий перелік питань для підсумкового тематичного контролю результатів навчання початкам теорії ймовірностей і вступу до статистики. Питання підвищеного рівня виділено зірочкою (*).

Питання для проведення тестування наведені в додатку К.3.

Правильна й повна відповідь на запитання обов'язкового рівня оцінюється в один бал, на запитання підвищеного рівня – у два бали, поглибленого рівня – у три бали. Таким чином максимальна оцінка, яку учень може отримати на заліку з теми „Початки теорії ймовірностей і елементи статистики" 12 балів. Якщо учень у відповіді на запитання допустився помилок, то вчитель знижує оцінку за цю відповідь або взагалі не зараховує її в залежності від характеру помилок (у відповіді є несуттєві недоліки, припущені грубі помилки, неправильна відповідь, відсутня відповідь).

Оцінка за залік з теоретичних питань отримується шляхом додавання балів, виставлених за відповіді учня на кожне запитання. Ця оцінка обов'язково виставляється учителем у журнал. Оцінка учня за залік у 5 балів або нижче свідчить про засвоєння ним теоретичного матеріалу на низькому рівні. Як показує досвід, цей рівень не є достатнім для успішного опанування уміннями й навичками, тому слід рекомендувати таким учням допрацювати теоретичний матеріал і надати йому можливість скласти залік повторно.

На нашу думку, не слід дозволяти учням перескладати залік на більш високу оцінку, оскільки це негативно впливає на весь процес підсумкового контролю, дезорганізує його, не сприяє формуванню в учнів відповідальності за результатами навчальної діяльності тощо.

Таким чином, враховуючи названі вище вимоги і регламентуючи час проведення заліку на уроці, учитель забезпечує організовану і об'єктивну реалізацію підсумкового тематичного контролю теоретичних питань.

Наступний етап тематичного контролю результатів навчання учнів початків теорії ймовірностей і вступу до статистики є залік із розв’язування індивідуальних задач. Що стосується завдань, які пропонують підручники [5, 6], то, на нашу думку, вони недостатньо диференційовані за рівнями (завдання обов’язкового, середнього, достатнього, високого рівнів), а також за призначенням (для усного колективного обговорення і розв’язування, для роботи у класі, для домашньої роботи, для самостійної та індивідуальної роботи). Тому учитель мусить подбати про добір системи завдань для формування в учнів знань, навичок, умінь, а також для їх контролю.

Індивідуальні завдання повинні містити завдання для актуалізації опорних знань, навичок, умінь. Окремо можуть бути подані завдання підвищеної складності, олімпіадні, конкурсні завдання. Їх вчитель знайде у запропонованому нами посібнику [209].

Розв’язування базових завдань пояснюється вчителем на уроці. Індивідуальні завдання пропонуються учням для самостійного розв’язування на уроках і вдома. При цьому кожен з них, у разі потреби, може отримати консультацію вчителя, допомогу товаришів, може користуватися підручниками, довідниками, тощо. Такий прийом більш повно враховує індивідуальні особливості кожного учня, його власний темп просування у навчанні, тобто реалізує принцип індивідуалізації навчального процесу.

Таблиця 2.6

Облік виконаних завдань.

Прізвище учня	Тема 1 12345	…	Кількість завдань	Оцінки
1. Артемов	+-++-	…	60%	5
2.Білий	+++++	…	100%	11

…	…	…	…	…
25.Хром	++-++	…	80%	7

Облік виконаних завдань відкритий. Його ведуть самі учні під керівництвом вчителя. З цією метою складається таблиця (див. табл.2.6), в яку заносять прізвища учнів і номери завдань. Наявність вправ відмічають у таблиці знаком „+”.

Якість виконання перевіряється учителем під час проведення консультацій із розв’язування певних задач, куди запрошуються учні за результатами поточних самостійних робіт навчаючого характеру. Консультацію проводять в індивідуальній або груповій формах. Тут учителю у нагоді стане складена таблиця. Окрім цього, учитель після закінчення вивчення навчальної теми здійснює перевірку зошитів усіх учнів із метою виставлення заліку з розв’язування задач.

Пропонуємо таку методику оцінювання. Якщо до заліку учень розв’язав менше ніж 60% завдань обов’язкового рівня, то його роботу слід оцінити в 1, 2 або 3 бали. Якщо учнем виконано 60% - 80% завдань обов’язкового рівня, то його робота оцінюється учителем в 4, 5 або 6 балів. Оцінка в 7 або 8 балів виставляється за роботу, якщо учнем виконано більше 80% завдань обов’язкового рівня. Учитель виставляє 9, якщо розв’язані усі завдання обов’язкового рівня (за винятком завдань підвищеної складності). Оцінка в 10, 11 або 12 балів за залік з розв’язування задач виставляється учню, якщо крім завдань обов’язкового рівня, виконана частина завдань підвищеної складності або весь блок.

Зауважимо, що з критеріями оцінювання і термінами проведення заліку з розв’язування задач учні мають бути ознайомлені заздалегідь. Це допомагає їм раціонально спланувати власну навчальну діяльність, запобігає індивідуальному перевантаженню учнів, дозволяє кожному з них самостійно „проектувати” власні навчальні досягнення. Учителю це дає змогу організовано провести другий етап підсумкового контролю. Результати заліку в розв'язуванні виставляється у класний журнал.

Індивідуальні завдання за рівнями розглянуті в попередньому параграфі 2.3.

Третій етап тематичного контролю – контрольна робота. Мета її проведення – проконтролювати сформованість в учнів системи знань, умінь, навичок, виявити її повноту (кількість опанованих учнем елементів змісту навчання) та глибину (кількість логічних зв'язків між елементами змісту навчання), а також міру співпадання досягнутих учнями результатів навчання із запланованими.

Добір завдань контрольної роботи здійснюється згідно викладених вище вимог до системи вимірників об'єктів підсумкового контролю результатів навчання. Варіанти контрольної роботи для тематичного контролю наведені в додатку Л.

Усі завдання контрольних робіт диференційовані за рівнями. Початковому і середньому рівням навчальних досягнень учнів відповідають завдання з позначкою ^{0}. Їх розв'язання вимагає від учнів відтворення і застосування знань у знайомих ситуаціях, виконання дій з найпростішими математичними об'єктами за відомим алгоритмом.

Правильне розв'язання завдань цього рівня оцінюється в 1 бал. Це дозволяє набрати учню 6 балів.

Достатньому рівню навчальних досягнень відповідають завдання з * (зірочкою). Розв'язання завдань цього рівня вимагає від учня вміння виконувати дії, алгоритм яких йому відомий, але зміст та умови виконання дещо змінені, передбачає встановлення ним логічних зв'язків між математичними об'єктами та наведення певних обґрунтувань. Повне і правильне розв'язання кожного завдання достатнього рівня оцінюється у 2 бали. Максимальна оцінка, яку може отримати учень, розв'язавши завдання двох попередніх рівнів – 10 балів.

Зауважимо, що завдання достатнього і високого рівня пропонуються учням на вибір. Наприклад, у цьому варіанті тематичної контрольної роботи № 1 на вибір пропонуються завдання достатнього рівня №2 або №4.1, 4.2, а також завдання високого рівня - №1.3 або №3.3 . Це означає, що з двох завдань достатньо розв'язати одне. А при розв'язанні учнем обох завдань (пропонованих на вибір), зараховується одне, те, з яким учень, на думку вчителя, впорався краще.

Завдання з номером ** (з двома зірочками) відповідають високому рівню навчальних досягнень учнів. Їх розв'язання спонукає учня до творчого застосування знань, умінь, навичок, виявляє гнучкість, варіативність мислення, здатність самостійно орієнтуватися у стандартній ситуації. Повне і правильне виконання завдання цього рівня оцінюється у 3 бали. Максимальна оцінка, яку може отримати учень за виконання контрольної роботи – 12 балів.

Якщо у тематичній роботі припущена помилка, то залежно від рівня завдання і характеру помилки вчитель виставляє меншу кількість балів за виконання завдання, у якому вона зроблена або взагалі не зараховує його.

Результати перевірки тематичної контрольної роботи заносимо у таблицю. В ній навпроти прізвища кожного учня виставляється кількість балів, набраних ним за кожне окреме завдання, визначається характер допущених учнями помилок, а також підсумкова оцінка. Аналіз такої таблиці дозволяє вчителю побачити типові слабкі місця в опануванні учнями знань, умінь, навичок. А це в свою чергу допоможе спланувати корекційну роботу, повторення, узагальнення і систематизацію знань, умінь, навичок. Оцінки, отримані учнями під час підсумкової тематичної контрольної роботи, виставляються до журналу.

Якщо результати контрольної роботи учня свідчать про початковий рівень його досягнень, то вчитель рекомендує йому переписати тематичну контрольну роботу після додаткової підготовки й доопрацювання навчального матеріалу. Це зумовлено тим, що початковий рівень навчальних досягнень учня не забезпечує його успішного просування у навчанні й інтерпретується як невиконання державної програми з математики.

Проте, як і при складанні заліку з теоретичних питань, не слід дозволяти учням переписувати тематичну контрольну роботу з метою підвищення оцінки. У протилежному разі це дезорієнтує проведення тематичної контрольної роботи, втрачається її позитивний виховний вплив.

Реалізація цілей тематичної контрольної роботи забезпечується систематичністю та рівневою диференціацією завдань. А об’єктивність – розподілом балів за виконання кожного окремого завдання.

Результатом тематичного контролю є тематична атестація учнів – оцінювання знань, умінь, навичок учнів, набутих ними під час вивчення даної теми. Вона здійснюється вчителем на основі результатів опитування, поточних самостійних робіт, трьох етапів підсумкового тематичного контролю. Проте тематична атестація не є середнім арифметичним отриманих учнем оцінок. Вона повинна відображати реальний рівень його навчальних досягнень.

З огляду на це пріоритет треба надавати тематичній контрольній роботі, завдання якої мають, як правило інтегрований характер, тобто спрямовані на перевірку опанування учнями відповідним теоретичним матеріалом і вміння його застосовувати під час розв’язування вправ. Тому, на нашу думку, оцінка за тематичну атестацію не може бути вищою за оцінку тематичної контрольної роботи.

Експериментальні дослідження підтвердили ефективність висунутих пропозицій. Під час реалізації тематичного контролю результатів навчання учнів початкам теорії ймовірностей і вступу до статистики згідно пропонованої методики створюються такі умови, за яких учні, з одного боку стають активними суб’єктами власної навчальної діяльності і вільні обирати для себе прийнятний рівень і темп опанування навчальним матеріалом, а з іншого – спонукають і примушують їх до систематичної роботи. Разом з тим така організація тематичного контролю знань, умінь, навичок учнів забезпечує якісний зворотній зв’язок, який дає змогу вчителю ґрунтовно діагнозувати рівень навчальних досягнень учнів, прогнозувати їх подальше просування у навчанні. Одночасно він отримує дієвий засіб диференціації навчального процесу.

2.5 Експериментальне навчання, результати та методичні рекомендації

Метою педагогічного експерименту була перевірка основних теоретичних положень дослідження і справедливості висунутої гіпотези (див. с.5). Необхідно було перевірити ефективність розробленої методичної системи навчання початкам теорії ймовірностей і вступу до статистики в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики.

Дослідження здійснювалося впродовж 1998-2004 років і включило в себе три етапи. А саме:

1) етап констатуючого експерименту (1998-2000 рр.);
2) етап пошукового експерименту (2000-2002 рр.);
3) етап формуючого експерименту (2002-2005 рр.).

Мета констатуючого експерименту полягала у вивченні стану проблеми дослідження, в практиці роботи ліцеїв і класів з поглибленим вивченням математики, визначенні його завдань та шляхів реалізації. Робота на цьому етапі проводилась у двох напрямах: 1) теоретичний аналіз проблеми навчання початкам теорії ймовірностей і вступу до статистики в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики, спрямований на дослідження стану її на основі розробленості проблеми у психолого-педагогічній, методичній і математичній літературі; 2) практичне дослідження, мета якого полягала у вивченні реального стану навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики.

Для досягнення поставленої мети нами був проведений аналіз діючих навчальних програм [165, 166], підручників [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 14], посібників для вчителів [36, 87, 88, 97, 124, 155, 167,186], дидактичних матеріалів [90, 182], відповідних статей в журналі « Математика в школі» [2, 31, 32, 37, 40, 84, 85, 92, 135, 136, 232, 233, 234], навчального плану, положень про ліцеї і класи з поглибленим вивченням математики [71].

На цьому етапі ставилося завдання отримання і аналізу даних, які б дозволяли з'ясувати наближено рівень знань, умінь і навичок учнів з зазначеної теми. Здійснювалось накопичення й аналіз матеріалу з проблеми навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в школі.

Також виявлялись особливості організації такого навчання.

Це дозволило нам обґрунтувати методологічні, психолого-педагогічні та методичні основи навчання елементів стохастики; сформулювати методичні вимоги до навчання початкам теорії ймовірностей і вступу до статистики в умовах диференціації навчання і особистісно орієнтованого підходу до організації освітнього процесу.

З метою вивчення практичного досвіду елементів стохастики в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики здійснювалися цілеспрямовані педагогічні спостереження: обговорювалися уроки з початків теорії ймовірностей і вступу до статистики; проводилися порівняльні аналізи контрольних робіт учнів різних класів і ліцеїв з поглибленим вивченням математики; бесіди; анкетування; інтерв'ювання директорів, завучів, учителів, учнів, студентів-практикантів, викладачів вищих навчальних закладів, інших педагогічних працівників.

У ході констатуючого експерименту проведено бесіди та анкетування (див. Додаток В) близько 232 учителів математики, що працюють у класах і ліцеях з поглибленим вивченням математики з різних регіонів України, зокрема із м. Києва і Київської області, м. Одеси, м. Сум, м. Чернівців, м. Чернігова і Чернігівської області.

Серед них 6% учителів мають педагогічний стаж до 10 років, 6% - від 10 до 20 років, 8% - більш 20-ти років.

Категорія „спеціаліст” та другу кваліфікаційну мають 2% вчителів, першу кваліфікаційну категорію – 17%, вищу – 81% вчителів.

Результати анкетування показали, що переважна кількість учителів 196 вважає, що навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в ліцеях і класах з поглибленим вивченням вимагає створення відповідної методики навчання, яка могла б врахувати не тільки зміни у програмі, а й диференціацію навчання і особистісну спрямованість, наступність у навчанні.

Решта респондентів поряд із цим вбачають у навчанні початків теорії ймовірностей і вступу до статистики, як навчання окремому предмету, який, на їх погляд, учні важко засвоюють.

Однією з основних проблем називають недостатню підготовку вчителів до навчання початкам теорії ймовірностей і вступу до статистики.

Серед основних причин такого становища називають те, що в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики працюють вчителі, які закінчили вищі заклади освіти понад 15 років тому.

Окрім того багато нарікань учителів на недосконалість методичних рекомендацій, дефіцит нової методичної літератури, дидактичних матеріалів з диференційованими за рівнями варіантами завдань, тощо.

Унаслідок проведеної роботи на цьому етапі експерименту було виявлено певні розбіжності між результатами навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики та вимогами навчальної програми і освітнього стандарту до математичної підготовки учнів, з’ясовано основні недоліки, протиріччя і нерозв’язані питання у системі навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики, уточнено цілі, зміст і місце в умовах диференціації, особистісно орієнтованого підходу до навчального процесу та вимоги до його реалізації.

