

БЕРДЯНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

На правах рукопису

Лиходєєва Ганна Володимирівна

УДК 372.851.92

**ФОРМУВАННЯ НАВЧАЛЬНО-ДОСЛІДНИЦЬКИХ УМІНЬ УЧНІВ
У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ СТОХАСТИКИ**

13.00.02 – теорія та методика навчання (математика)

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата педагогічних наук

Науковий керівник:
Жалдак Мирослав Іванович,
академік АПН України,
доктор педагогічних наук,
професор

Бердянськ-2009

ЗМІСТ

ВСТУП	4
РОЗДІЛ I	
ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ФОРМУВАННЯ НАВЧАЛЬНО-ДОСЛІДНИЦЬКИХ УМІНЬ УЧНІВ ЗАГАЛЬНООСВІТНІХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ	12
1.1. Проблема формування навчально-дослідницьких умінь учнів у психолого-педагогічній літературі.....	12
1.1.1. Поняття навчально-дослідницьких умінь.....	12
1.1.2. Навчально-дослідницькі вміння як основа дослідницької діяльності учнів.....	17
1.2. Структурні компоненти навчально-дослідницьких умінь учнів.....	28
1.3. Процес формування навчально-дослідницьких умінь учнів.....	38
1.3.1. Основні психолого-педагогічні теорії навчання.....	38
1.3.2. Дослідницький метод навчання – основний шлях формування навчально-дослідницьких умінь учнів.....	50
1.3.3. Врахування вікових особливостей розвитку учнів старшої школи у процесі формування навчально-дослідницьких умінь.....	58
1.3.4. Рівні та критерії сформованості навчально-дослідницьких умінь учнів.....	66
Висновки за розділом I.....	70
РОЗДІЛ II	
МЕТОДИЧНА СИСТЕМА ФОРМУВАННЯ НАВЧАЛЬНО-ДОСЛІДНИЦЬКИХ УМІНЬ УЧНІВ У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ СТОХАСТИКИ	73
2.1. Місце елементів стохастичності в шкільному курсі математики.....	73
2.2. Задачі зі стохастичності як засіб формування навчально-дослідницьких умінь учнів.....	81
2.2.1. Випадковий експеримент та простір елементарних подій.....	90
2.2.2. Випадкова подія та простір випадкових подій.....	96
2.2.3. Статистична ймовірність та ймовірнісний простір.....	103
2.2.4. Числові характеристики розподілу ймовірностей.....	126
2.2.5. Про випадкову величину в шкільному курсі математики.....	133
2.3. Організаційні форми навчання, що сприяють формуванню навчально-дослідницьких умінь учнів.....	139
2.4. Використання інформаційно-комунікаційних технологій у процесі формування навчально-дослідницьких умінь учнів.....	156
2.5. Особливості проведення педагогічного експерименту.....	167
2.6. Педагогічний експеримент і його результати.....	176
Висновки за розділом II.....	191
ВИСНОВКИ	193
ДОДАТКИ	197
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	253

ВСТУП

Актуальність теми дослідження обумовлена потребами суспільного розвитку, входженням України в Міжнародне освітнє співтовариство, впровадженням компетентнісної освітньої парадигми й особистісною значимістю для сучасних школярів.

Сучасне реформування системи освіти пов'язано зі змінами, що відбуваються в нашому суспільстві в усіх галузях життя. Входження України у світовий освітній простір обумовлює підготовку фахівців високого рівня, різнобічно підготовлених, з високорозвиненим інтелектом, здатних аналізувати випадкові фактори, оцінювати наявні відомості, прогнозувати розвиток ситуації, робити висновки та приймати ефективні рішення при розв'язуванні різноманітних проблем. Сучасна молода людина об'єктивно змушена бути мобільною, інформованою, критично і творчо мислячою. При цьому зростає роль умінь здобувати і опрацьовувати відомості, одержані з різних джерел, застосовувати їх для індивідуального розвитку і самовдосконалення. Основним завданням шкільної освіти залишається широка загальноосвітня підготовка учнів, що передбачає формування цілісної системи універсальних знань, умінь, навичок, а також досвіду самостійної діяльності, тобто основних компетентностей, що визначають сучасну якість освіти.

У зв'язку з зазначеним навчальний процес у загальноосвітніх навчальних закладах потрібно організовувати таким чином, щоб випускники вміли не тільки адаптуватися до соціальних явищ, умов життя і діяльності в мінливому сьогоденні, але й могли орієнтуватися в різноманітті професій, були здатні до творчої діяльності. Для цього сучасним школярам потрібні не тільки різноманітні знання, але й уміння, що надають можливості застосовувати набуті знання в процесі самостійної пізнавально-дослідницької діяльності.

Уміння є основою майстерності і творчості людини. „Уміння – це майстерність, це здатність використовувати наявні знання для досягнення своїх цілей; уміння – це здатність методично працювати”, – зазначав Д. Пойа [209]. Без оволодіння уміннями людина не зможе успішно діяти, досягати поставленої мети. А сформовані на ранніх етапах навчання дослідницькі уміння є міцним фундаментом формування знань, умінь і професійних навичок майбутніх кваліфікованих фахівців.

Різні аспекти розв'язування проблеми формування дослідницьких умінь учнів представлені у наукових дослідженнях В. І. Андрєєва [7], [8], О. І. Анісімової [9], С. І. Бризгалової [33], [34], В. К. Буряка [37], А. Г. Іодко [104], І. А. Кравцової [127], Н. Г. Недодатко [181], І. І. Процик [220], С. А. Ракова [225], О. В. Резіної [230] та ін. Проблеми формування навчально-дослідницьких умінь учнів в процесі навчання математики присвячені дослідження А. Ю. Карлашук [110] (на прикладі задач з параметрами), Г. М. Морозова [173] (при застосуванні математики), В. Л. Пестерової [198] та Г. В. Токмазова [252] – [254] (на прикладі задач з алгебри), М. Б. Раджабова [224] (на прикладі задач з геометрії).

Попри важливе наукове і практичне значення згаданих досліджень окремі аспекти проблеми, що розглядається, можуть мати подальше розв'язування. Зокрема, потребують уточнення поняття навчально-дослідницької діяльності учнів, структурні компоненти та система оцінювання навчально-дослідницьких умінь учнів, визначення змісту, методів, засобів і форм організації навчання, що сприяють формуванню навчально-дослідницьких умінь учнів в процесі навчання математики.

Формування дослідницьких умінь потребує певного досвіду в проведенні експериментів, опрацюванні результатів спостережень, дослідів. І стохастична змістова лінія, що закладена в Державному стандарті базової і повної середньої освіти [80], безумовно, придатна для цих цілей у навчанні математики. Вивчення елементів стохастики сприяє усвідомленню того, що багато законів природи і суспільства мають імовірнісний характер, що багато реальних явищ і процесів описуються ймовірнісними моделями, що досліджуються за допомогою методів математики та комп'ютерної техніки.

Саме тому актуальним є удосконалення методики навчання елементів стохастики у напрямі орієнтації на формування навчально-дослідницьких умінь учнів.

Усвідомлення об'єктивної необхідності розв'язування проблеми, що аналізується, обумовили вибір теми дослідження: „Формування навчально-дослідницьких умінь учнів у процесі навчання елементів стохастики”.

Дисертаційне дослідження пов'язане з реалізацією основних положень Законів України „Про освіту” та „Про загальну середню освіту”, Національної доктрини розвитку освіти України у XXI столітті, Концепції математичної освіти 12-річної школи, Концепції програми інформатизації загальноосвітніх навчальних закладів, Концепції профільного навчання в старшій школі.

Обраний напрям дослідження відповідає темі науково-дослідної роботи кафедри математики, методики викладання математики Бердянського державного педагогічного університету „Добір і використання математичних моделей в процесі навчання математики у загальноосвітній і вищій школах”.

Тема дисертаційного дослідження затверджена на засіданні вченої ради Бердянського державного педагогічного університету (протокол №3 від 01.04.2003 р.) та узгоджена в Раді з координації наукових досліджень у галузі педагогіки та психології АПН України (протокол №2 від 27.02.2007 р.).

Об'єктом дослідження є процес навчання математики учнів загальноосвітніх навчальних закладів.

Предмет дослідження – методична система формування навчально-дослідницьких умінь учнів у процесі навчання елементів стохастики.

Мета дослідження полягала у розробці, теоретичному обґрунтуванні та експериментальній перевірці методичної системи формування навчально-дослідницьких умінь учнів.

Відповідно до мети дослідження поставлені такі **завдання**:

1. На основі аналізу психолого-педагогічної, науково-методичної та навчальної літератури з проблеми дослідження:

–з'ясувати особливості навчально-дослідницької діяльності учнів;
–виявити структурні компоненти навчально-дослідницьких умінь;
–визначити роль задач імовірнісного характеру в процесі розвитку дослідницьких умінь учнів.

2.Розробити методичну систему формування навчально-дослідницьких умінь учнів у процесі навчання учнів загальноосвітніх навчальних закладів елементів стохастики на основі статистичного підходу.

3.Експериментально перевірити ефективність створеної методичної системи формування навчально-дослідницьких умінь учнів у процесі навчання елементів стохастики.

Методологічну основу дослідження складала: теорія пізнання, діяльнісний, системний і комплексний підхід у формуванні особистості, дидактичні і психологічні принципи розвивального навчання (А. М. Алексюк [6], Л. С. Виготський [54], В. В. Давидов [75], З. І. Калмикова [107], Г. С. Костюк [126], С. Л. Рубінштейн [233], Н. Ф. Тализіна [249], [250] Д. Б. Ельконін [284], І. С. Якиманська [286] та ін.), проблемного навчання (І. Я. Лернер [141], [142], О. М. Матюшкін [161], [162], М. І. Махмутов [163], [164], М. М. Скаткін [238]), евристика як методологія дослідження, спеціальні розділи евристики, роботи з евристики, розв'язування задач і навчання розв'язування задач (В. І. Андрєєв [7], [8], В. Г. Болтянський [24], [25], Ю. Н. Кулюткін [134], Д. Пойа [208], [209], [210], О. І. Скафа [239], А. В. Хуторської [271] та ін.); положення про роль задач і вправ у формуванні знань і вмінь (Г. П. Бєвз [18], Ю. М. Колягін [120], Т. М. Хмара [269], М. І. Шкіль [278] та ін.), концепція навчання математики (М. І. Бурда [35], З. І. Слєпкань [241], [242] та ін.); концепції гуманізації та демократизації навчально-виховного процесу в умовах національного відродження України; Закони України „Про освіту”, „Про загальну середню освіту”; Державна національна програма „Освіта” („Україна ХХІ століття”); концепція загальної середньої освіти (12-річна школа); концепція профільного навчання у старшій школі; Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти; роботи інформатизації навчального процесу та впровадження комп'ютерно-орієнтованих систем навчання математики (В. Г. Болтянський [24], [25], А. П. Єршов [87], М. І. Жалдак [89] – [92], [94] – [97], В. І. Клочко [96], В. М. Монахов [171], Г. О. Михалін [89], С. А. Раков [225], Ю. В. Триус [94], [255] та ін.), статистичні методи опрацювання педагогічного експерименту (М. І. Грабар [68], К. А. Краснянська [68], О. А. Сидоренко [237] та ін.).

Для досягнення поставленої мети дослідження використовувалися **методи педагогічного дослідження:**

теоретичні – аналіз філософської, психолого-педагогічної та науково-методичної літератури з проблеми дослідження; аналіз освітніх стандартів, програм з математики, програм факультативних курсів та курсів за вибором з математики для загальноосвітніх навчальних закладів різного профілю, підручників і навчальних посібників, педагогічних програмних засобів, монографій, дисертаційних досліджень, статей і матеріалів науково-

методичних конференцій з проблеми дослідження, порівняння, синтез здобутих фактів, узагальнення окремих понять і висновків дали змогу систематизувати теоретичні матеріали, уточнити суть поняття „навчально-дослідницькі уміння” та „навчально-дослідницька діяльність учнів”, конкретизувати їх зміст, виявити педагогічні умови розв’язання проблеми формування навчально-дослідницьких умінь учнів у процесі навчання елементів стохастики; результати педагогічного експерименту опрацьовувалися за допомогою математичних методів;

емпіричні – цілеспрямоване педагогічне спостереження, опитування, анкетування, тестування учнів, аналіз усних відповідей та письмових робіт учнів, бесіди з вчителями й учнями щодо проблеми дослідження, аналіз досвіду роботи вчителів з впровадження інформаційно-комунікаційних технологій навчання математики дали змогу систематизувати отримані дані та зробити висновки про стан проблеми формування навчально-дослідницьких умінь учнів у процесі навчання елементів стохастики; цілеспрямований педагогічний експеримент (констатуючий, пошуковий та формуючий) використовувався з метою апробації запропонованої методичної системи формування навчально-дослідницьких умінь учнів і впровадження положень дисертації в практику навчання учнів елементів стохастики; якісний і кількісний аналіз даних, що були отримані в ході експерименту.

Наукова новизна результатів дослідження визначаються тим, що:

–вперше розроблено задачі з практичним змістом, що відповідають статистичному підходу до формування поняття ймовірності, враховують вікові особливості учнів і спрямовані на формування навчально-дослідницьких умінь учнів;

–уточнено поняття „навчально-дослідницькі уміння” та „навчально-дослідницька діяльність” учнів;

–подальшого розвитку набули структурні компоненти навчально-дослідницьких умінь учнів у галузі шкільного курсу основ стохастики;

–запропоновано систему оцінювання сформованості навчально-дослідницьких умінь учнів в освітній галузі „Математика”, і зокрема стохастики, що відповідає сучасній 12-бальній шкалі оцінювання навчальних досягнень учнів;

–визначено шляхи формування навчально-дослідницьких умінь учнів у процесі навчання елементів стохастики;

–впроваджено методичну систему формування навчально-дослідницьких умінь у процес навчання учнів елементів стохастики на факультативних заняттях.

Практичне значення дослідження полягає у розробці програми та змісту факультативного курсу для учнів „Елементи стохастики”; методичного забезпечення спецкурсу „Елементи стохастики” для студентів (майбутніх вчителів математики), що містить навчальну програму, методичні матеріали до виконання лабораторних і самостійних робіт, завдання для контролю знань.

Впровадження результатів дисертаційного дослідження у педагогічну практику підтверджується довідками багатoproфільної гімназії №2 м. Бердянська (довідка № 65 від 03.04.2008 р.), відділу освіти Бердянської міської ради Запорізької області (довідка № 862 від 06.06.2008 р.), Куйбишевської спеціалізованої загальноосвітньої школи I-III ступенів «Інтелект» (довідка № 55/2-04 від 28.03.2008 р.), відділу освіти Приморської районної державної адміністрації Запорізької області (довідка № 848 від 16.09.2008 р.), Бердянської філії Запорізького обласного інституту післядипломної педагогічної освіти (довідка № 1 від 28.03.2008 р.), Бердянського державного педагогічного університету (довідка № 57/1526-08 від 02.09.2008 р.).

Особистий внесок здобувача полягає в уточненні поняття навчально-дослідницької діяльності учнів; в розширенні структурних компонентів навчально-дослідницьких умінь учнів; доповненні цілей навчання математики метою формування навчально-дослідницьких умінь учнів; доповненні змісту навчання елементів стохастичності – задачами з практичним змістом, що відповідають статистичному підходу до формування поняття ймовірності та спрямовані на формування навчально-дослідницьких умінь учнів; впровадженні до навчального процесу навчальних статистичних досліджень учнів; виявленні шляхів формування навчально-дослідницьких умінь учнів у процесі навчання елементів стохастичності.

