НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ М.П. ДРАГОМАНОВА

На правах рукопису

МАХОМЕТА Тетяна Миколаївна

УДК 514.12(07)(043.3)

МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ЛІНІЙ І ПОВЕРХОНЬ У КУРСІ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ В ПЕДАГОГІЧНИХ УНІВЕРСИТЕТАХ

13.00.02 – теорія та методика навчання (математика)

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата педагогічних наук

Науковий керівник –
доктор фізико-математичних наук, професор
ПРАЦЬОВИТИЙ Микола Вікторович

Київ – 2014

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ ТА УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

ВНЗ	Вищий навчальний заклад
ВЗ	Виховна загальнонаукова
ВФ	Виховна фахова
ГМТ	Геометричне місце точок
ДЗ	Дидактична загальнонаукова
ДФ	Дидактична фахова
ЕГ	Експериментальна група
ЗОШ	Загальноосвітня школа
ІКТ	Інформаційно-комунікаційні технології
ІКТН	Інформаційно-комунікаційні технології навчання
ІНДЗ	Індивідуальне навчально-дослідне завдання
КГ	Контрольна група
НПУ	Національний педагогічний університет
ПДПУ	Полтавський державний педагогічний університет
ППЗ	Педагогічний програмний засіб
ППЗН	Педагогічний програмний засіб навчання
РЗ	Розвивальна загальнонаукова
РФ	Розвивальна фахова
УДПУ	Уманський державний педагогічний університет
ШКМ	Шкільний курс математики

ВСТУП

Дисертаційна робота присвячена проблемі системного вивчення студентами напряму підготовки Математика* ліній і поверхонь у курсі аналітичної геометрії в сучасних умовах підготовки вчителів математики.

Актуальність дослідження. Докорінні зміни в соціально-економічному і духовному житті українського суспільства, модернізація в системі загальної середньої та вищої освіти потребують підготовки вчителя нової генерації. Як зазначається в Концептуальних засадах розвитку педагогічної освіти України та її інтеграції в європейський освітній простір [98], метою розвитку педагогічної освіти є створення такої її системи, яка на основі національних надбань світового значення та усталених європейських традицій забезпечує формування педагогічних працівників, здатних здійснювати професійну діяльність на демократичних та гуманістичних засадах, реалізовувати освітню політику як пріоритетну функцію держави, що спрямовується на розвиток та самореалізацію особистості, задоволення її освітніх і духовно-культурних потреб, а також необхідність бути конкурентоспроможними на ринку праці.

Процес підготовки майбутніх учителів розпочинається на першому курсі, триває під час навчання у педагогічному університеті та упродовж усього життя. Важливу роль у цьому процесі відіграють математичні дисципліни, зокрема аналітична геометрія.

Оволодіння дисциплінами математичного циклу майбутніми фахівцями полягає в забезпеченні свідомого та міцного засвоєння системою математичних знань і умінь, потрібних у майбутній професійній діяльності, для вивчення інших дисциплін, продовження освіти. Це співвідноситься з положеннями у педагогічній психології, де під оволодінням поняттям, теоретичним фактом, звичайно, розуміється знання суттєвих властивостей цього поняття, доцільності застосування того або іншого методу, а також уміння застосувати знання при розв’язанні конкретних задач.

Аналітична геометрія – одна з дисциплін геометричного циклу у системі підготовки сучасного вчителя математики та науковця-дослідника в умовах педагогічного університету. Її основною метою є оволодіння студентами методом координат для повноформатного використання його при дослідженні геометричних фігур та геометричних відношень, зокрема відображень та перетворень простору. Цілісне уявлення про метод координат і його можливості неможливо сформувати на основі лише прямокутної декартової системи координат. Тому у курсі аналітичної геометрії виправданим, закономірним і дидактично вмотивованим є вивчення різних систем координат (афінних, полярних, барицентричних, полярно-сферичних та полярно-циліндричних).

Навчальна дисципліна «Аналітична геометрія» містить кілька змістових ліній:

- вектори;
- метод координат;
- плоскі лінії;
- геометричні перетворення (площини та простору);
- лінії та поверхні в просторі.

Аналітична геометрія закладає основу для формування нових абстрактних понять і відношень, які геометрично ідеалізують навколишню дійсність. Вона сприяє методологічній цілісності різних математичних дисциплін навчального плану підготовки вчителя математики, тісноті міжпредметрих зв’язків, коректності введення нового математичного апарату. Все це стає базою для подальшого поглибленого вивчення геометрії як науки і розуміння її елементів як складової навчального предмета в школі.

Плоскі лінії і лінії та поверхні в просторі – дві змістові лінії курсу, які є методологічно нерозривними і породжують спільні проблеми у теорії та методиці навчання (аналітичної геометрії). Питання якісного викладання та вивчення ліній і поверхонь є не простим. Існують об’єктивні труднощі методологічного характеру, непростою є задача інтенсифікації процесу навчання, нетривіальною є проблема формування цілісного уявлення про чисті геометричні форми і аналітичні умови, що їх задають тощо. Все це на фоні сучасних об’єктивних передумов процесу навчання формує проблему наявності ефективної методики навчання аналітичної геометрії у розрізі вивчення ліній та поверхонь Зазначимо, що в шкільному курсі геометрії учні знайомляться лише з деякими лініями (пряма, коло, ламана, графіки функції) і поверхні тіл (кулі, циліндри, піраміди, конус).

Сьогодні говорять про лінії в розумінні Декарта, Жордана, Кантора, Пеано тощо. В різних розділах геометрії послуговуються фактично різними означеннями, розглядаючи певні класи ліній та поверхонь. В аналітичній (координатній) геометрії обмежуються розглядом ліній у розумінні Р. Декарта: плоска лінія — це геометричне місце точок площини (ГМТ), координати (x, y) яких в деякій афінній системі координат задовольняють рівняння $F(x, y) = 0$, де $F(x, y)$ — математичний вираз, що містить змінні x та y. Це, взагалі кажучи, не коректне означення, яке в певній мірі є задовільним для того кола об'єктів, які вивчаються майбутніми вчителями математики у курсі аналітичної геометрії.

Такий стан речей спричинює низку проблем стосовно вивчення першокурсниками ліній і поверхонь:

- *методологічні проблеми* – теоретична база не дозволяє дати суто наукове, внутрішньо геометричне означення лінії та поверхні, оскільки воно вимагає використання топологічних понять;
- *методичні проблеми* виникають через несформованість у першокурсників умінь визначати суто геометричні властивості ліній та поверхонь і свідомо оперувати ними;
- *психологічні проблеми* – вивчення загальної теорії алгебраїчних ліній і поверхонь другого порядку вимагає від студентів мисленнєвої діяльності на високому рівні абстрактності, без залучення геометричної інтерпретації;
- *організаційні проблеми* стосуються суттєвого зменшення годин на вивчення аналітичної геометрії загалом і ліній та поверхонь зокрема.

Пераховані вище аспекти вказують на актуальність і своєчасність загальної *п р о б л е м и* побудови ефективної методики навчання ліній і поверхонь в курсі аналітичної геометрії для студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів.

Розв'язанню зазначеної проблеми в сучасних умовах функціонування вищої педагогічної освіти присвячене дане дисертаційне дослідження.

На сучасному етапі розвитку методичної науки окремі аспекти навчання студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів висвітлені в роботах відомих математиків, педагогів і методистів: І. А. Акуленко[106], В. Г. Бевз [16], М. І. Жалдака [74], А. І. Кузьмінського [107], Г. О. Михаліна [157], Н. В. Морзе [163], В. Г. Моторіної [164], М. В. Працьовитого [191], Л.Л. Панченко [175], С. А. Ракова [202], О. І. Скафи

[220], З. І. Слєпкань [224], О. В. Співаковського [230], Н. А. Тарасенкової [106], Ю. В. Триуса [241], В. О. Швеця [256], М. І. Шкіля [260] та інших.

Теоретичні та практичні засади використання сучасних засобів навчання у процесі підготовки майбутніх учителів математики розглядалися у роботах Ю. В. Горошка [51], М. І. Жалдака [72], В. І. Клочка [89], Т. Г. Крамаренко [102], Н. В. Морзе [163], Ю.С. Рамського [204], С. А. Ракова [203], О. І. Скафи [221], Є.М. Смирнової –Трибульської [228], О. В. Співаковського [230], Ю.В. Триуса [241] та інших.

Різні методичні шляхи та прийоми вивчення ліній і поверхонь знайшли відображення у підручниках, навчальних посібниках та збірниках задач із курсу аналітичної геометрії, серед яких слід відзначити визнані праці: В.П. Білоусової та ін. «Аналітична геометрія» [24], П.С. Александрова "Лекции по аналитической геометрии" [2], В.П. Єрмакова [69], підручники з аналітичної геометрії Л.С. Атанасяна , В.Т. Базилєва [9], О.В. Погорєлова [184], О.А. Борисенка [27] та інших.

Проблему навчання аналітичної геометрії у педагогічному університеті в кандидатських дисертаціях досліджували:

1. О. М. Коломієць [92] «Диференційоване навчання аналітичної геометрії студентів вищих навчальних закладів педагогічного профілю» (2009);

2. О. В. Семеніхіна [215] «Методична система реалізації освітнього стандарту з аналітичної геометрії у педагогічних університетах» (2004);

3. М. К. Тюлюш [246] «Комплексная технология обучения аналитической геометри плоскости студентов педвузов» (2002).

В Україні окремі дослідження, повністю присвячені методиці вивчення ліній і поверхонь у курсі аналітичної геометрії, нами не виявлено. Нам відомі лише окремі науково-методичні роботи, що певним чином торкалися вивчення ліній і поверхонь майбутніми вчителями математики. Серед них роботи:

1. Тарасенкова Н.А., Коломієць О.М. Аналітична геометрія. Лінії другого порядку [4].

2. Коломієць О.М. Геометричне місце точок, рівновіддалених від параболи і прямої [94].

3. Працьовитий М.В., Гончаренко Я.В. Лінії на евклідовій площині [190].

4. Улитин Г.М., Мироненко Л.П. Использование свойств симметрии кривих второго порядка для вывода их канонических уравнений [250].

Актуальність зазначеної проблеми на сучасному етапі розвитку вищої освіти, недостатня її розробленість у науковій літературі і на практиці й зумовили вибір теми дисертаційного дослідження: «Методика вивчення ліній і поверхонь у курсі аналітичної геометрії в педагогічних університетах».

Зв'язок роботи з науковими програмами, темами. Дослідження виконано відповідно до тематичного плану науково-дослідної роботи кафедри вищої математики і кафедри методології та методики навчання фізико-математичних дисциплін вищої школи Фізико-математичного інституту Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова «Теорія та технологія навчання і виховання в системі народної освіти».

Тему дисертаційного дослідження затверджено Вченою радою НПУ імені М. П. Драгоманова (протокол № 5 від 28квітня 2009 р.) та узгоджено Радою з координації наукових досліджень в області педагогіки і психології в Україні (протокол № 8 від 30листопада 2010 р.).

Об'єкт дослідження – процес навчання аналітичної геометрії студентів математичних спеціальностей у педагогічних університетах.

Предмет дослідження – методика вивчення ліній і поверхонь у курсі аналітичної геометрії для студентів математичних спеціальностей в педагогічних університетах.

Мета дослідження – розробити та теоретично обґрунтувати методичну систему вивчення ліній і поверхонь у курсі аналітичної геометрії педагогічного університету та експериментально перевірити її ефективність на практиці в сучасних умовах.

Для досягнення поставленої мети були визначені та розв'язані такі основні **завдання дослідження**:

1) вивчити психолого-педагогічну та методичну літературу з проблеми дослідження, зокрема провести аналіз існуючих навчальних посібників з аналітичної геометрії;

2) визначити методичні засади вивчення аналітичної геометрії першокурсниками та психолого-педагогічні особливості управління їх навчально-пізнавальною діяльністю в цьому процесі;

3) структурувати зміст, уточнити цілі та завдання навчання аналітичної геометрії при вивчення змістових ліній «криві» і «поверхні»;

4) створити дидактичне забезпечення процесу вивчення ліній та

поверхонь;

5) експериментально перевірити ефективність розробленої методики.

Методи дослідження. Для досягнення мети у процесі дослідження використано такі методи:

- *теоретичні* – системний аналіз психолого-педагогічної, навчально-методичної і математичної літератури з проблеми дослідження (1.1 – 1.5, 2.1, 2.5 і (тут і далі – підрозділи дисертації)); порівняння та систематизація існуючих шляхів побудови навчальних курсів аналітичної геометрії (1.1, 1.2, 1.4); теоретичне моделювання педагогічних процесів (1.2, 1,4, 2.1– 2.4); аналіз та опрацювання результатів педагогічного експерименту методами математичної статистики (2.5);

- *емпіричні* – визначення рівня знань, умінь і навичок студентів з курсу аналітичної геометрії (1.2, 2.5); педагогічний експеримент, що містить цілеспрямовані спостереження, бесіди, усні та письмові опитування, анкетування, тестування, аналіз і опрацювання отриманих даних (2.5).

Наукова новизна дослідження полягає у тому, що:

- визначено комплексну мету вивчення ліній і поверхонь студентами педагогічних університетів, що розкривається через загальнонаукову (освітню, розвивальну, виховну) і фахову (освітню, розвивальну, виховну);
- визначено психолого-педагогічні і методичні умови ефективного вивчення ліній і поверхонь (забезпечення професійної спрямованості навчання; реалізація міжпредметних зав’язків; активізація навчально-пізнавальної діяльності студентів; комплексне використання ІКТ; реалізація індивідуального підходу до організації самостійної роботи студентів; формування наукового світогляду та ціннісних орієнтацій), які визначають методику навчання цієї змістової лінії студентами педагогічних університетів.

Удосконалено:

- форми, методи і засоби вивчення ліній і поверхонь, які позитивно впливають на реалізацію інших компонентів методичної системи.
- шляхи формування наукового світогляду та ціннісних орієнтацій студентів під час вивчення ліній і поверхонь;

Подальшого розвитку набули:

- психолого-педагогічні особливості управління навчально-пізнавальною діяльністю студентів у процесі навчання ліній і поверхонь;

- положення про забезпечення професійної спрямованості та реалізації міжпредметних зав'язків під час навчання ліній і поверхонь студентів педагогічних університетів;

- положення про доцільність і необхідність використання ППЗН, зокрема *GRAN-2D* і *GRAN-3D*, у процесі навчання ліній і поверхонь студентів педагогічних університетів.

Практичне значення дослідження полягає у тому, що:

- зміст навчального матеріалу, присвячений лініям і поверхням, структуровано у два послідовні модулі (у різних семестрах), що робить актуальною інтенсифікацію навчання ліній і поверхонь у педагогічних університетах;

- розроблено та впроваджено у практику роботи фізико-математичного факультету УДПУ імені П.Тичини навчально-методичний комплекс, який містить:

▪ навчальну і робочу програми курсу «Аналітична геометрія»;

▪ навчальні посібники «Практикум з аналітичної геометрії», «Вивчення ліній і поверхонь з комп'ютерною програмою *3D Plotter*», «Використання ППЗН *GRAN-2D* і *GRAN-3D* під час вивчення ліній і поверхонь»;

▪ електронний супровід вивчення ліній і поверхонь на платформі Moodle [264].

Вірогідність та обґрунтованість одержаних результатів у процесі дослідження забезпечено методологічними позиціями, визначеними на основі аналізу математичних, психолого-педагогічних і методичних праць, і теоретичною обґрунтованістю вихідних положень; використанням методів дослідження, що сприяють реалізації поставленої мети та сформульованим завданням; тривалим педагогічним експериментом і різнобічною апробацією основних положень дисертації; поєднанням кількісного та якісного аналізу одержаних результатів.

Особистий внесок здобувача. Усі наукові результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно.

Разом зі співавторами опубліковано 1 статтю у фаховому виданні та 3 публікації у матеріалах конференцій. У цих роботах усі ідеї та розробки, що стосуються проблеми дослідження, належать здобувачеві.

Впровадження результатів дослідження. Експериментальна робота проводилася у 4 педагогічних університетах. Запропонована в дисертаційному дослідженні методика впроваджується у процес навчання аналітичної геометрії студентів педагогічних університетів: Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини (довідка № 150/01 від 21.01.2014р.), Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова (довідка № 281/14 від 22.01.2014р.), Полтавського національного педагогічного університету імені В.Г. Короленка (довідка №0319/01-55/ від 24.01.2014р.), Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського **(**довідка № 16/01 від 27.01.2004 р.).

Апробація результатів дослідження. Основні положення та результати дисертаційного дослідження доповідались на наукових конференціях різних рівнів та науково-методичних семінарах, а саме:

1. *Міжнародні конференції:*

Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука (Київ, 2008, 2012), Міжнародна науково-методична дистанційна конференція молодих вчених, аспірантів і студентів «Евристика і дидактика математики» (Донецьк, 2009, 2011), Міжнародна науково-методична конференція «Проблеми математичної освіти (ПМО 2010, 2013)» (Черкаси, 2010, 2013), Міжнародна науково-практична конференція «Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики» (Київ, 2011), Міжнародна науково-методична конференція «Стратегия качества в промышленности и образовании» (Варна, Болгарія, 2011), Міжнародна науково-практична конференція «Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики» (Вінниця, 2012), Міжнародна наукова конференція "Актуальні проблеми методології та методики навчання фізико-математичних дисциплін" (Київ, 2013), Міжнародна науково-методична Інтернет-конференція «Інноваційні педагогічні технології у підготовці майбутніх фахівців з вищою освітою: досвід, проблеми, перспективи» (Вінниця 2013);

2. *Всеукраїнські конференції:*

Всеукраїнська науково-методична конференція «Стан та перспективи підготовки вчителя математики в Україні» (Вінниця, 2009), Всеукраїнська наукова конференція молодих учених «Актуальні проблеми природничих та гуманітарних наук у дослідженнях молодих вчених» (Черкаси, 2012), Всеукраїнська науково-практична конференція «Особистісно орієнтоване навчання математики: сьогодення і перспективи» (Полтава, 2013);

3. *Інші конференції:*

Міжуніверситетська наукова конференція з математики та фізики для студентів та молодих вчених (Київ, 2009, 2011), Всероссийский конгресс молодых ученых Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики (Санкт-Петербург, 2012), звітна наукова конференція аспірантів та викладачів Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова (2009 - 2013р.р.);

А також, Всеукраїнський семінар "Актуальні проблеми методики навчання математики" при кафедрі математики і теорії та методики навчання математики Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова (Київ, 2011);

На засіданнях кафедри методології та методики навчання фізико-математичних дисциплін у вищій школі Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова (Київ, 2010, 2011) і кафедри вищої математики Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини (Умань, 2009 - 2013)).

Публікації. основні положення та результати дисертаційного дослідження висвітлено у **30** публікаціях, з яких 26 – одноосібні, серед них **10** статей опубліковано у фахових виданнях: [128], [130], [135], [136], [139], [141], [147], [149], [150], [247]; **17** тез конференцій: [44], [45], [125] - [127], [129], [131] - [134], [138], [140], [142], [143], [148], [137], [189], [248]; **3** навчально-методичні посібники: [144], [145], [146]. Одну статтю [149] і двоє тез доповідей [142], [143] опубліковано у зарубіжних виданнях.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, двох розділів, висновків до розділів, загальних висновків, списку використаних джерел (264 найменувань, із них 1 іноземними мовами) та 7 додатків на 18 сторінках. Загальний обсяг дисертації 238 сторінок. Основний текст дисертації викладений на 193 сторінках і містить 15 таблиць та 58 рисунків.

РОЗДІЛ 1.
ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ ПРОБЛЕМИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Історіяформування та розвитку вчення про лінії та поверхні в курсі аналітичної геометрії

Лінія разом з поверхнею є одними з основних чистих геометричних форм, що мають широке використання в різних галузях математики (математичному аналізі, диференціальній геометрії, в основах геометрії, топології тощо) та її застосуваннях. Знання шляхів розвитку математики, її теперішнього стану і перспективи – необхідна основа наукової діяльності в цій галузі. Історія дослідження цієї проблеми дає можливість отримати загальну картину, осмислити витоки і шляхи розвитку науки, з її досягненнями та помилками. Розглянемо загальну панораму розвитку вчення про лінії та поверхні.

Зародження найпростіших геометричних понять почалося ще в доісторичний період. Перші реальні передумови виникнення наукових знань з геометрії пов'язані з трудовою діяльністю людини, з необхідністю створення знарядь праці та засобів існування. Матеріальні та інші потреби змушували людей виготовляти знаряддя праці, ліпити глиняний посуд, будувати житло, культові споруди, іригаційні системи. Тисячі разів виконуючи ці операції наші предки поступово дійшли до одного з перших абстрактних геометричних понять – **прямої лінії**. Приблизно таким же чином виникли й інші геометричні поняття: «точка», «поверхня», «геометричне тіло», тощо. Цей початковий період розвитку геометрії характеризується нагромадженням фактів і встановленням перших найпростіших залежностей між геометричними образами та об’єктами.

Найбільш давніми писемними джерелами, в яких згадується про геометрію та описово подаються основні геометричні поняття, є єгипетські папіруси Райнда (1800-1600 рр. до н.е.) та численні клинописні керамічні таблички, знайдені на території сучасного Іраку.

Єгипетська геометрія мало відрізнялася від арифметики. В ній на перший план виступали обчислення площ, поверхонь та об’ємів. Порівняно з єгиптянами вавилонські математики зробили крок уперед в розвитку геометрії, які сприймали квадрат і трикутник як абстрактні фігури, про прямокутник говорили , що це «те, що має довжину й ширину», про трапецію — «лоб бика», про круг — «вигин». Термінів: «точка», «пряма», «лінія», «поверхня», «площина», «паралельність», «перпендикулярність» ще не було [97].

Приблизно в VI ст. до н. е. початкові геометричні відомості з Єгипту та Вавилона були перенесені в Грецію, де вони поступово почали оформлюватися в струнку систему фактів. Саме в стародавній Греції зароджується новий етап розвитку геометрії. Вона набуває абстрактного характеру: виникають доведення, робляться перші спроби систематизації геометричних понять. Подальшого розвитку геометричні поняття набули в працях давньогрецьких математиків Гіппократа Хіоського, Евдокса Кнідського, Феодора Кіренського, Фалеса Мілетського, Евкліда, Архіта Тарентського, Архімеда, Аполонія та багатьох інших. Греки склали також перші систематичні роботи з геометрії. Так, завдяки переходу від набору правил до встановлення загальних закономірностей, геометрія почала поступово перетворюватися на науку, беручи початок з Іонійської школи Фалеса Мілетського. Кожне твердження про геометричні фігури Фалес обґрунтовував. Відтоді математики саме так оформлюють свої міркування. Через це Фалеса справедливо називають батьком геометрії

Чільне місце серед праць із геометрії античного періоду посідають складені близько 300 років до н. е. «Початки» Евкліда (13 книг). У цій фундаментальній науковій праці геометрія викладена в логічній послідовності на основі чітко сформульованих основних положень – аксіом та основних просторових уявлень, таких як точка, пряма лінія, площина, геометричне тіло. У «Початках» Евкліда подаються означення, аксіоми, постулати, пропозиції (поділяються на завдання і теореми) [68].

Лінію Евклід означає, як довжину, що позбавлена ширини або як границю поверхні. Межами лінії є точки.

В розумінні вченого *пряма лінія* – це лінія, що містить усі свої точки на одному рівні, жодна проміжна точка якої не відхиляється вгору чи вниз. *Крива лінія* – це така, що може бути частиною кола. *Мішана лінія* – це така лінія, що не є прямою й не може бути частиною кола.

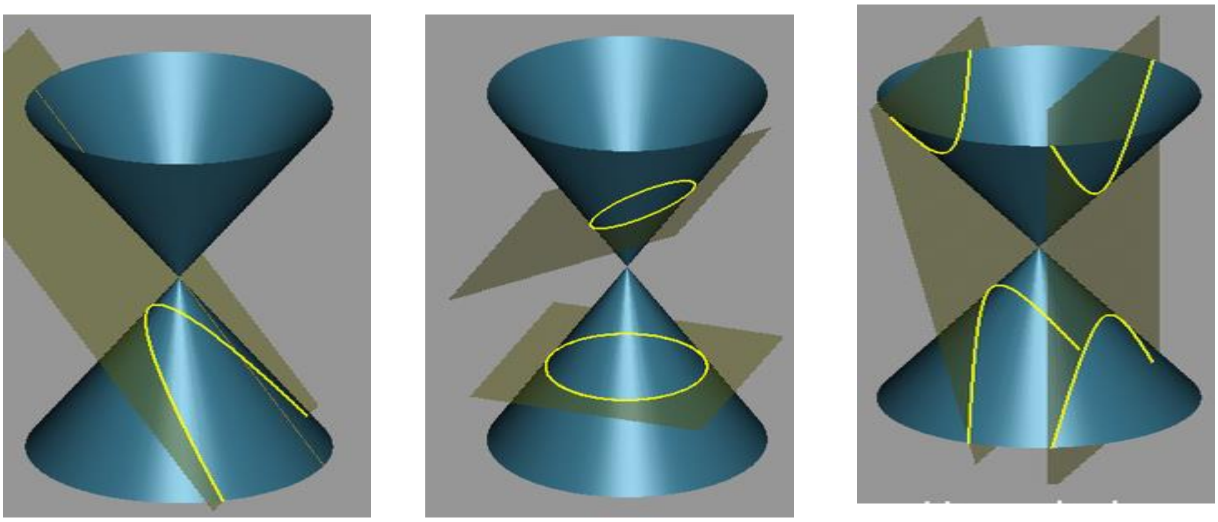
Поверхня - це те, що має довжину й ширину. Межами поверхні є лінії.

Плоска поверхня - це така поверхня, всі лінії якої розташовані на одному рівні [68].

Ці прості визначення лінії та поверхні проіснували понад 2000 років, до того часу, поки їм на зміну не прийшли інші, більш досконалі означення.

Трактування понять лінії та поверхні, подані в «Початках» Евкліда, не можна вважати строгим означенням, придатними для систематичного вивчення понять лінії та поверхні, оскільки вони визначаються через інші поняття, які теж необхідно означити. Наприклад, за Евклідом лінія – це "довжина без ширини", а що таке довжина та ширина? Однак, на тому рівні розвитку науки визначення Евкліда вважалися вдалими і відповідали тим вимогам, які ставила тогочасна практика. Означення Евкліда в порівнянні з визначеннями інших давньогрецьких авторів: Гіппократа Хіоського, Евдокса Кнідського, Феодора Кіренського, Фалеса Мілетського, Архіта Тарентського, Архімеда, Аполлонія та багатьох інших, стояли на рівень вище. Особливо це стосується визначення двох найпростіших ліній – прямої та кола.

Криві другого порядку вперше відкрив давньогрецький математик, учень Евдокса Кнідського, — Менехм (IV ст. до н. е). Він розглядав параболу, гіперболу й еліпс як перерізи трьох конусів обертання – прямокутного, тупокутного і гострокутного – площиною, перпендикулярною до твірної. Якщо конус прямокутний, утворювалася парабола (рис.1.1, а), гострокутний — еліпс (рис.1.1, б), а якщо тупокутний — вітки гіперболи (рис.1.1, в). Ератосфен назвав утворені фігури тріадою Менехма. Вивчивши властивості кривих другого порядку, Менехм застосував їх до механічного розв'язання задачі подвоєння куба (делоської задачі).



а) парабола б) еліпс в) вітки гіперболи

Рис.1.1. Тріади Менехма

Ще більших результатів у вивченні кривих та поверхонь досягнув давньогрецький математик Аполлоній Пергський (262 - 190 до н. е.). Вчений першим почав детально досліджувати властивості еліпса, параболи і гіперболи. Найважливіша праця Аполлонія — «Конічні перерізи» (чотири книги збереглися в грецькому оригіналі, наступні 3 — в арабському перекладі, а остання, 8-а книга, втрачена) [249].

Аполлоній розглядав загальний випадок утворення конічних перерізів при перетині довільного кругового двопорожнинного конуса площиною під будь-яким кутом. На рисунку 1.2 як перерізи зображено коло (1), еліпс (2), параболу (3), гіперболу (4). Аполлоній виявив, що парабола (3) — граничний випадок еліпса (2), відкрив асимптоти гіперболи; одержав у словесній формі рівняння параболи, ввів багато термінів, зокрема: асимптота, абсциса, ордината, apлiката, гіпербола, парабола, якими користуються і

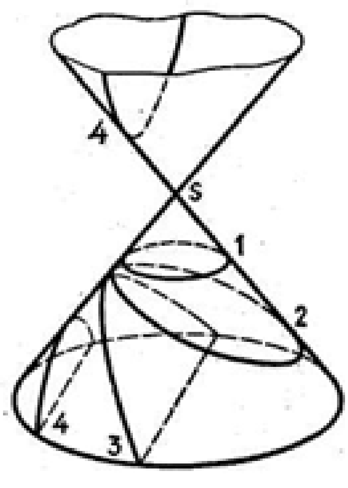


Рис.1.2. Конічні перерізи

донині, довів понад 300 теорем про криві 2-го порядку методом, який полягав у віднесенні кривої до якого-небудь її діаметру і до зв'язаних з ним хорд, і фактично був засновником методу координат, створеного в XVII ст.

Повне дослідження конічних перерізів стало можливим завдяки появі у XVII ст. проективного і координатного методів. Використання методу координат для дослідження ліній уможливило заміну стереометричного підходу до означення конічних перерізів на планіметричний.

Аполлоній Пергський розробив теорію конічних перерізів та описав еліпс, параболу та гіперболу, але не дав загального визначення лінії другого порядку. Інші грецькі автори (Гіппократ Хіроський, Евдокс Кнідський, Феодор Кіренський, Фалес Мілетський, Архіт Тарентський) також давали означення окремим типам ліній та поверхонь, але загального визначення лінії та поверхні вони так і не створили. У додатку А (таблиця А.1) структуроно подано основні віхи розвитку вчення про лінії та поверхні в античні часи.

Великою подією в історії геометрії стало відкриття в XVII столітті методу координат (1637 р.) та створення на його основі нового розділу геометрії – **аналітичної геометрії**.

Основоположниками методу координат вважаються П. Ферма і Р. Декарт.

Створення координатного методу дозволило Декарту визначити поняття лінії та поверхні у досить загальній для того часу формі:

- *плоскою лінією називається множина точок площини, координати яких задовольняють рівняння* $F(x,y)=0$, *де* $F(x,y)$ *— математичний вираз, що містить змінні* x *та* y *";*

- *поверхнею називається множина точок простору, координати яких задовольняють рівняння* $F(x,y,z)=0$, *де* $F(x,y,z)$ *— математичний вираз, що містить змінні* x, y та z.

Слід зазначити, що таке означення лінії (і поверхні) не є повним, оскільки не визначено, якими є вирази $F(x, y)$ і $F(x, y, z)$.

У такому вигляді на сучасному етапі розвитку науки записуються рівняння алгебраїчних ліній, якщо $F(x, y)$ і $F(x, y, z)$ – алгебраїчні вирази. Лінія називається алгебраїчною лінією n-го порядку, якщо в загальному її рівнянні $F(x,y)=0$ функція $F(x, y)$ є поліном $P(x, y)$ степеня n. Зокрема,

$y=kx+b$ – пряма лінія – це алгебраїчна лінія першого порядку;

$x^2+y^2=r^2$ – коло – це алгебраїчна лінія другого порядку;

$\left(x^2+y^2-2ax\right)^2-b^2\left(x^2+y^2\right)=0$ – слимак Паскаля – це алгебраїчна лінія четвертого порядку.

Не всі лінії можна описати за допомогою функції, що задається поліномом. Такі криві відомі ще з давніх часів.

Прикладом такої кривої може слугувати спіраль Архімеда, лінія, що описується точкою, яка рівномірно рухається за променем, який, у свою чергу, обертається з постійною кутовою швидкістю навколо нерухомої точки (рис. 1.3).

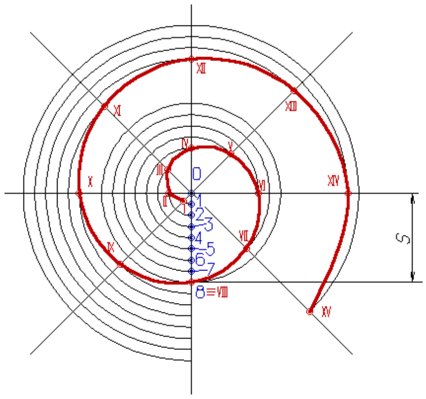


Рис. 1.3. Спіраль Архімеда

Рівняння спіралі Архімеда у декартовій системі координат має вигляд:

$$\sqrt{x^2+y^2}=arctg\frac{y}{x}.$$

Лінії, які не описуються алгебраїчними рівняннями, називаються трансцендентними. До таких ліній належать синусоїда, тангенсоїда, графіки показникової та логарифмічної функцій. У курсі аналітичної геометрії, крім спіралі Архімеда, до трансцендентних ліній відносяться й інші спіралі: гіперболічна спіраль (рис. 1.4), спіраль Галілея, спіраль Ферма та інші. Трансцендентною лінією є і ланцюгова лінія. Детально історію дослідження та властивості цієї кривої розкрито у нашій статті [141].

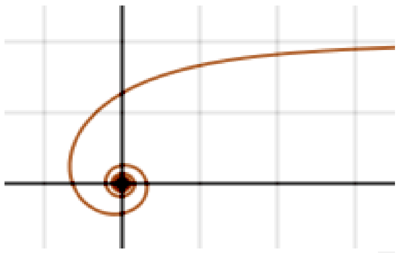


Рис. 1.4.
Гіперболічна спіраль

Поверхні також поділяють на алгебраїчні та трансцендентні. Прикладом алгебраїчних поверхонь є куля, еліпсоїд, гіперболоїд, параболоїд (рис. 1.5) та інші. До трансцендентних поверхонь належать алехоїд, катеноїд (рис. 1.6) та інші.

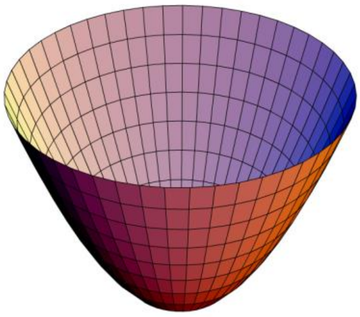


Рис. 1.5. Параболоїд

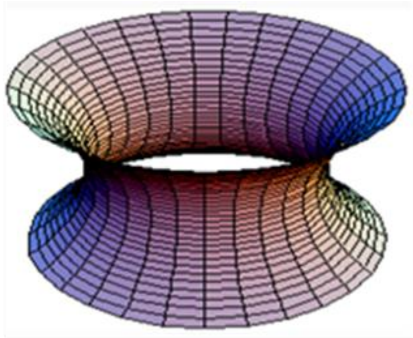


Рис. 1.6. Катеноїд

Передумовою для системної побудови аналітичної геометрії стали роботи А.К. Клеро. У книзі ”Дослідження про криві подвійної кривини”(1731р.). Автор подав систематичне використання просторових координат в аналітичній геометрії. Вивчаючи просторові криві за їхніми рівняннями, А.К. Клеро записав у явній формі загальну формулу відстані між двома точками на площині та в просторі, а також вивів рівняння площини – алгебраїчної поверхні першого порядку в декартовій системі координат: $Ax+By+Cz+D=0$, де *A, B, C* та *D* сталі, причому *A, B* та *C* одночасно не дорівнюють нулю.

А. К. Клеро ввів не тільки рівняння сфери, кругового конуса і параболоїда обертання, а й рівняння кількох складніших поверхонь обертання: еліпсоїда, однопорожнинного гіперболоїда обертання, а також поверхні обертання параболи $x^3 = ay$ навколо дотичної, в вершині.

Вперше аналітичну геометрію на площині й у просторі у формі, близькій до сучасної, виклав Л. Ейлер у другому томі своєї книги „Вступ до аналізу нескінченно малих” (1748 р.), проте ні А. К. Клеро, ні Л. Ейлер не дали строгого означення лінії та поверхні.

У XVIII ст. завершилося формування аналітичної геометрії як науки. Тоді ж відбулось і становлення її як навчальної дисципліни, складової частини вищої математичної і технічної освіти. Найбільш системним і наближеним до сучасного стилю став підручник французького академіка С. Лакруа, який багаторазово перевидавали. У додатку А (таблиця А.2) структуровано подано основні віхи розвитку аналітичної геометрії в Європі.

У другій половині XIX ст. інтерес до тлумачення понять лінії та поверхні виникає в умовах подальшого стрімкого розвитку математики та створення нових теорій. Нове, більш чітке визначення лінії та поверхні подав французький математик К. Жордан (1838-1922).

Лінія – це плоска крива, яка є сукупністю точок площини, координати яких задовольняють параметричним рівнянням: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$*, де* φ *та* ψ *є неперервними функціями аргументу* t *на відрізку* $0 \le t \le 1$ [124].

Якщо різним значенням аргументу t з відрізку $[0,1]$ відповідають різні точки площини, то лінія називається простою або лінією (кривою) без крайніх точок. Коли ж значенням 0 та 1 аргументу t відповідає одна й та сама точка площини, то лінія називається замкненою. Інакше кажучи, *плоска крива,* за Жорданом, *є образом відрізка* $[a,b]$ *при неперервному відображенні на площину*. У сучасній диференціальній геометрії функціонує у дещо трансформованому варіанті саме таке розуміння поняття кривої.

Нове означення лінії, дане К. Жорданом, суттєво вдосконалило означення Р. Декарта і дало можливість означати криві, які не можна було описати рівнянням виду $F(x,y)=0$, тобто врахувати в означенні лінії криві, які є траєкторіями рухомої точки.

У 1890 р. Д. Пеано показав, що означення лінії Жордано може не узгоджуватися зі звичним уявленням про лінію. Зокрема, математик довів, що можна так дібрати функції φ та ψ неперервні на відрізку $0 \le t \le 1$, що сукупність точок, координати яких задовольняють рівнянням $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, заповнює цілий квадрат. Тобто, яку б точку $A(x,y)$ з цього квадрата ми не взяли б, завжди знайдеться таке значення параметра $0 \le t \le 1$, яке буде задовольняти рівняння $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

Кривою Пеано називають будь-яку криву Жордано, графіком якої є деякий квадрат (рис. 1.7).

Іншими словами, крива Пеано проходить через будь-яку точку деякого квадрата. У зв'язку з цим кажуть також, що крива Пеано заповнює квадрат. А це свідчить про те, що означення Жордана є загальним. У зв'язку з цим знову постало питання про уточнення поняття лінії.

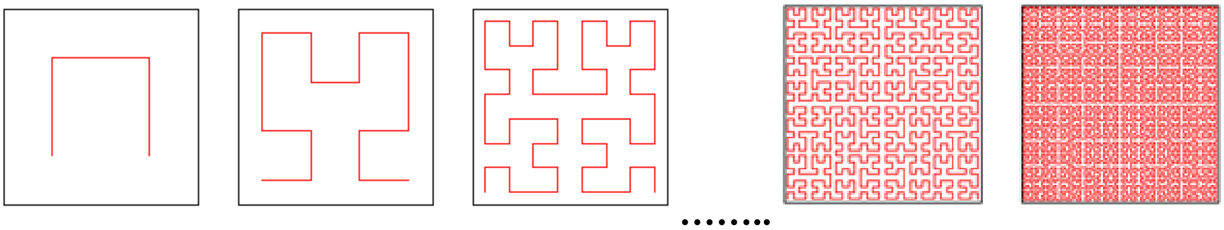


Рис. 1.7. Крива Пеано

Дослідження Д. Пеано заклали основи нового напряму в геометрії, який в подальшому розвинувся у фрактальну геометрію.

Наприкінці XIX ст. в математиці в цілому, й геометрії зокрема, винник теоретико-множинний підхід. У відповідності з цим підходом будь-який математичний об'єкт можна розглядати як множину тих чи інших елементів. Теоретико-множинне означення лінії подав Г. Кантор (1845-1918).

Плоска лінія (крива) – це будь-яка зв'язна, компактна множина М точок площини, яка не містить у собі ніякої внутрішньої точки.

Означення Г. Кантора не узагальнюється на просторові криві: в тривимірному просторі континуумом, який не містить внутрішніх точок, може бути не тільки крива, але й поверхня, наприклад, площина чи сфера [177].

На початку XX ст. зусиллями П.С. Урисона (1898-1924) та К. Менгера (1840-1921), було створено найбільш загальне визначення лінії (кривої), яким користуються в сучасній топології і яке придатне для будь-якого простору:

"Лінія — це зв'язний континуум топологічної розмірності 1*"*.

Континуум, що лежить на площині, є лінією у розумінні П.С. Урисона тоді і тільки тоді, коли він не містить внутрішніх точок [124].

Слід зазначити , що в літературі вкрай важко знайти спеціальні роботи, присвячені розвитку визначення поверхні. В математичних довідках та енциклопедіях стверджується, що в різних розділах геометрії йому надається різний сенс [124].

Розглянемо як змінювалися підходи до формування понять поверхні. *Поверхня* – одне з найважливіших геометричних понять, а, зазвичай, це поняття частіше лише пояснюється, а не визначається.

Наприклад, поверхня є границя тіла або слід рухомої лінії. Найважливішою та найпростішою поверхнею є площина [124].

Всі поверхні можна розділити на графічні та геометричні. До геометричних належать поверхні, утворення яких підпорядковане певним геометричним законам, вони утворюються рухом в просторі прямої або кривої лінії, яка називається твірною. Графічною називається поверхня, закон утворення якої не відомий.

Якщо поверхня створена правильними багатогранниками, то вона буде *гранною.* Якщо поверхня створена плоскими кривими правильної форми, то матимемо *криву*, причому, якщо в утворенні беруть участь кола в якості напрямних, то отримуємо *поверхні обертання*. За логічного уточнення поняття поверхні в різних розділах геометрії йому надається різний сенс. В елементарній геометрії розглядаються багатогранники, а також деякі криві поверхні. Кожна з кривих поверхонь визначається спеціальним способом, частіше за все як множина точок, що задовольняють певним умовам. Наприклад, поверхня кулі – множина точок, які розташовані на заданій відстані від заданої точки.

Сучасне, математично строге визначення поверхні базується на поняттях топології. З погляду топології просту, поверхню можна уявити як частину площини, що піддається неперервним деформаціям розтягу, стиснення та вигину. Таким чином, *простою поверхнею називається образ гомеоморфного відображення внутрішньої частини квадрата*.

Прикладом простої поверхні є напівсфера.

1.1.2. Проаналізуємо найбільш уживані в Україні та країнах СНД підручники та посібники з аналітичної геометрії щодо означення в них ліній та поверхонь.

У «Короткому курсі аналітичної геометрії» Н.В. Єфімова [71] рівнянням лінії у вибраній системі координат називається таке рівняння $F(x,y)=0$ з двома змінними, якому задовольняють координати x та y кожної точки, що лежить на цій лінії та не задовольняють координати ніякої іншої точки, яка не лежить на ній. Тобто лінією є геометричне місце усіх точок площини, координати яких задовольняють рівняння $F(x,y)=0$. Аналогічним способом вводиться поняття поверхні. Рівнянням поверхні називається таке рівняння $F(x,y,z)=0$ з трьома змінними, якому задовольняють координати x, y, z кожної точки, що лежить на цій поверхні, та не задовольняють координати ніякої іншої точки, яка не лежить на ній. Лінія, що визначається рівнянням $y=f(x)$, називається графіком функції $f(x)$. У просторовій аналітичній геометрії кожна лінія розглядається як перетин двох поверхонь відповідно.

Схожим методом вводиться поняття лінії в «Аналітичній геометрії» О.В. Погорєлова [184]. Автор спочатку узагальнює поняття лінії, називаючи її кривою, а потім стверджує, що рівняння $\varphi(x,y)=0$ називається рівнянням кривої в неявній формі, якщо йому задовольняють координати x та y будь-якої точки цієї кривої, а будь-яка пара чисел x та y, що задовольняє рівнянню $\varphi(x,y)=0$, являє собою координати точки кривої. Поняття поверхні О.В. Погорєлов вводить так: «Нехай є якась поверхня. Рівняння $f(x,y,z)=0$ називається рівнянням поверхні в неявному вигляді, якщо координати кожної точки поверхні задовольняють цьому рівнянню».

Якщо Н.Ф. Єфімов та О.В. Погорєлов дають поняття лінії та поверхні описово, не переводячи їх в ранг означення, то В.О. Ільїн та Е.Г. Позняк [85] дають чіткі означення лінії та поверхні. Зокрема, означення лінії звучить так.

Рівняння $\Phi(x, y) = 0$ *називається рівнянням лінії* L*, якщо цьому рівнянню задовольняють координати x та у будь-якої точки, що лежить на лінії* L *і не задовольняють координати x та у будь-якої іншої точки, що не лежить на лінії* L.

Аналогічно вводиться означення поверхні.

Рівняння $\Phi(x, y, z) = 0$ *називається рівнянням поверхні* S*, якщо цьому рівнянню задовольняють координати x,y,z будь-якої точки, що лежить на поверхні* S*, та не задовольняють координати x,y,z будь-якої іншої точки, що не лежить на площині* S.

Отже, в цих означеннях крива L є геометричним місцем точок, координати яких задовольняють рівняння $\Phi(x, y) = 0$, а площина S – геометричне місце точок, координати яких, у свою чергу, задовольняють рівняння $\Phi(x, y, z) = 0$.

Головними поняттями аналітичної геометрії, на думку В.П. Білоусової, І.Г. Ільїної, О.П. Сергунової та В.М. Котлової [24] є лінія та поверхня. Загальне означення поняття лінії та поверхні, на думку вчених, становить значні труднощі і застосовуються в різних галузях геометрії по-різному. В аналітичній геометрії означення лінії базується на її рівнянні. На думку цих авторів, лінією, заданою рівнянням $F(x, y) = 0$ відносно певної системи координат у площині, називається геометричне місце точок, координати яких задовольняють задане рівняння. Аналогічним чином вводиться поняття поверхні: поверхнею, заданою рівнянням $F(x, y, z) = 0$ відносно певної декартової системи координат у просторі, називається геометричне місце точок, координати яких задовольняють дане рівняння.

М.М. Глухов [41] стверджує, що будь-яка пряма лінія на площині може бути задана рівнянням виду $Ax + By + C = 0$, де *A, B, C* деякі дійсні числа, причому хоча б одне з чисел *A, B* відмінне від нуля. Лініями другого порядку на площині М.М. Глухов називає геометричне місце точок на площині, яке може бути задане алгебраїчним рівнянням другого порядку, і надалі математик обмежується розглядом конкретних ліній другого порядку: кола, еліпса, параболи та гіперболи. Узагальненого поняття поверхні вчений не дає, а обмежується розглядом лише поверхонь другого порядку, які визначаються так:

Поверхнею другого порядку називають множину усіх точок простору, координати яких в деякій декартовій системі координат Oxyz задовольняють рівняння виду:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

де хоча б один з перших шести коефіцієнтів відмінний від нуля.

Отже, М.М. Глухов лінію задає звичайним алгебраїчним рівнянням, а поверхню визначає за допомогою теоретико-множинного підходу.

Я.С. Бугров та С.М. Нікольський [28] лінію та поверхню вводять як множину точок, що задовольняють певне рівняння. Зокрема, для поверхні другого порядку, це рівняння має вигляд: $\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} a_{kl}x_k x_l + 2\sum_{i=1}^{3} A_l x_l + B = 0$, де $a_{kl} = a_{lk}, A_l, B$ задані постійні числа, а $x = (x_1, x_2, x_3)$ – змінна точка в тривимірному просторі.

В.А. Ільїн та Г.Д. Кім [84] дають строге та чітке означення лінії та поверхні. Воно є достатньо логічним та обґрунтованим, і тому слід його тут навести.

Рівняння $F(x, y) = 0$ і відповідно $F(x, y, z) = 0$ називаються рівняннями лінії L на площині (поверхні π в просторі) в заданій системі координат, якщо цьому рівнянню задовольняють координати усіх точок лінії L (поверхні π).

П.С. Геворкян [38] пряму на площині визначає у такий спосіб: *алгебраїчною лінією* (кривою) *n*-го порядку називається множина точок, координати яких *(x,y)* в деякій прямокутній системі координат задовольняють співвідношення виду $F(x, y) = 0$. Поверхню автор визначає як рівняння

$F(x, y, z) = 0$, що називається рівнянням поверхні S в заданій системі координат, якщо йому задовольняють координати будь-якої точки $M(x, y, z) \in S$ і не задовольняють координати ніякої точки, що не лежить на цій поверхні.

А.Д. Доценко [64] лінію на площині визначає рівнянням $F(x, y) = 0$. Якщо це рівняння першого порядку, то буде пряма лінія, якщо ж вказане рівняння другого порядку, то воно описує криві другого порядку: еліпс, коло, гіперболу, тощо. Автор розглядає поверхні першого порядку та поверхні другого порядку. Поверхнею першого порядку, за цією класифікацією, є така поверхня в декартовій системі координат, яка визначається рівнянням першого порядку. Це є фактично площина. Поверхнею другого порядку є поверхня, що визначається в декартовій системі координат рівнянням другого порядку. До поверхонь другого порядку відносять еліпсоїд, гіперболоїд, параболоїд тощо.

Особливої уваги заслуговує відзначити курс аналітичної геометрії І.І. Привалова, який витримав багато перевидань, і за яким навчалося не одне покоління студентів в колишньому СРСР [194]. Автор дає таке означення лінії: рівняння між змінними x та y, яке задовольняють координати будь-якої точки, що лежить на цій лінії, і не задовольняють координати жодної точки, що не лежить на цій лінії, називається рівнянням даної лінії. Поверхню І.І. Привалов визначає як геометричне місце точок і дає роз'яснення щодо загального означення рівняння поверхні. Дослідження поверхні автор поділяє на два етапи. Перший етап – складання рівняння поверхні як геометричного місця точок. Другий – дослідження форми поверхні, що задається складеним рівнянням. Свій метод вчений ілюструє прикладами.

У фундаментальному курсі аналітичної геометрії та лінійної алгебри П. С. Александрова для студентів фізико-математичних спеціальностей вузів [2] лінії на площині та поверхні в тривимірному просторі визначаються як множина розв'язків алгебраїчних рівнянь: $F(x, y) = 0$ для ліній, та $F(x, y, z) = 0$

для поверхонь. Порядок лінії або площини у цьому випадку визначається порядком рівняння.

У курсі аналітичної геометрії та лінійної алгебри Д.В. Беклемішева, виданому досить недавно (2008 р.) [21], означення алгебраїчної поверхні та алгебраїчної лінії дається через поняття множини. Зокрема, *алгебраїчною поверхнею називається множина точок, яка в будь-якій декартовій системі координат може бути задана рівнянням виду*

$$A_1 x^{k_1} y^{l_1} z^{m_1} + \ldots + A_s x^{k_s} y^{l_s} z^{m_s} = 0,$$

де усі показники степені – цілі невід'ємні числа. Найбільша з сум: $k_1 + l_1 + m_1, \ldots, k_s + l_s + m_s$ називається степенем рівняння, а, отже, і порядком алгебраїчної поверхні.

Означення алгебраїчної лінії дається аналогічним чином.

Алгебраїчною лінією на площині називається множина точок площини, яка в будь-якій декартовій системі координат може бути записана рівнянням виду

$$A_1 x^{k_1} y^{l_1} + \ldots + A_s x^{k_s} y^{l_s} = 0,$$

де всі показники степені – цілі невід'ємні числа. Найбільша з сум $k_1 + l_1 + \ldots + k_s + l_s$ називається степенем рівняння, а також порядком алгебраїчної лінії.

Легко побачити, що при такому означенні алгебраїчна поверхня не обов'язково є поверхнею в тому розумінні, до якого ми інтуїтивно звикли.

Проведений аналіз низки найбільш уживаних в Україні та країнах СНД підручників з аналітичної геометрії щодо означення лінії та поверхні показує, що їх можна умовно поділити на 3 групи. До першої групи віднесять ті підручники, де означення лінії та площини дається теоретико-множинним методом. Такий метод визначення у геометрії зараз не є найбільш уживаним, але набуває все більшого розповсюдження. До другої групи відносяться ті підручники, в яких для означення понять «лінія» та «поверхня» використовується поняття геометричного місця точок. Це так би мовити, «геометричне» означення. І, нарешті, до третьої групи (до неї відноситься найбільша кількість підручників) відносяться посібники, в яких використовується традиційне, відоме ще з часів Р. Декарта, так зване, координатне означення.

Основні типи означень лінії та поверхні в найбільш уживаних підручниках з аналітичної геометрії наведено у таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

Типи означення лінії та поверхні в найбільш уживаних підручниках з аналітичної геометрії

Підхід означення	Прізвище та ініціали автора	Назва джерела	Означення
1	2	3	4
Теоретико-множинне означення	1) Д.Беклемишев 2) П.Геворкян 3) Я.Бугров, С.Никольский	1) Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. 2) Высшая математика. Линейгая алгебра и аналитическая геометрия. 3) Высшая математика. Элементы линейной агебры и аналитической геометрии.	Алгебраїчною лінією на площині (алгебраїчною поверхнею в просторі) називається множина точок, яка в будь-якій декартовій системі координат задовольняє рівнянням певного типу (другого порядку для лінії та третього - для площини). Зокрема, алгебраїчною лінією на площині називається множина точок площини, яка в будь-якій декартовій системі координат може бути записана рівнянням виду $A_1 x^{k_1} y^{l_1} + \ldots + A_s x^{k_s} y^{l_s} = 0$, де всі показники степені – цілі невід'ємні числа.
Означення із застосування м поняття геометрично го місця точок	1) Глухов М.М. 2) Білоусова В.П., Ільїн І.Г., Сергунова О.П., Котлова В.М. 3) Ильин В.А., Позняк Э.Г.	1) Алгебра и аналитическая геометрия. 2) Аналітична геометрія. 3) Аналитическая геометрия.	Лінія L являє собою геометричне місце точок, координати яких задовольняють рівняння $F(x, y) = 0$, а площина S – геометричне місце точок, координати яких, в свою чергу, задовольняють рівняння $F(x, y, z) = 0$.

Продовження таблиці 1.1

1	2	3	4
Традиційне координатне означення	1) Н.Ефимов 2) А.Погорелов 3) П.Александров 4) А.Доценко	1) Краткий курс аналитической геометрии. 2) Аналитическая геометрия. 3) Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. 4) Елементи лінійної алгебри і аналітичної геометрії.	Рівняння $\Phi(x,y)=0$ називається рівнянням лінії L, якщо цьому рівнянню задовольняють координати x та y будь якої точки, що лежить на лінії L і не задовольняють координати x та y будь якої іншої точки, що не лежить на лінії L. Аналогічно, рівняння $\Phi(x,y,z)=0$ називається рівнянням поверхні S, якщо цьому рівнянню задовольняють координати x,y,z будь якої точки, що лежить на поверхні S, та не задовольняють координати x, y, z будь-якої іншої точки, що не лежить на площині S.

1.2. Методологічні аспекти побудови курсу аналітичної геометрії в педагогічних університетах

Аналітична геометрія – це галузь математики, у якій властивості геометричних образів (точок, ліній, поверхонь, тіл тощо) визначається засобами алгебри за допомогою методу координат, тобто шляхом вивчення властивостей рівнянь, графіками яких є ці образи.

Будь-яку геометричну фігуру можна розглядати як множину точок, що задовольняє деяку геометричну умову. Цю умову можна записати у вигляді алгебраїчного рівняння, що пов’язує координати x, y та z кожної точки фігури. З цього приводу М. В. Працьовитий зазначає: «Суть методу координат полягає в тому, що з введенням системи координат точки площини (простору) ототожнюються з парами (трійками, наборами) дійсних чисел, що дозволяє задавати геометричні об’єкти за допомогою співвідношень між числами і використовувати при цьому засоби алгебри та аналізу» [191].

Основне завдання аналітичної геометрії полягає у вивченні геометричних фігур і їх властивостей алгебраїчними методами за допомогою відповідного рівняння – співвідношення між координатами точок, з яких ці фігури утворені. На відміну від традиційної геометрії, де потрібно створювати методи доведення для кожного конкретного випадку, метод аналітичної геометрії дозволяє встановлювати геометричні факти системно.

Аналітична геометрія посідає важливе місце серед галузей математичної науки, а знання основних її методів та уміння їх застосовувати вже давно стали невід'ємним компонентом математичної культури не лише фахівця, а й кожної освіченої людини. Саме тому елементи аналітичної геометрії вже понад 100 років вивчають в середній школі.

Для вищих навчальних закладів на основі аналітичної геометрії (галузі науки) створено *навчальну дисципліну* – аналітичну геометрію, що суттєво відрізняється від аналітичної геометрії як науки (метою, змістом, структурою, обґрунтованістю окремих положень, застосуванням тощо). Для навчального предмета в педагогічному університеті з великого обсягу накопичених і систематизованих відомостей (фактів, гіпотез, законів, теорій тощо) обирають головні, спеціальним чином адаптовані та структуровані, що забезпечують формування математичної культури та фахової компетентності майбутнього вчителя математики.

Існують різні підходи до побудови навчального курсу «Аналітична геометрія» та складання відповідної програми. Для розуміння їх переваг та недоліків слід звернути увагу на деякі методологічні аспекти стосовно постановки мети курсу та визначення його структури і змістового наповнення.

Методологія – система принципів і способів організації та побудови теоретичної і практичної діяльності, а також вчення про таку систему. Методологія уможливлює здійснення світоглядної інтерпретації наукових результатів, пояснення нових фактів і положень, а також включення їх в систему вже відомих знань. Однією з важливіших функцій методології є перенесення принципів, підходів, категорій, понять, методів, технологій з однієї сфери наукових досліджень в іншу [33].

1.2.1. Особливості встановлення структури та змістового наповнення курсу аналітичної геометрії

У XVIII ст. завершилося формування аналітичної геометрії як науки. Тоді ж відбулось і становлення її як навчального предмета, складової частини вищої математичної і технічної освіти. У сучасному розумінні основні факти і теорії аналітичної геометрії вперше були викладені у другому томі роботи Л. Ейлера „Вступ до аналізу нескінченно малих" (1748р.). Найбільш систематичним і близьким сучасному стилю став підручник французького академіка С. Лакруа «Елементарний курс прямолінійної і сферичної тригонометрії та застосувань алгебри до геометрії» (1798р.), який багаторазово видавали. У четвертому виданні підручника (1807р.) виклад аналітичної геометрії простору став подібним до сучасних.