Основні результати констатуючого експерименту висвітлені нами у першому розділі дисертаційного дослідження, у публікаціях [201, 202].

Отримані результати надали підставу сформулювати гіпотезу, що висунута в дослідженні, і його завдання (див. вступ).

Пошуковий етап експерименту тривав протягом 2000-2002 рр.

Метою пошукового експерименту було створення, апробація, корекція методичної системи навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в класах і ліцеях з поглибленим вивченням математики.

Для досягнення цієї мети були уточнені цілі і завдання навчання та вимоги до нього на кожному етапі навчального процесу. Розроблена і теоретично обґрунтована методика навчання елементів стохастики.

Був розроблений навчальний посібник, який містить матеріали для реалізації індивідуального диференційованого підходу до навчання, тематичного контролю з елементів стохастики в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики.

Неодноразово уточнювалися методичні рекомендації щодо навчання.

З метою удосконалення пропонованої методики навчання елементів стохастики в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики здійснювалося спостереження за динамікою успішності та якості стохастичної підготовки учнів, за формуванням у них стохастичного мислення, позитивних мотивів навчання, рефлексії власної навчальної діяльності.

Таким чином, у ході пошукового експерименту нами була розроблена методика навчання початків теорії ймовірностей, зокрема обґрунтована наступність, диференціація навчання початкам теорії ймовірностей і вступу до статистики, використання модульно-рейтингової системи.

Результати цього етапу експерименту висвітлені у попередніх підрозділах дисертаційного дослідження, а також у публікаціях [199, 200, 203,204,205, 206, 207, 208].

Третій етап експерименту – формуючий – проводився протягом 2002-2004 рр.

Метою формуючого експерименту була перевірка ефективності запропонованої методичної системи навчання початкам теорії ймовірностей і вступу до статистики в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики.

Експериментальною базою було обрано фізико-математичну школу №12 м. Чернігова – 123 учні, загальноосвітню школу I-III ступеню №3 м. Чернігова – 58 учнів, військовий ліцей м. Чернігова – 184 учні, ліцей КПІ м. Славутича Київської області – 117 учнів, багатопрофільний ліцей №15 м. Чернігова – 92 учні, ліцей м. Козелець Чернігівської області – 56 учнів.

Для участі в експерименті залучено 720 учнів 11 класів.

Нами були виділені такі однорідні вибірки експериментальних та контрольних груп учнів для проведення формуючого експерименту (табл. 2.7)

Таблиця. 2.7

Розподіл учнів за експериментальними і контрольними класами

Класи	11 клас	Усього учнів
Експериментальні	364	364
Контрольні	356	356
Усього учнів	720	720

Об’єми експериментальної і контрольної груп практично не відрізняються.

Уроки в контрольних і експериментальних класах проводилися як одним і тим самим вчителем, так і різними вчителями. Відмінністю в експериментальних класах була методика у перших – розроблена нами, у других – така, що складалася у процесі педагогічної діяльності вчителів (традиційна).

Учителі-експериментатори мали різний педагогічний стаж та досвід роботи на посаді вчителя математики (10-25 років). Такий вибір обумовлений необхідністю отримати більш об’єктивну оцінку пропонованої методики.

На початку формуючого експерименту вчителі були ознайомлені з його метою й завданнями, методикою проведення. Кожен з них отримав пакет матеріалів для реалізації навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики, докладні методичні рекомендації щодо їх використання. Особлива увага вчителів зверталася на активне залучення учнів до самостійної, індивідуальної і творчої діяльності.

Ефективність впливу запропонованої методики перевірялася шляхом проведення заліків, самостійних і тематичних контрольних робіт однакового змісту в контрольних і експериментальних класах.

Результати виконання письмових робіт доповнювалися даними початкової перевірки успішності учнів, цілеспрямованими педагогічними спостереженнями. Результати, отримані в експериментальних і контрольних класах, підлягали порівняльному аналізу. Вірогідність сформульованої гіпотези визначалась за допомогою статистичних методів.

Спостереження проведені в експериментальних і контрольних класах дали змогу зробити висновки про ефективність розробленої методики.

В таблиці 2.8 та на діаграмі 2.1 представлені рівні навчальних досягнень у генеральній сукупності, яка містить результати тематичного оцінювання змістового модуля з початків теорії ймовірностей і вступу до статистики для контрольних і експериментальних класів.

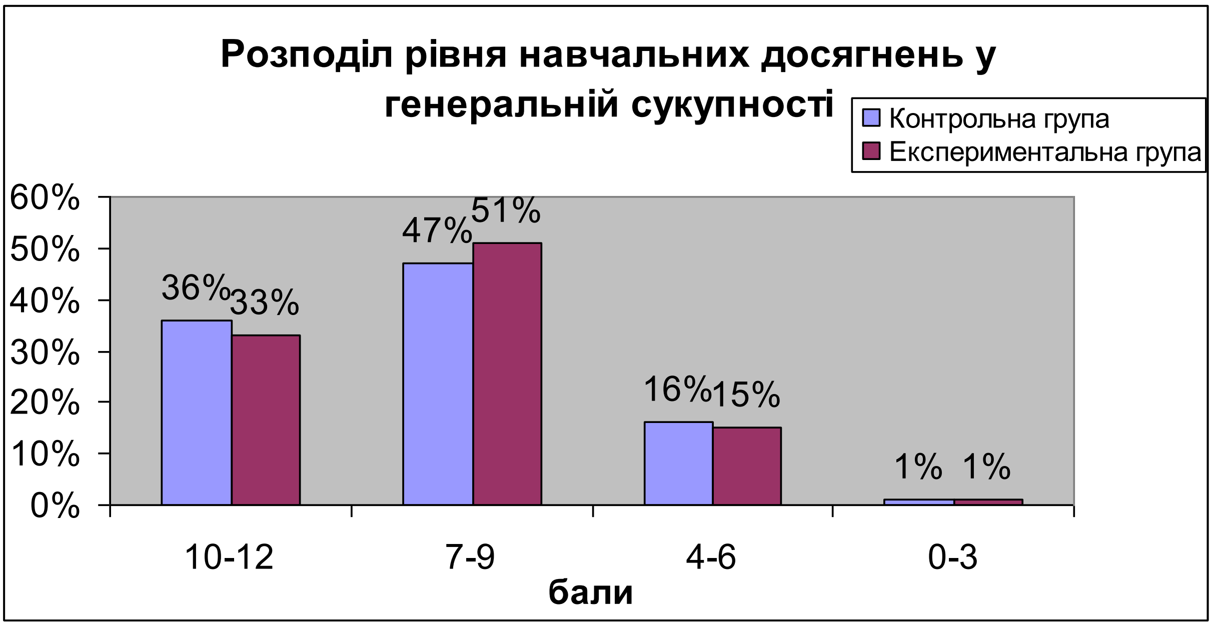
Таблиця 2.8

Розподіл рівня навчальних досягнень у генеральній сукупності

	Усього учнів	Рівні навчальних досягнень %				%	
		10-12	7-9	4-6	0-3	Успішності	Якості
Контрольна група	356	128	172	54	2		
	100%	36%	47%	16%	1%	99%	83%
Експериментальна група	364	120	188	53	3		
	100%	33%	51%	15%	1%	99%	84%
Всього	720	248	360	107	5	-	-

На перший погляд, успішність в контрольній та експериментальній групах є майже однаковою. За якістю експериментальна група відрізняється від контрольної групи лише на 1%. Порівняємо ці групи за допомогою статистичних методів.

Діаграма 2.1



Для подальшого аналізу наведених даних необхідно перевірити, чи відповідають отримані експериментальні данні нормальному закону розподілу. Для цього використаємо перевірку на нормальність за допомогою класичного χ^2 (хі-квадрат) критерію.

Найбільш впевнені результати дає використання критеріїв узгодженості. Критеріями узгодженості називають статистичні критерії, призначені для перевірки узгодженості дослідної і теоретичної моделі.

У нашому випадку гіпотеза H_0 – розподіл генеральної сукупності, з якої отримана вибірка, не відрізняється від нормального. H_1 – відрізняється.

Всі розрахунки будемо проводити за допомогою MS Excel.

У нашому випадку отримана ймовірність відповідності експериментальних даних p=0,88. Це набагато більше, ніж рівень значущості $\alpha = 0.01$, тобто можна стверджувати, що H_0 не може бути відхилена і отримані дані не суперечать нормальному закону розподілу. Більш того, оскільки ймовірність p=0,88 близька до 1, то можна говорити про високий ступінь ймовірності того, що експериментальні дані відповідають нормальному закону.

χ^2 критерій можна використати і для порівняння проценту успішності в експериментальних і контрольних класах.

При цьому за нульову гіпотезу (H_0) приймають: на процент успішності в експериментальних і контрольних класах експеримент не вплинув; і альтернативну гіпотезу (H_1): результат експерименту вплинув на процент успішності оскільки він є різним у цих класах.

Оскільки величина ймовірності випадкової появи вибірок, які аналізуються p=0,0014 менше рівня значущості $\alpha = 0.01$, то гіпотеза H_0 – не приймається. Тому приймається гіпотеза H_1, вибірки відмінні між собою і можна зробити висновок, що запропонована методика має позитивний вплив на засвоєння учнями змістового модуля початки теорії ймовірностей і вступ до статистики.

Оскільки наш дослід спрямований на встановлення ефективності запропонованої методики в умовах диференціації навчання не тільки за рівнями, а й за профілями навчання, то порівняння результатів експериментальних і контрольних класів ефективніше проводити не за всією генеральною сукупністю, а за результатами вибіркового спостереження, яке відповідає певному профілю. Для того щоб при вибіркових дослідженнях результати були вірогідні, необхідно, щоб вибірка була вірогідна і репрезентативна. Розглянемо питання визначення необхідного розміру вибірки виходячи з вимог до точності результатів і знань про генеральну сукупність. В нашому випадку доцільним буде використання визначення об’єму вибірки при пропорційному розміщенні. Для цього випадку розмір вибірки визначається за формулою [65].

$$n = \frac{L\sum_{i=1}^{L}\left(\frac{N_i}{N}\right)S_i^{\,2}}{S^2 + L\sum_{i=1}^{L}\left(\frac{N_i}{N}\right)S_i^{\,2}}$$

де L - число слоїв,

N_i – розмір і-го слою,

N - загальний розмір генеральної сукупності,

S_i^2 – дисперсія ознаки в і-му слою;

S^2 – загальна дисперсія ознаки.

В нашому випадку число слоїв L=4 (групи оцінок 12-10, 9-7, 6-4, 3-0), розмір кожного із слоїв N_1=248, N_2=360, N_3=107, N_4=5.

Загальний розмір генеральної сукупності N=720. (див. таблицю 2.7).

Дисперсії ознак кожного з слоїв S_1=6,25; S_2=2640,333; S_3=3900; S_4=5409,333.

Загальна дисперсія S=4297,09.

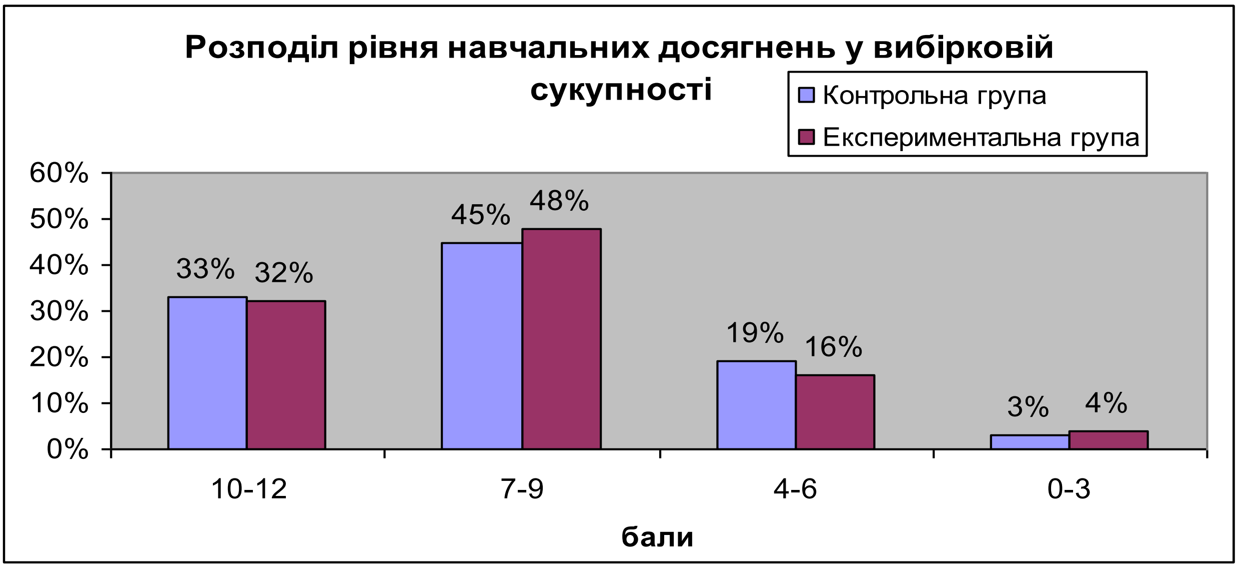
Відповідно до проведених розрахунків розмір вибірки становить n=7,6. Тому ми впевнено можемо порівнювати між собою експериментальний і контрольний клас одного профілю (див. табл. 2.8)

Таблиця 2.9

Розподіл рівня навчальних досягнень у вибірковій сукупності

	Усього учнів	Рівні навчальних досягнень %				Процент	
		10-12	7-9	4-6	0-3	успішності	Якості
Контрольна група	27	9	12	5	1		
	100%	33%	45%	19%	3%	97%	78%
Експериментальна група	25	8	12	53	1		
	100%	32%	48%	16%	4%	96%	80%
Всього	52	17	24	9	2	-	-

Діаграма 2.2



За даними таблиці 2.9 і діаграми 2.2 неможливо зробити висновок про ефективність запропонованої методики. Тому, остаточні висновки дозволяє зробити статистичне опрацювання результатів не тільки підсумкової тематичної контрольної роботи, але й безпосереднє проведення контролю протягом вивчення змістового модулю (див. додаток М).

Для розв'язання задач такого типу використовуються так звані критерії розбіжностей, а саме, критерій Ст'юдента (t-критерій). Він може оцінювати результати малої вибірки (навіть при $n < 20$) та найбільш часто використовується для перевірки гіпотез „Середні двох вибірок належать одній і тій же сукупності". Критерій дозволяє знайти імовірність того, що обидва середніх належать до однієї і тієї ж сукупності. Якщо ця імовірність p нижче рівня значущості ($p < 0.01$), то прийнято вважати, що вибірки належать до двох різних сукупностей. При використанні t-критерію можна виділити два випадки.

1. У першому випадку його використовують для перевірки гіпотези про рівність генеральних середніх двох незалежних не пов'язаних між собою вибірок (двохвибірний t-критерій). У цьому випадку є контрольний клас і експериментальний, які складаються з різних учнів, кількість яких в класах може бути різною (в нашому випадку це класи КК-1 з 27 учнів і ЕК-2 і з 25 учнів).
2. У другому випадку, коли одна і таж група об'єктів (учнів) породжує числовий матеріал для перевірки гіпотез про середні, тоді використовується так званий парний t-критерій. Вибірки при цьому називають залежними, пов'язаними. У нашому випадку це оцінки знань учнів одного і того ж класу до і після проведення експерименту.