Апробація результатів дослідження. Результати дослідження доповідалися, обговорювалися й були схвалені на Міжнародних науково-практичних конференціях: „Засоби реалізації сучасних технологій навчання” (Кіровоград, 2005), „Математична освіта в Україні: минуле, сьогодення, майбутнє” (Київ, 2007); Всеукраїнських науково-практичних конференціях: „Навчання, виховання та розвиток” (Бердянськ, 2004), „Безперервна фізико-математична освіта: проблеми, пошуки, перспективи” (Бердянськ, 2007); Всеукраїнському семінарі з проблем методики навчання математики в Національному педагогічному університеті імені М.П. Драгоманова (Київ, 2008); семінарах кафедри математики, методики викладання математики Бердянського державного педагогічного університету, методичних семінарах-практикумах для вчителів.

Публікації. Основні положення та результати дослідження опубліковані в 11 роботах. З них 6 статей у фахових збірниках наукових праць [143], [147], [149] – [151], [153], 3 – матеріали та тези конференцій [146], [148], [152], 1 практикум „Елементи стохастичності” для студентів вищих навчальних педагогічних закладів освіти [144] і 1 стаття в колективній монографії [145].

РОЗДІЛ І
ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ
ФОРМУВАННЯ НАВЧАЛЬНО-ДОСЛІДНИЦЬКИХ УМІНЬ УЧНІВ
ЗАГАЛЬНООСВІТНІХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ

1.1. Проблема формування навчально-дослідницьких умінь учнів у психолого-педагогічній літературі

Серед стратегічних завдань реформування змісту освіти особливе місце посідає необхідність створення умов для розвитку особистості і творчої самореалізації кожного громадянина України, виховання покоління людей, здатних ефективно працювати і навчатися протягом усього життя [180].

Сьогодні виникає потреба не тільки в обізнаних і вмілих людях, але й у такій категорії людей, що здатні бачити, формулювати й розв'язувати самостійно нові проблеми. Зростає роль умінь здобувати і опрацьовувати відомості, одержані з різних джерел, застосовувати їх для постановки і розв'язування важливих практичних проблем.

1.1.1. Поняття навчально-дослідницьких умінь. У сучасній науковій, психологічній та педагогічній літературі зустрічаються різні тлумачення поняття „уміння”:

- спосіб виконання дій на основі надбаних знань та навичок [84], [246];
- засвоєний суб'єктом спосіб виконання дій, що забезпечується сукупністю отриманих знань та навичок та можливістю виконання дій не тільки у звичних, але й у змінених умовах [64];
- здобута на основі досвіду, знань здатність належно робити що-небудь [185];
- здатність виконувати дії відповідно до мети і умов, у яких доводиться діяти [196];
- це засвоєна на знаннях і навичках властивість людини успішно досягати свідомо поставленої мети діяльності в мінливих умовах її протікання [168];
- свідоме використання системи навичок та знань про них у діяльності в цілому [19];
- єдність знання про спосіб діяльності та досвід його реалізації [141];
- система дій, пов'язаних між собою визначеними відношеннями, які націлені на розв'язування завдань [244];
- заснована на знаннях і навичках готовність людини успішно виконувати певну діяльність [126];
- сукупність знань і гнучких навичок, які забезпечують можливість успішного виконання певної діяльності у визначених умовах [202];
- успішне виконання якої-небудь дії або складної діяльності із застосуванням правильних прийомів, способів [129].

На думку одних авторів [73], [136], уміння виникають на основі набутої системи навичок, інші [139], [268], [277], навпаки, вважають навичку системою умінь, а уміння – чимось елементарнішим, ніж навички; деякі

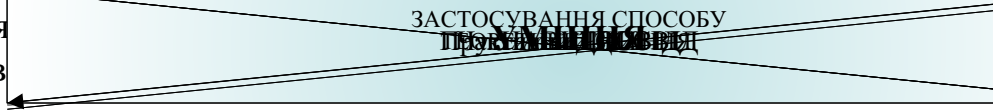
педагоги [10], [196] розглядають навички як удосконалені внаслідок вправ і доведені до автоматизму вміння. Ряд науковців [126], [191], [209] стверджує, що навички є компонентами уміння.

Одні автори (В. П. Безпалько [20], В. В. Давидов [75], Є. М. Кабанова-Меллер [106], З. А. Решетова [228], С. Л. Рубінштейн [233]) вважають первинним уміння, а навичку розглядають як автоматизоване уміння. Інші (А. В. Барабанщиков [17], Л. Б. Ітельсон [105], Б. Ф. Ломов [154], О. М. Новіков [187], В. О. Онищук [191]) зазначають, що умінням завжди передують накопичення знань та спеціальне навчання. При цьому стверджують, що складне узагальнене вміння, яке є складною системою дій, не автоматизується і не переходить в навичку. М. А. Риков [231] визначає уміння як готовність діяти розумно та свідомо. В. І. Андрєєв [8] постановку питання, що первинне – уміння чи навичка – вважає некоректною.

Загальною ознакою умінь та навичок є те, що вони характеризують готовність учня виконувати дії. Ця готовність здобувається на основі засвоєння способів навчально-пізнавальної діяльності.

Розрізняють елементарні та складні уміння. Елементарне уміння – знання про спосіб виконання дії та первинне їх застосування на практиці. В процесі багаторазового повторення ці знання перетворюються в навичку, яка може стати складовою різних умінь [64], [191], [126]. На думку науковців, „загальне вміння включає ряд часткових умінь. Окремі дії, повторюючись і автоматизуючись, стають операціями. У людини виробляються навички їх виконання, що теж є складовими елементами її вміння діяти, її майстерності в усякій роботі” [126, с. 318]. Уміння формуються за допомогою вправ у мінливих умовах, тобто в процесі перенесення способів дій в нову учбову ситуацію. При удосконаленні умінь вони не автоматизуються. Отже, дії, що здійснюються за допомогою умінь, завжди усвідомлені

Опанування будь-яких навичок складається з декілька. Сукупність навичок є основою уміння.



Часто науковці [126], [283] уміння називають знаннями у дії. Уміння містить у собі цілий комплекс знань, навичок та досвід – чуттєвий та практичний. Зв'язки між знаннями, навичками та уміннями за В. О. Онищуком [191] подано на рис.1.1.

Рис.1.1. Зв'язки між знаннями, навичками та уміннями

Істотною особливістю умінь є їх узагальненість, внаслідок чого вони з успіхом реалізуються у мінливих і різноманітних ситуаціях. У найширшому розумінні уміння – це засвоєна готовність свідомо розв'язати ту чи іншу задачу. Уміння передбачає добру орієнтацію в нових умовах та включає в себе елементи творчості.

В українській психолого-педагогічній літературі зустрічаємо два орфографічно різні, але лексично рівноправні терміни „уміння” та „вміння”. Корінь слова „уміння” – „ум”. Діяти уміло – означає діяти з розумом, самостійно планувати весь хід роботи, знаходити найбільш раціональні способи розв’язування поставлених задач. На думку Г. С. Костюка [126], існує стільки умінь, скільки є різних конкретних видів діяльності людини.

Особливу роль у формуванні творчої особистості відіграють навчально-дослідницькі уміння, які В. І. Андреев [8], А. Г. Іодко [104], Н. Г. Недодат-ко [181], Г. В. Токмазов [254], В. В. Успенський [258], [259] виділяють в окрему групу. Необхідність виділити дослідницькі уміння в окрему групу є об’єктивним відображенням процесу зближення науки та виробництва і зростанням ролі наукового підходу до будь-якої діяльності, навіть якщо вона не носить наукового характеру. Для розвитку творчого мислення, розумових здібностей і підвищення якості знань найкращим способом є самостійне здобування знань на основі пошуку і дослідження.

Ідея введення елементів дослідження в навчальний процес належить гуманісту Франсуа Рабле (1494 – 1553), який на перше місце ставив здобування знань власним досвідом. Дослідництво, як засіб розвитку самостійності учнів, розглядалось Мішелем де Монтенем (1533 – 1592), Джоном Локком (1632 – 1704), Жан Жаком Руссо (1712 – 1778) [6, с. 95].

Я. А. Коменський (1592 – 1671) писав: „Усіх нас, що вийшли зі шкіл та університетів, торкнулася тільки тінь ученості ... Квітучі роки юності пройшли у вивченні дрібниць, людей треба вчити ..., щоб вони досліджували та пізнавали самі предмети, а не пам’ятали тільки чужі спостереження та пояснення” [121]. М. І. Новіков (1744 – 1818) вказував, що діти повинні „поступово набувати здатності досліджувати й пізнавати те, що хочуть знати” [86, с. 82]. К. М. Вентцель (1857 – 1947) зазначав, що „дітей треба ставити в такі умови, щоб вони самостійно творили та ставали при цьому самостійними дослідниками” [86, с. 82].

У 20-х роках ХХ століття було висунуто ідею про широке запровадження дослідництва в практику навчання. Значний внесок у розробку цієї теорії внесли Б. В. Всесвятський [53], Б. Є. Райков [223], В. Ю. Ульяновський [223], К. П. Ягодовський [223], [285]. Педагоги О. Ф. Музиченко, Я. Ф. Чепіга, Л. Д. Синицький пропонували так організувати навчальний процес, щоб „учень був поставлений у становище дослідника, творця, щоб він сам здобував знання” [6, с. 96].

Під дослідженням розуміють процес вироблення нових знань, один із видів пізнавальної діяльності. Досліджувати – значить піддавати що-небудь ретельному науковому розгляду з метою пізнання. В. Оконь [189] розглядає дослідження як наполегливі та об’єктивні пошуки розв’язання проблеми, що спираються на перевірені та узагальнені факти.

У „Глумачному словнику української мови” знаходимо: „дослідно” – перша частина складних слів, що відповідає слову „дослідний”. Дослідний – це:

1. Пов'язаний з науковим дослідженням;
2. Призначений для ведення дослідів; дослідний, дослідницький [185].

Аналіз літератури показав, що частину „дослідна” складного слова науковці застосовують як на першому, так і на другому місці.

Під *навчально-дослідницькими* вміннями учнів розуміють:

–*уміння застосовувати прийом відповідного наукового методу пізнання в умовах вирішення навчальної проблеми, в процесі виконання навчально-дослідницького завдання [8];*

–*систему інтелектуальних, практичних умінь і навичок навчальної праці, необхідних для виконання дослідження або його частини [104];*

–*здатність учня виконувати розумові та практичні дії, що відповідають науково-дослідницькій діяльності і підпорядковуються логіці наукового дослідження, на основі знань та умінь, які набуваються в процесі вивчення основ наук [260];*

–*складне психічне утворення (синтез інтелектуальних і практичних дій, засвоєних і закріплених способів діяльності), що лежить в основі готовності школярів до пізнавального пошуку [181];*

–*властивість особистості, що характеризує здатність до пошуково-перетворюючої діяльності в освітньому процесі, а також здатність здобувати нові знання, уміння й навички, що сприяють розвитку особистості [16].*

Огляд і аналіз основних досліджень, в яких сучасні науковці розглядають формування навчально-дослідницьких умінь учнів, виявляє наявність різноманітних поглядів на поняття навчально-дослідницьких умінь учнів і надає можливість зробити висновки, що *навчально-дослідницькі вміння:*

–*можна віднести до загальнонавчальних умінь учнів (стосуються всіх навчальних предметів);*

–*здатність учнів виконувати систему дій практичного та розумового характеру, що підпорядковуються логіці наукового дослідження і свідомо використовується ними в освітньому процесі для здобування нових знань.*

1.1.2. Навчально-дослідницькі вміння як основа дослідницької діяльності учнів. Уміння формуються в процесі діяльності. З погляду загальної психології, діяльність – це форма активного ставлення до дійсності, внаслідок якої людина встановлює зв'язок із зовнішнім світом. Внаслідок надзвичайної складності й безперервної мінливості *зовнішніх умов* уже на відносно ранніх стадіях історичного розвитку створювалася життєва необхідність у виникненні психічних форм управління пізнанням та пристосуванням живої істоти до навколишнього середовища. Особливе значення при цьому має розвиток орієнтувально-дослідницької діяльності, що полягає в обстеженні навколишнього світу й у формуванні образу ситуації, на основі якого здійснюється орієнтація відповідно до умов, що виникли. У зв'язку з цим М. О. Лазарев [135, с. 102] відзначає, що „людська природа дитини, підлітка, юнака така, що творчість, тобто розбудовча, дослідницька ... діяльність, для підростаючої людини первинна ...”.

На думку В. І. Андрєєва, початок навчально-дослідницької діяльності на основі фізіологічних уявлень здійснюється під дією і завдяки наявності у людини природженого дослідницького рефлексу [8]. Російський фізіолог І. П. Павлов [194, с. 27] у зв'язку з цим писав: „Навряд чи достатньо оцінюється рефлекс, який можна було б назвати дослідницьким рефлексом, або, як я його називаю, рефлекс „що таке”. Цей рефлекс йде надзвичайно далеко, виявляється, нарешті, у тій допитливості, яка створює науку ...”.

Отже, цікавість, прагнення до дослідження закладено природою в живій істоті та розвивається безперервною мінливістю *зовнішніх умов*.

Навчально-дослідницькі уміння формуються в процесі відповідної діяльності, яка організовується педагогом в умовах розвивального навчання як цілісної системи. З терміном „розвивальне навчання” можна не пов'язувати ніяких конкретних систем розвивального навчання й розуміти його як навчальний процес, у якому поряд з формуванням конкретних знань приділяється належна увага процесу інтелектуального розвитку людини та який спрямовано на формування її знань і умінь як цілісної системи.

Аналіз психолого-педагогічних і методичних досліджень показав, що дослідницьку діяльність науковці розглядають як дослідницько-творчу, пошуково-дослідну, навчально-дослідну, науково-пізнавальну, дослідницько-проектну, дослідницьку, науково-дослідну.

В педагогічній літературі дослідницька діяльність учнів називається дослідницькою [41], [51], [104], [188], [253], науково-дослідницькою [9], [65], [138], [272], навчально-дослідницькою [8], [33], [110], [127], [181], пошуково-дослідницькою [1], [193] або експериментально-дослідницькою [243].

Порівнюємо процес праці вченого й учня, їх розумові дії в процесі навчання. Вчений формує предметну ситуацію дослідження спочатку ідеально: усвідомлює невідоме як задачу чи проблему, формулює гіпотезу і добирає засоби дослідження. Учневі предмет розумових дій задається навчальним матеріалом, він його запам'ятовує, щоб відтворити через деякий час на оцінку.

Якщо ж учневі задається предметна ситуація у формі з'єданого відомого і невідомого, тоді його дії відбуваються у формі дослідницького процесу:

- постановка задачі;
- формулювання гіпотези;
- розв'язування задачі.

Уявлення про кінцевий результат процесу – навіть найпростішого руху думки, почуттів, уяви та психомоторної дії – виступає перед ними у формі гіпотези. А те, які засоби будуть вибрані для розв'язування задачі, складають спосіб дій.

Вчений у процесі дослідження (спостереження, експерименту, теоретичного аналізу тощо) уточнює проблеми – визначає межі невідомого, його потужність, перетворює на відоме і описує одержані факти. Учень під час розв'язування задачі спостерігає – відображає процес своїх дій, практичний

«експеримент» над задачею, виявляє узгодженість матеріалізації (гіпотези) з тим, що досягнуто. А це вже теоретичний аналіз [113].