Основою цих робіт є метод координат, який майже на 100 років раніше створили визначні французькі математики П. Ферма і Р. Декарт. Але на той час ні П. Ферма, ні Р. Декарт до кінця не усвідомлювали значення своїх відкриттів, зокрема, потужності методу координат. У той же час саме в їх роботах намітилися основні ідеї (ідея координат й ідея геометричної інтерпретації рівнянь) і головні напрями розвитку нової галузі математики.

Розвиток аналітичної геометрії допоміг перекласти дослідження геометричних фігур на мову алгебри. Такий підхід мав недоліки, оскільки необхідно було визначити геометричні властивості тіла або фігури, які би не залежали від системи координат, тобто були би інваріантними. Втім, користі новий метод приніс більше, ніж складності в обчисленнях, про що Р. Декарт написав у своїй "Геометрії", відкриваючи правила та закони, які раніше були невідомі.

Розвиток аналітичної геометрії як навчального предмета тісно пов'язаний зі створенням та функціонуванням вищих навчальних закладів.

У XVIII ст. в Російській імперії існувало три вищі навчальні заклади – Києво-Могилянська академія (статус академії з 1701р.), Академічний університет Петербургской Академии наук (1724р.), Московський університет (1755р.). Тривалий час Києво-Могилянська академія була єдиним вищим навальним закладом Східної Європи. З 1711р. по 1716 рік ректором Київської академії був **Феофан Прокопович** (1681 – 1736) – один з видатних діячів науки, культури і освіти. Його лекції з математики (як засвідчують історики математики О. Бородін та А. Бугай), були першим вітчизняним курсом з цієї дисципліни, побудованим на науковій основі. Його курс математики "Арифметика і геометрія, два перші й найбільш плодовиті початки математичних наук, пояснені в Києво-Могилянській академії..." складався з двох частин: арифметики і геометрії. В геометричній частині подавалися доповнення до Евкліда (розглянуто овал, еліпс, параболу, спіраль). У такому обсязі теоретичні відомості з геометрії на той час в Російській імперії викладалися вперше [13].

До початку XIX ст. в Московському університеті вивчалася тільки елементарна математика. Вперше у 1800 – 1801 навчальному році екстраординарний професор В. К. Аршеневський розпочав читати курс "Про властивості кривих ліній, особливо конічних" [186].

У XIX ст. кількість університетів збільшується, зокрема відкриваються Харківський (1804р.) і Київський (1834р.) університети.

На початку XIX ст. студенти вивчали аналітичну геометрію переважно за підручниками С. Лакруа і Е. Безу, які були перекладені російською мовою. Виклад аналітичної геометрії в тогочасних підручниках супроводжувався громіздкими перетвореннями й обчисленнями. Поняття вектора не розглядалося навіть як додатковий матеріал. Автори значну увагу приділяли проективним властивостям ліній та поверхонь другого порядку. Виклад матеріалу здійснювався за принципом від загального до конкретного [69].

Оригінальні підручники з аналітичної геометрії в першій половині XIX ст. створили Я. А. Севастьянов (1819р.), Д.М. Перевощиков (1821р.) і М. Д. Брашман (1836р.).

За підручник «Аналітична геометрія» М.Д. Брашман був удостоєний повної Демидівської нагороди. Підручник містив «повну теорію точки, лінії і площини, вступ до загальної теорії кривих ліній і поверхонь другого степеня, елементарні вказівки до нових досліджень, викладених в журналі Жергона, Котле, Крелля і в творах Понселе Штейнера, Плюкера та інших, нарешті, початки нерівностей». Цей матеріал М.Д. Брашман виклав строго і доступно. Його використовували в Московському та Петербургському університетах [196].

Наприкінці XIX ст. нові підручники з аналітичної геометрії створили Й. І. Сомов (1815 – 1876), професор Петербургського університету, К.А. Андрєєв (1848 – 1921), який 25 років працював у Харківському університеті, професор Київського університету В. П. Єрмаков (1845 – 1922).

Заслуговують на особливу увагу роботи з аналітичної геометрії В.П. Єрмакова [69], [70]. Перша його робота була видана в 1887 році в Києві і мала назву «Теорія векторів на площині. Застосування до дослідження конічних перерізів». Робота складається з 103 параграфів, згрупованих у 10 розділах:

I. Дії над векторами.

II. Походження складених чисел і дії над ними.

III. Середній пропорційний вектор і знаходження кореня з векторів і з складених чисел.

IV. Дігнус і його властивості.

V. Основні формули і задачі.

VI. Коло.

VII. Лінії другого порядку.

VIII. Еліпс.

IX. Гіпербола.

X. Парабола.

Деталізацію кожного розділу подано у Додатку Б.

У передмові автор зауважує, що теорію векторів на площині можна отримати як окремий випадок загальнішого методу – кватерніонів, але існує кілька причин, через які потрібно надати превагу самостійному, не пов'язаному з кватерніонами викладу.

"Перш за все, через важливе значення в плоскій геометрії, метод векторів на площині потребує по можливості простого і зрозумілого, а тому і самостійного викладу. Відомо, що діям над кватерніонами притаманні особливі закони; між тим дії над векторами на площині задовольняють тим самим законам, як і дії над звичайними числами. Більш того, вектори на площині знаходяться у тісному зв'язку з так званими складеними числами, інакше відомих під назвою уявних виразів. Складені числа відіграють вельми важливу роль в теорії функцій, тому необхідно дати зрозуміліше поняття про походження складених чисел і вказати їх геометричне значення. З цієї причини три перші розділи включені мною в число лекцій Елементарної Математики, які читаються студентам першого семестру.

Метод векторів не потребує ніяких координат. Всі формули містять ті самі букви, які є на малюнках. Ми оперуємо над точками і над буквами. Тому кожна формула набуває зрозуміле геометричне значення" [70].

У роботі "Теорія векторів на площині" В.П.Єрмаков не вводить поняття скалярного, векторного та мішаного добутку. Для дослідження конічних перерізів використовується дігнус і його властивості. Для зручності В.П.Єрмаков вводить нові позначення: "Будемо відкладати всі вектори від деякої постійної точки O, яку назвемо початком векторів. Кожен вектор позначатимемо однією буквою, поставленою в кінці вектора. Таким чином, замість OA, OB, OC, … говоритимемо просто A, B, C, … Ті самі букви будуть означати і точки на площині. Вектор, що має початок у точці A і закінчується в точці *B*, дотепер позначався *AB* = *AO* + *OB* = *OB* – *OA*; у нових позначеннях цей вектор буде *B* – *A*. Тому ми застосовуватимемо такі вирази: вектор *A*, точка *A*, пряма *AB*, вектор *B* – *A*" [70].

Для будь-яких векторів $A = m + ni$ і $B = m' + n'i$ розглядається вираз $(A, B) = mn' - nm'$ і досліджується його геометричне значення. Цей вираз В.П.Єрмаков називає дігнусом (dignus – гідний, вартий, достойний) і підкреслює, що останній відіграє важливу роль в геометричних застосуваннях.

Для дослідження геометричного змісту дігнуса вектори *A* і *B* виражаються через модулі й аргументи: $A = a(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $B = b(\cos\beta + i\sin\beta)$. За означенням дігнуса $(A, B) = ab\cos\alpha\sin\beta - ab\sin\alpha\cos\beta$ $(A, B) = ab\cos\alpha\sin\beta - ab\sin\alpha\cos\beta$ або $(A, B) = ab\sin(\beta - \alpha)$.

Отже, "дігнус (*A*, *B*) виражає додатню чи від'ємну площу паралелограма, побудованого на векторах *A* і *B*" [70].

В термінах сучасної векторної алгебри площа паралелограма, побудованого на векторах *a* і *b*, дорівнює модулю векторного добутку векторів *a* і *b*. Отже, модуль дігнуса двох векторів (за термінологією В.П.Єрмакова) – це модуль векторного добутку цих векторів (у сучасному розумінні).

Саме означення дігнуса та його властивості, які доводяться в четвертому розділі, покладені в основу застосувань векторів до розв'язування геометричних задач та дослідження конічних перерізів. Так з допомогою дігнуса (фактично векторного, а не скалярного добутку) автор виводить різні рівняння прямої. Ці рівняння отримуються на основі властивості: векторний добуток (дігнус) двох колінеарних векторів дорівнює нулю.

"Будемо через *R* позначати змінний вектор, а разом з тим і змінну точку. Якщо точка *R* завжди знаходиться на прямій *AB*, то (*R*–*A*, *B* – *A*) = 0. Це рівняння можна назвати рівнянням прямої, що проходить через дві точки *A* і *B*. Рівняння прямої, що проходить через точку *A* паралельно вектору *C*, буде (*R* – *A*, *C*) =0".

За допомогою іншої властивості дігнуса В.П. Єрмаков виводить рівняння кола в формі ($R - C$, $Ri - Ci$) = r^2. Тут $R - C$ вектор, проведений з центра кола в довільну його точку, $Ri–Ci$ вектор перпендикулярний першому.

Очевидно, більша частина роботи В.П.Єрмакова "Теорія векторів на площині" присвячена основам аналітичної геометрії на площині. Отже, ще 125 років тому знайшла реалізацію перша спроба викладу аналітичної геометрії на векторній основі.

І все ж у переважну більшість підручників і посібників з аналітичної геометрії вектори довгий час не включалися. Рівноправне використання векторного методу разом з координатним у курсах з аналітичної геометрії розпочинається з середини XX століття ([2] (Александров П.С., 1979 р.), [9] (Атанасян Л. С., Базилев В. Т., 1987 р.), [12] (Бахвалов С. В., 1958 р.), [24] (Білоусова В. П., Ільїн І. Г., 1973 р.), [57] (Гуревич В. Б., 1958 р.), [183] (Погорєлов О. В., 1968 р.), [188] (Постніков М. М., 1986 р.), [194] (Привалов І. І., 1966 р.) та інші).

На сучасному етапі розвитку математичної освіти теорія векторів та її застосування є обов'язковим аспектом вивчення аналітичної геометрії у вищій школі. Такий підхід до побудови курсу аналітичної геометрії дає можливість уникнути багатьох громіздких малюнків і записів, спрощує обчислення, суттєво скорочує час на вивчення координатного та векторного методів (у порівнянні з ізольованим вивченням).

Сучасна математична традиція дослідження аналітичної геометрії не включає в себе питання, які стосуються косокутної системи координат, яка наразі згадується лише у випадку узагальнення традиційної прямокутної декартової системи координат. Протягом попередніх століть прямокутна система координат використовувалась у вигляді окремого випадку косокутної системи Р.Декарта, причому після її ретельного вивчення та розробки. Про це говориться у підручниках таких відомих вчених як С. Бюшгенс [32], Г. Сальмон [210], Д. Граве [53] та інших.

Ті чи інші перетворення координат розвивались як рішення для косокутної системи координат. Формули перетворення створювались у випадку перенесення центру координат та у випадку повороту. Перетворення прямокутної системи вважалось лише наслідком вищеназваної ситуації. Сучасна математична теорія дозволяє вводити перетворення координат завдяки елементам векторної алгебри. З огляду на це М.В. Працьовитий зазначає: «Найбільш поширені системи координат афінна і прямокутна декартова (що є основними системами координат для традиційних курсів аналітичної геометрії) досить природним чином вводяться за допомогою векторів. Тому вивчення аналітичної геометрії доцільно розпочинати з розділу "Елементи векторної алгебри" [191].

Отже, векторна алгебра і питання координат точок на площині є традиційними темами, які лежать в основі усього курсу сучасної аналітичної геометрії. Далі іде вивчення лінійного розділу геометрії, тобто особливостей прямої на площині, площину і пряму у просторі тощо. Після вивчення теоретичних питань щодо ліній і площин другого порядку вивчають лінійні геометричні перетворення:

– ізометричні перетворення;

– афінні перетворення, які отримуються завдяки отриманню нового базису простору разом із новим початком координат;

– проективні перетворення просторових фігур та площини.

Слід зауважити, що проективні перетворення просторових фігур та площини можуть вивчатись і в окремому курсі в межах проективної геометрії.

Теорія прямих розкривається в прямокутній системі координат. Подібний підхід дещо спрощує математичні обчислення, робить їх практичними та об'єктивними. Тема вивчення прямої і площини містить дослідження властивостей ліній та поверхонь першого порядку.

Під час вивчення кривих і поверхонь другого порядку досліджуються властивості об'єктів за допомогою канонічних рівнянь, розглядаються питання узагальненої теорії кривих також другого порядку. За допомогою перетворень системи координат відбувається зведення загальних рівнянь кривої до канонічних рівнянь. Також створюється класифікація кривих на площині, визначаються діаметри, центри та дотичні кривих, асимптотичні напрями.

Подана у таблиці 1.2 специфікація курсу «Аналітична геометрія» показує, що значна частина курсу стосується ліній і поверхонь.

Таблиця 1.2

Специфікація курсу «Аналітична геометрія»

<table>
<tr><th></th><th></th><th colspan="5">Теми</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Модуль 1</td><td>Ззм. 1</td><td>Вектор. Лінійні операції з векторами</td><td>Скалярний добуток векторів</td><td>Векторний добуток векторів</td><td>Мішаний добуток векторів</td><td>Метод координат на площині</td></tr>
<tr><td>Ззм. 2</td><td>Пряма на площині</td><td>Коло, еліпс</td><td>Гіпербола, парабола</td><td>Заг. теорія алгебраїчних ліній</td><td>Геометричні перетворення площини</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Модуль 2</td><td>Ззм. 3</td><td colspan="2">Метод координат у просторі</td><td>Площина у просторі</td><td colspan="2">Пряма у просторі</td></tr>
<tr><td>Ззм. 4</td><td colspan="2">Вивчення алгебраїчних поверхонь другого порядку за їх канонічними рівняннями</td><td>Заг. теорія алгебраїчних поверхонь</td><td colspan="2">Геометричні перетворення простору</td></tr>
</table>

У контексті теми нашого дослідження і зважаючи на частку, яку займає вивчення ліній і поверхонь, потрібно розглянути, у який спосіб доцільно вводити ці поняття. У попередньому параграфі нами було детально розглянуто підходи до існуючих визначень ліній і поверхонь у підручниках.

Можливі варіанти методів такого визначення зображено у вигляді рисунку 1.8, на якому подано три різні підходи до означення еліпса.

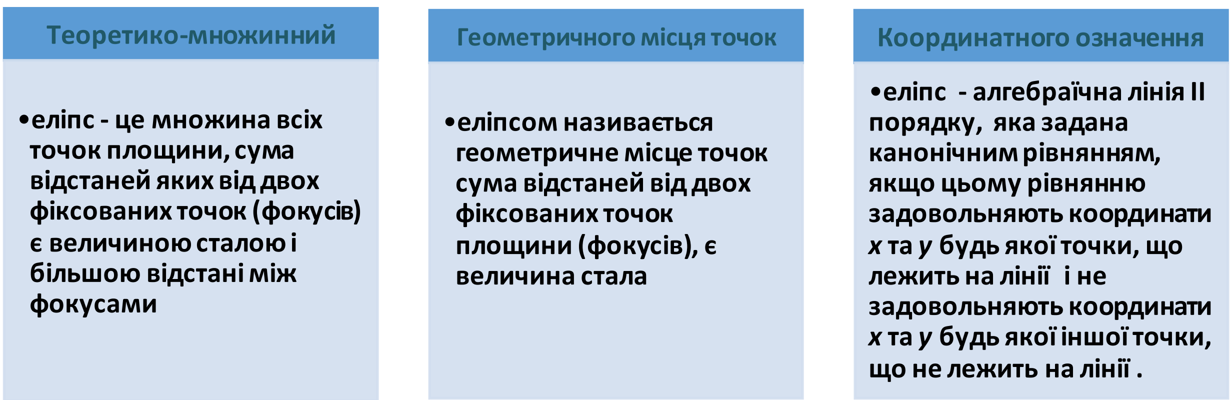


Рис. 1.8. Методи означення еліпса

Аналіз науково-методичної та навчальної літератури, бесіди з викладачами аналітичної геометрії та власний досвід читання курсу дає можливість дійти висновку про те, що в педагогічному університеті як обов’язкові доцільно використовувати паралельно 2 чи 3 означення – координатне та геометричного місця точок.

Основним аргументом для цього є тісний зв'язок курсу «Аналітична геометрія» з окремими темами шкільного курсу математики. Для порівняння необхідно навести фрагмент шкільних програм з геометрії.

Основна школа – 9 клас [123]

1. *Метод координат на площині* **(**Координати середини відрізка. Відстань між двома точками із заданими координатами. Рівняння кола і прямої).

2. *Геометричні перетворення* **(**Переміщення (рух) та його властивості. Симетрія відносно точки і прямої, поворот, паралельне перенесення. Рівність фігур. Перетворення подібності та його властивості. Подібність фігур. Площі подібних фігур.

3. *Вектори на площині* **(**Вектор. Модуль і напрям вектора. Рівність векторів. Координати вектора. Додавання і віднімання векторів. Множення вектора на число. Колінеарні вектори. Скалярний добуток векторів).

Старша школа – 11 клас [123]

Координати, геометричні перетворення та вектори у просторі.

Прямокутна система координат у просторі. Відстань між точками. Координати середини відрізка. Поділ відрізка у даному відношенні.

Вектори у просторі. Рівність векторів. Колінеарність векторів. Компланарність векторів. Операції над векторами (та їх властивості: додавання і віднімання векторів, множення вектора на число, скалярний добуток векторів. Розкладання вектора за трьома некомпланарними векторами. Кут між векторами.

Рівняння площини, сфери.

Застосування методу координат та векторів до розв’язування геометричних задач.

Перетворення у просторі та їх властивості.

Крім того, в курсі математики (6 кл.), алгебри (7 кл.), геометрії (7 кл.), алгебри і початків аналізу (11 кл.), геометрії (11кл.) учні ознайомлюються з такими питаннями як: координатна пряма, координатна площина, координати точки; побудова графіків прямої, параболи, гіперболи, перетворення графіків, рівняння з двома змінними, системи рівнянь; точка, пряма, коло, дотична до кола, паралельні прямі, перпендикулярні прямі; дотична до кривої, трансцедентні криві – графіки показникової, логарифмічної та тригонометричних функцій; взаємне розміщення прямих і площин у просторі, конічні та циліндричні поверхні тощо.

Учні звикли до того, що коло і сфера означаються як геометричне місце точок площини і простору відповідно. Парабола і гіпербола учням відомі своїми рівняннями, наприклад $y = x^2$ і $xy = 1$. Такі різні підходи до введення в шкільному курсі математики окремих понять аналітичної геометрії допустимі, але бажано студентам – майбутнім учителям математики – показати, як такий підхід узгоджується з науковим підходом до визначення ліній і поверхонь.

Курс аналітичної геометрії слід будувати так, щоб після його вивчення не залишалося прогалин в усвідомленні, зокрема і методологічного характеру, стосовно матеріалу, який студенти в майбутньому будуть викладати учням у школі чи можливо студентам в університеті.

На основі аналізу програм шкільного курсу математики можна зробити ще один висновок – деякі питання аналітичної геометрії добре висвітлюються в шкільному курсі математики. А це означає, що в умовах значного скорочення годин на вивчення аналітичної геометрії в педагогічних університетах, необхідно ефективно застосовувати знання і уміння учнів, набуті за роки навчання в школі. Детальніше про це мова буде йти в другому розділі.

1.2.2. Мета вивчення аналітичної геометрії в педагогічному університеті. Аналітичній геометрії відводиться важливе місце в математичній підготовці фахівців у класичних та педагогічних університетах. Навчальна дисципліна „Аналітична геометрія” для напряму підготовки 6.040201 Математика входить у цикл професійної та практичної (професійно-орієнтованої) підготовки студентів.

Під час пошукового експерименту нами було здійснено аналіз програм з аналітичної геометрії, створених в різних педагогічних університетах. Кожна з програм містить мету та завдання вивчення дисципліни. Наведемо деякі з них.

1. З Програми Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова.

Метою викладання навчальної дисципліни «Аналітична геометрія» є ознайомлення студентів та оволодіння ними сучасними теоретичними положеннями і математичними методами аналітичної геометрії.

Основними завданнями вивчення дисципліни «Аналітична геометрія» є:

- ознайомити студентів з різними системами координат (на площині і в просторі) та їх основними задачами;
- допомогти глибоко засвоїти суть методу координат, навчити розв’язувати його основні задачі і широко використовувати при розв’язанні суто математичних та прикладних задач, а також при створенні математичних моделей реальних об’єктів;
- продемонструвати можливості методу координат при вивченні векторів, ліній, поверхонь, геометричних перетворень, тобто при побудові теорій:

1) векторів;
2) алгебраїчних ліній на площині;
3) алгебраїчних поверхонь в просторі;
4) геометричних перетворень площини та простору;

- допомогти в повній мірі оволодіти векторним методом розв'язання задач;
- розвивати алгоритмічне і аналітичне мислення.

2. З Програми Полтавського національного педагогічного університету імені В.Г. Короленка.

Мета курсу „Аналітична геометрія” – оволодіння студентами сучасними теоретичними положеннями і математичними методами з основних розділів курсу: елементи векторної алгебри, метод координат, теорія прямих та площин, теорія алгебраїчних ліній та поверхонь другого порядку, геометричні перетворення.

Основне освітнє *завдання* курсу – сформувати в студентів навички й уміння, пов'язані з використанням векторного і координатного методів розв'язування математичних задач. Саме векторний і координатний методи – одні з небагатьох універсальних методів, що дають можливість побудувати систематизований курс геометрії на основі аксіоматичного підходу, моделювати й досліджувати фізичні явища і процеси тощо.

3. З Програми Черкаського національного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького.

Мета курсу „Аналітична геометрія” **– сформувати у студентів знання,** навички та вміння з курсу аналітичної геометрії, які необхідні студенту при подальшому вивченні математичних дисциплін.

Завдання вивчення курсу „Аналітична геометрія”:

- розкрити значення аналітичної геометрії для загальної та математичної освіти людини;
- показати місце аналітичної геометрії серед математичних дисциплін, продемонструвати взаємозв'язок між ними;
- розкрити цілі й завдання вивчення аналітичної геометрії у вузі;
- озброїти студентів знаннями про поняття, факти та способи діяльності курсу аналітичної геометрії, які б давали студенту можливість викладати

аналітичну геометрію в школі та вузі, а також вільно використовувати їх при вивченні інших математичних дисциплін;

- формувати уміння застосовувати методи аналітичної геометрії для розв'язування задач;
- розкрити метод дослідження алгебраїчних ліній першого та другого порядку;
- розвивати загальну й математичну культуру студентів, розширювати їх науковий світогляд.

Отже, в усіх програмах мету вивчення аналітичної геометрії сформульовано безвідносно до майбутньої педагогічної діяльності студентів. Лише у завданнях до курсу, визначених у Програмі Черкаського національного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького, зауважується, «які б давали студенту можливість викладати аналітичну геометрію в школі та вузі».

Нам видаються слушними думки В. Г. Бевз і Г.О. Михаліна, висловлені стосовно навчання студентів педагогічних університетів.

«У процесі навчання предметів математичного циклу викладачам слід враховувати специфіку студентської аудиторії і пам'ятати, що вони навчають свого предмету не просто студентів, а майбутніх учителів» [16].

«Процес навчання повинен бути організованим так, щоб забезпечити формування у студентів професійних та навчально-пізнавальних мотивів, сприяти їх зміцненню і переведенню у ранг домінуючих» [157].

Оскільки загальною метою підготовки вчителя математики в педагогічному університеті є формування основ його професійної культури, то визначаючи мету навчального курсу для майбутніх учителів потрібно враховувати два взаємопов'язані аспекти:

- загальнонауковий;
- фаховий.

Загальнонаукова мета вивчення курсу "Аналітична геометрія" полягає в тому, щоб забезпечити студентам:

- оволодіння сучасними теоретичними положеннями і математичними методами з основних розділів курсу аналітичної геометрії (елементи векторної алгебри, метод координат, теорія прямих та площин, теорія алгебраїчних ліній та поверхонь другого порядку, геометричні перетворення);
- уміння застосовувати методи аналітичної геометрії до розв'язування відомих та нових задач і розуміння ефективності використання цих методів;
- розширення та поглиблення геометричних знань та їх зв'язків з іншими розділами математики;
- набуття достатнього обсягу знань, навичок і вмінь у галузі аналітичної геометрії для їх використання при вивченні інших математичних дисциплін.

Вивчення аналітичної геометрії в межах фахової підготовки має на меті дати майбутнім учителям знання, необхідні їм для правильного розв'язання методологічних і методичних питань, які виникають у процесі навчання математики в школі.

Як видно, до програм з аналітичної геометрії для педагогічних університетів входять вимоги стосовно умінь студентів застосовувати методи аналітичної геометрії при розв'язуванні різного роду задач (відомих і нових, суто математичних і прикладних тощо). Відображено у програмах і необхідність розширення взаємозв'язків (з іншими розділами математики та з іншими математичними дисциплінами). Остання вимога міститься як у завданнях, так і прописана в окремій рубриці «Міждисциплінарні зв'язки». Наприклад, у Програмі НПУ імені М.П.Драгоманова зазначається, що аналітична геометрія є базовою для вивчення таких спеціальних дисциплін як «Проективна геометрія та методи зображень», «Диференціальна геометрія», «Основи геометрії», а також окремих розділів загальних та спеціальних курсів фізики тощо.

З огляду на те, що програми складено для навчання аналітичної геометрії майбутніх учителів, то доцільним було б, відображення в них й інших міждисциплінарних зв’язків, зокрема, з математичним аналізом, лінійною алгеброю, алгеброю і теорією чисел і шкільним курсом математики.

Ще Омар Хайям (1048 - 1131), розв’язуючи рівняння третього степеня, розглядав перетини двох парабол, параболи і кола, параболи і гіперболи тощо.

Зокрема, він розв’язав рівняння $x^3 + ax = b$ за допомогою перетину кола $x^2 + y^2 = qx$ і параболи $x^2 = py$.

З цього приводу він зазначав, що, розв’язуючи кубічні рівняння, слід використовувати перші дві книги “Конічних перерізів” Аполлонія, бо “Початки” Евкліда недостатньо.

Геометричні побудови коренів рівнянь у XVII столітті викликали інтерес майже у всіх математиків. Використання геометричних побудов в алгебрі спричинило появу класифікації алгебраїчних кривих Р. Декарта до і тісно пов’язане з розвитком аналітичної геометрії [13].

Про зв'язок алгебри і аналітичної геометрії свідчить також той факт, що кожний з цих навчальних предметів (як і наук) оперує поняттями «група» і «підгрупа». У навчальному посібнику М. В. Працьовитого [192] розглядається група перетворень подібності та її підгрупи (група перетворень подібності з фіксованим центром, група перетворень подібності 1-го роду, група рухів, група поворотів і паралельних перенесень, група перетворень подібності 1-го роду з фіксованим центром, група гомотетій з фіксованим центром, група гомотетій і паралельних перенесень, група поворотів з фіксованим центром, група центральних симетрій і паралельних перенесень, група паралельних перенесень, група паралельних перенесень, паралельних фіксованому вектору.

Зрозуміло, що на заняттях з алгебри і теорії чисел, розкриваючи поняття групи, підгрупи та їх властивостей, викладачі розглядають структури різної природи, зокрема і групи геометричних перетворень.

Студентам також варто наголосити, що умови та властивості взаємного розташування прямих і площин є основою розв’язування систем рівнянь в курсі лінійної алгебри.

1.3. Психолого-педагогічні особливості управління навчально-пізнавальною діяльністю першокурсників у процесі навчання аналітичної геометрії

Психологічна наука розглядає навчання як форму психічного розвитку людини. Вважається, що в процесі навчання відбувається індивідуальне становлення людської особистості, формуються її риси та якості відповідно до власних потреб і вимог суспільства.

У дидактиці навчання розглядається як складна цілісна система, основними компонентами якої є: цільовий, змістовий, стимулюючо-мотиваційний, операційно-діяльнісний, контрольно-регулятивний і оцінювально-результативний.

Пізнавальна діяльність – це процес відображення в мозку людини предметів та явищ дійсності. З погляду психології, пізнавальна діяльність розглядається як послідовність процесів отримання студентом відомостей, їх аналізу, застосування у внутрішньому світі суб’єкта та відповідної реакції. З погляду педагогіки пізнавальна діяльність – це двосторонній взаємозалежний процес: робота педагога з організації пізнавальної діяльності студента та особистої самореалізації студента. Причому кінцевим результатом зусиль педагога є перетворення спеціально організованої пізнавальної активності студента у його власну пізнавальну діяльність. Здатність студентів до пізнавальної діяльності – одна з головних складових освітньої компетентності, яка дозволяє їм ефективно здійснювати самостійне навчання.

С. М. Мєняйлов [154] під навчально-пізнавальною діяльністю студентів розуміє процес і результат засвоєння способів дій, знань, які необхідні для здійснення професійної діяльності, розвитку пізнавального інтересу, творчих здібностей, пізнавальної активності і самостійності в умовах удосконалення змісту, форм і методів навчання. Він виділяє основні фчинники, які найбільше впливають на процес формування навчально-пізнавальної діяльності студентів:

- дотримання вимог дидактичних принципів навчання;
- сформованість мотиваційної сфери особистості у ставленні до діяльності та окремих її дій;
- професійна спрямованість викладання фундаментальних дисциплін;
- наступність у вивченні тем і навчальних предметів;
- педагогічна майстерність викладача;
- рівень використання комп'ютерної техніки, засобів мультимедіа, мережі Internet, якість навчально-методичного забезпечення;
- адекватний і своєчасний контроль за навчально-пізнавальною діяльністю студентів і відповідний корегувальний вплив;
- співробітництво і співтворчість суб'єктів навчальної діяльності.

Педагогічне управління навчальною діяльністю студентів – це система цілеспрямованої взаємодії учасників освітнього процесу стосовно змісту освіти, в результаті якої здійснюється узгодження компонентів освітнього процесу з метою досягнення результатів [83].

Управління є важливим і невід'ємним компонентом дидактичного процесу. Основними складовими управлінської діяльності є планування, мотивація, організація, координація, контроль. Ефективне управління навчально-пізнавальною діяльністю можливе лише за наявності добре сформульованої мети управління та критеріїв її досягнення.

Питаннями управління навчально-пізнавальної діяльності займались С. І. Архангельский [7], Г.А. Атанов [10], П.Я. Гальперин [37], М.В. Лагунова [109], Н. Ф. Талызина [235], та ін. У працях вчених підкреслюється, що управління є важливою складовою дидактичного процесу.

Наприклад, Г.А. Атанов [10] на основі аналізу робіт зарубіжних

педагогів подає класифікацію методів управління навчальною діяльністю у вигляді схеми, зображеної на рисунку 1.8.

Рис. 1.8. Класифікація методів управління навчальною діяльністю

Сенс реактивних методів полягає в тому, що викладач подає навчальний матеріал як реакцію на дії студентів. Аналізуючи відповіді студентів, стан їхньої поточної успішності, викладач знаходить зручні моменти та способи для подання відповідного повідомлення, але послідовність навчальних дій при цьому не планується. Перевагою реактивного підходу є простота його реалізації, а основним недоліком – фактична відсутність мети навчання.

Такий підхід доцільно використовувати під час консультацій, ініціатором яких є студент. За цих умов викладач подає навчальний матеріал як реакцію на потреби студентів.

Агенда-механізм заснований на використанні деякого впорядкованого списку завдань – *агенти.* Порядок завдань у списку визначається евристичними правилами, які встановлюють ступінь переваги вирішення кожного завдання для досягнення поточних цілей.

Суть агенда-механізму полягає в тому, що викладач формулює завдання, наприклад, вхідної контрольної роботи у певній послідовності та визначає час на виконання кожного завдання пропорційно його складності. Навчальною метою є або досягнення всіма студентами заданих рівнів навченості, або частиною студентів розв’язання задач певної складності за мінімальний час.

Інші методи управління навчально-пізнавальною діяльністю студентів засновані на використанні плану. Їх детально описує Г.А. Атанов для випадку використання комп’ютерних технологій [10, с. 92].

Розглядаючи різні види діяльності викладача та студентів, В.П. Симонов [218] виокремлює такі акти:

1) формування нових знань, умінь і навичок;

2) перевірка і оцінка, що і дають підстави для управлінського рішення відносно першого.

Дослідженням психологічних аспектів управління займались Б.Г. Ананьєв, Д.Б. Ельконін, С.Н. Леонтьєв, А. Маслоу, С.Л. Рубінштейн, Н.Ф. Тализіна, та інші.

Даючи психологічний аналіз теорії управління навчального процесу, Н.Ф. Тализіна [237] підкреслює необхідність використання в процесі навчання циклічного управління. Тобто, перш за все необхідно усвідомити поставлену перед суб’єктом управління проблему. Далі відповідно до поставленої мети, вивчити об’єкт управління, тобто отримати про нього максимальну кількість даних, які допоможуть оцінити стан об’єкта, а потім сформувати суть і характер можливих управлінських дій. Після діагностики слід скласти науково-обґрунтовану думку про майбутній стан об’єкта управління, тобто сформувати прогноз. Потім слід прийняти відповідне управлінське рішення. На основі прогнозу та прийнятого управлінського рішення відбувається планування і організація, а також контроль того, як управлінський вплив змінив стан об’єкта. На останньому етапі підводяться підсумки, робиться висновок про успішність управлінських дій, правильність управлінського рішення, аналізується стан об’єкта. А потім цикл знову повторюється.

Управління є видом діяльності, який передбачає усвідомлений вплив на учасників навчального процесу, сукупність їхніх певних дій щодо забезпечення функціонування і (само)розвитку цілісної системи навчального процесу, а також на зв'язки і взаємини, що виникають у процесі взаємодії. Але цей вплив має здійснюватися з врахуванням конкретної ситуації, потреб, можливостей, інтересів учасників навчального процесу.

Оскільки в контексті даного дослідження об’єктом управління є студент-першокурсник (особистість, яка може бути описана психо-фізіологічною моделлю) та його навчально-пізнавальна діяльність, то викладачу необхідно враховувати деякі психологічні принципи, які впливають на навчально-пізнавальну діяльність першокурсника.

Як індивід студент володіє певними біологічними даними, як особистість – певними індивідуально-психологічними властивостями. Однак можна виділити загальні психо-фізіологічні якості, притаманні людям 17-23 років. Тож розробка методики навчання студентів аналітичної геометрії потребує врахування психологічних закономірностей сприймання, пам’яті, мислення, уваги, а також вікових особливостей студентів.

Вікові особливості — комплекс фізичних, пізнавальних, інтелектуальних, мотиваційних, емоційних властивостей, притаманних більшості людей одного віку. На першому курсі переважно навчається молодь віком від 17 до 20 років. У віковій психології цей період відносять до юності:

- ***рання юність*** (15 – 18 років);
- ***початок дорослості (18 – 23 роки).***

Рання юність — це період завершення фізичного дозрівання організму та початкової соціалізації особистості. На момент закінчення середніх навчальних закладів у молоді вже мають бути сформовані потреби в спілкуванні та в освоєнні способів його здійснення, що дозволяє певною мірою реалізувати себе в праці, громадському житті, майбутній сім’ї тощо. У цей час відбувається формування теоретичного мислення й уміння орієнтуватись у різних його формах (науковому, художньому, етичному, правовому тощо), а також розвиток рефлексії, яка забезпечує усвідомлене й критичне ставлення до себе, становлення готовності до трудової діяльності.

У цьому віці юнаки і дівчата намагаються отримати незалежність від батьків і віднайти своє місце у світі дорослих. Характерні для юнацтва психічні особливості вимагають диференціації розумових здібностей та інтересів, розвитку інтегральних механізмів самосвідомості, вироблення світогляду, життєвої позиції тощо.

На початку періоду дорослості людина вже цілком сформована як у біологічному, так і в соціальному плані. Вона — передусім суб’єкт трудової діяльності (освіту на цьому етапі можна розглядати як особливий різновид праці). Соціально-психологічні властивості у цьому випадку визначаються не стільки віком, скільки соціально-професійним статусом людини.

Вік 17 - 25 років – це важливий період соціалізації людини, коли формуються усталені якості особистості. У цьому віці яскраво проявляється прагнення самостійно й активно обирати певний життєвий стиль та ідеал, формуються світогляд, етичні та естетичні погляди на основі синтезу багатьох знань, життєвого досвіду, самостійних міркувань і дій. Також можуть спостерігатися явища конформізму, бо означений вік людей характеризується максималізмом та категоричністю оцінок, які інколи переходять у негативне ставлення до думки дорослих, несприйняття їхніх порад, що може призводити до конфліктів.

Ю. А. Самарин [211] виділив низку характерних рис та протиріч соціально-психологічного характеру, що мають місце у розвитку студентської молоді.

1. У цей період молода людина здійснює вибір професії, оволодіває нею і починає випробувати себе в інших сферах життя, самостійно планує свою діяльність і поведінку, активно відстоює самостійність суджень і дій. Проте , у

зв'язку з матеріальною залежністю від батьків та необхідністю підкорятися чинному в навчальному закладі розпорядку у студентів виникає економічне протиріччя між різноманітністю бажань і можливістю їх здійснення, яке студент іноді намагається розв'язати додатковим заробітком на шкоду своїй основній навчальній діяльності.

2. Поєднання роботи з навчанням на денній формі призводить до дефіциту часу, що позначається або на якості навчання, або на сімейних взаєминах, що призводить до зниження інтенсивності інтелектуального та емоційного життя.

3. Хронічно не вистачає часу на опрацювання постійно зростаючого потоку відомостей і повідомлень.

4. В середній школі навчання і виховання завжди випереджують розвиток, а у вищому навчальному закладі розвиток студентів іноді випереджує навчання і особливо виховання.

В період 18-25 років засвоюються як норми відносин між людьми, так і професійно-трудові вміння і навички. У подальшому людина вже не лише засвоює соціальний досвід, а й відтворює його шляхом активного впливу на середовище через свою діяльність.

Найважливішу роль у пізнавальній діяльності людини відіграє *пам'ять*, яка своєрідно відображає, фіксує й відтворює те, що відбивається у свідомості у процесі пізнання.

Пам'ять – це запам'ятовування, зберігання та наступні відтворення людиною її досвіду. Важливою є така властивість пам'яті як її готовність до сприйняття даних. Швидко та багато запам'ятовувати, довго зберігати, правильно і своєчасно відтворювати – це ознаки доброї пам'яті. Розвинути добру пам'ять – одна з проблем активізації пізнавальної діяльності.

На думку М. Й. Варій, можна виділити різні моделі пам'яті: *мережна модель пам'яті, модель подвійного кодування* (за допомогою вербального і невербального кодування*), таксономічні моделі* (це залучення до класу, частина-ціле тощо), *аналогові* форми (за аналогією), *декларативна модель* пам’яті (усвідомлення знання за умов його актуалізації в разі потребі), *процедурна модель* пам’яті (знання спрямовуються автоматично, мало усвідомлюється і важко вербалізуються), *епізодична модель* пам’яті, *семантична модель* пам’яті, *імпліцитна модель* пам’яті (без усвідомлення предмета запам’ятовування, або несвідома пам’ять), *експліцитна модель* пам’яті (усвідомлювана пам’ять, зокрема класифікація об’єктів, їхнє групування), автобіографічна *модель пам’яті, модель мета пам’яті* (пам’ять про свою пам’ять) [76].

Стосовно навчання аналітичної геометрії найбільшу увагу слід приділити розвитку у студентів таких моделей пам’яті:

- *модель подвійного кодування*;
- *таксономічні моделі* ;
- *аналогові форми*;
- *експліцитна модель.*

Подвійне кодування уможливлює міцне та усвідомлене запам’ятовування фактів і тверджень, які стосуються, наприклад, взаємного розміщення прямих і площин у просторі або видів кривих другого порядку.

Наприклад, під час вивчення теми «Взаємне розміщення площин» студенти мають навчитися використовувати знаки для позначення перетину «$\cap$» (паралельності «||») площин, знати відповідні їх зображення, властивості та приклади з оточуючої дійсності, а також запам’ятати необхідні формули.

При вивченні кривих другого порядку студенти мають запам’ятати загальний вигляд кожної з формул, а також уявляти фігуру, що їй відповідає.

Таксономічні моделі пам’яті забезпечують правильність здійснення логічних операцій включення, об’єднання, перерізу, доповнення тощо. Ці операції тісно пов’язані з систематизацією та класифікацією понять, а тому є надзвичайно важливими для опанування аналітичною геометрією.

В аналітичній геометрії надзвичайне місце відводиться класифікаційним схемам, які допомагають подати навчальний матеріал у компактному вигляді, звернути увагу студентів на основне та продемонструвати студентам відмінності між класами, які не перетинаються. Наведемо приклад класифікаційних схем при вивченні теми «Взаємне розміщення прямих у просторі» (рис. 1.9) і «Геометричні перетворення площини. Рухи» (рис. 1.10).

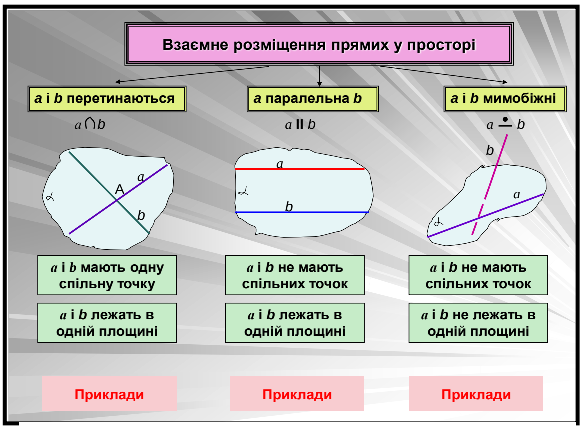


Рис. 1.9. «Взаємне розміщення прямих у просторі»

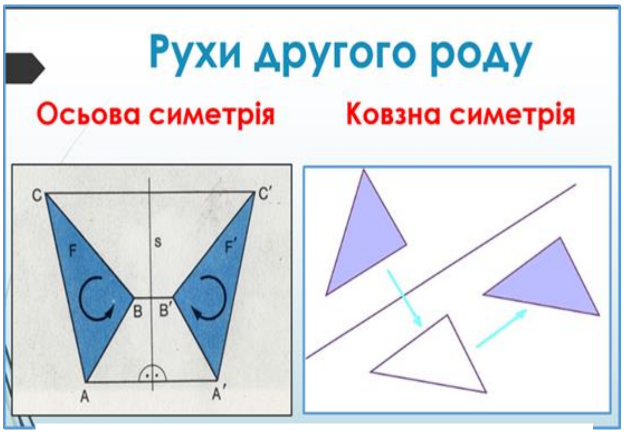


Рис. 1.10. «Геометричні перетворення площини. Рухи»

За аналогією зручно запам'ятовувати формули, що стосуються об'єктів двовимірного і тривимірного простору. Наприклад.

	Двовимірний простір	Тривимірний простір
Скалярний добуток векторів	$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$
Умова паралельності двох прямих	$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}$	$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$
Умова перпендикулярності двох прямих	$l_1 l_2+m_1 m_2=0.$	$l_1 l_2+m_1 m_2+n_1 n_2=0$

Експліцитний вид пам'яті полягає у свідомому згадуванні тих фактів, що були вивчені раніше. Такий вид пам'яті студенти використовують під час контрольних робіт, колоквіумів, екзаменів тощо.

Пам'ять розвивається у тісному зв'язку з розвитком мовлення та мислення. *Мислення* посідає чільне місце в структурі всіх пізнавальних процесів. Мислення має мимовільну форму – це асоціативний потік думок, а довільна форма – це розв’язування задач [185].

Розрізняють три головних різновиди мислення:

- ***н**аочно-дійове мислення* – розв’язання завдання безпосередньо включається в саму діяльність;
- *наочно-образне мислення* виявляється в тому, що людина оперує образами предметів та явищ, аналізуючи, порівнюючи чи узагальнюючи у них істотні ознаки;
- *словесно-логічне мислення* (або абстрактне) відбувається у словесній формі за допомогою понять, які не мають безпосереднього чуттєвого підґрунтя, властивого відчуттю і сприйняттю [76].

Психологи вважають, що кожне мислення функціонує тільки тоді, коли в ньому з’являється потреба. У дослідженнях Н.А. Менчинської, П.Я. Гальперіна, Є.М. Кабанової–Меллер зазначається, що навчання стимулює пізнавальну активність студентів, потребу у виборі головного в інформації, вміння аналізувати її, активно мислити, ставити нові вимоги до навчання.

Під час розв’язання задач з аналітичної геометрії частині студентів складно, наприклад, уявити лінію чи поверхню, яку потрібно дослідити та побудувати її графік в системі координат. На допомогу студентам можуть бути надані викладачем моделі, на яких вони можуть побачити потрібні геометричні об’єкти. В сучасних умовах розвитку вищої освіти і комп’ютерних технологій доцільно використовувати динамічні програмні засоби. Такий вид роботи сприяє розвитку просторового мислення у студентів.

Крім мислення, в курсі аналітичної геометрії при вивченні та побудові кривих і поверхонь, студенту необхідно розвивати уяву та уявлення, тобто можливість віртуального створення нових образів на основі вже сприйнятих. Результатом уявлення є образ. Це вкрай необхідно, коли у студента виникає необхідність уявити, яких форм набуде, наприклад, поверхня другого порядку, задана рівнянням у канонічній формі $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ за умови зміни її параметрів.

Необхідною для навчання властивістю мислення є увага, яка в психології вважається основною формою організації пізнавальної діяльності та початковою сходинкою розуміння. У психології розрізняють 3 види уваги:

- довільна (свідоме, вимагає вольових зусиль);
- післядовільна (мета усвідомлена, але вольових зусиль не вимагається);
- мимовільна (засновано тільки на інтересі, не вимагає ні усвідомлення мети, ні зусиль).

Психологи рекомендують педагогам у своїй роботі більше спиратися на післядовільну увагу, що дозволяє без особливих зусиль підтримувати інтерес до змісту навчальної діяльності. Вона характеризується тривалою зосередженістю, напруженою інтенсивністю розумової діяльності, високою продуктивністю праці. Діяльність, яка виконується тільки на основі довільної уваги, вимагає значних зусиль і швидко стомлює. Я. І. Груденов виділяє кілька чинників, що послабляють увагу при вивченні математики [55]:

1) задача дуже важка, студент втрачає впевненість у власних можливостях її розв’язати;
2) дуже швидкий або повільний темп роботи;
3) одноманітність задач і вправ;
4) відсутність інтересу;
5) дуже проста робота.

У періоді з 18 до 25 років особливо помітні пульсації у мисленні, пам’яті та увазі. Спади змінюються підйомами. Піки в розвитку мислення припадають на 20, 23, 25 років. Спади спостерігаються в 22 та 24 роки. Максимальні рівні розвитку пам’яті припадають на 19, 23 та 24 роки. Спади спостерігаються у 21, 25. Піки в розвитку уваги досягаються у 22, 24 роки. Спади — у 23, 26.

У віці від 18 до 21 року рівень уваги стабільний. Як видно, спостерігаються тимчасові розбіжності підйомів та спадів у рівнях розвитку пам'яті та мислення. Ця суперечливість не може не позначитися на успіхах у навчанні. Так, у 18-літньому віці студент може запам'ятати досить великий обсяг навчального матеріалу, що збільшується на другому курсі (пам'ять у цей час досягає високого розвитку), але не може здійснити розумову переробку всього отриманого матеріалу, оскільки мислення в цей час відстає від пам'яті. Цим, зокрема, можна пояснити, чому значна кількість студентів на екзаменаційній сесії за третій семестр має нижчу успішність, ніж у перших двох [178].

У пам'яті спостерігається стійке зрушення у напрямі випередження мислення на один рік, що особливо помітно в періоди ранньої зрілості. Зміни в пам'яті ніби готують зміни в розвитку мислення. У, свою чергу, увага є регуляторною функцією у вікових точках розходження пам'яті та мислення [34].

Отже, 18-25 років — період відносно високого розвитку мислення, пам'яті та низького рівня розвитку уваги.

Протягом усього періоду навчання у студентів відбуваються зміни і коливання в процесах мислення, пам'яті, уваги. Найменші зміни відбуваються в образній пам'яті, яка зберігає усталений рівень розвитку. З віком підсилюється роль практичного мислення. У періоди ранньої юності практичне мислення більш пов'язане з логічним, а в періоді початку дорослості — з образним. Відбуваються також поступові зміни у співвідношенні згаданих компонентів, зв'язок між ними підсилюється за рахунок набуття знань і життєвого досвіду. Не залишаються постійними й властивості уваги, з віком спостерігається її поліпшення. Особливо підвищується роль вибірковості уваги та її концентрації, що пояснюється також впливом набутих знань і життєвого досвіду.

Одним із найважливіших чинників успішного навчання студентів є мотивація. Мотиви навчальної діяльності студентів поділяють на внутрішні і зовнішні. До внутрішніх належать: суспільна значущість навчання, професійні мотиви, що відображають значення навчальної діяльності з оволодінням майбутньою професією; пізнавальні, пов’язані з потребою у нових знаннях. Зовнішні мотиви зорієнтовані на цінності, що стосуються позанавчальної діяльності: мотиви матеріального заохочення; особисті інтереси, пов’язані з одержанням диплома; мотиви спілкування, престижу серед студентів. Великий позитивний вплив на діяльність студентів справляють внутрішні мотиви. З перших тижнів навчання слід розкривати перед студентами суспільну значущість обраного ними фаху і необхідність розвитку своїх професійних якостей. Усе це сприятиме посиленню внутрішньої і зовнішньої мотивації студентів [224].

Питанням розвитку та управління фаховою мотивацією присвячена численна кількість наукових праць у галузі зарубіжної психології та педагогіки. Проблемами мотивів займалися такі вчені як Дж. Аткінсон, Г. Холл, К. Мадсен, А. Маслоу. Їхні роботи дозволяють виокремлювати різні підходи до проблеми пізнавальної активності студентів. Суттєве значення в цьому зв'язку мають праці науковців, що належать до напряму, відомого під назвою «гуманістична психологія», зокрема, роботи американських науковців К. Роджерса та А. Маслоу. Гуманістична психологія внесла багато позитивних моментів у розуміння організації процесу навчання, ролі викладача у цьому процесі.

Навчальна мотивація першокурсників у процесі вивчення аналітичної геометрії забезпечується різноманітними психологічними механізмами:

- матеріал, що використовується на занятті, повинен бути цікавим;
- прийоми роботи з навчальним матеріалом повинні приваблювати студентів;
- студент має усвідомлювати рівень своєї успішності;
- новий матеріал та прийоми роботи з ним мають сприяти формуванню інтересу до предмета та викликати у студента впевненість у собі;
- наявність сприятливого психологічного клімату в ході процесу навчання.

Під час навчання ліній і поверхонь студентів приваблюють приклади про зв'язки теми з іншими предметами, галузями різних наук, культурою, побутом тощо. Окремі приклади вони готують самостійно (Додаток В). Викликає інтерес у студентів, що терміни «гіпербола» і «еліпс» використовуються в мовознавстві.

Е́ліпс або е́ліпсис (грец. λλειψις — пропуск, випадіння, нестача) — пропуск у висловлюванні деяких структурних елементів, які мають домислюватись за контекстом. Наприклад, у реченнях можуть обминатися дієслова-зв'язки («Я вже додому, а ти ще на роботу?»).

Механізмом формулювання навчальної мотивації є вироблення єдиної структури цілей навчальної діяльності. Велику роль відіграє вчасне і систематичне формулювання викладачем цілей навчання, які студент мусить прийняти і спрямувати свою діяльність на їх досягнення. Якщо студент чітко усвідомлює, що знання, отримані з аналітичної геометрії при вивченні модулю «Поверхні другого порядку», будуть необхідні в подальшому курсі математичного аналізу при вивченні модуля «Інтегральне числення функцій кількох змінних», це сприятиме ефективному засвоєнню навчального матеріалу, і відповідно підвищиться рівень його пізнавальної активності. Для досягнення поставлених навчальних цілей студент насамперед має усвідомити для чого він має навчатися: заради отримання диплома про вищу освіту чи для задоволення своїх власних навчально-пізнавальних потреб.

На наш погляд, сформована навчальна мотивація на першому курсі дозволить студентам у подальшому ефективно самореалізовувати свій особистісний, фаховий і творчий потенціал. У мотиваційній сфері студентів-першокурсників надзвичайно велике значення відіграє "інтерес до навчання". Навчально-пізнавальні інтереси першокурсників, здебільшого, ситуативні. Ставлення студентів до процесу навчання характеризується невисоким рівнем особистісної відповідальності [180]. Саме тому викладач повинен бути ознайомленим із психологічним портретом групи студентів та виходячи з цього, планувати свою роботу з групою студентів, використовувати нетрадиційні форми групових та індивідуальних занять з метою активізації творчості студентів [180].

Отже, передумовами навчально-пізнавальної діяльності студента є наявність мети, фізіологічна і психологічна готовність до навчання, бажання вчитися, зосередження уваги на навчально-пізнавальній діяльності та належний рівень розвитку.

Для успішного навчання у ВНЗ студенту необхідний високий рівень розвитку сприйняття, пам’яті, мислення, уваги, уяви, ерудованості, широти пізнавальних інтересів, оволодіння логічними операціями тощо. Окрім цього, для студентів педагогічного вузу важливим є також високий рівень мовленнєвої культури та багатий словниковий запас, достатня комунікабельність і соціально-перцептивні здібності тощо.

Основним у навчальній діяльності є вирішення навчальних завдань та вдосконалення навчальних дій. Якщо навчання перетворюється в творчість, то це особливо сприятливо впливає на емоційну сферу студента, загострює його пам’ять та уяву, викликає почуття радості та задоволення, сприяє підвищенню інтересу до пізнавальної діяльності.

Навчання у вищому навчальному закладі – один із найважливіших періодів у житті молодої людини. Навчання як діяльність має місце там, де дії людини управляються свідомою метою засвоїти певні знання, навики, уміння, і, чим більш значуща для студента ця діяльність, то вищі її результати.

Педагогічне управління навчальною діяльністю студентів передбачає зміну моделі освітнього процесу – від лінійної (загальної для всіх жорсткої схеми) – до нелінійної (з гнучкими індивідуальними маршрутами), яка «змінює» поведінку людини в теперішньому і майбутньому, її ставлення і її особистість» (К. Роджерс) як на рівні освітнього процесу, так і в межах однієї дисципліни.

Все вищезазначене дає підстави сформулювати закономірності вдалого управління викладачем навчальною діяльністю студентів:

- управління як підтримка і супровід, що дає змогу реалізувати персоніфікацію через індивідуалізацію і залучення студентів до здійснення власної освітньої діяльності;
- гнучкість і ситуативність, що забезпечує системне узгодження компонентів освітньої системи відносно результатів освіти в умовах нелінійної моделі освітнього процесу у ВНЗ;
- делегування повноважень і відповідальності студентам, що сприяє залученню студентів у співуправління їх навчальною діяльністю.

Визначення цілей управління навчальною діяльністю студентів на макрорівні та побудова їх ієрархії важлива при виборі засобів, методів та організаційних форм навчання, виборі темпу та послідовності подання навчального матеріалу. При цьому важливого значення набуває об'єктивне та своєчасне оцінювання кожного позитивного результату навчально-пізнавальної діяльності студентів та їх відповідне стимулювання до систематичної активної навчальної діяльності.

Навчальна діяльність студентів може бути самостійною, а також керованою викладачем. Ефективність управління викладачем навчально-пізнавальною діяльністю студентів залежить від особистих якостей учасників навчального процесу: їх активності, ініціативності, а також бажання вчитися (для студента) та навчати (для викладача).

У процесі оволодіння студентами знаннями, уміннями та навичками з аналітичної геометрії велику роль відіграє уміння викладача управляти навчальним процесом. З боку викладача управління може бути пасивним чи активним. Пасивно керованим процесом вважається такий його спосіб організації, де основна увага приділяється формам передачі нового матеріалу з аналітичної геометрії, а процес здобуття знань студентами залишається стихійним. При цьому переважають репродуктивні методи. Активно керований процес спрямовується на забезпечення засвоєння міцних знань студентів, та посилення зворотного зв'язку. Тут передбачається урахування індивідуальних особливостей студентів, моделювання навчального процесу, його прогнозування, чітке планування, активне управління навчанням і розвитком кожного студента. У процесі навчання студент також може виявляти пасивну і активну пізнавальну діяльність.

Під час вивчення аналітичної геометрії студент піддається впливу явних вказівок викладача чи неявних, тобто за допомогою системи. Студент здійснює рухи поступального характеру з елементами циклічності, що відповідає циклічному характеру як самої пізнавальної діяльності, так і процесу управління нею. Цей процес можна представити у вигляді схеми, зображеної на рисунку 1.11 [109].