При використанні критерію Ст'юдента оцінка вірогідності розрахунку виконується за формулою [65]:

$$t' = \frac{\bar{x} - \bar{y} - \Delta_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{m} - \frac{S_2^2}{n}}},$$

де m, n – розміри вибірок,

x, y - оцінки середніх значень,

S_1^2, S_2^2 – емпіричні дисперсії.

При аналізі наших даних розв'яжемо три такі задачі:

1. Встановимо, чи є відмінності у початкових результатах класів КК-1 і КК-2 (до проведення експерименту) (табл.2.9).

У цьому випадку використаємо двохвибірний t-критерій.

Оскільки величина імовірності випадкової появи вибірок, які аналізуються (p=0,04) більше рівня значущості ($\alpha = 0.01$), то нульова гіпотеза приймається. Отже, відмінності між вибірками можуть бути випадковими і середні вибірок не вважаються вірогідно-відмінними одна від іншої. Тому на основі використання критерію Ст'юдента не можна зробити висновок про вірогідність відмінності цих двох класів за рівнем їх знань (кількісно-оцінених у таблиці 2.9). Середні двох вибірок рівні, отже класи належать до однієї і тієї ж генеральної сукупності, що дає змогу зробити висновок, що вони були вибрані випадковим чином і на їх місці могли бути інші класи з цієї ж генеральної сукупності.

2. Оцінимо достовірність змін тематичного оцінювання. Як змінилися якісні показники засвоєння матеріалу у кожному класі окремо: КК-1 при використанні традиційної методики; ЕК-2 при використанні нової методики (табл.2.9). Порівняємо попередні тематичні оцінки з оцінками змістового модулю початки теорії ймовірностей і вступ до статистики. У цьому випадку використаємо парний t-критерій.

Оскільки величина імовірності випадкової появи вибірок, які аналізуються (p=0,001 для КК-1, p=0,00024 для ЕК-2) менше рівня значущості ($\alpha = 0.01$), то нульова гіпотеза відкидається. Отже, відмінності між вибірками невипадкові і середні вибірок вважаються вірогідно-відмінними одна від іншої. Але требі відмітити, що середні значення оцінок для класу КК-1 змінилося в меншу сторону, що говорить про достовірність отриманої інформації про засвоєння початків теорії ймовірностей і вступу до статистики при використанні традиційної методики. А в класі ЕК-2 середнє значення оцінок покращилося. Тому на підставі використання критерію Ст'юдента можна зробити висновок про ефективність використання запропонованої методики.

Виконані розрахунки дозволяють зробити висновок про те, що впровадження нової методики дійсно виявилося дієвим. Результати тематичних контрольних робіт після проведення експерименту на рівні надійності 0.99 в значній мірі відрізняється один від іншого.

3. Встановити, чи є відмінності у кінцевих результатах класів КК-1 і ЕК-2 (після проведення експерименту), враховуючи той факт, що більшість вчителів запевняють у складності опанування початків теорії ймовірностей і вступу до статистики. Оскільки величина імовірності випадкової появи вибірок, які аналізуються (табл. 2.9), менше рівня значущості ($\alpha = 0.01$), то нульова гіпотеза відкидається.

Як і в першій задачі використаємо двохвибірний t-критерій.

Отже, відмінності між вибірками невипадкові і середні вибірок вважаються вірогідно-відмінними одна від іншої. Тому на підставі використання критерію Ст'юдента можна зробити висновок про ефективність використання методики у класі ЕК-2.

Таким чином, підсумовуючи результати експерименту, можна стверджувати, що впроваджена методика має певний позитивний вплив і може широко використовуватись у практиці навчання.

На етапі формуючого експерименту серед учнів експериментальних класів було проведене анкетування (див. додаток Н), метою якого стало з'ясування їх ставлення до традиційної та експериментальної системи.

Аналіз анкетування показує, що впровадження запропонованої методики сприяє формуванню стохастичного мислення, дає змогу давати відповіді на питання, пов'язані з випадковими чинниками, розвивають логічне мислення, розширюють кругозір.

Учителі, які брали участь в експерименті позитивну оцінюють запропоновану методику. Вони відзначають можливість обґрунтовано здійснювати диференціацію до навчально-виховного процесу. За їх свідченням впровадження пропонованої методики сприяло підвищенню інтересу учнів до предмету, покращенню успішності та якості навчання, реалізації висунутих цілей.

Отже, статистичні дані анкетування учнів, позитивні відгуки вчителів свідчать про ефективність запропонованої нами методики навчання початкам теорії ймовірностей і вступу до статистики.

Висновки до другого розділу

Основними складовими взаємозв’язків наступності у процесі навчання елементів стохачстики є: наступність і пропедевтика, наступність і повторення, наступність і міжпредметні зв’язки, наступність і перевивчення.

При розгляді питання методики структурування теоретичного матеріалу в умовах диференціації передбачається тісний взаємозв’язок з класичними галузями математики, що описують детерміновані явища, сприяють розкриттю потенціалу стохастики для підсилення внутріпредметних і міжпредметних зв’язків, допомагають усвідомити нові можливості шкільної математики у пізнанні існуючих у дійсності взаємозв’язків і взаємозалежностей.

Система задач, призначених для опанування елементів стохастики, поряд з традиційними типами задач, включає задачі, які відсутні у діючих шкільних підручниках, але мають важливе значення в процесі вивчення даної змістової лінії. Тематика традиційних типів задач повинна бути розширена, фабула переважної більшості вдосконалена.

Система задач при навчанні початків теорії ймовірностей і вступу до статистики повинна бути побудована за наступними принципами: доступності, прикладної спрямованості і міжпредметних зв’язків, різноманітності, індивідуалізації та диференціації навчання, повторення та послідовного наростання труднощів, експериментально-дослідницьким.

Система поточного і тематичного контролю, система індивідуальних задач, диференційованих за рівнями дає змогу контролювати і закріпляти отримані знання, навички і вміння з початків теорії ймовірностей і вступу до статистики.

Індивідуалізація самостійних і домашніх завдань з обов’язковою подальшою перевіркою дозволить прищепити навички самостійної роботи, а індивідуальний практикум з розв’язання стохастичних задач сприятиме відпрацюванню певних умінь використання імовірнісно-статистичних понять і методів у школі.

Основні результати другого розділу висвітлені в роботах [203-209].

Загальні висновки

Мета дослідження полягала в удосконаленні методичної системи навчання елементів стохастики в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики. Для досягнення цієї мети перш за все, необхідно було: уточнити зміст елементів стохастики, методику навчання теоретичного матеріалу, що зорієнтований на розв’язування прикладних задач з використанням сучасних технологій навчання й інформаційних технологій, враховуючи диференціацію і особистісну орієнтацію навчання.

Проаналізувавши психолого-педагогічну, математичну і методичну літературу, яка має відношення до проблеми дослідження та, вивчаючи сучасний стан навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики, ми прийшли до висновку, що стан розв’язання цієї проблеми не відповідає сучасним вимогам нової змістовно-методичної лінії. Звідси випливає необхідність організаційних і методичних заходів, які необхідно здійснити у процесі навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики.

У нашому дослідженні ми розглядали сукупність вимог до рівня знань, навичок і умінь випускників ліцеїв і класів з поглибленим вивченням математики як своєрідний орієнтир, що визначає особливості нової змістовної лінії. Саме ці особливості були виявлені у ході розробки структури змісту теоретичного матеріалу і концепції формування стохастичних уявлень школярів при навчанні математики.

Визначення структури змісту теоретичного матеріалу даної лінії вимагало виявлення історичних передумов введення стохастики у шкільну програму, уточнення цілі і завдань її навчання, висунення і обґрунтування побудови самої лінії, а також виділення її складових, висування методичних вимог до структури змісту теоретичного матеріалу. Розробка концепції формування стохастичних уявлень учнів при навчанні математики вимагало висунути психолого-педагогічні передумови, характеристики стохастичних уявлень, виділення етапів, організаційних засобів їх формування в учнів. Сукупність психолого-педагогічних передумов та методичних вимог до структури і змісту теоретичного матеріалу і системи задач з початків теорії ймовірностей і вступу до статистики склали теоретичну базу спеціальної методики навчання початкам теорії ймовірностей і вступу до статистики в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики.

Таким чином, у ході нашого дослідження, у відповідності до його цілей і завдань, отримані такі **результати**:

1. Проведено ретроспективний огляд втілення в шкільну освіту елементів імовірнісно-статистичних знань.

2. Уточнено мету і цілі навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики.

3. Сформульовані основні завдання навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики з урахуванням особистісно орієнтованого підходу та рівневої та профільної диференціації.

4. Висунуті і обґрунтовані принципи побудови імовірнісно-статистичної змістовно-методичної лінії.

5. Виділені складові змістово-методичної лінії: а) імовірнісна; б) статистична, які органічно доповнюють одна одну. Їх взаємозв’язок забезпечує системність уявлень про роль емпіричних засобів і теоретичних методів у пізнанні явищ оточуючого світу і їх імовірнісної структури.

6. Виявлені протиріччя у навчанні початків теорії ймовірностей і вступу до статистики.

7. Виділені етапи формування стохастичних уявлень в учнів, які мають здібності до математики.

8. Визначена сукупність методичних вимог до навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики для ліцеїв і класів з поглибленим вивченням математики різних профілів.

9. Розроблені вимоги, що визначають необхідний рівень стохастичних знань, навичок і вмінь, якими повинен володіти школяр на різних рубіжних етапах поглибленого навчального процесу.

10. Запропоновані зміни програми основної школи з початків теорії ймовірностей і вступу до статистики мають пропедевтичний характер.

11. Розроблені і теоретично обґрунтовані методичні рекомендації про введення основних понять: випадкова подія, ймовірність, випадкова величина і її числові характеристики. Вказані рекомендації передбачають диференціацію рівня розкриття питань залежно від вікової групи, профілю навчання, рівня научуваності.

12. Запропоноване орієнтовне поурочне планування з виділенням лекційних, практичних занять, контролю знань.

13. Розроблений нами посібник, система задач якого побудована за такими принципами: доступності, прикладної спрямованості і міжпредметних зв’язків, різноманітності, індивідуалізації та диференціації навчання,

повторення та послідовного наростання трудноців, експериментально-дослідницький.

14. Запропонована система поточного і тематичного контролю, система індивідуальних задач, диференційованих за рівнями. Використання при поточному контролі комп’ютерного тестування передбачає економію часу, як для учнів, так і для вчителя, дає змогу контролювати і закріпляти отримані знання, навички і вміння з початків теорії ймовірностей і вступу до статистики.

15. Ефективність розроблених методичних рекомендацій підтвердилась експериментально. У ході проведення педагогічного експерименту знайшли підтвердження теоретичні основи дисертаційної роботи і висунута гіпотеза.

У ході розробки теоретичних основ елементів стохастики в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики вимагалося визначити систему орієнтирів, виділити компоненти і дослідити шляхи формування стохастичного мислення. Таким чином, у ході нашого дослідження, у відповідності до його цілей і завдань ми дійшли таких **висновків:**

1. Ретроспективний аналіз розвитку шкільного курсу математики показав, що пропозиції щодо введення в шкільну програму елементів стохастики висувалися ще в кінці XIX століття видатними математиками і відомими діячами системи математичної освіти. Серед математиків ця пропозиція висувалася в Україні, зокрема, М.В.Остроградським і професором В.П.Єрмаковим.

2. З різних причин склалося так, що до 70-х років XX століття колишній СРСР був єдиною розвиненою країною, в якій елементи стохастики не були включені в шкільні програми. Разом з тим ці теми вивчалися вже в усіх розвинених країнах світу (Великобританія, Німеччина, Франція, США, Польща, Угорщина, Японія та ін.)

3. Сучасний розвиток суспільства, науково-технічний прогрес, перехід економіки на ринкові відносини висунули в 90-х роках XX століття нові вимоги до математичної підготовки випускників середньої школи. Саме вимоги

суспільства і потреби особистості поставили середню школу перед безумовною необхідністю введення початків теорії ймовірностей і вступу до статистики, що було відображено в освітньому стандарті.

4. Разом з тим, методика вивчення цих нових для школи тем не була розроблена з врахуванням диференціації навчання і особистісно орієнтованого підходу до навчання. Це значною мірою стосується ліцеїв і класів з поглибленим вивченням математики.

5. Необхідність розробки відповідної методичної системи поставила завдання уточнити мету і завдання вивчення початків теорії ймовірностей і вступу до статистики, розробити адекватний зміст навчального матеріалу, виділити методи і прийоми, організаційні форми і засоби навчання в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики.

6. Попереднє дисертаційне дослідження (1974) В.В.Фірсова, існуючий досвід вивчення теми на факультативах та в школах і класах з поглибленим вивченням математики, наше експериментальне навчання підтвердило думку про те, що система вивчення початків теорії ймовірностей і вступу до статистики повинно, безумовно, мати прикладну спрямованість, диференційовану реалізацію і особисто орієнтований підхід. Це означає, що при вивченні теоретичного матеріалу, і особливо при формуванні навичок та умінь, необхідно використовувати змістові прикладні задачі, в тому числі, міжпредметного змісту.

7. Система задач повинна добиратись за принципами доступності, прикладної спрямованості, міжпредметних зв’язків, диференціації навчання, послідовного наростання труднощів, експериментально-дослідницького принципу. Задачі не повинні містити попередньо не засвоєних учнями понять і відношень.

8. Експериментальне навчання показало, що найбільш доцільними є проблемний виклад, евристична бесіда, експериментально-дослідницький методи. Разом з тим, не можна недооцінювати пояснювально-ілюстративний та репродуктивний методи, які забезпечують фонд дійових знань. Серед

організаційних форм найбільш вдалою виявилася лекційно-практична форма навчання, фронтальні і особливо групові організаційні форми під час формування навичок і умінь, проведення лабораторних робіт.

9. Виявилося, що в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики ефективними засобами навчання є доцільне поєднання як традиційних, так і інформаційно-комунікаційних технологій.

10. У зв’язку зі з’ясуванням ролі самостійної роботи при вивченні зазначених тем особливо актуальним виявилося формування самоконтролю, використання різних форм традиційного контролю (контрольні, самостійні роботи, математичні диктанти) і модульно-рейтинговий контроль, індивідуалізація при проведенні контролю.

11. Проведений експеримент в різних профільних закладах, безпосередньо особисте навчання учнів у ліцеї при КПІ (м.Славутич), Чернігівському військовому ліцеї підтвердило ефективність розробленої методики і висунутої гіпотези.

Отже, в ході дослідження розв’язані всі поставлені завдання і мета досягнута. Перспективи подальшого дослідження даного напрямку, на наш погляд, можуть бути пов’язані з розв’язанням проблем формування професійної майстерності і підготовленості вчителя, студента педагогічного ВНЗ до навчання початкам теорії ймовірностей і вступу до статистики.