Вчений одержує наукові факти з досліду і потім їх опрацьовує: описує, аналізує – розкриває сутність невідомого, обґрунтовує, інтерпретує його, доводить. Після цього виявляє нові одиниці знань, винайдені у невідомому, і включає їх у теорію, що і розширює межі пізнаного не лише для нього, але й для всіх людей. До речі, одна розв'язана проблема відкриває собою десятки нових проблем, зіткнень із невідомим, непізнаним. Учень внаслідок розв'язаної задачі (розумової чи психомоторної) одержує почуттєвий і смисловий зліпок, еталон, мірку – суб'єктивний спосіб дій над невідомим і збагачує цим свій досвід. Учень розширює межі свого невідомого і так, як вчений, веде постійний наступ на невідоме [112].

Гіпотеза про нове, що передбачалося, порівнюється з набутиим у дії, потім перевіряється і обґрунтовується наступною дією, якістю й оригінальністю розв'язку задачі.

Отже, процес праці вченого й учня, який розв'язує навчальні задачі й проблеми (знаходить способи розв'язування задач), ґрунтується на подібних розумових операціях. Тут має місце не часткова подібність між розумовими, почуттєвими та уявними діями – вони натуральні, живі, активні. Відмінність між ними полягає лише в тому, що вони виконуються над задачами різної складності, використовуються неоднакові форми виразу відображеної дійсності. Учений переважно працює на матеріалі знакових систем (понять, категорій, теорій) і, щоб глибше і точніше побачити явища, що досліджуються, використовує різні устаткування та прилади. Учень же сидить, так би мовити, на „голодному пайку” в умовах традиційних методик навчання – запам'ятовує знакові системи лише абстрактно, а практичні роботи з матеріалами, речовиною складають незначну частину навчального часу. Якщо чутливість сенсорних систем ученого підсилюється приладами, то учень у своїй роботі користується переважно незброєними, природними сенсорними системами і разом із ними мисленням і уявою – живими засобами своєї праці [112], [113].

Завдяки використанню засобів відбувається взаємопроникнення знання і незнання, коли друге перетворюється у перше, яке в свою чергу породжує нове знання, і так далі. Щоб вибрати методи та засоби, за допомогою яких дістають нові знання чи створюють нові предмети, необхідно мати гіпотетичні знання про ці властивості предметів або про невідомі предмети за відомими їх властивостями.

Вчений для цього створює гіпотезу – наукове припущення про природу речей і явищ, про закономірності, що їх зумовлюють. В цьому процесі гіпотеза є засобом, за допомогою якого людина виходить у майбутнє і передбачає його як уже здійснений процес, зроблений предмет тощо.

Підтвердження чи спростування гіпотези передбачає проведення досліджень за такими напрямками: пошук невідомих властивостей (процесів, станів, величин) у відомих предметах; пошук невідомих предметів (процесів, станів, величин) за відомими властивостями.

Але іноді вчений працює і тоді, коли не відомі ні властивості, притаманні предметам, ні предмети, у яких треба знайти такі властивості. У такому разі на допомогу приходять чуттєва вірогідність – засіб праці людини – як упевненість в існуванні предмета чи властивості. Для вченого такий стан – рідкісний, а для учня – щоденний [52].

„Коли говорять, – писав психолог С. Л. Рубінштейн, – що людина як індивід не відкриває, а лише засвоює вже здобуті людством знання ..., то це, власне, означає лише те, що вона не відкриває їх для людства, а особисто для себе повинна все-таки відкрити або навіть „перевідкрити”. Людина досконало володіє лише тим, що сама здобуває власною працею” [233].

Окремі науковці та дослідники [18], [127], [181], [193] наголошують на неправомірності та недоцільності використання терміну „науковість” стосовно учнівських досліджень, оскільки вони мають принципові відмінності від справжнього наукового дослідження. „У школі досліджують такі проблеми, розв’язки яких спеціалістам давно відомі. Тому діяльність школярів – навчально-дослідницька”, – зазначає Г. П. Бевз [18, с. 14].

Інший підхід до використання відповідної термінології стосовно учнівських досліджень, запропонований О. І. Анісімовою [9], базується на характері педагогічної взаємодії між учнем та педагогом: якщо педагог знає шлях пошуку, пропонує учневі пройти цим шляхом, передбачаючи чи напевне знаючи очікуваний результат, то така діяльність називається навчально-пізнавальною; якщо педагог знає шлях проведення дослідження, але не знає кінцевого результату, пропонуючи дитині самостійно розв’язати проблему чи комплекс проблем, то така діяльність може вважатися навчально-дослідницькою; якщо педагог володіє методикою та різноманітними методами наукового дослідження й ознайомлює з ними учня, йому та учневі притаманні наукове передбачення та наукова інтуїція, однак, обидва не знають ні шляху пошуку, ні кінцевого результату дослідження, то така діяльність може називатися науково-дослідницькою.

З огляду на шкільну практику проведення навчальних досліджень, практичне застосування сучасних технологій, форм, методів навчання в закладах середньої освіти та досвід роботи з учнями, *можна вважати*, що в сучасних умовах навчання (особливо математики) навчально-дослідницька діяльність школярів переважає над науково-дослідницькою. Тому потрібно з’ясувати особливості навчально-дослідницької діяльності учнів і визначитися з поняттям навчально-дослідницької діяльності учнів.

Навчально-дослідницька діяльність учнів є різновидом навчальної діяльності з одного боку та складовою дослідницької діяльності з іншого. Тому доцільно розглянути особливості кожної з цих діяльностей.

Важливий дидактичний принцип єдності навчання, виховання і розвитку характеризує навчальну діяльність школярів як систему, що не обмежується розумовими і практичними діями, а передбачає активне ставлення учнів до навчального матеріалу та включення їх у взаємостосунки з вчителями й учнями, під час яких формуються особистісні якості школяра. Як конкретний

вид діяльності людини навчальна діяльність учнів характеризується всіма ознаками пізнавальної діяльності і являє собою систему розумових і практичних дій, здійснення яких забезпечує засвоєння знань, оволодіння вміннями та навичками застосування їх для вирішення різних завдань [111].

Під навчальною діяльністю психологи розуміють діяльність учнів, спрямовану на здобування теоретичних знань про предмет вивчення та загальних прийомів розв'язування задач з цього предмету і, отже, на розвиток школярів і формування їхньої особистості. А. О. Кірсанов [111, с. 112] наголошує, що „навчальна діяльність – це:

- розумові і практичні дії учня, опосередковані педагогічним впливом, здійснення яких забезпечує засвоєння наукових понять, способів дій, особистий розвиток;

- форма активного ставлення учнів до навчального матеріалу (до предметів, явищ і т. п., що вивчаються);

- форма включення учнів у систему суспільних стосунків, у колективну діяльність, під час якої засвоюється багатоманітність специфічних рис особистості”.

Навчальна діяльність включає взаємозв'язані компоненти:

- мотиваційний (інтереси, потреби, мотиви);

- процесуально-операційний (форми і стиль мислення, способи та орієнтири діяльності);

- змістовий (формально-логічні та оперативні знання);

- прогностичний (прийняття рішення, складання програми діяльності, передбачення результату);

- корекційний (оцінювання).

„Важливою особливістю навчальної діяльності є те, що вона здійснюється в рамках діяльності вчителя й виступає як об'єкт управління”, – підкреслює О. І. Скафа [239, с. 106]. Д. Б. Ельконін [284] вважає, що навчальна діяльність спрямована на самозміну учня.

Той факт, що навчальна діяльність спрямована на оволодіння різними видами діяльностями, відзначають І. Я. Лернер [141], О. М. Новіков [186] та ін. Особливо це підкреслює О. М. Новіков: „Навчальна діяльність спрямована на освоєння інших видів людської діяльності – практичної, пізнавальної, ціннісно-орієнтувальної, Тільки людина діяльна, людина уміла є в повному значенні людиною. Тому вміння, що визначаються як здатності виконувати ту або іншу діяльність (і дію), є вищою, кінцевою метою навчальної діяльності. Навчальна діяльність завжди інноваційна, навіть у таких видах творчої діяльності як діяльність вченого, діяльність художника або артиста, діяльність педагога завжди є безліч рутинних компонентів, що повторюються, які давно освоєні й не вимагають особливих зусиль для їхнього відтворення. Діяльність же учня постійно ... спрямована на освоєння нового для нього досвіду. Парадоксальність навчальної діяльності полягає в тім, що хоча вона постійно інноваційна, але цілі її найчастіше задаються ззовні – навчальним планом, програмою, учителем тощо” [186, с. 35].

Дослідницька ж діяльність спрямована на вироблення принципово нових знань про природу, суспільство і процеси мислення. Інструментом вироблення знань є мислення людини. Воно, як і все навколо, підлягає дії певних законів. Але ці закони „приписують мисленню” лише найзагальніші „правила поведінки”, не детермінуючи процес отримання такого результату, який не може бути визначений заздалегідь. Інакше кажучи, він не може бути відомим у всіх деталях. У цьому розумінні процес отримання результатів в науці необхідно вважати творчим. І шлях, що був здоланий науковцем у процесі вирішення тієї чи іншої проблеми, вже у певному сенсі є самим результатом творчого пошуку [272], [281].

У навчальній діяльності, на відміну від діяльності дослідницької, людина починає не з розгляду чуттєво-конкретного різноманіття дійсності, а із уже виділеної іншими дослідниками загальної внутрішньої основи цього різноманіття. Навчальна діяльність школярів будується, згідно з В. В. Давидовим [75], у відповідності зі способом подання теоретичних знань, зі способом сходження від абстрактного до конкретного. Мислення учнів у процесі навчальної діяльності має дещо спільне з мисленням учених, що подають результати своїх досліджень за допомогою змістовних абстракцій, узагальнень і теоретичних понять, що функціонують у процесі сходження від абстрактного до конкретного [245].

В. І. Андрєєв вважає, що навчально-дослідницька діяльність – це „ діяльність учнів, що організовується педагогом з використанням переважно дидактичних засобів опосередкованого й перспективного управління, спрямована на пошук пояснення й доведення закономірних зв'язків і відношень експериментально спостережуваних або теоретично аналізованих фактів, явищ, процесів, у якій домінує самостійне застосування прийомів наукових методів пізнання й у результаті якої учні активно оволодівають знаннями, розвивають свої дослідницькі вміння й здібності” [8, с. 37]. При цьому метою навчально-дослідницької діяльності є пошук пояснення й обґрунтування певних фактів, явищ, закономірних зв'язків і відносин, пошук нового способу або засобу діяльності, а результатом – суб'єктивне відкриття.

Для з'ясування значеннєвих нюансів слова „пошук” звернемося до тлумачного словника української мови. Пошук – це:

1. Спеціально організоване розшукування чого-небудь;
2. Творча робота, спрямована на відкриття нового в науці [185, с. 652].

Таке тлумачення „пошуку” більш відповідає дослідницькій діяльності. А поняття „дослідницька діяльність” ширше, ніж поняття „навчально-дослідницька діяльність”.

Навчально-дослідницьку діяльність Н. Г. Недодатко [181] визначає як вищу форму самостійної пізнавальної діяльності учнів.

На думку науковців, поняття „пізнавальна діяльність” більш широке, ніж поняття „навчальна діяльність” [239]. Оскільки пізнавальна діяльність не обмежується рамками навчального процесу.

Під самостійною ж діяльністю учнів розуміють навчальну діяльність, що здійснюється учнями на навчальних заняттях або вдома, частіше за завданням вчителя, під його керівництвом, однак без його безпосередньої участі. Роль вчителя в організації керівництва самостійною роботою полягає у формулюванні і роз'ясненні завдання, інструктажі, спостереженні за роботою, відповіді на запитання учнів, коригуванні роботи, перевірці та аналізі результатів.

Навчально-дослідницька діяльність розглядається А. Ю. Карлащук як діяльність учнів, що організовується педагогом із використанням дидактичних засобів, спрямована на виконання учбових дослідницьких завдань, в якій домінує самостійне застосування прийомів наукових методів пізнання і внаслідок якої учні активно опановують знаннями, розвивають свої дослідницькі вміння [110].

Але якщо учень бачить мету своєї діяльності в виконанні завдання, а не в оволодінні загальними прийомами розв'язування задач, в формуванні відповідних умінь, то можна вважати, що навчальною діяльністю він володіє не на достатньому рівні.

„Дослідницька діяльність учня проявляється в певній ситуації, – вважає В. Оконь, – й змушує його ставити собі питання-проблеми, формулювати гіпотези й перевіряти їх у ході розумових і практичних операцій” [189, с. 222].

Однак, в усіх випадках дослідницька діяльність учнів має базуватися на використанні сукупності апробованих науковим співтовариством засобів, до яких, зокрема, належать [14]:

- раніше здобуті наукові знання, впорядковані за допомогою системи наукових понять;
- відповідні методи одержання відомостей про об'єкти дослідження (передусім різні види спостережень і експериментів);
- відповідні певній системі логічних норм методи опрацювання цих відомостей.

Аналіз та узагальнення наведених вище тлумачень поняття навчально-дослідницької діяльності учнів дають змогу розглядати навчально-дослідницьку діяльність як *діяльність учнів, що організовується вчителем з використанням різноманітних форм організації навчання та дидактичних засобів, яка спрямована на виявлення й доведення закономірних зв'язків і відношень теоретично аналізованих або експериментально спостережуваних фактів, явищ, процесів; у якій домінує самостійне свідоме застосування прийомів наукових методів пізнання і у результаті якої учні активно здобувають знання, розвивають свої дослідницькі вміння й здібності, при цьому результатом навчально-дослідницької діяльності є інтелектуальний продукт, пов'язаний із встановленням істини в результаті процедури процесу дослідження.*

Для педагогічної теорії і практики принципово важливою є також класифікація діяльності за способами досягнення прогнозованого результату [69], [70], [87], [140], [167], [184], [221], [249], [286]. Розглядаючи процес

навчання як діяльність, психологи виділяють три її види: репродуктивну, продуктивну і творчу. При цьому репродуктивна діяльність є процесом повторення попереднього досвіду і не несе нового смислового навантаження. Продуктивна діяльність виконується на основі аналогії з використанням засвоєних раніше методів діяльності у нових умовах. Основною відмінністю продуктивної діяльності від репродуктивної є те, що в процесі першої формуються нові знання, здобувається досвід реалізації способів діяльності. Творча діяльність базується на двох попередніх, але відрізняється якісно новим інтелектуальним чи матеріальним продуктом, що створюється в умовах невизначеності у відповідних сферах діяльності.

Продуктивна, у тому числі навчально-дослідницька, діяльність відрізняється від репродуктивної тим, що учень самостійно шукає розв'язок нового для нього завдання, а без оволодіння дослідницькими вміннями він не зможе досягти успішного результату. Слід зазначити також, що сформовані навчально-дослідницькі вміння сприяють розширенню пізнавальних інтересів, появі інтересу до власної розумової діяльності. Отже, формування навчально-дослідницьких умінь учнів є досить актуальною та насущною проблемою навчання.

1.2. Структурні компоненти навчально-дослідницьких умінь учнів

Науковці та методисти [63], [133], [187], [231], [257], [265] під загально-навчальними вміннями розуміють систему умінь, що складається з *навчально-організаційних* (формулювати мету і визначати завдання діяльності, раціонально планувати діяльність, створювати сприятливі умови для власної діяльності, режим, гігієна і порядок робочого місця), *навчально-інформаційних* (здійснювати бібліографічний пошук, працювати з електронними джерелами відомостей), *навчально-інтелектуальних* умінь (мотивувати свою діяльність, уважно сприймати відомості, логічно осмислювати навчальний матеріал, виділяючи в ньому головне, раціонально запам'ятовувати, розв'язувати проблемні завдання, самостійно виконувати вправи, здійснювати самоконтроль). Але відомо, що кожне з перелічених умінь складається з більш простих умінь.

Уміння містить у собі знання теоретичних основ дії (поняття, закону, теорії), знання способів виконання дій, їх змісту й послідовності (правила, прийоми), призначення необхідного обладнання (апаратури, приладів, інструментів), навичок поводження з ними, практичний досвід виконання аналогічних дій, елементи творчості [191].