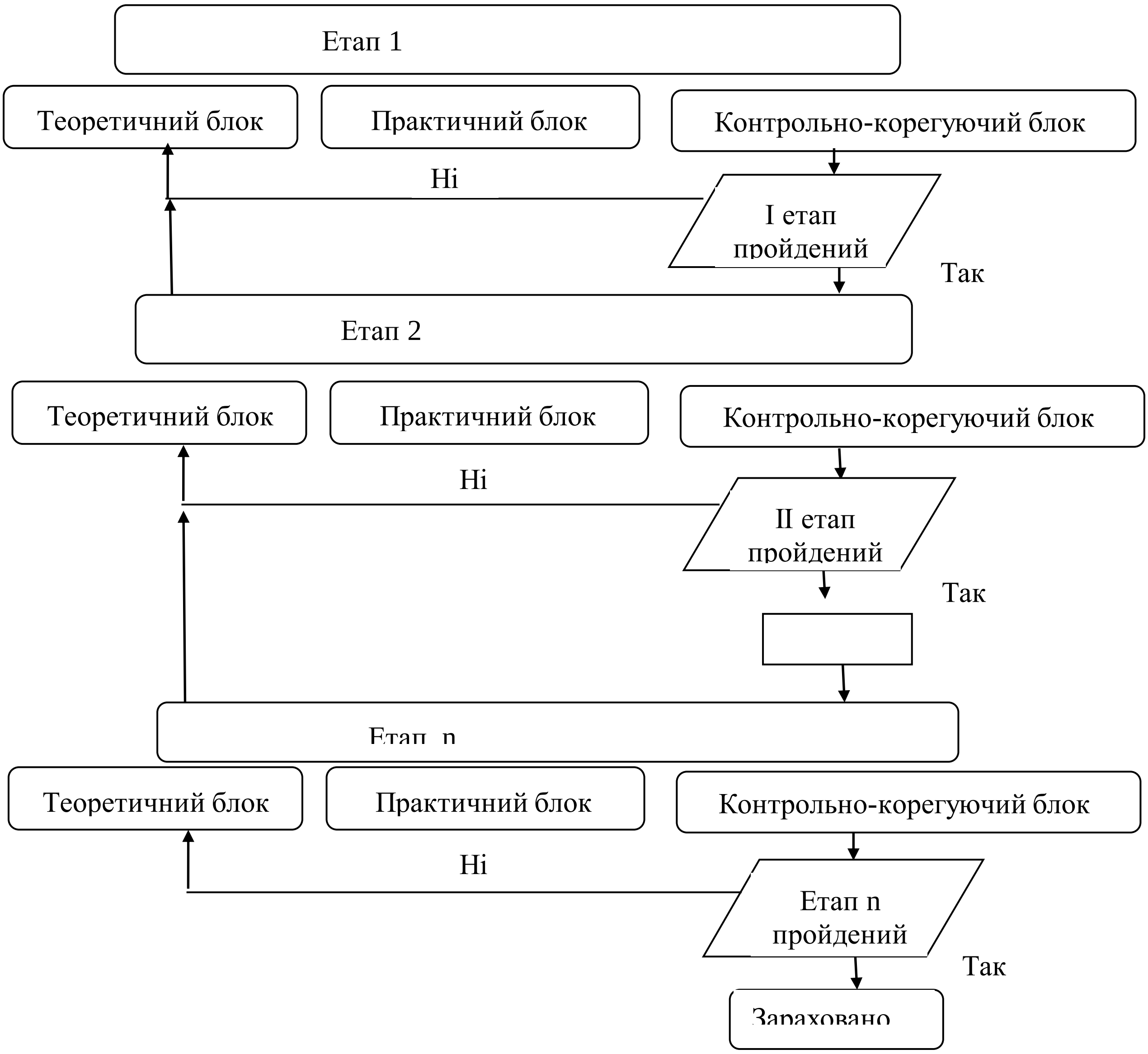


Рис. 1.11. Процес управління навчально-пізнавальної діяльності

Ефективність процесу навчання залежить від психологічної підготовленості студентів до навчально-пізнавальної діяльності, яка передбачає: усвідомлення студентом мети навчання, що стимулює його навчально-пізнавальну діяльність; фізіологічну і психологічну готовність до навчання; бажання вчитися та активність у процесі навчання, вміння зосередитися на навчальній діяльності; належний рівень розвитку. Саме тому важливою складовою організації навчально-пізнавальної діяльності першокурсників є їхня адаптація до умов навчання у ВНЗ.

Поняття «адаптація» (від латинського слова «adapto» – «пристосовую») – це процес активного пристосування особистості до умов середовища, що змінюється.

Курс аналітичної геометрії вивчається на першому курсі ВНЗ, тож припадає саме на період адаптації, який пов'язаний із руйнуванням раніше сформованих стереотипів, що може породжувати труднощі як у навчанні, так і в спілкуванні. Для навчального процесу першокурсника характерна періодичність (замість шкільної неперервності) контролю знань студентів, провідне значення в якому мають заліки та іспити. В університеті замість класно-урочної шкільної системи застосовуються різні види навчальних занять, які в школі практикуються рідко (лекції, семінари, лабораторні роботи).

Серед усіх труднощів адаптаційного періоду студенти найчастіше самі усвідомлюють необхідність оволодіння досить високим рівнем самостійності, що є основою навчального процесу в університеті. Отже, особлива проблема у студентів-першокурсників полягає на перетині двох психолого-педагогічних площин – адаптації та самостійності. Слід зазначити, що адаптація – це площина психологічна, а самостійність – педагогічна [262].

Навчання у вищому навчальному закладі суттєво відрізняється від навчання в шкільному закладі, бо розраховане на високий рівень свідомості та особисті інтереси студентів. Для успішного навчання в університеті одного лише сформованого в школі уміння вчитися вже недостатньо. Важливо, щоб студент не просто вмів вчитися самостійно, а спрямовував свою творчу пізнавальну активність на життєве самовизначення й професійне самоствердження.

1.4. Методичні засади вивчення лінії і поверхні в курсі аналітичної геометрії

Навчання у вищому навчальному закладі це – складний і багатогранний процес взаємодії викладача і студентів. У цьому процесі викладач здійснює педагогічну діяльність, яка, по суті, є управлінням пізнавальною діяльністю студентів. Навчально-пізнавальна діяльність студентів спрямовується на:

- оволодіння знаннями, уміннями і навичками та формування предметних і фахових компетентностей;
- формування наукового світогляду та ціннісних орієнтацій;
- забезпечення інтелектуального та особистісного розвитку;
- підготовку до майбутньої професійної діяльності.

Серед спеціальних математичних дисциплін у підготовці вчителя математики геометрія посідає важливе місце в розвитку абстрактного мислення та просторової уяви студентів, таких необхідних їм у майбутній професійній діяльності. Важливість геометрії багато в чому визначається сучасним розумінням цієї галузі знань, чіткістю та конкретністю її викладу, глибиною і широтою геометричного матеріалу, застосуванням цих знань в різних галузях науки. Тому особливо актуальними видаються питання теорії та методики навчання різних розділів курсу геометрії в педагогічному університеті. Серед них велике значення для математичної підготовки студентів має аналітична геометрія, оскільки саме під час опанування цією дисципліною систематизується, узагальнюється і осмислюється багато знань, отриманих у школі, але на більш високому науковому рівні. Вже на першому курсі закладається фундамент математичної підготовки майбутнього вчителя,

високий рівень якої є однією з умов успішної педагогічної діяльності.
Як зазначалося в п. 1.2, центральне місце в курсі аналітичної геометрії відводиться вивченню ліній і поверхонь. Ця змістова лінія відрізняється від елементів векторної алгебри та методу координат як за обсягом навчального матеріалу та кількістю годин, що відводиться на його вивчення, так і за великою кількістю різного роду понять і підходів до їх тлумачення.

Для встановлення особливостей та визначення методичних умов щодо ефективного вивчення ліній і поверхонь в педагогічному університеті нами були опрацьовані провідні положення психології та педагогіки (див. п.1.3). В основу методики навчання аналітичної геометрії загалом та змістової лінії «Лінії та поверхні» зокрема покладені такі методологічні підходи – компетентісний, діяльнісний, індивідуальний та розвивальний.

Компетентнісний підхід до навчання – це багатоаспектне утворення, яке передбачає формування у студентів певної системи компетентностей (ключових, загальнопредметних та предметних). Насамперед компетентнісний підхід стосується мети, змісту та результатів навчання. На сьогодні цей підхід має нормативний статус і досліджується методистами з різних дисциплін [182], [187].

О. І. Пометун, під поняттям «компетентнісний підхід» розуміє спрямованість освітнього процесу на формування та розвиток ключових (базових, основних) і предметних компетентностей особистості, результатом якого буде формування загальної компетентності людини, що є сукупністю ключових компетентностей, інтегрованою характеристикою особистості. Така характеристика має сформуватися у процесі навчання й містити знання, уміння, ставлення, досвід діяльності й поведінкові моделі особистості [187].

Н. С. Побірченко, розглядаючи проблему компетентнісного підходу у вищій школі, зазначає, що в Україні пріоритетними визначено такі компетентності:

- соціально-особистісні,

- загальнонаукові,
- інструментальні,
- професійні (загально-професійні, спеціально-професійні) [182, с. 28].

Розкриваючи специфіку компетентнісного підходу, Н. С. Побірченко звертає увагу на його гуманітарну основу (розвиток світогляду, міждисциплінарного чуття, здатності до прийняття індивідуальних креативних рішень, самоосвіти, а також формування гуманістичних цінностей). До особливостей компетентнісного підходу у вищій школі, крім інших, автор відносить перенесення акцентів з поінформованості суб'єктів навчання на їх уміння використовувати знання для вирішення практичних проблем і націленість фахової підготовки на майбутнє працевлаштування випускників [182, с.29].

Отже, набуття студентами будь-яких компетентностей можливе лише за умови цілеспрямованої діяльності. Тобто в умовах реалізації компетентнісного підходу приорітетним є діяльнісний підхід.

Діяльнісний підхід передбачає формування всіх компонентів особистості через діяльність самого студента. За цих умов діяльність розглядається як форма активності, що зумовлена специфікою організації навчальної роботи. В умовах діяльнісного підходу найважливішим чинником розвитку студента виступає його активна пізнавальна та комунікативна діяльність. Реалізація діяльнісного підходу передбачає широке застосування методів і прийомів активного та інтерактивного навчання, за умов якого необхідно мотивувати студентів до навчання, заохочувати до активної діяльності, урізноманітнювати форми методи та засоби навчання, практикувати зміни видів діяльності.

Мотивація є визначальним компонентом організації навчальної діяльності. Вона може бути внутрішньою або зовнішньою стосовно діяльності, але завжди є внутрішньою характеристикою особистості як суб'єкта цієї діяльності. Сформована навчальна мотивація на першому курсі дозволить студентам у подальшому ефективно реалізовувати свій особистісний, фаховий і творчий потенціал.

Пізнавальна мотивація, інтерес до вибраної професії та її опанування – один з найважливіших факторів успішного навчання студентів. Чим вищий рівень мотивації, чим більше чинників (мотивів) спонукають людину до діяльності, тим більше зусиль вона здатна докладати. Високо мотивовані індивіди більше працюють і, здебільшого, досягають кращих результатів у діяльності. Часто трапляється так, що менш здібний, але більш мотивований студент досягає вищих успіхів у діяльності, ніж його обдарований товариш [82], [110].

Діяльнісний підхід виступає одним зі способів реалізації такої спеціально організованої співпраці викладача та студентів, що передбачає навчання плануванню, організації та самоаналізу діяльності. Враховуючи основні психолого-педагогічні чинники формування навчально-пізнавальної активності студентів вищих закладів освіти (пізнавальні здібності студентів, зміст навчального матеріалу, особливості колективу студентської групи, специфіку педагогічної діяльності викладача та методів навчання), можна твердити, що саме розвинута фахова мотивація та сформовані пізнавальні здібності студентів-першокурсників є передумовою успішного розвитку навчально-пізнавальної діяльності.

Діяльнісний підхід до навчання аналітичної геометрії найяскравіше реалізується під час розв’язування задач, пов’язаних з побудовою та дослідженням, що особливо сприяє активізації у студентів мислительних операцій (аналіз, порівняння, синтез, групування, узагальнення тощо).

Сутність *індивідуального підходу* полягає у вивченні та врахуванні індивідуальних особливостей студентів. До індивідуальних особливостей відноситься своєрідність сприймання, мислення, пам’яті, уяви, інтересів, нахилів, здібностей. Основні шляхи реалізації індивідуального навчання у вищій школі детально розкрито у монографії Т. Л. Годованюк [42].

Усім викладачам відомо, що кожен студент – унікальна, неповторна особистість зі своїми особливостями уваги, сприйняття, пам’яті тощо. Тому і процес засвоєння ним знань і умінь, умови формування різного роду компетентностей окремого студента також індивідуальний. Це вимагає від викладача уважніше ставитися до реалізації в системі навчання індивідуального підходу. Особливо це стосується роботи зі студентами-першокурсниками, оскільки їхні індивідуально психологічні особливості та рівень готовності до навчання у вищій школі не відповідають новим умовам навчального середовища, потребують пристосування до нього. Індивідуальні особливості студентів суттєво впливають на тривалість і характер адаптаційного періоду.

Існує три форми адаптації студентів-першокурсників до навчання у ВНЗ:

1) *формальна,* яка стосується пізнавально-інформаційного пристосування до нового оточення, структури вищої школи, змісту навчання в ній, її традицій, своїх обов’язків. Саме цим пояснюються розтягнені строки адаптації студентів-першокурсників до нової системи навчання, нового способу життя, утворення нового динамічного стереотипу і є однією із причин низької успішності студентів першого курсу під час зимової сесії.

2) *соціально-психологічна* (суспільна) адаптація відображає процес внутрішньої інтеграції (об’єднання) академгрупи студентів-першокурсників та її інтеграцію зі студентським оточенням у цілому. У цьому контексті основною функцією адаптації є прийняття індивідуумом норм і цінностей нового соціального середовища, форм соціальної взаємодії, які в ньому склалися, формальних і неформальних зв’язків, а також форм навчальної діяльності.

3) *дидактична* форма адаптації стосується проблеми підготовки до нових форм і методів навчальної роботи у ВНЗ і відображає, в першу чергу, інтелектуальні можливості студентів-першокурсників. У вищих навчальних закладах студенти навчаються в умовах кредитно-рейтингової системи навчання. Запровадження такого виду навчання передбачає: реорганізацію

традиційної схеми "навчальний семестр - навчальний рік - навчальний курс"; раціональний поділ навчального матеріалу дисципліни на модулі й перевірку якості засвоєння теоретичного і практичного матеріалу кожного модуля; використання ширшої шкали оцінювання знань; вирішальний вплив суми балів, одержаних упродовж семестру, на підсумкову оцінку. На першому курсі навчання студенту важко адаптуватися до такого темпу і форми роботи, форм та методів навчальної діяльності, адже першокурсникам потрібно систематично працювати, щоб досягти бажаних результатів.

У кожній студентській групі для окремого студента адаптація проходить у різні строки і з неоднаковим напруженням. Майстерність педагога полягає в тому, щоб саме в адаптаційний період ненав'язливо, але уміло скерувати навчально-пізнавальною діяльністю студентів. Особливо це стосується тих студентів, які неспроможні впоратися з вищевказаними проблемами.

Індивідуальний підхід під час вивчення ліній і поверхонь розглядається нами як вибір викладачем різних форм, методів, засобів і прийомів активізації навчально-пізнавальної діяльності для окремих студентів під час позааудиторної роботи (індивідуальні завдання, консультації, бесіди, дистанційні курси тощо). За наявності довірливих і партнерських стосунків між студентами та викладачем створюються умови для формування у студентів впевненості у своїх силах і стійкого інтересу до предмету. А це, в свою чергу, забезпечує свідоме та інтенсивне засвоєння навчального матеріалу.

Розвивальний підхід базується на розумінні взаємозв'язку навчання і розвитку. Проблема зв'язку навчання та розвитку пройшла довгий шлях. Сучасна наука твердить, що ці процеси взаємопов'язані, результат яких залежить від спадкових і середовищних чинників. Саме ці фактори і визначають існуючі позиції у розумінні вказаного взаємозв'язку:

1) концепція навчального розвитку декларує, що розвиток іде попереду навчання;

2) концепція розвивального навчання виходить з того, що саме навчання має йти попереду розвитку.

Навчання майбутніх учителів слід організувати так, щоб досягнути найкращих результатів розвитку.

Своєрідність розвивального підходу полягає у його спрямованості на розвиток пізнавальної сфери, інтелектуальних здібностей, розвиток здібностей до самовдосконалення, підвищення ефективності навчальної діяльності через підтримку пізнавального інтересу, активізацію пізнавальних процесів (мислення, пам’яті, уяви тощо), мислительних операцій (аналізу, синтезу, порівняння. узагальнення, систематизації, групування), розвиток самостійності, критичності, глибини мислення, ознайомлення зі способами розумових дій.

Розвивальний підхід до вивчення ліній і поверхонь ґрунтується на таких положеннях:

- системність і цілісність змісту, провідна роль теоретичних знань;
- усвідомлення студентами процесу навчання, зокрема можливість навчання на високому рівні складності та швидкими темпами.
- спрямованість навчання на вміння долати труднощі, досягати результату, проведення досліджень, розвиток працездатності;
- забезпечення становлення емоційно-ціннісної сфери.

На основі аналізу розглянутих методологічних підходів до навчання та психолого-педагогічних особливостей управління навчально-пізнавальною діяльністю першокурсників можна сформулювати основні методичні умови ефективного навчання студентів педагогічних університетів аналітичної геометрії, зокрема змістової лінії «Лінії та поверхні».

1. Забезпечення професійної спрямованості навчання. Це один із основних факторів, який найбільше впливає на процес формування навчально-пізнавальної діяльності студентів (див.п.1.3). На необхідності реалізації професійної спрямованості навчання курсів вищої математики у педагогічних університетах неодноразово наголошували Г.О. Михалін [157], А.Г. Мордкович [162], Г.І. Саранцев, [212], І. Є Шиманський [258] та інші.

Під професійною спрямованістю навчання майбутнього вчителя розуміють таке навчання, яке забезпечує формування максимально можливої кількості компонентів професійної культури вчителя (математичної, методичної, мовної, моральної, естетичної, правової, педагогічної, психологічної, інформаційної, інтелектуальної тощо) [157, с. 12,15].

Традиційно підготовку майбутніх учителів до педагогічної діяльності розпочинають на 3 курсі у зв'язку з введенням курсу «Методика навчання математики». Водночас зміст курсу аналітичної геометрії настільки тісно пов'язаний з шкільними програмами (див. п.1.2), що для його ефективного навчання слід враховувати два взаємопов'язані положення:

- раціональне використання суб'єктами навчального процесу відомостей з аналітичної геометрії за шкільний курс та уміння їх застосовувати в нових умовах уможливлює швидке та безболісне просування у засвоєнні систематичного курсу аналітичної геометрії;

- якісні та свідомо засвоєні знання, отримані студентами в процесі вивчення курсу аналітичної геометрії в університеті, створюють міцне підґрунтя для успішної педагогічної діяльності у майбутньому (для підготовки учнів, які будуть мати високий рівень математичних знань).

Якщо студентам вчасно (на початку вивчення курсу) розкрити зміст цих положень, то це стане вагомим мотивом для якісного вивчення аналітичної геометрії. У такий спосіб уже з першого курсу можна розпочинати формування у студентів готовність до майбутньої педагогічної діяльності.

2. *Реалізація міжпредметних зав'язків.* Відомо, що векторне числення формувалося на основі трьох джерел [13]. Це – геометричне (числення відрізків), механічне (дослідження векторних величин) і алгебраїчне (теорія кватерніонів). Отже, аналітична геометрія тісно пов'язана з іншими геометріями, фізикою та алгеброю. Якщо розглядати лінії та поверхні, то цей

матеріал також тісно пов’язаний з математичним аналізом. Крім, того багато задач з математичного аналізу містять відомості, які зараз вивчаються на заняттях з аналітичної геометрії, хоча історично вони виникали у вчених, які працювали у витоків як аналітичної геометрії, так і математичного аналізу. Наприклад.

Задача Архімеда. Обчисліть площу фігури, обмеженої спіраллю $\rho = a\varphi$ ($\varphi \in [0;2\pi]$) і полярною віссю ($\rho = a\varphi$ – спіраль Архімеда (рис. 1.12)).

Відповідь: $\dfrac{4a^2\pi^3}{3}$.

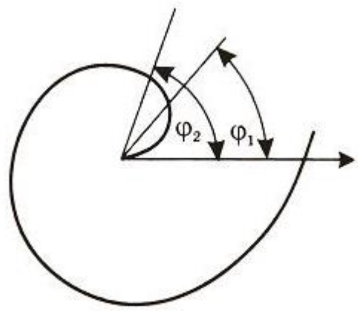


Рис.1.12. Спіраль Архімеда

Задача Гюйгенса і Ферма. Доведіть, що площа фігури, обмеженої цисоїдою і її асимптотою, дорівнює потроєнній площі круга, що її утворює.

Д о в е д е н н я. Рівняння цисоїди має вигляд: $y^2 = \dfrac{x^3}{2r - x}$, де r –радіус круга, що її утворює. Половина шуканої площі $\dfrac{S}{2} = \int\limits_0^{2r} \sqrt{\dfrac{x^3}{2r - x}}\,dx.$

Нехай $x = 2r\sin^2 t, dx = 4r \sin t \cos t\, dt,$

тоді $S = 16r^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\,dt = 16r^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{1 - \cos 2t}{2}\right)\ dt = 16r^2 \left(\dfrac{t}{4} - \dfrac{\sin 2t}{4}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4r^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1 + \cos 4t}{2} dt = 3\pi r^2.$

Зрозуміло, що серйозну увагу слід приділити міжпредметним зв’язкам з методикою навчання математики. Студентам необхідно наголошувати, які види задач є програмними для шкільного курсу математики, а які можна використати для підготовки учнів до олімпіад та участі в МАН.

Під час вивчення ліній і поверхонь варто створити такі умови, щоб студенти були впевнені, що розв’язують не просто навчальну задачу, а займаються діяльністю, від якості виконання якої буде залежати рівень їх кваліфікації та успіх у майбутній педагогічній роботі. За цих умов підвищиться зацікавленість студентів темою, що вивчається, зміниться їхнє ставлення до самостійного навчання.

Отже, розкриття студентам міжпредметних зав’язків посилить мотиваційну базу і буде стимулом для якісного вивчення основних понять і тверджень, що стосуються ліній і поверхонь.

3. *Активізація навчально-пізнавальної діяльності студентів* (мобілізація викладачем за допомогою спеціальних засобів інтелектуальних, морально-вольових та фізичних зусиль студентів на досягнення конкретних цілей навчання, розвитку й виховання).

До психолого-педагогічних умов активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів З. І. Слєпкань [224, с. 72] відносить:

- забезпечення єдності цілей процесу навчання — освітньої, розвивальної і виховної;
- педагогічно доцільне використання принципів дидактики вищої школи;
- забезпечення емоційності навчання і створення сприятливої атмосфери;
- динамічність, різноманітність методів, прийомів, форм і засобів викладання та учіння, спрямованість їх на розвиток активної дослідницької діяльності студентів, пріоритетність методів і форм активного навчання;
- орієнтація студентів на систематичну самостійну роботу, забезпечення регулярності та ефективності контролю й оцінювання успішності студентів;
- комплексне, педагогічно доцільне використання технічних засобів навчання і сучасних інформаційних технологій;
- використання системи психологічних і педагогічних стимулів активної навчальної діяльності.

Для забезпечення активності студентів доцільно використати прийоми інтерактивного навчання. Наприклад, лекцію можна починати відомим прийомом «Мікрофон», а практичне заняття – «Ланцюжком». Детальніше про це у нашій статті [247].

Змінити вид діяльності і у такий спосіб активізувати навчання допомагають історичні відомості, цікаві задачі, проблемні ситуації тощо. Розглядаючи означення чи теореми, пов’язані з іменами конкретних вчених, бажано проілюструвати студентам їхні портрети. Наприклад, сучасне означення лінії сформулював П. С. Урисон – радянський математик, який дуже рано і трагічно пішов із життя. Можна показати студентам його портрет і коротко окреслити біографічні дані вченого, зупинившись на його дружбі з П.С. Александровим. А наступну лекцію розпочати за допомогою «Мікрофона». Кожен бажаючий зможе розповісти, що він дізнався про цих двох учених – творців радянської топологічної школи.

Ефективним засобом активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів на заняттях з аналітичної геометрії може стати створення проблемних ситуацій. Наприклад, під час вивчення геометричних перетворень студентам можна запропонувати низку запитань, відповіді на окремі з яких можуть викликати труднощі:

1. Які лінії мають вісь симетрії?
2. Чи є лінії, які мають нескінченну кількість осей симетрії?
3. Наведіть приклади центрально симетричних ліній.
4. Які фігури називають самоподібними?
5. Чи існують самоподібні лінії?

Якби запитання стосувалися геометричних фігур, то більшість студентів подали правильні відповіді, але заміна «геометричної фігури» на «лінії», як показує наш досвід, робить деякі із запитань проблемними.

4. Комплексне використання ІКТ.

У цьому питанні ми послуговуємося думкою академіка М. І. Жалдака: “В основу інформатизації навчального процесу слід покласти створення і широке впровадження у повсякденну педагогічну практику нових комп'ютерно-орієнтованих методичних систем навчання на принципах поступового і неантагоністичного, без руйнівних перебудов і реформ вбудовування ІКТ у діючі дидактичні системи, гармонійного поєднання традиційних МСН і комп'ютерно-орієнтованих МСН, не заперечування і відкидання здобутків педагогічної науки минулого, а їх удосконалення і посилення” [74].

З метою підвищення рівня засвоєння студентами навчального матеріалу під час вивчення кривих та поверхонь, вважаємо за доцільне супроводжувати їх вивчення презентаціями, підготовлені викладачем або ж самими студентами. Така форма сприятиме кращому сприйняттю та розумінню навчального матеріалу з даних розділів. Комп’ютерні програмні засоби такі як (Derive, MuPAD, MathCad, Maple, Mathematica, MatLab) можна використовувати для розв’язування навчальних задач та для математичних обчислень. Зручну і наочну візуалізацію навчальних об’єктів забезпечують ППЗН серії GRAN.

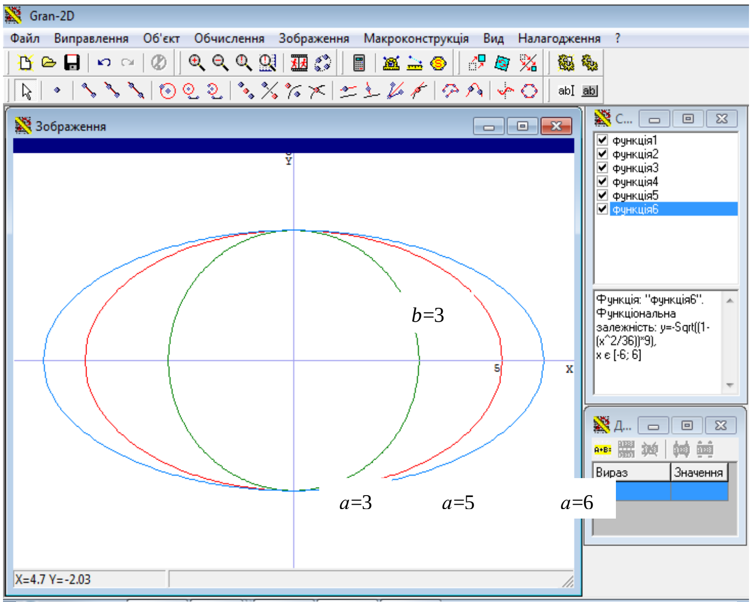


Рис. 1.13. Еліпс при різних значеннях параметрів *a* та *b* ($a = 3$, $a = 5$, $a = 6$, $b = 3$).

Наприклад, за допомогою ППЗН *GRAN-2D* можна показати студентам, як змінюється форма і розміри фігури залежно від параметрів (рис. 1.13)

Зазначаючи у формулюванні умови вимогу «комплексне», наполягаємо на розширені сфери використання ІКТ у навчанні аналітичної геометрії. Ефективність вивчення тем, що стосуються ліній і поверхонь, суттєво підвищується за умови доповнення традиційного навчання використанням дистанційної форми на основі платформи Moodle. Детальніше організація дистанційного навчання розглядається у другому розділі.

5. *Реалізація індивідуального підходу до організації самостійної роботи студентів*.

Оволодіння способами і прийомами навчальної діяльності – основне завдання для студента-першокурсника. Першокурсники інколи мають низькі оцінки і погано засвоюють новий матеріал, бо в студентів ще не сформовані такі важливі уміння як здатність навчатися самостійно, контролювати і оцінювати себе, правильно розподіляти робочий час для самостійної підготовки тощо. Нові навчальні та організаційні завдання, які постають перед студентами вже на першому курсі, потребують чіткої організації навчального процесу, набуття навичок самостійної роботи з навчальною та науковою літературою, умінь розподіляти свій час.

До самостійної навчально-пізнавальної діяльності студентів відносять такі їхні дії:

- з’ясування та конкретизація завдань і змісту своєї навчальної діяльності;
- вибір методів, засобів і форм навчальної діяльності;
- самоорганізація і саморегулювання навчальної діяльності;
- самоконтроль і самоаналіз результатів навчальної діяльності.

Важливим компонентом самостійної діяльності першокурсників є адекватна оцінка студентом своїх здібностей до навчання. Уявлення про свої можливості і про себе самого складаються у студента під впливом різних чинників. Викладач, здійснюючи управлінські функції, має відповідально підійти до співпраці зі студентами із завищеними або заниженими уявленнями про свої можливості. Грамотно розроблена методика навчання окремої теми чи цілого курсу, з урахуванням індивідуального підходу, сприяє підвищенню успішності студента у різних видах навчальної та практичної діяльності.

Для забезпечення ефективності навчання аналітичної геометрії необхідно надати студентам відповідний навчально-методичний супровід. З цією метою для студентів фізико-математичних факультетів вищих педагогічних навчальних закладів III- IV рівнів акредитації нами підготовлено навчальний посібник «Практикум з аналітичної геометрії» [146], навчально-методичні посібники «Вивчення ліній і поверхонь з комп'ютерною програмою *3D Plotter*» [144], «Використання ППЗН ППЗН *GRAN-2D* і *GRAN-3D* під час вивчення ліній і поверхонь» [145].

Навчальний посібник «Практикум з аналітичної геометрії» в умовах кредитно-модульної системи навчання є своєрідним путівником у вивченні двох модулів: 1. Лінійні образи і 2. Лінії та поверхні другого порядку. Його створено з метою організації аудиторної та самостійної роботи студентів. Посібник містить:

- короткі теоретичні відомості, які супроводжуються прикладами розв’язування основних видів задач;
- індивідуальні домашні завдання до кожної теми;
- багатоваріантні завдання для модульного контролю;
- запитання для самоперевірки;
- зразки тестових завдань.

Наприкінці посібника наведено орієнтовний розподіл балів при рейтинговій системі оцінювання та шкалу навчальних досягнень студентів.

Навчально-методичні посібники «Вивчення ліній і поверхонь з комп’ютерною програмою *3D Plotter*», «Використання ППЗН *GRAN-2D* і *GRAN-3D* під час вивчення ліній і поверхонь» призначені для допомоги студентам у створенні візуального ряду для головних понять і відношень змістової лінії «Лінії та поверхні» та їх комбінацій. Завдяки цим посібникам студентам полегшено виконувати практичні та розрахункові роботи.

6. *Формування наукового світогляду та ціннісних орієнтацій*.

Стародавні греки створювали геометрію конічних перерізів як "чисту" геометрію, яка не знаходила свого застосування майже двадцять століть, поки німецький астроном і математик Й. Кеплер (1571 - 1630) не використав її основи у своїх законах руху планет. Зокрема, перший закон Й. Кеплера говорить: "Кожна планета рухається по еліпсу, в одному з фокусів якого знаходиться Сонце". Виходячи з теорії Кеплера, англійський фізик, математик і астроном І. Ньютон (1643 - 1727) створив механіку, яка служить основою фізики і техніки. Важко уявити собі, наскільки затримався б розвиток людства, якби свого часу не була створена «не прикладна» теорія конічних перетинів. А згодом виявилося, що криві другого порядку є траєкторіями і ряду інших небесних тіл. Образно кажучи, криві другого порядку є невід'ємним елементом геометричної картини світобудови. Не сказати про це студентам – значить пропустити один з важливих моментів у формуванні їхнього світогляду [65].

Для формування світогляду студентів корисно проінформувати їх про існування геометрії багатовимірного простору, в якому геометрична точка визначається набором n координат $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Такий простір є природним математичним узагальненням тривимірного простору. Так, у фізиці системно розглядається сукупність подій, кожна з яких повністю характеризується відповідями на питання "де?" і "коли?". На перше питання можна відповісти, наприклад, вказівкою декартових координат $x, y, z,$ а на друге – вказівкою моменту часу t. Отже, простір подій – чотиривимірний, а координатами в ньому можуть служити (х, y, $г$, t). Цей чотиривимірний простір широко використовується в теорії відносності Ейнштейна.

При розгляді чотиривимірного простору необхідним видається ознайомити студентів з постаттю відомого політика, науковця, культурного діяча України Миколи Івановича Гулака, який будучи членом Кирило-Мефодієвського братства, виступав за відміну кріпацтва і створення незалежної української держави. Бібліографічний словник за 1973 рік подає про нього статтю майже на цілу сторінку. Стаття містить, крім біографіних даних, характеристику його математичних творів: “Етюди про трансцендентні рівняння” (1852) і “Спроба геометрії чотирьох вимірів” (1877). В останні роки увага до постаті М.І. Гулака та його математичних праць відновлюється. Перевидано його роботу “Розмова про простір”, що є другою частиною праці “Спроба геометрії чотирьох вимірів”. Перша частина останньої роботи – “Синтетична геометрія чотирьох вимірів” – була першою монографією з чотиривимірної евклідової геометрії в Російській імперії [13].

Отже, методичними засадами навчання змістової лінії курсу аналітичної геометрії «Лінії та поверхні» є реалізація у навчальному процесі компетентнісного, діяльнісного, розвивального та індивідуального підходів. Для організації ефективного вивчення студентами ліній і поверхонь викладачам слід дотримуватися виконання таких методичних умов навчання:

1. Забезпечення професійної спрямованості навчання.
2. Реалізація міжпредметних зав’язків.
3. Активізація навчально-пізнавальної діяльності студентів
4. Комплексне використання ІКТ.
5. Реалізація індивідуального підходу до організації самостійної роботи студентів.
6. Формування наукового світогляду та ціннісних орієнтацій.

Ці методичні умови певним чином визначають методичну систему вивчення ліній і поверхонь, модель якої подана у Додатку В. Розроблена нами методична система буде описана детально у другому розділі дисертації.

Висновки до Розділу І

1. Аналітична геометрія посідає важливе місце серед галузей математичної науки, а знання основних її методів та уміння їх застосовувати вже давно стали невід’ємним компонентом математичної культури не лише фахівця в галузі математики, а й кожної освіченої людини. Змістова лінія курсу «Аналітична геометрія» є необхідною складовою у процесі підготовки

майбутніх учителів математики. Вивчення ліній і поверхонь сприяє розвитку у студентів абстрактного та логічного (критичного) мислення, просторової уяви та уявлення, графічної та алгоритмічної культури, таких необхідних їм у майбутній професійній діяльності. Важливість засвоєння студентами відомостей про лінії та поверхні визначається сучасним розумінням цих об'єктів і різноманітністю застосування навчального матеріалу в різних галузях знань. Вже на першому курсі під час вивчення аналітичної геометрії закладається фундамент професійної компетентності майбутнього вчителя, високий рівень якої є однією з умов успішної педагогічної діяльності.

2. Розвиток понять «лінія» і «поверхня» розпочався з перших геометричних уявлень і триває до цього часу. Над визначенням та дослідженням цих об'єктів працювали Евклід, Архімед, П. Ферма, Р. Декарт, Клеро, Ейлер, К. Жордан, Дж. Пеано, Г. Кантор, П.С. Урисон та інші. Основні підходи до загального визначення лінії та поверхні можна умовно поділити на 3 групи, які ґрунтуються на теоретико-множинному методі, понятті геометричного місця точок і координатному методі. Сучасне, математично строге визначення поверхні базується на поняттях топології. З погляду топології просту поверхню можна уявити як частину площини, що піддається неперервним деформаціям розтягу, стиснення та вигину. Отже, *простою поверхнею називається образ гомеоморфного відображення внутрішньої частини квадрата*.

3. Аналітична геометрія як навчальна дисципліна суттєво відрізняється від аналітичної геометрії як науки (метою, змістом, структурою, обґрунтованістю окремих положень, застосуваннями тощо). Для навчального предмета в педагогічному університеті з великого обсягу накопичених і систематизованих відомостей (фактів, гіпотез, законів, теорій тощо) обирають головні, спеціальним чином адаптовані та структуровані, що забезпечують формування математичної культури та фахової компетентності майбутнього вчителя математики.

Існують різні підходи до побудови навчального курсу «Аналітична геометрія» та визначення його мети.

На сучасному етапі розвитку математичної освіти теорія векторів та її застосування є обов'язковою складовою курсу аналітичної геометрії. Такий підхід до побудови курсу аналітичної геометрії дає можливість уникнути багатьох громіздких малюнків і записів, спрощує обчислення, суттєво скорочує час на вивчення координатного та векторного методів (у порівнянні з ізольованим вивченням).

4. Оскільки загальною метою підготовки вчителя математики в педагогічному університеті є формування основ його професійної культури, то, визначаючи мету навчального курсу для майбутніх учителів, потрібно враховувати два взаємопов'язані аспекти: загальнонауковий і фаховий.

Загальнонаукова мета вивчення курсу "Аналітична геометрія" полягає в тому, щоб забезпечити студентам:

- оволодіння сучасними теоретичними положеннями і математичними методами з основних розділів курсу аналітичної геометрії (елементи векторної алгебри, метод координат, теорія прямих та площин, теорія алгебраїчних ліній та поверхонь другого порядку, геометричні перетворення);
- уміння застосовувати методи аналітичної геометрії до розв'язування відомих та нових задач і розуміння ефективності використання цих методів;
- розширення та поглиблення геометричних знань та їх зв'язків з іншими розділами математики;
- набуття достатнього обсягу знань, навичок і вмінь у галузі аналітичної геометрії для їх використання при вивченні інших математичних дисциплін.

Вивчення аналітичної геометрії в рамках фахової підготовки має на меті дати майбутнім учителям знання, необхідні їм для правильного розв'язання методологічних і методичних питань, які виникають у процесі навчання математики в школі.

5. Зміст курсу «Аналітична геометрія» тісно пов’язаний з окремими темами шкільного курсу математики. Окремі питання аналітичної геометрії добре висвітлюються в шкільному курсі математики, а в курсі аналітичної геометрії майбутні вчителі отримують ґрунтовну підготовку з тих тем, яких у майбутньому будуть навчати своїх учнів. Це означає, що в умовах значного скорочення годин на вивчення аналітичної геометрії в педагогічних університетах, необхідно ефективно використовувати знання і уміння учнів, набуті за роки навчання в школі.

6. Навчання у вищому навчальному закладі суттєво відрізняється від навчання в середній школі, оскільки розраховане на високий рівень свідомості та особисті інтереси студентів. Важливим і невід’ємним компонентом навчального процесу є управління. Навчання як діяльність має місце там, де дії людини управляються свідомою метою засвоїти певні знання, набуті навички, уміння, і чим більш значуща для студента ця діяльність, тим вищі її результати.

Основними складовими управлінської діяльності є планування, мотивація, організація, координація, контроль. Педагогічне управління навчальною діяльністю студентів передбачає зміну моделі освітнього процесу – від лінійної (загальної для всіх жорсткої схеми) – до нелінійної (з гнучким індивідуальним підходом), яка змінює ставлення людини не лише до однієї дисципліни, а й всього освітнього процесу.

7. Методичними засадами навчання змістової лінії курсу аналітичної геометрії «Лінії та поверхні» є реалізація у навчальному процесі компетентнісного, діяльнісного, розвивального та індивідуального підходів. Для організації ефективного вивчення студентами ліній і поверхонь викладачам слід дотримуватися виконання таких методичних умов навчання:

- забезпечення професійної спрямованості навчання;
- реалізація міжпредметних зав’язків;
- активізація навчально-пізнавальної діяльності студентів;

- комплексне використання ІКТ;
- реалізація індивідуального підходу до організації самостійної роботи студентів;
- формування наукового світогляду та ціннісних орієнтацій.

Основні результати першого розділу відображені у роботах [125], [128], [132], [135], [136], [139], [141], [144], [145], [146], [148], [149].

РОЗДІЛ 2.
МЕТОДИЧНА СИСТЕМА ВИВЧЕННЯ ЛІНІЙ І ПОВЕРХОНЬ ПЕРШОКУРСНИКАМИ ПЕДАГОГІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

2.1. Мета, завдання та зміст вивчення першокурсниками лінії і поверхні в педагогічному університеті

2.1.1. Аналітична геометрія – одна із базових математичних дисциплін, яка вивчається студентами педагогічних університетів на першому курсі. Її вивчення опирається на знання з елементарної математики, отримані студентами в школі, і є цілком логічним узагальненням, розширенням і поглибленням основного змісту шкільних курсів математики – координатного і векторного, методу геометричних перетворень тощо.

Аналітична геометрія відіграє важливу роль у математичній освіті, оскільки її факти та поняття, ідеї та методи широко використовуються в інших математичних галузях та дисциплінах. Вивчення аналітичної геометрії надає студентам необхідні знання і достатню практичну підготовку для подальшого вивчення багатьох спеціальних і загальних дисциплін – фізики, алгебри, математичного аналізу, методики навчання математики та інших.

У курсі аналітичної геометрії, крім іншого, вивчаються найпростіші геометричні фігури на площині та відношення між ними (алгебраїчні лінії 1-го порядку – прямі, їх паралельність і перпендикулярність, а також лінії 2-го порядку – еліпс, гіпербола і парабола, їх взаємне розташування та інше) та в тривимірному просторі (прямі, площини і поверхні 2-го порядку). Знання, отримані під час вивчення курсу «Аналітична геометрія», з одного боку, формують математичну культуру майбутнього вчителя, а, з іншого, становлять основу його фахової підготовки.

Мета та завдання вивчення аналітичної геометрії у педагогічному університеті розглянуті нами в п. 1.2. Зупинимося детальніше на визначенні мети та завдань стосовно змістової лінії «Лінії та поверхні».

Загальною метою навчання студентів у педагогічному університеті є підготовка майбутнього вчителя (математики) до професійної діяльності в школі. Стосовно вивчення студентами ліній і поверхонь це означає, що, визначаючи мету кожної із зазначених тем, слід враховувати два взаємопов'язані аспекти – загальнонауковий і фаховий.

Актуальність і своєчасність постановки фахової мети у процесі навчання першокурсників визначається нормативними документами, зокрема Концептуальними засадами розвитку педагогічної освіти України та її інтеграції в європейський освітній простір. У документі зазначається, що методична підготовка студентів забезпечується … також шляхом методичної спрямованості викладання фундаментальних навчальних дисциплін.

Методична підготовка є наскрізною і здійснюється протягом усього періоду навчання з урахуванням особливостей спеціальностей, спеціалізацій, їх поєднання та двоциклової підготовки педагогічних працівників» [98].

З дидактики відомо, що у процесі навчання необхідно реалізувати три групи взаємопов'язаних цілей – освітню, розвивальну та виховну.

Отже, загальна мета вивчення ліній і поверхонь у педагогічному університеті має складну структуру (рис. 2.1).

Рис. 2.1. Структура мети вивчення ліній і поверхонь
у педагогічному університеті

Загальну мету курсу, як і мету кожної навчальної теми, слід формулювати відносно діяльності студентів, а не відносно діяльності викладача. Головне у навчанні – кінцевий результат, якого мають досягти студенти. Завдання викладача полягає у здійсненні розумного і цілеспрямованого управління навчально-пізнавальною діяльністю студентів стосовно сприйняття, осмислення, засвоєння (повторення тощо) ними навчального матеріалу.

Загальнонаукова мета вивчення ліній і поверхонь майбутніми вчителями математики:

- (**ДЗ)** оволодіння системою знань та умінь, що стосуються ліній і поверхонь, формування умінь використовувати координатний, векторний методи та метод геометричних перетворень для дослідження ліній і поверхонь, а також створення на основі вивчених відомостей про лінії та поверхні міцного підґрунтя для розв’язування задач з інших навчальних дисциплін;

- (**РЗ**) формування та розвиток алгоритмічного, логічного та просторового мислення, інтелектуальних і комунікативних умінь і навичок, загальної і математичної культури, а також наукового світогляду;

- (**ВЗ**) виховання графічної культури, культури мови і мовлення, а також наполегливості, творчості, активності, цілеспрямованості, дисциплінованості та інших особистісних якостей.

Фахова мета вивчення ліній і поверхонь майбутніми вчителями математики:

- (**ДФ**) засвоєння відомостей про лінії та поверхні, необхідних для правильного розв’язання методологічних і методичних питань, які виникають у процесі навчання математики в школі;

- (**РФ**) формування і розвиток основ математичної, педагогічної та методичної культури, а також емоційно-ціннісної та діяльнісно-практичної сфери;

- (**ВФ)** виховання готовності до педагогічної діяльності, зокрема до навчання учнів питанням, що тісно пов’язані з лініями і поверхнями.

Щоб у процесі вивчення студентами ліній і поверхонь було досягнуто визначеної мети, слід сформулювати і розв'язати низку завдань (систему умов), які матеріалізуються у конкретних практичних діях.

Стосовно досягнення загальнонаукової мети основні завдання визначаються на основі Галузевих стандартів вищої освіти за галуззю знань 0402 „Фізико-математичні науки", напрям підготовки 6.040201 „Математика" [120]. У додатку „Типи діяльності, типові завдання діяльності та вміння, які повинен мати випускник вищого навчального закладу" визначаються вміння, набуття яких забезпечує змістовий модуль „Аналітична геометрія" (див. табл. 2.1). Основні завдання вивчення ліній і поверхонь стосуються формування відповідних умінь.

Таблиця 2.1

Уміння, які виділяються у змістовому модулі „Аналітична геометрія"

Шифр та назва типової задачі діяльності	**Зміст уміння**
ПФ.Д.01. Аналіз сучасних математичних теорій	Володіти уявленнями про математику як науку і як навчальний предмет, її місце в сучасному світі і в системі наук. Володіти поняттями даної математичної теорії. Уміти з'ясовувати склад і структуру теорії: поняття, наукові факти, закони, принципи та зв'язки між ними.
ПФ.Е.02. Постановка математичної задачі	Вміти обирати об'єкт та предмет дослідження, визначати мету дослідження та його основні завдання. Вміти аналізувати математичні факти, закономірності і теорії на предмет логічної строгості та повноти. Вміти використовувати методи пізнання (моделювання, аналіз, синтез, узагальнення, конкретизація, порівняння тощо) для постановки математичної задачі. Вміти будувати приклади та контр приклади, зокрема з використанням інформаційних технологій.
ПФ.Е.01. Вибір, використання алгоритмів, методів, прийомів та способів розв'язування математичних задач	Володіти векторним методом розв'язування задач. Вміти використовувати метод координат для задання і дослідження геометричних об'єктів і до розв'язування задач. Вміти застосовувати теорію прямих до розв'язування задач. Володіти методами дослідження ліній другого порядку. Володіти методом геометричних перетворень до розв'язування задач. Вміти застосовувати теорію площин до розв'язування задач. Володіти методами досліджень поверхонь другого порядку. Володіти методами перерізів, геометричних місць точок, геометричних перетворень, рухів, подібності, інверсії та алгебраїчним методом при розв'язуванні задач на побудову.

Продовження таблиці 2.1

Шифр та назва типової задачі діяльності	Зміст уміння
3.Пф.Д.02. Використання засобів інформаційних технологій для розв'язування математичних задач	Володіти знаряддєвим застосуванням комп'ютера, системи опрацювання текстової, числової та графічної інформації, баз даних і знань, предметно-орієнтованими прикладними системами, системами телекомунікації. Володіти технічними засобами інформаційних технологій. Володіти системним та сервісним програмним забезпеченням.
3.ПФ.Д.05. Аналіз наукового результату, оцінка його місця, ролі і значення	Вміти аналізувати отриманий результат на предмет його зв'язку з іншими науковими проблемами суміжних галузей науки і практики. Вміти дати оцінку практичного значення отриманого результату, зокрема, вміти з'ясовувати: • чи розв'язує отриманий результат деякі інші існуючі проблеми (в суміжних галузях); • чи може запропонований метод бути використаний при розв'язуванні «схожих» проблем; • чи допускає результат або методика його отримання узагальнення, поширення, перенесення на інші проблеми.

Оскільки навчальний матеріал, що стосується ліній і поверхонь, великий за обсягом і багатогранний (прямі і криві, на площині і в просторі, загальна теорія ліній і загальна теорія поверхонь, геометричні перетворення площини і простору), то завдання доцільно конкретизувати для кожного навчального модуля програми. Необхідно з'ясувати, як вибудовується зміст навчального матеріалу, що стосується ліній і поверхонь.

2.1.2. Дотримуючись вимог кредитно-модульної системи навчання, зміст курсу аналітичної геометрії потрібно структурувати у вигляді системи кількох навчальних модулів, кожен з яких забезпечує досягнення конкретної дидактичної мети. Навчальний модуль містить лише частину курсу – кілька близьких за змістом тем або розділів. Складові частини кожного модуля є самостійними, але взаємопов'язаними.

У додатку „Система змістових модулів" галузевих стандартів [120] змістовий модуль **ПП.07. Аналітична геометрія** визначається переліком таких тем – навчальних модулів (курсивом позначено теми, що стосуються ліній і поверхонь):

1. Елементи векторної алгебри (ПП.07.01).
2. Метод координат на площині (ПП.07.02).
3. *Пряма на площині (ПП.07.03).*
4. *Конічні перерізи: еліпс, гіпербола, парабола (ПП.07.04).*
5. *Загальна теорія алгебраїчних ліній 2-го порядку (ПП.07.05).*
6. *Геометричні перетворення площини (ПП.07.06).*
7. Метод координат у просторі (ПП.07.07).
8. *Теорія прямих і площин у просторі (ПП.07.08).*
9. *Вивчення алгебраїчних поверхонь 2-го порядку за їх канонічними рівняннями (ПП.07.09).*
10. *Загальна теорія алгебраїчних поверхонь 2-го порядку (ПП.07.10).*
11. *Геометричні перетворення простору (ПП.07.11).*

Існує кілька способів структурування навчального матеріалу як усього курсу аналітичної геометрії, так і матеріалу про лінії та поверхні зокрема. Зрозуміло, що зміст освіти майбутніх учителів математики визначається стандартами вищої педагогічної освіти. І все ж структура курсу аналітичної геометрії і його змістове наповнення певною мірою залежать від умов педагогічного університету (загальна кількість годин, кількість годин на аудиторні заняття тощо), майбутньої спеціалізації студентів, особистих уподобань викладачів.

При складанні робочої програми насамперед слід послуговуватися навчальними планами і програмами. Під час констатувального етапу педагогічного експерименту нами були проаналізовані робочі програми з аналітичної геометрії 4 провідних українських педагогічних університетів:

- Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова;
- Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського;
- Уманського державний педагогічний університет імені Павла Тичини;
- Полтавського національного педагогічного університету імені

В. Г. Короленка.

Результати проведеного аналізу робочих програм з дисципліни «Аналітична геометрія» для студентів спеціальності 6.040201 «Математика» наведено в таблиці 2.2.

Таблиця 2.2

Кількісна характеристика курсу аналітичної геометрії

Назва педуніверситету	Кількість годин						
	Аналітична геометрія					Лінії, поверхні (всього годин)	
	Всього	Лекції	Практичні	Самостійна робота	Індивідуальні заняття	**Тема лінії**	**Тема поверхні**
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова	270	72	90	90	18	**72**	**73**
Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського	342	74	74	194	-	**80**	**120**
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини	216	46	72	98	-	**54**	**64**
Полтавський національний педагогічний університет імені В.Г. Короленка	360	64	72	112	112	**90**	**150**

Як видно, робочі програми з аналітичної геометрії відрізняються і за кількістю годин, що відводяться загалом на вивчення дисципліни, і за кількістю годин, що відводяться на лекційні, практичні, семінарські заняття та на самостійну і індивідуальну роботу. Різна кількість відводиться і на вивчення ліній і поверхонь.

Найменша кількість годин за усіма параметрами відводиться в Уманському державному педагогічному університеті імені Павла Тичини. Це спричинило потребу так структурувати навчальний матеріал, аби досягти поставленої мети і вимог галузевих стандартів. Педагогічний досвід 7 років уможливив експериментальну перевірку різних способів побудови курсу аналітичної геометрії. Було всьпновлено, що за малої кількості годин вивчення ліній і поверхонь доцільно побудувати за схемою, зображеною на рисунку 2.2.

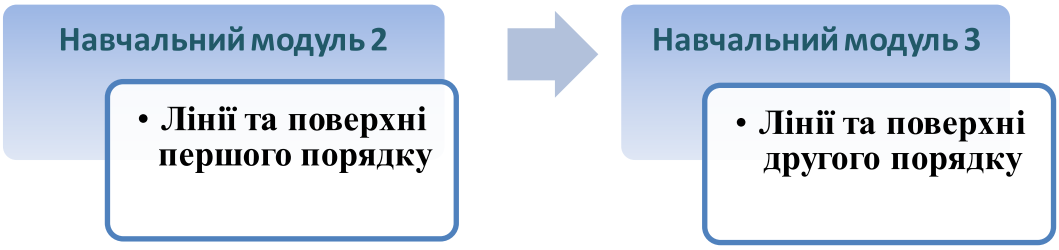


Рис. 2.2 Схема вивчення ліній і поверхонь у курсі аналітичної геометрії.

Для більш повного розуміння змісту рисунку 2.2 необхідно деталізувати зміст кожного модуля.

Модуль 2. Лінії та поверхні першого порядку

Пряма лінія на площині. Теорія прямих і площин у просторі. Площина в просторі. Пряма в просторі. Застосування теорії прямих і площин. Геометричні перетворення площини.

Модуль 3. Лінії та поверхні другого порядку

Конічні перерізи: еліпс, гіпербола, парабола. Еліпс. Гіпербола. Парабола. Оптичні властивості еліпса, гіперболи і параболи. Загальна теорія алгебраїчних ліній другого порядку. Вивчення алгебраїчних поверхонь другого порядку за їх канонічними рівняннями. Загальна теорія алгебраїчних поверхонь другого порядку. Геометричні перетворення простору.

Матеріал модуля 2 (Лінії та поверхні першого порядку) вивчається у першому семестрі. Всього на його вивчення відводиться 70 годин. З яких – 12 годин лекцій, 18 годин практичних занять, 40 годин – самостійної роботи.

Розглянемо детальніше зміст теми «Пряма лінія на площині». На її вивчення відводиться 2 години лекцій, 4 години практичних занять і 8 годин самостійної роботи. Основний зміст теми поділяється на чотири частини.

1. Різні види рівнянь прямої (канонічне рівняння, рівняння прямої, яка проходить через відому точку і паралельна заданому вектору, рівняння прямої, яка проходить через дві відомі точки, рівняння прямої у відрізках на

осях, параметричні рівняння прямої, рівняння прямої, яка проходить через відому точку і має заданий кутовий коефіцієнт, рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, загальне рівняння прямої, рівняння прямої, яка проходить через задану точку і перпендикулярна до заданого вектора, нормальне рівняння прямої).

2. Відстані на площині (відстань між двома точками, відстань точки від прямої, відхилення точки від прямої). Геометричний зміст лінійних нерівностей з двома невідомими.

3. Взаємне розміщення прямих. Кут між двома прямими. Критерій перпендикулярності прямих. Пучок прямих.

4. Основні задачі на знаходження рівняння прямої на площині. Застосування теорії прямих до розв'язання задач, зокрема шкільного курсу математики.

Завдання вивчення теми «Пряма лінія на площині», розв'язання яких сприятиме досягненню загальнонаукової мети навчання студентів педагогічних університетів ліній і поверхонь, на нашу думку, найдоцільніше сформулювати так:

- **(ДЗ)** оволодіння поняттями і твердженнями теми; формування умінь застосовувати координатний і векторний методи для задання і дослідження прямих на площині та інших геометричних об'єктів і до розв'язування задач; формування умінь застосовувати теорію прямих при розв'язуванні задач;
- (**РЗ**) володіння уявленнями про місце теми в системі математичних дисциплін; формування умінь будувати приклади та контрприклади, зокрема з використанням інформаційних технологій; формування умінь аналізувати отриманий результат на предмет його зв'язку з іншими темами курсу; формування та розвиток алгоритмічного, логічного та критичного мислення;
- (**ВЗ**) виховання патріотизму та національної самосвідомості; виховання графічної культури, культури мови і мовлення, а також наполегливості, творчості, активності, цілеспрямованості, дисциплінованості та інших

особистісних якостей.

Завдання, що спрямовані на досягнення фахової мети вивчення теми «Пряма лінія на площині», розв'язання яких сприятиме досягненню загальної мети навчання студентів педагогічних університетів ліній і поверхонь можуть бути такими:

− (**ДФ**) володіння уявленнями про місце теми в шкільному курсі математики; засвоєння відомостей про пряму лінію, необхідних для правильного розв'язання методологічних і методичних питань, які виникають у процесі навчання математики в школі; розкриття сутності прогалин шкільного курсу математики і можливих шляхів їх усунення; формування умінь застосовувати теорію прямих до розв'язування задач шкільного курсу математики; засвоєння методів і прийомів раціонального розв'язування задач ШКМ про пряму на площині;

− (**РФ**) створення комп'ютерної підтримки для вивчення теми «Пряма лінія на площині»; формування і розвиток основ методичної культури, а також емоційно-ціннісної та діяльнісно-практичної сфери; добір і складання прикладних задач, які можна використати в процесі вивчення теми;

- (**ВФ**) формування мотивацій для отримання нових знань і розвиток інтересу до навчання; виховання готовності до педагогічної діяльності, зокрема до навчання учнів питанням, що пов'язані з прямими на площині; створення сприятливої атмосфери на заняттях і підтримання у студентів бажання самовдосконалюватися.

Послідовність і форми вивчення навчального матеріалу студентами подано у таблиці 2.3.

Таблиця 2.3

Порядок і форми вивчення теми «Пряма лінія на площині»

Лекції	Самостійна робота	Практичне заняття №1	Практичне заняття №2
Матеріал п.1	Матеріал п.2 і п. 3	Матеріал п.2 і п.3	Матеріал п.4

Ця тема тісно пов'язана зі шкільним курсом алгебри та геометрії, курсами елементарної математики та методики навчання математики. Ефективність її вивчення залежить від організації актуалізації опорних знань студентів, отриманих у школі (детальніше про це описано у наступному пункті).

Інтенсифікувати виклад нового матеріалу на лекції можна за допомогою заздалегідь підготовленої презентації. Наприклад, слайди, зображені на рисунку 2.3, допоможуть викладачу унаочнити теоретичний матеріал, а студентам – краще усвідомити й запам'ятати його.