Список використаних джерел

1. Авдеева Н.Н. Развитие статистического мышления учащихся на факультативных занятиях в средней школе: Автореф. дис… канд. пед. наук: 13.00.02/ Моск. Гос. пед. ин- т. – М.: 1969. – 22с.
2. Акулов Г.В. Початки теорії ймовірності(11-й клас) //Математика. – 2000. - №10. - С.6 - 7.- №13. - С.3.
3. Алгебра: для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів / За ред. Ю.І. Мальованого. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2002. – 208с.
4. Алгебра 9: Підручник /Возняк Г.М., Литвиненко Г.М. -К.: Освіта, 2001. -208с.
5. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 11 кл. з поглибл. вивч. математики в серед. закл. освіти/ М.І. Шкіль, Т.В. Колесник, Т.М. Хмара. – К.: Освіта, 2001. – 311с.
6. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів/ М.І. Шкіль, З.І. Слєпкань, О.С. Дубинчук. – К.: Зодіак - ЕКО, 2002. – 384с.
7. Алгебра и математический анализ: Для 10 кл.: Учеб. пособие для учащихся школы и классов с углуб. изучением математики / Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, В.И. Шварцбурд. - М.: Просвещение, 1992. - 336с.
8. Алгебра и начала анализа для 10 класса общеобразовательных учреждений / Никольский С.М., Потапов М.К. и др. – М.: Просвещение, 2003. – 370с.
9. Алгебра и начала анализа: Учебное пособие для 9 класса / Под ред. А.Н.Колмогорова. – М.: Просвещение, 1977. -С. 22-37.
10. Алексеев П.В., Панин А.В. Философия: Учебник для ВУЗов. - М.: ТЕИС, 1996. – 504с.
11. Ананьев Б.Г. Психология чувственного познания. - М.: Изд-во АПН РСФСР, 1960. - 486 с.
12. Бабанский Ю.К. Оптимизация учебно-воспитательного процесса: Метод. основы. - М.: Просвещение, 1982. - 192с.
13. Баранов С. П. Сущность процесса обучения: Учеб. пособие для студ. пед. институтов. - М.: Просвещение, 1981. - 144с.

14. Бевз Г.П. Алгебра: Проб. підручник для 7-9 кл. серед. шк. – 3-тє вид. – К.: Освіта, 2001. – 303с.
15. Бевз Г.П. Методика викладання математики: Навч. Посібник для студ. фізико-мат. фак. ін-тів. – 3-те вид., перероб. і доп. – К.: Вища шк., 1989. – 367 с.
16. Блонский П.П. Избранные психологические произведения. - М.: Просвещение, 1964. - 547с.
17. Борисенко О.О., Середкіна О.В., Ужакіна Т.О. Алгебра і початки аналізу/ Розв’язання вправ до підручника М.І. Шкіля, З.І. Слєпкань, О.С. Дубинчук 10-11 кл. – Харків: Торсінг, 2000. – 432с.
18. Бочаров П.П., Печенкин А.В. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Гардарика, 1998. – 328с.
19. Бродский Я.С., Павлов О.Л. Ймовірність та статистика в школі. Науково-технічна конференція, Донецьк. 28-30 січня 1997 //У світі математики.- 1997. - Т.3, вип. 2.- С. 101-102.
20. Бродский Я., Павлов О. Про викладання елементів теорії ймовірності у школі //Математика. - 2000. - №23-24-вкладка.
21. Бродский Я., Павлов О. Про введення ймовірнісно-статистичної змістової лінії в шкільний курс математики // Математика в школі. - 2000. - №4.- С. 19-25.
22. Бродский Я.С., Павлов О.Л. Розвиток комбінаторного та ймовірнісно-статистичного мислення учнів початкової школи //Початкова освіта. - 2001. - №42.- С2-3. - №43. - С. 5.
23. Бугір М.К. Посібник з теорії ймовірностей та математичної статистики: Для студ. економіч. спец. вузів. – Тернопіль: Підручники і посібники, 1998. – 176с.
24. Бурда М.І. Принципи відбору змісту шкільної математичної освіти. // Педагогіка і психологія. - 1996.- №1. - С.4-9.
25. Бычкова Л.О. Формирование статистического мышления на уроках математики в 5-6 классах // Актуальные проблемы современной методики обучения предметам естественно-математического цикла. - М.: НИИ СиМО АПН СССР, 1990. - С.73-75.

26. Бычкова Л.О., Селютин В.Д. Об изучении вероятностей и статистики в школе // Математика в школе.- 1991.- №6. - С.9-12.
27. Ван дер Варден Б.Л. Математическая статистика: Пер. с нем. – М.: ИП, 1960. -434с.
28. Варга Т. Логика и теория вероятностей в младших классах средней школы // Математика. – М.: Педагогика, 1978. – Вып. 2. - С.112.
29. Варга Т. Блок-схемы, перфокарты, вероятности. - М.: Педагогика, 1978.-110с.
30. Варга Т. Плоскость и пространство. Деревья и графы. Комбинаторика и вероятность. – М.: Педагогика, 1978. - 111с.
31. Ващенко Л.І. Вивчаємо стохастику // Математика в школі.- 2001. - №6. - С.11-12.
32. Ващенко Л.І., Ядренко М.Й. Як вводити поняття випадкової події і поняття ймовірності в шкільному курсі математики // Зб. Методика викладання математики. - К.: Освіта, 1978. – Вип. 12. - С.79-87
33. Вейц В.Б. Элементы теории вероятностей и комбинаторики // Математика в школе. – 1968. - №6. – С.37.
34. Велиев В.В. Методика преподавания элементов теории вероятностей в курсе математики средней школы: Автореф. дис… канд. пед. наук: 13.00.02. – Баку, 1979.- 32с.
35. Велскер К.Р. Рассмотрение элементов теории вероятностей и математической статистики в школе и развитие статистического образа мышления: Автореф. дис… канд. пед. наук: 13.00.02. – Тарту, 1973. – 28с.
36. Вивальнок Л.М., Шефтель З.Г., Рафаловський Е.В. Математика: Посібник для факультатив. занять у 9 класі. – К.: Рад. школа, 1984.- 136с.
37. Вінчук Т. Про місце елементів математичної статистики в шкільних програмах з математики // Математика в школі.- 2003. - №4.- С.7-8.
38. Выготский Л.С. Избранные психологические исследования: Мышление и речь. Проблемы психол. развития ребенка. - М.: Изд-во АПН РСФСР, 1956. - 519 с.
39. Выготский Л.С. Собрание сочинений: В 6т. – М.: Педагогика, 1982. – Т.1. – 487с.
40. Гайштут О.Г., Хмара Т.М. Статистика в малюнках //Математика в школі.- 1999.- №1.- С.29-30.

41. Гайсинская И.М. Некоторые вопросы методики изучения теории вероятностей в школьном курсе математики: Автореф. дис… канд. пед. наук: 13.00.02. – Ташкент, 1972. - 27с.
42. Гальперин П.Я. Поэтапное формирование как метод психологического исследования // П.Я. Гальперин, А.В. Запорожец, А.Н. Карпова. Актуальные проблемы возрастной психологии. - М.: Педагогика, 1978. - С. 93-110.
43. Гальперин П.Я. Развитие исследований по формированию умственных действий // Психолоическая наука в СССР. - М.: Педагогика, 1959. –Т.1. - С.441-469.
44. Гальперин П.Я., Лернер Г.И., Шибаева Л.В. Формирование перецептивных образов и действий //Психологические исследования. - М.:Педагогика, 1976. – Вып. 6. - С. 56-62.
45. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. для мат. спец. ун-тов и техн. вузов. – К.: Вища школа, 1988. – 439с.
46. Глас Дж., Стэнли Дж. Статистические методы в педагогике и технологии. Пер. с англ. – М.; Просвещение, 1976. - 435с.
47. Глеман М., Варга Т. Вероятность в играх и развлечениях: Пособие для учителя. - М.: Просвещение, 1979. - 176с.
48. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей. – М.: Высш. шк., 1985. – 400с.
49. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов. - 4-е изд., доп. – М.: Высшая школа, 1972. – 368с.
50. Гнеденко Б.В. К вопросу о содержании факультатива по теории вероятностей // Математика в школе. – 1987. - №3.-С.12 - 130.
51. Гнеденко Б.В. О будущем прикладной математики // Международный ежегодник. Будущее науки. – М.: Просвещение, 1970. – Вып. №3 - С.82-102.
52. Гнеденко Б.В. О методах комбинаторики и теории вероятностей и математической статистике. // Математика в школе. - 1966. - №5. - С.11-18.

53. Гнеденко Б.В. О перспективах математического образования // Математика в школе.- 1965. - №6. – С.2-12.
54. Гнеденко Б.В. Статистическое мышление и школьный курс математики. // Новое в школьной математике. – М.: Знание, 1972. - С.165-181.
55. Гнеденко Б.В. Из истории науки о случайном: Из истории математических идей. - М.: Знание, 1981. - 64с.
56. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1983. – 420с.
57. Гнеденко Б.В. Математика и математическое образование в современном мире. - М.: Просвещение, 1985. - 192с.
58. Гнеденко Б.В., Журбенко И.Г. Теория вероятностей и комбинаторика. // Математика в школе. - 1968. - №2. - С.72-84. - №3. - С.30-50.
59. Гнеденко Б.В., Хинчин А.Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. – М.: Наука, 1976. - 167с.
60. Гнеденко Б.В. Формирование мировоззрения учащихся в процессе обучения математике. – М.: Просвещение, 1982. – 145 с.
61. Гончаренко С.У. Український педагогічний словник. – К.:, Либідь, 1997. – 376с.
62. Гончаров В.Л. Математика как учебный предмет. – М.: Изд. АПН РСФСР, 1958. – Вып. 92. - С.37-66.
63. Горбань С.Ф., Снижко Н.В. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие. – К.: МАУП, 1999. – 168с.
64. Горошко Ю.В. Вплив НІТ на практичну значимість результатів навчання математики в старших класах середньої школи: Автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02. – К.: 1993. – 24с.
65. Грабарь М.И., Краснянская К.А. Применение математической статистики в педагогических исследованиях. - М.: Педагогика, 1977. - 136с.
66. Грищенко В.О., Юхименко А.І. Теорія ймовірностей і математична статистика для економістів: Навч. посіб. – К.: Київський національний торг.-екон. ун-т., 2000. – 170с.
67. Гуревич В.Ю. Построение школьного курса теории вероятностей на основе преемственности с общеобразовательным курсом математики

//Преемственность в обучении математики: Пособие для учителей /Сост. А.М.Пышкало. -М.: Педагогика, 1978. – С.109-116.

68. Давыдов В.В. Проблемы развивающего обучения: Опыт теоретического и экспериментального исследования. - М.: Педагогика, 1986. - 240с.
69. Даданов З.С. Использование межпредметных связей в формировании статистических знаний у школьников: Дис... канд. пед. наук: 13.00.02. - Ташкент, 1986. - 166с.
70. Державна національна програма „Освіта” („Україна XXI століття”), Заходи щодо реалізації Державної національної програми „Освіта” („Україна XXI століття”): Затв. Постановою Кабінету Міністрів України від 03.11.93. № 896 // Освіта. – 1993. - №44-46.
71. Державний стандарт базової і повної середньої освіти. // Математика в школі. - 2004. - №2.- С.3-7.
72. Дидактика современной школы: Пособие для учителей / НИИ педагогики УССР / Под ред. В.А. Онищука. – К.: Рад. шк., 1987. – 350с.
73. Дидык Г.В. Содержание и формы углубленного изучения математики в старших классах: Дис… канд. пед. наук: 13.00.02 / НИИ Педагогики УССР. – К. 1989. - 175с.
74. Дограшвили А.Я. Формирование у учащихся умений и навыков решения комбинаторных и вероятностных задач при обучении математики в восьмилетней школе: Автореф. дис… канд. пед. наук. - Тбилиси, 1976. - 20с.
75. Дорофеев Г.В. Непрерывный курс математики в школе и проблемы преемственности // Математика в школе. - 1998. - №5. - С.10-27.
76. Дорофеев Г.В., Кузнецова Л.В., Суворова С.Б., Фирсов В.В. Дифференциация в обучении математике // Математика в школе. - 1990. - №4. -С.15-21.
77. Дремова І.А. Контроль знань учнів з алгебри в основній школі: Дис... канд. пед. наук: 13.00.02 / НПУ імені М.П. Драгоманова.. – К., 2003.-211с.
78. Дубинчук Е.С., Слепкань З.И. Преподавание математики в средних ПТУ: 2-й год обучения. – К.: Вища шк., 1988. – 135с.

79. Дядченко Г. , Мамхегов А., Шокуев В. Развитие логико-вероятностного мышления в школе: Математика. Еженедельное приложение к газете «Первое сентября» - 1994. - № 18. - С.1-6. - №19. - С.1-7.
80. Дядченко Г., Жарова Л. Развитие логико-вероятностного мышления в школе: Математика. Еженедельное приложение к газете «Первое сентября» - 1995. - №39. - С.1-2.
81. Евдокимова Г.С. Теория и практика обучения стохастике при подготовке преподавателей математики в университете: Автореф. дис... д-ра пед. наук: 13.00.02. - М., 2001. - 34с.
82. Еремеева М.В. Элементы теории вероятностей и ее приложения в средней школе: Автореф. дис… канд. пед. наук: 13.00.02. – М., 1966. - 16с.
83. Ефимочкина Е.П. К истории развития теории вероятностей в России в XIX веке: Автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02. - М:, 1953. - 24с.
84. Жалдак М.І., Горошко Ю.В. Комп’ютер і елементи стохастики у шкільному курсі математики // Комп’ютер у школі та сім’ї: - 1998. - №3, - С.16-20. - №4, - С.22-27.
85. Жалдак М.І., Михалін Г.О. Елементи стохастики у шкільному курсі математики // Математика в школі. -2000. - №1,2,3,4,6.- 2001. - №5. - С.30-34.
86. Жалдак М.І., Михалін Г.О. Деякі властивості ймовірнісних моделей стохастичних експериментів // Комп’ютерно- орієнтовані системи навчання: Зб. наукових праць. – К.: Комп’ютер у школі і сім’ї.- 2004.-Вип.3. - С.49-68.
87. Жалдак М.І., Кузьміна Н.М., Михалін Г.О. Теорія ймовірностей і математична статистика: Посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. – К.: , 2006. – 492с.
88. Жалдак М.І., Михалін Г.О. Елементи стохастики з комп‘ютерною підтримкою: Посібник для вчителів / Спеціальний випуск: Додаток до газети «Інформатика» № 29-30 (365-366), серпень 2006. – К.: Шкільний світ, 2006.- 119с.
89. Забранський В.Я. Дифференциация обучения математике учащихся 5-6 классов основной школы: Дис… канд. пед. наук: 13.00.02. – К., 1999. – 182с.