Визначення структури навчально-дослідницьких умінь передбачає окреслення системи дій, що підпорядковуються логіці наукового дослідження, на основі яких формуються навчально-дослідницькі вміння.

В. І. Андрєєв [7], [8] виділяє чотири складові навчально-дослідницьких умінь учнів: операційну, організаційну, технічну, комунікативну. При цьому *операційний компонент* містить у собі вміння: аналізувати та порівнювати; спостерігати й описувати спостережуване явище; формулювати завдання або

уточнювати цілі експерименту; висувати гіпотезу; застосовувати знання при вирішенні експериментального завдання; абстрагувати, використовувати математичну символіку й перетворення; використовувати аналогію; застосовувати індукцію, встановлювати причинно-наслідкові зв'язки; дедуктивні умовиводи.

Організаційний компонент містить у собі уміння: планувати експеримент; раціонально використовувати час і засоби діяльності; самоконтролю.

До *технічного компоненту* належить: добір приладів і матеріалів, необхідних для експерименту; збирання установки, схеми для проведення експерименту; використання навчальної, довідкової або додаткової літератури.

Комунікативний компонент характеризується уміннями та здібностями учнів застосовувати прийоми співробітництва.

С. І. Бризгалова [34] класифікує дослідницькі уміння залежно від логіки наукового дослідження на науково-інформаційні, методологічні, теоретичні, емпіричні, письмово-мовні, комунікативно-мовні.

Д. Г. Левитес [137] до дослідницьких умінь відносить уміння формулювати мету дослідження, встановлювати предмет і об'єкт дослідження, висувати гіпотези, планувати експеримент і його проведення, перевіряти гіпотези, визначати сфери й межі застосування результатів дослідження.

Окремі науковці до дослідницьких умінь відносять: бачення протиріччя, вміння формулювати проблему, ставити мету й завдання дослідження, висувати гіпотезу дослідження, визначати предмет і об'єкт дослідження, вибирати й використовувати методи дослідження, збирати й аналізувати відомості, самостійно планувати діяльність за етапами, перевіряти правильність гіпотез, оцінювати проміжні результати й коригувати свої дії; обґрунтовувати власну точку зору, оцінювати свою діяльність [51], [65].

Інші розглядають дослідницькі уміння як складні уміння, що складаються із трьох основних компонентів: мотиваційного, котрий формується під впливом цілей нової діяльності; змістового, що включає систему знань про дослідницьку діяльність, і операційного, що включає вже наявну в людини систему вмінь і навичок [16], [104], [109].

Під дослідницькими уміннями також розуміють уміння планувати й здійснювати науковий пошук, розробити задум, логіку й програму дослідження, дібрати наукові методи й уміло їх застосувати, організувати й здійснити дослідно-експериментальну роботу, опрацювати, проаналізувати й оформити у вигляді наукового тексту отримані результати, сформулювати висновки й успішно їх захистити перед співтовариством фахівців даної галузі.

І. А. Зимня та Є. А. Шашенкова [103] класифікують дослідницькі вміння залежно від сторін дослідницької діяльності:

– *інтелектуально-дослідницька сторона*: уміння аналізувати, співвідносити й порівнювати факти, явища, концепції, точки зору; уміння бачити проблему, виділяти головне; уміння виділяти суперечності й формулювати проблему; уміння поставити мету, завдання роботи; уміння критично аналізувати повідомлення, давати їм оцінку; аргументувати своє

ставлення до досліджуваного питання; уміння визначати методологічні підходи до дослідження й ін.

– *інформаційно-рецептивна сторона*: уміння спостерігати, збирати й опрацьовувати дані; уміння систематизувати й класифікувати факти і явища; уміння отримувати відомості й здійснювати їх огляд; уміння інтерпретувати відомості; уміння працювати з науковими повідомленнями й ін.

– *продуктивна сторона*: уміння збирати й опрацьовувати дані; уміння проводити експеримент; у певній послідовності виконувати практичну частину дослідження; використовувати різноманітні методи емпіричного і теоретичного дослідження; здійснювати бібліографічний пошук і узагальнювати відомості; описувати хід і результати дослідження; захищати отримані результати в процесі виступу; оформлювати тези, писати статтю; готувати реферат, доповідь, повідомлення, виступати з результатами дослідження й ін.

На думку Н. Г. Недодатко [181], навчально-дослідницьке уміння включає такі компоненти: інтелектуальний, практичний, організаційний, співробітництва.

А. В. Усова та А. А. Бобров [257] головними вважають уміння самостійно набувати знання. До них, окрім умінь працювати з літературою, проводити спостереження, відносяться і уміння самостійно моделювати і висувати гіпотези, ставити експеримент і на його основі отримувати нові знання, уміння пояснювати явища та факти, які спостерігаємо, використовуючи наявні теоретичні знання.

Отже, як видно, серед науковців немає єдиної думки про структуру навчально-дослідницьких умінь учнів. Проведений аналіз тлумачень структури навчально-дослідницьких умінь говорить про різний зміст, що вкладають автори різних галузей знань у дане поняття. При цьому спільним і безперечним є те, що у всіх випадках навчально-дослідницькі вміння мають відповідати основним узагальненим етапам дослідницької діяльності.

Зауважимо також, що опрацювання статистичних даних на теперішньому етапі розвитку науки потребує уміння володіти сучасними інструментальними засобами (математичними та статистичними пакетами) дослідження. Основи таких умінь мають формуватися в школі. Тому в структурі навчально-дослідницьких умінь учнів слід виділити технічний компонент, що передбачатиме уміння працювати з комп'ютером і з сучасними програмними засобами.

На думку психологів [23], [48], [58], [84], [122], [184], [221], однією з основних якостей, що стосується вмінь, є можливість людини здійснювати зміну структури вмінь - навичок, операцій і дій, що входять до складу вмінь, послідовність їх виконання, зберігаючи при цьому незмінним кінцевий результат. Це особливо стосується навчально-дослідницьких умінь, *ознаками* яких вважають [8]:

- перенесення засвоєного прийому діяльності в нову ситуацію;
- здатність вирішити навчальну проблему без допомоги ззовні;

– раціональність і логічність міркувань.

Оскільки навчально-дослідницькими вміннями учні оволодівають в ході навчально-дослідницької діяльності, а опанування і навчальною, і дослідницькою діяльностями є процес творчий, то потрібно торкнутися також поняття творчість.

Проблема творчості привертала увагу відомих вчених: Д. Б.

Богоявленської [22], Л. С. Виготського [54], Ю. Б. Гіппенрейтер [58], Л. Л. Гурової [74], З. І. Калмикової [107], В. І. Крутецького [129], О. М. Ле-онт'єва [140], І. Я. Лернера [142], О. Н. Лука [155], А. Маслоу [289], О. М. Матюшкіна [162], В. О. Моляка [170], Я. О. Понамарьова [211], Т. Рібо [229], І. С. Якиманської [286] та інших.

„Творчість – це діяльність, що породжує щось нове, чого раніше не було” [262, с. 185]. „Творчість, – пише О. Г. Спіркін, – це духовна діяльність, результатом якої є створення оригінальних цінностей, встановлення нових, раніше невідомих фактів, властивостей і закономірностей матеріального світу й духовної культури” [247, с. 193].

Творчість – це процес, оволодіння яким здійснюється лише у діяльності індивіда за наявності у нього конкретних знань і досвіду. Соціальний аспект творчості полягає у суспільній її значущості і необхідності для діяльності людини. Необхідні для творчості складові розвиваються в процесі навчання та власне творчої діяльності. Рівень творчих досягнень – функція працьовитості та навченості.

Про творчу діяльність в педагогіці йдеться тоді, коли дитина уявляє, комбінує, змінює або створює щось нове. Навчання набуває творчого характеру, якщо воно організовується з урахуванням рис творчої діяльності: самостійного перенесення знань і умінь у нову ситуацію; виявлення нової проблеми у знайомих умовах, нової функції знайомого об'єкта; вміння бачити альтернативу відомому рішенню; вміння комбінувати відомі способи розв'язування завдання по-новому; створювати оригінальні способи розв'язування проблеми поряд з відомими іншими. Формування процесуальних рис творчої діяльності невіддільне від характеру людей, які її здійснюють, тому паралельно з набуттям умінь формуються риси, притаманні творчій особистості: оригінальність, допитливість, здатність давати оцінку факту або явищу, фантазувати, відстоювати свою думку. При цьому під поняттям *набуття* будемо розуміти досягнення своєю особистою активною та продуктивною діяльністю (причому не тільки навчальною), особистою творчістю, особистим досвідом, через пізнання соціального досвіду, його критичне осмислення, іншими словами, *через своє неповторне особисте буття* [225].

Як зазначив С. А. Раков [225], у понятті набуття знайшли своє відображення погляди сучасної педагогіки та психології, які передбачають визнання не на словах, а на ділі індивідуальну особистість кожного учня, неповторність індивідуального досвіду кожної особистості, які визнають продуктивною тільки освіту співробітництва, освіту, яка *забезпечує*

індивідуальне творче буття кожного учня і кожного учителя.

На думку С. Д. Смірнова [244], творчість – це прерогатива вільної особистості, яка має здатність до саморозвитку.

Український психолог В. О. Моляко [170], розкриваючи сутність творчості з позицій психології, зазначає, що „під творчістю розуміють процес створення чогось нового для даного суб’єкта”. Пізнання реального світу – це завжди творчість. Будь-яке відкриття потребує творчості. І навіть застосування різноманітних прийомів, що полегшують шлях до відкриття, є процес творчий.

На думку О. М. Леонтєва, творча діяльність може виявитися як на рівні операційних компонентів продуктивної або пізнавальної (навчальної) діяльності, так і на рівні перебудови орієнтувальної основи і, врешті решт, образу світу (наукова творчість). І новизна тут не в об’єктивно новому кінцевому продукті, а в самостійному створенні системи ставлення до світу через особисту діяльність. У педагогічному плані головне у творчості – це усвідомлення дитиною себе як „нового відкриття”, яке реалізує в процесі формування свою особистість і свої здібності, знання та уміння [140].

Не можна не погодитися з думкою І. Я. Лернера [141] про те, що „творчість – процес створення людиною об’єктивно або суб’єктивно нового за допомогою специфічних інтелектуальних процедур, які не можна подати як точно описані та строго регульовані системи операцій або дій”. До характеристик творчої діяльності він відносить:

- 1) самостійне здійснення перенесення знань і умінь у нову ситуацію;
- 2) бачення нової проблеми у традиційній ситуації;
- 3) бачення структури об’єкта;
- 4) бачення нової функції об’єкта на відміну від традиційної;
- 5) бачення альтернатив при розв’язуванні проблеми;
- 6) комбінування та перетворення відомих способів діяльності при розв’язуванні нової проблеми;
- 7) створення принципово нового підходу (способу, пояснення) до розв’язування проблеми.

При цьому підкреслюється, що ці риси виявляються не одночасно при розв’язуванні кожної проблеми, а у різних поєднаннях та з різною виразністю.

Отже, особливістю вказаних характеристик творчості є те, що неможливо створити попередніх жорстких схем такої діяльності, оскільки неможливо заздалегідь вказати види, характер і ступінь складності можливих нових проблем, неможливо передбачити способи розв’язування проблем, що не виникли. Цей досвід можна набути тільки в процесі дійсного пошуку розв’язків нових проблем.

Психолог Я. О. Пономарьов [211] визначав творчість як „механізм продуктивного розвитку” і не вважав „новизну” вирішальним критерієм творчості.

Аналіз наукової, педагогічної, методичної, психологічної літератури надає можливість зробити висновок, що навчально-дослідницькі уміння учнів (як складові творчої діяльності (навчальної та дослідницької)), неможливо

подати як точно описані та строго регульовані системи операцій або дій. Будь-яке структурування буде носити умовний характер і змінюватися в залежності від предмета дослідження, поставленої мети тощо. В рамках даного дослідження, враховуючи особливості навчання учнів елементів стохастички, логіку наукового дослідження, будемо розглядати навчально-дослідницькі уміння учнів, які складаються з наступних компонентів: організаційного, інформаційного, інтелектуального, комунікативного, технічного. Кожен з перерахованих компонентів складається з умінь, що подані в таблиці 1.1.

При цьому зазначений склад умінь носить варіативний характер і може змінюватися, доповнюватися залежно від предмета діяльності, здібностей суб'єкта діяльності, а реалізація кожного з наведених умінь передбачає виконання більш простих дій. Загальновизнано, що без знань немає вмінь. Але й наявність знань не означає, що вони є ефективним запасом учнів, що учні здатні застосовувати їх у різних конкретних ситуаціях. Підхід до процесу навчання як діяльності розглядає знання як складову частину вмінь. Уміння – це здатність застосовувати наявні знання. Знання не можуть бути ні опановані, ні збережені поза діями того, хто навчається.

Таблиця 1.1

Структурні компоненти навчально-дослідницьких умінь

Компоненти	У М І Н Н Я
Організаційний	<ol style="list-style-type: none"> 1. Націлювати себе на виконання поставленого завдання. 2. Планувати проведення роботи. 3. Добирати матеріали для дослідження. 4. Опрацьовувати отримані дані. 5. Перевіряти результати. 6. Проводити самооцінювання навчальної діяльності.

Продовження таблиці 1.1

Компоненти	У М І Н Н Я
Інформаційний	<ol style="list-style-type: none"> 1. Користуватися каталогом або електронним джерелом відомостей. 2. Користуватися необхідними літературними джерелами: словниками, підручниками, енциклопедіями, іншими друкованими виданнями. 3. Користуватися технічними засобами масового інформування: радіо, телебачення, Інтернет, мобільний зв'язок. 4. Використовувати анкети, спостереження, бесіди. 5. Складати план, реферат, таблиці, схеми, діаграми.

Інтелектуальний	<ol style="list-style-type: none"> 1. Аналізувати та порівнювати. 2. Використовувати аналіз, синтез і аналогію. 3. Застосовувати абстрагування та узагальнення. 4. Моделювати. 5. Систематизувати. 6. Використовувати індуктивність висновку й встановлювати причинно-наслідкові зв'язки. 7. Висувати гіпотези. 8. Критично аналізувати повідомлення, давати їм оцінку.
Комунікативний	<ol style="list-style-type: none"> 1. Слухати. 2. Висловлювати свої думки. 3. Вести полеміку, брати участь у дискусії. 4. Аргументувати, доводити.
Технічний	<ol style="list-style-type: none"> 1. Працювати з апаратурою, приладами, інструментами. 2. Працювати з комп'ютером і відповідними програмними засобами.

На необхідність теоретичних знань у процесі формування вмінь вказують науковці, визначаючи вміння як володіння засобами і прийомами навчання, які ґрунтуються на свідомому застосуванні набутих знань. Р. С. Немов [184], М. А. Сорокін [246], Г. І. Щукіна [283] вважають, що вміння завжди спираються на активну інтелектуальну діяльність. Досвід роботи з учнями підтверджує, що активізація інтелектуальної діяльності школярів відбувається саме у ті моменти, коли змінюються умови діяльності, виникають нестандартні ситуації, що потребують оперативного прийняття рішень.

Навчально-дослідницькі уміння (такі як бачення проблеми, висування гіпотези, планування її перевірки, зіставлення отриманого результату з передбачуваним, вміння робити правильні висновки) навряд чи можна автоматизувати, хоча, безперечно, ці уміння формуються на основі знань, простіших умінь і певних навичок.

Пізнавальні можливості та інтереси учнів, їх знання можна розглядати як *результат* і як *інструмент* дослідження явищ дійсності та їх спільної з учителем діяльності. Знання та набуті уміння забезпечують поле пошуку. Інтелектуальні уміння є основою формування навчально-дослідницьких умінь.