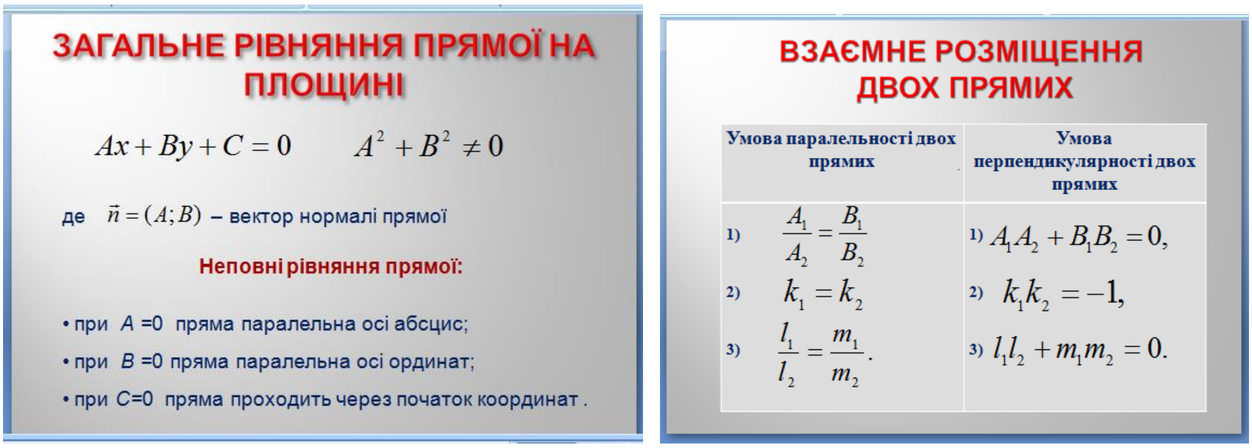


Рис. 2.3.Тема лекції «Пряна на лощині»

Наприкінці першого практичного заняття студентам пропонується розв'язати кількома способами задачу про складання рівняння прямої, перпендикулярної заданій. Традиційно студенти подають розв'язання задачі способами, що не вивчаються в ШКМ, наприклад такі.

Задача 1**.** Задано точки $A(2; -1)$, $B(3; 4)$ і $C(1; 0)$. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точку C і перпендикулярна до прямої AB.

Розв'язання. ***Спосіб 1.*** Дану задачу можна розв'язати за допомогою рівняння прямої, що проходить через задану точку, перпендикулярно заданому вектору (в прямокутній декартовій системі координат) $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$, де $(x_0; y_0)$ - координати точки C, тобто $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, а $\vec{n} = (A; B)$ — вектор нормалі прямої. Знайдемо координати вектора $\overline{AB}$. $\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1) = (3 - 2; 4 - (-1)) = (1; 5)$.

Якщо підставити знайдені значення у рівняння прямої, то одержимо:

$1(x-1)+5(y-0)=0$, $x+5y-1=0$.

Відповідь. Рівняння прямої має вигляд $x+5y-1=0$.

Спосіб 2. Щоб записати рівняння прямої, яка проходить через точку *C* і перпендикулярна до прямої *AB*, необхідно спочатку знайти рівняння прямої *AB*, яке проходить через дві точки за формулою: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, де $(x_1;y_1)$ - координати точки *A*, $(x_2;y_2)$ - координати точки В. У результаті:

$$\frac{x-2}{3-2}=\frac{y+1}{4+1}, \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{5}, \text{ або } y=5x-11.$$

Враховуючи умову перпендикулярності двох прямих: $k_1k_2=-1$. Кутові коефіцієнти прямої *AB* $(k_1=5)$ і шуканої прямої k_2 пов'язані між собою співвідношенням $k_2=-\frac{1}{k_1}$, а пряма проходить через точку *C*, за формулою $y-y_A=-\frac{1}{k_1}(x-x_A)$ одержимо шукане рівняння:

$$y-0=-\frac{1}{5}(x-1),\ y=-\frac{1}{5}x+\frac{1}{5},\ 5y=-x+1,\ x+5y-1=0.$$

Відповідь. Рівняння прямої має вигляд $x+5y-1=0$.

Якщо студенти інших способів не називають, то доцільно провести бесіду в ході якої слід поставити такі питання:

1. Чи вивчається в загальноосвітній школі теоретичний матеріал, який було використано?

2. Чи можуть учні розв'язати таку задачу тими засобами, що пропонуються програмою?

3. Який апарат потрібно для цього використати.

Ці питання спонукають студентів до розв'язання задачі векторним методом.

***Спосіб* 3**. Візьмемо на шуканій прямій довільну точку *M*(*x*; *y*). Розглянемо два вектори

$$\overline{AB}=(x_2-x_1;y_2-y_1)=(3-2;\ 4-(-1))=(1;\ 5).$$

$$\overline{CX}=(x_2-x_1;y_2-y_1)=(x-1;\ y-0)=(x-1;\ y).$$

Оскільки за умовою задачі ці вектори лежать на перпендикулярних прямих, то можемо скористатися властивістю скалярного добутку взаємно перпендикулярних векторів.

$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0, \qquad (1;\,5) \cdot (x-1;\,y) = 0,$ або $x + 5y - 1 = 0$.

Таке розв'язування задач сприяє розвитку творчого і критичного мислення у студентів, ефективній актуалізації знань, реалізує зв'язки з шкільним курсом математики тощо.

Для домашнього завдання, крім інших завдань, студентам варто запропонувати розв'язати різними способами задачу за підручником з геометрії для 11 класу [97].

Задача. На діаграмі Вороного зображено три антени *A*, *B*, *C*, їх координати та області обслуговування (рис. 2.4). Ребра *OM*, *ON*, *OK* клітин на діаграмі Вороного будуються як серединні перпендикуляри до відрізків *AB*, *BC*, *AC*. Запишіть рівняння ребер діаграми Вороного і координати точки *O* – вершини діаграми Вороного.

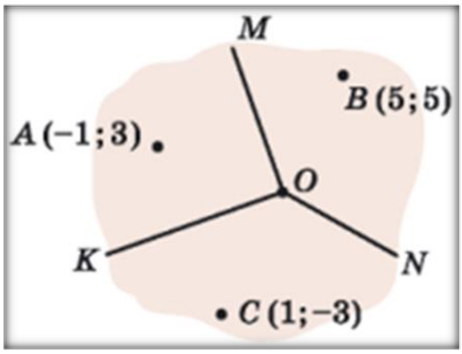


Рис. 2.4. Діаграма Вороного

У такий спосіб викладач створює природній інтерес студентів до постаті Вороного. Бажано скористатися цим моментом, щоб показати портрет відомого українського математика і запропонувати студентам прочитати про його життєвий і творчий шлях [13].

Засвоєння теоретичного матеріалу, що виноситься на самостійне опрацювання студентами, перевіряється на практичних заняттях, колоквіумах, заліках, екзаменах та під час виконання інших видів робіт. Оскільки у першокурсників вміння самостійно працювати з новим матеріалом ще не сформоване, викладачу бажано не просто визначити теми для самостійного вивчення, а вибудувати певну траєкторію навчання (прочитати, законспектувати, вивчити, навести приклади, розв'язати задачі тощо).

Наприклад, на самостійне опрацювання виносяться питання про геометричний зміст лінійних нерівностей з двома невідомими.

На лекції студенти отримують завдання:

1. Опрацювати теоретичний матеріал, поданий у посібнику [146, с.13].
2. Розв'язати задачі на застосування вивченого матеріалу.

Оскільки цей матеріал студенти мають підготувати на практичне заняття самостійно, то можна їм порадити скористатися для закріплення вивченого матеріалу та розв'язування задач одним із ППЗН. Доцільно дати кілька конкретних завдань, які студенти виконають за допомогою комп'ютера. На допомогу їм прийде наш посібник «Використання ППЗН *GRAN-2D* і *GRAN-3D* під час вивчення ліній і поверхонь» [145]. Перш, ніж самостійно приступити до виконання завдань, студенти можуть ознайомитися з розв'язуванням схожої задачі.

Задача. Побудувати многокутник системи розв'язків нерівностей:

$$\begin{cases} 3x+2y-11 \le 0, \\ -3x+y-1 \le 0, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Для побудови прямої $3x+2y-11=0$ знайдемо дві точки, що належать цій прямій. Якщо $x=0$, то $y=\frac{11}{2}$. Якщо $y=0$, то $x=\frac{11}{3}$. Проводимо пряму через дві знайдені точки $\left(\frac{11}{3};\,0\right)$ і $\left(0;\,\frac{11}{2}\right)$. Нерівність $3x+2y-11 \le 0$ визначає нижню замкнену півплощину, яка лежить під прямою AB (рис. 2.5).

Аналогічно будуємо пряму $-3x+y-1 \le 0$, що проходить через точки $(0;1)$ і $\left(-\frac{1}{3};0\right)$. Нерівність $-3x+y-1 \le 0$ визначає нижню замкнену півплощину, яка лежить під прямою BC.

Взявши до уваги також нерівності $x \geq 0, y \geq 0$, дістанемо опуклий многокутник *OABC* – многокутник розв’язків заданої системи нерівностей, що показаний на рисунку 2.5.

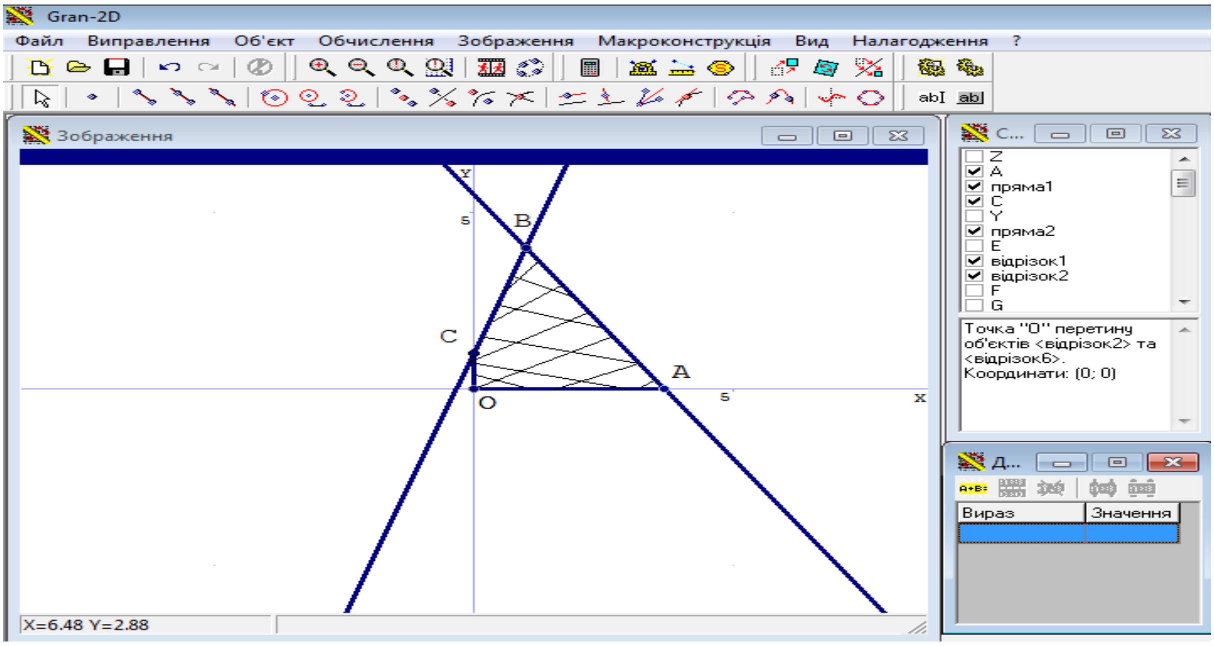


Рис. 2.5. *OABC* – многокутник розв’язків заданої системи нерівностей

Необхідно дібрати такі задачі, розв’язання яких посприяє формуванню у студентів вміння впоратись із базовими задачами з теми. Аналізуючи розв’язання системи нерівностей, отриманий на екрані комп’ютера, студенти бачать, яку частину півплощини слід віднести до розв’язку (рис. 2.5). така візуалізація сприяє кращому усвідомленню механізму розв’язування задач.

Матеріал модуля 3 (лінії та поверхні другого порядку) вивчається у другому семестрі. Всього на його вивчення відводиться 108 годин. З них – 26 годин лекцій, 42 годин – практичних занять, 30 годин – самостійної роботи і 10 годин на виконання індивідуального навчально-дослідного завдання (ІНДЗ), тобто на виконання розрахунково-графічної роботи.

Слід подати нижче певні зауваження стосовно вивчення конічних перерізів.

Формулюючи означення кривих, варто проводити порівняння з відомими поняттями. Наприклад, параболи і кола (коло визначається двома параметрами: центром і радіусом, тобто точкою і додатним числом; парабола визначається фокусом і директрисою, тобто точкою і прямою). При вивченні еліпса доцільним є порівняння його з колом (еліпс визначається двома точками і числом – фокусами і довжиною великої осі). Більше того, варто акцентувати увагу на те, що коло є частковим випадком еліпса при умові, що його фокуси співпадають. Глибока аналогія означення гіперболи і еліпса має бути акцентовано відображена і в дослідженні, і у властивостях. І це справді так.

Традиційну схему, за якою вивчаються конічні перерізи:

1) обмеженості (обмеженість або відсутність точок фігури в окремих областях площини);

2) симетрії (елементи групи симетрій фігури, які легко проглядаються у канонічних рівняннях);

3) вершини та осі;

4) неперервність та замкненість варто супроводжувати аналізом взаємного розміщення кола з центром у фокусі і радіусом, рівним відстані від фокуса до ближчої вершини.

Останній пункт відображає одну з граней гладкості лінії та її опуклості і допомагає правильніше схематично її зобразити. На жаль, цей пункт практично відсутній у всіх навчальних посібниках з аналітичної геометрії.

Важливим моментом при вивченні конічних перерізів є мотивація інтересу до таких кривих з природного та технічного поглядів, а саме застосуванням властивостей кривих у техніці і виявлення в природі траєкторій, що мають форму еліпса, гіперболи та параболи. Наприклад, відомо, що планети та комети рухаються еліптичними траєкторіями, в одному із фокусів яких знаходиться Сонце. Ексцентриситет (числовий параметр, який характеризує форму еліпса) планетарних орбіт близький до нуля, тому планети рухаються майже по колу. Ексцентриситет орбіт комет близький до одиниці, тому вони періодично наближаються та віддаляються від Сонця. Другий приклад пов’язаний з конструкцією прожектора. Його дзеркало має форму параболи, у фокусі якої знаходиться джерело світла. Завдяки цьому всі промені прожектора йдуть паралельно осі параболи [77]. Окремої уваги заслуговують оптичні властивості кривих, які можна вивчати по-різному, автономно для кожної кривої, або ж у загальній теорії кривих другого порядку стартуючи з загальних властивостей дотичної. Ми віддаємо перевагу першому підходу усвідомлюючи, що при цьому приходиться витрачати «зайвий» час.

Немаловажними у теорії є такі питання: механічний спосіб побудови кривої та побудова точок кривої за допомогою циркуля та лінійки, які гармонізують конструктивний і аналітичний підходи у вивченні лінії та посилюють алгоритмічність частини досліджень. При цьому слід пам’ятати та зауважувати, що тут існує простір для творчості створення нових алгоритмів та спрощення існуючих.

Розглянемо детальніше зміст теми «Вивчення алгебраїчних поверхонь другого порядку». На її вивчення відводиться 6 годин лекцій, 8 годин практичних занять і 4 години самостійної роботи. Основний зміст теми поділяється на п’ять частин.

1. Циліндричні поверхні. Конічні поверхні.
2. Поверхні обертання. Еліпсоїд.
3. Одно- та двопорожнинні гіперболоїди.
4. Еліптичний та гіперболічний параболоїди.
5. Лінійчаті поверхні.

Послідовність і форми вивчення навчального матеріалу студентами подано у таблиці 2.4.

Таблиця 2.4

Порядок і форми вивчення алгебраїчних поверхонь другого порядку

Лекції	Самостійна робота	Практичні заняття
1) п.2; 2) п.3; 3) п.4	Матеріал п.1 і п. 5	1) п.1; 2) п.2; 3) п.3; 4) п.4

Завдання, які спрямовані на реалізацію мети вивчення теми «Вивчення алгебраїчних поверхонь другого порядку» такі:

- **(ДЗ)** оволодіння поняттями і твердженнями теми; формування умінь використовувати координатний і векторний методи для задання і дослідження поверхонь та інших геометричних об’єктів; володіння методами досліджень поверхонь другого порядку; формування умінь застосовувати теорію поверхонь до розв’язування задач;

- (**РЗ**) усвідомлення місця теми в системі математичних дисциплін; володіння технічними засобами інформаційних технологій, системним та сервісним програмним забезпеченням; формування умінь аналізувати отриманий результат на предмет його зв’язку з іншими математичними курсами; формування та розвиток алгоритмічного, логічного та критичного мислення;

- (**ВЗ**) виховання графічної культури, культури мови і мовлення, а також наполегливості, творчості, активності, цілеспрямованості, дисциплінованості та інших особистісних якостей;

- (**ДФ**) усвідомлення місця теми в шкільному курсі математики; засвоєння відомостей про поверхні необхідних для правильного розв’язання методологічних і методичних питань, які виникають у процесі навчання математики в школі; розкриття сутності прогалин шкільного курсу математики і можливих шляхів їх усунення; формування умінь застосовувати теорію поверхонь при розв’язуванні задач шкільного курсу математики;

− (**РФ**) створення комп’ютерної підтримки для вивчення теми «Пряма лінія на площині»; формування і розвиток основ методичної культури, а також емоційно-ціннісної та діяльнісно-практичної сфери; добір і складання прикладних задач, які можна використати в процесі вивчення теми;

− (**ВФ**) виховання готовності до педагогічної діяльності, зокрема до навчання учнів питанням, що тісно пов’язані з поверхнями; формування мотивацій для отримання нових знань і розвиток інтересу до навчання;

створення сприятливої атмосфери на заняттях для формування бажання у студентів до самовдосконалення.

Нижче подано рекомендації щодо шляхів реалізації сформульованих завдань.

Вивчення теми супроводжується великою кількістю нових для студентів геометричних об'єктів, які не завжди просто уявити. В сучасних умовах активного використання комп'ютерної техніки бажано, щоб студенти мали можливість за потреби звернутися до зображення геометричного об'єкту, який розглядається. Досить просто і швидко це зробити за допомогою спеціальних ППЗН (детальніше про це у п. 2.3).

У той же час слід звернути увагу на виховання у студентів (майбутніх учителів математики) графічної культури, зокрема продемонструвати студентам на дошці основні прийоми схематичного зображення поверхонь, які вивчаються. Самостійне зображення студентами поверхонь з відповідними записами рівнянь, що їм відповідають, сприяє не тільки розвитку графічної культури, а й кращому запам'ятовуванню формул і встановленню відповідності між ними та геометричними об'єктами.

Розглядаючи аналітичну геометрію в просторі, слід всіляко підкреслювати аналогією з аналітичної геометрією на площині. Корисно звернути увагу студентів на те, що об'єкти аналітичної геометрії на площині можуть бути окремими випадками об'єктів аналітичної геометрії в просторі.

Наприклад, точка (x, y, z) в просторі, за умови, що $z = 0$, дає точку (x, y) на площині xOy, а площина $Ax + By + Cz + D = 0$ задає пряму $Ax + By + D = 0$ на площині xOy, якщо $z = 0$.

Важливо наголосити студентам, що те саме рівняння може відповідати різним геометричним об'єктам. Наприклад, рівняння $Ax + By + C = 0$ є одночасно рівнянням прямої на площині і рівнянням площини (паралельній осі Oz) у просторі. Рівняння $x^2 + y^2 = r^2$ є рівнянням кола на площині і рівнянням циліндричної поверхні з твірною, паралельною осі Oz в просторі.

Проблемну ситуацію на занятті може викликати запитання: чим викликані такі факти і з чим вони пов'язані? Геометрична інтерпретація цих фактів пояснюється рухом.

Вивчення циліндричних і конічних поверхонь пропонується студентам на самостійне вивчення. Щоб зробити цю діяльність особистісно значущою та добре вмотивованою, можна перед цим запропонувати студентам розглянути задачу, яку вони будуть розв'язувати на 2 курсі з дисципліни математичного аналізу. Це дасть змогу їм зрозуміти, що потрібно добре освоїти навчальний матеріал з курсу аналітичної геометрії, щоб надалі застосовувати набуті знання до розв'язування задач інших розділів математики.

Задача. Обчисліть об'єм тіла, вирізаного циліндром $x^2 + y^2 = Rx$ із сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Обов'язково слід пояснити, які складності виникають під час розв'язування цієї задачі і наскільки вони стосуються аналітичної геометрії.

Проблемою є зображення рисунку 2.6. Студент має уявляти геометричний образ, який одержується при перетині комбінації даних тіл, для цього відповідні поверхні потрібно зводити до канонічного вигляду.

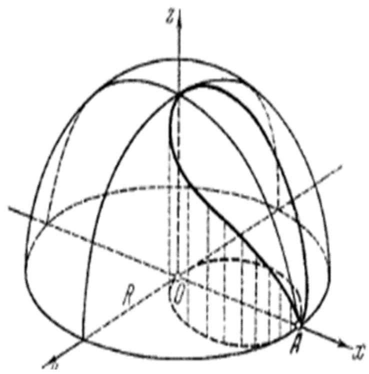


Рис. 2.6. Перетин півсфери та циліндра

В даній задачі потрібно рівняння циліндра привести до канонічного вигляду, для цього потрібно рівняння звести до повних квадратів:

$$\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}.$$

Об'єм тіла обчислюється через потрійний інтеграл, але на шляху обчислення потрібно переходити до циліндричних координат. Тобто, потрібно знати формули переходу від декартової до циліндричної систем координат. А відповідно, коли відбувається перехід, то відбуваються певні перетворення геометричного образу. Формули переходу від прямокутних до циліндричних систем координат і навпаки задають взаємно однозначне відображення однієї області в іншу. Для обчислення області інтегрування студент має розуміти, що виникає нове геометричне тіло, ми приходимо до нового визначеного потрійного інтеграла з дещо спрощеними межами інтегрування. Повне розв’язування задачі подано у Додатку Г.

На лекції, присвяченій гіперболоїдам, крім обов’язкового навчального матеріалу, можна показати зображення архітектурних споруд та технічних конструкцій, які мають форму однопорожнинного гіперболоїду.

Однопорожнинний гіперболоїд – це двічі лінійчата поверхня. Через будь-яку точку такої поверхні можна провести дві прямі, що перетинаються і повністю належать поверхні. Вздовж цих прямих встановлюють балки, які утворюють характерну решітку. Така конструкція є жорсткою і міцною, а тому добре зберігає форму під дією зовнішніх сил.

Рис. 2.7. Водонапірна башта Шухова

Рис. 2.8. Споруда у Японії

Рис. 2.9. Споруда у Китаї

Цей факт використав російський вчений, інженер і винахідник В. Г. Шухов, який вперше в світі створив гіперболоїдні конструкції та сітчасті оболонки (конструкція гіперболоїда в Полібіно (рис. 2.7), Шаболівська вежа та багато інших). Пізніше гіперболоїдні конструкції використовували у своїй творчості знамениті архітектори – Гауді, Ле Корбюзье, Німейер. У наш час гіперболоїдні конструкції стали основою авангардних споруд у Японії (рис. 2.8) та Китаї (рис. 2.9). Детальніше про це можна прочитати у нашій статті [139].

2.2. Форми і методи вивчення ліній і поверхонь у курсі аналітичної геометрії

У Концептуальних засадах розвитку педагогічної освіти України та її інтеграції в європейський освітній простір [98] і у Концепції розвиту неперервної педагогічної освіти [99] стосовно організації навчального процесу зазначається нижчевикладене.

Підвищення якості педагогічної освіти, забезпечення її мобільності, привабливості, конкурентоспроможності на ринку праці вимагає подальшого вдосконалення організації навчального процесу у вищих навчальних закладах на засадах гуманності, особистісно-орієнтованої педагогіки, розвитку і саморозвитку студентів та передбачає:

– впровадження кредитно-модульної системи навчання;

– вдосконалення національної системи накопичення і трансферу кредитів відповідно до вимог Європейської кредитно-трансферної системи, яка орієнтована на особу, що навчається, й ґрунтується на прозорості результатів навчання і навчального процесу;

– використання інформаційно-комунікаційних технологій, інтерактивних методів навчання та мультимедійних засобів;

– індивідуалізацію навчально-виховного процесу та посилення ролі самостійної роботи студентів;

– впровадження цифрових технологій у засоби навчання (електронних підручників, посібників, каталогів, словників тощо), комп’ютерних навчальних програм.

На сучасному етапі розвитку освіти у педагогічних університетах поширені різні організаційні форми навчання, серед яких традиційно розрізняють організаційні форми, що визначаються такими критеріями:

– за кількістю студентів: індивідуальна, групова, колективна, масова;

– за особливостями організації навчання: стаціонарна, заочна, дистанційна;

– за місцем навчання: аудиторна і позааудиторна;

– за способом неперервного управління пізнавальною діяльністю студентів: лекція, семінар, спецсемінар, лабораторна робота, колоквіум, самостійна робота, науково-дослідна робота студентів, педагогічна і дипломна практики тощо.

Інший підхід до класифікації форм організації навчання на групи розглядає В. Л. Ортинський [171]. Відповідно до дидактичних цілей він виокремлює такі чотири групи організаційних форм:

- *навчальні заняття:* лекція, семінар, лабораторне заняття, практичне заняття, індивідуальне заняття, навчальна конференція, консультація, навчальна гра тощо;
- *самостійна робота*: робота з друкованими джерелами (підручниками, навчальними посібниками, інструкціями, настановами тощо), самостійне вправляння, самостійне вивчення окремих питань, участь у роботі гуртків, експериментально-дослідницька робота, самостійний перегляд телепередач, тематичних кінофільмів, прослуховування радіопередач тощо;
- *контрольні заходи:* іспити (заліки), модульний контроль, контрольні роботи, контрольна перевірка оволодіння професійними знаннями, навиками і вміннями з різних предметів, розв’язання кваліфікаційних завдань, захист;
- *практична підготовка:* спрямована на формування у студентів професійних навичок, а також практичних умінь, необхідних для виконання завдань.

Форма – це зовнішній вияв цілісного двостороннього процесу педагогічної діяльності викладача та навчально-пізнавальної діяльності студентів. Внутрішнім виявом цього процесу є метод навчання.

Метод навчання – спосіб упорядкованої, взаємопов'язаної діяльності учителя (викладача) й учнів (студентів), спрямованої на досягнення завдань процесу навчання. За умови цілісного підходу до взаємопов'язаної діяльності викладачів і студентів у навчанні передбачається поділ методів навчання на такі групи:

- методи організації та самоорганізації навчально-пізнавальної діяльності;
- методи стимулювання і мотивації учіння;
- методи контролю і самоконтролю у навчанні;
- бінарні методи навчання [161].

Оскільки під час навчання ліній і поверхонь викладач і студент для досягнення мети і вирішення завдань користуються різними способами, то доцільно розглядати методи викладання і методи учіння змістової лінії «Лінії і поверхні».

Методи викладання — це способи (система прийомів), які використовуються викладачем з метою ефективного викладання знань, формування навичок і вмінь, світогляду, розвитку здібностей студентів, управління пізнавальною діяльністю студентів [224, с.113-114].

На думку Г.П. Бевза [20, с.25-26], у процесі навчання викладач послуговується такими методами:

- методи активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів (метод мотивації учіння, метод збудження інтересу, метод проблемних ситуацій, метод стимулювання);

- методи викладу нового матеріалу (метод доцільних задач, конкретно-індуктивний і абстрактно-дедуктивний, сократичний та евристичний, дослідницький, метод укрупнення дидактичних одиниць);

- метод закріплення знань і вмінь (метод повторень, метод вправ);

- метод навчання розв'язування задач (метод поступового ускладнення задач, метод евристичних наставлянь).

Методи учіння – це способи навчально-пізнавальної діяльності студентів. З. І. Слєпкань [224, с.74], до цих методів відносить:

- спостереження;
- слухання та осмислення;
- аналіз підручників, посібників, першоджерел, наукової літератури та інших матеріалів;
- експеримент;
- вправи та дослідження;
- моделювання.

Добір методів навчання не можна жорстко регламентувати. На кожному етапі навчання, для кожної окремої форми виникає необхідність застосування різних методів у їх взаємозв'язку та взаємодії. Обираючи метод навчання, викладач повинен усвідомлювати, що головне при вивченні дисципліни – це формування знань, умінь, навичок, а також виховання й розвиток студентів. Кожний із методів, що застосовуються в педагогічній практиці, має свої переваги й недоліки, але використання їх у системі, у взаємозв'язку допоможе досягти найкращих результатів у засвоєнні студентами знань і в розвитку їхньої розумової активності.

Саме це стало основою добору нами форм і методів навчання ліній і поверхонь майбутніх учителів математики.

У процесі підготовки майбутніх учителів математики в університеті мають місце усі розглянуті вище організаційні форми, але всі вони підпорядковуються кредитно-модульній системі навчання.

Кредитно-модульна система організації навчального процесу (КМСОНП) — це така форма організації навчального процесу, яка ґрунтується на поєднанні модульних технологій та використанні залікових одиниць — залікових кредитів. Вона є вітчизняним аналогом Європейської кредитно-трансферної системи — ECTS [35].

Головна відмінність кредитно-модульної системи навчання від традиційної – це чітке структурування змісту навчання і точне визначення обсягів проведеної студентом роботи з урахуванням усіх видів навчальної та наукової діяльності.

Відповідно до основних принципів кредитно-модульної системи навчання складові частини кожного модуля є самостійними та взаємопов’язаними. Змістовий або навчальний модуль є частиною курсу, яка має самостійне значення і містить кілька близьких за змістом тем або розділів. Кожен модуль відрізняється сукупністю теоретичних та практичних завдань відповідного змісту, а також формами контролю, оскільки при модульному навчанні засвоєння студентами матеріалу відбувається, в основному, в процесі активної самостійної діяльності.

У структурі кожного змістового модуля виокремлюють три основні компоненти (рис. 2.10).

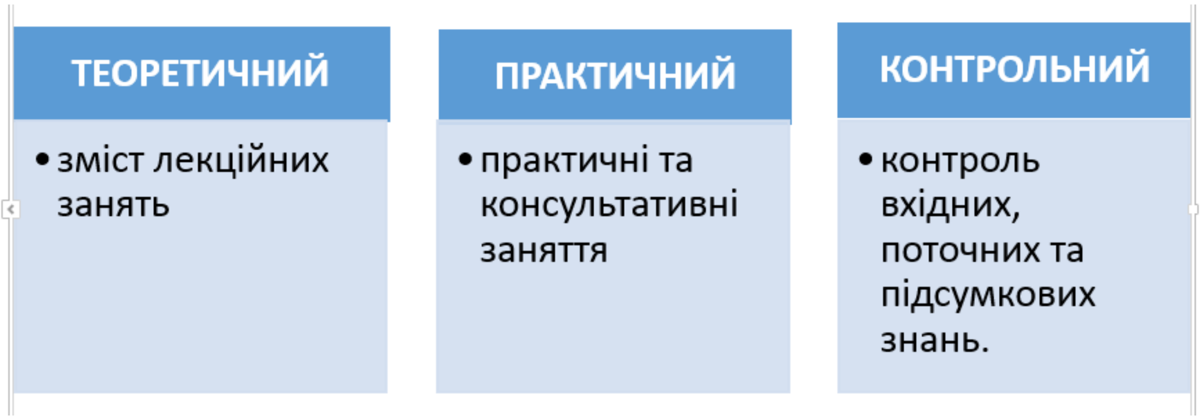


Рис. 2.10. Основні компоненти структури змістового модуля

Протягом усієї історії вищої школи – від зародження перших університетів до наших днів – провідною організаційною формою була лекція. Як організаційна форма навчання - це особлива багатогранна конструкція навчального процесу, а як метод навчання – найбільш економічний спосіб подання навчального матеріалу.

Для навчання ліній і поверхонь нами пропонується використовувати такі типи лекцій:

- *вступна* або *настановча* (розкривається історичний аспект, теоретичне, прикладне і фахове значення змістової лінії, а також зв'язок теми з іншими предметами і ШКМ; подаються структура навчального матеріалу, вимоги до його засвоєння та критерії оцінювання; висвітлюється організація самостійної роботи та особливості виконання контрольних завдань);

- *поточна* (служить для систематичного викладу навчального матеріалу);

- *заключна* (завершується вивчення модуля, узагальнюється навчальний матеріал, розглядаються шляхи використання отриманих знань і умінь та перспективи розвитку, висвітлюється специфіка самостійної роботи в передекзаменаційний період).

На вступній лекції студентам варто наголосити, що зміст навчального модуля представлено в електронному варіанті на платформі Moodle (рис. 2.11). Нагадуємо коди доступу і правила користування. Студенти у будь-який час з будь-якого комп’ютера можуть увійти до системи, щоб прочитати або роздрукувати текст лекції, зразки виконання задач, задачі для самостійного розв’язування, індивідуальні завдання тощо.

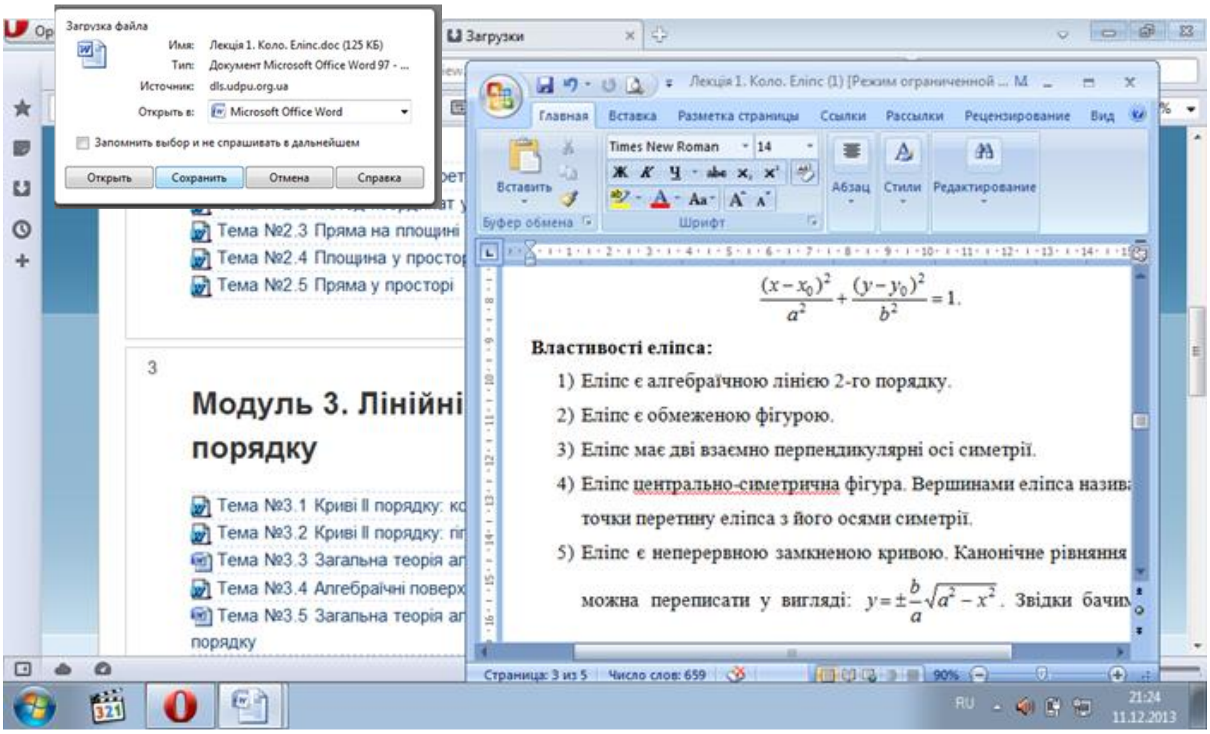


Рис. 2.11. Платформа Moodle (фрагмент лекції)

Другий модуль можна розпочати з короткої історії формування загального поняття лінії. Інтерес у студентів викликає той факт, що не існує єдиного підходу до трактування цього поняття.

Говорять про лінію в розумінні Декарта, Жордана, Кантора, Пеано тощо. В різних розділах геометрії користуються фактично різними означеннями, розглядаючи певні класи ліній.

У перекладі з латинської *лінія* це – лляна нитка. Як математичне поняття «лінія» означалася ще в роботах Евкліда («довжина без ширини”).

Строге внутрішньо геометричне означення сформулював П.С.Урисон (“лінія — це зв’язний континуум топологічної розмірності 1”).

Щоб посилити увагу студентів до вивчення такого абстрактного матеріалу, доцільно активізувати їхню мисленєву діяльність низкою завдань і запитань до рисунку 2.12.

1. Розгляньте рисунок 2.12.
2. Що на ньому зображено?

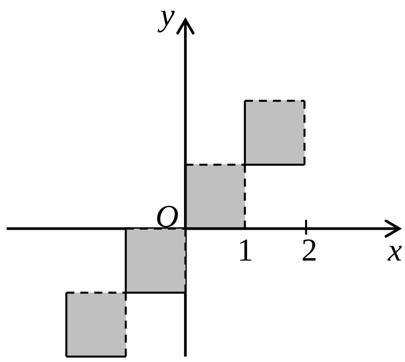


Рис. 2.12.

Традиційно студенти відповідають так:

– система координат;
– квадрати;
– частини квадратів;
– частина площини;
– геометрична фігура.

3. Чи схожа ця геометрична фігура на лінію? (Ні).
4. Які лінії ви знаєте? (коло, пряма, спіраль, …).

В аналітичній геометрії розглядають лінію в розумінні Р. Декарта: “плоска лінія — це геометричне місце точок площини, координати (x, y) яких в деякій афінній системі координат задовольняють рівняння $F(x,y)=0$, де $F(x,y)$ — математичний вираз, що містить змінні x та y”.

Означення Р. Декарта не є коректним, оскільки охоплює об’єкти, які ніяк не можна (не хочеться) називати лініями. Наприклад, як на малюнку 2.12 –

множина всіх точок $M(x;y)$, координати $(x;y)$ яких задовольняють рівняння $[x]-[y]=0$, де $[a]$ — ціла частина числа a, тобто найбільше ціле число, що не перевищує a, є об'єднанням нескінченної кількості «квадратів».

Нижче подано шляхи активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів під час поточної лекції.

Традиційно на початку лекції формулюється тема, повідомляється план і завдання, перераховується література, демонструється зв'язок з попереднім матеріалом, характеризується теоретична та практична значущість теми тощо. На цьому етапі доцільно актуалізувати знання студентів у процесі усного опитування.

Наприклад, на початку лекції на тему: «Еліптичний та гіперболічний параболоїди» студентам пропонується за рівняннями визначити назву поверхні. На слайді поступово з'являються парами рівняння, а студенти, що сидять на крайніх місцях праворуч і ліворуч, мають дати назву поверхням, які задаються цими рівняннями. Якщо хтось зі студентів не може дати правильну відповідь, то відповідає той, хто сидить за ним. Це можуть бути, наприклад, такі рівняння:

1) $x^2+z^2=16; \qquad \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0.$

2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0; \qquad x=2z^2.$

3) $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{z^2}{4}=1; \qquad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

4) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0; \qquad \dfrac{x^2}{5}-\dfrac{z^2}{7}=1.$

На лекції «Одно- та двопорожнинні гіперболоїди» студентам показують поверхню, а вони мають сказати, яким рівнянням вона задається.

Наприкінці лекції можна активізувати роботу студентів усними запитаннями стосовно теми, яку тільки розглянули. Наприклад, наприкінці лекції «**Пряма та площина у просторі**» студентам пропонується відповісти на такі запитання викладача:

1. Що називається нормальним вектором площини та її нормуючим множником?

2. Як може бути розташована площина і пряма у просторі?

3. Що називається кутом між прямою і площиною? За якою формулою він обчислюється?

4. В чому полягає умова компланарності та перетину двох прямих у просторі?

5. Сформулюйте умови їхньої паралельності і перпендикулярності.

6. Як знайти точку перетину прямої і площини?

7. Який вигляд мають рівняння зв'язки та пучки площин?

8. Проаналізуйте взаємне розташування двох площин у просторі.

Організувати повторення і закріплення знань на лекції можна й іншим способом – інтерактивним, наприклад, застосувати метод «Мікрофон».

Викладач формулює запитання і дає уявний мікрофон одному зі студентів. Якщо відповідь правильна, то студент формулює наступне запитання і передає мікрофон однокурснику, який має дати відповідь на поставлене запитання. І так далі –до 10 запитань.

Основна частина лекції передбачає виклад нового матеріалу, який традиційно подається конкретно-індуктивним чи абстрактно-дедуктивним методом. Студенти у цей час слухають і осмислюють інформацію. Щоб процес осмислення був ефективним, у процесі вивчення ліній і поверхонь бажано використовувати наочність. Це можуть бути плакати, комп'ютерні презентації чи моделі окремих геометричних об'єктів. Щоб студенти швидко уявили і запам'ятали перерізи поверхонь обертання, ми намагаємося одночасно подавати геометричне та аналітичне зображення об'єкту (рис. 2.13). Для вивчення теми «Еліпс» презентацію готували студенти, попередньо розглянувши електронний варіант потрібної лекції. Розглянемо, як приклад, один слайд (рис2.14).

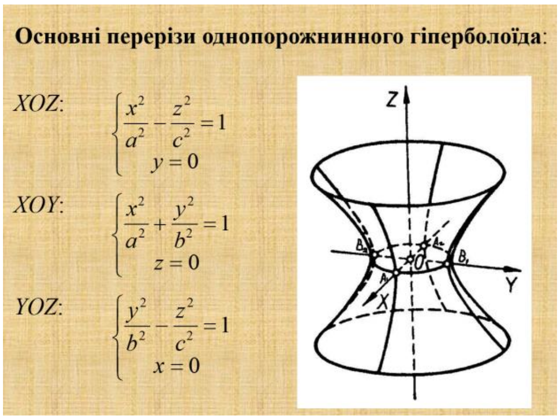


Рис. 2.13. Основні перерізи одно порожнинного гіперболоїда

Рис. 2.14. Означення та канонічне рівняння еліпса

Нами розглянуто фрагменти двох видів лекцій – інформаційну (традиційне пояснення) і лекцію-візуалізацію, на якій подача матеріалу здійснюється за допомогою засобів мультимедіа з коментуванням матеріалів, що демонструвалися візуально.

Ефективним засобом мотивації навчання студентів та активізації їх навчально-пізнавальної діяльності є створення на лекції проблемної ситуації. За цих умов процес пізнання відбувається в науковому пошуку, діалозі і співробітництві з викладачем, в процесі аналізу і порівняння поглядів тощо.

Створювати проблемні ситуації для першокурсників не дуже просто. Спробуємо показати одну з них.

Студенти в курсі аналітичної геометрії педагогічних університетів спеціальності «Математика» ґрунтовно вивчають лише алгебраїчні лінії і поверхні першого та другого порядків, а вивчення трансцендентних ліній та поверхонь переважно виносяться на самостійне опрацювання. Водночас студенти оперували з деякими трансцендентними кривими ще в шкільному курсі математики (графіки показникової, логарифмічної, тригонометричних, обернених тригонометричних функцій тощо).

Можна запропонувати студентам розглянути такі криві: півколо, гіперболу, експоненту, синусоїду, півпараболи, еліпс і запропонувати класифікувати їх. Всі криві першокурсникам відомі, але основну відмінність вони вбачають не зразу.

Після правильної відповіді можна показати й інші трансцендентні лінії: циклоїду, трактрису, спіраль Архімеда, ланцюгову лінію, гіперболічну спіраль.

Після цього доцільно з'ясувати у студентів, які ще трансцендентні лінії вони знають зі ШКМ.

Важливою організаційною формою навчання ліній і поверхонь є практичні заняття. Структурно вони майже завжди складаються із кількох етапів:

- *підготовчий* (вступне слово викладача – правила роботи на занятті, перевірка готовності студентів до заняття);
- *основний* (розв'язування задач і вправ);
- *заключний* (підводяться підсумки заняття, пояснюється хід виконання завдань для самостійної роботи).

Для підвищення мотивації студентів до вивчення ліній і поверхонь, а також для реалізації методичної спрямованості навчання пропонується починати практичні заняття з висвітлення зв'язку теми, що вивчається у ШКМ. Студенти заздалегідь мають два завдання:

- ознайомитися з шкільною програмою і підручниками для встановлення міжпредмених зв'язків;

- знайти в підручнику і розв'язати кілька важчих задач, що стосуються теми.

Студенти знаходять зв'язки ліній і поверхонь з навчальним матеріалом з деяких шкільних предметів, а також говорять про використання цих кривих у мистецтві, архітектурі, побуті (див. Додаток Д).

На різних заняттях були запропоновані такі задачі.

1. Складіть рівняння площини, яка проходить через точки А (4; 2; -1), В (-1; 0; 3) і С(0; 0; 1).
2. Площина і сфера задані рівняннями $4x + 3y - 4 = 0$ і $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 8y + 8 = 0$. Чи належить центр сфери даній площині?

Студентів зацікавив той факт, що такі задачі є не лише в курсі геометрії, а й в курсі алгебри.

- Яке рівняння відповідає графіку (намальовані коло і парабола);
- Побудуйте графік рівняння $x^2 - y = 2$;
- Знайдіть, не виконуючи побудови, координати точки перетину прямих $y = 2 - 3x$ і $2x + 3y = 7$.

Організація розв'язування задач і виконання вправ залежить від теми заняття, рівня підготовленості групи, кількості годин, що відводиться на вивчення даної теми тощо. Якщо тема заняття така, що не розглядалася на лекції, то буває доцільним використати метод «доцільних задач». Ефективним цей метод для теми заняття: «*Основні задачі на знаходження рівняння прямої на площині. Застосування теорії прямих до розв'язання задач, зокрема шкільного курсу математики*».

На основі розв'язування конкретних задач студенти поглиблють теоретичні знання з теми і мають можливість посилити компетентність. Студентам пропонується виписати у власний довідник здобуті на занятті такі формули та прийоми.

- Рівняння прямої l, яка проходить через відому точку $M_0(x_0; y_0)$ і паралельна заданій прямій $l_1:\ Ax + By + C = 0$:

$$\frac{x - x_0}{-B} = \frac{y - y_0}{A}$$

- Спільна точка двох прямих l_1 і l_2, заданих своїми рівняннями $l_1:\ A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $l_2:\ A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Координати шуканої точки є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0; \end{cases}$

- Рівняння прямої l, яка проходить через відому точку $M_0(x_0; y_0)$ і спільну точку двох заданих прямих $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Шукана пряма l належить пучку прямих з вершиною M_0, тому її рівняння записується у вигляді $\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0$, числа λ і μ знаходимо з умови $M_0 \in l$, тобто $\lambda(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1) + \mu(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) = 0$

- Рівняння прямої l, яка проходить через відому точку $M_0(x_0; y_0)$ і перпендикулярна заданій прямій $l_1: Ax + By + C = 0$:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B}$$

- Рівняння прямої l, яка проходить через відому точку $M_0(x_0; y_0)$ і утворює з заданою прямою $l_1: y = k_1x + b$ відомий кут φ:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

де k знаходиться з умови $tg\varphi = \pm\frac{k - k_1}{1 + kk_1}$);

Як уже зазначалося, нами спочатку описано традиційні форми і методи навчання. Сьогодні актуальності набирає інтерактивне навчання, для якого характерними є моделювання життєвих та виробничих ситуацій, використання рольових ігор, спільне вирішення проблеми на основі аналізу обставин та відповідної ситуації тощо. Воно сприяє ефективному формуванню навичок і вмінь, створенню атмосфери співробітництва, взаємодії, дає змогу педагогу стати авторитетним наставником студентського колективу [243].

За умови інтерактивного навчання освітній процес організовується таким чином, що практично всі студенти залучаються у процес пізнання, при цьому кожний робить свій індивідуальний внесок у загальну справу. Вдале використання інтерактивних методів навчання, що урізноманітнюють традиційну лекційно-практичну систему навчання в університеті, підвищує результативність навчання, сприяє інтелектуальному розвитку та творчій активності студентів.

Як зазначають Г.П. П’ятакова, Н.М. Заячківська [174] інтерактивне навчання ліній і поверхонь зорієнтоване на:

- розвиток мислення студентів, певної самостійності думок: спонукають студентів до висловлювання своєї думки, сприяють формуванню творчого ставлення до будь-яких висновків, правил тощо. Деякі з інтерактивних вправ (наприклад, “Робота в парах”, “Робота у групах”, “Карусель”, “Пошук інформації” та інші) спрямовані на самостійне осмислення матеріалу, допомагають замислитися (“Чи справді це так?”), дослідити факти, проаналізувати алгоритм розв’язків, розуміти їхню суть, перевірити і себе, і свого товариша, знайти помилку;

- розвиток опору до навіювання думок, зразків поведінки, вимог інших: спонукають студентів до відстоювання власної думки, створюють ситуацію дискусії, зіткнення думок. Застосування вправ „Аналіз ситуації”, „Вирішення проблем” вчать молодь протистояти тиску більшості, відстоювати власну думку. Коли у завданнях наявна певна проблемна ситуація, то розв’язання їх в умовах інтерактивних технологій активно стимулює діяльність мислення, спрямовану на подолання протиріччя, непорозумінь. Через зіткнення поглядів студенти осягають суть, причини дій, вчинків;

- вироблення критичного ставлення до себе, уміння бачити свої помилки та адекватно ставитися до них; сприяють розвитку таких умінь як бачити позитивне і негативне не тільки в діях товаришів, а й у власних; порівнювати себе з іншими й адекватно себе оцінювати. Ці вправи сприяють самопізнанню особистості і відповідно взаєморозумінню викладачів та студентів, усвідомленню студентами вимог і критичних зауважень викладача. Завдяки правильному, адекватному усвідомленню не лише позитивного, а й негативного у власній поведінці, діях, навчанні виникає критичне ставлення до себе, що конче необхідне насамперед для сприймання вимог з боку інших;

- розвиток пошукової спрямованості мислення, прагненню до знаходження кращих варіантів вирішення навчальних завдань: передбачають вправи, які створюють реальну ситуацію пошуку. У процесі інтерактивних вправ "Розумовий штурм", "Коло ідей", "Вирішення проблем", "Незакінчені речення" приймаються всі думки студентів як реальні, так і вигадані. Вправа "Пошук інформації" вчить студентство самостійно працювати з додатковою літературою, дає можливість віднайти факт, який може заперечувати те, що раніше приймалося як незаперечне;

- на розвиток уміння знаходити спільні рішення з одногрупниками; на посилення зацікавленості студентів до вивченого матеріалу [174].

Інтерактивні методи навчання можна використовувати на різних етапах практичного заняття, зокрема метод "Ажурна пилка" є одним із найпопулярніших. Далі подається приклад застосування названого методу.

Для того, щоб заняття було змістовне, викладач на попередньому занятті має роздати різнокольорові картки (наприклад, трьох різних кольорів) з певним номером (від 1 до 3). Таким чином на занятті сформується певна кількість груп залежно від кольорової гами. Кожній групі буде роздано питання та задачі відповідно до завдання. Члени групи повинні обмінятися інформацією стосовно їхнього завдання, опитати один одного, знайти розв'язки завдань. Після цього викладач пропонує студентам об'єднатися в "експертні" групи за номерами. Отже, сформуються групи, в кожній з яких буде визначено експерти з окремого завдання. Учасники розказують, пояснюють тему, розв'язують приклади.

Детальніше про інтерактивне навчання ліній і поверхонь описано в нашій статті [247]. Там, зокрема, наведено фрагмент застосування даного методу при вивченні теми "Зведення загального рівняння кривих другого порядку до канонічного вигляду".

Однією з форм позааудиторних занять студентів є їхня участь у роботі предметних гуртків. Гурток – організаційне утворення на кафедрі, учасниками якого є широке коло студентів факультету. Мета гуртка – виявлення найбільш здібних і талановитих, схильних до науково-дослідної роботи студентів та ознайомлення їх із актуальними питаннями науки. На засіданнях гуртка проходить глибше вивчення окремих питань цієї науки, відбувається опанування принципів, методів, прийомів ведення наукової роботи, а також формування у студентів основних навичок, необхідних для подальшої самостійної роботи. На першому курсі робиться спроба залучити всіх студентів до гурткової роботи з метою:

- поглиблення знань з дисципліни;
- розширення ерудиції студента як цілісної особистості;
- визначення здібності студента до наукових досліджень.

Прикладом наукового гуртка, який може бути організований з аналітичної геометрії в педагогічному університеті, є гурток «Дослідження геометричних образів I та II порядків». Засідання гуртка доцільно проводити два рази на місяць. Кожне заняття має свою структуру та ідейну спрямованість. Керівником заздалегідь продумується тематика занять, їх зміст, ключові питання, які мають бути розглянуті в ході проведення заняття, визначаються індивідуальні завдання для членів гуртка. На першому занятті призначаються відповідальні за підготовку та проведення занять згідно з тематикою плану роботи гуртка. При цьому особлива увага приділяється залученню студентів до збору, аналізу та узагальнення науково-методичної літератури, проведення соціологічних та експериментальних досліджень, підготовки доповідей і повідомлень.

З метою розширення кругозору та поглиблення знань майбутніх учителів математики, необхідних для їх подальшої педагогічної діяльності, нами розроблена відповідна тематика занять гуртка. На заняттях гуртка студенти ознайомлюються з основними видами та властивостями трансцендентних ліній та поверхонь.

Наприклад, однією із таких тем заняття гуртка є «Ланцюгова лінія як трансцендентна крива». Детально розробка цього заняття і методика проведення інших занять описані в нашій статті [129].

Під час вивчення тем пов’язаних з лініями студентам наводили приклади не тільки алгебраїчних, а й трансцендентних ліній. Аналогічно слід подавати матеріал тем з поверхонь. Як приклад неалгебраїчної поверхні можна розглянути стрічку Мебіуса (рис. 2.15). Традиційно у студентів викликає зацікавленність її особлива властивість – односторонність.

Доцільно показати студентам, як можна виготовити таку поверхню зі

Рис. 2.15. Стрічка Мебіуса

Рис. 2.16. Двостороння стрічка Мебіуса

смужки паперу, повертаючи один з їй кінців на півоберту і з'єднуючи кінці стрічки для створення замкненої поверхні. Студентам можна запропонувати провести дослідження над стрічкою вдома, а результати розповісти на наступному занятті. Можна провести дослідження зразу на занятті. Разом з ними спробувати розрізати стрічку по лінії, рівновіддаленій від країв, і побачити, що замість двох стрічок Мебіуса утвориться одна довга двостороння (в два рази більш закручена, ніж стрічка Мебіуса) стрічка (рис. 2.16).

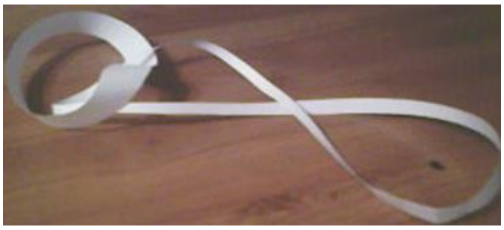


Рис. 2.17. Цікаві комбінації стрічок Мебіуса

Якщо тепер цю стрічку ще раз так само розрізати, то утворюються дві стрічки, намотані одна на одну. Якщо ж спробувати розрізати стрічку по лінії, яка наближена до лівого або правого краю, то утвориться дві стрічки Мебіуса, одна з якої буде більша за іншу (рис. 2.17). Інші цікаві комбінації стрічок можуть отримати студенти самостійно.

При розгляді початку пункту організаційні форми навчання, нами вказувалося на існування дистанційного навчання. В контексті теми дослідження мова йде про паралельне використання традиційної форми навчання в університеті з дистанційною, яка виявляється у самонавчанні навчальним закладом за допомогою виваженого управління викладача і комп'ютерних технологій. Детальніше організацію дистанційного навчання ліній і поверхонь розглянемо в п. 2.4.

2.3. Самостійна робота і контрольні заходи в процесі вивчення студентами ліній і поверхонь

У попередньому пункті розглядався поділ форм організації навчання на чотири групи (*навчальні заняття, самостійна робота, контрольні заходи* і *практична підготовка*) за В. Л. Ортинським [171]. Нами було висвітлено особливості першої групи форм організації навчання ліній і поверхонь. Побіжно, як місце теми в ШКМ, розглянули окремі питання, що стосується практичної підготовки, оскільки практична підготовка студентів здійснюється переважно на старших курсах. У цьому пункті буде розкрито ще дві форми організації навчання ліній і поверхонь, а саме – самостійну роботу та контрольні заходи.

Самостійна робота – це складний багатоаспектний феномен, який фахівці визначають як:

- метод навчання (В.Б. Бондаревський, В.К. Буряк, М.Н. Скаткін);
- форму організації навчального процесу (М.А. Данилов, Б.П. Єсипов);
- вид діяльності (І.Я. Лернер, М.І. Махмутов);
- засіб організації та виконання навчальної діяльності (О. П. Муковіз)
- форма управління та самоуправління (Л. М. Журавська).

У нашому дослідженні будемо дотримуватися комбінованого підходу.

Самостійна робота студента – це форма організації навчання, за якої студент здійснює навчально-пізнавальну діяльність без прямої участі інших осіб, в умовах самоуправління та управління з боку інших учасників навчального процесу.

За будь-яких підходів до тлумачення самостійної роботи вона обов'язково має бути спрямованою на реалізацію пізнавальної, самоосвітньої, прогностичної, коригуючої та виховної функцій. Пізнавальна функція визначається засвоєнням студентом систематизованих знань з дисциплін. Самоосвітня функція – це формування вмінь і навичок, самостійного їх оновлення і творчого застосування. Прогностична функція є вмінням студента вчасно передбачати й оцінювати як можливий результат, так і саме виконання завдання. Корегуюча функція визначається вмінням вчасно корегувати свою діяльність. Виховна функція – формування самостійності як риси характеру.

В умовах кредитно-модульної системи навчання та скорочення обсягу обов'язкових аудиторних занять на вивчення ліній і поверхонь значно збільшується питома вага самостійної роботи студентів. Усе це вимагає удосконалення її організації, зокрема –ретельного планування самостійної роботи (як з боку викладачів, так і з боку студентів), створення відповідного методичного забезпечення та формування у студентів умінь і навичок самонавчання. Підвищуються також вимоги, що висуваються до діяльності викладачів стосовно організації самостійної роботи студентів. Відповідно до рекомендацій [75] викладач має забезпечити:

1. Обґрунтування необхідності завдань у цілому й конкретного завдання зокрема, що вимагає виявлення та стимулювання позитивних мотивів діяльності студентів.

2. Відкритість та загальну оглядовість завдань. Усі студенти повинні знати зміст завдання, мати можливість порівняти виконані завдання в одній та в різних групах, проаналізувати правильність та корисність виконаної роботи, відповідність поставлених оцінок (адекватність оцінювання).