90. Завдання з математики для екзаменів за курс спеціалізованих фізико-математичних шкіл, ліцеїв і гімназій. – К.: Освіта, 1994. – 75 с.
91. Заключения и рекомендации международного симпозиума по вопросам преподавания математики // Математика в школе. – 1965. - №3. - С.70-74.
92. Задорожня Т., Красюк Ю. Можливості використання нових інформаційних технологій навчання при розв‘язуванні стохастичних задач //Математика в школі. - 2003. - №3. – С. 14-17.
93. Задорожня Т. Теорія ймовірностей у спадщині Михайла Остроградського // Математика в школі. - 2002. - №3. - С.29,44.
94. Закон України „Про освіту” // Освіта. – 1991. – 25 червня.
95. Ігнатенко М.Я. Методологічні та методичні основи активної навчально-пізнавальної діяльності учнів старших класів при вивченні математики: Дис… д-ра пед. наук: 13.00.02. - К., 1997. - 412с.
96. Ігнатенко М.Я., Соколенко Л.О. Реалізація прикладного спрямування шкільного курсу математики як засіб активізації навчально - пізнавальної активності учнів: Навч. посібник. –К.: ІЗМН, 1997.- 76с.
97. Істер О.С. Комбінаторика, біном Ньютона та теорія ймовірності у школі. – К.: ФАКТ, 1997. - 84с.
98. Кабанова-Меллер Е.Н. Формирование приемов умственной деятельности и умственное развитие учащихся // Формирование приемов создания представлений. - М.: Просвещение, 1968. - Гл. 3. - С.80-118.
99. Кабехова Л.М. Методика построения единого курса «Начала теории вероятностей с элементами комбинаторики для 9 класса средней школы»: Автореф. дис… канд. пед. наук: 13.0002. - Ленинград, 1971. - 21с.
100. Калмыкова З.И. Продуктивное мышление как основа обучаемости. – М.: Педагогика, 1981.- 200с.
101. Коваленко В.Г. та інш. Алгебра: Експериментальний навч. посібник для 9 кл. шкіл з поглиб. Вивченням математики і спец. шкіл ф.-мат. профіля. –К.: Освіта, 1996. -328с.

102. Коваленко В.Г., Следзінський І.Ф. Математична символіка: Посібник для самоосвіти вчителів. / За ред. І.Ф. Тесленка. – К.: Рад. шк., 1981. – 80 с.
103. Колмогоров А.Н. Больших чисел закон. // БСЭ. - 3-е изд. - М., 1970. – Т.3. - С.165-167.
104. Колмогоров А.Н. Введение в теорию вероятности и комбинаторику //Математика в школе. - 1968.- №2.- С.2-9.
105. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. - 2-е изд. – М.: Наука, 1974. - 119с.
106. Колмогоров А.Н., Журбенко У.Г. Введение в теорию вероятностей // Б-ка «Квант». – М.: Наука, 1982. – Вып.23. - 159с.
107. Коменский Я.А. Избранные педагогические сочинения: В 2 т. - М.: Педагогика, 1982.- Т.1. - 656с.
108. Коменець Г.Г. Психологічні передумови формування математичних дослідницьких здібностей старшокласників: Автореф. дис… канд. психол. наук: /Ін-т псих. - 2000. - 17с.
109. Концепція загальної середньої освіти як базової в єдиній системі неперервної освіти. – К.: МО України, 1992. – 177 с.
110. Костюк В.Н. Случайное, его определение и применение // Логика и эмпирическое познание. – М.: Наука, 1972. - 287с.
111. Костюк Г.С. Навчально-виховний процес і психічний розвиток особистості. – К.: Радянська школа, 1989. - 118с.
112. Кравец А.С. Природа вероятности: Филос. аспекты. - М.: Мысль, 1976. - 173с.
113. Краевский В.В. Содержание образования: вперед к прошлому. - М.: Педагогическое общество России, 2001. - 36с.
114. Крамер Х. Математические методы статистики: Пер. с англ. – М.: Мир, 1975. - 648с.
115. Крамер Х. Полвека с теорией вероятности: Наброски воспоминаний. Современные проблемы математики: Пер. с англ. – М.: Знание, 1979. - 60с.
116. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТА-ДАНА, 2000. – 543с.

117. Крутецкий В.А. Психология обучения и воспитания школьников: Книга для учителей и классных руководителей. - М.: Прсвещение, 1976. - 303с.

118. Кудратов Ж. Теория вероятностей и математическая статистика в курсе математики средней школы: Дис... канд. пед. наук: 13.00.02. - Ташкент, 1991. - 204с.

119. Купцов В.И. Лапласовский детерминизм и вероятность: Автореф. дис... д-ра филос. наук: 09.00.08. - М., 1974. - 33с.

120. Курындина К.Н. Формирование статистических представлений у учащихся в условиях взаимодействия школьных предметов: Автореф. дис... канд. пед. наук: 13.00.02. - М., 1980. - 24с.

121. Ларина И.Б. Профессиональная направленность курса стохастики в педвузе: Дис... канд. пед. наук: 13.00.02. - М., 1997. - 186с.

122. Леонтьев А.Н. Проблемы развития психики.- 2.-е изд., доп. - М.: Мысль, 1965. - 572с.

123. Лернер И.Я. Современная дидактика: теория – практика. – М.: 1994.-283с.

124. Лютикас В.С. Факультативный курс по математике. Теория вероятностей: Учеб. пособие дпя 9-11 кл. средней шк.– 3-е изд. перераб.-М.: Просвещение, 1990. - 160с.

125. Литвиненко Г.М., Возняк Г.М., Мальований Ю.І. Математика 6: Підручник. - Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2002. – 208с.

126. Майстров Л.Е. Развитие понятия вероятности. – М.: Наука, 1980. - 153с.

127. Майстров Л.Е. Теория вероятностей: Ист. очерк. - М.: Наука, 1967. - 320с.

128. Макарычев Ю.М, Миндюк Н.И. Алгебра: Элементы статистики и теории вероятностей: Учебное пособие для учащихся 5-9 классов общеобразовательных учреждений / Под ред. С.А. Теляковского. - М.:Просвещение, 2003.- 78с.

129. Маневич Д.В. Совершенствование содержания общего среднего образования на основе теории вероятностей и статистики: Дис. ...д-ра пед. наук: 13.00.02. -Ташкент, 1990. - 416с.

130. Мацько Н. Формування статистичних уявлень в учнів 1-6 класів // Математика в школі. - 1999.- №1.-С.27-28.

131. Менчинская Н.А. Взаимоотношение слова и образа в процессе усвоения знаний школьниками // Доклады на совещании по вопросам психологии.- М.Изд. АПН СССР, 1954. - С.13-24.

132. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Математика:Підручник для 5-го класу .- Х.: Гімназія, 2005. - 288с.

133. Мирошниченко Э.А. Постановка современного курса теории вероятностей в педагогических вузах. Автореф. дис… канд. пед. наук: 13.00.02. – М., 1974. – 25с.

134. Міхеєва О.Я., Гальперіна А.Р., Ковальов І.М. Алгебра і початки аналізу і розв'язання всіх задач, у тому числі підвищеної складності / До підручника М.І. Шкіля та ін. „Алгебра і початки аналізу. 10-11кл". – Харків: Веста, 2001. – 528с.

135. Михалін Г.О. Математичний кругозір учителя математики та його формування у процесі навчання математичного аналізу // Математика в школі. - 2004. - №3. – С.12-16.

136. Михалін Г.О., Слука О.В. Про викладання основних понять теорії ймовірностей у шкільному курсі математики //Компютерно-орієнтовані системи навчання. Зб. наукових праць. – К.: Комп'ютер у школі і сім'ї.- 2004р. - Вип.3. - С.167-173.

137. Мордкович А.Г., Семенов П.В. События. Вероятности. Статистическая обработка даннях: Доп. параграфы к курсу алгебры 7-9 кл. общеобразоват. учреждений. – М.: Мнемозина, 2003. – 112с.

138. Мостеллер Ф. Вероятность: Пер.с англ. В.В.Фирсова. – М.: Мир, 1969. - 431с.

139. Національна доктрина розвитку освіти України у ХХІ столітті: Проект // Освіта. - 2001. - №60-62, 24-31 жовтня.

140. Немов Р.С. Психология // Общие основы психологии: Учеб. для студ. высш. пед. уч. заведений: В 3 кн. - 3-е изд. - М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 1999. - Кн.1. - 688с.

141. Нічуговська Л. До вивчення елементів математичної статистики // Математика в школі. - 2001. - №6. – С.12-15.

142. Обучение и развитие: Экспериментально – педагогическое исследование / Под ред. Л.В. Занкова. – М.: Педагогика, 1975. – 440с.

143. Оконь В. Введение в общую дидактику. - М.:Высш. Школа, 1990. - С.360-361.

144. Орос В. Елементи теорії ймовірності і математичної статистики в загальноосвітній школі // Математика в школі. - 2001. - №6. – С.10-11.

145. Паламарчук В.Ф. Як виростити інтелектуала. - Тернопіль: Навчальна книга-Богдан, 2000. - 152с.

146. Пасхавер И.С. Закон больших чисел и статистические закономерности. - М.: Статистика, 1974. - 152с.

147. Пахомова Н.А. Вероятностное моделирование как фактор развития информационной культуры учащихся: Автореф. дис… канд. пед. наук: 13.00.02. – Екатеринбург, 2001. – 22с.

148. Перестюк М., Вишенський В. Роль комбінаторних задач у шкільному курсі математики // Математика в школі. - 1999.- №3. - С.16-18.

149. Петрук В.А. Игровые формы обучения теории вероятности и математической статистике во ВТУЗе: Дис… канд. пед. наук: 13.00.02 / НИИ педагогики УССР. –К., 1989. -147с.

150. Пиаже Ж. Избранные психологические труды. Психология интеллекта. Генезис числа у ребенка. Логика и психология: Пер. с франц. - М.: Просвещение, 1969. - 659с.

151. Пиаже Ж., Инельдер Б. Генезис элементарных логических структур: Классификации и сериации : Пер. с франц. - М.: Изд-во ин. лит., 1983. - 448с.

152. Пинский А.А., Шурыгина Л.С. О развитии статистического мышления школьников в курсе физики // Новые исследования в пед. науках. - 1978. - №1(31). - С.24-28.

153. Пичурин Л.Ф. Из опыта преподавания теории вероятности и математической статистики // Математика в школе. - 1968.- №5.- С.57-65.

154. Плоцкі А. Випадкова величина та гра як модель процесу прийняття рішення в умовах ризику // Математика в школі. - 2000.- №2.- С. 7-14.

155. Плоцки А. Вероятность в задачах для школьников: Кн. для учащихся. – М.: Просвещение, 1996. - 191с.

156. Плоцки А. Вероятность события в стохастической линии школьного математического образования // Математика в школе. - 1997. - №2. - С.24-28. №3. - С.67-70.

157. Плоцки А. Стохастика в школе как математика в стадии созидания и как новый элемент математического и общего образования: Дис... д-ра пед. наук в форме науч. докл.: 13.00.02. - С.-Петербург, 1992. - 52с.

158. Плоцки А. Стохастические задачи и прикладная направленность в обучении математики // Математика в школе. - 1991. - №3. - С.69-71.

159. Пойа Д. Как решать задачу: Пер. с англ. – М.: Учпедгиз, 1959. – 207 с.

160. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения: Пер. с англ. – 2-е изд., испр. – М.: Наука, 1975. – 463 с.

161. Пойа Д. Математическое открытие: Пер. с англ. – М.: Наука, 1976. – 448с.

162. Пиаже Ж. Фресс П. Экспериментальная психология: Пер. с франц. – М.: Прогресс, 1979. - 343с.

163. Преемственность в обучении математике: Сборник статей / Сост. А.М. Пышкало. – М.: Просвещение, 1978. - 239с.

164. Програма GRAN1 для вивчення математики в школі і вузі / Укладачі: М.І. Жалдак, Ю.В. Горошко. – К.: КДПУ, 1992. – 49с.

165. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5-11 класи. Затверджено Міністерством освіти і науки України (Лист Міністерства освіти і науки України №1/11-3580 від 22.08.2001р.)

166. Програма для класів з поглибленим вивченням математики, 8-11 класи (укл. М. Бурда, М. Жалдак, Т. Колесник, Т. Хмара, М. Ядренко). // Математика, 2001, №37(145). – 48с.

167. Процай В.Ф., Новикова І.В. Комбінаторика й теорія ймовірності у школі. - Харків: Каравела, 1997. - 96 с.

168. Реньї А. Заради чого необхідно викладати теорію ймовірностей // Математика в школі. - 1998.- №1.- С.31-32.

169. Реньи А. Трилогия о математике: Пер. с венгер. – М.: Мир, 1980. - 376с.

170. Рогановский Н.М. Методика преподавания математики в средней школе: Учеб.пособие для пед.ин-тов. – Минск: Вышэйш. шк., 1990. – 266с.

171. Ромбе И.А. Об опыте преподавания теории вероятности в средних школах // Математика и естествознание – М.: Просвещение, 1970. – С.195-210.

172. Рубинштейн С.Л. Проблемы общей психологии. - 2-е изд. - М.: Педагогика, 1976. - 416с.

173. Самигуллина З.Г. К методике решения простейших комбинаторных задач: Автореф. дис… канд. пед. наук: 13.00.02. – Челябинск, 1970. - 21с.

174. Самовол П.І. Методична система роботи із здібними учнями та обдарованими з математики учнями в середній школі: Дис… канд. пед. наук: 13.00.02 / УДПУ ім. М.П. Драгоманова – К., 1995. - 221с.

175. Самсонова С.А. Повышение эффективности профессиональной подготовки учителя математики в педвузе на основе использования стохастики: Автореф. дис… канд. пед. наук: 13.00.02. – М., 1997. – 15с.

176. Сачков В.Н. Введение в вероятностный мир. - М.: Наука, 1971. - 207с.

177. Сачков В.Н. Вероятностная революция в науке: Вероятность, случайность, независимость, иерархия. - М.: Научный мир, 1999. - 144с.

178. Сергеевичев В.Н. Некоторые вопросы психологии формирования обобщенных представлений: Учен. зап. - Иваново:. гос. пед. ин-т, 1957. - Т. 14. - С.80-96.

179. Селютін В.Д. Методическое формирование готовности учителя математики к обучению школьников стохастике: Автореф. дис... д-ра пед. наук: 13.00.02. – М., 2002. - 32с.

180. Сікорський П.І. Модульно – рейтингова система навчання у ліцеї // Педагогіка і психологія. - 1997. - №1. - С.31.

181. Скороход А.В. Особливий характер теорії ймовірності в математичних науках // У світі математики. - 1997. - Т.3. - Випуск 2. - С.2-4.

182. Слєпкань З.І., Грохопольська А.В., Волянська О.Б. Збірник задач з алгебри і початків аналізу. Навчальний посібник для учнів 10-11 класів

загальноосвітніх навчальних закладів. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2003. – 240с.

183. Слепкань З.И. Методика преподавания алгебры и начал анализа. – К.: Рад. шк., 1978. – 224 с.

184. Слєпкань З.І. Методика навчання математики. Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512с.

185. Слепкань З.И. Психолого-педагогические основы обучения математике: Метод. пособие. – К.: Рад. шк., 1983. – 193 с.

186. Слєпкань З.І., Соколовська І.С. Методика вивчення елементів комбінаторики. Початків теорії ймовірностей і вступ до статистики: Посібник для вчителів / Спеціальний випуск: Додаток до газети «Математика» № 29-30 (281-282), серпень 2004. – К.: Шкільний світ, 2005.- 112с.

187. Слєпкань З.І. Ще раз про диференціацію навчання математики і роль в ній освітнього стандарту // Математика в школі. - 2002. - №2.- С.29-30.

188. Соколенко Л.О. Збірник прикладних задач з алгебри і початків аналізу 10-11 кл.: Навч.-метод. посібник для вчителів і учнів 10-11 кл. середньої школи, ліцеїв та гімназій фізико-математичного спрямування. – К.: Тираж, 1997. – 127с.