Як і в науковому дослідженні, в процесі сумісної пізнавальної діяльності учнів й учителя реалізується пізнавальний цикл, елементами якого вважають:

- факт (проблема);
- гіпотеза;
- експериментальна перевірка;
- теоретичні висновки.

Пізнавальний цикл органічно поєднує експеримент і теорію. Саме спостереження та дослідження реальних явищ, їх теоретичне осмислення виявляє пізнавальні протиріччя. Розв'язування таких протиріч обумовлює розвиток мислення учнів. Розвивати мислення школярів – значить учити їх зіставляти, порівнювати факти, знаходити в них схоже і відмінне, виділяти

істотне серед другорядного, піддавати об'єкти своєї думки аналізу і синтезові, самостійно робити з фактів висновки та узагальнення, застосовувати їх до пояснення нових випадків. „Мислити – значить діяти, шукати відповіді на запитання, способи розв'язування задач, які цікавлять того, хто мислить”, – говорить Г. С. Костюк [126, с. 392].

В психолого-педагогічній, науково-методичній літературі найбільш суттєво висвітлені питання формування вмінь, що спираються на загальні розумові дії: аналіз, порівняння, використання аналізу і синтезу, систематизація, абстрагування та узагальнення тощо.

1.3. Процес формування навчально-дослідницьких умінь учнів

Термін „формування” – створення чогось (від латинського слова *formo* – утворюю) – належить до числа основних понять педагогічної психології. В українській мові синонімами слова „створювати” виступають наступні лексеми: виробляти, винаходити, творити [185, с. 383]. Згідно з педагогічною психологією формування – це діяльність або експериментатора-дослідника, або вчителя, що пов'язана з організацією засвоєння певного елемента соціального досвіду (поняття, дії) учнем. І формування, і навчання пов'язані з діяльністю вчителя, але їхній зміст не збігається. По-перше, поняття навчання більш широке, ніж поняття формування. По-друге, коли говорять „навчання”, то мають на увазі або те, чого вчитель навчає (наприклад, математики), або те, кого навчає – учнів [239].

Н. Ф. Тализіна відзначає, що термін „формування” звичайно використовують тоді, коли мова йде про те, що здобуває учень: поняття, навички (вміння) чи новий вид діяльності [249].

1.3.1. Основні психолого-педагогічні теорії навчання. Щоб оволодіти способом діяльності, щоб знання про нього перетворилося в уміння, необхідно спосіб діяльності реально відтворювати, набути досвід його практичної реалізації [141]. Жодне вміння не формується без відтворення у тій або іншій формі способів діяльності. Навчально-дослідницькі вміння формуються в процесі навчально-дослідницької діяльності, яка організовується або спрямовується вчителем.

Процес навчання завжди базується на психолого-педагогічних теоріях, концепціях і системах навчання, кожна з яких спирається на певні закономірності пізнавальної діяльності людини та припускає специфічну організацію навчальних занять. Дидактика сьогодні спирається на сучасні фундаментальні психолого-педагогічні теорії навчання:

1. Асоціативно-рефлекторну теорію навчання;
2. Теорію поетапного формування розумових дій;
3. Теорію проблемно-діяльнісного навчання;
4. Особистісно орієнтованого навчання.

В основі асоціативно-рефлекторної теорії навчання лежать виявлені І. М. Сеченовим і І. П. Павловим закономірності умовно-рефлекторної діяльності головного мозку людини. Відповідно до їх вчення в мозку людини йде постійний процес утворення умовно-рефлекторних зв'язків – асоціацій. Асоціації, що утворилися, – своєрідний досвід, життєвий багаж людини. Від того, які асоціації будуть стійкими й закріпляться у свідомості, залежить індивідуальність кожної особистості. На основі вчення про фізіологію розумової діяльності відомі вчені-психологи, педагоги С. Л. Рубінштейн [233], А. А. Смирнов [244], Ю. А. Самарін [234] та ін. розробили асоціативно-рефлекторну теорію навчання. Коротко смисл даної теорії виражається наступними положеннями:

1. Засвоєння знань, формування вмінь є процес утворення в свідомості учня різних асоціацій – простих і складних.
2. Надбання знань, формування вмінь має певну логічну послідовність і містить у собі наступні етапи:
 - сприйняття навчального матеріалу;
 - його осмислення, доведене до розуміння внутрішніх зв'язків і протиріч ;
 - запам'ятовування й збереження в пам'яті досліджуваного матеріалу;
 - застосування засвоєного в практичній діяльності.
3. Основним етапом процесу навчання виступає активна розумова діяльність учня при розв'язуванні теоретичних і практичних навчальних завдань.
4. Найкращий результат у навчанні досягається при дотриманні ряду умов:
 - формування активного ставлення до навчання з боку учнів;
 - подання навчального матеріалу в певній послідовності;
 - демонстрація й закріплення у вправах різних прийомів розумової й практичної діяльності;
 - застосування знань.

Отже, відповідно до теоретичних положень цієї теорії можна зробити наступні практичні висновки:

1. Мислення людини „працює” тільки тоді, коли у свідомості людини є для цього необхідний матеріал у вигляді певної кількості уявлень, понять, фактів, прикладів тощо. Тому, навчаючи учнів елементів стохастики, слід намагатися досягти, насамперед, розуміння учнями сутності розглядуваних понять. Для цього від учнів слід вимагати:
 - наведення власних прикладів, що відповідають розглядуваним поняттям;
 - аргументації того, чому один об'єкт підходить під означення, а інший – ні;
 - використання розглядуваних понять в явних ситуаціях при розв'язуванні задач;

– використання розглядуваних понять в неявних ситуаціях при розв’язуванні нестандартних задач.

Наприклад, нехай

, і відомі відносні частоти

. Чому трійку

можна назвати ймовірнісним

простором, а трійку

або трійку

не можна назвати ймовірнісним

простором? Шукаючи відповідь на таке запитання, учню потрібно провести аналіз наданих умов, перевірити, чи утворюють простір подій S задані множини, тобто задовольняють вони вимогам $1s-3s$ (див. стор. 105) чи ні? Визначити, чи узгоджені в кожному розглядуваному

випадку функція та сукупність S . Проходження таких „етапів мислення” самостійно, з розгорнутою аргументацією є показником свідомого володіння розглядуваним поняттям.

2. Для активізації процесу осмислення навчального матеріалу важливо, щоб він був:

- доступним;
- логічно взаємозалежним;
- правильно зрозумілим;
- актуальним.

У зв’язку з цим краще за все використовувати яскраві й точні формулювання, схеми, малюнки, приклади, порівняння з тим, що знайоме.

Наприклад, в процесі подання учителем навчального матеріалу про протилежні події в свідомості учня відбувається процес сприйняття цього матеріалу та утворюються певні прості асоціації. Для осмислення та розуміння цього поняття учнями вчителю доцільно використати геометричні інтерпретації поняття протилежних подій. Найбільш поширеною є діаграма Ейлера-Венна (рис. 1.2). Разом з тим, досвід навчання учнів елементів стохастички показав, що використання схеми (рис. 1.3) надає можливість унаочнити внутрішні зв’язки між елементарними подіями та простором елементарних подій, між подіями та елементарними подіями з простору, що в свою чергу призводить до більш глибокого розуміння цих понять учнями.

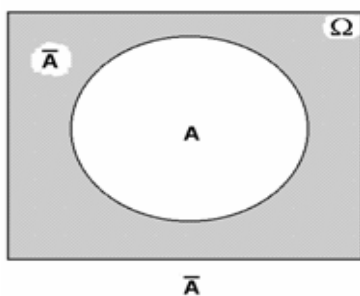


Рис. 1.2

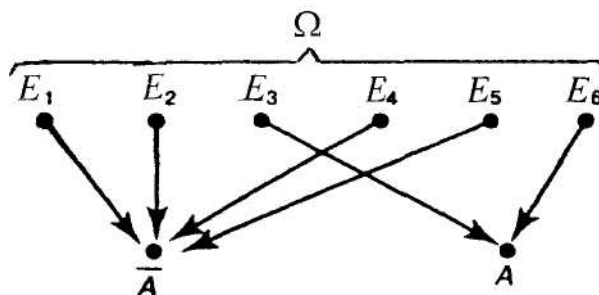


Рис. 1.3

3. Основою процесу оволодіння знаннями та вміннями є застосування їх на практиці, яке має здійснюватися у всіх видах діяльності: розв’язування задач, проведення експериментів, проведення досліджень, опрацювання отриманих статистичних даних, підготовка до виступів, розробка презентацій, оформлення результатів роботи.

4. Реалізуються основи асоціативно-рефлекторної теорії навчання за допомогою використання форм активного навчання.

Ефективне опанування знаннями та вміннями, розвиток інтелектуальних якостей залежить не тільки від пізнавальної активності учнів, але й від накопичення ними

конкретних прийомів і способів діяльності. У цьому плані найбільший ефект дає навчання на основі теорії поетапного формування розумових дій. У розробці даної теорії активну участь взяли відомі вчені-психологи О. М. Леонтьєв [140], П. Я. Гальперін [55], Д. Б. Ельконін [284], Н. Ф. Талізїна [250] та інші.

До головних положень теорії поетапного формування розумових дій відносять:

1. Ідею про принципову спільність структури внутрішньої й зовнішньої діяльності людини. Відповідно до цієї ідеї розумовий розвиток, як і засвоєння знань, умінь відбувається шляхом інтеріоризації, тобто поетапним переходом „матеріальної” (зовнішньої) діяльності у внутрішній розумовий план.

2. Положення про те, що всяка дія є складною системою, що складається з кількох складових:

- орієнтувальної (керуючої);
- виконавчої (робочої);
- контрольної-орієнтувальної.

3. Кожна дія характеризується певними параметрами:

- формою здійснення;
- мірою узагальненості;
- мірою розгорнення;
- мірою самостійності;
- мірою освоєння й ін.

4. Якість надбаних знань і вмінь залежить від правильності створення орієнтувальної основи діяльності (ООД). ООД – текстуально або графічно оформлена модель досліджуваної дії й система умов її успішного виконання.

У повсякденній діяльності, пов'язаній з навчанням, використовують кілька типів орієнтувальної основи дій:

Перший тип характеризується неповною ООД. У ній вказується лише виконавча частина розв'язування й зразок кінцевого результату дії. При цьому сам шлях досягнення результату не вказується.

Другий тип ООД містить у собі всі необхідні для виконання дії-орієнтири. Це значно скорочує час навчання, швидше досягається потрібний результат, але в деякій мірі сприяє формуванню стереотипних дій.

Третій тип ООД відрізняється тим, що в ньому всі орієнтири діяльності представлені в узагальненому вигляді, характерному для цілого класу явищ. Користуючись таким типом ООД, учень самостійно створює частинну ООД для виконання конкретних дій. В цьому випадку у учня з'являється можливість проявити творчість, ініціативу, нестандартний підхід до виконання дій.

5. У процесі навчання принципово нових знань, практичних навичок й умінь теорія поетапного формування розумових дій виділяє кілька етапів:

- формування мотивації;
- освоєння орієнтувальної основи дій;
- формування дії в матеріалізованій формі;
- формування дії в зовнішній мові;
- формування дії у внутрішній мові;
- „відхід” мовного процесу зі свідомості, що залишає предметний зміст дії.

При цьому розумові дії можуть виникати як у результаті предметної діяльності, так і спонтанно, наприклад, бути наслідком уяви [84].

Ефективність навчання на основі теорії поетапного формування розумових дій залежить від дотримання ряду умов:

- конкретний опис кінцевого результату дії і його характеристик;
- вибору завдань і вправ, виконання яких забезпечує формування потрібної дії;

– точне визначення порядку виконання всіх виконавчих і орієнтувальних операцій, що входять у дію;

– правильність і повнота орієнтувальної основи дій.

Разом з тим існує чимало творчих дій, для яких важко, а іноді й неможливо створити орієнтувальну основу. Навчання за певною інструкцією знижує можливості для творчості учнів і в певній мірі сприяє формуванню розумових стереотипів.

Подальшим творчим розвитком асоціативно-рефлекторної теорії навчання й теорії поетапного формування розумових дій стала теорія проблемно-діяльнісного навчання, розвитком якої займалися О. М. Леонтьєв [140], І. Я. Лернер [142], О. М. Матюшкін [161], М. І. Махмутов [163], [164], В. Оконь [190], М. М. Скаткін [238] та ін. В основу даної теорії покладено два основних принципи навчання: принцип проблемності й принцип діяльності в навчанні.

Сутність проблемно-діялісної теорії навчання полягає в тому, що в процесі навчальних занять створюються спеціальні умови, в яких учень, спираючись на наявні знання, самостійно виявляє й осмислює навчальну проблему, уявно та практично діє з метою пошуку й обґрунтування раціональних варіантів її розв'язання. У ході навчальних занять, проведених на основі проблемно-діялісної теорії навчання, значно зростає частка самостійної пізнавальної діяльності учнів стосовно аналізу проблемних ситуацій, посилюється інтенсивність їхнього мислення в результаті пошуку нових знань і нових способів розв'язування навчальних завдань.

Метою проблемного навчання, на думку Л. М. Фрідмана, є формування особливого стилю розумової діяльності, дослідницької активності та самостійності учнів [266].

Науковці виділяють кілька етапів навчальної пізнавальної діяльності учнів у проблемному навчанні, але це виокремлення носить умовний характер, оскільки розумова й практична діяльність тісно взаємозалежні й здійснюються одночасно [82], [161], [163], [164], [169], [175], [190], [238], [267]:

- усвідомлення протиріччя у явищі, що вивчається;
- формулювання протиріччя в термінах розглядуваного предмета вивчення (формулювання проблеми-задачі);
- висунування гіпотез стосовно шляху розв'язування;
- з'ясування та подолання протиріччя;
- аналіз отриманих результатів.

Ефективність проблемно-діялісного навчання залежить від ряду дидактичних умов, яких необхідно дотримуватися при проведенні занять. Серед них відзначимо:

1. Інтенсивне мислення учнів забезпечується послідовним нарощуванням протиріч у їх пізнавальній навчальній діяльності.

2. Підвищенню інтенсивності мислення сприяє як створення проблемних ситуацій, так і використання спеціальних методичних прийомів подання навчального матеріалу, таких як:

- підведення учнів до протиріччя із пропозицією знайти спосіб його подолання;
- актуалізація протиріч практичної діяльності;
- розгляд різних поглядів на те саме питання;
- пропозиція учням розглянути явище, предмет з різних сторін, різні межі його функціонування;
- спонування учнів робити порівняння, узагальнення, висновки із ситуації, зіставляти факти;
- постановка проблемних питань;
- розв'язування проблемних завдань і задач.

Отже, підготовка на основі проблемно-діялісної теорії навчання передбачає посилення проблемності при проведенні навчальних занять, специфічну організацію розумової й практичної пізнавальної діяльності учнів.

Розглянемо для прикладу прийом переформулювання задачі, що надає можливість створити умови для ситуації обговорення й активізувати мислення школярів. Оскільки учні з інтересом розв'язують вправи, де їм треба знайти помилки, неточності, суперечності й усунути їх, проконтролювати дії товариша, виправити неправильне, то замість задачі: „У коробці лежать 3 червоних, 1 зелений та 2 синіх олівці, що розрізняються тільки кольором. З коробки навмання виймають два олівці. Записати множину елементарних подій (множину можливих наслідків експерименту)” можна запропонувати учням оцінити вже розв'язану задачу: „У коробці лежать 3 червоних, 1 зелений та 2 синіх олівці, що розрізняються тільки кольором. З коробки навмання виймають два олівці. Різні учні побудували наступні простори елементарних подій:

;

.3

;

Хто з них правильно виконав завдання?”

