

Я. В. Гончаренко,
Український державний університет
імені Михайла Драгоманова,
Київ, Україна,
ya.v.honcharenko@udu.edu.ua
О. С. Сушко-Крикун,
Український державний університет
імені Михайла Драгоманова,
Київ, Україна,
o.s.sushko@udu.edu.ua

СТАТИСТИЧНІ ТА ЕКОНОМЕТРИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ ТРИВАЛОСТІ МАЙБУТНЬОГО ЖИТТЯ В АКТУАРНІЙ МАТЕМАТИЦІ

Однією з важливих проблем, яка розглядається в актуарній математиці є математичне моделювання ймовірнісних характеристик угод страхування життя. При цьому, оскільки страхування життя є індивідуальним видом страхування, в якості моделі розглядається особа віком x , для якої визначається випадкова величина T – тривалість майбутнього життя. Через функцію розподілу $F_T(t) = P\{T < t\}$, $t \geq 0$, визначають основні ймовірнісні величини, які використовуються для розрахунку теперішньої вартості різних типів угод страхування, страхових ставок, нетто- та бруто-премій [1,2].

При вивченні даної теми студентам пропонуються задачі, в яких в явному вигляді задано вираз функції розподілу тривалості майбутнього життя або іншої величини, за допомогою якої можна відновити вираз $F_T(t)$ [2,3]. Методологічною проблемою такого підходу є те, що в практиці актуарних розрахунків неможливо отримати аналітичне задання функції розподілу тривалості майбутнього життя особи. Певним аналогом такої функції можуть бути статистичні таблиці тривалості життя [3], але вони описують закономірності отримані на основі аналізу достатньо великої вибірки (як правило не меншої 100000 осіб). Тому питання: а звідки береться вираз функції, заданий в умові задачі? Як правило залишається без відповіді.

Щоб сформувати у студентів вміння використовувати знання з актуарної математики та інших математичних дисциплін, при вивченні даного курсу магістрантами освітньої програми «Фінансова та актуарна математика» ми пропонуємо включати в програму питання, присвячені методам моделювання неперервних функцій, які найкращим, в певному розумінні, чином наближатимуть статистичні дані.

З цією метою при вивченні теми «Сила смертності» ми пропонуємо розглядати деякі відомі моделі, а також будувати власні на основі заданих умов.

Зазначимо, що існуючі моделі стосуються не самої функції розподілу тривалості майбутнього життя, а пов'язаного з нею показника – сили смертності особи віком x :

$$\mu_{x+t} = \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}, \quad \text{де } f_T(t) = F_T'(t), \quad t \geq 0.$$

Вивчення даної теми пропонуємо у наступній послідовності.

1 етап. Введення означення сили смертності, роз'яснення її змісту для актуарних розрахунків.

2 етап. Розв'язування в загальному вигляді оберненої задачі: за виразом μ_{x+t} знайти вираз $F_T(t)$, яка зводиться до розв'язання диференціального рівняння першого порядку. Цю задачу пропонуємо студентам розв'язати самостійно.

Отриманий загальний розв'язок задачі $F_T(t) = 1 - e^{-\int \mu_{x+t} dt}$ міститиме довільну константу C . Щоб знайти частинний розв'язок студентам потрібно буде пригадати властивості

функції розподілу і самостійно скласти початкову умову, за допомогою якої знайти шукане значення C .

3 етап. Вивчення деяких відомих моделей сили смертності та їх властивостей. Ми пропонуємо розглядати наступні моделі:

1) *Модель де Муавра:*

$$\mu_{x+t} = \frac{1}{w-x-t}, \quad 0 \leq t \leq w-x, \quad w - \text{максимальний вік.}$$

2) *Модель Гопмерца:*

$$\mu_{x+t} = \alpha\beta^{x+t}, \quad \alpha > 0, \quad \beta \geq 1.$$

3) *Модель Мейкхема:*

$$\mu_{x+t} = \alpha\beta^{x+t} + \gamma, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 1, \quad \gamma > 0.$$

4) *Модель Вейбулла:*

$$\mu_{x+t} = \alpha(x+t)^\beta, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

Для кожної з запропонованих моделей ставимо ряд проблемних завдань:

- знайти аналітичний вираз функції розподілу тривалості майбутнього життя;
- дослідити властивості μ_{x+t} та отриманої функції розподілу (наприклад, встановити, що розподіл, заданий моделлю де Муавра є рівномірним, тощо), а також встановити як змінюються властивості при різних значення параметрів;
- знайти основні числові характеристики отриманих розподілів (очікувану тривалість майбутнього життя та дисперсію).