3. Надання детальних методичних рекомендацій щодо виконання роботи (у якій послідовності працювати, з чого починати, як перевірити свої знання). За окремими завданнями студенти мають отримати пам'ятки.

4. Надання можливості студентам виконувати творчі роботи, які відповідають умовно-професійному рівню засвоєння знань, не обмежуючи при цьому студентів виконанням стандартних завдань.

5. Здійснення індивідуального підходу до виконання самостійної роботи. Індивідуальні завдання можуть виконувати за бажанням усі студенти або окремі з них (які творчо обдаровані, вимогливі, мають великий досвід практичної діяльності, навчання та роботи за кордоном тощо). Індивідуалізація самостійної роботи сприяє самореалізації студента, розкриваючи в нього такі грані особистості, які допомагають професійному розвитку.

6. Нормування завдань для самостійної роботи, яке базується на визначенні витрат часу та трудомісткості різних їхніх типів. Це забезпечує оптимальний порядок навчально-пізнавальної діяльності студентів — від простих до складних форм роботи.

7. Можливість ведення обліку та оцінювання виконаних завдань і їхньої якості, що потребує стандартизації вимог до вмінь майбутніх спеціалістів та розроблення комплексу професійно орієнтованих завдань.

8. Підтримання постійного зворотного зв'язку зі студентами в процесі здійснення самостійної роботи, що є чинником підвищення ефективності навчального процесу.

Усі ці вимоги є актуальними в ході організації самостійної роботи під час вивчення ліній і поверхонь.

Планування самостійної роботи здійснюється викладачем на основі навчальних і робочих програм, навчального плану та освітньо-кваліфікаційних характеристик, реального бюджету часу та індивідуальних особливостей студентів і викладачів. Для самостійного опрацювання теоретичного матеріалу, як правило, виносяться описові та найлегші теми розділів курсу, а також теми, для роботи над якими у студентів є теоретична база. З кожного розділу курсу на початку семестру лектор ознайомлює студентів з тематичним планом вивчення теоретичного програмного матеріалу, де вказано, які теми з кожного розділу курсу виносяться на самостійне вивчення, і яка література рекомендується до кожної теми. Завдяки цьому викладач на лекціях має можливість більш детально розглядати той теоретичний матеріал, який є складним для сприйняття студентами.

Планування студентом самостійної роботи полягає у розумінні та прийнятті мети і завдань самостійної роботи, встановленні обсягу та визначенні термінів виконання, побудові власної системи самостійної роботи.

Створення методичного забезпечення є однією з умов успішної самостійної діяльності студентів. Інформаційно-методичні матеріали стосовно вивчення ліній і поверхонь містяться у підготовленому нами «Практикумі з аналітичної геометрії» [146]. Студенти мають можливість ознайомитися із загальною інформацією про дисципліну (опис навчальної дисципліни, мета та завдання її вивчення), нормативно-методичними матеріалами (структура залікового кредиту, назви та короткий зміст навчальних модулів, теми практичних занять, обсяг годин тощо), змістовим наповненням окремих тем курсу, методичними рекомендаціями стосовно виконання основних видів задач, індивідуальними домашніми завданнями до кожної теми, завданнями для модульного контролю, зразками тестових завдань тощо.

Наприкінці посібника наведено орієнтовний розподіл балів при рейтинговій системі оцінювання та шкалу навчальних досягнень студентів. Доповнює «Практикум» електронний курс «Аналітична геометрія», підготовлений нами на платформі Moodle, який, крім іншого, містить методичні рекомендації щодо роботи з курсом, завдання для самостійного опрацювання, модульний контроль та підсумкове тестування (online), термінологічний словник, перелік друкованих та інтернет джерел з курсу [264].

До складу методичного забезпечення також відносяться навчально-методичні посібники «Вивчення ліній і поверхонь з комп’ютерною програмою 3D Plotter», «Використання ППЗН ППЗН *GRAN-2D* і *GRAN-3D* під час вивчення ліній і поверхонь» (детальніше про них йтиметься мова у п. 2.4).

Формування у студентів умінь і навичок самонавчання передбачає формування таких умінь: свідомо спрямовувати свою діяльність; систематично, ритмічно працювати; виконувати роботу без керівництва; пізнавати в процесі цілеспрямованого пошуку; самостійно мислити; самостійно навчатися й здобувати нові знання; використовувати набуті знання, вміння і навички; усвідомлювати навчальні завдання; здійснювати пошук необхідних даних; сприймати нові дані і запам’ятовувати їх; осмислювати і мотивувати свою діяльність.

Уміння і навички самонавчання слід формувати у студентів постійно і неперервно, розвиваючи у них внутрішню потребу поповнювати та оновлювати свої знання. Важлива роль у цьому надається викладачеві, який може виконувати різні функції (організовує, мотивує, перевіряє тощо), впливаючи у такий спосіб на формування самостійності студентів.

Роль викладача залежно від його втручання в самостійну роботу студентів може бути такою:

1) викладач-керівник процесу самостійної роботи (планує, організовує та забезпечує виконання поставлених цілей, дає настанови, активно допомагає, надає докладну інформацію та пропозиції для виконання завдання тощо);

2) викладач-консультант (дає поради, допомагає виконати ті чи інші дії, робить висновки, висловлює власну думку з приводу проблем, що розглядаються, допомагає оцінити правильність виконання завдання та знайти альтернативне рішення, надає додаткову інформацію для виконання завдання);

3) викладач-модератор (не втручається у хід самостійних пізнавальних дій, а лише спостерігає за процесом виконання завдання, оцінює його і за необхідності порушує питання для роздумів, тобто спрямовує діяльність, не висловлюючи своєї думки, і дає можливість самостійно дійти певних висновків, стимулює мислення).

На перших етапах навчання в університеті основні завдання для самостійної роботи мають бути зрозумілими і доступними для виконання всіма студентами. Навіть пізніше зростання самостійності студентів не знижує їх потреби в педагогічному управлінні викладача.

Для навчання ліній і поверхонь актуальними є такі види самостійної роботи:

- самостійне опрацювання теоретичного матеріалу, самостійне розв'язування задач, самостійна робота як форма контролю, самостійна науково-дослідна робота;
- аудиторна, позааудиторна обов'язкова і позааудиторна ініційована;
- індивідуальна і групова;
- відтворюючі самостійні роботи за зразком, реконструктивно-варіаційні, евристичні, творчі (дослідницькі).

Нижче проілюстровано окремі види самостійної роботи прикладами, що стосуються вивченні плоских кривих у курсі аналітичної геометрії.

Під час вивчення теми «*Криві другого порядку: еліпс, гіпербола, парабола*» самостійну роботу можна організувати так: під час вивчення даної теми лектор розглядає та виводить канонічні рівняння таких кривих як еліпс та гіпербола, а канонічне рівняння параболи пропонується студентам вивести самостійно вдома, за аналогією до еліпса та гіперболи.

При вивченні теми «*Загальна теорія кривих другого порядку*» на самостійне вивчення можна винести такі теоретичні питання: «Визначення ліній II порядку шістьма точками» і «Штучні прийоми спрощення кривих другого порядку».

Крім традиційних тем курсу «Аналітична геометрія», доцільно виносити на самостійне опрацювання теми, які не є основними при вивченні даної дисципліни, оскільки на вивчення певних кривих виділяється мало часу. Така самостійна робота може бути індивідуалізована відповідно до можливостей та уподобань студентів і викладачів. До таких тем можна віднести, наприклад, «Трансцендентні криві», «Алгебраїчні криві вищих порядків», «Фрактальні криві» та інше. Під час опрацювання матеріалу з цих тем можна використовувати таку літературу, як: *Працьовитий М.В., Гончаренко Я.В.* «Лінії на евклідовій площині» [190], *Савелов А.А.* «Плоские кривые. Систематика, свойства, применения» [209], *Тарасенкова Н.А., Коломієць О.М.* «Аналітична геометрія. Лінії другого порядку» [4] та ін.

Якщо розглядати самостійну роботу як самостійне розв'язування задач, то важливо збільшувати питому вагу самостійної роботи студентів через індивідуальні домашні завдання та комплексні розрахунково-графічні роботи. Завдання передбачають самостійне опрацювання студентами окремих тем навчального матеріалу та завдань різних рівнів складності. При цьому, рівень складності задач розрахункових робіт збігається з рівнем складності екзаменаційних та модульних завдань. Наприклад, завдання для розрахунково-графічної роботи можуть бути такими.

1. Зведіть до канонічного вигляду рівняння лінії l і побудуйте її в початковій системі координат: $13x^2+18xy+37y^2-26x-18y+3=0$

2. Спростіть методом інваріантів рівняння кривої: $4x^2+12xy+9y^2-4x-6y+1=0$;

3. Встановіть тип, вид та головні параметри кривої: $3x^2+4xy+y^2-2x-1=0$.

Крім домашніх завдань до кожного практичного заняття, доцільно пропонувати студентам для розв'язання системи задач до окремої теми, які студент має виконати за встановлений проміжок часу. Ці задачі містять достатню кількість простих і складних завдань, що дозволяє студентам напрацювати потрібні вміння та навички. Наприклад, під час вивчення теми «Пряма на площині», студентам можна запропонувати такі задачі.

1. Дано сторони трикутника: $(AB): x+2y+5=0$, $(BC): 3x+y+1=0$, $(AC): x+y+7=0$. Складіть рівняння висоти трикутника, опущеної на сторону *AC*, користуючись рівнянням пучки прямих.

2. Знайдіть гострий кут, утворений з віссю ординат прямою, яка проходить через точки $A(2;\sqrt{3})$ та $B(3;2\sqrt{3})$.

3. Точки $A(1;2)$ і $C(3;6)$ є протилежними вершинами квадрата. Визначіть координати двох інших вершин.

4. На вісі абсцис знайдіть точку, відстань від якої до прямої $8x+15y+10=0$ дорівнює 1.

5. Дано послідовні вершини паралелограма: $A(0;0)$, $B(1;3)$, $C(7;1)$. Знайдіть кут між його діагоналями та покажіть, що цей паралелограм є прямокутником.

6. Дано вершину трикутника $A(3;9)$ і рівняння медіан: $y-6=0$ та $3x-4y+9=0$. Знайдіть координати двох інших вершин трикутника.

7. Скласти рівняння гіпотенузи прямокутного трикутника, яка проходить через точку $M(2;3)$, якщо катети трикутника розташовані на осях координат, а площа трикутника дорівнює 12 кв. од.

8. Скласти рівняння трьох сторін квадрата, якщо четвертою стороною є відрізок прямої $4x+3y-12=0$, кінці якого лежать на координатних осях.

Детальніше про організацію навчальної самостійної роботи студентів з вивчення ліній і поверхонь описано в нашій роботі [150].

Для студентів педагогічних університетів актуальними є самостійні роботи творчого характеру, оскільки уміння і навички дослідницької діяльності безцінні для майбутнього вчителя і становлять одну із основних складових його професійного успіху.

На базі багатьох сучасних шкіл відкриваються наукові гуртки та секції, керівниками яких можуть бути лише спеціалісти високої кваліфікації, які здійснюють наукові дослідження. Саме тому науково-дослідницька робота студентів у педагогічному університеті має стати предметом загостреної уваги всього викладацького колективу. Різноманітність за обсягом і глибиною питань, що розглядаються під час вивчення ліній і поверхонь в курсі аналітичної геометрії, уможливлюють залучення кожного студента до дослідницької роботи в різних її формах – індивідуальній і колективній, аудиторній і позааудиторній, обов’язковій і добровільній.

Науково-дослідницька діяльність студентів у вищих навчальних закладах здійснюється за трьома основними напрямами:

1) науково-дослідницька робота, що є складовою частиною навчального процесу і входить до календарно-тематичних та навчальних планів, навчальних програм як обов'язкова для всіх студентів (підготовка наукових рефератів на задану тему; виконання лабораторних робіт і домашніх завдань з елементами творчого пошуку; дослідницькі завдання на період проходження усіх видів практик; навчальні наукові семінари; підготовка і захист курсових, дипломних, магістерських робіт);

2) науково-дослідницька робота, що здійснюється поза навчальним процесом (робота студентських гуртків, проблемних груп, студентських науково-творчих товариств, написання статей, тез доповідей тощо);

3) науково-дослідницька робота, що пов'язана з підготовкою та проведенням науково-організаційних заходів (участь у конференції, підготовка диспутів, захист проектів тощо) [257, с.28].

У наших публікаціях [129], [137], [138], [141], [143] описано шляхи реалізації двох перших напрямів науково-дослідницької роботи студентів. Стосовно першого напряму розглянуто особливості виконання курсової роботи, як одного із видів науково-дослідницької діяльності студентів при вивченні ліній в курсі аналітичної геометрії. Сформульовано найважливіші вимоги до змісту курсової роботи, подано рекомендації щодо добору та опрацювання літератури. Запропонована тематика курсових робіт, що стосуються дослідження, задання та вивчення властивостей ліній на евклідовій площині. Стосовно другого напряму показано доцільність організації та роботи наукового гуртка з аналітичної геометрії як одного із напрямів науково-дослідницької діяльності студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів. Запропоновано конкретні рекомендації та теми для гурткової роботи з проблеми «Дослідження геометричних образів I та II порядків».

На реалізації третього напряму науково-дослідницької роботи студентів слід зупинитися детальніше. Нами започатковано міжпредметний проект «Цікаві лінії та поверхні обертання».

Наприкінці першого семестру студенти отримують групове завдання:

1. Знайти якомога більше прикладів ліній, які досліджувалися математиками минулого.
2. Описати історію дослідження кожної лінії.
3. Зобразити лінії та написати відповідні рівняння, що їх задають.
4. Віднайти історичні задачі, що стосуються ліній і поверхонь.
5. На основі знайдених ліній і вказаних умов створити різні поверхні обертання.
6. Підготувати відповідні презентації до захисту.

Викладачі пояснюють роботу над проектом. Розповідають, що це завдання випереджає вивчення теоретичного матеріалу як з аналітичної геометрії, так і з математичного аналізу. Але виконання перших завдань не потребує ґрунтовних знань з предметів, тому їх можна почати виконувати на канікулах. Проект буде захищатися наприкінці семестру, коли всі необхідні теми будуть вже розглянуті на лекціях і практичних заняттях.

Студентам наводиться приклад історичної задачі.

Задача Паскаля. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням арки циклоїди навколо осі абсцис.

Демонструється розв'язання однієї задачі, щоб студенти побачили зв'язок аналітичної геометрії та математичного аналізу.

Задача. Знайдіть площу поверхні тіла, утвореного обертанням однієї арки циклоїди $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$, навколо її основи.

Розв'язання. Потрібно правильно уявлят, що являє собою

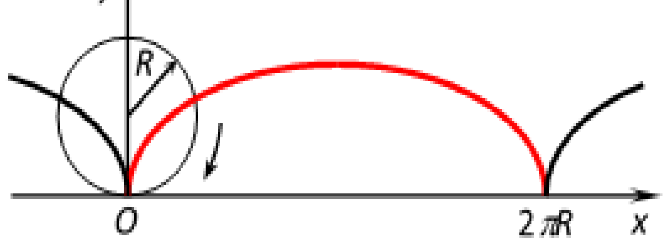


Рис. 2.18 Циклоїда

дана крива (рис. 2.18). Знати, як вона описується параметричним рівнянням і уявляти тіло, яке виходить у результаті обертання однієї арки циклоїди навколо її основи.

З курсу математичного аналізу відомо:

$$P = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx \text{ або } P = 2\pi\int_l ydl,\ dl = \sqrt{1+(y')^2}dx .$$

Якщо крива задана параметрично $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \\ a \le t \le b \end{cases}$ то $dl = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + (y'(t))^2}dt$

Оскільки $x'(t) = a(1-\cos t),\ y'(t) = a\sin t$, можемо знайти dl:

$$dl = \sqrt{a^2\left(1-\cos t\right)^2 + a^2\sin^2 t}dt = a\sqrt{1-2\cos t + \cos t^2 + \sin^2 t}\, dt =$$

$$= a\sqrt{2-2\cos t}dt = \sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}dt = \sqrt{2}a\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}dt = 2a\sin\frac{t}{2}dt.$$

$$P = 2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)2a\sin\frac{t}{2}dt = 8a^2\pi\int_0^{2\pi}\sin^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}dt = 8a^2\pi\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}dt =$$

$$8a^2\pi\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right) - 2d\cos\frac{t}{2} = -16a^2\pi\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)d\cos\frac{t}{2} =$$

$$= -16a^2\pi\left(\cos\frac{t}{2} - \frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = -16a^2\pi\left(\cos\pi - \frac{1}{3}\cos^3\pi - \cos 0 + \frac{1}{3}\cos^3 0\right) =$$

$$= -16a^2\pi\left(-1+\frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}\right) = -16a^2\pi\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{64a^2\pi}{3}.$$

Відповідь. Площа поверхні тіла $\frac{64a^2\pi}{3}$.

Задача зводиться до обчислення криволінійного інтеграла, основним кроком при цьому є параметризація кривої, визначення відрізку зміни параметра для зведення криволінійного інтеграла до визначеного.

Студентам наголошується, що для побудови поверхонь можна використовувати будь-які засоби – від олівця і паперу до спеціальних комп'ютерних (детальніше про це у наступному параграфі).

Студентам пропонується кілька можливих способів виконання проекту:

- кожен студент обирає одну цікаву лінію і для неї виконує всі необхідні завдання;

- студенти поділяються на мобільні групи «Слідопити», «Історики», «Художники-конструктори», «Аналітики», «Програмісти», «Організатори», «Доповідачі» тощо. У групі вони самостійно визначають завдання для кожного і встановлюють якість та обсяг його виконання наприкінці проекту. «Організатори» мають прослідкувати, щоб усі студенти були задіяні, та всі завдання були виконані якісно і в повному обсязі. Про це періодично доповідається керівникам проекту. Захист проекту відбувається публічно за участі студентів паралельних груп, викладачів різних кафедр і всіх бажаючих.

Отже, працюючи самостійно, студенти мають можливість за власною ініціативою більш глибоко і цілеспрямовано засвоїти те чи інше питання або тему і при цьому отримати позитивну оцінку. В результаті з’являються стійкі внутрішні мотиви до самостійного пізнання. Успіх цієї роботи багато в чому залежить від бажання, прагнення, інтересу до роботи, потреби в діяльності, тобто від наявності позитивних мотивів. Велике значення під час самостійної роботи студента мають його спрямованість, психологічна готовність, а також певний рівень бази знань, на який будуть нашаровуватися нові знання.

Навчальний процес у вищій школі багатогранний і різноплановий. Управління цим процесом з боку викладача полягає не тільки у наданні студентам певного навчального матеріалу, а й у здійсненні певних контрольних заходів (іспити, заліки, колоквіуми, модульний контроль, контрольні роботи, самостійні роботи, поточне опитування тощо). Від системного і систематичного контролю за навчально-пізнавальною діяльністю студентів в цілому і самостійно зокрема, залежить якість математичної та методичної підготовки майбутнього вчителя математики.

Ретельна організація контролю необхідна для своєчасного виявлення і ліквідації прогалин у знаннях і уміннях студентів, для пошуку шляхів раціоналізації викладацької діяльності, ліквідації виявлених недоліків у роботі викладача. На основі результатів контролю викладач може коригувати процес математичної підготовки студентів і відповідно стимулювати студентів до самостійної роботи над собою, формувати у них почуття відповідальності.

Розрізняють попередній, поточний, модульний та підсумковий контроль.

Попередній контроль застосовується як передумова для успішного планування і керівництва навчальним процесом. Він дає змогу визначити наявний рівень знань студентів, а його результати використовуються для визначення обсягу і рівня обов'язкового навчального матеріалу з теми. Формою попереднього контролю є вхідний контроль знань. П.І.Сікорський слушно зазначає, що в умовах модульного навчання вхідний контроль може і має проводитися на початку вивчення кожного модуля курсу аналітичної геометрії [219]. Оскільки зміст навчального матеріалу про лінії і поверхні тісно пов'язаний зі шкільним курсом математики, то визначення підготовленості студентів перед вивченням нової теми уможливлює правильний розподіл навчального матеріалу для самостійного опрацювання студентами, про що зазначалося у п. 2.1.

Використання системи Moodle створює можливості для проведення попереднього контролю перед розглядом окремих тем на практичних заняттях. Студенти вдома можуть відповідати на тестові питання, а викладач ще до пари може створити певне уявлення про підготовленість групи до заняття. Детальніше про це йтиметься у наступному пункті.

Поточний контроль – контроль знань й умінь студентів, що здійснюється безпосередньо у процесі навчання під час аудиторних занять. Переважно такий вид контролю має навчальний характер, бо дає можливість аналізувати досягнуті результати, зіставляти їх із прогнозованими, здійснити корекцію. На практичних заняттях з аналітичної геометрії доцільно використовувати такі форми поточного контролю:

- вибіркове усне опитування перед початком занять;

- фронтальне стандартизоване опитування за карточками чи тестами;
- фронтальна перевірка виконання домашніх завдань;
- самостійне розв'язування задач біля дошки;
- письмова самостійна робота тощо.

Письмову самостійну роботу навчального характеру слід проводити на тому ж занятті, коли відбувалося пояснення даної теми. Підсумкові самостійні роботи мають місити завдання за дві-три теми. Наприклад, у таблиці 2.5 подано завдання у вигляді тестів.

Таблиця 2.5

Самостійна робота з теми «Криві другого порядку»

1. Вказати, за яких умов рівняння $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ описує еліпс.			
A: $B=0 \quad A \neq C \neq 0$	B: $A=0,\ B \neq C$	C: $C=0,\ A \neq B$	D: $A=0,\ B=0,\ C \neq 0$
2. Вказати межі зміни ексцентриситету еліпса.			
A: $0<\varepsilon<1$	B: $0 \leq \varepsilon < 1$	C: $\varepsilon>0$	D: $\varepsilon>1$
3. Вказати канонічне рівняння кривої, якщо велика вісь $2a=6$, а мала вісь $2b=4$			
A: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$	B: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}=1$	C: $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$	D: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$
4. Вказати межі зміни ексцентриситету гіперболи.			
A: $0<\varepsilon<1$	B: $0 \leq \varepsilon < 1$	C: $\varepsilon>0$	D: $\varepsilon>1$
5. Вказати рівняння еліпса.			
A: $\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+x^2}=2a$	B: $\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$	C: $\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$	D: $\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2-y^2}=2a$
6. Рівняння еліпса в полярній системі координат.			
A: $\rho=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$	B: $\rho=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$	C: $\rho=\frac{1+p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$	D: $\rho=-\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$
7. Фокальний параметр еліпса:			
A: $p=\frac{1}{1+\varepsilon\cos\varphi}$	B: $p=\frac{b^2}{a}$	C: $p=\frac{b}{a}$	D: $p=\frac{b^2}{c}$
8. Рівняння асимптоти гіперболи:			
A: $y=\mp\frac{b}{a}x$	B: $y=\pm\frac{b}{a}x^2$	C: $y=\pm\frac{b}{a}x$	D: $y=\pm\frac{a}{b}x$

9. Дотична до параболи в точці:			
A: $y^2 = p(x + x_0)$	B: $yy_0 = p(x + x_0)$	C: $yy_0 = p(x - x_0)$	D: $yy_0 = p(xx_0)$
10. Пряма $y = kx\ (k \neq 0)$ перетинає параболу:			
A: у двох точках	B: у одній точці	C: не перетинає	D: інша відповідь
11. Вказати канонічне рівняння кривої, якщо велика вісь $2a = 8$, а мала вісь $2b = 4$			
A: $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{16} = 1$	B: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$	C: $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$	D: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$
12. Вказати формулу для обчислення фокусів еліпса.			
A: $c = a^2 + b^2$	B: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$	C: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$	D: $c = a^2 - b^2$
13. Вказати коли крива не вироджена.			
A: $I_3 = 0$	B: $I_3 \neq 0$	C: $I_3 = 0, I_2 \neq 0$	D: $I_2 = 0$
14. Лінія другого порядку є центральною, якщо:			
A: $I_2 \neq 0$	B: $I_3 \neq 0$	C: $I_3 = 0, I_2 \neq 0$	D: $I_2 = 0$
15. Лінія має два асимптотичних напрями, тоді коли:			
A: $I_2 > 0$	B: $I_3 < 0$	C: $I_2 < 0$	D: $I_2 = 0$

Пропонуючи студентам-першокурсникам матеріал для самостійного опрацювання, викладач повинен пояснити особливості роботи з даним видом навчального матеріалу. Ефективність самостійної роботи збільшується, коли вона є однією зі складових навчального процесу і проводиться планомірно та систематично, якщо на заняттях для неї відводиться певний час. Тільки за таких умов у студентів формуються стійкі вміння та навички щодо здійснення різних видів самостійної роботи. Тому для формування у студентів умінь застосовувати набуті теоретичні знання на практиці пропонується проводити короткочасні самостійні роботи навчального характеру. Поки студенти самостійно розв’язують задачу, викладач має можливість визначити, які саме труднощі виникають в окремих студентів,
яких саме помилок вони допускаються.

Наприклад, на практичних заняттях з розділу «*Криві другого порядку*» можна запропонувати для самостійної роботи такі типи задач.

2. Складіть рівняння лінії, яка:

- є геометричним місцем точок, відстань від кожної з яких до фіксованої точки M (0; 0) дорівнює 3 см;

- є геометричним місцем точок, відношення відстані від кожної з яких до точки M (1; 0) і відстані до прямої $x - 2 = 0$ дорівнює 0,2.

3. Складіть рівняння дотичної до еліпса γ: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{10} = 1$, яка проходить через точку M (4; 0) еліпса;

4. Знайдіть канонічне рівняння кривої, яку задано рівнянням $9x^2 - 24xy + 16y^2 + 30x - 40y - 25 = 0$.

Ефективність організації такої самостійної роботи залежить від використання різних способів інструктування студентів безпосередньо перед самостійною роботою:

– демонстрація зразків виконання аналогічних завдань під час аудиторних занять;

– колективне обговорення ходу виконання завдання і складання плану розв'язування під час аудиторних занять;

– виконання фрагментів завдань на заняттях з подальшою оперативною перевіркою викладачем;

– забезпечення студентів картками з інструкціями до виконання конкретних видів завдань.

Модульний контроль – контроль знань й умінь студентів з певного змістового модуля курсу, що проводиться одразу ж після закінчення вивчення матеріалу певного змістового модуля. Він може проводитись у вигляді тестової перевірки знань, колоквіуму, написання модульної контрольної роботи. Для обох модулів «Лінії та поверхні першого порядку» і «Лінії та поверхні другого порядку» пропонується проводити модульні контрольні роботи. Їх орієнтовний зміст подається у нашому «Практикумі» [146].

Підсумковий контроль полягає у встановленні рівня підготовки студентів відповідно до моделі спеціаліста. До підсумкового контролю з аналітичної геометрії відносять семестрові та курсові екзамени, а також заліки перед ними.

Ефективним засобом для підготовки студентів до екзаменів є методички М.В. Працьовитого «Екзамен з аналітичної геометрії (І семестр)» [191] та «Екзамен з аналітичної геометрії (ІІ семестр)» [192].

У процесі навчання викладачам слід не тільки здійснювати необхідні контрольні заходи, а й формувати у студентів мотивацію до самоконтролю, що є невід'ємною складовою самостійної роботи.

У Психологічному словнику самоконтроль визначається як «усвідомлення та оцінка суб'єктом власних дій, психічних процесів і станів. Самоконтроль передбачає наявність еталона і можливість отримання відомостей про контрольовані дії та стани» [198].

В українському педагогічному словнику самоконтроль тлумачиться як «усвідомлювана регуляція людиною своєї поведінки та діяльності для забезпечення відповідності їхніх результатів поставленим цілям, вимогам, правилам, нормам тощо. Мета самоконтролю полягає в запобіганні помилкових дій і операцій та виправлення їх» [47].

У процесі формування самоконтролю відбувається зростання рівня самостійності студентів у навчанні; зміна їх ставлення до нових способів навчальної діяльності, урізноманітнення форм співпраці студентів з викладачами. На різних етапах процесу навчання студенти контролюють себе в різній формі. Але за наполегливої сумісної праці викладачів і студентів зовнішній контроль поступово викликає внутрішній, який з часом перетворюється на самоконтроль. Викладачам слід спонукати студентів до самоконтролю, пояснювати їм сутність його прийомів, а також давати студентам необхідні інструкції з проведення самоконтролю.

Студенти мають знати, що ефективним засобом самоконтролю є інший спосіб розв'язування тієї самої задачі. Цим способом доцільно користуватися під час виконання домашніх завдань та виконання розрахунково-графічних робіт.

Корисними для студентів будуть і такі поради:

1. Якщо у задачі стоїть вимога знайти спільну точку прямих (площин), то координати знайденої точки мають задовольняти рівняння усіх прямих (площин).

2. Якщо у задачі стоїть вимога знайти рівняння площини, перпендикулярної до заданої, то сума добутків коефіцієнтів цих площин має дорівнювати нулю.

3. Якщо у рівняння кривої на площині коефіцієнти при x^2 і y^2 мають різні знаки, то ця крива не може бути ні еліпсом, ні колом.

4. Якщо у рівняння поверхні коефіцієнти при x^2, y^2 і z^2 мають однакові знаки, але різні модулі, то ця поверхня не може бути ні сферою, ні еліпсоїдом.

5. Якщо необхідно знайти переріз поверхні площиною паралельною площині xOy, то рівняння шуканого перерізу не має містити змінну z.

Активне використання студентами комп'ютерних технологій уможливлює реалізацію ще одного підходу. Виконане аналітично завдання розв'язується ще й за допомогою ППЗН. Наприклад, студент розв'язував таку задачу.

Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точку C (1; 0) *перпендикулярно до прямої AB, якщо* A(2; -1), B(3; 4).

Він отримав відповідь, що рівняння шуканої прямої має вигляд $x+5y-1=0$.

Самоконтроль. За допомогою ППЗН *Gran-2D* можна в одній системі координат досить швидко побудувати пряму, що проходить через дві задані точки і пряму, що задана рівнянням (рис. 2. 19). Зображення на екрані покаже, чи проходить шукана пряма через точку C (1; 0) і чи є побудовані прямі перпендикулярними (можна навіть визначити кут між прямими).

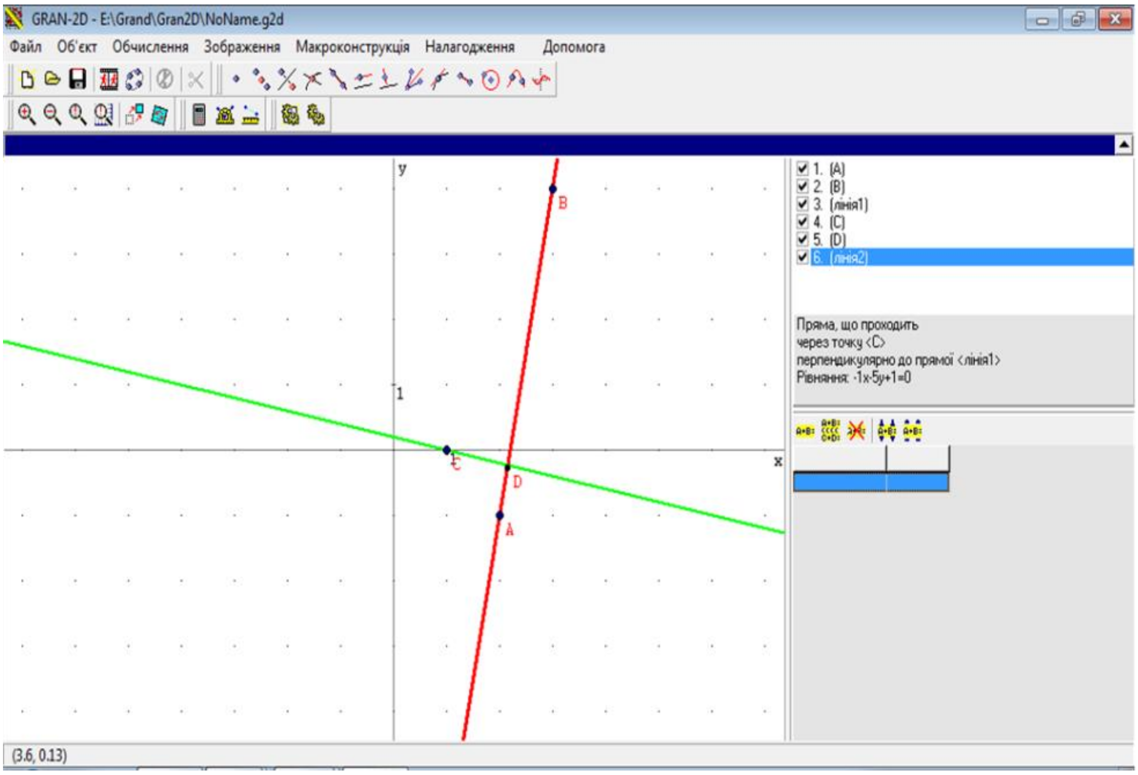


Рис. 2.19. Рівняння прямої, яка проходить через точку С перпендикулярно до прямої АВ.

У такий спосіб студенти не тільки навчаться себе контролювати та використовувати ППЗН, а й будуть оперувати графічними образами разом з аналітичними. Використання описаних вище прийомів сприятиме формуваннюу студентів стійкого інтересу до самоконтролю – студенти здійснюють самоперевірку власної навчальної діяльності, з’ясовують причини допущених помилок, а також намагаються надалі їх уникати. Крім цього, здійснення студентами самоконтролю сприяє становленню у них адекватної самооцінки своєї навчальної діяльності.

2.4. Використання інформаційних технологій під час вивчення ліній та поверхонь

Комп’ютер – один із засобів, що активно впроваджується викладачами математики в систему навчання і уможливлює технологічне забезпечення навчального процесу. Технології навчання формують необхідне інформаційне середовище, що сприяє активній педагогічній співпраці викладача і студента. Для такої взаємодії використовують прикладні педагогічні програмні продукти, бази даних, а також сукупність методичних засобів і матеріалів, необхідних для кращого управління якістю підготовки фахівців.

Викладач зосереджує свої зусилля на розробці системи завдань, які сприяють творчому застосуванню студентами базових знань (ідей, понять, методів пізнання) під час розв’язування навчальних завдань і вирішення доступних проблем. При цьому на інформаційні технології як засіб навчання покладаються різноманітні дидактичні функції. Використання ІКТ є незамінним чинником на стадії чуттєвого сприйняття явищ чи об’єктів, що вивчаються, при абстрактному мисленні і при ознайомленні з практичними застосуваннями вивчених явищ і об’єктів. Застосування інформаційних технологій забезпечує більш повну і точну інформацію про явище чи об’єкт, що вивчається; допомагає задовольнити і розвинути пізнавальні інтереси до вивченої теми; забезпечує наочність навчання і доступність навчального матеріалу; інтенсифікує працю студентів, і чим дозволяє підвищити темп вивчення навчального матеріалу; збільшує обсяг самостійної роботи на занятті.

Важливі функції ІКТ виконують і в діяльності викладача: дозволяють повніше і глибше розкрити, доступніше викласти зміст навчального матеріалу; збільшують можливості викладача як вихователя, джерела інформації, організатора, що контролює та оцінює процес і результати учіння. Ефективність використання інформаційних технологій залежить від їх технічної якості та педагогічної доцільності; від професійної підготовки викладача до їх використання, від умов, у яких вони застосовуються.

Питанням упровадженням ІКТ у навчальний процес присвячені праці багатьох дослідників: В. Безпалька [22], М. Жалдака [73], С. Ракова [203], Ю. Рамського [204], Ю. Триуса [241] та інших.

У вищій школі використовують різні програмні засоби у неоднакових формах і з різною метою.

Найчастіше для проведення лекцій і практичних занять у вищій школі використовується програма Microsoft Power Point, за допомогою якої створюються презентації – набір слайдів на певну тему. Кожен слайд може містити тексти, графіки, формули, малюнки, анімацію тощо.

Презентації використовують для актуалізації опорних знань, під час пояснення нового матеріалу, в процесі розв’язування задач, з метою контролю навчальних досягнень студентів, для демонстрації зразків виконання того чи іншого завдання тощо. Під час вивчення ліній і поверхонь презентації забезпечують наочність і візуалізацію навчального матеріалу. Застосування презентацій у навчанні забезпечує швидке і своєчасне подання в необхідній послідовності наочних образів, які створюють у студентів адекватні уявлення про геометричні об’єкти та їх властивості. За умови дотримання певних вимог, виважене використання презентацій:

- сприяє розвитку в студентів наочно-образного мислення;
- стимулює увагу (мимовільну і довільну) на етапі подання навчального матеріалу;
- активізує навчально-пізнавальну діяльність студентів;
- допомагає пов’язати теоретичні питання з практикою;
- збільшує можливості демонстрацій практичних застосувань явищ, які безпосередньо не можуть спостерігатися на занятті;
- створює можливості для моделювання процесів і явищ;
- дає змогу в доступній формі систематизувати й класифікувати явища із застосуванням схем, таблиць, спеціальним чином форматованого тексту

тощо;

- сприяє формуванню мотивації навчання, підвищує інтерес до навчання, створює установку на ефективне навчання;
- допомагає досить швидко й просто оцінити рівень засвоєння навчального матеріалу суб'єктами навчання і групою (класом) у цілому [109].

Презентації для навчання можуть готувати викладачі, або використовувати готові зразки, що є в інтернеті. Бажано долучати до цього процесу і студентів. Першокурсники з великим інтересом і бажанням відгукуються на такі пропозиції. Створення презентацій студентами створює умови для розвитку у них творчості, формування умінь структурувати навчальний матеріал, планування і певним чином готує до майбутньої педагогічної діяльності.

Окремі фрагменти презентацій, що доцільно використовувати під час вивчення ліній і поверхонь, подані на с. 115 і Додатку Е.

Варто зупинитись детальніше на систематизації навчального матеріалу наприкінці кожного модуля. За допомогою презентацій можна організувати повторення вивченого матеріалу, розглянути застосування вивчених раніше формул в нових умовах, зіставити геометричні образи з аналітичною формулою тощо.

.

Рис. 2.20. Фрагменти презентацій для вивчення поверхонь та кривих.

Структура лекцій, що присвячені систематизації вивчених знань, має відповідати структурі самого процесу систематизації (зведення розрізнених відомостей про предмети та їх властивості в єдину систему): від повторення окремих фактів до формування у студентів системи понять і відношень. Необхідними засобами для проведення таких лекцій є опорні конспекти, окремі таблиці, ілюстрації, схематичні зображення тощо. Такого роду матеріал доцільно подавати за допомогою презентацій з гіперпосиланнями. Таке подання навчального матеріалу уможливлює демонстрацію логічних зв'язків між окремими поняттями, місце поняття у темі, а теми – у всьому курсі.

Незамінним є використання презентацій у позааудиторній роботі студентів. Великий інтерес у студентів викликає підготовка і участь студентів до конференції «Криві і поверхні навколо нас». Студенти відшуковують цікаві приклади використання зазначених об'єктів, готують виступи і презентації.

2.2.2. Інше призначення і форми використання мають педагогічні програмні засоби – пакети прикладних програм, створені для безпосереднього їх використання у процесі навчання. На сьогодні кількість ППЗ для підтримки математичних дисциплін дуже велика: Gran,Derive, Maple, Mathematica, MathCad, MathLab, Advanced, тощо. Ці програмні засоби можуть широко використовуватися як на лекціях і практичних заняттях, так і під час самостійної роботи студентів у позааудиторний час.

Використання прикладних програмних засобів навчання створює значний педагогічний ефект: полегшує студентам розуміння багатьох понять і відношень між ними, розширює можливості розв'язування задач різними способами, поглиблює знання з навчального курсу тощо. Вивчення ліній і поверхонь в умовах використання ІКТ сприяє розвитку образного та просторового мислення, дозволяє глибше проникнути в сутність геометричних об'єктів, творчо розв'язувати задачі, здійснювати самоконтроль і самооцінку.

Слід зазначити, що не всі означені засоби однаково доступні (зрозумілі в користуванні) для студентів першого курсу, оскільки деякі з цих засобів вимагають певних знань з інформатики. Наприклад, за допомогою програми Maple можна розв’язувати багато видів задач з аналітичної геометрії [90]. Але таке розв’язання потребує більше часу, ніж розв’язування звичним для студентів способом. Крім того, воно ґрунтується на знаннях програмування, яким на цей час у необхідному обсязі ще не володіють усі першокурсники.

Вивчення курсу аналітичної геометрії супроводжується великою кількістю графічних відомостей та зображень, що доцільно реалізовувати за допомогою відповідного програмного забезпечення. Комп’ютерні технології дають можливість презентувати готові рисунки під час лекцій та практичних занять, демонструвати процес зміни геометричних об’єктів зі зміною значень параметрів, зображати геометричні фігуру.

Для викладання курсу аналітичної геометрії викладачі надають перевагу ППЗ Gran та Derive, оскільки їх використання ефективне під час вивчення всіх тем аналітичної геометрії на площині та в просторі. Вони надають можливість будувати прямі, кола, визначати координати даних точок, за заданим рівнянням будувати пряму та коло, досліджувати системи геометричних об’єктів на площині, виконувати побудову площин, поверхонь другого порядку в просторі; досліджувати вигляд поверхонь залежно від параметрів її рівняння, що сприяє розвитку просторової уяви, візуального мислення студента.

Дані педагогічні програмні засоби призначені насамперед для розв’язування широкого класу завдань шляхом моделювання об’єктів, про які говориться в умові задачі.

Під час вивчення ліній і поверхонь ефективними і доступними для першокурсників є програмні засоби *GRAN-2D* (на площині), *GRAN-3D* (у просторі). Дані програми надають можливість будувати точки, прямі, кола, визначати координати даних точок, рівняння даних прямих, прямі та площини у просторі, поверхні другого порядку в просторі тощо.

У змісті модуля 2 «Лінії та поверхні першого порядку» містяться теми: «Пряма на площині» і «Геометричні перетворення площини». Стосовно першої вивчаються різні види рівнянь прямої та їх застосування, відстань і відхилення точки від прямої, геометричний зміст лінійних нерівностей з двома невідомими, взаємне розміщення прямих, відшукування кута між прямими.

Використання *GRAN-2D* надає можливість:

- будувати пряму за двома точками,
- будувати паралельні прямі;
- будувати перпендикулярні прямі;
- знаходити координати точки середини відрізка;
- знаходити точку перетину двох геометричних об’єктів тощо.

Як приклад нижче подано розв’язування задачі з цього модуля.

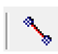
Задача. Дано трикутник з вершинами $A(-1; 2)$, $B(2; -2)$, $C(1; 3)$. Скласти рівняння прямої, що проходить через вершину C паралельно стороні AB.

Розв’язання. Потрібно побудувати трикутник за даними точками, а саме сторону *AB,* після чого скористатися кнопкою *створення паралельної прямої*, яка розміщена на панелі інструментів.

Для побудови трикутника з вершинами $A(-1;2)$, $B(2;-2)$, $C(1;3)$ треба виконати наступні дії: натиснути на піктограму (створення точки) на панелі інструментів та ставити першу точку однократним натисканням лівої кнопки мишки, потім, не зводячи курсор мишки з місця натиснути праву кнопку мишки та вибирати пункт властивості (

) у вікні, що з’явиться (рис 2.21), ввести параметри даної точки. Також властивість точки можна змінити двічі, натиснувши () на її назву в полі списку об’єктів (

). Ті самі дії необхідно повторити і для двох інших точок ($B(2;-2)$, $C(1;3)$).

Щоб з’єднати побудовані точки, треба вибрати кнопку  *(створення відрізка)* та по черзі з’єднати раніше створені точки, натискаючи на них. Можна змінювати налаштування відрізка, натиснувши на його назву в полі списку об’єктів та у вікні, що з’явилося, (рис. 2.22) змінити назву відрізка, колір, товщину тощо.

Для розв’язування заданої задачі побудова сторін трикутника не є обов’язковою.

Проводимо пряму паралельну стороні *AB* – на панелі інструментів

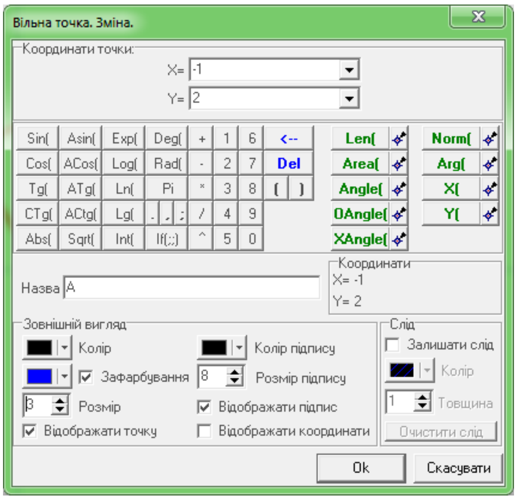


Рис. 2.21. Вікно вводу параметрів точки

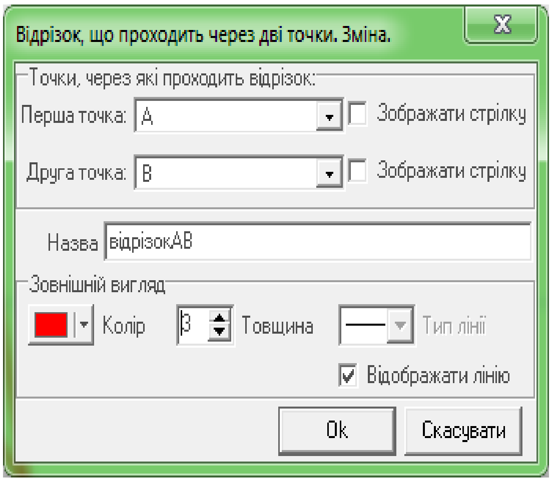


Рис. 2.22. Вікно зміни властивостей відрізка

вибираємо кнопку  (створення паралельної прямої) та вказуємо, через яку вершину вона проходитиме, в нашому випадку це вершина С.

Наведемо курсор мишки на цю точку та один раз натиснемо на неї лівою кнопкою. Натискаємо на сторону, паралельно якій буде проходити наша пряма. Можемо змінити властивості нашої прямої, двічі натиснувши на її назву в списку об’єктів (Рис. 2.23).

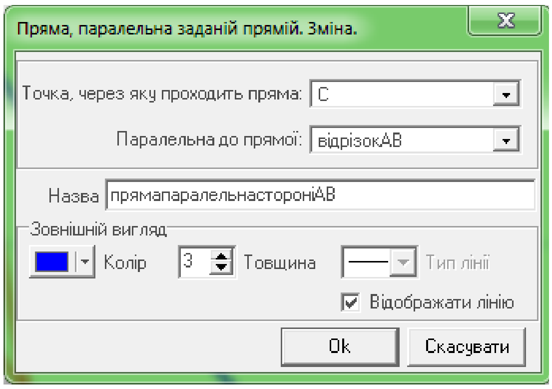


Рис. 2.23. Вікно зміни властивостей прямої

У *полі властивостей об’єктів* (рис. 2.24) видно, що пряма, яка проходить через вершину *С* паралельно стороні *AB,* має вигляд: $4x+3y-13=0.$

Студентам слід порадити, що доцільно визначити за допомогою програми і рівняння прямої *AB*, оскільки воно має суттєве значення для розв'язування цієї задачі аналітичним способом

.

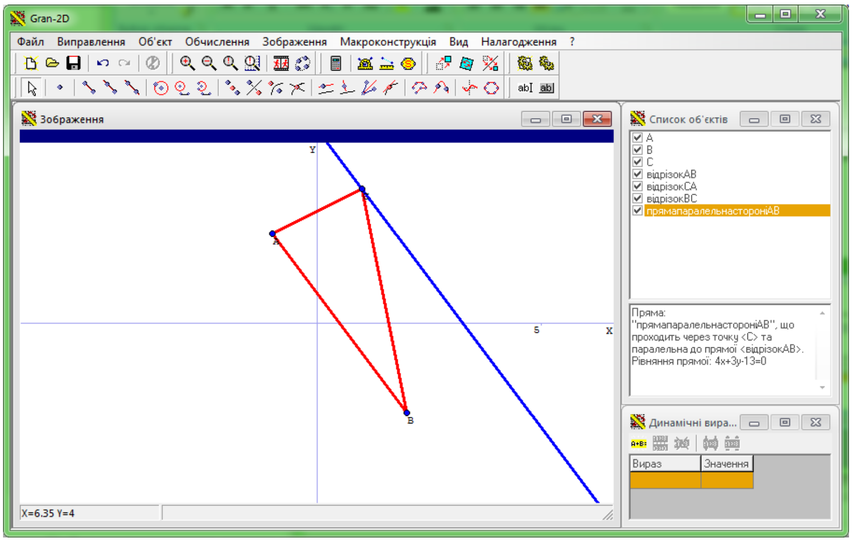


Рис. 2.24. Пряма, що проходить через вершину C паралельно стороні AB

Зрозуміло, що ця задача не складна і загалом не потребує геометричної ілюстрації чи громіздких обчислень. Варто запропонувати студентам її розв'язування за допомогою ППЗН з кількох причин:

- розуміння необхідності у здійсненні самоконтролю та формування у студентів відповідної потреби;
- спонукання студентів розв'язувати задачі кількома способами;
- вироблення навичок роботи з ППЗН з метою подальшого використання цих навичок під час навчання і професійної діяльності.

Ефективним є використання ППЗН *GRAN-2D* під час вивчення студентами теми «Геометричний зміст лінійних нерівностей з двома невідомими», що виноситься на самостійне опрацювання.

На лекції студенти отримують завдання:

3. Опрацювати теоретичний матеріал, поданий у посібнику [146] на с. 13.
4. Розв'язати задачі без використання ППЗН.

1) Визначити геометричні місця точок, виражених такими нерівностями:

а) $3x+y-1\geq 0$ б) $3x-5y-1<0$ в) $-5x+3y-1\leq 0$

2) Чи належать точки даній півплощині $5x - 3y + 2 \le 0$?

а) $(-2; 3)$ б) $\left(-\frac{2}{5}; 0\right)$ в) $\left(-3; -2\frac{8}{9}\right)$

3. Розв'язати задачі за допомогою ППЗН *GRAN-2D*.

1) Визначити геометричні місця точок, виражених такими системами нерівностей:

а) $\begin{cases} 3x + 2y - 11 \le 0, \\ -3x + y - 1 \le 0, \\ y \ge 2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y < 2, \\ x + y > 1, \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + 5y > -6, \\ 2x + y - 1 \ge 0, \\ y \ge 2 \end{cases}$

2) Чи належить точка перетину прямих $x - 4y + 6 = 0$ і $-x + 3y - 4 = 0$ півплощинам?

а) $x + y - 1 \ge 0$ б) $2x + 5y - 1 < 0$ в) $x + 3y - 1 \le 0$

Після самостійного опрацювання теоретичного матеріалу і розв'язування нескладних задач, студенти на занятті під керівництвом викладача вже можуть розв'язувати складніші задачі.

Під час вивчення теми «Геометричні перетворення площини» студенти отримують творче завдання – створити орнаменти на основі:

- алгебраїчних ліній;
- трансцендентних ліній;
- поєднання алгебраїчних і трансцендентних ліній.

Такі роботи виконувати полегшують ППЗН *GRAN-2D*. Дана самостійна робота підвищує у студентів інтерес до навчання і опанування новим матеріалом. Запропонований вид роботи з часом трансформується і буде використовуватися студентами на заняттях з методики навчання математики, під час педагогічної практики, а згодом – і в роботі з учнями.

ППЗН *GRAN-2D* використовується і під час вивчення Модуля 3 «Лінії та поверхні другого порядку». На лекціях чи практичних заняттях швидко і просто можна показати студентам, як змінюється вид конічного перерізу залежно від осьового перерізу конуса і нахилу площини перерізу, а також, як змінюється вид кривої залежно від зміни її параметрів.

Під час вивчення ліній і поверхонь у просторі («Площина у просторі», «Пряма у просторі», «Теорія прямих та площин у просторі», «Вивчення поверхонь II порядку за їх канонічними рівняннями», «Загальна теорія поверхонь II порядку») доцільно використовувати ППЗН *GRAN-3D*. З його допомогою можна:

- будувати точку, пряму та площину у просторі;
- поверхню, поверхню обертання, переріз поверхонь;
- знаходити відстань між двома точками, відстань між точкою та прямою, відстань між точкою і площиною, відстань між двома прямими та відстань між прямою та площиною;
- обчислювати кути між прямою та площиною, між двома площинами.

Прикладом може слугувати розв'язання поданої нижче задачі.

Задача. Знайдіть перетин поверхоні $z=x^2+y^2$ з площиною $x+y+2z-2=0$.

Розв'язання. Для того, щоб знайти перетин поверхонь, потрібно побудувати поверхню та площину.

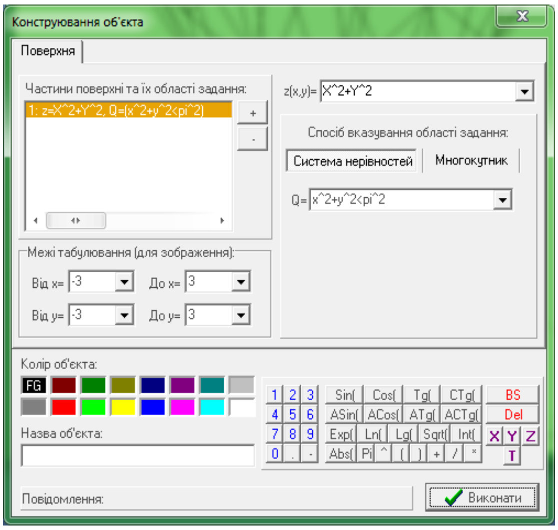


Рис. 2.25. Вікно конструювання об'єкта

1. Будуємо поверхню: на панелі інструментів натискаємо на кнопку  *створити поверхню*. Далі у вікні, що зявилося, конструювання об'єкта Рис. 2.25, вводимо рівняння $z=x^2+y^2$ та при потребі виконуємо і інші налаштування (колір об'єкта, назва об'єкта) і натискаємо *виконати.*

2. Для побудови площини $x+y+2z-2=0$ потрібно, спершу виразити z через x та y, а потім за допомогою кнопки  виконати побудову.

3. По завершенню побудови площини та поверхні можна натиснути кнопку  (*режим півтонного зображення*) та переглянути переріз (рис. 2.26).

З даного зображення видно, що перетином двох поверхонь є крива еліпс.

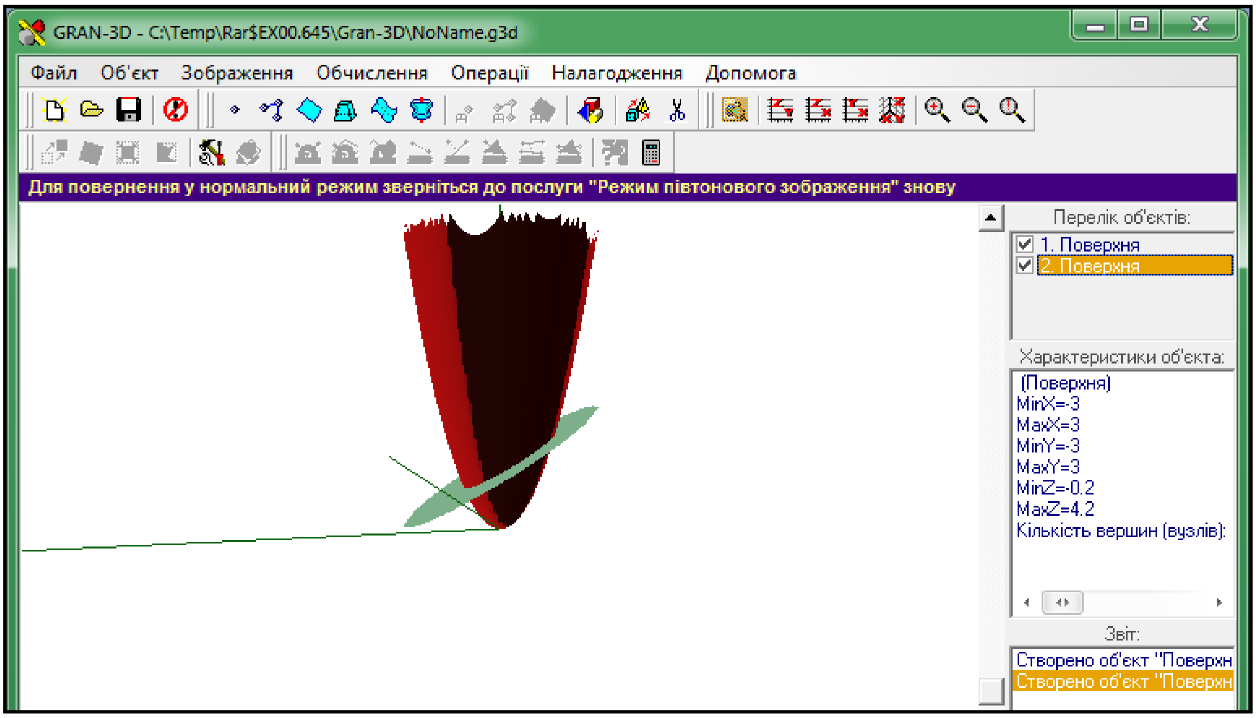


Рис. 2.26. Перетин поверхоні $z=x^2+y^2$ з площиною $x+y+2z-2=0$.

Програма ППЗН *GRAN-2D* добре відома і широко використовується у вищих і середніх закладах навчання. Саме тому значній кількості студентів, проте не всім відома вона ще зі школи. Для ефективної роботи з програмою і забезпечення навчального процесу сучасним засобом навчання нами підготовлено навчально-методичний посібник «Використання ППЗН *GRAN-2D* і *GRAN-3D* під час вивчення ліній і поверхонь» [145].

У ньому подаються основні характеристики ППЗН *GRAN-2D* і *GRAN-3D* і правила роботи з ними. У першому розділі розглядається використання програми *GRAN-2D* для побудови геометричних об’єктів на площині (Опис програмного забезпечення і практичне застосування програмного засобу). У другому розділі розглядається використання програми *GRAN-3D* для побудови геометричних об’єктів у просторі (Опис програмного забезпечення і практичне застосування програмного засобу). У кожному з цих розділів подаються конкретні приклади розв'язування задач, що стосуються ліній і поверхонь.