В процесі обговорення запропонованих можливих наслідків експерименту важливою є наведена учнями аргументація.

Перші два простори елементарних подій пов'язані з кольором вийнятих олівців. Якщо олівці виймають послідовно один за одним, не повертаючи до коробки, то простором елементарних подій може бути множина , що містить вісім елементів. Якщо олівці виймають одночасно і за умовою вони розрізняються тільки кольором, то можна розглядати простір елементарних подій

, що містить вже п'ять елементів, де елементарна подія «ЧЧ» – вийняли два червоних олівці, елементарна подія «ЧС» – один червоний та один синій і т.д.

Якщо занумерувати кожен олівець, то можна отримати ще різні простори елементарних подій, що будуть пов'язані з описаним експериментом. Наприклад, червоним олівцям надати номери 1, 2, 3, зеленому олівцю – номер 4, а синім олівцям – номери 5, 6, тоді простором елементарних подій може бути множина

. Отже, розв'язування цієї задачі є правильним в усіх запропонованих випадках.

Практичний досвід навчання учнів елементів стохастичності доводить, що введення в навчальний процес елементів проблемності підвищує активність учнів, сприяє розвитку в них пізнавальних інтересів. Проте повністю побудувати навчання на основах проблемності навряд чи можливо. Це обумовлюється змістом навчального матеріалу, кількістю годин за навчальною програмою, рівнем підготовки та здібностями учнів одного класу.

Евристичне навчання відрізняється від проблемного. Мета проблемного навчання – засвоєння учнями заданого предметного матеріалу шляхом висування педагогом пізнавальних завдань-проблем [161], [163]. Методика проблемного навчання побудована так, що учні „наводяться” вчителем на відомий розв'язок або напрямок розв'язування завдань.

Евристичний же підхід до навчання дає змогу розширити можливість проблемного навчання, оскільки орієнтує вчителя й учня на досягнення невідомого їм заздалегідь результату. Метою евристичного навчання є не тільки передавання вчителем досвіду минулого, а набуття учнями під керівництвом учителя особистого досвіду, орієнтованого на конструювання майбутнього в зіставленні з відомими культурно-історичними аналогами. Евристична діяльність школярів не передбачає наявності у них попередніх умінь дій за зразком. Навпаки, репродуктивна діяльність дітей, якщо вона попередньо освоюється й

закріплюється, негативно впливає на можливість наступної творчості, створюючи в дітей шаблонів уявлення про необхідний освітній продукт. Репродуктивна діяльність в евристичному навчанні може сприяти творчості тільки в тому випадку, коли з її допомогою учні засвоюють і способи діяльності, а не тільки зміст освіти. Головна відмінність евристичного навчання в тому, що об'єктами пізнавальної пошукової діяльності є не тільки проблеми й завдання, але й сама діяльність учнів [239].

Евристичне навчання відрізняється від розвивального навчання, оскільки ставить і вирішує якісно нове завдання: не тільки розвиток учня, але й встановлення траєкторії його освіти, включаючи розвиток цілей, технологій, змісту освіти [239].

Розглянемо застосування елементів евристичного навчання в процесі формування навчально-дослідницьких умінь учнів на етапі закріплення поняття простору подій. На цьому етапі об'єктом вивчення має стати кожна істотна властивість розглядуваного поняття. При цьому можна виділити три основні типи вправ:

- вправи на розпізнавання;
- вправи на виведення наслідків;
- вправи на доповнення умов (розпізнавання та виведення наслідків).

Прикладами таких вправ в процесі навчання учнів елементів стохастичності є:

1. Чи кожна сукупність S підмножин простору Ω елементарних подій може бути простором подій? (Відповідь: Ні.)

2. Для множини S відповідний їй простір S випадкових подій може містити лише 4 елементи? (Відповідь: Ні.)

3. Простір S елементарних подій містить три елементи. Скільки елементів може мати простір S випадкових подій? (Відповідь: 2, 4, 8.)

4. Для множини S відповідний їй простір S випадкових подій може містити лише 2 або 4 елементи? Тільки 2? Тільки 4? (Відповідь: 2 або 4.)

5. Скільки можна побудувати просторів випадкових подій S , що відповідали б простору елементарних подій Ω і містили б події A та B . (

Відповідь: один - 2^{2^2} .)

6. Чи кожна множина S обов'язково є подією? (Відповідь: Ні.)

7. Множини S та T завжди є подіями для будь-якого простору S випадкових подій? (Відповідь: Так.)

Чим абстрактніше поняття, що вивчається, тим більшої конкретизації воно потребує. При цьому учням стають в нагоді наявні вміння аналізувати, порівнювати, зіставляти, протиставляти й саме ці вміння дістають подальшого розвитку в процесі розв'язування зазначених вправ.

Під особистісно орієнтованим навчанням О. Г. Балл [14], І. Д. Бех [21], В. В. Серіков [236], І. С. Якіманська [286] та інші розуміють органічне поєднання навчання та учіння як індивідуально значиму діяльність окремого суб'єкта, в якій реалізується досвід його життєдіяльності. Роль навчання полягає в тому, щоб виявити особливості цього досвіду, збагатити його науковим змістом, при необхідності перетворити, створити умови для розвитку індивідуальності учня. Серед дидактичних вимог до змісту навчального процесу виділимо наступні:

- спрямованість подання навчального матеріалу не тільки на розширення обсягу знань, структурування, інтегрування, узагальнення предметного змісту, а й на перетворення наявного досвіду кожного учня;
- постійне узгодження досвіду учня з науковим змістом нових знань;

—активне стимулювання учня до самооцінної освітньої діяльності з метою забезпечення можливостей самоосвіти, саморозвитку, самовираження в ході оволодіння знаннями;

—створення можливостей вибору при виконанні завдань, вирішенні задач;

—забезпечення контролю й оцінки не тільки результату, а і всього процесу учіння;

—забезпечення побудови, реалізації, рефлексії, оцінювання учіння як суб'єктивної діяльності.

Принципи особистісно орієнтованого навчання в процесі формування навчально-дослідницьких умінь учнів найбільш повно реалізуються при організації та проведенні навчального статистичного дослідження учнів. Це питання буде розглянуто в другому розділі.

Огляд основних психолого-педагогічних теорій навчання та досвід роботи з учнями показали, що формування навчально-дослідницьких умінь учнів залежить від систематичного, цілеспрямованого застосування цих теорій в практиці навчання.

1.3.2. Дослідницький метод навчання – основний шлях формування навчально-дослідницьких умінь учнів. Термін „метод” походить від грецького слова „methodos”, що означає дослідження, шлях просування до істини. Етимологічно він пов'язаний із значенням , що і методологія або методика дослідження, пошуку істини. Однак досить часто його пов'язують зі способом подання відомостей, що в принципі змінює й спрощує смисл будь-якого навчання [185], [189]. Цінність методу залежить від того, в якому степені його використання викликає пізнавальну, емоційну й практичну активність самих учнів, так необхідну для формування навчально-дослідницьких умінь учнів.

Проблемі класифікації методів навчання присвячено багато досліджень. Найбільш вагомими серед них є праці А. М. Алексюка [6], Ю. К. Бабанського [10], Б. І. Коротяєва [125], І. Я. Лернера [141], В. О. Онищука [191], М. М. Скаткіна [238]. Біля витоків цієї проблеми стояли такі відомі дидакти, як Г. І. Ващенко [40], К. П. Ягодовський [285], Є. П. Перовський [197], Є. Я. Голант [66], М. О. Данилов [76], [77].

В. О. Сухомлинський умовно поділив методи навчання на дві великі групи: загальнодидактичні та методичні [131], [169]. Г. І. Ващенко [40] поділяв методи на такі групи: методи готових знань і дослідницькі, А. П. Пінкевич – на пасивні (евристичні, моторні) і активні [169]. К. Н. Ягодовський [285] описав чотири групи методів за принципом дослідницького підходу до учіння: догматичні, ілюстративні, евристичні та дослідницькі. За джерелами сприймання знань А. В. Петровський [221], Є. Я. Голант [66] виділили словесні, наочні й практичні методи. І. Я. Лернер [141] і М. М. Скаткін [238] означили п'ять груп загальнодидактичних методів: пояснювально-ілюстративні, репродуктивні, проблемного подання, евристичні та дослідницькі.

Більш комплексну, побудовану на основі цілісного діяльного підходу, класифікацію методів навчання здійснив Ю. К. Бабанський [10]. Він керувався тим, що методи повинні виступати, з одного боку, в ролі способів основних видів діяльності, а з другого, – як засоби формування цих видів діяльності, всебічного, гармонійного розвитку особистості дитини. Усі відомі види діяльності він систематизував за такими ознаками:

—за формами прояву – матеріальна, духовна (інтелектуальна, емоційна, вольова) й комунікативна діяльність;

—за змістом – ігрова, пізнавальна, художньо-естетична, спортивно-оздоровча, громадська, виробнича;

—за ступенем прояву пошукової основи – репродуктивна, проблемно-пошукова (евристична), дослідницька.

Отже, методи навчання є багатостороннім, багатовимірним і багатофункціональним утворенням. Будь-яка автономно розкрита класифікація – це лише спроба згрупувати методи, що однобічно характеризують способи навчання: або зовнішню форму, або

внутрішню сутність за ознакою функції чи логіки розгортання процесу засвоєння знань чи рівня самостійності учнів у цьому процесі.

Розглянемо детальніше сутність дослідницького методу навчання, що поступово набував інтеграційних властивостей з проблемним і розвивальним навчанням.

Дослідницький метод навчання має більш ніж півторастолітню історію, спеціальним вивченням якої займався Б. Є. Райков [223]. На його думку, „це такий метод навчання, в основу якого покладено певний логічний процес, що спирається на самостійне спостереження реальних фактів і протікає по чотирьох шаблях логічного мислення:

- 1) спостереження й постановка питань;
- 2) побудова можливих розв'язань;
- 3) дослідження можливих розв'язань і вибір одного з них як найбільш імовірного;
- 4) перевірка гіпотези й остаточне її твердження” [223, с. 29].

Дослідницький метод є методом умовиводу від конкретних фактів, самостійно спостережених і досліджуваних школярами. Кажучи про дослідницький метод, мають на увазі „свідоме спостереження”, на відміну від простого збирання фактів. „Ніколи не треба забувати, що факти – суть істини для висновків, а без цього вони мертві. Учитель повинен навчити дітей опановувати цими фактами, уміти закріплювати їх, фіксувати словами й графікою, тобто самостійним описом, малюнком, моделлю й т.д. Але й це ще не все: це тільки половина справи. Адже вчитель не простий колекціонер фактів – він збирає факти з певною метою, щоб діти робили з них доступні їм висновки. Звичайно, ці висновки повинні бути самостійними – не підказаними й не нав'язаними. У результаті такої роботи дитина повинна одержати деякий запас елементарних узагальнень. Це і є те знання, якого ми від нього домагаємося, причому точне знання, тому що спирається на вірогідний конкретний фактичний матеріал, і міцне знання, тому що воно одержано самостійно” [223, с. 32].

М. М. Рубінштейн вважав, що „зі строго формального боку у всьому тому, до чого можна прикласти термін „дослідження”, повинні бути задані наступні елементи: проблема, метод і система в вирішенні її й прагнення до об'єктивного підсумку” [232, с. 36]. Дослідження не повинне бути обов'язково теоретичним, як неправильно стверджувати й те, що воно повинне давати неодмінно щось нове. Воно може бути перевірочним, тобто воно залишається дослідженням тільки для того, хто його провів, але позбавлено змісту для всіх інших. Можна говорити про те, пише М. М. Рубінштейн, що учні суб'єктивно переживають щось схоже на роботу дослідника, „навчаються запитувати навколишнє життя й спостерігати його”.

С. Т. Шацький [275] розрізняв типи шкільного дослідження так:

–дослідження, що констатують. Їх мета – шляхом спостережень розкрити істотні ознаки предмета (наприклад, розміри, форму, вагу, колір і т.і.) або явища й привести до наповнення образів у дитини.

–умовивідне дослідження – використовує спостереження й додає до них досліди, що виявляють причинні зв'язки між явищами.

–узагальнююче дослідження – на основі спостережень і дослідів приводить дітей до розкриття відповідних закономірностей.

Слід зазначити, що в першій третині ХХ століття дослідницький метод застосовувався насамперед у навчанні природознавства (біології, фізики, хімії й т.д.), тому що спостереження, дослід, експеримент – органічні прийоми його вивчення. Однак перед педагогами постало питання про те, чи можна застосовувати дослідницький метод до інших навчальних дисциплін?

Одні – Б. Є. Райков [223], К. П. Ягодовський [285] – відкидали саму можливість застосування дослідницького методу навчання до інших наук, крім природознавства. Інші – В. А. Щиголев [282] – вважали, що дослідницький метод повинен бути єдиним для всіх предметів, що вивчаються у школі.

Подальший розвиток уявлень про сутність, функції, місце, методику дослідницького методу в навчанні пов'язаний з виникненням концепції проблемного навчання. Подібно до того, як це трапалося з евристичною бесідою (одним з найдавніших методів навчання), дослідницький метод органічно „вписався” у систему методів проблемного навчання.

Дослідницький метод навчання розглядали І. В. Дорно [82], Т. А. Камишнікова [108], М. І. Махмутов [163], [164], Ю. В. Сенько [235], М. М. Скаткін [238], В. В. Успенський [258], [259] й ін. Найбільш послідовно описав його І. Я. Лернер [141]. На його думку, дослідницький метод є основним у навчанні творчої діяльності. Характеризуючи дослідницький метод, автор вказує, що цей метод навіть при його простих варіантах передбачає готовність учня до самостійного проходження всіх етапів дослідження.

Вчені й практики минулого в результаті тривалого педагогічного спостереження й досвіду з'ясували, що завдання дослідницького характеру пробуджують в учнів активність, самостійність, пізнавальний інтерес. Розроблено приклади дослідницьких завдань із різних навчальних дисциплін, описана методика їх виконання на уроках і поза уроками. Дослідники евристичних способів мислення (Ю. М. Кулюткін [134]), проблемних ситуацій у мисленні та навчанні (О. М. Матюшкін [161]), проблемного навчання (І. Я. Лернер [141], [142], В. Оконь [190] та ін.) довели, що мислення у процесі розв'язування пошукових та дослідницького характеру задач інше, ніж у процесі розв'язування задач стандартного характеру. Джерелом активності, самостійності й пізнавального інтересу учнів при цьому вважається проблемна ситуація. Саме в таких ситуаціях, коли учні виявляють суперечності між старим та новим, відомим та невідомим, даною і шуканою величиною, між умовами та вимогою, відбувається складна робота думки. У цьому процесі учень виявляє здивування, формулює гіпотезу, здогадку, приймає рішення, доводить, перевіряє правильність розв'язування, оцінює вибрані шляхи розв'язування. Таким чином, проблемне навчання розвиває творчі можливості, дослідницьке мислення у школярів.

Засобами створення проблемних ситуацій при дослідницькому методі навчання стають проблемні завдання, проблемні питання, проблемні вправи, що містять у собі об'єктивні протиріччя і які виконуються учнями самостійно. Загально визнано, що проблемні завдання (питання, завдання, вправи) повинні являти собою не деякі емпірично складені сукупності, а певну систему.

М. І. Махмутов [164] вважав найважливішою ознакою дослідницького методу повноту етапів вирішення навчальної проблеми. У випадку самостійного дослідницького розв'язування учнями системи проблемних завдань забезпечуються: 1) засвоєння нових знань; 2) творче застосування основних знань (ідей, понять, методів пізнання); 3) поступове ускладнення розв'язуваних проблем; 4) оволодіння рисами творчої діяльності.