4 етап. Розв'язання практичних завдань, які передбачають моделювання функції розподілу тривалості майбутнього життя.

Наведемо приклад такого завдання.

За статистичними даними, які характеризують кількість осіб певного віку (задається в умові задачі), які прожили ще t років, змодельовати функцію сили смертності $\mu_{x+t}(t)$, знайти функцію розподілу тривалості майбутнього життя, обчислити очікувану тривалість майбутнього життя для особи даного віку.

Статистичні дані подаються у вигляді таблиці, подібної до статистичних таблиць тривалості життя (див. таблицю 1).

Таблиця 1

Дані для моделювання функції $\mu_{x+t}(t)$

t	0	1	...	$w-x$
l_t	l_0	l_1	...	l_{w-x}

Така постановка задачі наближена до реальних актуарних розрахунків.

На першому етапі моделювання студентам необхідно буде визначити величину, яка відіграватиме роль статистичної оцінки значення функції $\mu_{x+t}(t)$ в даній точці. Тому природно саме в контексті такого завдання ввести поняття очікуваної смертності особи віком x років: $m_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$.

В результаті студенти мають отримати табличне задання функції, де кожному значенню t , $t = 1, 2, \dots, w-x$, поставлено у відповідність значення m_{x+t} .

Після цього задача зводиться до економетричної задачі наближення статистичних даних деякою неперервною функцією.

При цьому для розпізнавання типу моделі, яку можна використати для задання $\mu_{x+t}(t)$, студентам стануть у нагоді результати дослідження властивостей моделей та уявлення про вид їх графіків. Також необхідно буде актуалізувати знання про методи побудови нелінійних рівнянь регресії, насамперед метод зведення до лінійної моделі з подальшим застосуванням методу найменших квадратів, а також метод трьох точок, який доцільно застосувати до трипараметричної моделі Мейкхема.

Для самостійної роботи та виконання проектів з даної теми ми пропонуємо наступні завдання:

- зібрати статистичні дані, що характеризують кількість населення окремого регіону України (ці дані можна знайти на офіційному сайту Держкомстат України);
- побудувати регіональну статистичну таблицю тривалості життя;
- змодельовати функцію сили смертності для осіб різного віку даного регіону;
- знайти функцію розподілу тривалості майбутнього життя;
- знайти основні числові (та деякі ймовірнісні) характеристики розподілу.

У підсумку зазначимо, що на нашу думку застосування запропонованого підходу до вивчення окремих тем актуарної математики дозволяє вирішувати ряд дидактичних задач:

5) розширити уявлення про математичні моделі та їх застосування, сформувані у студентів навички практичних актуарних розрахунків;

6) активізувати пізнавальну діяльність, залучаючи студентів до пошукової та дослідницької діяльності;

7) поглибити знання та вміння опрацьовувати статистичні дані, використовуючи при цьому сучасні програмні засоби та технології;

8) сформувані у майбутніх актуаріїв аналітичні та дослідницькі навички, вміння розв'язувати складні практичні завдання, обґрунтовувати вибір методу розв'язання, інтерпретувати отримані результати, формулювати висновки, презентувати результати дослідницької роботи.

Література

1. Актуарні розрахунки: навчальний посібник / О. В. Козьменко, О. В. Кузьменко. – Суми : Університетська книга, 2014. – 224 с.

2. Математичні моделі страхової математики: навч. посіб. / С. В. Антонюк, І. В. Малик, В. К. Ясинський; Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича. – Чернівці: Рута, 2011. – 203 с.

3. Оленко А.Я. Збірник задач з актуарної математики. – К., ВПЦ «Київський університет», 2005. URL: <http://probability.univ.kiev.ua/userfiles/yamnenko/Book8.pdf>

Гончаренко Я.В., Сушко-Крикун О.С. Статистичні та економетричні методи моделювання функції розподілу тривалості майбутнього життя в актуарній математиці

Анотація. Описано методику застосування статистичних та економетричних методів моделювання функції сили смертності та функції розподілу тривалості майбутнього життя в курсі актуарної математики. Обґрунтовано переваги та можливості запропонованого підходу.

Ключові слова: актуарна математика, страхування життя, функція розподілу тривалості майбутнього життя.

Goncharenko Ya.V., Sushko-Krykun O.S. Statistical and econometric methods of modeling the distribution function of future life expectancy in actuarial mathematics

Abstract. The method of applying statistical and econometric methods of modeling the function of mortality force and the function of the distribution of the length of future life in the course of actuarial mathematics is described. The advantages and possibilities of the proposed recommendations are substantiated.

Keywords: actuarial mathematics, life insurance, future life expectancy distribution function.