Третій розділ «Завдання для самостійної роботи» містить завдання для індивідуальних розрахунково-графічних робіт і зразки виконання окремих таких завдань.

Крім зазначених програмних засобів, сьогодні створюються та використовуються й інші навчальні програми. Так, наприклад, О.М. Коломієць у дослідженні «Диференційоване навчання аналітичної геометрії студентів вищих навчальних закладів педагогічного профілю» [92] пропонує використовувати навчально-контролюючу програму «Control», яка належить до типу тренажерів. Програма слугує для формування у студентів умінь і навичок під час навчання курсу аналітичної геометрії. З допомогою цієї програми можна виявляти недоліки підготовки студентів, визначати необхідний тип допомоги студентам, активізувати їх навчально-пізнавальну діяльність тощо. За допомогою програми можна здійснювати перевірку, самоперевірку та своєчасну корекцію знань, підвищувати роль самонавчання.

В Уманському державному педагогічному університеті імені Павла Тичини на заняттях з аналітичної геометрії використовується педагогічний програмний комплекс «3D Plotter», який створив студент вказаного ВНЗ О. Кривенко [104].

Дана програма була створена у середовищі Delphi 7 і має програмні ресурси, які дозволяють отримати високоякісні тривимірні зображення.

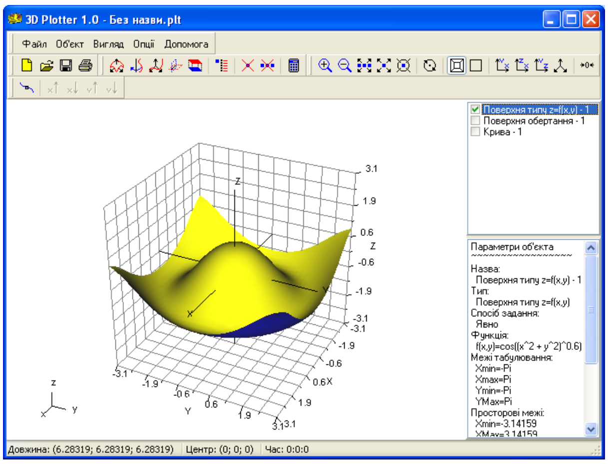


Рис.2.27. Головне вікно програми

Головне вікно програми зображено на рис. 2.27.

Основним призначенням програми є побудова тривимірних графіків функцій – поверхонь та їх перерізів. Це дає можливість кожному студенту краще оволодіти навчальним матеріалом, розвивати просторову уяву, активізувати пізнавальну діяльність під час розв'язування завдань різної складності, тим самим забезпечує студенту індивідуальний темп роботи, а також надає ряд переваг, які були зазначені вище.

Використання програмного засобу 3D Plotter, як комп'ютерної моделі геометричних образів, під час вивчення аналітичної геометрії можливе і доцільне у таких напрямах:

- побудова кривих;
- побудова поверхонь;
- дослідження форми, взаємного розміщення, орієнтації кривих та поверхонь при зміні параметрів їхніх рівнянь;
- отримання ліній перетину поверхонь;
- отримання проекцій на площину [104].

Враховуючи особливості та можливості програми 3D Plotter використання її в навчальному процесі з аналітичної геометрії, вона є доцільною при вивченні таких тем як: «Пряма на площині», «Площина в просторі», «Пряма в просторі», «Криві другого порядку», «Поверхні другого порядку».

Можливості даної програми при побудові геометричних образів досить широкі та охоплюють практично всі типи кривих та поверхонь, які вивчаються у курсі аналітичної геометрії. Використання даного засобу при вивченні окремих розділів дисципліни дозволить унаочнити навчальний матеріал, сприятиме кращому його розумінню студентами, формуванню у них просторового мислення.

Але є одна особливість, яка пов'язана з 3D Plotter. Якщо пряма (крива) чи площина задана канонічним рівнянням, то для побудови їх за допомогою даної програми потрібно перетворити канонічне рівняння в неявному вигляді до явного вигляду або задати їх параметрично. А це, в свою чергу, надає можливість студенту вивчати геометричні образи як в канонічній так, і в параметричній формі.

Наприклад, для побудови еліпса, канонічне рівняння якого має вигляд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, рівняння кривої треба задати параметрично за допомогою рівнянь $x=a\cos u$ та $y=b\sin u$. Змінюючи відповідно параметри a та b можна дослідити зміну форми кривої (рис.2.28).

Якщо ж потрібно побудувати криву за канонічним рівнянням, то треба перетворити канонічне рівняння кривої в явну залежність виду $y=f(x)$. При цьому виникає одна особливість – одному значенню змінної x відповідатиме два значення змінної y: додатне і від'ємне. Щоб побудувати графік даної залежності, треба розділити його на дві частини: одна із знаком «+», а інша із знаком «-».

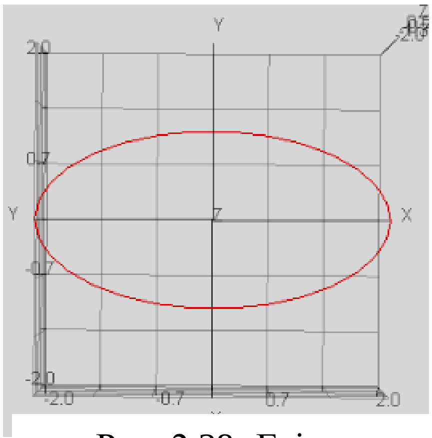


Рис. 2.28. Еліпс, заданий параметрично

При вивченні поверхонь другого порядку за їх канонічними рівняннями способи їх побудови аналогічні до вищеописаних, проте є ряд особливостей. Ту саму поверхню можна побудувати різними способами. Наприклад, поверхні обертання можна побудувати за допомогою таких типів об'єктів: «Поверхня типу $z=f(x,y)$», «Поверхня обертання», «Циліндрична поверхня», «Конічна поверхня». Щоб вибрати конкретний спосіб, який, можливо, є більш зручним, необхідно знати особливості побудови кожного з них. При цьому поверхню в межах одного об'єкта можна задати як параметрично, так і явно.

Отже, використання програми 3D Plotter на заняттях з аналітичної геометрії під час вивчення ліній та поверхонь дозволяє унаочнити навчальний процес, а саме:

- аналізувати зміну вигляду геометричного образу залежно від зміни параметрів відповідних рівнянь;

- будувати лінії перерізу поверхонь, як площинами, так і іншими поверхнями;
- будувати ті геометричні образи, які задані неканонічними рівняннями з метою їх ідентифікації.

Даний програмний засіб використовується в ході проведення як лекційних, так і практичних занять під час вивчення ліній та поверхонь в курсі аналітичної геометрії.

Наприклад, в ході лекційного заняття на тему: «*Криві другого порядку*», нами використовується ППЗ 3D Plotter з метою унаочнення пояснення нового матеріалу. Після подання студентам необхідного теоретичного матеріалу з кожного виду кривої, слід задати рівняння кривої другого порядку аналітично за допомогою програми, що дає змогу швидко отримати на екрані монітора задану криву. Отже, вивчаючи теоретичний матеріал, можна паралельно споглядати загальний вигляд тієї чи іншої кривої.

З метою закріплення теоретичного матеріалу, наприклад, про гіперболу, можна запропонувати студентам виконати практичні завдання, одним з яких є: *скласти канонічне рівняння гіперболи, фокуси якої розміщено на осі Ox симетрично початку координат, якщо дійсна вісь дорівнює 6, а ексцентриситет* $e = \frac{5}{3}$.

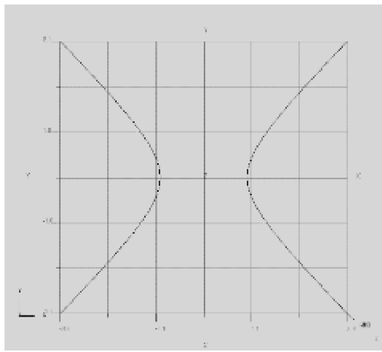


Рис.2.29. Гіпербола

Спочатку, разом зі студентами слід розв'язати дане завдання аналітично: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ – в результаті якого отримано канонічне рівняння гіперболи. Далі за допомогою програми необхідно ввести результати на великий екран, тобто побудувати графік даної кривої (рис. 2.29).

Аналогічно можна використати ППЗ 3D Plotter у ході проведення практичних занять з аналітичної геометрії.

Наприклад, при виконанні завдання: *звести загальне рівняння кривої другого порядку* $2x^2+4x-y-1=0$ *до канонічного вигляду, визначити тип кривої та побудувати графік*, в ході вивчення теми: „*Зведення загального рівняння кривих другого порядку до канонічного вигляду*”, студенти спочатку розв’язують завдання біля дошки, користуючись при цьому методом повороту осей координат, або за допомогою інваріантів, визначають тип кривої та самостійно виконують побудову графіка у своїх зошитах. А потім з метою перевірки правильності розв’язання даної задачі та унаочнення, треба ввести дане рівняння на екран, використовуючи програмний засіб (рис. 2.30). Це сприяє ефективному поєднанню традиційних, інтерактивних та інформаційних технологій.

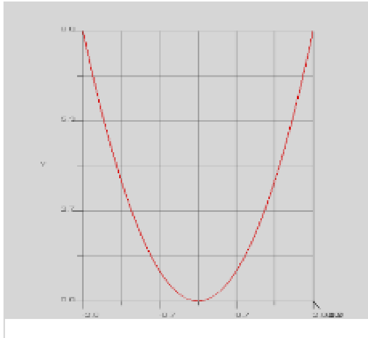


Рис.2.30. Парабола

За аналогією можна розглядати наступне завдання практичного заняття із теми: «*Поверхня другого порядку*»: *Яка поверхня визначається рівнянням* $z=x^2+y^2$. Побудувавши дану поверхню за допомогою програми (рис. 2.31), можна дійти висновку, що дане рівняння визначає параболоїд обертання, віссю якого є вісь *Oz*.

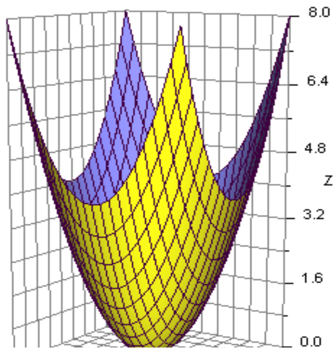


Рис.2.31. Параболоїд обертання

Крім того, на практичних заняттях варто використати до деяких задач вже раніше підготовлені рисунки кривих та поверхонь, які були створені разом зі студентами на гурткових заняттях з аналітичної геометрії «Дослідження геометричних образів I та II порядків».

Наведемо приклади завдань, розв’язання яких можливе з використанням програмного комплексу «3D Plotter» на практичному занятті:

Задача 1. Дослідити та побудувати поверхню, яка задана рівнянням $z=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}$.

Задача 2. Знайти рівняння поверхні, утвореної обертання гіперболи $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

Задача 3. Звести загальне рівняння поверхні другого порядку $x^2+y^2-6xy+2yz-4xz+6x+8=0$ до канонічного вигляду, визначити тип поверхні та побудувати графік.

Крім лекційних та практичних занять, даний програмний комплекс доцільно використовувати під час виконання студентами ІНДЗ (графічно-розрахункова робота) з таких тем курсу аналітичної геометрії як: «Загальна теорія кривих другого порядку» та «Загальна теорія поверхонь другого порядку».

Отже, впровадження НІТН підвищує ефективність процесу навчання з аналітичної геометрії, сприяє активізації творчо-пошукової, дослідницької діяльності студентів. Про ефективність впливу ІКТ на активізацію навчально-пізнавальної діяльності студентів свідчить їхня ініціативність, інтерес, позитивне і усвідомлене ставлення до навчання, інтенсивність діяльності, самостійність, зацікавленість у досягненні мети і бажання виконати завдання, вибір складнішого завдання, посилення самоконтролю, використання під час відповіді додаткового матеріалу.

2.2.3. Використання комп'ютерних технологій уможливлює ефективне функціонування дистанційної форми навчання. В Уманському державному педагогічному університеті запроваджено дистанційну підтримку навчальних курсів на платформі MOODLE. Це назва системи програмних продуктів, за допомогою якої через Інтернет можна самостійно створювати дистанційні курси, здійснювати навчання на відстані та оволодіти навчальним матеріалом. За допомогою цієї системи викладачі можуть створювати навчальні курси, надсилати повідомлення студентам, розподіляти, збирати та перевіряти завдання, вести електронні журнали обліку оцінок та відвідування тощо.

Структура курсу

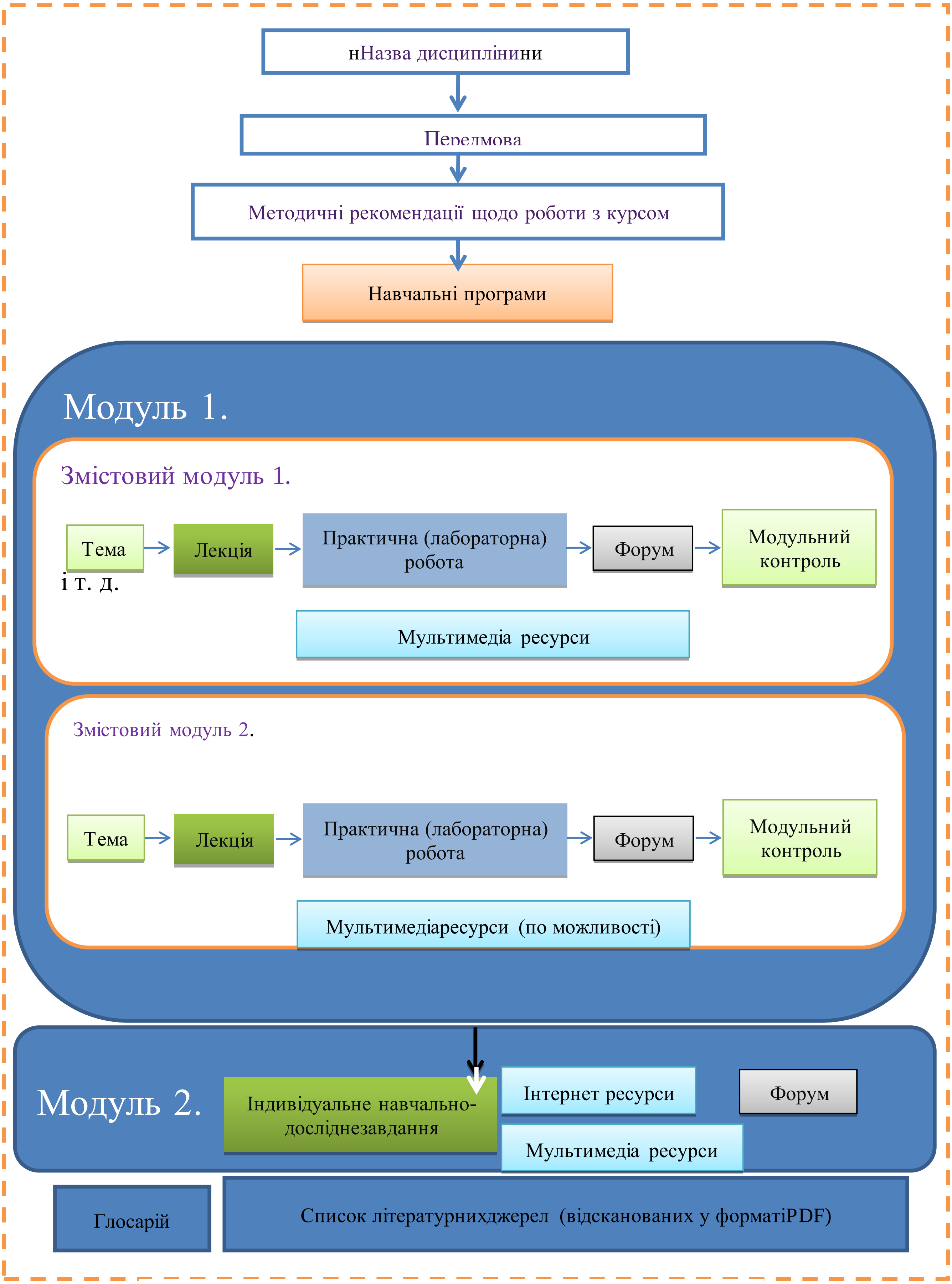


Рис. 2.32. Структура курсу

MOODLE забезпечує студентам доступ до різних навчальних ресурсів, зокрема текстів лекцій і презентацій до них, зразків розв'язування задач і завдань для домашньої роботи, тестів для контролю і самоперевірки тощо.

Система MOODLE містить набір модулів, використання яких створює умови для співпраці виду студент – студент і студент – викладач. Серед цих модулів: голосування (опитування); анкети; чати; опитувальники; форуми; журнали (рис. 2.32); тести (рис. 2.33) тощо.

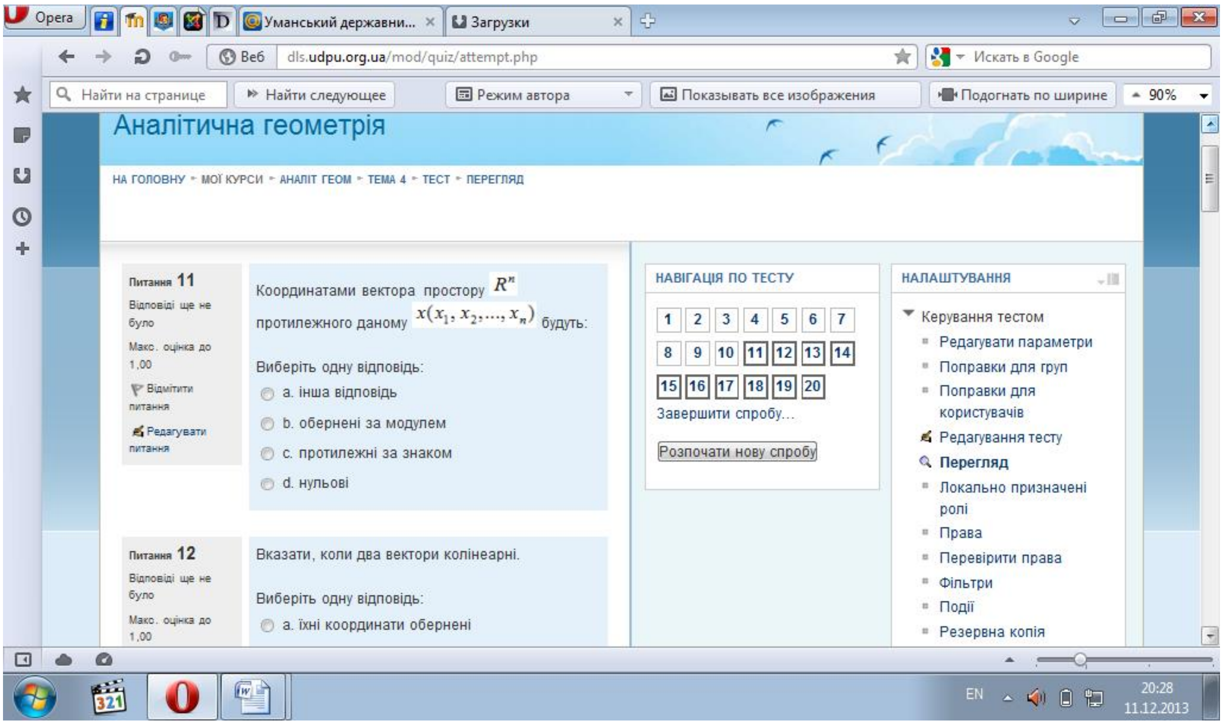


Рис. 2.33. Тестовий контроль з аналітичної геометрії

За допомогою створеного нами дистанційного курсу студенти можуть отримувати домашні завдання, не переписуючи їх з дошки, і бачити зразки для розв'язування цих задач. Крім того, студент має змогу бачити свої оцінки з дисциплін.

Журнал обліку успішності студента в системі MOODLE заповнюється автоматично після того, як за виконане завдання студенту виставляється оцінка (рис. 2.34). Оцінки в журналі доступні для перегляду студенту, викладачеві курсу та адміністрації. У кожному звіті викладач проставляє терміни отримання та перескладання балів, при цьому він вказує у системі, з якої дати доступно та кінцевий термін перездачі.

Результати оцінювання студентів можна переглянути загальним списком групи або ж за прізвищем конкретного студента.

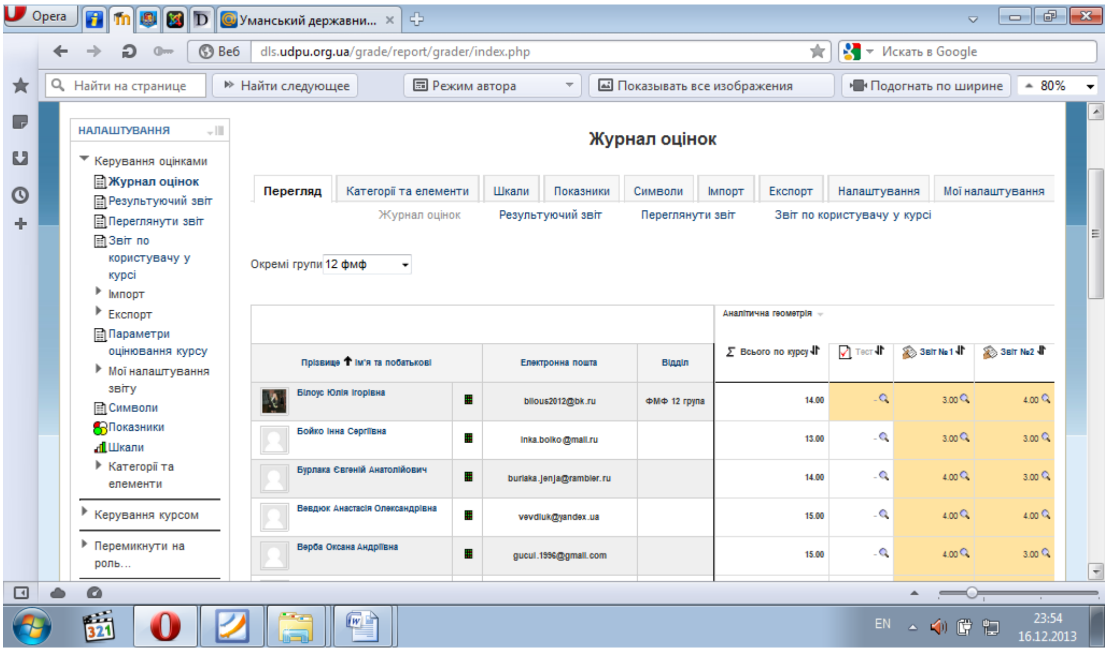


Рис. 2.34. Журнал обліку успішності студента

На окремих сторінках дисертації наведені інші конкретні приклади роботи в системі MOODLE (ознайомлення з теоретичним матеріалом – с. 111, виконання тестових завдань – с. 135). Варто зупинитись на доцільності поєднання денної та дистанційної форм навчання, зокрема використанні система MOODLE під час вивчення ліній і поверхонь.

Маючи доступне методичне забезпечення, студент може самостійно створювати власну траєкторію навчання і здобувати необхідну саме йому систему знань. Він знає, що його зусилля у навчанні будуть щоразу оцінені викладачем, а у разі невдач він завжди може у форумі чи чаті отримати допомогу викладача чи однокурсників. Такий спосіб підвищує мотивацію і забезпечує зростання інтересу до навчання.

Роль викладача полягає в управлінні процесом навчання, у складанні завдань для формування умінь, формулюванні проблемних запитань, для того, щоб постійно підтримувати інтерес до навчання і стимулювати навчально-пізнавальну діяльність студентів.

2.5. Організація та результати педагогічного експерименту

Головним методом збирання відомостей стосовно ефективності запровадження нових методик навчання є педагогічний експеримент – науково обґрунтована і добре продумана система організації педагогічного процесу, направлена на відкриття нового педагогічного знання, перевірки і обґрунтування заздалегідь розроблених наукових припущень, гіпотез. Проведення педагогічного експерименту пов’язане з пошуком причиново-наслідкових зав’язків досліджуваних явищ і активним впливом на об'єкт дослідження, що певним чином призводить до трансформації цього об’єкта. За таких умов планування і проведення педагогічного експерименту має здійснюватися так, щоб його вплив на організацію навчально-виховного процесу в жодному разі не утискував інтереси учасників експерименту.

Методологічною основою проведення педагогічного експерименту для нашого дослідження стали роботи [40], [46], [52], [217], [231].

Науковий пошук і педагогічний експеримент тривали упродовж 6 років і складався з трьох взаємопов’язаних етапів:

- констатувальний (2006 – 2008рр.);

-пошуковий (2008 – 2010рр.);

- формувальний (2010 – 2013рр.).

Під час констатувального експерименту вирішувалися такі завдання:

1) проаналізувати нормативні документи, навчально-методичну літературу, а також підручники і збірники задач з аналітичної геометрії для університетів і з математики для школи;

2) дослідити стан вивчення ліній і поверхонь у курсі аналітичної геометрії;

3) встановити рівень знань та умінь студентів першого курсу математичних спеціальностей у педагогічних і класичних університетах

стосовно змістової лінії «Лінії та поверхні» та виявити недоліки у формуванні таких знань та умінь;

Констатувальний етап педагогічного експерименту проводився автором самостійно серед студентів математичних спеціальностей педагогічних (класичних) університетів і викладачів аналітичної геометрії педагогічних (класичних) університетів.

Під час експерименту використовувалися такі методи дослідження: аналіз нормативних документів і науково-методичної літератури; бесіди з викладачами і студентами; спостереження на лекціях і практичних заняттях з аналітичної геометрії; анкетування студентів і викладачів; тестування студентів.

Нижче подано результати досліджень, отримані у процесі розв'язування кожного із поставлених завдань.

1. Під час констатувального етапу педагогічного експерименту нами були проаналізовані робочі програми з аналітичної геометрії 4 провідних українських педагогічних університетів:

- Національного педагогічного університету імені Михайла Драгоманова,
- Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського,
- Уманського державний педагогічний університет імені Павла Тичини,
- Полтавського національного педагогічного університету імені В.Г. Короленка.

Насамперед необхідно відзначити, що аналітична геометрія у названих ВНЗ вивчається на першому курсі протягом 2 семестрів при тижневому навантаженні від 3 – 3,5 годин в першому семестрі до 4 – 4,5 годин – у другому.

Усі робочі програми чотирьох названих ВНЗ складаються зі змістових модулів, причому їхня кількість різна. Робоча програма НПУ імені

М.П. Драгоманова складається з 11 змістових модулів: 5 у першому семестрі та 6 у другому. Програма ВДПУ імені Михайла Коцюбинського містить 9 змістових модулів, натомість робоча програма УДПУ імені Павла Тичини містить лише 3 змістових модулі: модулі №1 та №2 – для першого семестру, та модуль №3 – для другого. Робоча програма ПНПУ імені В.Г Короленка складається з 8 змістових модулів, які рівномірно розподілені по семестрам: 4 – для першого семестру та 4 – для другого.

Кількість модулів в робочих програмах чотирьох ВНЗ, що аналізуються, різна, а тому і зміст модулів також різний. Робоча програма НПУ імені М.П. Драгоманова, як уже відзначалося вище, містить 11 змістових модулів, і з них 5 модулів для першого семестру: модуль 1 «Елементи векторної алгебри», модуль 2 «Метод координат на площині», модуль 3 «Пряма на площині», модуль 4 «Еліпс, гіпербола, парабола крізь призму канонічних рівнянь», модуль 5 «Загальна теорія алгебраїчних ліній 2-го порядку». Наступні 6 модулів, що вивчаються у другому семестрі такі: модуль 1 (6) «Геометричні перетворення площини», модуль 2 (7) «Метод координат у просторі», модуль 3 (8) «Теорія прямих і площин у просторі», модуль 4 (9) «Вивчення алгебраїчних поверхонь 2-го порядку за їх канонічними рівняннями», модуль 5 (10) «Загальна теорія алгебраїчних поверхонь 2-го порядку», модуль 6 (11) «геометричні перетворення простору».

Робоча програма з аналітичної геометрії ВДПУ імені Михайла Коцюбинського містить такі 9 змістових модулів: модуль 1 «Елементи векторної алгебри в просторі», модуль 2 «Метод координат на площині», модуль 3 «Конічні перерізи: еліпс, гіпербола, парабола», модуль 4 «Загальна теорія алгебраїчних ліній 2-го порядку», модуль 5 «Геометричні перетворення площини», модуль 6 «Метод координат в просторі», модуль 7 «Вивчення поверхонь 2-го порядку за їх канонічними рівняннями», модуль 8 «Загальна теорія алгебраїчних поверхонь 2-го порядку», модуль 9 «Геометричні перетворення простору».

Робоча програма УДПУ імені Пала Тичини місить 3 модулі: модуль 1 «Елементи векторної алгебри», модуль 2 «Аналітична геометрія на площині» та модуль 3 «Аналітична геометрія в просторі», які, в свою чергу складаються з 16 змістових модулів.

У робочій програмі ПНПУ імені В.Г. Короленка є 8 змістових модулів: модуль 1 «Векторний та координатний методи», модуль 2 «Пряма на площині», модуль 3 «Лінії другого порядку», модуль 4 «Геометричні перетворення площини», модуль 5 «Метод координат в просторі», модуль 6 «Теорія прямих і площин в просторі», модуль 7 «Алгебраїчні поверхні другого порядку», модуль 8 «Геометричні перетворення простору». При цьому модулі 1-4 об'єднані в модуль А і становлять зміст першого семестру, а модулі 5-8 – в модуль Б утворюють зміст другого семестру.

Робочі програми з аналітичної геометрії також відрізняються і за кількістю годин, що відводяться на вивчення дисципліни «Аналітична геометрія», зокрема різними є розподіл годин на різні типи занять та на самостійну і індивідуальну роботу. Результати проведеного аналізу робочих програм з дисципліни «Аналітична геометрія» для студентів спеціальності 6.040201 «Математика» наведено в таблиці 2.6.

Таблиця 2.6

Кількість годин на вивчення «Аналітичної геометрії»

Назва педагогічного університету	**Всього**	**Лекції**	**Практичні**	**Самостійна робота**	**Індивідуальні заняття**
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова	270	72	90	90	18
Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського	342	74	74	194	-
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини	216	46	72	98	-
Полтавський національний педагогічний університет імені В.Г. Короленка	360	64	72	112	112

Проведений нами аналіз робочих програм з аналітичної геометрії наведених вище чотирьох ВНЗ України (НПУ імені М.П. Драгоманова, ВДПУ імені Михайла Коцюбинського, УДПІ імені Павла Тичини та ПНПУ імені В.Г. Короленка) дозволив укласти список підручників, посібників та збірників задач, які можуть бути рекомендовані студентам, що проходять підготовку за напрямом 6.040201 «Математика» – [2], [4], [5], [8], [9], [11], [12], [21], [22], [24], [27], [28], [32], [38], [41, [57], [64], [69]- [71], [84], [85], [158]-[160], [183], [184], [188], [190]- [192], [194], [254].

Аналіз шкільних програм і підручників на предмет висвітлення в них питань, що стосуються аналітичної геометрії, подано на сторінці 40-41.

2. Розглянемо змістову і кількісну характеристику навчального матеріалу, що стосується ліній і поверхонь. Загалом у всіх програмах виокремлено модулі, присвячені вивченню таких тем: «Еліпс, гіпербола, парабола», «Загальна теорія алгебраїчних ліній 2-го порядку», «Вивчення алгебраїчних поверхонь 2-го порядку за їх канонічними рівняннями», «Загальна теорія алгебраїчних поверхонь 2-го порядку». Теми «Пряма на площині» і «Теорія прямих і площин у просторі» визначаються не у всіх програмах. Кількість годин, що відводиться на вивчення тем «лінії» та «поверхні», наведено в таблицях 2.7 і 2.8.

Таблиця 2.7

Кількість годин на вивчення ліній у курсі аналітичної геометрії

Назва педагогічного університету	**Всього**	**Лекції**	**Практичні**	**Самостійна робота**	**Індивідуальні заняття**
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова	72	20	20	27	5
Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського	80	20	20	40	-
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини	54	12	18	24	-
Полтавський національний педагогічний університет імені В.Г. Короленка	90	16	20	27	27

Таблиця 2.8

Кількість годин на вивчення поверхні у курсі аналітичної геометрії

Назва педагогічного університету	**Всього**	**Лекції**	**Практичні**	**Самостійна робота**	**Індивідуальні заняття**
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова	73	20	30	18	5
Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського	120	24	30	66	-
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини	64	14	24	26	-
Полтавський національний педагогічний університет імені В.Г. Короленка	150	24	28	49	49

Як видно, вивчення ліній і поверхонь в різних університетах відрізняється і за кількістю годин, що відводяться на вивчення, і за кількістю годин, що відводяться на лекційні, практичні, семінарські заняття та на самостійну і індивідуальну роботу. Слід зазначити, що різним є і структурування навчального матеріалу, зокрема за семестрами. Наприклад, тема «Загальна теорія алгебраїчних ліній 2-го порядку» в одних університетах вивчається в першому семестрі, а в інших – у другому.

Для розв’язання другого завдання констатувального етапу експерименту, крім аналізу робочих програм, проводилися також бесіди з викладачами і студентами, спостереження за процесом вивчення ліній і поверхонь у названих університетах. Бесіди з викладачами показали, що окремі з них використовують різні форми і методи для вивчення ліній і поверхонь, а також сучасні засоби активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів. Викладачам і студентам пропонувалися анонімні анкети, що містили, крім інших, такі запитання.

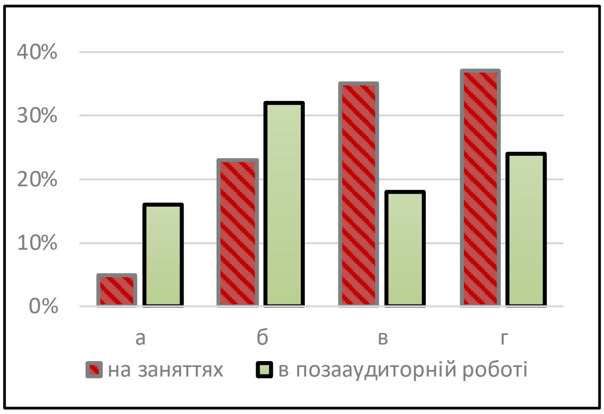
1. *Як часто під час навчання ліній і поверхонь на лекціях і практичних заняттях ви використовуєте ІКТ?*

а) постійно; б) рідко; в) дуже рідко; г) не використовую.

2. *Як часто ви використовуєте ІКТ під час організації позааудиторної роботи?*

а) постійно; б) рідко; в) дуже рідко; г) не використовую.

Рис. 2.35. Відповіді студентів Рис. 2.36. Відповіді викладачів



На рисунках у вигляді діаграми подано результати (у відсотках) відповіді студентів (рис. 2.35) і викладачів (рис. 2.36) на запитання анкети.

Отже, студенти частіше використовують ІКТ у навчанні, ніж викладачі. Опитування показало, що студенти активно користуються електронними матеріалами для вивчення теоретичного матеріалу, копіюють зображення з Інтернету, шукають зразки розв’язування типових задач тощо. Більше того, на їх думку, використання ІКТ викладачами у навчальному процесі дуже незначне. Викладачі аналітичної геометрії не часто використовують презентації і зовсім рідко ППЗН. Студенти висловлювали побажання демонструвати на лекціях використання навчального матеріалу на практиці.

Цікавими виявилися відповіді викладачів на такі запитання анкети:

1. Чи доцільно реалізовувати міжпредметні зв’язки під час вивчення ліній і поверхонь?

2. Як часто ви використовуєте міжпредметні зв’язки під час вивчення ліній і поверхонь?

На рисунках у вигляді діаграми подано результати (у відсотках) відповідей викладачів на перше (рис. 2.37) і друге (рис. 2.38) запитання анкети.

Рис. 2.37. *Доцільність використовувати міжпредметні зв'язки*

Рис. 2.38. *Частота використання міжпредметних зв'язків*

Схожі відповіді було отримано й на два інші запитання (рис. 2.39).

3. *Чи слід у навчанні першокурсників пропонувати завдання професійної спрямованості?*
4. *Як часто під час вивчення ліній і поверхонь студентам пропонуються завдання професійної спрямованості?*

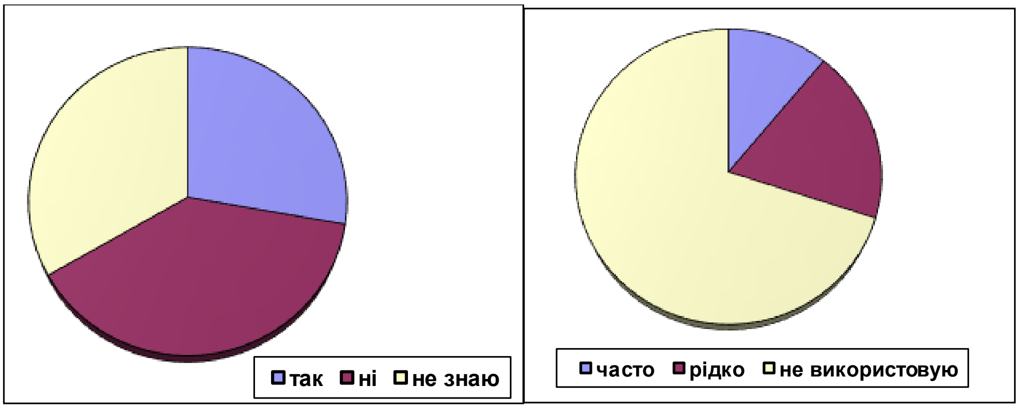


Рис. 2.39. Результати відповідей викладачів на 3 та 4 запитання

Такі відповіді свідчать про те, що навіть ті викладачі, які усвідомлюють необхідність професійної спрямованості вивчення ліній і поверхонь і використання в процесі навчання міжпредметних зв'язків, не послуговуються цим у своїй діяльності.

У процесі навчання аналітичної геометрії основна увага переважно звертається лише на повноту і глибину знань навчального матеріалу, на опанування навичками і уміннями. Осторонь залишаються питання формування наукового світогляду та ціннісних орієнтацій студентів. На діаграмі, зображеній на рисунку 2.40, подано результати відповідей викладачів на такі запитання анкети.

1. *Як часто під час навчання ліній і поверхонь на лекціях і практичних заняттях Ви використовуєте відомості, що стосуються формування наукового світогляду та ціннісних орієнтацій студентів?*

а) постійно; б) рідко; в) дуже рідко; г) не використовую.

2. *Як часто Ви подаєте відомості, що стосуються формування наукового світогляду та ціннісних орієнтацій студентів у позааудиторній роботі?*

А) постійно; Б) рідко; В) дуже рідко; Г) не використовую.

Рис. 2.40. Формування наукового світогляду в аудиторній та позааудиторінй роботі

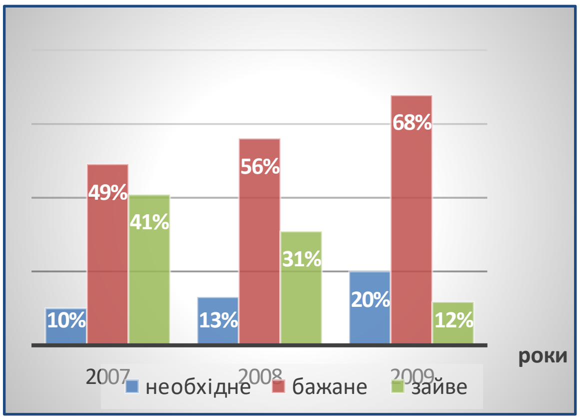


Рис. 2.41. Використання індивідуального підходу до організації самостійної роботи студентів

Анкетування також показало, що значна частина викладачів розуміє значення самостійної роботи в активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів і підтримує необхідність реалізації індивідуального підходу до організації самостійної роботи. Особливо слід відзначити позитивну динаміку, що спостерігалася у поглядах викладачів стосовно цих питань впродовж кількох років. На діаграмі, зображеній на рисунку 2.41, подано (у відсотках) результати відповідей викладачів на таке запитання анкети.

- *Яким, на Вашу думку, є використання індивідуального підходу* до *організації самостійної роботи студентів з вивчення ліній і поверхонь.*

а) необхідним; б) бажаним; в) зайвим.

Пошуковий етап експерименту проводився в 2008 – 2010 роках. Основна мета другого етапу експерименту полягала у розробці основних компонентів методичної системи навчання ліній і поверхонь студентів першого курсу та визначенні методичних умов організації ефективного вивчення студентами ліній і поверхонь.

У цей період автором досліджувалися питання, пов’язані зі структуруванням змісту навчального матеріалу про лінії та поверхні для студентів педагогічних університетів в умовах скорочення годин на вивчення аналітичної геометрії загалом і збільшення частки годин для самостійної роботи студентів.

Основна мета другого етапу експерименту полягала у визначенні методичних умов організації ефективного вивчення студентами ліній і поверхонь. Під час пошукового етапу експерименту паралельно розроблялися ідеї, що стосувалися:

- забезпечення професійної спрямованості навчання ліній і поверхонь, зокрема за рахунок використання задач з підручників геометрії та алгебри для різних рівнів шкіл, а також розв’язування задач кількома способами;

- реалізації міжпредметних зав’язків аналітичної геометрії та інших дисциплін математичного циклу (диференціальної геометрії, математичного аналізу, алгебри і теорії чисел, лінійної алгебри), а також фізики, астрономії, техніки тощо;

- активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів за допомогою активних методів навчання та використання інтерактивних технологій;

- комплексного використання ІКТ, а саме: унаочнення навчального матеріалу за допомогою комп’ютерних презентацій, використання ППЗН, здійснення комп’ютерного тестування, впровадження дистанційного супроводу навчання аналітичній геометрії;

- реалізації індивідуального підходу до організації самостійної роботи студентів, що передбачає планування індивідуальної траєкторії навчання кожного студента, зокрема забезпечення своєчасними консультаціями слабших студентів і організацію науково-дослідної роботи зі студентами, що виявляють здібності до такого виду робіт;

- формування наукового світогляду та ціннісних орієнтацій студентів за рахунок залучення додаткового теоретичного матеріалу та урізноманітнення позааудиторної роботи.

Ефективність розробленої нами методики вивчення ліній і поверхонь досліджувалася за допомогою опитування і анкетування викладачів, а також контрольних зрізів навчальних досягнень студентів.

Для визначення стану вивчення студентами змістової лінії «Лінії та поверхні», крім традиційного контролю, використовувалася методика самооцінки студентів, яка полягала у визначенні індексів засвоєння теоретичної та практичної частини теми. Студентам пропонувалося відповісти на запитання таблиці 2.8, обираючи одну зі спеціально сконструйованих відповідей.

Таблиця 2.8

Анкета для студентів

В якій мірі під час вивчення ліній і поверхонь ви засвоїли:	
1. Теоретичну частину	❑ цілком достатньо (a) ❑ достатньо (b) ❑ не можу сказати (c) ❑ недостатньо (d) ❑ зовсім недостатньо (e)
2. Практичну частину	❑ цілком достатньо (a) ❑ достатньо (b) ❑ не можу сказати (c) ❑ недостатньо (d) ❑ зовсім недостатньо (e)

Індекс засвоєння навчального матеріалу для кожної частини обчислювався за формулою $I = \dfrac{a + 0{,}5b + c - 0{,}5d - e}{N}$, де a, b, c, d, e – кількість студентів, які обрали відповідні пункти шкали, N – загальна кількість респондентів ($I \in [-1; 1]$).

Анкетування проводилося протягом трьох навчальних років. Співвідношення між отриманими значеннями індексів подано у вигляді діаграми, зображеної на рисунку 2.42.

Рис.2.42. Рівень індексу засвоєння навчального матеріалу.

Низький рівень індексу засвоєння навчального матеріалу, як засвідчує діаграма (рис.2 42.), підтвердив думку про те, що потребує удосконалення методика навчання студентів педагогічних університетів аналітичній геометрії. Водночас стійка позитивна динаміка, яка спостерігається за останні роки, свідчить про позитивний вплив нашої методики на стан проблеми і необхідність її впровадження у процес підготовки майбутніх учителів математики.

3. Третій етап експерименту проводився у 2010 – 2013 роках на базі Уманського державний педагогічний університет імені Павла Тичини, Національного педагогічного університету імені Михайла Драгоманова, Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського та Полтавського національного педагогічного університету імені В.Г. Короленка

Мета формуючого експерименту – впровадження та апробація основних положень розробленої методики вивчення ліній і поверхонь і перевірка її ефективності.

Для досягнення сформульованої мети були розв’язані такі завдання.

1. Розроблено методику проведення формуючого експерименту.

2. Підготовлено методичне забезпечення експерименту.

3. Впроваджено основні положення розробленої методики у практику підготовки майбутніх учителів математики в педагогічних і класичних університетах.

4. Перевірено ефективність методичної системи вивчення ліній і поверхонь і здійснено кількісну оцінку її результатів.

5. На основі отриманих результатів здійснено корекцію запропонованих методичних рекомендацій.

Для проведення формувального етапу педагогічного експерименту були сформовані дві вибіркової сукупності. Одна з вибірок була прийнята за контрольну групу (КГ), а друга – за експериментальну групу (ЕГ). Кількість студентів, які брали участь у формувальному етапі експерименту, подано в таблиці 2.9.

Таблиця 2.9

Кількісна характеристика учасників формувального експерименту

ВИД ГРУПИ	КІЛЬКІСТЬ СТУДЕНТІВ			
	2010/2011	2011/2012	2012/2013	РАЗОМ
ЕГ	62	133	187	382
КГ	59	131	190	380

Відбір контрольних та експериментальних груп проводився на основі вхідного тестування. Статистична гіпотеза про рівномірний розподіл студентів у контрольних та експериментальних групах перевірялася на основі критерію “ χ^2.

Сформулюємо гіпотезу H_0 і альтернативну їй гіпотезу H_1.

Гіпотеза H_0: ймовірності розподілу студентів за рівнями успішності в експериментальних і контрольних групах однакові.

Гіпотеза H_1: ймовірності розподілу студентів за рівнями успішності в експериментальних і контрольних групах не однакові.

Успішність студентів характеризується чотирма рівнями: високий, достатній, середній і низький (таблиця 2.10).

Таблиця 2.10.

Емпіричне значення статистики

<table>
<tr><td>Вид тестування</td><td></td><td colspan="9">Початкове</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Навчальні роки</td><td rowspan="3">Кількість студентів</td><td colspan="8">Рівень успішності</td><td rowspan="3">T_e</td></tr>
<tr><td colspan="2">Низький</td><td colspan="2">Середній</td><td colspan="2">Достатній</td><td colspan="2">Високий.</td></tr>
<tr><td>КГ</td><td>ЕГ</td><td>КГ</td><td>ЕГ</td><td>КГ</td><td>ЕГ</td><td>КГ</td><td>ЕГ</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2010 - 2011</td><td>59</td><td>6</td><td></td><td>22</td><td></td><td>27</td><td></td><td>4</td><td></td><td rowspan="2">0,04</td></tr>
<tr><td>62</td><td></td><td>7</td><td></td><td>21</td><td></td><td>31</td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2011 – 2012</td><td>131</td><td>16</td><td></td><td>52</td><td></td><td>60</td><td></td><td>3</td><td></td><td rowspan="2">0,26</td></tr>
<tr><td>133</td><td></td><td>15</td><td></td><td>52</td><td></td><td>65</td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2012 - 2013</td><td>190</td><td>16</td><td></td><td>76</td><td></td><td>90</td><td></td><td>8</td><td></td><td rowspan="2">0,09</td></tr>
<tr><td>187</td><td></td><td>9</td><td></td><td>75</td><td></td><td>93</td><td></td><td>10</td></tr>
</table>

Для перевірки гіпотези H_0 підрахуємо значення статистики критерію χ^2 за формулою: $T_e = \frac{1}{n_1 \cdot n_2} \sum_{i=1}^{c} \frac{(n_1 O_{2i} - n_2 O_{1i})^2}{O_{1i} + O_{2i}}$, де

n_1– обсяг першої вибірки, тобто кількість студентів експериментальних груп;

n_2– обсяг другої вибірки, тобто кількість студентів контрольних груп.

C– кількість категорій;

O_{1i} і O_{2i}– кількість студентів відповідно першої або другої вибірки, віднесених до категорії $C = i$.

За статистичними таблицями для рівня значущості α = 0,05 і степенів вільності $v = C - 1 = 4 - 1 = 3$ знаходимо критичне значення статистики критерію χ^2: $T_{крит}$ = 7,815. У всіх трьох випадках маємо: $T_e < T_{крит}$.. Отже, гіпотезу H_1 слід відхилити і прийняти гіпотезу H_0 – ймовірності розподілу студентів за рівнями успішності в експериментальних і контрольних групах однакові.

Рівні навчальних досягнень студентів з математики перевірялися за допомогою контрольних робіт. Зміст контрольних робіт подано у Додатку Е. Передбачалося перевірити, як засвоїли студенти експериментальних і контрольних груп дві теми:

1. Алгебраїчні криві II порядку. Загальна теорія алгебраїчних кривих II порядку.

2. Алгебраїчні поверхні ІІ порядку. Загальна теорія алгебраїчних поверхонь ІІ порядку.

У робочій програмі на кожну з цих робіт відводиться 15 балів. У Таблиці 2.11 подано результати написання студентами контрольної роботи з теми «Криві ІІ порядку. Загальна теорія кривих ІІ порядку».

Таблиця 2.11

Показники написання контрольної роботи

Навчальні роки	Рівень навчальних досягнень							
	Початковий 1 – 3 бал.		Середній 4 – 8 бал.		Достатній 9 – 13 бал.		Високий 14 – 15 бал.	
	КГ	**ЕГ**	КГ	**ЕГ**	КГ	**ЕГ**	КГ	**ЕГ**
2010 - 2011	5	**1**	21	**20**	28	**32**	5	**9**
	8,5%	**1,6%**	35,6%	**32,2%**	47,4%	**51,6%**	8,5%	**14,6%**
2011 – 2012	7	**3**	49	**40**	57	**66**	18	**24**
	5,3%	**2,3%**	37,4%	**30,1%**	43,6%	**49,6%**	13, 7	**18,0%**
2012 - 2013	9	**-**	71	**51**	82	**88**	28	**48**
	4,7%	**0%**	37,4%	**27,3%**	43,2%	**47,0%**	14,7%	**25,7%**
Всього за 2005 - 2008	21	**4**	141	**111**	167	**186**	51	**81**

Для перевірки вірогідності одержаних даних, які стосуються рівня засвоєння знань, застосовувалися статистичні критерії: критерій φ^* Фішера і λ-критерій Колмогорова-Смірнова [217].

Таблиця 2.12

Розрахунок максимальної різниці накопичених емпіричних відносних частот навчальних досягнень за результатами контрольної роботи

Рівні навчальних досягнень	Емпіричні частоти		Емпіричні відносні частоти		Накопичені емпіричні відносні частоти		Абсолют-на різниця
	F_e	F_k	f_e	f_k	$\sum f_e$	$\sum f_k$	$\boldsymbol{D}$
Початковий	4	21	0,01	0,06	0,01	0,06	0,05
Середній	111	141	0,29	0,37	0,30	0,43	**0,13**
Достатній	186	167	0,49	0,44	0,84	0,87	0,03
Високий	81	51	0,21	0,13	1,000	1,000	0
Всього	382	380	1,000	1,000			

Вказані критерії слід використати для оцінки результатів виконання письмового контролю студентами експериментальних та контрольних груп. Вірогідність даних експерименту перевіряємо за допомогою λ- критерію Колмогорова-Смірнова. Максимальна різниця між двома накопиченими відносними частотами визначається за формулою $d = \left|\sum f_e - \sum f_k\right|$. З таблиці 2.12 видно, що для результатів виконання студентами письмового контролю, вона дорівнює 0,13.

Підрахуємо значення λ- критерію за формулою:

$$\lambda_{емп.} = d_{\max} \cdot \sqrt{\frac{n_e \cdot n_k}{n_e + n_k}}$$, де

n_e - кількість студентів експериментальної групи;

n_k - кількість студентів контрольної групи.

$$\lambda_{емп.} = 0{,}13 \cdot \sqrt{\frac{382 \cdot 380}{382 + 380}} \approx 0{,}13 \cdot 13{,}8 \approx 1{,}8.$$

За таблицями «Критерій λ Колмогорова-Смирнова» визначаємо рівень статистичної значущості відмінностей, якому відповідає знайдене $\lambda_{емп.} = 1{,}8$. Маємо p = 0,00307< 0,01. Отже, відмінності між розподілами результатів виконання завдань в експериментальній та контрольній групах статистично вірогідні для рівня значущості $p < 0{,}01$.

Щоб зіставити вибірки експериментальних та контрольних груп за рівнем навчальних досягнень, слід застосовувати критерій φ^* Фішера. Для визначення точки, в якій відмінність між двома порівнювальними групами є найбільшою, скористаємося таблицею 2.11. Оскільки максимальна різниця $d_{\max} = 0{,}13$ накопичена на середньому рівні навчальних досягнень, то скористаємося цим для поділу кожної з вибірок на підгрупи «є ефект», «немає ефекту». Будемо вважати, що «є ефект», якщо студенти мають достатній і високий рівні навчальних досягнень (І група), та «немає ефекту», якщо студенти досягають середнього або початкового рівня (ІІ група).

Для виявлення відмінностей в експериментальній та контрольній групах, необхідно скласти чотириклітинну таблицю 2.13, за допомогою якої підрахуємо значення φ^* критерію Фішера.

Таблиця 2.13.

Чотириклітинна таблиця для підрахунку φ^* критерію Фішера за результатами письмового контролю

Група	«Є ефект»	«Немає ефекту»	Усього
Експериментальна	267 (69,9%)	115 (30,1%)	382
Контрольна	218 (57,4%)	162(42,6%)	380
Усього	465	297	762

Статистичні гіпотези мають таке формулювання:

H0: - рівень навчальних досягнень в експериментальній групі не вищий, ніж у контрольній групі;

H1: - рівень навчальних досягнень в експериментальній групі вищий, ніж у контрольній групі.

За таблицями «Величина кута φ для різних процентних часток» [217] знайдемо значення φ, які відповідають відсотковим часткам «ефекту» в кожній з груп (φ_1 – експериментальна, φ_2 – контрольна):

$$\varphi_1\,(69,\ 9\%) = 1{,}980;\ \varphi_2\,(57{,}4\%) = 1{,}719.$$

Емпіричне значення φ^*розраховується за формулою:

$$\varphi^* = (\varphi_1 - \varphi_2)\cdot\sqrt{\frac{n_e \cdot n_k}{n_e + n_k}}\text{, де}$$

φ_1 – кут, що відповідає більшій відсотковій частці;

φ_2 - кут, що відповідає меншій відсотковій частці;

n_e - кількість досліджуваних в експериментальній вибірці;

n_k -. кількість досліджуваних в контрольній вибірці;

$$\varphi^*_{емп.} = (1{,}980 - 1{,}719)\cdot\sqrt{\frac{382\cdot 380}{382+380}} \approx 0{,}28\cdot 13{,}8 \approx 3{,}86\,.$$

За таблицею «Рівні статистичної значущості різних значень критерію φ^* Фішера» визначається, що для φ^* = 3,86 рівень статистичної значущості не перевищує 0,001.

Для психолого-педагогічних досліджень достатніми є рівні значущості $p \leq 0{,}05$ і $p \leq 0{,}01$. Відповідні їм критичні значення критерію φ^* знаходимо за тими ж таблицями: $\varphi_{кр}{}^* = \begin{cases} 1{,}64\ (\rho \leq 0{,}05) \\ 2{,}31\ (\rho \leq 0{,}01) \end{cases}$.

Отримали, що $\varphi^*_{емп.} > \varphi^*_{кр.}$, а тому отримане значення $\varphi^*_{емп}$ = 3,86 знаходиться в зоні значущості (рис. 2.25).

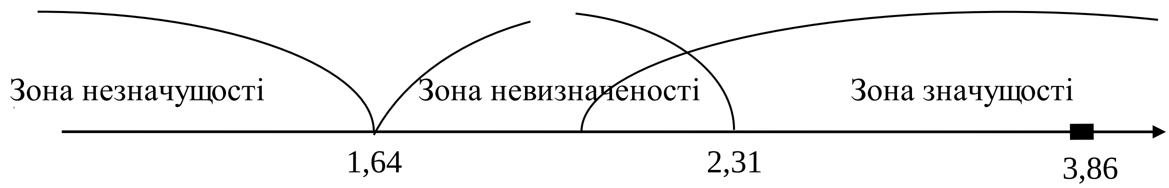


Рис. 2.43. Геометрична інтерпретація значень критерію φ^*

Отже, нульова (H_0) гіпотеза відхиляється. Приймається альтернативна (H_1) гіпотеза – рівень навчальних досягнень в експериментальній групі вищий, ніж у контрольній групі ($p < 0{,}001$).

В останні два роки формувального етапу педагогічного експерименту наприкінці вивчення змістової лінії «Лінії та поверхні» студентам експериментальних і контрольних груп було запропоновано здійснити самооцінку своїх досягнень за запитаннями анкети у таблиці 2.8, обираючи одну із спеціально сконструйованих відповідей.

Студенти відповідали на запитання: «*В якій мірі під час вивчення ліній і поверхонь ви засвоїли: 1) теоретичну частину; 2) практичну частину курсу*?».

Співвідношення між отриманими значеннями індексів подано у вигляді діаграм, зображених на рисунках 2.44 – 2.45.

- Індекс вивчення теоретичної частини курсу – рисунок 2.44.
- Індекс вивчення практичної частини курсу – рисунок 2.45.