189. Соколенко Л.О. Методика реалізації прикладної спрямованості шкільної алгебри і початків аналізу: Дис… канд. пед. наук: 13.00.02 /НПУ ім. М.П. Драгоманова. –К., 1997. - 245с.

190. Соколовська І.С. Реалізація міжпредметних зв’язків в процесі формування поняття простору елементів подій // Математика - 2002. - №34. - С.4-5.

191. Соколовська І.С. Така нова стара проблема /Елементи теорії ймовірностей в школі // Математика в школі. - 1998.- №1.- С.32-35.

192. Степенко Г.В. Пути модернизации школьного математического образования Японии: Дис... канд. пед. наук: 13.00.02. - К., 1975. - 199с.

193. Степенно Г.В. О преподавании теории вероятностей и математической статистики в школах Японии. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1974. - 23с.

194. Столин В.В. Проблемы порождения образа // Психологические исследования. - 1976. - Вып.- 3. - С.62-65.

195. Сухомлинський В.А. Об умственном воспитании / Сост. М.И. Мухин. – К.: Рад. школа, 1983. - 206с.

196. Талызина Н.Ф. Управление процессом усвоения знаний: Психологические основы. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. - 345с.

197. Тарнопольський В.Г., Васильченко В.Г. Елементи теорії ймовірностей. – К.: Рад. школа, 1992.- 163с.

198. Теплов Б.М. Представления // Психология / Под ред. К.Н. Корнилова, А.А. Смирнова, Б.М. Теплова. - М.: Изд. АПН ССР, 1948. - С.141-157.

199. Трунова О.В. З досвіду викладання теми „Повторні незалежні випробування” // Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції „Проблеми вищої педагогічної освіти у світі рішень II Всеукраїнського з’їзду працівників освіти і виступу президента Л.Д. Кучми”. / Укл. П.В. Дмитренко, П.П. Макаренко, О.П. Симоненко. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2003.- Ч. 4. - С.121-127.

200. Трунова О.В. Методика структурування і вивчення теоретичного матеріалу з початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в умовах диференціації навчання: Эвристическое обучение математике // Тезисы докладов международной конференции (15-17 ноября 2005г.). – Донецк: ДонНУ, 2005.- С.276-277.

201. Трунова О.В. Про введення елементів стохастики в програму середньої школи // Матеріали Всеукраїнської конференції „Актуальні проблеми вивчення природничо-математичних дисциплін у загальноосвітніх навчальних закладах України”. – К.: Такі справи, 1999. – С.101-102.

202. Трунова О.В. Про доцільність введення елементів стохастики в програму середньої школи // Вісник ЧДПУ імені Т.Г. Шевченка. Серія: педагогічні науки: Збірник. – Чернігів: ЧДПУ, 2001. №4. – С.161-164.

203. Трунова О.В. Прикладні задачі теорії ймовірностей та математичної статистики в сільському господарстві // Матеріали VIII-ої Міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука (11-14 травня 2000р., Київ). - К.: НТУУ (КПІ), 2000. - С.549.

204. Трунова О.В. Про вивчення початків теорії ймовірностей та елементів статистики в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики // Матеріали IX-ої Міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука (16-19 травня 2002р., Київ). - К.: НТУУ (КПІ), 2002. – С.562.

205. Трунова О.В. Про навчання початкам теорії ймовірностей і елементам статистики в ліцеях та класах з поглибленим вивченням математики. Матеріали Х-ої Міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука (13-15 травня 2004р., Київ). – К.: НТУУ (КПІ), 2004. – Ч.4. - С.743.

206. Трунова О.В. Про вивчення початків теорії ймовірностей та елементів статистики в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики // Математика в школі. - 2005. - №2. - С.40-47.

207. Трунова О.В. Методика структурування і вивчення теоретичного матеріалу з початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в умовах диференціації навчання // Дидактика математики: проблеми і дослідження. Міжнародний збірник наукових робіт. – Донецк: ТЕАН, 2000.-Вип. 3(13). – С.60-66.

208. Трунова О.В. Система задач з початків теорії ймовірностей і вступу до статистики // Дидактика математики: проблеми і дослідження. Міжнародний збірник наукових робіт. – Донецк: ДонНУ, 2006.-Вип. 26. – С.96-104.

209. Трунова О.В. Початки теорії ймовірностей і вступу до статистики: Учбовий посібник для ліцеїв і класів з поглибленим вивченням математики. – Чернігів: ЧДІЕІУ, 2006.-140с.

210. Турецкий Е., Цейтлин Н. Семиклассникам о вероятности // Квант. - 1977.- №5.- С.38-43.

211. Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа: Метод. рек. и дидакт. Материалы: Пособие для учителя / М.Л. Галицкий, М.М. Мошкович, С.И. Шварцбурд. – М.: Просвещение, 1986. – 349с.

212. Урок математики в школі / За ред. Г.П. Бевза. – К.: Рад. шк., 1977. – 158 с.

213. Ушинський К.Д. Вибрані твори. – К.: Рад. школа, 1949. - 418с.

214. Федорова В.Н. Межпредметные связи естественно-математических дисциплин. – М.: Просвещение, 1980. - 205с.

215. Фіцула М.М. Педагогіка: Навчальний посібник для студентів вищих педагогічних закладів освіти. – К.: Видавничий центр „Академія”, 2002. – 528с.

216. Фирсов В.В. Некоторые проблемы обучения теории вероятностей как прикладной дисциплине: Автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02. - М., 1974. - 27с.

217. Фирсов В.В. и др. Состояние и перспективы факультативных занятий по математике: Пособие для учителей. –М.: Просвещение, 1977. - 180с.

218. Фролов П.С. Теория вероятностей как учебный предмет средней школы. - С.Пб., 1913.

219. Фройденталь Г. Математика как педагогическая задача: В 2 ч.: Пер. с нем. – М.: Просвещение, 1982-1983. – Ч.1. – 208 с.; Ч.2. – 204 с.

220. Фридман Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе. – М.: Педагогика, 1983. – 160 с.

221. Хінчин О.Я., Яглом А.М. Перше знайомство з теорією ймовірності // Математична хрестоматія. - К.: Освіта, 1968.- С.183-199.

222. Хмара Т. М. Створюємо особистісно орієнтовану систему навчання математики // Математика в школі. - 2001. - №5. - С.4.

223. Чашечнікова О.С. Розвиток математичних здібностей учнів в основній школі: Дис... канд. пед. наук: 13.00.02 / Інститут педагогіки АПН України. – К., 1997. – 208с.

224. Чашечнікова О. Тематичне оцінювання. Тема: „Початки теорії ймовірностей” (Алгебра і початки аналізу, 11 кл.) // Математика в школі. – 2003. - №4. – С.19-27.

225. Чертков Й.Я., Юрлова Н.О. Елементи теорії ймовірності у середній школі // Зб. Нове у викладанні математики. -К.Рад. школа, 1972. – С.55-70.

226. Шихова А.П. Обучение комбинаторике и ее приложениям в средней школе: Автореф. дис… канд. пед. наук: 13.00.02. – М., 1978. -20с.

227. Швец В.А. Реализация функций тематического контроля результатов обучения учащихся математике в старших классах средней школы: Дис… канд. пед. наук: 13.00.02 / КГПИ им. А.М. Горького. – К., 1998. – 224с.
228. Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубинчук О.С. Алгебра і початки аналізу: Навч. посібник (для учнів середніх ПТУ). – К.: Вища шк., 1992. – 479 с.
229. Шониа В.В. Идея множества и вероятности в курсе математики средней школы: Автореф. дис… канд. пед. наук: 13.00.02. – Тбилиси, 1967. - 15с.
230. Шунда Н.М. Збірник задач з алгебри для 7-8 класів для загальноосвітніх закладів, шкіл (класів) з поглибленим вивченням математики. - К.: Освіта, 1999. - 192с.
231. Шуригына Л.С. Развитие статистических представлений школьников при изучении молекулярной, атомной и ядерной физики: Автореф. дис... канд. пед. наук: 13.00.02. - М., 1980. - 21с.
232. Якиляшек В. Розвиток комбінаторних уявлень у учнів 5-6 класів // Математика в школі. - 1999.- №3.- С.18-21.
233. Якиляшек В. Інтегративний підхід до формування імовірнісно-статистичних понять // Педагогіка і психологія. - 1998.- №2. - С.69-78.
234. Якиляшек В., Олексів О. Розвиток логіко-ймовірнісного мислення учнів(5-й клас) // Математика. - 2002.- №18. – С.1-2.
235. Якиманская И.С. Развивающее обучение. – М.: Педагогика, 1979. – 144с.
236. Янченко Г., Кравчук В. Математика: Підручник для 5-го класу.- Тернопіль:Підручники і посібники, 2005. - 280с.
237. Яценко С.Є. Організація навчально-виховного процесу на уроках математики в класах з поглибленим вивченням предмета основної школи: Дис… канд. пед. наук: 13.00.02 /НДПУ ім. М.П. Драгоманова – К., 1999. -216с.
238. Engel A. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik: Band 1. – Stuttgart: Ernst Klett verlag, 1980. - 242p.
239. Green D.R. Children`s understanding randomness. Ln: R. Davidson and T. Swift /eds./: Proccedings of the second international conference on teaching

statistics // Victoria, British Columbia, 11-16 Angust 1986. – Victoria, B.C.: University of Victoria. - P.15-16.

240. Mosteller F., Rource R., Thomas G.B. Probability with statistical applications. Reading (Mass.), 1966.-135p.

241. Mosteller T. What has happened to probability in the higher school // Mathematics Teacher. - 1967. – P.12 - 15.

242. Plocki A. Propedeutika rachunku prawdopodobienstwa i statystyki matematycznej dla nauczycieli. - Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 1992.-213p.

243. Renyi A. Remarks on the teaching of probability // Proceeding of the I CSMP Conference. - P.105 - 106.

244. Fischbein E. The intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children. – Dordrecht: Reidel, 1975.-145p.

245. http://altair.geci.cn.ua/~vega/

Додаток А

Зміст навчання стохастики в ліцеях різних профілів

Ліцеї і класи економічного профілю. Початки теорії ймовірностей. Поняття випадкового експерименту та простору елементарних подій. Події як підмножини простору елементарних подій. Відбування події. Вірогідні та неможливі події. Порівняння подій. Операції над подіями. Основні властивості подій. Поняття статистичної ймовірності, як міри сподівання певного результату експерименту. Основні властивості статистичної ймовірності. Поняття ймовірності та її зв’язок з довжиною, площею, об’ємом, масою. Скінченний простір елементарних подій і класичний спосіб обчислення ймовірностей. Геометричні ймовірності. Умовні ймовірності, незалежні події. Ймовірність добутку випадкових подій, формула повної ймовірності і формула Байєса. Ймовірність суми випадкових подій. Поняття випадкової величини. Функція розподілу імовірностей випадкової величини та її властивості. Дискретні і неперервні випадкові величини. Щільність розподілу імовірностей випадкової величини і її властивості. Числові характеристики випадкової величини: математичне сподівання, дисперсія і середньоквадратичне відхилення (ризик) їх властивості.. Закон великих чисел: теореми Чебишова і Бернуллі. Вступ до статистики. Предмет і метод статистики. Подія, генеральна сукупність та вибірка. Статистична імовірність події – частота. Полігон, гістограма. Поняття про кількісний аналіз економічного ризику.

Ліцеї і школи з технічним і природничо-науковим профілем. Початки теорії ймовірностей. Поняття випадкового експерименту та простору елементарних подій. Події як підмножини простору елементарних подій. Відбування події. Вірогідні та неможливі події. Порівняння подій. Операції над подіями. Основні властивості подій. Поняття статистичної ймовірності, як міри сподівання певного результату експерименту. Основні властивості статистичної ймовірності. Поняття ймовірності та її зв’язок з довжиною, площею, об’ємом, масою. Скінченний простір елементарних подій і класичний спосіб обчислення ймовірностей. Геометричні ймовірності. Умовні ймовірності, незалежні події.

Ймовірність добутку випадкових подій, формула повної ймовірності і формула Байєса. Ймовірність суми випадкових подій. Формула Бернуллі. Біномний розподіл. Описове означення випадкової величини, функція і щільність розподілу імовірностей випадкової величини, їх найпростіші властивості. Математичне сподівання, дисперсія і середнє квадратичне відхилення випадкової величини. Деякі розподіли випадкових величин: рівномірний, показниковий, нормальний. Їх числові характеристики. Закон великих чисел у формі Бернуллі і у формі Чебишова. Вступ до статистики. Предмет і метод статистики. Подія, генеральна сукупність та вибірка. Статистична імовірність події – частота. Полігон, гістограма.

Ліцеї військового профілю. Початки теорії ймовірностей. Поняття випадкового експерименту та простору елементарних подій. Події як підмножини простору елементарних подій. Відбування події. Вірогідні та неможливі події. Порівняння подій. Операції над подіями. Основні властивості подій. Поняття статистичної ймовірності як міри сподівання певного результату експерименту. Основні властивості статистичної ймовірності. Поняття ймовірності та її зв’язок з довжиною, площею, об’ємом, масою. Скінченний простір елементарних подій і класичний спосіб обчислення ймовірностей. Геометричні ймовірності. Умовні ймовірності, незалежні події. Ймовірність добутку випадкових подій, формула повної ймовірності і формула Байєса. Ймовірність суми випадкових подій. Схема Бернуллі як математична модель повторних незалежних випробувань. Формально математичне означення випадкової величини. Функція розподілу імовірностей випадкової величини і її властивості. Дискретні і неперервні випадкові величини. Щільність розподілу імовірностей випадкової величини і її властивості. Числові характеристики випадкової величини: математичне сподівання, дисперсія і середньоквадратичне відхилення їх властивості. Закон великих чисел: теореми Чебишова і Бернуллі. Вступ до статистики. Предмет і метод статистики. Подія, генеральна сукупність та вибірка. Статистична імовірність події – частота. Полігон, гістограма.

Додаток Б

Вимоги до засвоєння імовірнісно-статистичного матеріалу

- **мати уявлення про:** стохастичний експеримент, елементарну подію, простір елементарних подій [дискретний і неперервний]$_{Д2,Д3}$, випадкову подію як деяку підмножину множини елементарних подій, порівняння подій, неможливу і вірогідну події, несумісні, [попарно-несумісні]$_{Д3}$ події, статистичну ймовірність та ймовірність, умовні статистичні ймовірності, незалежні події, можливість передбачення усередненого результату великої серії випробувань, [закон великих чисел]$_{Д2,Д3}$, [теорема Бернуллі, нормальний розподіл ймовірностей]$_{Д3}$, випадкову величину, її математичне сподівання, дисперсію, [середнє квадратичне відхилення]$_{Д2,Д3}$, [функцію та щільність розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини] $_{Д3}$;
- **знати:** означення суми, добутку, різниці двох подій, протилежної події, основні властивості статистичних ймовірностей, правила обчислення статистичної ймовірності суми та добутку кількох подій, [теореми про ймовірність суми і добутку]$_{Д2,Д3}$ [(з доведенням)]$_{Д3}$, формулу повної ймовірності [(з доведенням)]$_{Д3}$, [формулу Байєса]$_{Д2,Д3}$ [(з доведенням)]$_{Д3}$, [формулу Бернуллі, означення і властивості математичного сподівання випадкової величини]$_{Д2,Д3}$, [дисперсії і середнього квадратичного відхилення]$_{Д3}$;

уміти: давати геометричну інтерпретацію операцій над подіями (за аналогією з операціями над множинами). Будувати імовірнісні моделі випадкових явищ і обчислювати статистичні ймовірності випадкових подій. Застосовувати правила обчислення ймовірностей суми та добутку кількох подій, [умовну імовірність]$_{Д3}$, формулу повної ймовірності і [формулу Байєса]$_{Д2,Д3}$ до розв'язування простих задач. [Обчислювати статистичні ймовірності для повторних незалежних випробувань. Знаходити числові характеристики розподілів ймовірностей на множині значень випадкових величин: математичне сподівання]$_{Д2,Д3}$, [дисперсію, середнє квадратичне відхилення]$_{Д3}$.