Отже, сутність дослідницького методу полягає в тому, що вчитель ставить у формі дослідницьких завдань проблеми й проблемні завдання у певній системі, а учні їх виконують зовсім самостійно, здійснюючи тим самим творчий пошук [141].

Основними функціями дослідницького методу вважають: виховання пізнавального інтересу; створення позитивної мотивації навчання; формування глибоких, міцних і дійових знань; розвиток інтелектуальної сфери особистості; оволодіння (на елементарному рівні) методами наукового пізнання; розвиток пізнавальної активності й самостійності.

Аналіз науково-методичної літератури дозволяє зробити висновки, що в залежності від дидактичної мети дослідницький метод навчання можна використовувати не тільки під час засвоєння нових знань, але й на етапах закріплення та застосування, при виконанні домашніх завдань. В залежності від змісту навчального матеріалу дослідницький метод можна застосовувати там, де відомі поняття розглядаються в нових зв'язках при вивченні вузлових питань програми, що включають в себе загальні основи предмету.

До формування навчально-дослідницьких умінь учнів сьогодні доцільно не застосовувати якийсь окремий метод навчання, а розглядати процес навчання з позицій дослідницького підходу. Набуттю навчально-дослідницьких умінь сприятиме підхід, при

якому ідеями досліджень просякнуті всі форми навчальної роботи: лекційні та практичні заняття, лабораторні заняття, індивідуальна та самостійна роботи. „Дослідницький підхід у навчанні реалізується через дослідницьку діяльність та навчальні дослідження, через рефлексію яких набувається індивідуальна, особистісна методологія проведення досліджень”, – вважає С. А. Раков [225].

До переваг дослідницького підходу віднесемо не тільки введення загальних і часткових методів наукового пізнання в процес навчального пізнання на всіх його етапах і різноманітні форми організації процесу навчання, пошуково-творчої діяльності, а й актуалізацію внутріпредметних, міжпредметних і міжциклових зв'язків; ускладнення змістової й удосконалювання процесуальних сторін пізнавальної діяльності; зміну характеру взаємовідношень „учитель – учень”.

За словами В. В. Успенського [258], навчально-дослідницьке уміння – система інтелектуальних і практичних умінь і навичок, яка і забезпечує здатність до самостійних спостережень, дослідів, пошуків, які набуваються в процесі розв'язування дослідницьких завдань. Дослідницькі завдання – це завдання, що пропонуються учневі і які містять проблему; розв'язання її вимагає проведення теоретичного аналізу, застосування одного або кількох методів наукового дослідження, за допомогою яких учні відкривають раніше невідомі для них знання.

В. І. Андреев визначає, що навчально-дослідницьке завдання являє собою систему логічно зв'язаних навчальних проблем, які в сукупності з евристичними питаннями, вказівками й мінімумом навчальних відомостей дозволяють найбільш підготовленим учням (переважно без допомоги ззовні) відкрити нове знання про об'єкт дослідження, спосіб або засіб дослідницької діяльності [8, с. 88].

В. І. Андреев класифікує навчально-дослідницькі завдання за кількома критеріями:

1. Залежно від характеру змісту навчального матеріалу: емпіричні (вимагають спостереження, опису, систематизації); теоретичні (вимагають уміння пояснити, довести, встановити закономірні зв'язки й відношення); практичні (на застосування або перевірку законів, елементів теорії); змішані.

2. Залежно від характеру вимог, що ставляться в навчально-дослідницькому завданні: розпізнавання; конструювання; пояснення та доведення; змішаного типу.

3. Залежно від логічної схеми побудови навчально-дослідницького завдання: індуктивна логічна схема; дедуктивна логічна схема; мішана логічна схема.

4. Залежно від методу пізнання, що домінує в навчально-дослідницькому завданні: логічні, аналітичні, експериментальні, графічні, мішані тощо.

5. Залежно від співвідношення „даних” і „мети” виконання навчально-дослідницького завдання: з повними даними; з надлишковими даними; з недостатніми даними.

6. Залежно від форми організації виконання навчально-дослідницьких завдань: індивідуальні; групові; фронтальні.

На думку В. І. Андреева, навчально-дослідницькі завдання виконують навчальну, розвиваючу, адаптивну та управлінську функції, зміст яких подано в таблиці 1.2.

Таблиця 1.2

Функції навчально-дослідницьких завдань

Функції	Зміст
навчальні	При виконанні завдань в учнів формуються знання про поняття, закони, теорії, знання про основні прийоми й методи дослідження, уміння застосовувати ці знання в нових ситуаціях, при розв'язуванні навчальних проблем, дослідницьких завдань.
розвивальні	Виконання завдань активно й цілеспрямовано формує в учнів дослідницькі вміння й здібності.
управлінські	

	Через систему логічно пов'язаних навчальних проблем дослідницькі завдання детермінують загальну стратегію діяльності.
адаптивні	Зміст гарно розробленого дослідницького завдання є свого роду першим етапом адаптації сукупності навчальних проблем для конкретно взятого віку учнів, рівня їхньої підготовки.

А. Ю. Карлашук визначає дослідницькі завдання як такі, що вимагають пояснення і обґрунтування закономірних зв'язків і відношень, що експериментально спостерігаються, або фактів, явищ, процесів, задач, що теоретично аналізуються [110].

Формування і розвиток в учнів дослідницьких умінь є можливим за умови, коли „ вони самостійно виконуватимуть роботу з елементами дослідження, проводитимуть пошуковий експеримент, висуватимуть гіпотези й обґрунтовуватимуть методи перевірки справедливості цих гіпотез чи пропозицій”, – зазначає В. К. Буряк [37, с. 17].

Отже, послідовне та самостійне виконання всіх етапів дослідження, що містяться у пропонованому дослідницькому завданні, на думку науковців, забезпечує формування дослідницьких умінь учнів. Між тим універсального методу навчання, який би гарантував учневі набуття дослідницьких умінь, не існує взагалі саме через творчий характер цих умінь . Разом з тим, навчання учнів на основі дослідницького підходу (при якому ідеями досліджень просякнуті всі форми навчальної роботи: лекційні та практичні заняття, лабораторні заняття, індивідуальна та самостійна робота, використання спеціально складеної системи вправ, завдань, питань, застосування новітніх інформаційних технологій) сприятиме формуванню навчально-дослідницьких умінь учнів.

1.3.3. Врахування вікових особливостей розвитку учнів старшої школи процесі формування навчально-дослідницьких умінь. Відомий український психолог Г. С. Костюк застерігав, що вік учнів накладає певні обмеження на їхні пізнавальні та творчі можливості, які залежать не тільки від попередньо набутих знань, а й від рівня сформованості пізнавальних дій і операцій, пов'язаних з ними психічних особливостей учнів, а також від особливостей працездатності їхнього організму. Учні успішно оволодівають на кожному віковому етапі тим, що не виходить за межі їхніх можливостей, до засвоєння чого вони готові. Щоб дитина могла ефективно виконувати завдання, вона повинна досягти певного ступеня розвитку й володіти рядом попередніх знань і вмінь [126].

Розглянемо психологічні особливості розвитку учнів старшої школи. Характерний рівень когнітивного розвитку в юнацькому віці – формально-логічне, формально-операційне мислення. Це абстрактне, теоретичне, гіпотетико-дедуктивне мислення, не пов'язане з ситуативно-конкретними умовами зовнішнього середовища.

Значно складніших рівнів свого розвитку в учнів у ранній юності досягає процес сприймання, що стає складним інтелектуальним процесом. Це виявляється у довільних його формах, в перцептивних діях планомірного спостереження за певними об'єктами, самоспостереження за своїми діями, актами поведінки, переживаннями, думками й іншими проявами психічного життя.

Складний навчальний матеріал вимагає від старшокласників досконалішої репродуктивної уяви, і водночас у них розвивається продуктивна уява, що виявляється у різноманітних видах творчої діяльності. У старшокласників, порівняно з підлітками, спостерігається набагато критичніше ставлення до витворів своєї уяви. Вони співвідносять образи уяви з реальною дійсністю, зі своїми можливостями. Відбувається в ці роки й удосконалення пам'яті старших школярів. Це стосується не тільки збільшення об'єму пам'яті, а й того, що значною мірою змінюються способи запам'ятовування. Поряд з мимовільним запам'ятовуванням у старших школярів спостерігається широке застосування раціональних прийомів довільного запам'ятовування матеріалу. Вони набувають метакогнітивних умінь (такі як поетапний контроль і саморегуляція), які, у свою чергу, впливають на ефективність їхніх пізнавальних стратегій. Тобто пам'ять старшокласників характеризується подальшим зростанням довільності та продуктивності логічного

запам'ятовування. Відбувається спеціалізація пам'яті, пов'язана з провідними інтересами старшокласників та їх намірами щодо вибору майбутньої професії. Помітно зростає і продуктивність пам'яті стосовно абстрактного матеріалу. Старшокласники переконуються, що запам'ятовування не зводиться до розуміння, що потрібні спеціальні прийоми запам'ятовування, збереження та відтворення різноманітних відомостей. Вони прагнуть оволодіти своєю пам'яттю, управляти нею, збільшувати її продуктивність [48], [58], [84], [122], [126], [129], [184], [221].

У ранньому юнацькому віці розвивається здатність учнів тривало зосереджуватись на пізнавальних об'єктах, переборювати дію сильних відволікаючих подразників, розподіляти й переключати увагу. Зростає роль післядовільної уваги, яка виявляється за умови, що учіння спонукується спеціальними інтересами. Для юнаків і дівчат, у яких склались такі інтереси, все, що є об'єктом їхніх інтересів, стає й об'єктом їхньої уваги.

У старшому шкільному віці в учнів свідомо і цілеспрямовано формуються такі якості характеру, як сила волі, витримка, наполегливість, самоконтроль, осмисленість, критичність тощо. Проте продуктивність зусиль юнаків залежить часто від настрою: декому важко переходити від неробочого стану до праці, дехто часто лінується, відволікається. Вони критично ставляться до засвоєваних ними знань, до висловлювань дорослих, схильні до постановки проблем, до диспутів і філософствування.

На думку Г. С. Костюка [126], важливою особливістю психічного розвитку людини в юнацькому періоді є інтенсивне інтелектуальне дозрівання. У цей період триває розвиток розумових здібностей і, як наслідок, розширення свідомості буття, меж уяви, діапазону суджень і проникливості. Ці зростаючі можливості пізнання сприяють швидкому накопиченню знань, що розкривають перед юнаками ряд питань і проблем, які можуть як ускладнити, так і збагатити життя.

Варто зауважити, що в старших класах школи розвиток пізнавальних процесів досягає такого рівня, що старшокласники стають здатними виконувати всі види розумової роботи дорослої людини. Активно розвивається теоретичне мислення, що дає можливість старшокласникам на основі загальних фактів будувати гіпотези, перевіряти їх, що свідчить про пріоритетний розвиток логічного мислення. Пізнавальні процеси учнів набувають таких якостей, які роблять їх більш досконалішими і гнучкими, причому розвиток засобів пізнання дуже часто випереджає особистісний розвиток старшокласників. Когнітивний розвиток у цьому віковому періоді характеризується прискореним рухом абстрактного мислення й використанням метакогнітивних навичок. Становлення інтелекту на даному етапі передбачає розвиток творчих здібностей, шляхом вияву інтелектуальної ініціативи й спрямованістю на створення чогось нового. Це потребує активного розвитку дивергентного мислення.

За даними Ж. Піаже [200], основна особливість розвитку логічного мислення учнів у віці від 12 до 18 років полягає в новому орієнтуванні суб'єкта на співвідношення гіпотетичного і можливого, реально існуючого й потенційно можливого. Це дає змогу фундаментально переорієнтуватися суб'єктові в його ставленні до пізнавальних завдань. Учень прагне розкрити реальне в можливому через сукупність гіпотез, які вимагають перевірки або доведення. Гіпотези, які не підтверджуються фактами, відкидаються; гіпотези, які підтверджуються, набувають статусу наукового відкриття чи наукової теорії.

Поява формального мислення означає виникнення у суб'єкта пізнання здатності до широких узагальнень, новий підхід до розв'язування задач, який полягає у спрямованості на групування та структурування фактів, на виділення й контроль змінних величин, формування гіпотез та їх логічне обґрунтування й доведення. У зв'язку з цим, у старших школярів удосконалюється процес володіння складними інтелектуальними операціями аналізу й синтезу, теоретичного узагальнення й абстрагування, аргументування і доведення. Для юнаків і дівчат стає притаманним встановлення причинно-наслідкових зв'язків різноманітних явищ, систематичність, стійкість і критичність мислення, самостійна творча

діяльність. Виникає тенденція до узагальненого розуміння світу, до цілісності й абсолютизації в оцінках тих чи інших явищ дійсності. Ж. Піаже констатував, що логіка юнацького періоду – це складна когерентна система, відмінна від логіки дитини; вона складає сутність логіки дорослих людей і основу елементарних форм наукового мислення [200].

Таким чином, старшокласники переходять до вищих рівнів абстрактного та узагальнюючого мислення. Учні цього віку більш усвідомлено і міцно оволодівають логічними операціями. Розрізнені знання перетворюються в систему знань, яка є основою формування наукового світогляду, зокрема, переконань. Актуальною стає потреба в науковому обґрунтуванні, пошуку теоретичних пояснень явищ дійсності, логічному доведенні їх існування. Завдяки цьому процес міркування стає економнішим і продуктивнішим; формується система взаємопов'язаних узагальнених і образних операцій. Мислення стає дедуктивно-гіпотетичним завдяки перетворенню конкретних мисленнєвих операцій на формальні, які включаються в єдину, цілісну систему. Тому когнітивні структури в юнацькому віці мають складну будову й індивідуальну своєрідність. Описані зміни когнітивних структур служать передумовою виникнення здатності до інтроспекції, до рефлексії [48].

Здатність до інтроспекції (самопостереження) проявляється через здатність розрізняти суперечності між думками, словами та вчинками. Власні думки, почуття, вчинки індивіда стають предметом його мисленнєвого розгляду і аналізу. У ці роки думка остаточно поєднується зі словом, внаслідок чого утворюється внутрішнє мовлення як основний засіб організації мислення та регуляції інших пізнавальних процесів. Інтелект стає мовленнєвим, а мовлення інтелектуалізованим. Виникає повноцінне теоретичне мислення як одне з новоутворень пізнавальної сфери юнаків [48], [126].

На думку психологів [48], [58], [122], інтелектуальний розвиток старшокласників можна прискорити, удосконалюючи понятійну форму мислення, мовленнєвий інтелект та внутрішній план дій. Вони не існують незалежно одне від одного, і формувати кожен елемент окремо, без зв'язку з іншими, неможливо. У сучасній школі для розвитку внутрішнього плану дії необхідні спеціальні вправи, спрямовані на те, щоб одні й ті ж дії якомога частіше виконувалися не з реальними, а з уявними предметами, тобто в думках. Рефлексія необхідна для формування самосвідомості й розвитку дослідницьких умінь у ході загального розвитку особистості. Тому можна вважати, що освоєння дослідницького підходу до пізнання дійсності є одним з факторів розвитку особистості.

Важливим структурним компонентом будь-якої діяльності є мотивація. Під мотивами навчання розуміють внутрішні імпульси, які спонукують учнів до активної пізнавальної діяльності. Серед пізнавальних мотивів перше місце посідає інтерес до знань і до процесу їх набування. Це не тільки зацікавленість змістом навчального матеріалу, а й інтерес до самого процесу набування знань, умінь, до виконання завдань різного типу, розв'язування задач, проведення спостережень, дослідів, тощо.