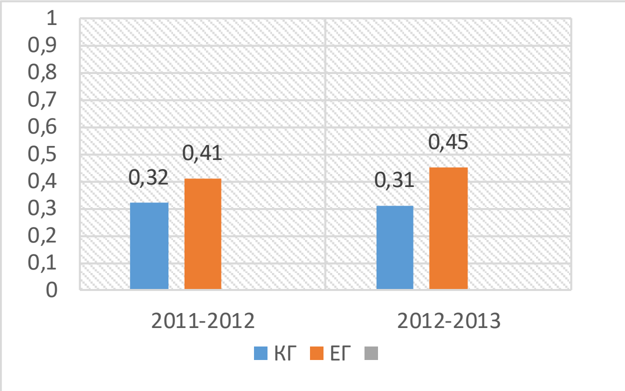


Рис. 2.44. Індекс вивчення теоретичної частини курсу

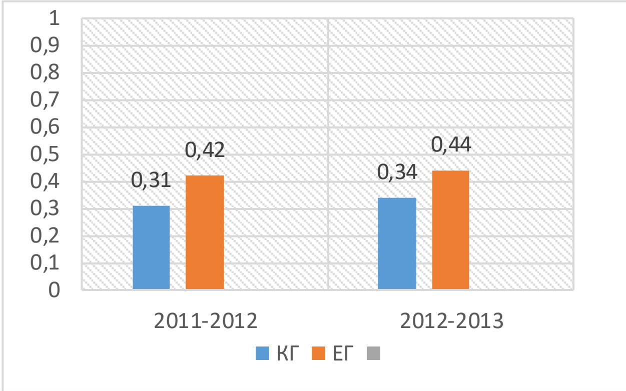


Рис. 2.45. Індекс вивчення практичної частини курсу

Результати самооцінки студентів також підтверджують ефективність запропонованої методики вивчення ліній і поверхонь у педагогічних університетах. За цих умов є необхідність впровадження розробленої методики у процес підготовки майбутніх учителів математики.

Висновки до Розділу ІІ

1. Під час вивчення ліній і поверхонь бажано реалізувати три групи взаємопов'язаних цілей – освітню, розвивальну та виховну. Визначаючи мету навчального курсу для майбутніх учителів, потрібно враховувати два взаємопов'язані аспекти: загальнонауковий і фаховий. Саме тому мета вивчення ліній і поверхонь студентами педагогічних університетів є складне утворення – загальнонаукова (освітня, розвивальна, виховна) і фахова (освітня, розвивальна, виховна). Щоб у процесі вивчення студентами ліній і поверхонь було досягнуто усіх компонентів визначеної мети, слід сформулювати і розв'язати низку завдань, які матеріалізуються у конкретних практичних діях. Оскільки навчальний матеріал, що стосується ліній і поверхонь, великий за обсягом і багатогранний (прямі і криві, на площині і в просторі, загальна теорія ліній і загальна теорія поверхонь, геометричні перетворення площини і простору), то завдання доцільно конкретизувати для кожного навчального

модуля програми.

2. Загальну мету курсу, як і мету навчання кожної теми, слід формулювати відповідно до діяльності студентів, оскільки головне у навчанні – кінцевий результат, якого мають досягти студенти. *Загальнонаукова мета* вивчення ліній і поверхонь майбутніми вчителями математики:

- (**ДЗ)** оволодіння системою знань та умінь, що стосуються ліній і поверхонь, формування умінь використовувати координатний метод, векторний метод та метод геометричних перетворень для дослідження ліній і поверхонь, а також створення на основі вивчених відомостей про лінії та поверхні міцного підґрунтя для розв’язування задач з інших навчальних дисциплін;

- (**РЗ**) формування та розвиток алгоритмічного, логічного та просторового мислення, інтелектуальних і комунікативних умінь і навичок, загальної і математичної культури, а також наукового світогляду;

- (**ВЗ**) виховання графічної культури, культури мови і мовлення, а також наполегливості, творчості, активності, цілеспрямованості, дисциплінованості та інших особистісних якостей.

Фахова мета вивчення ліній і поверхонь майбутніми вчителями математики:

- (**ДФ**) засвоєння відомостей про лінії та поверхні, необхідних для правильного розв’язання методологічних і методичних питань, які виникають у процесі навчання математики в школі;

- (**РФ**) формування і розвиток основ математичної та методичної культури, а також емоційно-ціннісної та діяльнісно-практичної сфери;

- (**ВФ**) виховання готовності до педагогічної діяльності, зокрема до навчання учнів питанням, що тісно пов’язані з лініями і поверхнями.

3. На вивчення ліній і поверхонь відводиться невелика кількість годин, з якої майже половина відводиться – самостійна робота студентів. З огляду на

вищезазначене згадувану змістову лінію доцільним видається розбити на два модулі:

- Лінії та поверхні першого порядку (Пряма лінія на площині. Теорія прямих і площин у просторі. Площина в просторі. Пряма в просторі. Застосування теорії прямих і площин. Геометричні перетворення площини.).
- Лінії та поверхні другого порядку (Конічні перерізи: еліпс, гіпербола, парабола. Оптичні властивості еліпса, гіперболи і параболи. Загальна теорія алгебраїчних ліній другого порядку. Вивчення алгебраїчних поверхонь другого порядку за їх канонічними рівняннями. Загальна теорія алгебраїчних поверхонь другого порядку. Геометричні перетворення простору).

4. Для вивчення ліній і поверхонь слід послуговуватись такими організаційними формами:

- *навчальні заняття:* лекція, практичне заняття, індивідуальне заняття, навчальна конференція, консультація, тощо;
- *самостійна робота*: робота з друкованими джерелами (підручниками, навчальними посібниками, інструкціями, настановами тощо), самостійне вправляння, самостійне вивчення теоретичних питань, участь у роботі гуртків, експериментально-дослідницька робота, дистанційне навчання;
- *контрольні заходи:* іспити (заліки), модульний контроль, контрольні роботи, самостійні роботи, тестування тощо;
- *практична підготовка:* формування у студентів професійних навичок, а також практичних умінь, необхідних для майбутньої педагогічної діяльності.

5. Для досягнення мети і вирішення поставлених завдань у процесі навчання ліній і поверхонь слід урізноманітнювати методи навчання як викладачам (методи викладання), так і студентам (методи учіння). Ефективними є такі методи навчання ліній і поверхонь.

Добір методів навчання не можна жорстко регламентувати, оскільки на кожному його етапі, для кожної окремої його форми застосовуються різні методи у їх взаємозв’язку та взаємодії. Обираючи метод навчання, викладач повинен усвідомлювати, що головне при вивченні дисципліни – це формування знань, умінь, навичок, а також виховання й розвиток студентів. Кожний із методів, що застосовуються в педагогічній практиці, має свої переваги й недоліки, але їхнє системне використання, у взаємозв’язку допоможе досягти найкращих результатів у засвоєнні студентами знань і в розвитку їхньої розумової активності.

6. В умовах кредитно-модульної системи навчання значне місце у вивченні ліній і поверхонь відводиться самостійній роботі студента – формі організації навчання, за якої студент здійснює навчально-пізнавальну діяльність без прямої участі інших осіб, в умовах самоуправління та управління з боку інших учасників навчального процесу. Самостійну роботу студентів слід спрямовувати на реалізацію пізнавальної, самоосвітньої, прогностичної, корегуючої та виховної функцій. Умовами успішної самостійної діяльності студентів є планування самостійної роботи, створення методичного забезпечення і формування у студентів умінь і навичок самонавчання.

Для навчання ліній і поверхонь актуальними є такі види самостійної роботи: самостійне опрацювання теоретичного матеріалу, самостійне розв’язування задач, самостійна робота як форма контролю, самостійна науково-дослідна робота; аудиторна, позааудиторна обов’язкова і позааудиторна ініційована; індивідуальна і групова; відтворюючі роботи за зразком, реконструктивно-варіаційні, евристичні, творчі (дослідницькі).

7. Для своєчасного виявлення і ліквідації прогалин у знаннях і уміннях студентів, для пошуку шляхів раціоналізації викладацької діяльності, ліквідації виявлених недоліків у роботі викладача слід здійснювати контрольні заходи - попередній, поточний, модульний та підсумковий контроль. На основі результатів контролю викладач може корегувати процес математичної

підготовки студентів і відповідно стимулювати студентів до самовдосконалення, формувати у них почуття відповідальності.

У процесі навчання ліній і поверхонь викладачам бажано не тільки здійснювати необхідні контрольні заходи, а й формувати у студентів мотивацію до самоконтролю – усвідомлюваної регуляції студентом своєї діяльності для забезпечення відповідності її результатів поставленим цілям, вимогам, правилам, нормам тощо. Здійснення студентами самоконтролю, крім іншого, сприяє становленню у них адекватної самооцінки своєї навчальної діяльності.

8. Застосування інформаційних технологій у навчанні ліній і поверхонь сприяє забезпеченню отримання повних і точних відомостей про явища та об’єкти, що вивчаються; задоволенню і розвитку пізнавальних інтересів студентів до вивченої теми; підвищенню наочності навчання і доступності навчального матеріалу; інтенсифікації діяльності студентів і тим самим підвищенню темпу вивчення навчального матеріалу; збільшенню обсягу самостійної роботи на занятті. Ефективність використання інформаційних технологій залежить від їх технічної якості та педагогічної доцільності, від професійної підготовки викладача до їх використання, а також від умов, у яких вони застосовуються.

У навчанні ліній і поверхонь використовують різні програмні засоби (Microsoft Power Point, ППЗН GRAN-2D, GRAN-2D, Derive, Maple, система Moodle тощо) у різних формах і з різною метою.

Програма Microsoft Power Point використовується як засіб створення презентацій для лекцій і практичних занять. Під час вивчення ліній і поверхонь презентації забезпечують наочність і візуалізацію навчального матеріалу, швидке і своєчасне подання в необхідній послідовності наочних образів, які створюють у студентів адекватні уявлення про геометричні об’єкти та їх властивості. Презентації використовують для актуалізації опорних знань під час пояснення нового матеріалу, в процесі розв'язування задач, з метою контролю навчальних досягнень студентів, для демонстрації зразків виконання того чи іншого завдання тощо.

Презентації для навчання викладачі можуть готувати, або використовувати готові зразки, що є в інтернеті. Бажано долучати до цього процесу і студентів. Створення презентацій студентами сприяє розвитку у них творчості, формуванню умінь структурувати навчальний матеріал і певним чином готує до майбутньої педагогічної діяльності.

За допомогою використання *GRAN-2D* виникає можливість: будувати пряму за двома точками, будувати паралельні прямі; будувати перпендикулярні прямі; знаходити координати точки середини відрізка;знаходити точку перетину двох геометричних об'єктів тощо.

За допомогою використання ППЗН *GRAN-3D* можна: будувати точку, пряму та площину у просторі; поверхню, поверхню обертання, переріз поверхонь; знаходити відстань між двома точками, відстань між точкою та прямою, відстань між точкою і площиною, відстань між двома прямими та відстань між прямою та площиною; обчислювати кути між прямою та площиною, між двома площинами.

Кращому засвоєнню навчальних курсів забезпечує система MOODLE. На її основі через Інтернет викладачі можуть самостійно створювати дистанційні курси, проводити навчання на відстані, надсилати повідомлення студентам, розподіляти, збирати та перевіряти завдання, вести електронні журнали обліку оцінок та відвідування тощо.

9. Науковий пошук і педагогічний експеримент тривали упродовж 7 років. Експеримент складався з трьох взаємопов'язаних етапів: констатувального (2006 – 2008рр.); пошукового (2008 – 2010рр.) і формувального (2010 – 2013рр.). Основні положення розробленої методики навчання ліній і поверхонь впроваджені та апробовані в процесі

формувального експерименту. А саме: спеціальне структурування змісту і комплексна постановка цілей навчання; урізноманітнення форм, методів і засобів навчання, використання ефективних засобів контролю та самоконтролю. Умовами ефективного навчання ліній і поверхонь визначено: забезпечення професійної спрямованості навчання; реалізація міжпредметних зав'язків; активізація навчально-пізнавальної діяльності студентів;комплексне використання ІКТ; реалізація індивідуального підходу до організації самостійної роботи студентів; формування наукового світогляду та ціннісних орієнтацій.

Експериментальна перевірка результатів педагогічного підтвердила ефективність розробленої методики навчання ліній і поверхонь студентів педагогічних університетів.

Основні результати другого розділу відображено у роботах [44], [45], [126] - [131], [133], [134], [137], [138], [141] - [146], [149], [150], [247], [248].

ВИСНОВКИ

Інтеграція України у світовий освітній простір вимагає постійного вдосконалення національної системи освіти, пошуку ефективних шляхів підвищення якості освітніх послуг, апробації та впровадження інноваційних педагогічних систем, реального забезпечення рівного доступу всіх її громадян до якісної освіти, можливостей і свободи вибору в освіті, модернізації змісту освіти і організації її адекватно світовим тенденціям і вимогам ринку праці, забезпечення безперервності освіти та навчання протягом усього життя, розвитку державно-громадської моделі управління.

Ключовим завданням освіти у XXI сторіччі є розвиток мислення, орієнтованого на стале майбутнє. Сучасний ринок праці вимагає від випускника не лише глибоких теоретичних знань, а й здатності самостійно їх застосовувати в нестандартних, постійно змінюваних життєвих ситуаціях.

У дисертаційному дослідженні проведено теоретичний аналіз проблеми побудови ефективної методики навчання ліній і поверхонь у курсі аналітичної геометрії для студентів напряму підготовки 6.040201 Математика* педагогічних університетів. Актуальність дослідження обумовлена вимогами часу стосовно створення системи освіти нового покоління, яка забезпечує повноту реалізації функції якісної освіти і перетворюється на провідний механізм відтворення суспільного інтелекту, науки і культури.

Відповідно до поставленої мети і визначених завдань у ході дослідження отримано такі **р е з у л ь т а т и** :

- проаналізовано психолого-педагогічну, математичну та методичну літературу з проблеми дослідження і з’ясовано стан теоретичної розробки проблеми в науковій літературі та її практичної реалізації в системі підготовки майбутніх учителів математики в педагогічних університетах;

- визначено психолого-педагогічні особливості управління навчально-пізнавальною діяльністю студентів математичних спеціальностей в педагогічних університетах у процесі вивчення аналітичної геометрії;
- встановлено методичні засади вивчення першокурсниками аналітичної геометрії загалом та ліній і поверхонь зокрема;
- визначено мету, завдання та зміст вивчення першокурсниками понять лінії та поверхні у педагогічному університеті;
- розроблено і впроваджено в навчальний процес методику вивчення ліній та поверхонь в курсі аналітичної геометрії в педагогічних університетах;
- експериментально перевірено ефективність розробленої методики в умовах реального сучасного навчально-виховного процесу.

Порівняння сучасних вимог до математичної підготовки першокурсників педагогічних університетів з реальною практикою їх навчання аналітичній геометрії виявило низку окремих проблем (методологічні, психологічні, методичні, організаційні) і показало, що традиційний підхід до вивчення ліній і поверхонь не забезпечує виконання високих вимог суспільства до сучасного вчителя і не задовольняє особистісні потреби першокурсників.

Результати проведеного дослідження щодо вивчення ліній і поверхонь як інтеграційної основи у фаховій підготовці майбутніх учителів математики дають підстави для наступних **висновків**.

1.Теорія ліній та поверхонь в аналітичному викладі складає більшу частину курсу «Аналітична геометрія». Важливість її застосування на понятійному, ідейному та фактичному рівні визначається принципами фундаментальності та професійної спрямованості.

2. Багато питань, що стосуються ліній і поверхонь, тісно пов'язані з окремими темами шкільного курсу математики – деякі питання добре висвітлюються в шкільному курсі математики, що уможливлює і вимагає

ефективного використання в процесі вивчення ліній і поверхонь в університеті знань і умінь, набутих студентами за роки навчання в школі. Крім того, є всі підстави в курсі аналітичної геометрії майбутнім учителям математики отримати ґрунтовну підготовку з тих питань, яких у майбутньому будуть навчати своїх учнів.

3. Важливим і невід'ємним компонентом системи навчання є управління з боку викладача навчального-виховним процесом студентів. Педагогічне управління навчально-пізнавальною діяльністю студентів під час вивчення ліній і поверхонь передбачає зміну моделі освітнього процесу – від лінійної (загальної для всіх жорсткої схеми) – до нелінійної (з гнучкими індивідуальними маршрутами). Виважене управління змінює навчально-пізнавальну діяльність студентів не тільки під час вивчення ліній і поверхонь, а й загалом впливає на побудову власної траєкторії навчання протягом усього періоду навчання в університеті.

Під час навчання першокурсників слід враховувати такі закономірності вдалого управління викладачем навчальною діяльністю студентів: управління як підтримка і супровід, що дає змогу реалізувати персоніфікацію через індивідуалізацію і залучення студентів до здійснення власної освітньої діяльності; гнучкість і ситуативність, що забезпечує цілісне узгодження компонентів освітньої системи відносно результатів освіти в умовах нелінійної моделі освітнього процесу у ВНЗ; делегування повноважень і розвиток відповідальності студентів, що сприяє їхньому залученню у співуправління їх навчальною діяльністю.

4. Під час навчання ліній і поверхонь у педагогічному університеті навчально-пізнавальну діяльність студентів слід спрямовувати на: оволодіння знаннями, уміннями і навичками та формування предметних і фахових компетентностей; формування наукового світогляду та ціннісних орієнтацій;

забезпечення інтелектуального та особистісного розвитку; підготовку до майбутньої професійної діяльності.

Методичними засадами навчання змістової лінії курсу аналітичної геометрії «Лінії та поверхні» є реалізація у навчальному процесі компетентнісного, діяльнісного, системного, розвивального та індивідуального підходів. Для організації ефективного вивчення студентами ліній і поверхонь викладачам слід дотримуватися виконання таких методичних умов навчання: забезпечення професійної спрямованості навчання; реалізація міжпредметних зав’язків; активізація навчально-пізнавальної діяльності студентів; комплексне використання ІКТ; реалізація індивідуального підходу до організації самостійної роботи студентів; формування наукового світогляду та ціннісних орієнтацій.

5. Загальною метою підготовки вчителя математики в педагогічному університеті є формування основ його професійної культури. Визначаючи мету навчального курсу для майбутніх учителів, потрібно враховувати два взаємопов’язані аспекти: загальнонауковий і фаховий. Мета вивчення ліній і поверхонь студентами педагогічних університетів є складним утворенням – загальнонаукової (освітньої, розвивальної, виховної) і фахової (освітньої, розвивальної, виховної).

Для досягнення усіх компонентів визначеної мети, необхідно для кожного навчального модуля програми сформулювати і розв’язати низку завдань, які матеріалізуються у конкретних практичних діях.

6. Існують різні підходи до побудови навчального курсу «Аналітична геометрія», загалом, і змістової лінії «Лінії та поверхні» зокрема. Для визначення змісту з великого обсягу накопичених і систематизованих відомостей (фактів, гіпотез, законів, теорій тощо) обирають головні і спеціальним чином їх адаптують і структурують. В умовах невеликої кількості годин, що відводиться на вивчення ліній і поверхонь, і з урахуванням вікових

особливостей першокурсників досліджувану змістову лінію доцільно розбити на два модулі, що подаються послідовно, але у різних семестрах: навчальний модуль 2 «Лінії та поверхні першого порядку» (I семестр) та навчальний модуль 3. «Лінії та поверхні другого порядку» (II семестр).

7. Інтенсифікацію вивчення ліній і поверхонь забезпечує урізноманітнення та раціональний добір форм, методів і засобів навчання. Крім традиційних форм навчання, доцільно більше уваги звертати на позааудиторну роботу студентів. З метою підвищення ефективності такого виду діяльності студентів слід своєчасно надавати їм відповідний навчально-методичний супровід, зокрема при дистанційному навчанні.

Досягненню високих результатів у засвоєнні студентами знань і в розвитку їхньої розумової активності допомагає використання системи взаємозв'язаних методів навчання як викладачами (методи активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів; метод викладу нового матеріалу; метод закріплення знань і вмінь; метод навчання розв'язування задач тощо), так і студентами (спостереження; слухання та осмислення; аналіз підручників, посібників, першоджерел, наукової літератури та інших матеріалів; експеримент; вправи та дослідження; моделювання тощо).

Сучасним і ефективним засобом вивчення ліній і поверхонь є програмні засоби, зокрема Microsoft Power Point, ППЗН *GRAN-2D* , *GRAN-3D*, Derive, Maple, система Moodle, ППЗ 3D Plotter тощо, які в процесі навчання використовуються у різних формах і з різною метою. Використання ІКТ забезпечує краще представлення навчальних курсів, зокрема уможливлює наочність і візуалізацію навчального матеріалу, швидке і своєчасне подання в необхідній послідовності наочних образів, які створюють у студентів адекватні уявлення про геометричні об'єкти та їх властивості тощо.

8. Навчальний процес у вищій школі багатогранний і різноплановий. Управління цим процесом з боку викладача полягає, крім іншого, у здійсненні

певних контрольних заходів (іспити, заліки, колоквіуми, модульний контроль тощо). Ретельна організація контролю необхідна для своєчасного виявлення і ліквідації прогалин у знаннях і уміннях студентів, для пошуку шляхів раціоналізації викладацької діяльності, ліквідації виявлених недоліків у роботі викладача.

9. Результати експериментальної перевірки підтверджують ефективність розробленої методики навчання ліній і поверхонь у педагогічному університеті (спеціальне структурування змісту і комплексна постановка цілей навчання; урізноманітнення форм, методів і засобів навчання, використання ефективних засобів контролю та самоконтролю) і доводять, що дотримання запропонованої методики сприятиме: забезпечення професійної спрямованості навчання; реалізації міжпредметних зав'язків; активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів і формування у них наукового світогляду та ціннісних орієнтацій.

10. Подальші дослідження можуть здійснюватися в таких напрямах:

- методика вивчення ліній і поверхонь у курсі диференціальної геометрії для студентів педагогічних університетів;

- методика використання електронних ресурсів у дистанційному режимі для навчання аналітичної геометрії студентів заочної форми;

- професійна спрямованість курсу аналітичної геометрії в педагогічному університеті тощо.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абдуразаков А. А. Значение самостоятельной работы студентов в формировании специалистов / А. А. Абдуразаков, З. Н. Назыров // Вопросы повышения эффективности учебно-во.спитательного процесса : сб. науч. трудов. – Ташкент, 1976. – С. 73–78.
2. Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для студентов физико-математических специальностей вузов / П. С. Александров. – М. : Наука, 1979. – 511 с.
3. Алексюк А. М. Педагогіка вищої освіти України: Історія. Теорія : підручник для студ., асп. та мол. викл. вузів / А. М. Алексюк ; Міжнар. фонд "Відродження". – К. : Либідь, 1998. – 558 с.
4. Аналітична геометрія. Лінії другого порядку : метод. посіб. для організації самостійної роботи студ. заочної форми навчання / уклад. Н. А. Тарасенкова, О. М. Коломієць. – Черкаси : Вид. ЧНУ імені Б. Хмельницького, 2007. – 36 с.
5. Аргунов Б. И. Преобразования плоскости / Б. И. Аргунов. – М. : Просвещение, 1976. – 80 с.
6. Атаманчук П. С. Управління процесом навчально-пізнавальної діяльності / П. С. Атаманчук. – Кам'янець-Подільський : К-ПДПІ,1997. – 136 с.
7. Архангельский С. И. Учебный процесс в высшей школе, его закономерные основы и методы / С. И. Архангельский. – М. : Высшая школа, 1980. – 268 с.
8. Атанасян Л. С. Сборник задач по геометрии : учеб. пособ. для физ.-мат. факультетов пединститутов / Л. С. Атанасян, В. А. Атанасян. – М. : Просвещение, 1973. – Ч. 1. – 256 с.
9. Атанасян Л. С. Геометрия : в 2-х ч. / Л. С. Атанасян, В. Т. Базилев. – М. : Просвещение, 1987. – 336 с.
10. Атанов Г. А. Обучение и искусственный интеллект, или Основы современной дидактики высшей школы / Г. А. Атанов, И. Н. Пустынникова. – Донецк : Изд-во ДОУ, 2002. – 504 с.
11. Базылев В.Т. Сборник задач по геометри / В. Т. Базылев, К. И. Дуничев,

В. П. Иваницкая, Г. Б. Кузнецова. – М. : Просвещение, 1980 – 238 с.

12. Бахвалов С. В. Аналитическая геометрия / С. В. Бахвалов, Л.И. Бабушкин, В. П. Иваницкая. – М. : Гос. уч.-пед. изд., 1958. – 327 с.
13. Бевз В. Г. Практикум з історії математики : навч. посіб. для студентів фіз.-мат. ф -тів педуніверситетів / В. Г. Бевз. – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2004. – 312 с.
14. Бевз В. Г Метод координат і його вивчення в школі / В. Г. Бевз // Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнародний збірник наукових робіт. – Донецьк : Вид-во ДонНУ, 2010. – Вип. 34 . – С. 82–86.
15. Бевз В. Г. Використання історичного матеріалу у навчанні предметів математичного циклу / В. Г. Бевз // Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнар. зб. наукових робіт. – Донецьк : ДонНУ, 2007. – Вип. 28. – С. 43–47.
16. Бевз В. Г. Історія математики у фаховій підготовці майбутніх учителів : монографія / В. Г. Бевз. – К. : НПУ імені Драгоманова, 2005. – 360 с.
17. Бевз Г. П. Геометрія : 11 кл. : підруч. для загальноосвіт. навч. закладів : академ. рівень, профіл. рівень / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз., Н. Г. Владімірова, В.М. Владіміров. – К. : Генеза, 2011. – 336 с. : іл. – Бібліогр.: с. 310.
18. Бевз Г. П. Геометрія : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів : профіл. рівень / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз., Н. Г. Владімірова, В. М. Владіміров. – К. : Генеза, 2010. – 232 с. : іл. – Бібліогр.: с. 221.
19. Бевз Г. П. Геометрія : підруч. для 10-11 кл. загальноосвіт. навч. закладів / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. – К. : Вежа, 2002. – 224 с.
20. Бевз Г. П. Методи навчання математики : навч.-метод. посіб. / Г.П. Бевз. – К. : Генеза, 2010. – С. 117.
21. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. – 12-е изд., испр. –М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 312 с.
22. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – 16-е изд. – М. : Наука,1969. – 440 с.
23. Бикмурзина Р. Р. Дифференцированный подход к формированию познавательной самостоятельности студентов младших курсов вузов в процессе обучения математике : автореф. дис. на соиск. ученой степени

канд. пед. наук : спец. 13.00.02 «Теория и методика обучения математике» / Р. Р. Бикмурзина. – Саранск, 1996. – 18 с.

24. Білоусова В. П. Аналітична геометрія / В. П. Білоусова, І. Г. Ільїн, О.П. Сергунова, В. М. Котлова. – К. : Вища школа, 1973. – 328 с.
25. Біляніна О. Я. Геометрія : 10 кл. : академ. рівень : підруч. для загальноосвіт. навч. закл. / О. Я. Біляніна, Г. І. Біляніна, В. О. Швець. – К. : Генеза, 2010. – 256 с. : іл.
26. Боголюбов А. Н. Апология истории математики / А. Н. Боголюбов, Н.А. Пустовойтов // Праці ІМ НАН України. Т. № 39 : Нариси з історії математики і математичного природознавства / відп. ред. М. О. Пустовойтов. – К. : ІМ НАН України, 2001. – С. 8-20.
27. Болтянский В. Г. Преобразования. Векторы / В. Г. Болтянский, И.М. Яглом. – М. : Просвещение, 1964. – 303 с.
28. Бугров Я. С. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии : учебник для вузов / Я. С. Бугров, С.М. Никольский. – 4-е изд., перераб. и дополн. – Ростов-на-Дону : Феникс, 1997. – 288 с.
29. Бурда М. І. Геометрія : підручник для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів : академічний рівень / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. – К. : Зодіак-ЕКО, 2010. – 176 с. : іл.
30. Бурда М. І. Геометрія : підр. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. : академіч. рівень / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. – К. : Зодіак-ЕКО, 2009. – 238 с. : іл.
31. Буряк В. К. Теория и практика самостоятельной учебной работы школьников : автореф. дис. на соиск. ученой степени д-ра пед. наук / В.К. Буряк. – Тбилиси, 1986. – 35 с.
32. Бюшгенс С. С.Аналитическая геометрия : 1-й концентр Вып.1 / С.С. Бюшгенс. – М. ; Л. : ОНТИ, 1937. – 255 с.
33. Велитченко Л. К. Методологічні та теоретичні проблеми психології / Л.К. Велитченко, В. І. Подшивалкіна. – Одеса : Черкасов, 2009. – 279 с.

34. Винославська О. В. Психологія : навчальний посібник / О.В. Винославська. – К. : ІНКОС, 2005. – 351 с.
35. Вища освіта України і Болонський процес : навч. посіб. / [М.Ф. Степко, Я. Я. Болюбаш, В. Д. Шинкарук [та ін.] ; за ред. В. Г. Кременя. – Тернопіль : Навчальна книга-Богдан, 2004. – 384 с.
36. Воєвода А. Л. Психолого-педагогічні передумови розвитку пізнавальної активності студентів у процесі навчання математики / А.Л. Воєвода // Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнар. зб. наук. робіт. – Донецьк : ДонНУ, 2010. – Вип. 34 . – С. 82–86.
37. Гальперин П. Я. Управление познавательной деятельностью учащихся / П. Я. Гальперин, Н. Ф. Талызина. – М. : Педагогика, 1992. – 262 с.
38. Геворкян П. С. Высшая математика. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / П. С. Геворкян. – М. : Физматлит, 2007. – 208 с.
39. Генденштейн Л. Е. Задачі з фізики 8 клас / Л. Е. Генденштейн, І.М. Гельфгат, Л. А. Кирик. – Х. : Гімназія, 1999. – 144 с.
40. Гласс Д. Статистические методы в педагогике и психологии : пер. с англ. / Д. Гласс, Д. Стэнли– М. : Прогресс, 1976. – 495 с.
41. Глухов М. М. Алгебра и аналитическая геометрия : учебное пособие / М. М. Глухов. – М. : Гелиос АРВ, 2005. – 392 с.
42. Годованюк Т. Л. Індивідуальне навчання у вищій школі : монографія / Т. Л. Годованюк. – К. : НПУ імені Драгоманова, 2010. – 160 с.
43. Годованюк Т. Л. Методика індивідуального навчання історії математики студентів педагогічних університетів : дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Годованюк Тетяна Леонідівна. – К., 2009. – 256 с.
44. Годованюк Т. Л. Самостійна робота першокурсників при вивченні математичних дисциплін / Т. Л Годованюк, Т. М. Махомета // Актуальні проблеми природничих та гуманітарних наук у дослідженнях молодих вчених : матеріали XIV Всеукраїнської наукової конференції молодих вчених, м. Черкаси, 19-20 квітня 2012 р. – Черкаси, 2012. – С.67-69 (особистий внесок дисертанта: належить ідея змістового наповнення різних видів самостійної роботи (аудиторної і позааудиторної) в процесі вивчення математичних дисциплін).

45. Годованюк Т. Л. Доцільність використання інтерактивних методів навчання в поза аудиторній роботі з елементарної математики / Т.Л Годованюк, Т. М. Махомета, І. М. Тягай // Матеріали Чотирнадцятої міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука, м. Київ, 19-21 квітня, 2012 р. Т. 4 : Історія та методика викладання математики : тези доповідей. – К. : НТУУ «КПІ», 2012. – С. 77–78.

46. Головко М. В. Планування та організація педагогічного експерименту / М. В. Головко // Математика в школі. – 2006. – № 3. – С. 28–31.

47. Гончаренко С. Український педагогічний словник / С. Гончаренко. – К. : Либідь, 1997. – 376 с.

48. Гончаренко Я. В Деякі проблеми навчання математичної статистики студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів / Я.В. Гончаренко, М. В. Працьовитий // Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнар. зб. наук. робіт. – Донецьк : ДонНУ, 2011. – Вип. 35 . – С. 53–57.

49. Гончаренко Я. В. Математичні основи імітаційного моделювання в системі підготовки викладачів математики та економіко-математичних дисциплін / Я. В. Гончаренко // Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнар. зб. наук. робіт. – Донецьк : ДонНУ, 2009. – Вип. 31.

50. Гончаров О. І. Місце і роль гурткової роботи в процесі професійної підготовки майбутнього вчителя / О. І. Гончаров // Науково-дослідна робота студентів як чинник удосконалення професійної підготовки майбутнього вчителя : зб. наук. пр. / редкол.: Л. І. Білоусова [та ін.]. – Х. : Факт, 2010. – Вип.1. – С. 7–10.

51. Горошко Ю. В. Використання комп’ютерних програм для створення динамічних моделей при вивченні математики / Горошко Ю. В., Є.Ф. Вінниченко // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія №2 «Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання» : зб. наукових праць. – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2008. – №6 (13). – С. 70–75.

52. Грабарь М. И. Применение математической статистики в педагогических исследованиях. Непараметрические методы / М. И. Грабарь, К. А. Краснянская. – М. : Педагогика, 1977. – 136 с.

53. Граве Д. А. Аналитическая геометрия / Д. А. Граве. – Х. ; К. : ДНТВУ, 1933. – 310 с.

54. Гришанов Л. К. Социологические проблемы адаптации студентов младших курсов / Л. К. Гришанов, В. Д. Цуркан // Психолого-педагогические аспекты адаптации студентов к учебному процессу в вузе : сб. науч. трудов. – Кишинев : Изд-во Кишиневского гос. ун-та, 1990. – 230 с.

55. Груденов Я. И. Психолого-дидактические основы методики обучения математике : кн. для учителя / Я. И. Груденов. – М. : Педагогика, 1987. – 248 с.

56. Губар Д. Є. Розробка інформаційного інтерактивного порталу «Аналітична геометрія» для навчання студентів-математиків / Д. Є. Губар / Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнар. зб. наук. робіт / Донецький Нац. ун-т, Ін-т педагогіки НАПН України, Нац. пед. ун-т імені М.П. Драгоманова. – Донецьк : ДонНУ, 2012. – Вип. 38. – С. 56–61.

57. Гуревич В. Б. Учебник аналитической геометрии для ВТУЗов / В. Б. Гуревич, В. П. Минорский. – М. : Гос. изд. физ.-мат. лит., 1958. – 164 с.

58. Даан-Дельмедико А. Пути и лабиринты : очерки по истории математики / А. Даан-Дельмедико, Ж. Пейффер. – М. : Мир, 1986. – 428 с.

59. Давыдов Н. А. Сборник задач по математическому анализу : учебное пособие для студентов физ.-мат. ф-тов пед. ин-тов (специальности №2104 и 2105) / Н. А. Давыдов, П. П. Коровкин, В. Н. Никольский. – 4-е изд., дополн. – М. : Просвещение, 1973. – 256 с.

60. Дейніченко Т. І. Диференціація навчання в процесі групової форми його організації (на прикладі предметів природничо-математичного циклу) : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : спец. 13.00.09 «Теорія навчання» / Т. І. Дейніченко. – Х., 2006. – 21 с.

61. Державна національна програма “Освіта” (Україна XXI століття). – К. : Райдуга, 1994. – 61 с.

62. Десятникова Ю. М. Психологическое состояние старшеклассников при изменении социального окружения / Ю. М. Десятникова // Вопросы психологии. – 1995. – №5. – С. 18–26.

63. Дзундза А. І. Практичні аспекти організації самостійної роботи студентів / А. І. Дзундза // Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнар. зб. наук. робіт. – Донецьк : ДонНУ, 2009. – Вип. 31 . – С. 63–66.

64. Доценко А. Д. Елементи лінійної алгебри і аналітичної геометрії : навч. посібник / А. Д. Доценко. – Луганськ : Вид-во СНУ імені В. Даля, 2006. – 328 с.

65. Дрибан В. М. Формирование научного мировоззрения студентов в процессе преподавания высшей математики : монография / В. М. Дрибан, Г.Г. Пенина. – Донецк : ДонГУЭТ, 2007. – 360 с.

66. Дьяченко М. И. Психология высшей школы : учеб. пособие для вузов / М. И. Дьяченко, Л. А. Кандыбович. – 2-е изд., перераб. и дополн. – Минск : Изд-во БГУ, 1981. – 383 с.

67. Евдокимов А. К. Научно-исследовательская деятельность в высшей школе : доклады Педагогического симпозиума «Проблемы молодежного научного творчества / А. К. Евдокимова. – М. : Роо «НТА АПФН», 2002. – С. 12–16.

68. Евклид. Начала / Евклид. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1948-1950. – Том I-III.

69. Ермаков В. П. Аналитическая геометрия : курс лекций / В. П. Ермаков. Ч. 2 : Геометрия в пространстве. – К. : Лито-типография Т-ва И.Н. Кушнеревъ и К, 1900. – 127 с.

70. Ермаков В. П. Теория векторов на плоскости / В. П. Ермаков. – К., 1887. – 128 с.

71. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометри : учебник для студентов высших учебных заведений / Н. В. Ефимов. – [7-е изд] – М. : Гос. изд-во физико-математической литературы, 1963. – 227 с.

72. Жалдак М. І. Математика з комп’ютером : посібник для вчителів / М.І. Жалдак, Ю. В. Горошко, Є. Ф. Вінниченко. – К. : РННЦ “ДНІТ”. – 2004. – 255 с.

73. Жалдак М. І. НІТ і гуманітаризація освіти / М. І. Жалдак // Використання сучасної інформаційної технології в навчальному процесі : матеріали

міжвуз. наук.-практ. конф., (29–30 жовтня 1991 р.) / редкол.: М.І. Шкіль [та ін.]. – К. : КДПІ, 1992. – С. 3–8.

74. Жалдак М. І. Педагогічний потенціал комп’ютерно-орієнтованих систем навчання математики / М. І. Жалдак // Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання : зб. наук. праць. – К. : НПУ імені Драгоманова, 2003. – Вип.7. – С. 3–16.

75. Журавська Л. М. Викладач як керівник самостійної діяльності студентів / Л. М. Журавська // Теоретично-методичні проблеми навчання і виховання. Серія «Педагогічні науки» : зб. наук. праць. – К. : Фенікс, 2000. – С. 38–45.

76. Загальна психологія : навчальний посібник / Варій М. Й. – 2-ге вид., випр. і допов. – К. : Центр учбової літератури, 2007. – 968 с. С. 327–341.

77. Загальна фізика : збірник задач / під заг. ред. І. Г. Горбачука. – К. : Вища школа,1993. – 157 с.

78. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / под ред. Б. П. Демидовича. – 8-е изд. – М. : Наука,1972. – 472 с.

79. Задачник по курсу математического анализа : учеб. пособие для студентов заоч.отделений физ-мат. ф-тов désinstitutов / под ред. Н.Я. Виленкина. – М. : Просвещение, 1971. – 336 с.

80. Задкова О. А. Обучение геометрии студентов первого курса педвуза в контексте деятельностного подхода : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Задкова Ольга Алексеевна. – Саранск, 2005. – 224 с.

81. Закон України про вищу освіту : закон України / Верховна Рада України. Інститут законодавства. – К. : [б. в.], 2002. – 96 с.

82. Занюк С. Психологія мотивації : навч. посібник / С. Занюк. – К. : Либідь, 2002. – 304 с.

83. Игнатьева Е. Ю. Педагогическое управление учебной деятельностью студентов в современном вузе : монография / Е. Ю. Игнатьева. – СПб. : ЛЕМА, 2012. – 300 с.

84. Ильин В.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебник для студ. вузов по специальности «Прикладная математика» / В. А. Ильин, Г.Д. Ким – 2-е изд. – М. : Изд-во МГУ, 2002. – 320 с.

85. Ильин В. А. Аналитическая геометрия : учебник для студ. ун-тов /

В.А. Ильин, Э. Г. Позняк. – [4-е изд.]. – М. : Наука, 1988. – 224 с.

86. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия / под ред. А. П. Юшкевича. – Т. 1. – М. : Наука, 1970. – 351 с.

87. Карпов А. О. Научные исследования молодежи / А. О. Карпов. – М. : Высшее образование в России, 2002. – С. 24–27.

88. Кловак Г. Т. Основи педагогічних досліджень : навчальний посібник для вищих педагогічних навчальних закладів / Г.Т. Кловак. – Чернігів : Чернігівський державний центр науково-технічної і економічної інформації, 2003. – 260 с.

89. Клочко В.І. Нові інформаційні технології навчання математики в технічній вищій школі : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра пед. наук : спец. 13.00.02. / В. І. Клочко. – К., 1998. – 48 с.

90. Кобильник Т. П. Програмування в середовищі Maple для розв’язування задач аналітичної геометрії / Т. П. Кобильник // Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнар. зб. наук. робіт. – Донецьк : ДонНУ, 2006. – №26. – С. 160–164.

91. Ковальчук Г. О. Активізація навчання в економічній освіті. Розд. 2.3.1 : Самостійна робота студентів – Режим доступу : http://readbookz.com/book/220/8572.html. – Загол. з титул. екрану.

92. Коломієць О. М. Диференційоване навчання аналітичної геометрії студентів вищих навчальних закладів педагогічного профілю : дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Коломієць Оксана Миколаївна. – Черкаси, 2009. – С. 300.

93. Коломієць О. М. Системні знання як компонент і результат навчальної діяльності студентів / О. М. Коломієць // Вісник Черкаського університету. Серія «Педагогічні науки» – Черкаси : Вид-во ЧНУ імені Б. Хмельницького, 2007. – Вип. 104. – С. 55–65.

94. Коломієць О. М. Геометричне місце точок, рівновіддалених від параболи і прямої / О. М. Коломієць, О. Г. Демченко // Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнар. зб. наук. робіт. – Донецьк : ДонНУ, 2011. – Вип. 35 . – С. 83–86.

95. Коломієць О. М. Елементи дистанційного навчання аналітичної геометрії / О. М. Коломієць // Дидактика математики: проблеми і

дослідження : міжнар. зб. наук. робіт. – Донецьк : ДонНУ, 2005. – Вип. 24. – С. 111–115.

96. Кольман Э. История математики в древности / Э. Кольман. – М., 1961. – 236 с.

97. Конфорович А. Г. Визначні математичні задачі / А. Г. Конфорович. – К. : Радянська школа, 1981. – 189 с.

98. Концептуальні засади розвитку педагогічної освіти України [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://sites.znu.edu.ua/liberal_edu/docs/181.ukr.html. – Загол. з титул. екрану.

99. Концепція розвиту неперервної педагогічної освіти [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://guonkh.gov.ua/normative/nakazi_monu/5487.html. – Загол. з титул. екрану.

100. Корнєєва А. М. Психолого-педагогічні основи просторової уяви / А.М. Корнєєва // Теоретичні і прикладні проблеми психології : зб. наук. праць. – Луганськ : СНУ імені В. Даля, 2006. – Вип. №2(13). – С. 132–140.

101. Костюк Г. С. Навчально-виховний процес і психічний развиток особистості / Г. С. Костюк ; під ред. Л. М. Проколієнко ; упоряд. В. В. Андрієвська, Г. О. Балл, О. Т. Губко, О. В. Проскура. – К. : Рад. шк., 1989. – 608 с.

102. Крамаренко Т. Г. Формування особистісних якостей школяра у процесі комп’ютерно- орієнтованого навчання математики : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : спец. 13.00.02 / Т. Г. Крамаренко. – К., 2008. – 20 с.

103. Креш Л. Л. Векторна алгебра – основа сучасної математичної освіти вчителя математики / Л. Л. Креш, М. В. Працьовитий // Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнарод. зб. наук. робіт. – Донецьк : ДонНУ, 2009. – Вип. 31.

104. Кривенко О. Г. Комп’ютерні моделі геометричних образів як засіб підвищення якості математичної освіти / О. Г. Кривенко // Молодь та соціально-інформаційні проблеми суспільства : зб. матеріалів III

міжвузівської студентської наукової конференції, (м. Умань, 21 квітня 2007 р.) – К. : Вид-во Європ. ун-ту, 2007. – С. 321–323.

105. Кропотов И. А. М. В. Остроградский и его педагогическое наследие : пособие для учителей / И. А. Кропотов, И. А. Марон. – М. : Гос. учебное пед. изд-во министерства просвещения РСФСР, 1961. – 204 с.

106. Кузьмінський А. І. Наукові засади методичної підготовки майбутнього вчителя математики / А. І. Кузьмінський, Н. А. Тарасенкова, І. А. Акуленко. – Черкаси : Вид-во ЧНУ імені Богдана Хмельницького, 2009. – 320 с.

107. Кузьмінський А. І. Педагогіка вищої школи : навч. посіб. / А. І. Кузьмінський. – К. : Знання, 2005. – 486 с.

108. Кучерява О. Ю. Форми та види позааудиторної роботи з математики в педагогічному університеті / О. Ю. Кучерява // Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнар. зб. наук. робіт. – Донецьк : ДонНУ, 2009. - Вип. 31 . – С. 79–83.

109. Лагунова М. В. Управление познавательной деятельностью студентов в информационно-образовательной среде вуза : монография / М. В. Лагунова, Т. В. Юрченко ; Нижегород. гос. архит.-строит. ун-т. – Н. Новгород : ННГАСУ, 2011. – 167 с.

110. Лапенок М. Формирование готовности ученика основной школы к обучению в старшей школе / М. Лапенок, В. Моисеев // Практична психологія та соціальна робота. – 2005. – №6. – С. 42–56.

111. Ленчук І. Г Система навчання майбутнього вчителя конструктивної геометрії : монографія / І. Г. Ленчук. – Житомир : Вид-во ЖДУ імені І. Франка, 2011. – 356 с. : рис., табл. – Бібліогр.: с. 325–356.

112. Ленчук І. Г. Теоретико-методична система навчання евклідової геометрії майбутніх учителів на основі конструктивного підходу : дис. … докт. пед. наук : 13.00.02 / І. Г. Ленчук. – Житомир, 2013. – 417 с.

113. Лернер И. Я. Процесс обучения и его закономерности / И. Я. Лернер. – М. : Знание, 1980. – 96 с.

114. Лосєва Н. М. Прикладна спрямованість навчання аналітичної геометрії як основа формування професійної компетентності викладача математики / Н. М. Лосєва // Дидактика математики: проблеми і

дослідження : міжнар. зб. наук. робіт. – Донецьк : ДонНУ, 2012. – Вип. 38. – С. 46–50.

115. Лосєва Н. М. Активні методи навчання в курсі аналітичної геометрії / Н. М. Лосєва // Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнар. зб. наук. робіт. – Донецьк : ДонНУ, 2008. – Вип. 29. – С. 29–34.
116. Майоров А. Н. Теория и практика создания тестов для системы образования / А. Н. Майоров. – М. : Интеллект-центр, 2001. – 296 с.
117. Макаров И. П. Дополнительные главы математического анализа / И. П. Макаров. – М. : Просвещение,1968. – 319 с.
118. Максименко С. Д. Общая психология / С. Д. Максименко. – М. : Рефл-бук ; К. : ваклер, 2004. – 528 с.
119. Маслоу А. Г. Мотивация и личность = Motivation and personality / А. Г. Маслоу ; (пер. с англ. А. М. Талыбаева). – СПб : Евразия, 1999. – 367 с.
120. Математика. Освітньо-кваліфікаційна характеристика підготовки бакалавра. Освітньо-професійна програма підготовки бакалавра. Напрям підготовки 0101 Педагогічна освіта. Спеціальність 6.010100 педагогіка і методика середньої освіти : галузевий стандарт вищої освіти України / Міністерство освіти і науки України. – К., 2003. – 148 с.
121. Математика : програма для загальноосвітніх навчальних закладів : 5-11 класи. – К. : Навчальна книга, 2003. – 302 с.
122. Математика : програма для загальноосвітніх навчальних закладів : 5-12 класи. – К. : Перун, 2005 – 64 с.
123. Математика : програма для загальноосвітніх навчальних закладів / М. І. Бурда, Г. В. Апостолова, В. Г. Бевз [та ін.]. – К. : Перун, 2003. – 64 с.
124. Математический энциклопедический словарь / гл. ред. Ю. В. Прохоров. – М. : Большая российская энциклопедия, 1995. – 700 с.
125. Махомета Т. М. Активізація навчально-пізнавальної діяльності студентів / Т. М. Махомета // Евристика і дидактика математики : матеріали наук.-метод. дистанційної конф. молодих учених, аспірантів і студентів, Донецьк, квітень 2009 р. / МОН України, Донецький нац. ун-т, Київський нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова ; редкол.: О. І. Скафа, В.

Г. Бевз, Н. А. Тарасенкова, В. О. Швець. – Донецьк : Вид-во ДонНУ. – С. 87-88.

126. Махомета Т. М. Проблеми методики вивчення плоских ліній в курсі аналітичної геометрії для майбутніх учителів математики / Т. М. Махомета //°Матеріали Міжуніверситетської наукової конференції з математики та фізики для студентів та молодих вчених, м. Київ, 21-22 травня 2009 р. – К., 2009. – С. 35.
127. Махомета Т. М. Алгебраїчні лінії у курсі аналітичної геометрії для студентів напряму підготовки МАТЕМАТИКА*/ Т. М. Махомета // Міжнародна наукова конференція "Актуальні проблеми методології та методики навчання фізико-математичних дисциплін" : присвячена 80-річчю Горбачука І. Т., м. Київ, 18-19 січня 2013р. – К., 2013. – С. 152-154.
128. Махомета Т. М. Методика Вивчення алгебраїчних ліній у курсі аналітичної геометрії / Т. М. Махомета // Науковий часопис НПУ імені Н. П. Драгоманова. Серія №3 «Фізика і математика у вищій і середній школі» : зб. наукових праць – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2014. – №11. – С. 100-105.
129. Махомета Т. М. Вивчення ланцюгової лінії як прикладу трансцидентної кривої у шкільному курсі математики / Т. М. Махомета // Друга міжуніверситетська наукова конференція з математики та фізики для студентів та молодих науковців, м. Київ, 28-29 квітня 2011 р.: тези доповідей. – К. : Ін-т математики НАН України, 2011. – С. 189–190.
130. Махомета Т. М. Вивчення ліній та поверхонь засобами НІТ / Т. М. Махомета // Збірник наукових праць. Серія «Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології». – Суми : СумДПУ імені А. С.Макаренка, 2012. – №3(21). – С. 150–157.
131. Махомета Т. М. Види контролю якості знань студентів з аналітичної геометрії / Т. М. Махомета // Друга Міжнародна науково-методична дистанційна конференція-конкурс молодих вчених, аспірантів і студентів «Евристика і дидактика математики», м. Донецьк, травень 2011 р. – Донецьк, 2011. – С. 56-57.

132. Махомета Т. М. Еволюція розвитку понять «лінія» та «поверхня» в курсі аналітичної геометрії / Т. М. Махомета // Матеріали міжнародної науково-практичної конференції «Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики» : до 80-річчя з дня народження доктора педагогічних наук, професора З. І. Слєпкань : тези доповідей. – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2011. – С. 328–329.

133. Махомета Т. М. Інноваційні технології навчання як засіб активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів при вивченні аналітичної геометрії / Т. М. Махомета // Міжнародна науково-методична Інтернет-конференція «Інноваційні педагогічні технології у підготовці майбутніх фахівців з вищою освітою: досвід, проблеми, перспективи» [Електронний ресурс]. – Режим доступу : https://docs.google.com/file/d/0B23xOM6EvX0gSm9IZmF4TnAtWHc/edit?pli=1. – Загол. з титул. екрану.

134. Махомета Т. М. Інформаційні комунікаційні технології навчання під час вивчення аналітичної геометрії / Т. М. Махомета // IV Всеукраїнська науково-практична конференція «Особистісно орієнтоване навчання математики: сьогодення і перспективи», 29-31 жовтня 2013 р. – Полтава : АСМІ, 2013. – С.150–151.

135. Махомета Т. М. Історичний екскурс розвитку вчення про лінії та поверхні / Т. М. Махомета // Єдність навчання і наукових досліджень – головний принцип університету : збірник наукових праць звітно-наукової конференції викладачів університету за 2010 р. / Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2011. – С. 184–186.

136. Махомета Т. М. Історія розвитку вчення про лінії та поверхні в курсі аналітичної геометрії / Т. М. Махомета // Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнародний збірник наукових робіт. – Донецьк : ДонНУ, 2011. – Вип. 35. – С. 78–82.

137. Махомета Т. М. Курсова робота з аналітичної геометрії як один із напрямів науково-дослідницької діяльності студентів / Т. М. Махомета // Збірник наукових праць «Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід,

проблеми» / редкол.: І. А. Зязюн [та ін.]. – Вінниця : Планер, 2009. – Вип. 22. – С. 397–401.

138. Махомета Т. М. Курсова робота з аналітичної геометрії як результат самостійної діяльності студента / Т. М. Махомета // Збірник матеріалів всеукраїнської науково-методичної конференції «Стан та перспективи підготовки вчителя математики в Україні», 11-14 листопада 2009 р., м. Вінниця. – Вінниця, 2009. – С. 57-58.

139. Махомета Т. М. Лінії та поверхні в математиці і в школі / Т. М. Махомета // Математика в сучасній школі. – 2012. – №3. – С. 26–30.

140. Махомета Т. М. Методи навчання у вищій школі / Т. М. Махомета // Збірник міжнародної науково-практичної конференції «Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики», м. Вінниця, 26-27 квітня 2012 р. – Вінниця, 2012. – С. 160-161.

141. Махомета Т. М. Науковий гурток з аналітичної геометрії як один із видів позанавчальної науково-дослідницької роботи студентів / Т. М. Махомета // Вісник Черкаського університету. Серія «Педагогічні науки» : збірник наукових праць. – Черкаси : Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького, 2012. – №8. – С. 58–64.

142. Махомета Т. Н. НИТ в изучение линий и поверхностей / Т. Н. Махомета // I Всероссийский конгресс молодых ученых / Санкт-Петербургский национальный исследовательський университет информационных технологий, механики и оптики, г. Санкт-Петербург, 10-13 апреля, 2012 г. – СПб, 2012. – С. 65-67.

143. Махомета Т. М. Позанавчальна науково-дослідницька робота студентів з аналітичної геометрії / Т. М. Махомета // 7 Міжнародна конференція «Стратегия качества в промышленности и образовании», м. Варна, Болгарія, 3-10 червня, 2011 р / Технічний університет (м. Варна, Болгарія). – Варна, 2011.

144. Махомета Т. М. Вивчення ліній і поверхонь з комп'ютерною програмою 3D Plotter : навчально-методичний посібник / Т. М. Махомета. – Умань : Алмі, 2012. – 29 с. (особистий внесок дисертанта: запропонована методика використання комп’ютерної програми 3D Plotter під час

вивчення ліній і поверхонь у курсі аналітичної геометрії).

145. Махомета Т. М. Використання ППЗН GRAN-2D і GRAN-3D під час вивчення ліній і поверхонь : навчальн-методичний посібник для студентів фізико-математичних факультетів вищих педагогічних навчальних закладів ІІІ- IV рівнів акредитації / Т. М. Махомета. – Умань : Алмі, 2013. – 41 с.

146. Махомета Т. М. Практикум з аналітичної геометрії : навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів вищих педагогічних навчальних закладів ІІІ- IV рівнів акредитації / Т. М. Махомета. – Вид. 2-ге, допов. – Умань : Алмі, 2012. – 145 с.

147. Махомета Т. М. Психолого-педагогічні особливості управління навчально-пізнавальної діяльності першокурсників при вивченні аналітичної геометрії / Т. М. Махомета // Вісник Черкаського університету. Серія «Педагогічні науки». – Черкаси, 2010. – Вип. 191. Ч. 5. – С. 73–80.

148. Махомета Т. М. Психолого-педагогічні особливості управління навчально-пізнавальної діяльності першокурсників / Т. М. Махомета // Матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти (ПМО 2010)», 24–26 листопада 2010 року, Черкаси. – Черкаси, 2010. – С. 254–255.

149. Махомета Т. Н. Методологические аспекты построения курса аналитической геометрии в педагогическом университете / Т. Н. Махомета // сборник научных трудов «Проблемы современной науки». – Ставрополь : Логос, 2013. – выпуск 10. Часть 1. – С. 126-132.

150. Махомета Т. М. Самостійна робота першокурсників при вивченні аналітичної геометрії / Т. М. Махомета // Науковий часопис НПУ імені Н. П. Драгоманова. Серія №3 «Фізика і математика у вищій і середній школі» : зб. наукових праць – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2011. – №8. – С. 75–80.

151. Меньшикова Л. В. Психологические закономерности развития индивидуальности студентов в вузе : автореф. дис. на соиск. ученой степени д-ра психол. наук : спец. 19.00.01 «Общая психология» / Л. В. Меньшикова. – Новосибирск, 1998. – 40 с.

152. Мерзляк А. Г. Геометрія : підруч. для 9 кл. шкіл з поглибленим вивченням математики / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2009. – 272 с.
153. Методичні матеріали щодо кредитно-модульної системи організації навчального процесу з аналітичної геометрії для студентів І курсу фізико-математичного факультету / уклад. С. В. Петренко, І. В. Шишенко – Суми : Вид-во СумДПУ, 2006. – 30 с.
154. Мєняйлов С. М. Методичні засади контролю пізнавальної діяльності студентів вищих технічних навчальних закладів із загальної фізики : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : спец. 13.00.02 «Теорія та методика навчання (фізика)» / С. М. Мєняйлов. – К., 2008. – 33 с.
155. Михайленко Л. Ф До питання організації індивідуальної роботи студентів / Л. Ф. Михайленко // Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнар. зб. наук. робіт. – Донецьк : ДонНУ, 2007. – Вип. 28 . – С. 34–36.
156. Михалін Г. О. Професійна підготовка вчителя математики у процесі навчання математичного аналізу / Г. О. Михалін. – К. : ДІНІТ, 2003. – 320 с.
157. Михалін Г. О. Формування основ професійної культури вчителя математики у процесі навчання математичного аналізу : дис. ... д-ра пед. наук : 13.00.04 / Г. О. Михалін. – К., 2004. – 481 с.
158. Моденов П. С. Аналитическая геометрия / П. С. Моденов. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1969. – 698 с.
159. Моденов П. С. Геометрические преобразования / П. С. Моденов, А. С. Пархоменко. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1961. – 232 с.
160. Моденов П. С. Сборник задач по аналитической геометрии / П. С. Моденов, А. С. Пархоменко. – М. : Наука, 1976. – 384 с.
161. Мойсеюк Н. Є. Педагогіка : навчальний посібник / Н. Є. Мойсеюк. – 4-те вид., допов. – 2003. – 615 с.
162. Мордкович А. Г. О профессионально-педагогической направленности математической подготовки будущих учителей / А. Г. Мордкович // Математика в школе. – 1984. – №6. – С. 42–45.

163. Морзе Н. В. Система методичної підготовки майбутніх вчителів інформатики в педагогічних університетах : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра пед. наук : спец. 13.00.02 / Н. В. Морзе. – К., 2003. – 39 с.

164. Моторіна В. Г. Організація навчально-пізнавальної діяльності студентів вищого педагогічного закладу в умовах інтерактивного навчання / В. Г. Моторіна // Особистісно орієнтоване навчання математики: сьогодення і перспективи : матеріали ІІ Всеукр. наук.-практ. конф., 6–7 квіт. 2005 р. – Полтава, 2005. – С. 129–131.