Додаток В

Анкета для вчителів

1. Скільки годин і в якому класі виділено на вивчення початків теорії ймовірностей і вступу до статистики у вашому учбовому закладі?
2. Які теми вивчають у змістовій лінії (структура курсу)? Які з них викликають ускладнення?
3. Чи є факультативний курс з початків теорії ймовірностей і вступу до статистики у вашому учбовому закладі?
4. Якими підручниками, посібниками або іншою літературою користуєтесь при навчанні початкам теорії ймовірностей і вступу до статистики?
5. Чи вважаєте ви доцільним вивчення даної змістової лінії?
6. Які теми ви включили б (виключили) до змістової лінії?
7. Чи доцільно виділяти теорію ймовірностей в окремий предмет?
8. Чи потрібний новий навчальний посібник для вчителів з початків теорії ймовірностей і вступу до статистики?
9. Чи використовуєте прикладні задачі при закріпленні тем з початків теорії ймовірностей і вступу до статистики?
10. Як реалізуються міжпредметні зв’язки?
11. Чи проводите індивідуальну роботу з обдарованими учнями з зазначеної теми?
12. В якому році ви закінчили ВУЗ? Чи вивчали в ВУЗі теорію ймовірностей і математичну статистику (скільки семестрів, якщо вивчали)?
13. Чи вивчались на курсах підвищення кваліфікації теми з початків теорії ймовірностей і вступу до статистики?
14. Чи була пов’язана із стохастикою ваша викладацька діяльність до введення початків теорії ймовірностей і вступу до статистики у програму загальноосвітньої школи?

Додаток Е

Індивідуальні завданні з теми теореми про ймовірності суми і добутку подій

1. Два клієнти зайшли до магазину. Імовірність того, що перший клієнт зробить покупку дорівнює p_1, другий - p_2. Знайти ймовірність того, що зроблять покупку : а^0) обидва клієнти; б^0) тільки один клієнт; в*) хоча б один; г^0) жоден із клієнтів не зробить покупку. (табл. 2.1)
2. Три клієнти звернулися до кредитного відділу банку . Імовірність того, що перший клієнт одержить кредит дорівнює p_1, другий – p_2, третій – p_3. Знайти ймовірності таких подій:
   1) кредит одержать: а^0) один клієнт; б^0) два клієнти; в^0) три клієнти; г**) не менше двох клієнтів; д**) не більше двох клієнтів; е*) хоча б один клієнт.
   2) ^{0} жоден із клієнтів не одержить кредиту (табл. 2.3.1).

Таблиця 2.3.1

№В	p_1	p_2	p_3	**№В**	p_1	p_2	p_3
1	0,1	0,2	0,3	**14**	0,2	0,6	0,7
2	0,4	0,5	0,6	**15**	0,2	0,7	0,6
3	0,7	0,8	0,9	**16**	0,2	0,8	0,3
4	0,1	0,3	0,2	**17**	0,2	0,9	0,4
5	0,1	0,4	0,3	**18**	0,2	0,3	0,5
6	0,1	0,5	0,4	**19**	0,2	0,2	0,6
7	0,1	0,6	0,5	**20**	0,2	0,1	0,7
8	0,1	0,7	0,6	**21**	0,4	0,8	0,3

9	0,1	0,8	0,7	**22**	0,5	0,8	0,1
10	0,1	0,9	0,8	**23**	0,6	0,8	0,4
11	0,1	0,2	0,9	**24**	0,7	0,8	0,1
12	0,2	0,4	0,9	**25**	0,8	0,3	0,2
13	0,2	0,5	0,8				

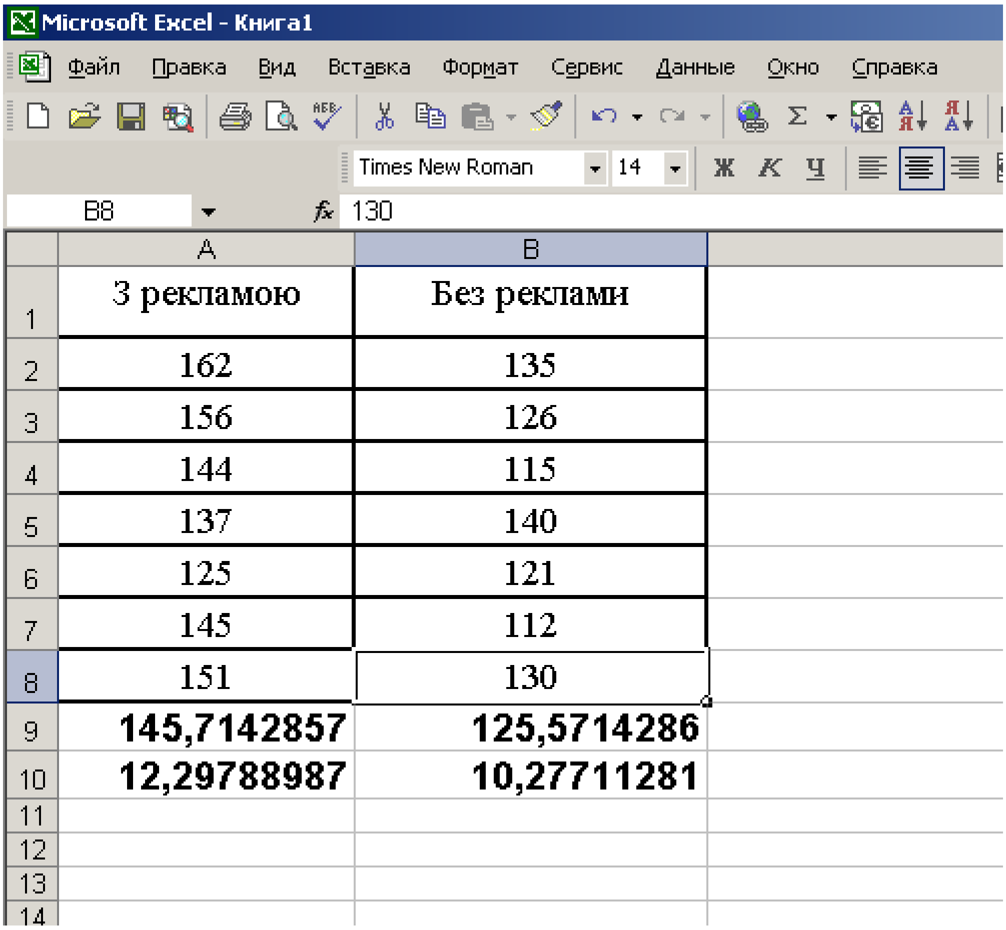
Додаток Ж

Індивідуальні завдання підвищеного рівня з теми теореми про імовірності суми і добутку подій

1. ** Підприємець вирішив вкласти свої кошти порівну у два контракти, кожен з яких принесе прибуток у розмірі 100% з імовірністю 0,8. Яка ймовірність того, що по припиненню контрактів підприємець у крайньому випадку нічого не втратить?
2. ** Імовірність обслуговування клієнта одним службовцем у банку дорівнює 0.6. Яке мінімальне число операторів повинно працювати у банку, щоб ймовірність обслуговування клієнта була не менше 0.95?
3. ** У мікроавтобусі їде 8 пасажирів. На черговій зупинці кожен з них може вийти з автобуса з імовірністю $p = 0.4$, до того ж з такою ж імовірністю на його місце зайде новий пасажир крім цього, в автобус з імовірністю $p_0 = 0.6$ не ввійде жоден новий з пасажирів. Знайти ймовірність того, що коли автобус знову почне рухатись до наступної зупинки, у ньому буде 8 пасажирів.
4. ** Три дослідники незалежно один від одного проводять вимірювання деякої фізичної величини. Ймовірність того, що перший дослідник зробить помилку при знятті показань приладу, дорівнює 0.1. Для другого та третього дослідників такі ймовірності відповідно дорівнюють 0.15 та 0.2. Знайти ймовірність того, що при одному вимірюванні хоча б один з дослідників припустить помилку.

Додаток 3

Розв’язання задачі за допомогою Microsoft Excel



	A	B
1	З рекламою	Без реклами
2	162	135
3	156	126
4	144	115
5	137	140
6	125	121
7	145	112
8	151	130
9	145,7142857	125,5714286
10	12,29788987	10,27711281
11		
12		
13		
14		

Додаток К.1

Математичний диктант № 1

(час виконання – до 15 хв.)

I варіант

1. ^{0} Подія називається неможливою, якщо ... Навести приклад. Обґрунтувати.
2. ^{0} Статистична ймовірність вірогідної події дорівнює ...
3. ^{0} Події A і B називаються несумісними, якщо ... Навести приклад.
4. * Події A і B незалежні. $P(A)=0.5$, $P(B)=0.7$. Знайти $P(AB)$.
5. ^{0} Події A і B несумісні. Ймовірність суми цих подій дорівнює ...
6. * Ймовірність події B дорівнює 0,3. Знайти ймовірність подій, що протилежна події B.
7. * Чи є події A і B незалежними, якщо $\mathrm{P(AB)}=0{,}3$, $P(A)=0.5$ $\mathrm{P(B)}=0.6$

II варіант

1. ^{0} Подія називається вірогідною, якщо ... Навести приклад. Обґрунтувати.
2. ^{0} Ймовірність неможливої події дорівнює ...
3. ^{0} Події A і B називаються протилежними, якщо ... Навести приклад. Обґрунтувати.
4. * Події A і B несумісні. $P(A)=0.4$, $P(B)=0.3$. Знайти $P(A+B)$.
5. ^{0} Події A і B незалежні. Ймовірність добутку цих подій дорівнює ...
6. * Ймовірність події, що протилежна події A, дорівнює 0,6. Знайти ймовірність подій A.

Оцінювання виконання математичного диктанту № 1.

№ завдання	1	2	3	4	5	6	7	Разом
Бали	1,5	1,5	1,5	2	1,5	2	2	12

Математичний диктант № 2

(час виконання – до 20 хв.)

I варіант

1. ^{0} A і B протилежні події. Чи може ймовірність події A дорівнювати 0,2, а ймовірність події B дорівнювати 0,9? Відповідь пояснити.
2. ^{0} Попарно несумісні події A_1, A_2, A_3, A_4 утворюють повну групу подій. Пояснити, що це означає. Навести приклад.
3. * Попарно несумісні події A, B, C утворюють повну групу подій. Ймовірність події A дорівнює 0,8, ймовірність події B дорівнює 0,1. Знайти ймовірність події протилежної до події C.
4. ^{0} Записати формулу Байєса і умови її використання. Довести формулу.
5. * Два заводи випускають однакові деталі. Перший завод випускає в середньому 80% деталей високої якості, другий – 90%. До замовника надійшло 60 деталей, виготовлених на першому і 40 деталей, виготовлених на другому заводі. Яка ймовірність того, що навмання вибрана деталь буде високої якості?

II варіант

1. ^{0} A і B – дві протилежні події. Чи може ймовірність події A дорівнювати 0,3, а ймовірність події B дорівнювати 0,65? Відповідь пояснити.
2. ^{0} Попарно несумісні події B_1, B_2, B_3 утворюють повну групу подій. Пояснити, що це означає. Навести приклад.
3. * Чи можуть утворювати повну групу подій попарно несумісні події A, B, C, якщо ймовірність події A дорівнює 0,2; ймовірність події B дорівнює 0,6; ймовірність події протилежної до події C дорівнює 0,8.
4. ^{0} Записати формулу повної ймовірності і умови її використання. Довести формулу.
5. * Два заводи випускають однакові добрива. Перший завод випускає в середньому 80% добрив високої якості, другий – 60%. До магазину надійшло

80% добрив, виготовлених на першому заводі і 20% добрив, виготовлених на другому заводі. Яка ймовірність того, що навмання вибраний мішок з добривом буде виготовлений на другому заводі?

Оцінювання виконання математичного диктанту № 2.

№ завдання	1	2	3	4	5	Разом
Бали	2	2	3	2	3	12

Математичний диктант № 3

(час виконання – до 20 хв.)

1. ^{0} Записати формулу Бернуллі. Пояснити позначення.
2. * Ймовірність певної події дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що у 3 незалежних випробуваннях подія відбудеться 2 рази.
3. * Пояснити поняття „неперервна випадкова величина”. Навести приклад.
4. ^{0} Записати формулу знаходження математичного сподівання дискретної випадкової величини.
5. ^{0} Задано закон розподілу дискретної випадкової величини. Знайти p_2.

x	3	7	11
p	0,2	p_2	0,3

Таблиці можуть бути подані на дошці або на кодопозитиві.

II варіант

1. ^{0} Записати основну властивість біномної формули. Пояснити її.
2. * Ймовірність певної події дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що у 4 незалежних випробуваннях подія відбудеться 1 раз.
3. * Пояснити поняття „дискретна випадкова величина”. Навести приклади.
4. ^{0} Записати формулу знаходження дисперсії дискретної випадкової величини.
5. ^{0} Задано закон розподілу дискретної випадкової величини. Знайти p_3.

x	4	6	8
p	0,4	0,4	p_3

Оцінювання виконання математичного диктанту № 3.

№ завдання	1	2	3	4	5	Разом
Бали	2	3	3	2,5	2,5	12

Додаток К.2

Самостійна робота №1

(час виконання – 25 хв.)

I варіант

1. Підкидають два гральних кубики. Яка ймовірність того, що випаде число очок :

   1.1.^{0} сума яких менше 5;

   1.2.* добуток яких менше 5;

   1.3.* добуток яких кратний 5.

2. У класі 18 хлопців і 12 дівчат. Знайти ймовірність того, що:

   2.1.^{0} навмання вибраний із списку класу учень – хлопець;

   2.2.* серед двох навмання вибраних зі списку учнів один – хлопець, а другий – дівчина;

   2.3.* серед двох навмання вибраних зі списку учнів принаймні один хлопець.

3. Ймовірність того, що в певний час до зупинки підійде автобус №12 дорівнює 0,9, що підійде автобус №9 – 0,8. Знайти ймовірність того, що:

   3.1.^{0} до зупинки під'їдуть обидва;

   3.2.* до зупинки не під'їде жоден з автобусів;

   3.3.* до зупинки під'їде принаймні один автобус.

II варіант

1. Підкидають два гральних кубики. Яка ймовірність того, що випаде число очок

   1.1.^{0} сума яких менше 6;

   1.2.* добуток яких менше 6;

   1.3.* добуток яких кратний 6.