165. Муковіз О. П. Формування вмінь самостійної пізнавальної діяльності у студентів педагогічних ВНЗ засобами інформаційних технологій : монографія / О. П. Муковіз. – Умань : ПП Жовтий О.О., 2010р.

166. Наконечна Л. Й., Кейс-технологія як умова розвитку пізнавальної самостійності майбутніх учителів математики / Л. Й. Наконечна // Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнар. зб. наук. робіт. – Донецьк : ДонНУ, 2007. – Вип. 28. – С. 105–109.

167. Наконечна Т. В. Використання ІКТ на заняттях з вищої математики / Т. В. Наконечна, О. В. Нікулін // Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнар. зб. наук. робіт. – Донецьк : ДонНУ, 2006. – Вип. 26. – С. 74–78.

168. Національна доктрина розвитку освіти // Освіта України. – 2002. – 23 квітня. – С. 4–6.

169. Національна стратегія розвитку освіти в Україні на 2012–2021 роки [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.meduniv.lviv.ua/files/info/nats_strategia.pdf. – Загол. з титул. екрану.

170. Новиков В. Сборник задач по аналитической геометрии на плоскости с полными решениями и подробными методическими указаниями для каждого типа / сост. В. Новиков, В. Воскобойников. – Л. : Госиздат, 1924. – 128 с.50, с. 17–45.

171. Ортинський В.Л. Педагогіка вищої школи : навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. – К. : Центр учбової літератури, 2009. – 472 с.

172. Основи нових інформаційних технологій навчання : посібник для вчителів / Ю. І. Машбиць, О. О. Гокунь, М. І. Жалдак [та ін.]. – К. : ІЗМН, 1997. – 264 с., с. 228–232.

173. Основні засади розвитку вищої освіти України в контексті Болонського процесу : (документи і матеріали 2003–2004 рр.) / Степко М. Ф., Болюбаш Я. Я., Шинкарук В. Д. [та ін.] ; за ред. В. Г. Кременя. – К. ; Тернопіль : Вид-во ТДПУ, 2004. – 147 с.

174. П’ятакова Г. П. Сучасні педагогічні технології та методика їх застосування у вищій школі [Електронний ресурс] / Г. П. П’ятакова, Н.М. Заячківська. – Режим доступу : http://tourlib.net/books_others/pedtehnol2.htm. – Загол. з титул екрану.

175. Панченко Л. Л Спецкурс “Математичне моделювання” в контексті підготовки вчителя математики / Л. Л. Панченко // Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнар. зб. наук. робіт. – Донецьк : ДонНУ, 2006. – Вип. 26 . – С.178–183.

176. Панченко Л. Л. Навчання студентів математичному моделюванню у вузівських курсах геометрії // Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнар. зб. наук. робіт. – Донецьк : ДонНУ, 2004. – Вип. 22. – С. 50–57.

177. Пархоменко А. С. Что такое линия / А. С. Пархоменко. – М. : Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1954. – 140 с.

178. Педагогіка вищої школи / за ред. Курлянд З. Н. – К. : Знання, 2005. – 399 с.

179. Педагогіка вищої школи : навч. посіб. / [І. О. Бартєнєва, І. М. Богданова, І. М. Бужина [та ін.] ; Південноукраїнський держ. пед. ун-т імені К. Д. Ушинського. – Одеса : ПДПУ ім. К. Д. Ушинського, 2002. – 344 с.

180. Пейсханов Н. М. Психологические и психофизиологические особенности студентов / Н. М. Пейсханов. – Казань : Изд-во Казанского университета, 1977. – 295 с.

181. Пидкасистый П. И. Теоретические основы обучения студентов знаниям и методам познавательной деятельности / П. И. Пидкасистый,

Б. И. Коротяев, Г. И. Хозяинов // Современная высшая школа. – 1980. – №3/31/. – С.187–207.

182. Побірченко Н. С. Компетентнісний підхід у вищій школі: теоретичний аспект / Н. С. Побірченко // Освіта та педагогічна наука. – 2012. – №3. – С. 24–31.
183. Погорелов А. В. Аналитическая геометрия : учебник для студентов вузов / А. В. Погорелов. – [3-е изд.]. – М. : Наука, 1968. – 176 с.
184. Погорелов А. В. Аналитическая геометрия / А. В. Погорелов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.
185. Подоляк Л. Г. Психологія вищої школи : підручник / Л. Г. Подоляк, В. І. Юрченко. – 2-ге вид. – К. : Каравела, 2008.– 352 с.
186. Полякова Т. С. Двухвековой юбилей высшего математического образования в России / Т. С. Полякова // Математика в высшем образовании. – 2003. – № 1. – С. 117–124.
187. Пометун О. І. Дискусія українських педагогів навколо питань запровадження компетентнісного підходу в українській освіті / О. І. Пометун // Компетентнісний підхід у сучасній освіті. Світовий підхід та українські перспективи / під заг. ред. О. В. Овчарук. – К., 2004. – 111 с.
188. Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр 1. Аналитическая геометрия : учеб. пособие для вузов / М. М. Постников. – М. : Наука, 1986. – 416 с.
189. Працьовитий М. В. Лінії і поверхні в курсі аналітичної геометрії для майбутніх вчителів математики та фізики / М. В. Працьовитий, Т. М. Махомета // Матеріали 12-ї міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука, м. Київ, 15-17 травня 2008 р. – К., 2008. – С. 305 (особистий внесок дисертанта: здійснено аналіз розвитку вчення про лінію та поверхню у курсі аналітичної геометрії).
190. Працьовитий М. В. Лінії на евклідовій площині / М. В. Працьовитий, Я. В. Гончаренко. – К. : НПУ імені М.П. Драгоманова, 2006. – 60 с.
191. Працьовитий М. В. Екзамен з аналітичної геометрії : (І семестр) / М. В. Працьовитий. – К. : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2005. – 120 с.

192. Працьовитий М. В. Екзамен з аналітичної геометрії : (II семестр) / М. В. Працьовитий . – К. : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2003. – 100 с.

193. Працьовитий М. В., Узгодження змісту державних стандартів та особистісного саморозвитку як одна з умов формування аналітичного мислення студентів / М. В. Працьовитий, С. М. Шевченко // Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнар. зб. наук. робіт / Донецький нац. ун-т, Ін-т педагогіки НАПН України, Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. – Донецьк : ДонНУ, 2012. – Вип. 38. – С. 13–19.

194. Привалов И. И. Аналитическая геометрия : учебник для высших технических учебных заведений / И. И. Привалов. – Изд. 13-е, стереотипное. – М. : Наука, 1966. – 272 с.

195. Програма з математики для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів : рівень стандарту, 2010 р.

196. Прудников В. Е. Русские педагоги-математики XVIII–XIX векав / В. Е. Прудников. – М. : Учпедгиз, 1956. – 640 с.

197. Психологический словарь / под ред. Петровского А. В., Ярошевского М. Г. – 2-е изд., исправленное и дополненное. – М. : Политиздат, 1990. – 494 с.

198. Психологічний словник / за ред. В. І. Войтенка. – К. : Либідь. – 1982. – 215 с.

199. Психологія : [підручник для педагогічних вузів / за ред. Костюка Г. С]. – К. : Рад. школа, 1968. – 572 с.

200. Психолого-педагогический словарь / сост. Е. С. Рабцевич. – Минск : Соврем. слово, 2006. – 928 с.

201. Пшеборский А. П. Аналитическая геометрия : курс лекций, чит. в Харьк. технол. ин-те / А. П. Пшеборский. – Х. : Печатник, 1918. – 427 с.

202. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ : [монографія] / С. А. Раков. – Х. : Факт, 2005. – 360 с.

203. Раков С. А. Компьютерные эксперименты в геометрии : учебное пособие / Раков С. А., Горох В. П. – Х. : ХГПИ им. Г. С. Сковороды, 1996. – 176 с.

204. Рамський Ю. С. Інформаційне суспільство. Інформатизація освіти / Ю. С. Рамський // Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання : зб. наук. праць / редкол. НПУ імені М. П. Драгоманова. – Вип. 7. – К., 2003. – С. 16–28.

205. Робоча програма з дисципліни «Аналітична геометрія» [Електронний ресурс] / УДПУ імені Павла Тичини ; уклад. Т. М. Махомета. – Умань, 2012. – 1 ел. опт. диск.(CD ROM). – Систем. вимоги: Pentium ; 32 Mb RAM ; CD-ROM Windows 98/2000 /NT/ XP. – Назва з контейнера.

206. Робоча програма з дисципліни «Аналітична геометрія» [Електронний ресурс] / ПНПУ імені В. Г Короленка. – Полтава, 2012. – 1 ел. опт. диск.(CD ROM). – Систем. вимоги: Pentium ; 32 Mb RAM ; CD-ROM Windows 98/2000 /NT/ XP. – Назва з контейнера.

207. Робоча програма з дисципліни «Аналітична геометрія» [Електронний ресурс] / НПУ імені М. П. Драгоманова ; уклад. М.В. Працьовитий – Київ, 2012. – 1 ел. опт. диск.(CD ROM). – Систем. вимоги: Pentium ; 32 Mb RAM ; CD-ROM Windows 98/2000 /NT/ XP. – Назва з контейнера.

208. Робоча програма з дисципліни «Аналітична геометрія» [Електронний ресурс] / ВДПУ імені Михайла Коцюбинського. – Вінниця, 2012. – 1 ел. опт. диск.(CD ROM). – Систем. вимоги: Pentium ; 32 Mb RAM ; CD-ROM Windows 98/2000 /NT/ XP. – Назва з контейнера.

209. Савелов А. А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения : (справочное руководство) / А. А. Савелов. — М. : ГИФМЛ, 1960. — 293 с.

210. Сальмон Г. Аналитическая геометрия двух измерений (Конические сечения, геометрические методы) / Г. Сальмон ; пер. съ франц. В. Г. Алексеева. – М. : Издание Елизаветы Гербекъ, 1892. – 208 с.

211. Самарин Ю. А. Очерки психологии ума. Особенности умственной деятельности школьников / Самарин Ю. А. – М. : Изд-во АПН РСФСР, 1962. – 504 с.

212. Саранцев Г. И. Гуманизация образования и актуальные проблемы методики преподавания математики / Г. И. Саранцев // Математика в школе. – 1995. – № 5. – С. 36–39.

213. Сборник задач по курсу высшей математики / под ред. Г. И. Кручковича. – М. : Высшая школа, 1973. – 576 с.

214. Семеніхіна О. В. Врахування особливостей розвитку аналітичної геометрії при формуванні основ сучасних освітніх стандартів цієї науки // Збірник наукових праць. Серія «Педагогічні науки». – Суми : СДПУ імені А. С. Макаренка, 1999. – С. 64–74.

215. Семеніхіна О. В. Методична система реалізації освітнього стандарту з аналітичної геометрії у педагогічних університетах : дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / О. В. Семеніхіна. – К., 2004. – 243 с.

216. Семина Н. А. Дифференцированное обучение математике студентов высших военных технических учебных заведений на примере изучения курса "Аналитическая геометрия" : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Н. А. Семина. – Коломна, 2003. – 258 с.

217. Сидоренко Е. В. Методы математической обработки в психологии / Е. В. Сидоренко – СПб. : Речь, 2004. – 350 с.

218. Симонов В. П. Педагогический менеджмент / В. П. Симонов. – М. : Педагогическое общество России, 1999. – 430 с.

219. Сікорський П. І. Кредитно-модульна технологія навчання : навч. посіб. / П. І. Сікорський ; за заг. ред. З. І. Тимошенко. – К. : Вид-во Європ. ун-ту, 2004. – 127 с.

220. Скафа О. І. Теоретико-методичні основи формування прийомів евристичної діяльності в процесі вивчення математики в умовах впровадження сучасних технологій навчання : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра пед. наук : спец. 13.00.02 / О. І. Скафа. – К., 2004. – 40 с.

221. Скафа О. І. Теоретико-методичні основи формування прийомів евристичної діяльності в процесі вивчення математики в умовах впровадження сучасних технологій навчання : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра пед. наук : спец. 13.00.02 / О. І. Скафа. – К., 2004. – 40 с.

222. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : підручник / З. І. Слєпкань. – К. : Вища шк., 2006. – 582 с.

223. Слєпкань З. І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального

навчання математики / З. І. Слєпкань. – Тернопіль : Навчальна книга-Богдан, 2004. – 239 с.

224. Слєпкань З. І. Наукові засади педагогічного процесу у вищій школі : навч. посіб / З. І. Слєпкань. – К. : Вища шк., 2005. – 239 с.
225. Словарь практического психолога / сост. С. Ю. Головин. – Минск : Харвест, 1997. – 800 с.
226. Словник-довідник педагогічних і психологічних термінів / за ред. А. І. Кузьмінського. – Черкаси : Вид-во ЧДУ імені Б. Хмельницького, 2002. – 112 с. Шкіль М. І. Вимоги до підготовки вчителя математики / М. І. Шкіль // Радянська школа. – 1984. – № 12. – С. 69–72.
227. Смирнов С. Д. Педагогика и психология высшего образования: от деятельности к личности / С. Д. Смирнов. – М. : Аспект–Пресс, 1995. – 270 с.
228. Смирнова-Трибульська Є. М. Дистанційне навчання з використанням системи Moodle : навчально-методичний посібник / Є. М. Смирнова-Трибульська. – Херсон : Айлант, 2007. – 492 с.
229. Солодка Т. В. Комп’ютерне тестування як метод контролю за результатами навчальної діяльності студентів : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : спец. 13.00.01 / Т. В. Солодка. – Х., 1995. – 22 с.
230. Співаковський О. В. Теоретико-методичні основи навчання вищої математики майбутніх вчителів математики з використанням інформаційних технологій : дис. … д-ра пед. наук : 13.00.02 / О. В. Співаковський. – К., 2004. – 534 с.
231. Средства обучения математики в школе : сборник статей / сост. А. М. Пышкало. – М. : Просвещение, 1980. – 208 с.
232. Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики / Д. Я. Стройк. – [3-е изд.]. – М. : Наука, 1978. – 336 с.
233. Сулім Т. П. Методичні вимоги до організації евристичного навчання аналітичної геометрії і лінійної алгебри студентів фізичних спеціальностей / Т. П. Сулім // Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнар. зб. наук. робіт / Донецький нац. ун-т, Ін-т

педагогіки НАПН України, Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. – Донецьк : ДонНУ, 2012. – Вип. 38. – С. 62–67.

234. Талызина Н. Ф. Педагогическая психология / Н. Ф. Талызина. – 2-е изд., стереотип. – М. : Академия, 1998. – 288 с.
235. Талызина Н. Ф. Формирование познавательной деятельности учащихся / Н. Ф. Талызина. – М. : Знание, 1983. – 73 с.
236. Талызина Н. Ф. Теоретические проблемы программированного обучения / Н. Ф. Талызина. – М. : Изд-во МГУ, 1969. – 133 с.
237. Талызина Н. Ф. Управление процессом усвоения знаний : (психологические основы) / Талызина Н. Ф. – М. : Изд-во МГУ, 1984. – 344 с.
238. Томусяк А. А. Геометрія. Ч.1 : Аналітична геометрія / А. А. Томусяк, В. С. Трохименко, Н. М. Шунда. – Вінниця : ВДПУ, 2002. – 250 с.
239. Тополя Л. В. Активні форми навчання у вищій школі / Л. В.Тополя // Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнародний збірник наукових робіт / Донецький нац. ун-т, Ін-т педагогіки АПН України, НПУ ім. М. П. Драгоманова, Міжнар. програма "Евристика та дидактика точних наук". – Донецьк : ДонНУ, 2006. – Вип. 26. – С. 65–69. – Бібліогр. в кінці ст.
240. Требенко Д. Я. Формування внутрішнього стимулу і готовності до самоконтролю при вивченні вищої алгебри / Требенко Д. Я., Требенко О. О. // Наукові записки НДУ імені М. Гоголя. Серія «Психолого-педагогічні науки». – Ніжин : НДУ імені М. Гоголя, 2012. – Вип. №1. – С. 177–181.
241. Триус Ю. В. Комп’ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математичних дисциплін у вищих навчальних закладах : дис. ... д-ра пед. наук : 13.00.02 / Ю. В. Триус. – К., 2005. – 649 с.
242. Трохименко В. С. Конспект лекцій з аналітичної геометрії / В. С. Трохименко. – Вінниця, 2008. – 171 с.
243. Туркот Т. І. Педагогіка вищої школи [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://pidruchniki.ws/13680808/pedagogika/pedagogika_vischoyi_shkoli_-_turkot_ti. – Загол. з титул. екрану.

244. Тутова О. В. Научно-методическая подготовка будущего учителя математики к использованию ИКТ / О. В. Тутова // Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнар. зб. наук. робіт. – Донецьк : ДонНУ, 2005. – Вип. 24 : Труди міжнародної науково-методичної конференції "Евристичне навчання математики". – С. 87–92.

245. Тутова О. В. Методичні вимоги до підготовки майбутнього вчителя до застосування інформаційно-комунікаційних технологій у процесі евристичного навчання математики / О. В. Тутова // Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнар. зб. наук. робіт. – Донецьк : ДонНУ, 2009. – Вип. 32 . – С. 146–155.

246. Тюлюш М. К. Комплексная технология обучения аналитической геометрии плоскости студентов педвузов : (на примере Тывинского государственного университета) : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02, Новосибирск, 2002. – 194 с.

247. Тягай І. М. Інтерактивні методи навчання як засіб активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів на практичних заняттях з аналітичної геометрії / І. М. Тягай, Т. М. Махомета // Вісник Черкаського університету. Серія «Педагогічні науки» : збірник наукових праць – Черкаси, 2013. – Вип. №17 (270). – С. 118–125 (особистий внесок дисертанта: особисто розроблена методика використання інтерактивних методів навчання на практичних заняттях з аналітичної геометрії).

248. Тягай І. М. Використання інтерактивних методів навчання на практичних заняттях з аналітичної геометрії / І. М. Тягай, Т. М. Махомета // Міжнародна науково-практична конференція «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2013), м. Черкаси, 8-10 квітня 2013р. – Черкаси : Чабаненко Ю., 2013. – С. 231–232 (особистий внесок дисертанта: запропонована ідея використання інтерактивних методів навчання на заняттях з аналітичної геометрії).

249. Українська радянська енциклопедія / за ред. М. Бажана. — К., 1974-1985.

250. Улитин Г. М. Использование свойств симметрии кривых второго порядка для вывода их канонических уравнений / Г. М. Улитин, Л. П. Мироненко // Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнар. зб. наук. робіт. – Донецьк : ДонНу, 2009. – Вип. 31 . – С. 38–40.

251. Урысон П. С. Труды по топологии и другим областям математики. Т.2 / П. С. Урысон. – М. ; Л., 1951. – 992 с.

252. Фоміних Н. Ю. Сутність поняття “інформаційно-комунікаційні технології” та їх значення на сучасому етапі модернізації освіти [Електронний ресурс] / Н. Ю. Фоміних. – Режим доступу: http://archive.nbuv.gov.ua/portal/soc_gum/pfto/2009_5/files/ped905_77.pdf. – Назва з титул. екрану.

253. Цейтен Г. Г. Історія математики в XVI-XVII віках / Г. Г. Цейтен. – К. : Рад. шк., 1936. – 392 с.

254. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии : учебное пособие для вузов / О. Н. Цубербиллер. – 15-е изд. – М. : Наука, 1968. – 336 с.

255. Чухрай З. Б. Окремі організаційні форми, методи і прийоми проведення навчальних занять з курсу вищої математики в коледжах / З. Б. Чухрай // Вісник Черкаського університету. Серія «Педагогічні науки». – Черкаси : Вид-во ЧНУ імені Богдана Хмельницького, 2010. – Вип. 191. Ч. V. – С. 141–148.

256. Швець В. О. Програма з методики навчання математики / В. О. Швець, В. Я. Забранський // Програми з методики навчання математики, елементарної математики та історії математики. – К. : НПУ імені М. Драгоманова, 2001. – С. 4–19.

257. Шейко В. М. Організація і методика науково-дослідницької діяльності : підручник / В. М. Шейко, Н. М. Кушнаренко. – 3-тє вид., стер. – К. : Знання-Прес, 2003. – 295 с.

258. Шиманський І. Є. До питання педагогізації викладання математичних дисциплін в педагогічних інститутах // Наукові записки Київського педінституту. «Педагогічна серія № 1». – К., 1955. – Т. XVII. – С. 121-127.

259. Щукина Г. И. Активизация познавательной деятельности учащихся / Г. И. Щукина. – М. : Педагогика, 1979. – 297 с.

260. Шкіль М. І. Реформування вищої педагогічної освіти / М. І. Шкіль // Освіта і управління. – 1997. – № 1. – С. 39–44.

261. Яценко С. Є. Виникнення та становлення поняття пізнавальної

самостійності як психолого-педагогічної проблеми / С. Є. Яценко, О. М. Марценюк // Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнар. зб. наук. робіт. – Донецьк : ДонНу, 2010. – Вип. 34 . – С. 62–67.

262. Яцько О. Особливості дидактичної адаптації студентів- першокурсників (фінансово-економічних ВНЗ) до вивчення курсу «Вища математика» / О. Яцко // Науковий вісник Чернівецького університету. Серія «Педагогіка та психологія» : збірник наукових праць. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2009. – Вип. 468. – 216 с.

263. Ball W. W. Rouse A Short Account of the History of Mathematics / W.W. Ball. – 4th ed. [Reprint. Original publication: London: Macmillan & Co., 1908], 1960. – S. 50–62.

264. Moodle [Електронний ресурс] – Режим доступу : http://dls.udpu.org.ua/mod/forum/discuss.php?d. – Загол. з титул. екрану.

Додаток А

Розвиток геометрії в античні часи

Таблиця А.1

Основні етапи розвитку геометрії в античні часи

КРАЇНА	ТВОРЦІ ТА ДЖЕРЕЛА	КОРОТКА ХАРАКТЕРИСТИКА ГЕОМЕТРІЇ ЯК НАУКИ
Єгипет	Папіруси	Перші відомості про геометрію, описова характеристика основних геометричних понять, обчислення площ та об'ємів
Вавилон	Клинописні глиняні таблички	Дається визначення найпростіших геометричних фігур: квадрат, трикутник, прямокутник, трапеція, круг.
Стародавня Греція	Фалес Мілетський	Формування геометрії як науки. Запровадження доведення тверджень про геометричні фігури.
	Евклід	Праця з геометрії «Початки» - ранній попередник сучасного способу аксіоматичної побудови математичних наук. Описуються такі важливі поняття: точка, пряма лінія, площина, поверхня, геометричне тіло тощо.
	Евдокс, Менехм, Аполлоній	Конічні поверхні, криві другого порядку як перерізи конічних поверхонь

Таблиця А.2

Розвиток аналітичної геометрії в країнах Європи

ТВОРЦІ	КОРОТКА ХАРАКТЕРИСТИКА ГЕОМЕТРІЇ ЯК НАУКИ
Микола Орезмський (XIV століття)	Вперше використано координатне зображення (для функції, що залежить від часу). Розвивається поняття про координати.
Ф. Вієт (XVI століття)	Поява символічної мови для запису рівнянь. Початок системної алгебри.
П. Ферма (1637), М. Мерсенн (1588-1648)	Записав рівняння кривих 2-го порядку в прямокутних координатах (у символіці Вієта). Використовується перетворення координат. Новий підхід Ферма простіше звичайного геометричного.
Р. Декарт	Вводить в геометрію додаткові криві. Описує кожну алгебраїчну криву відповідним рівнянням, даючи, при цьому, їх класифікацію. В праці «Геометрія» наводиться багато прикладів, що ілюструють новий метод.
Г. Лейбніц (кінець XVII століття)	Вводить в загальне вживання терміни «абсциса», «ордината», «координати».
Д. Валліс (1655)	Вперше розглядає конічні перетини як плоскі криві. Використовує від'ємні абсциси і косокутні координати.
І.Ньютон (1668)	Класифікував криві 3-го порядку, виділивши 4 типи і 58 видів. Пізніше він додав ще 14 видів. Система координат вже нічим не відрізняється від сучасної. Для кожної кривої визначаються діаметр, вісь симетрії, вершини, центр, асимптоти, особливі точки і т. п.
Д. Стірлінг (XVIII століття)	Вивчав алгебраїчні криві вищих порядків, виявив 4 нових типи, не помічених Ньютоном. Були виявлені і класифіковані особливі точки.
А. Клеро (1729)	Праця «Дослідження про криві двоякої кривизни» поклала початок трьом геометричним дисциплінам: аналітична геометрія в просторі, диференціальна геометрія та нарисна геометрія.
Л. Ейлер (1748)	Розвиває і деталізує теорію кривих і поверхонь (переважно алгебраїчних). У «Вступі в аналіз нескінченно малих» подано класифікацію кривих 4-го порядку, описано визначення радіусу кривизни, використовуються косокутні або полярні координати. Окрема глава присвячена неалгебраїчним кривим.
Л. Лагранж, Г. Монж (друга половина XVIII століття)	Аналітична геометрія, на основі розвинутого аналізу, перейшла на новий щабель розвитку, хоча використовується як апарат диференціальної геометрії.

Додаток Б

Деталізація розділів роботи В. П. Єрмакова «Теорія векторів на площині. Застосування до дослідження конічних перерізів».

Проаналізуємо з погляду сучасного стану векторного числення роботу В. П. Єрмакова "Теорія векторів на площині. Застосування до дослідження конічних перерізів", видану в 1887 році в Києві. На її титульній сторінці після назви записано: "Склав екстра-ординарний професор Імператорського університету св. Володимира, член-кореспондент Імператорської Академії Наук В.П. Єрмаков".

Робота складається з 103 параграфів, згрупованих у 10 розділів.

Розділ I. Дії над векторами (додавання і віднімання векторів; переставний, сполучний і розподільний закони додавання; відношення векторів; множення векторів; положення вектора; правило множення векторів; сполучний і розподільний закони множення; ділення векторів.).

Розділ II. Походження складених чисел і дії над ними (відношення двох векторів, як складене число; подання складених чисел на площині; рівність складених чисел; інша форма складеного числа; модуль і аргумент складеного числа; модуль суми і різниці; множення складених чисел; ділення складених чисел; піднесення до степені).

Розділ III. Середній пропорційний вектор і знаходження кореня з векторів і з складених чисел (середній пропорційний вектор; кубічний корінь з вектора; квадратний корінь зі складеного числа; знаходження кореня зі складених чисел).

Розділ IV. Дігнус і його властивості(попередні означення і умови; означення дігнуса і його геометричне значення; вираження модуля через дігнус; властивості дігнуса; модуль суми і різниці).

Розділ V. Основні формули і задачі (площа; умова того, щоб три точки лежали на одній прямій; умова паралельності; умова перпендикулярності;

бісектори кутів; відстань від точки до прямої; точка, яка ділить відстань між двома даними точками у даному відношенні; точка перетину двох прямих; умова того, що три прямі перетинаються в одній точці; основа перпендикуляра з точки на пряму лінію; рівняння прямої).

Розділ VI. Коло (рівняння кола; дотична до кола; претин прямої з колом; полюс; визначення точок дотику дотичних до кола, проведених з зовнішньої точки; дві нові форми рівняння кола; узагальнене рівняння кола; коло, яке проходить через три дані точки).

Розділ VII. Лінії другого порядку (узагальнення; означення центра; три види кривих; еліпс; гіпербола; парабола).

Розділ VIII. Еліпс(претворення рівняння еліпса, властивості спряжених осей; головна вісь; середини паралельних хорд; фокуси; побудова головних осей; дотична до еліпса; сума відстаней від фокусів; закрита форма рівняння еліпса; друга форма рівняння дотичної; полюс; визначення точок дотику дотичних, проведених до еліпса із зовнішньої точки; директриса; полюс точки на директрисі; відстань точки від фокуса; перпендикуляр з точки еліпса на директрису).

Розділ IX. Гіпербола (претворення рівняння гіперболи; властивості спряжених осей; головна вісь; форма гіперболи; побудова головних осей; середини паралельних хорд; дотична; фокуси; рівняння дотичної; різниця відстаней від фокусів; відстань від точки гіперболи до фокуса; закрита форма рівняння гіперболи; друга форма рівняння дотичної; полюс; директриса; перпендикуляр на директрису; асимптоти; відрізки січної між гіперболою і асимптотами рівні).

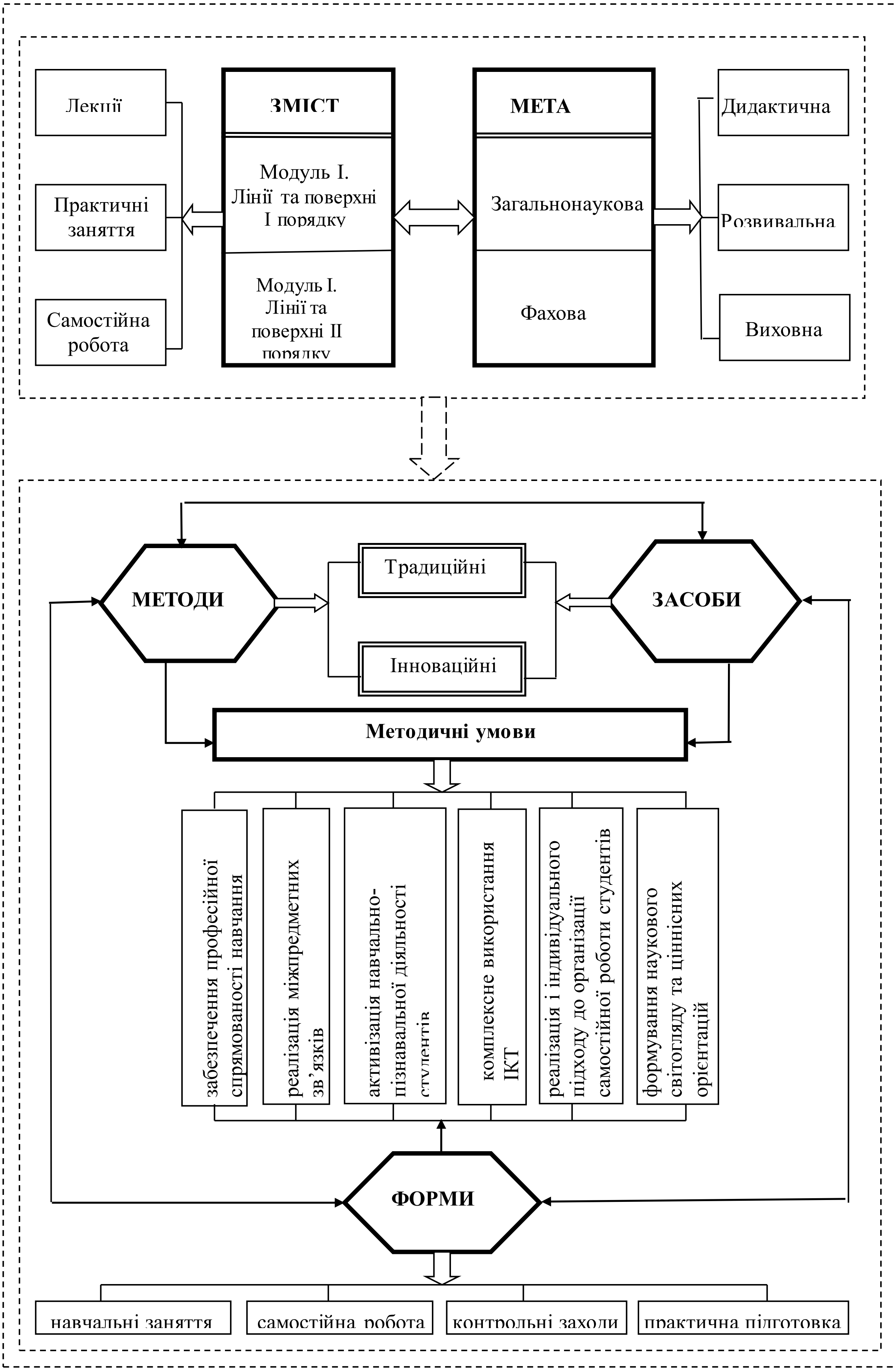
Розділ X. Парабола (закрита форма рівняння параболи; значення коефіцієнтів; перетворення рівняння параболи; рівняння дотичної; головна вісь; форма параболи; середина паралельних хорд; відстань від точки параболи до фокуса; рівняння дотичної; визначення вершини і фокуса; полюс; директриса; полюс точки на директрисі; перпендикуляр на директрису).

В передмові автор зауважує, що теорію векторів на площині можна отримати як окремий випадок загальнішого методу – кватерніонів, але існує кілька причин, через які потрібно надати превагу самостійному, не пов'язаному з кватерніонами викладу.

"Перш за все, через важливе значення в плоскій геометрії, метод векторів на площині потребує по-можливості простого і зрозумілого, а тому і самостійного викладу. Відомо, що діям над кватерніонами притаманні особливі закони; між тим дії над векторами на площині задовольняють тим самим законам, як і дії над звичайними числами. Більш того, вектори на площині знаходяться у тісному зв'язку з так званими складеними числами, інакше відомих під назвою уявних виразів. Складені числа відіграють вельми важливу роль в теорії функцій, тому необхідно дати зрозуміліше поняття про походження складених чисел і вказати їх геометричне значення. З цієї причини три перші розділи включені мною в число лекцій Елементарної Математики, які читаються студентам першого семестру.

Метод векторів не потребує ніяких координат. Всі формули містять ті самі букви, які є на малюнках. Ми оперуємо над точками і над буквами. Тому кожна формула набуває зрозуміле геометричне значення" [4, с.III].

Додаток В


Лекції
Практичні заняття
Самостійна робота
ЗМІСТ
Модуль І. Лінії та поверхні І порядку
Модуль І. Лінії та поверхні ІІ порядку
МЕТА
Загальнонаукова
Фахова
Дидактична
Розвивальна
Виховна
МЕТОДИ
Традиційні
Інноваційні
ЗАСОБИ
Методичні умови
забезпечення професійної спрямованості навчання
реалізація міжпредметних зв'язків
активізація навчально-пізнавальної діяльності студентів
комплексне використання ІКТ
реалізація і індивідуального підходу до організації самостійної роботи студентів
формування наукового світогляду та ціннісних орієнтацій
ФОРМИ
навчальні заняття
самостійна робота
контрольні заходи
практична підготовка

Додаток Г

Розв’язок задачі з математичного аналізу

Обчисліть об’єм тіла, вирізаного циліндром $x^2+y^2=Rx$ із сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Розв’язання:

Перейдемо до циліндричних координат

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z \end{cases}$$

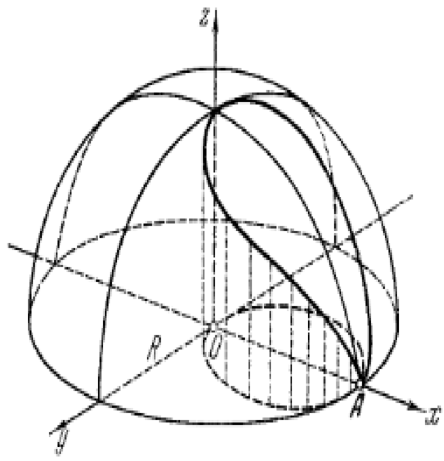
$$x^2+y^2=Rx,\ \rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=R\rho\cos\varphi \Rightarrow \rho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=R\rho\cos\varphi$$

$\rho=R\cos\varphi$ - рівняння циліндра в циліндричних координатах.

$$x^2+y^2+z^2=R^2,\ z^2=R^2-x^2-y^2,\ z^2=R^2-\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi$$

$z^2=R^2-\rho^2,\ z=\sqrt{R^2-\rho^2}$ - рівняння сфери в циліндричних координатах.

Розглянемо четверту частину даного тіла, яка розміщена в першій октант $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$.



$$\pi:\begin{cases} 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2} \\ 0\le\rho\le R\cos\varphi \\ 0\le z\le\sqrt{R^2-\rho^2} \end{cases}$$

$$V=\iiint\limits_T dxdydz=4\iiint\limits_T \rho d\rho d\varphi dz=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{R\cos\varphi}d\rho\int\limits_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}}\rho zdz=$$

$$=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{R\cos\varphi}\rho z\Big|_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}}d\rho=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{R\cos\varphi}\sqrt{R^2-\rho^2}\rho d\rho=$$

$$=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{R\cos\varphi}\sqrt{R^2-\rho^2}\left(-\frac{1}{2}\right)d\left(R^2-\rho^2\right)=-2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2\frac{\left(R^2-\rho^2\right)^{3/2}}{3}\Bigg|_0^{R\cos\varphi}d\varphi=$$

$$=-\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(\sqrt{R^2-R^2\cos^2\varphi}\right)^3-R^3\right)d\varphi=-\frac{4}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(\sqrt{1-\cos^2\varphi}\right)^3-1\right)d\varphi=$$

$$=-\frac{4}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^3\varphi-1\right)d\varphi=-\frac{4}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(1-\cos^2\varphi\right)\sin\varphi-1\right)d\varphi=$$

$$=-\frac{4}{3}R^3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2\varphi\right)\left(-d\cos\varphi\right)-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\right)=\frac{4}{3}R^3\left(\cos\varphi-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}+\varphi\Bigg|_0^{\pi/2}=$$

$$=\frac{4R^3}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\frac{\cos^3\frac{\pi}{2}}{3}-\cos 0+\frac{\cos^3 0}{3}+\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{4R^3}{3}\left(-1+\frac{1}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{4R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{9}{9}\right)R^3.$$

Відповідь: об’єм тіла $V=\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{9}{9}\right)R^3.$

Додаток Д

Зв’язки тем ліній і поверхонь з іншими предметами, галузями різних наук, культурою, побутом

Д. 1. Еліпс в українській мові

Е́ліпс або е́ліпсис (грец. ἔλλειψις — пропуск, випадіння, нестача) — пропуск у висловлюванні деяких структурних елементів, які мають домислюватись за контекстом. Наприклад, у реченнях можуть обминатися дієслова-зв'язки («я вже додому, а ти ще на роботу?»), в іменниково-прикметникових словосполученнях — іменники, на які вказують специфічні сполучення прикметників («Перша Кінна» (армія)). Еліпсис як властивість тексту є протилежністю плеоназму.

Еліпс як лінгвістичний термін не слід плутати з геометричним терміном «еліпс», що походить від того ж самого грецького слова (яке у такому випадку позначає неповноту або «дефектність» еліпсу порівняно з «повним» колом).

Еліпс може бути механізмом утворення нових лексичних одиниць, наприклад, «пропозиція» у значенні «пропозиція одружитися».

Еліпс як стилістична фігура у літературі полягає в опущенні певного члена речення чи словосполучення, які легко відновлюються за змістом поетичного мовлення.

Вживається за для досягнення динамічності і стислості вираження думки та напруженості дії, відрізняючись цим від обірваної фрази (апосіопези), власне, вмовчування. Відомий приклад еліпсу — рядки з поеми Т. Шевченка «Перебендя», де пропущено додаток: «Орлом сизокрилим літає, ширяє, Аж небо блакитне широкими (крилами) б'є».

Еліпсисом або еліпсом також називають прийом побудови оповіді у літературі, драматургії, кіномистецтві тощо, коли у сюжетній послідовності певні події та проміжки часу оминаються, і читач або глядач має здогадуватись про те, що залишилося «за кадром».

Д. 2. Гіпербола в літературі та живописі

Коли потрібно показати щось могутнє, сильне, що перевершує звичайне, використовується гіпербола. Так Н. В. Гоголь, вказуючи на богатирську силу Тараса Бульби, пише: " У ганку стояли осідлані коні. Бульба скочив на свого Чорта, що скажено відсахнувся, відчувши на собі двадцяти тягар, тому що Тарас був надзвичайно важкий і товстий" . Збираючись в Запорізьку Січ, Бульба дав синам багаттй козацький одяг, частину якої складали шаровари" шириною в Чорне море". Тепер уявіть Бульбу вагою в 320 кілограм і його синів, що носили шаровари, завширшки з Чорне море. Ось що таке гіпербола.

Гіпербола широко використовується і в живописі. Розглянемо "Портрет Ф. І. Шаляпіна" роботи Кустодієва. Для Кустодієва Шаляпін - втілення російського богатирства, духовного і фізичного. Тому Шаляпін намальований на весь зріст і в зіставленні з веселящимся народом, який зображений на задньому плані картини, виглядає як гігант, велетень. Можна було Шаляпіна зобразити лише на тлі дерев, будинків, і все одно цей гіперболічний образ богатиря зберігся б, але Кустодиеву знадобилося показати ще й народ, бо Шаляпін - плоть від плоті цього народу. Він ніби корінням вріс у народну культуру. За спиною Шаляпіна зображені сцени народного гуляння з балаганним поданням. А балаган - це народний театр. Він нагадує, по-перше, про те, що Шаляпін - артист, по-друге, про те, що витоки мистецтва Шаляпіна - у народній культурі і служить воно народу. Художник показує нам, що Шаляпін - концентроване вираження духовних сил народу.

Гіпербола і в картині Кустодієва "Більшовик", якого художник зобразив на тлі міста. Більшовик вище будинків , вище церкви, а прапор в його руці затуляє все небо, прямо за Маяковським: "Прапорами небо обклеювати!" Народ же в ногах у більшовика в порівнянні з ним мізерно мілкий, що відображає перебільшення більшовиками ролі особистості в історії та їх зневажливе ставлення до народу як аморфною "масі", з якою можна робити все, що завгодно. Кустодієв висловив те уявлення про твердокамінних більшовиках, яке вони намагалися вселити про себе народу .

Чудовий зразок гіперболи - "Святий Себастьян " Антонелло да Мессіни з Дрезденської галереї. Святий Себастьян зображений на повний зріст на передньому плані картини , і все навколо нього здається маленьким і незначним в порівнянні з ним: і красиві будівлі міста, і люди, жителі його, занурені в свої повсякденні труди і турботи. Герой не корчиться від болю, заподіюваної пронизали його стрілами, благаючий погляд його звернений до Бога, і в особі ледь помітні сліди переносите страждань. Це могутній титан духу.

І як було художнику обійтися тут без гіперболи, якщо він прославляє мученицькі страждання героя за віру християнську, протиставивши цей вчинок святого Себастьяна буденному поведінки інших персонажів картини. А на те , що це страждання за віру і що подвиг героя не був марним, вказує нам уламок античної колони біля його ніг - символ переможеного язичництва.

Є в цій картині ще й думка про безкорисливість подвигу. Зверніть увагу на те , що навколо святого немає співчуваючих і співчуваючих йому, але всі зайняті своїми справами , не звертаючи уваги на нього. А адже легше переносити страждання, коли поруч ті, хто можуть допомогти, втішити, підбадьорити; коли знаєш, що твої страждання і жертви оцінять, не забудуть, вшанують. Але істинно доброчесна людина, творячи добро, навіть не думає ні про яке винагороді за неї. І Христос вчить нас творити добро таємно, а значить і безкорисливо, що не виставляючи напоказ своїх чеснот і не сурмлячи про них.

Гіпербола широко використовується в творах скульптури. Взагалі майже кожен твір скульптури, яке ми бачимо на вулицях міс , - це гіпербола. Зупиніться у будь-якого пам'ятника великій людині . Зображений герой (государ, полководець, письменник і т. п.) набагато крупніше , ніж звичайна людина, та ще поміщений на п'єдестал, високо піднесений над нами. Все це вказує, що той, кому встановлено пам'ятник, перевищував більшість людей своїми талантами, характером, працьовитістю і зміг більше їх послужити батьківщині і народу. Іноді скульптуру роблять настільки гіперболічність, що це навіть важко собі уявити. Така, наприклад, величезна за розмірами скульптура "Батьківщина - Мати", встановлена у Волгограді. Вона справляє враження непомірною мощі, якогось казкового величі. І величезні розміри цієї скульптури цілком виправдані: адже вона присвячена не окремій людині, нехай і самому геніальному і всіма коханому, а нашій героїчній Батьківщині, яка в трагічні хвилини своєї історії висувала з народного середовища незліченна кількість героїв, які здійснювали неймовірні подвиги. Так що величезні розміри Батьківщини - Матері обумовлені її ідейним змістом. Величезність монумента висловлює велич країни і народу.

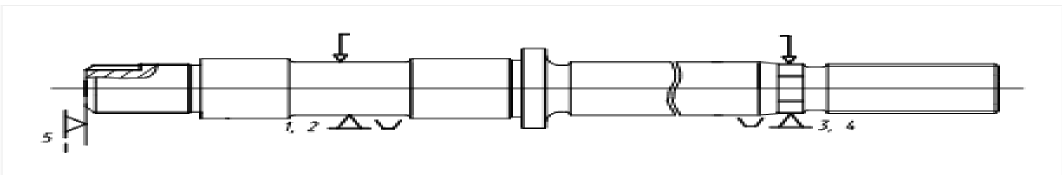
Взагалі важко уявити, як без гіперболи передати в мистецтві, особливо в живопису та скульптурі, ідею великого, могутнього, грізного і т. д. - всього того, що набагато перевершує наші звичні поняття, уявлення і можливості.

Д. 3. Застосування поверхонь другого порядку в побуті.

В архітектурі та технічних конструкціях часто використовуються цікаві властивості різних поверхонь. Однією з таких поверхонь є *однопорожнинний гіперболоїд*. Його властивості використовують під час будівництва водонапірних башт, високих радіощогл, гідротехнічних споруд тощо.

Однопорожнинний гіперболоїд – двічі лінійчата поверхня. Через будь-яку точку такої поверхні можна провести дві прямі, що перетинаються і належать поверхні. Вздовж цих прямих вставляють балки, які утворюють характерну решітку. Така конструкція є жорсткою і міцною, а тому добре зберігає форму під дією зовнішніх сил.

Не останнє місце займають *циліндричні поверхні* в машинобудівній галузі. Майже усі деталі, що відносяться до поршневої групи мають циліндричну форму. До цієї форми можна також віднести шийки валів, шпонкові пази, канавки для виходу шліфувальних кіл.



Дані поверхні мають достатню довжину для надійного закріплення, забезпечують доступ до чистових баз, для забезпечення співвісності зовнішніх циліндричних поверхонь доцільно при їхній обробці для базування застосовувати центрові отвори. За рахунок властивостей циліндричних поверхонь їх так часто використовують у конструюванні деталей.

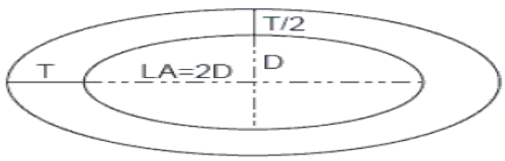
Не залишаються осторонь також *параболічні поверхні*. Вони мають широке застосування у сфері радіотехніки та електроніки. Найпоширенішим приладом параболічної форми який використовується, як професіоналами так і звичайними людьми є супутникові антени. Вони використовуються для прийому і передачі програм супутникового телебачення і радіо, а також з’єднання з Інтернетом .


Ще одним яскравим прикладом використання *параболоїда* є астрофізичний прилад для прийому електромагнітного випромінювання є радіотелескоп. Антени деяких радіотелескопів схожі на звичайні рефлектори. Вони збирають радіохвилі у фокусі металевого увігнутого дзеркала, яке можна зробити ґратчастим і величезних розмірів — діаметром у десятки метрів. Інші радіотелескопи — це величезні рухомі рами, на яких паралельно один одному закріплені металеві стрижні або спіралі.

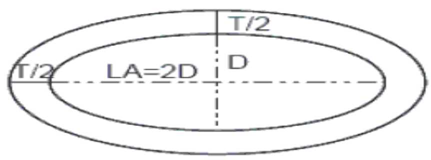
Застосування *конічних поверхонь* дуже широке. Їх застосовують в механіці, деревообробній та машинобудівній сферах життя людини. Наприклад, конічні роликопідшипники - це роз'ємні підшипники. Внутрішнє кільце яких з комплектом тіл кочення (конічними роликами) і зовнішнє кільце можуть встановлюватися окремо. Базова модифікація - однорядний конічний роликопідшипник, має знімне зовнішнє кільце з конічною доріжкою кочення і внутрішнє кільце, на якому зблокований комплект конічних роликів з сепаратором. Конічні роликопідшипники володіють значно більшою вантажопідйомністю, ніж шарикові (при тих же габаритних розмірах), а також більшою жорсткістю, більше протидіють перекосу й прогину вала під навантаженням.


Також цікаве застосування *конічних поверхонь* у створенні конічних антен з ребрами, що формують діаграму направленості. Перевага саме конічних поверхонь полягає у високій точності виготовлення, малій масі, регульованій рівномірністі розподілу матеріалу в осаді при електроформуванні (однорідність структури матеріалу), можливість виготовлення виробів АХТ і КСЕ складної структури, які не можуть бути виготовлені на основі інших технологій, забезпечення необхідної міцності, жорсткості та довговічності. Технології відносяться до безвідхідних і енергозберігаючих.

Щодо *еліпсоїда,* то його можна побачити скрізь: починаючи від форми льодяників, завершуючи технікою та медициною. Еліпсоїд можна поміти і у природі: у багатьох рослин квіти чи листки мають еліпсоїдну форму. Еліпсоїдні моделі використовують для розрахунку маси міокарда лівого шлуночка: LA – подовжена (довга) вісь, T – сума товщини задньої стінки лівого шлуночка та міжшлуночкової перегородки, D – поперечна (коротка) вісь.



Товстостінна модель

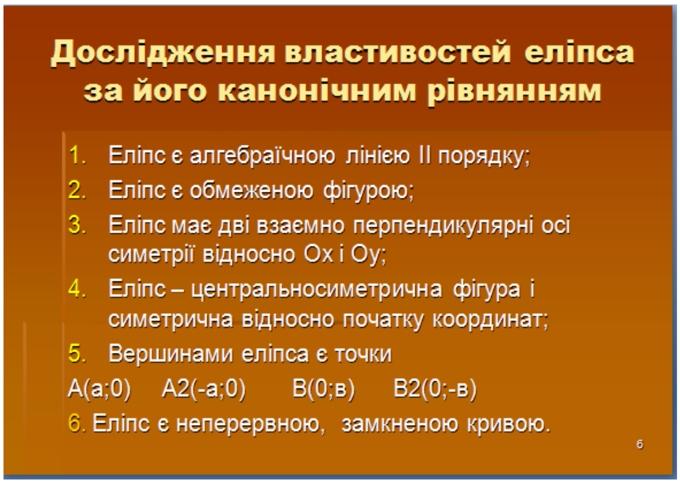


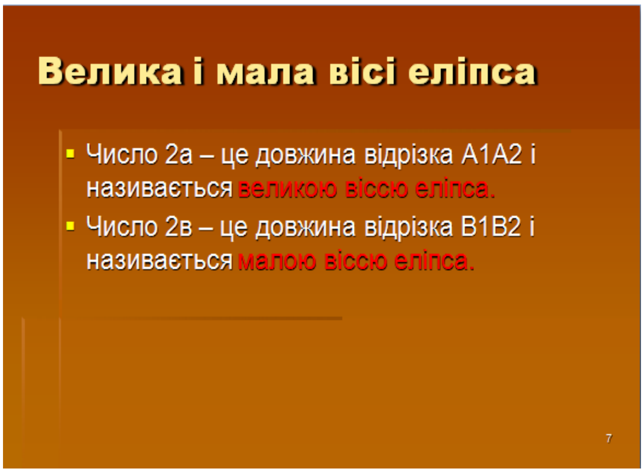
Тонкостінна модель

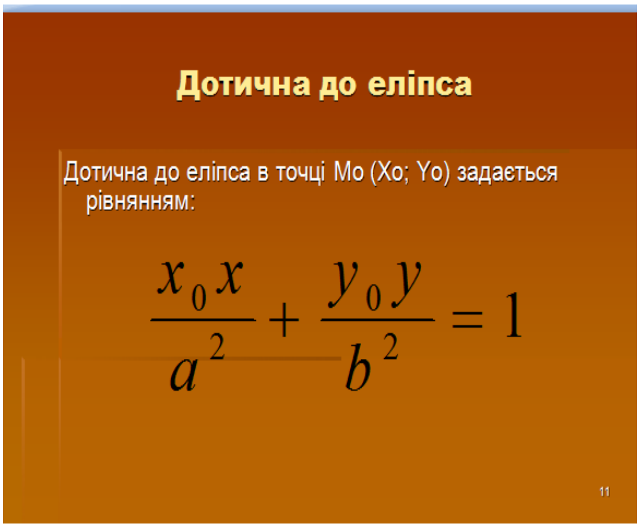
Використовується еліпсоїд в архітектурі разом із радіотехнікою. Мобільні та стаціонарні покриття антенних комплексів і бортових авіаційних обтічників мають еліпсоїдну форму. При такій формі покрівлі втрати електромагнітної енергії не перевищують 0,3 дб у дециметровому й сантиметровому діапазонах хвиль (що є хорошим показником). Ця поверхня поширена й у ювелірній справі: багато прикрас та каміння мають форму еліпсоїда.

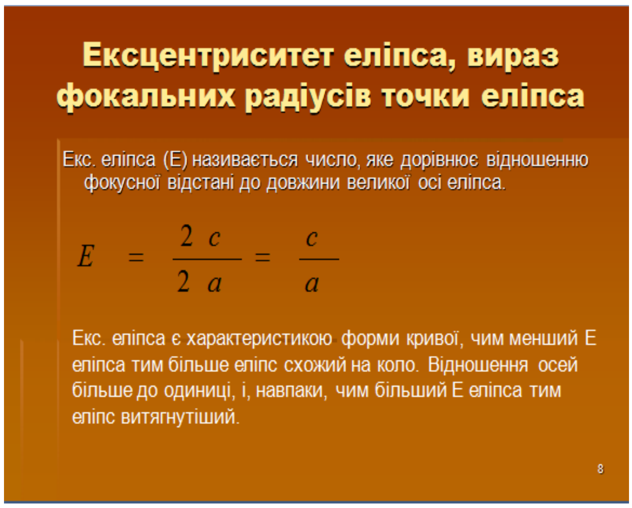
Додаток Е

Е.1. Слайди презентації з теми «Еліпс – алгебраїчна лінія ІІ порядку»







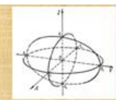


Е.2. Слайди презентації з теми «Поверхні обертання»

Поверхні обертання

План

1. *Еліпсоїд*
2. *Однопорожнинний гіперболоїд*
3. *Двопорожнинний гіперболоїд*
4. *Еліптичний параболоїд*
5. *Гіперболічний параболоїд*
6. *Лінійчасті поверхні*



Еліпсоїд

Еліпсоїдом називається поверхня, утворена внаслідок рівномірного стиснення еліпсоїда обертання до однієї з його площин симетрії, наприклад до XOZ.

- Нехай *M'(x';y';z')* є довільна точка еліпсоїда обертання. Отже:

$$\frac{x'^2+y'^2}{a^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1$$

Після стиснення поверхні точка *M'* перейде в точку *M(x;y;z),* координати якої ми визначимо за формулами:

$$x=x',\quad y=ky',\quad z=z',\quad k<1.$$

Геометричне місце точок *M(x;y;z)* є, очевидно, еліпсоїд загального виду. Як було вже сказано, його можна утворити з еліпсоїда обертання також розтягненням, зокрема розтягненням від площини XOZ. Очевидно, що при цьому *k>1*. Щоб дістати рівняння еліпсоїда загального виду, визначимо *x', y', z',* і підставимо їх значення в рівняння:

$$\frac{x'^2+y'^2}{a^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1$$

Дістанемо:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(ak)^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

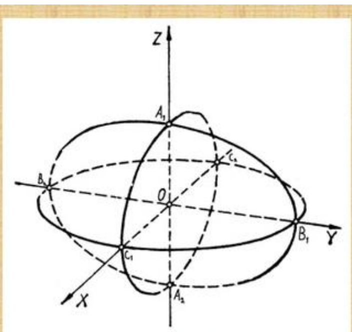
Позначимо *ak=b*. Тоді дістанемо канонічне рівняння еліпсоїда загального виду:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Якщо при цьому *a>b* і *a>c*, то еліпсоїд називається стиснутим.
Навпаки, коли *a<b* і *a<c*, то він називається подовженим.
Нарешті, коли *a=b=c*, то рівняння

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

виражає сферу.



Еліпсоїд має 6 вершин:
$A_1(a;0;0)$
$A_2(-a;0;0)$
$B_1(b;0;0)$
$B_2(-b;0;0)$
$C_1(c;0;0)$
$C_2(-c;0;0)$

- Еліпсоїд має 3 основні перерізи – ними є еліпси.

$$\text{XOY: }\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$$

$$\text{XOZ: }\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}$$

$$\text{YOZ: }\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}$$

Додаток Є

Зразки модульних контрольних робіт

Модульна контрольна робота

«Криві II порядку. Загальна теорія кривих II порядку»

1. Знайти геометричне місце точок, модуль різниці відстаней від кожної з яких до двох даних точок $F_1\left(\sqrt{5},0\right)$ і $F_2\left(-\sqrt{5},0\right)$ дорівнює 4.
2. Знайти спільні дотичні до еліпса $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$ і параболи $y^2=\frac{20}{3}x$.
3. Написати рівняння асимптоти лінії, заданої рівнянням: $2x^2+3xy+y^2-2x+y=0$.
4. Привести рівняння кривої другого порядку до канонічного виду за інваріантами. Побудувати криву. Вказати координати вершин, фокусів, написати рівняння директриси і асимптот, якщо вони є, знайти ексцентриситет кривої: $2x^2-5xy-12y^2-x+26y-10=0$.

Модульна контрольна робота

«Поверхні II порядку. Загальна теорія поверхонь II порядку»

1. Знайдіть точки перетину поверхні Φ із прямою l.

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-z^2=1 \qquad \frac{x-4}{4}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-1}{1}$$

2. Знайти рівняння поверхні, утвореної при обертанні еліпса $x^2+4y^2=4$, $z=0$ навколо осі Ox.

3. Скласти рівняння діаметральної площини поверхні $x^2-4y^2+z^2-2x+6y-4xy+2yz-8=0$ спряженої з вектором $\vec{a}(1;-2;3)$4.

4. Встановіть, чи є поверхня центральною.

За допомогою інваріантів визначте тип поверхні.

Зведіть рівняння поверхні до канонічного виду.

$$5x^2+6y^2+7z^2-4xy+4yz-10x+8y+14z-4=0$$