2. З 26 контрольних робіт учнів класу 12 не містять жодної помилки. Знайти ймовірність того, що:
   2.1.^{0} навмання вибрана робота не містить жодної помилки;
   2.2.* з двох навмання вибраних робіт тільки одна не містить жодної помилки;
   2.3.* з двох навмання вибраних робіт принаймні одна не містить жодної помилки.
3. Ймовірність отримати кредит фірмі А дорівнює 0,7, а фірмі В - 0,6. Знайти ймовірність того, що фірми:
   3.1.^{0} обидві отримають кредит;
   3.2.* жодна з фірм не отримає кредит;
   3.3.* принаймні одна фірма отримає кредит.

Оцінювання самостійної роботи № 1.

№ завдання	1.1	1.2	1.3	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2	3.3	Разом
Бали	1	1	2	1	1	2	1	1	2	12

Самостійна робота №2

(час виконання – до 20 хв.)

І варіант

1. В ящику 8 синіх, 16 жовтих та 6 червоних кульок. Виймають одну за одною дві кульки.
   1.1.^{0} Яка ймовірність того, що обидва рази витягли сині кульки, якщо, вийнявши першу кульку, її повернули до ящика?
   1.2.* Яка ймовірність того, що обидва рази витягли сині кульки, якщо, вийнявши першу кульку, її не повернули до ящика?
   1.3.* Яка ймовірність того, що обидві кульки одного кольору, якщо,

вийнявши першу кульку, її не повернули до ящика?

2. Кількість вантажних автомашин, що прямують по шосе, на якому міститься бензоколонка відноситься до кількості легкових автомобілів, що їдуть по тому ж шосе, як 3:2. Ймовірність того, що буде заправлятися вантажна машина дорівнює 0,1; для легкової автомашини ця ймовірність дорівнює 0,2. Яка ймовірність того, що:

   2.1.* машина під’їхала до бензоколонки для заправки;

   2.2.* вона виявиться вантажною.

II варіант

1. У дитячому подарунку 7 шоколадних цукерок, 6 карамелей і 7 льодяників.

   1.1.^{0} Яка ймовірність того, що обидва рази витягли карамельки, якщо, вийнявши першу цукерку, її повернули до подарунку?

   1.2.* Яка ймовірність того, що обидва рази витягли карамельки, якщо, вийнявши першу цукерку, її не повернули до подарунку?

   1.3.* Яка ймовірність того, що обидві цукерки одного виду, якщо, вийнявши першу, її не повернули до подарунку?

2. У команді КВК 70% одинадцятикласників і 30% десятикласників. Серед одинадцятикласників 10% дівчат, а серед десятикласників – 5% дівчат. Всі дівчата, як правило, запізнюються на репетиції. Яка ймовірність того, що

   2.1.* дівчата запізняться на репетицію;

   2.2.* запізняться саме десятикласниці.

Норма виконання самостійної роботи № 2.

№ завдання	1.1	1.2	1.3	2.1	2.2	Разом
Бали	1,5	1,5	3	3	3	12

Самостійна робота №3

(час виконання – до 25 хв.)

I варіант

1. Чотирьом хворим призначили препарат *А*. Ймовірність того, що препарат викличе алергічну реакцію у пацієнта дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що:

   1.1.^{0} тільки у 3 хворих препарат не викличе алергічної реакції;

   1.2.* препарат не викликав алергічну реакцію менше ніж у трьох хворих;

   1.3.** препарат не викликав алергічну реакцію не менше ніж у трьох хворих.

2. За вихід у чвертьфінал з футболу на кубок УЄФА беруть участь 16 команд, з яких 4 вийдуть у півфінал. Навмання вибираються 3 команди. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості команд, які вийдуть у півфінал з вибраних та знайти:

   2.1.^{0} Mo;

   2.2.* $M(X)$;

   2.3.* $Д(X)$;

   2.4.^{0} $\sigma(X)$.

II варіант

1. Борошно на заводі фасується автоматично по 2 кг. Ймовірність того, що в пакунку 2 кг, дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що:

   1.1.^{0} маса двох з 3 перевірених пакетів відповідає нормі;

   1.2.* маса не менше двох з 3 перевірених пакетів відповідає нормі;

   1.3.* маса не більше двох з 3 перевірених пакетів відповідає нормі.

2. Проводиться турнір з мініфутболу між командами 9-11, класів в якому бере участь 7 команд, серед яких є 3 команди фаворити. Навмання вибираються 2 команди. Скласти закон розподілу числа команд, які можуть зайняти перші місця серед відібраних та знайти:

2.1.^{0} *Mo*;

2.2.* *M(X)*;

2.3.* *Д(X)*;

2.4.^{0} *σ(X)*.

Оцінювання самостійної роботи № 3.

№ завдання	1.1	1.2	1.3	2.1	2.2	2.3	2.4	Разом
Бали	1	2	3	1	2	2	1	12

Додаток Н

Анкета для учнів

1. Чи відрізнялося вивчення початків теорії ймовірностей і вступу до статистики від вивчення інших змістових ліній курсу?
2. Чи викликало труднощі засвоєння теоретичного матеріалу?
3. Яка тема (лекція) виявилася на ваш погляд найбільш цікавою? Чому?
4. Який з видів контролю засвоєння теоретичних знань вам здається більш дієвим (математичний диктант, самостійна робота, тестування)?
5. Чи допомагали при розв'язанні задач наведені у посібнику правила-орієнтири, схеми?
6. Чи допомагав у засвоєнні матеріалу методичний посібник з початків теорії ймовірностей і вступу до статистики, чи не був він зайвим?
7. Чи є ефективним, на ваш погляд, використання індивідуальних завдань різних рівнів?
8. Чи відчували ви перевантаження при виконанні індивідуальних завдань?
9. На ваш погляд, чи потрібно вивчати початки теорії ймовірностей і вступу до статистики в школі?
10. Чи відчутним був зв'язок з іншими розділами математики при вивченні початків теорії ймовірностей і вступу до статистики?

Додаток К.3

Тест №1

(час проведення – до 20 хв.)

1. [0] Які з наведених наборів чисел задають ймовірності елементарних подій у $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$?

   а) $\left\{\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

   б) $\left\{\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{1}{2}\right\}$

   в) $\left\{\frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{10}\right\}$

   г) $\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right\}$

2. [0] Дослід полягає у виборі навмання одного числа з набору 2, 3, 4, 5, 6, 7. Яка з наведених подій є подією А, що складається з простих чисел даного набору.

   а) {2,3}

   б) {2,3,4}

   в) {7}

   г) {2,3,5,7}

   д) {2,3,7}

3. [*] З 20 учнів класу обирають навмання трьох делегатів на конференцію. Чи є усіма випадками цього досліду:

   а) розміщення з 20 по 3

   б) перестановки з 3

   в) впорядковані вибірки з 20 по 3 з поверненням г) невпорядковані вибірки з 20 по 3 без повернення

д) сполучення з 20 по 3

4. ** Знайти число всіх випадків попереднього досліду.

а) $\dfrac{20!}{3!\cdot 17!}$

б) $20\cdot 19\cdot 18$

в) 3^{20}

г) $3!$

д) $\dfrac{20\cdot 19\cdot 18}{1\cdot 2\cdot 3}$

5. ** З карток з цифрами 0,1,2,3,4 навмання вибирають три. Скількома способами можна утворити трьохзначне число, кратне 5?

а) 3^5

б) $3!$

в) $1\cdot 4\cdot 3$

г) $1\cdot 5\cdot 4$

д) 5^3

6. * По мішені здійснюють три постріли. Нехай подія A_i = {при і-му пострілі відбудеться влучення}, i=1,2,3. Як виразити через A_1, A_2, A_3 подію B = {жодного разу не влучили у ціль}?

а) $A_1 + A_2 + A_3$

б) $\overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{A_3}$

в) $\overline{A_1}\cdot \overline{A_2}\cdot \overline{A_3}$

г) $\overline{A_1} + \overline{A_2} + A_3$

д) $\overline{A_1} + \overline{A_2}\cdot \overline{A_3}$

Оцінювання тесту № 1.

№ завдання	1	2	3	4	5	6	Разом
Бали	1	1	2	3	3	2	12

Тест №2

(час проведення – до 20 хв.)

1. [0] Яка з наданих таблиць є законом розподілу випадкової величини?

а)

x_i	0	1	10	13
p_i	0.1	0.5	0.1	0.3

б)

x_i	1	2	3	4
p_i	0.1	0.2	0.2	0.3

в)

x_i	1	2	3	4
p_i	0.1	0.2	0.4	0.2

г)

x_i	-3	-2	-1	4
p_i	0.1	0.2	0.3	0.4

2. [*] Випадкова величина X розподілена за законом

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

.

Чи вірно, що?

а) $P(x \le 3) = 0.3$

б) $P(2 \le x \le 5) = 0.8$

3. [*] Чотири рази підкидається гральна кістка. Яка ймовірність того, що 6 очків випаде точно 3 рази?

а) $C_4^3 \left(\frac{1}{6}\right)^4$

б) $C_4^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6}$

в) $C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{6}$

г) $C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^4$

4. [0] Які з наданих рівностей мають місце:

а) $M(3X-2)=3M(X)$

б) $M(3X-2)=3M(X)-2$

в) $M(3X-2)=3M(X)+2$

5. [**] Кожна з наведених величин Х і У набуває значення 1,2,3. Які значення набуває Х+У?

а) 0

б) 2,3,4,5,6

в) -2,-1,0,2

г) 0,1,2

6. [**] Яка з наведених нерівностей вірна:

а) $D(X)\le M(X^2)$

б) $D(X)\ge M(X^2)$

в) $D(X)< M(X^2)$

г) $D(X)> M(X^2)$

Оцінювання тесту № 2.

№ завдання	1	2	3	4	5	6	Разом
Бали	1	2	2	1	3	3	12

Додаток Л

Тематична контрольна робота

(час виконання – до 45 хв.)

I варіант

1. У партії з 50 виробів 10 бракованих. Для вибіркового контролю відібрано 5 виробів. Яка ймовірність того, що серед відібраних бракованими виявляться:

   1.1.^{0} всі вироби;

   1.2.^{0} два вироби;

   1.3.** принаймні один виріб.

2. * У коло вписано квадрат. Яка ймовірність того, що точка, яка кинута у круг, опиниться у квадраті, якщо будь-яке її положення вважати рівно можливим.

3. Стрілець виконав три постріли по мішені. Імовірності влучення при першому, другому і третьому пострілах відповідно дорівнюють: 0,4; 0,5 і 0,7. Яка ймовірність того, що за результатами цих пострілів виявиться:

   3.1.^{0} тільки одне влучення в мішень;

   3.2.^{0} жодного влучення в мішень;

   3.3.** принаймні одне влучення в мішень.

4. Пасажир для придбання квитка може звернутися до однієї з чотирьох кас. Відповідні ймовірності дорівнюють: 0,2; 0,3; 0,4; 0,1. Ймовірність того, що у момент звертання пасажира в касі буде квиток, відповідно дорівнюють: 0,6; 0,3; 0,8; 0,5. Пасажир звернувся до однієї з кас і купив квиток. Яка ймовірність того, що:

   4.1.* квиток пасажир придбав;

   4.2. * придбав він його у першій касі.

II варіант

1. З 20 питань до письмового заліку учень не вивчив 4. На заліку вчитель пропонує учням по два запитання. Яка ймовірність того, що з трьох запитань, що вчитель задасть учню виявиться:

   1.1.^{0} учень вивчив всі;

   1.2.^{0} тільки два питання він вивчив, а одне не вивчив;

   1.3.** принаймні одне питання він вивчив.

2. * Знайти ймовірність того, що навмання поставлена в квадрат точка опиниться у середині вписаного в цей квадрат кола, якщо будь-яке її положення в квадраті вважати рівноможливим.

3. Менеджер шукає потрібну йому інформацію за трьома адресами в системі Internet. Ймовірності того, що інформація буде знаходитися за першою, другою, третьою адресами, відповідно дорівнюють: 0,6; 0,7; 0,8. Знайти ймовірність того, що інформація є:

   3.1.^{0} тільки за однією адресою;

   3.2.^{0} не менше ніж за однією;

   3.3.** принаймні за однією адресою.

4. Відомо, що 5% всіх чоловіків і 2% усіх жінок – дальтоніки. Вважають, що чоловіків і жінок приблизно однакова кількість. Яка ймовірність того, що:

   4.1.^{0} випадково обрана особа страждає дальтонізмом;

   4.2.^{0} ця особа - чоловік.

Норми оцінювання тематичної залікової роботи № 1.

№ завдання	1а	1б	1в	2	3а	3б	3в	4а	4б	Разом
Бали	1	1	3	2	1	1	3	2	2	≤ 12

Тематична контрольна робота №2

(час виконання – до 45 хв.)

I варіант

1. Ймовірність того, що зразок бетону витримає нормативне навантаження дорівнює 0,9. Яка ймовірність того, що з 7 зразків витримають випробування:

   1.1.^{0} всі зразки;

   1.2.^{0} 5 зразків;

   1.3.* не менше 5 зразків.

2. Задано закон розподілу дискретної випадкової величини

x	-4	-3	3	4	9
p	0.2	p_2	0.3	0.1	0.1

   . Знайти:

   2.1.^{0} p_2;

   2.2.^{0} Mo

   2.3.* $M(X)$;

   2.4.* $Д(X)$;

   2.5.^{0} $\sigma(X)$.

3. ** Круглу мішень встановлено так, що вона може обертатися навколо свого центра. Мішень поділено на 6 рівних пронумерованих секторів. За влучення в кожний з секторів гравець може отримати кількість грошей, що відповідає номеру сектора (1-й сектор - 1 гривню, 2-й сектор – 2 гривні і т. д.). При достатньо великий швидкості обертання стрілок не в змозі розрізнити цифри, тому він стріляє навмання. Записати закон розподілу дискретної випадкової величини. Знайти математичне сподівання $M(X)$;дисперсію $Д(X)$;середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$. Чи вигідно грати, якщо за можливість здійснити один постріл необхідно заплатити 5 грн.?

II варіант

1. У магазин увійшли вісім покупців. Яка ймовірність того, що:

   1.1.^{0} всі зроблять покупку;

1.2.^{0} троє зроблять покупку;

1.3.* не більше трьох зроблять покупку.

2. Задано закон розподілу дискретної випадкової величини

x	-3	-2	1	3	7
p	p_1	0.2	0.4	0.1	0.1

. Знайти:

2.1.^{0} p_1;

2.2.^{0} Mo

2.3.* $M(X)$;

2.4.* $Д(X)$;

2.5.^{0} $\sigma(X)$.

3. ** Круглу мішень встановлено так, що вона може обертатися навколо свого центра. Мішень поділено на 8 рівних пронумерованих секторів. За влучення в кожний з секторів гравець може отримати кількість грошей, що відповідає номеру сектора (1-й сектор - 1 гривню, 2-й сектор – 2 гривні і т. д.). При достатньо великий швидкості обертання стрілок не в змозі розрізнити цифри, тому він стріляє навмання. Записати закон розподілу дискретної випадкової величини. Знайти математичне сподівання $M(X)$;дисперсію $Д(X)$;середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$. Чи вигідно грати, якщо за можливість здійснити один постріл необхідно заплатити 6 грн.?

Норми оцінювання тематичної залікової роботи № 2.

№ завдання	1.1	1.2	1.3	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	3	Разом
Бали	1	1	2	1	1	2	2	2	3	≤ 12