Сучасні психологи та дидакти [48], [129], [157], [283] виділяють наступні стадії інтересу учнів до знань:

1. Цікавість: в учнів створюється психічний стан зацікавленості. На цій стадії учні можуть зацікавитись тим чи іншим предметом, об'єктом, але в них ще не помітні прагнення до пізнання їхньої сутності. Це ситуативний інтерес, який виникає за певної ситуації.

2. Допитливість: характеризується прагненням вийти за межі видимого, дізнатись більше, ніж почув від учителя або прочитав у книжці. На цій стадії розвитку інтересу в учнів виявляються емоції подиву, радість пізнання. Допитливість може стати стійкою рисою характеру.

3. Пізнавальний інтерес: характеризується тим, що в школярів виникають не тільки проблемні питання або пізнавальні ситуації, а й з'являється прагнення самостійно їх розв'язати. У центрі уваги учня – не готовий матеріал навчального предмета і не сама по

собі діяльність, а проблема, питання. Це ступінь інтересу, коли учень шукає причину, проникає в сутність явища, предмета.

4. Теоретичний інтерес: характеризується не тільки прагненням до пізнання закономірностей, теоретичних основ, а й застосуванням їх на практиці, з активним впливом на світ, що вимагає від особистості не тільки глибоких знань, а й стійких переконань.

Усі ці стадії пізнавального інтересу тісно переплітаються, взаємозв'язані.

Важливими стимулами, що спонукують пізнавальний інтерес, вважають:

— новизну змісту матеріалу, що вивчається, і оновлення вже опанованих знань, повідомлення відомостей із історії науки, практична необхідність в знаннях для життя;

— різноманіття форм самостійних робіт і їх зміна, проблемний характер навчання, дослідницький підхід і залучення учнів до методів наукового аналізу, творчі й практичні роботи учнів;

— емоційний тонус діяльності учнів і емоційність самого вчителя, взаємна підтримка вчителя та учнів, змагання, заохочення [283].

Інтерес до школи й учіння у старшокласників порівняно з підлітками помітно підвищується, оскільки учіння набуває безпосереднього життєвого змісту, пов'язаного з майбутнім. Також виникає виражений інтерес до різних джерел відомостей (книги, ЗМІ, Інтернет тощо). Підсилюється потреба в самостійному набуванні знань.

Значна частина старшокласників характеризується відсутністю пізнавального інтересу до пізнавальної діяльності, тобто у них не сформовано таке новоутворення юнацького віку, як широка пізнавальна потреба. Інша частина учнів виявляє справжній пізнавальний інтерес до навчання, розглядаючи його як творчий процес. Пізнавальні інтереси набувають широкого, стійкого і дійового характеру, на вищому рівні розвитку — широкої пізнавальної потреби на базі розвитку такого новоутворення, як теоретичне ставлення до знань. Індивідуальна спрямованість і вибірковість інтересів пов'язана з життєвими планами. Зростає свідоме ставлення до праці й учіння.

Характеризуючи наукове, теоретичне мислення, І. П. Павлов [194] підкреслював значення для його успіху зацікавленості людини задачею, неослабного інтересу до неї, здатності зосереджуватися на проблемі, з нею «лягати і вставати», а також уміння тримати в голові думки, на основі яких підтверджуються чи заперечуються ті чи інші висновки.

У старшому шкільному віці учбово-пізнавальний мотив (інтерес до способів добування знання) удосконалюється як інтерес до методів теоретичного й творчого мислення (участь у шкільних наукових товариствах, застосування дослідницьких методів аналізу на уроці). Розвиток цілепокладання в цьому віці виявляється в тому, що старшокласник при постановці системи цілей вчиться виходити із планів свого індивідуального самовизначення, а також соціальної значимості цілей, передбачення соціальних наслідків своїх вчинків. Зростає вміння оцінити реалістичність цілей, складається прагнення до активного апробування різних цілей у ході активних дій, що прямо пов'язане із процесами життєвого самовизначення [48].

Сутність математики становлять абстракції та узагальнення, а її особливістю є спеціальна мова, знакова символіка. Математиці властива формалізація знань, в ній оперують формальними структурами зв'язків і відношень. Математика – наука дедуктивна, і провідним методом побудови її сучасних теорій є аксіоматичний метод.

При навчанні в школі роль аксіом значно зменшується. І хоча вважається, що в старшому шкільному віці учні старших класів можуть вільніше оперувати процесами індукції і дедукції, цілеспрямовано розгортати складну систему суджень, свідоміше аналізувати основи своїх умовиводів [126], аксіоматичне означення ймовірності для них надто абстрактне і може бути недоступним для розуміння в силу недостатньої бази знань і життєвого досвіду, неможливості експериментально перевірити ті чи інші твердження стосовно випадкових подій та їх ймовірностей [98].

1.3.4. Рівні та критерії сформованості навчально-дослідницьких умінь учнів. Відповідно до діяльнісного підходу в психолого–педагогічній літературі представлені рівні сформованості та критерії сформованості навчально–дослідницьких умінь учнів.

В. І. Андрєєв [8, с. 109] виділяє п'ять рівнів сформованості навчально-дослідницьких умінь (див. таблицю 1.3), тобто вмінь застосовувати відповідний прийом наукового методу, та визначає чотири ознаки розвитку навчально-дослідницьких умінь: правильність, зв'язок, перенесення та раціональність.

Таблиця 1.3

Рівні навчально-дослідницьких умінь учнів (за В. І. Андрєєвим)

Рівень умінь	Характеристика умінь
Перший	Прийом або не застосовується, або застосовується, але неправильно, навіть у відомій для учня ситуації
Другий	Прийом застосовується частково правильно в ситуації, раніше знайомій учневі
Третій	Прийом застосовується правильно в ситуації, раніше знайомій й частково правильно - у новій ситуації. На деяких етапах простежується його зв'язок з іншими прийомами
Четвертий	Прийом застосовується правильно в новій ситуації, але ще недостатньо раціонально в системі з іншими прийомами
П'ятий	Прийом застосовується в новій ситуації не тільки правильно (у системі з іншими прийомами), але й раціонально

Проведений аналіз таблиці 1.3 дає підстави вважати, що не всі показники виділених ознак рівною мірою „працюють” на всіх рівнях розвитку вмінь. Так, уміння раціонально використовувати прийом виявляється лише на вищих рівнях розвитку.

В. М. Гнедашев [65] визначає три рівні сформованості дослідницьких умінь учнів з поступовим ускладненням (див. таблицю 1.4).

Таблиця 1.4

Рівні навчально-дослідницьких умінь учнів (за В. М. Гнедашевим)

Рівень умінь	Характеристика умінь
алгоритмічний	Учень не має необхідного базису знань щодо ведення дослідницької діяльності. Проте учень має здатність добре відтворювати знання і виконувати поодинокі дослідні операції з використанням алгоритмів, спостерігати, формулювати висновки.
частково алгоритмічний	Учень недостатньо уявляє процес ведення справжньої дослідницької діяльності, але може практично використовувати знання як з конкретної теми, так із навчального предмета для проведення одиничних частково нових дослідних операцій (у тому числі й аналітичного характеру)
самостійний	Учні мають стійкі знання з навчального предмета (або з кількох предметів), проявляють ініціативу, самостійність в усвідомленні мети та характеру дослідницької діяльності. Здатні самостійно проводити дослідження, починаючи з постановки проблеми і закінчуючи формулюванням висновків. У результаті продуктивної діяльності створюють суб'єктивно (для себе) нові знання.

Спираючись на теорію поетапного формування розумових дій, В. М. Гнедашев виділяє критерії, на підставі яких можна скласти уявлення про рівень

сформованості навчально-дослідницьких умінь учнів:

–повнота виконання операцій, з яких складається весь процес дослідження обраної проблеми;

–раціональність послідовності виконання операцій;

–усвідомлення дій у цілому (їх науковість, структура, послідовність виконання);

–узагальнення умінь.

Н. Г. Недодатко [181] визначає три рівні та три критерії сформованості навчально-дослідницьких умінь учнів (див. таблицю 1.5). Перший рівень сформованості навчально-дослідницьких умінь характеризується відсутністю в учнів необхідного базису знань і незрозумінням ними значення наукового пошуку; здатністю учнів до відтворення знань; виконанням поодиноких дослідних операцій з використанням алгоритмічних приписів; використанням одиничних понять конкретної теми для формулювання висновків; проведенням дослідів за аналогією.

Таблиця 1.5

Критерії сформованості навчально-дослідницьких умінь учнів

Критерії	Характеристика
Ступінь пізнавальної самостійності учнів	а) за допомогою вчителя (вчитель безпосередньо спрямовує дослідження або дає алгоритмічний припис); б) під керівництвом учителя (учитель дає опорну модель діяльності у вигляді напівалгоритмічних або напівевристичних приписів, контролює роботу учнів); в) самостійне виконання дослідження (можливе використання евристичних приписів, а допомога вчителя опосередкована).
Ступінь складності завдання та кількість використаних понять з теми	а) у завданні подаються тільки необхідні для розв'язування дані; кількість послідовних дій у розв'язуванні завдання мінімальна; з умов завдання можливий лише один висновок; б) у завданні подаються достатні для розв'язування дані; кількість послідовних дій при розв'язуванні збільшується; з умов завдання виводяться 2-3 висновки; в) наявність в умовах завдання надлишкових даних; подальше збільшення кількості виконуваних дій та паралельних висновків, що можна зробити з умови завдання.
Характер навчально-дослідницької діяльності	а) уміння проводити дослідження за аналогією; б) уміння планувати та проводити нові досліді; в) уміння проектувати різноманітні досліді для обґрунтування чи спростування висунутих гіпотез.

Цей рівень передбачає наявність таких умінь:

– спостерігати й описувати об'єкти та процеси;

– орієнтувати факти, якості, явища, вказуючи суттєві ознаки, відмінності та подібності;

– формулювати висновки на основі одиничних операцій дослідження.

У діяльності використовуються алгоритмічні приписи.

Другий рівень характеризується невпевненістю уявлень про науковий пошук, слабкими здібностями самостійно оперувати знаннями; володінням учнями одиничними дослідними операціями; проведенням аналогічних і, частково, нових досліджень з використанням знань з конкретної теми. Поряд з умінями першого рівня на цьому рівні передбачається наявність:

- уміння встановлювати причинно-наслідкові зв'язки;
- уміння планувати й проводити експерименти для перевірки висунутої вчителем гіпотези;
- уміння планувати проведення нових дослідів;
- уміння формулювати висновки на основі всіх операцій дослідження.

Використовуються напівалгоритмічні та напівевристичні приписи.

Третій рівень – опорні знання учнів стійкі; проявляється ініціатива; самостійність в усвідомленні мети та характеру майбутньої діяльності; учні поєднують окремі елементи дослідницької діяльності, самостійно проводять дослідження, починаючи з постановки проблеми, її розв'язування та формулювання висновку.

Евристична продуктивна діяльність, спрямована на створення суб'єктивно нових знань. Вона характеризується поєднанням умінь першого та другого рівнів і охоплює також уміння:

- бачити проблему;
- сформулювати мету роботи та визначити завдання дослідження;
- висунути гіпотезу щодо шляхів розв'язування проблеми;
- скласти й реалізувати план перевірки гіпотези;
- звірити отримані результати з передбачуваними, зробити висновок;
- кодувати отримані відомості у вигляді схем, графіків, таблиць, діаграм;
- формулювати узагальнені висновки на базі наявних знань.

Передбачається користування евристичними приписами в складних ситуаціях.

На думку А. М. Левінова [136], засвоєння уміння – це засвоєння алгоритму й типу задач, для розв'язування яких воно застосовується. Ступінь засвоєння вміння залежить від рівня оволодіння матеріалом, що вивчається, і визначається співвідношенням:

де P – надійність виконання учнями даного типу завдань, M – загальне число однотипних задач, K – кількість задач, виконаних правильно за даних умов.

Сучасний етап у розвитку шкільної освіти пов'язаний із упровадженням компетентнісного підходу до формування змісту та організації навчального процесу. Компетентнісна освіта зорієнтована на практичні результати та досвід особистої діяльності. У контексті цього оцінювання ґрунтується на позитивному принципі, що передбачає врахування рівня досягнень учня. З метою забезпечення ефективних вимірників якості навчальних досягнень та об'єктивного їх оцінювання введена 12-бальна шкала оцінювання, що побудована за принципом підсумовування набутих знань, умінь і навичок з урахуванням зростання рівня особистих досягнень учня [214]. Вона передбачає визначення навчальних досягнень учнів за такими рівнями: початковий, середній, достатній, високий.

У другому розділі запропоновано систему оцінювання сформованості навчально-дослідницьких умінь учнів з урахуванням сучасних загальних критеріїв

оцінювання навчальних досягнень учнів.

Висновки за розділом I

1. Аналіз досліджень, в яких сучасні науковці розглядають формування навчально-дослідницьких умінь учнів, виявив наявність різноманітних поглядів на поняття навчально-дослідницьких умінь учнів.

2. Навчально-дослідницькі вміння можна віднести до загально-навчальних умінь учнів (стосуються всіх навчальних предметів). Під навчально-дослідницькими вміннями учнів будемо розуміти здатність учнів виконувати певну систему дій практичного та розумового характеру, що підпорядковуються логіці наукового дослідження і свідомо використовуються ними в освітньому процесі для здобування нових знань.

3. Уміння формуються в процесі діяльності. Під навчально-дослідницькою діяльністю учнів будемо розуміти діяльність учнів, що організовується вчителем з використанням різноманітних форм організації навчання та дидактичних засобів, яка спрямована на виявлення й доведення закономірних зв'язків і відношень теоретично аналізованих або експериментально спостережених фактів, явищ, процесів; у якій домінує самостійне застосування прийомів наукових методів пізнання і у результаті якої учні активно здобувають знання, розвивають свої дослідницькі вміння й здібності. Результатом навчально-дослідницької діяльності є інтелектуальний продукт, пов'язаний із встановленням істини в результаті процедури процесу дослідження.

4. Проведений аналіз тлумачень структури навчально-дослідницьких умінь свідчить про різний зміст, що вкладають автори різних галузей знань у дане поняття. При цьому спільним і безперечним є те, що у всіх випадках навчально-дослідницькі вміння мають відповідати основним узагальненим етапам дослідницької діяльності.

5. Навчально-дослідницькі вміння учнів, як складові творчої діяльності (навчальної та дослідницької), неможливо подати як точно описані та строго регульовані системи операцій або дій. Будь-яке структурування буде носити умовний характер і змінюватися в залежності від предмета дослідження, поставленої мети та доповнюватися залежно від предмета діяльності, здібностей суб'єкта діяльності.

6. Пізнавальні можливості та інтереси учнів, їх знання можна розглядати як результат і як інструмент дослідження явищ дійсності та їх спільної з учителем діяльності.

7. Успішність формування навчально-дослідницьких умінь учнів залежить від систематичного, цілеспрямованого застосування вчителем сучасних фундаментальних психолого-педагогічних теорій (асоціативно-рефлекторної теорії, теорій поетапного формування розумових дій, проблемно-діяльнісного й особистісно орієнтованого навчання) в практиці навчання.

8. При формуванні навчально-дослідницьких умінь учнів потрібно враховувати психологічні особливості розвитку учнів на кожному віковому етапі.

9. У старшому шкільному віці учні здатні виконувати всі види розумової роботи дорослої людини. Активно розвивається теоретичне мислення старшокласників. Когнітивний розвиток у цьому віковому періоді характеризується розвитком абстрактного мислення. Становлення інтелекту на даному етапі передбачає розвиток творчих здібностей, прояв інтелектуальної ініціативи й спрямованість на створення чогось нового.

РОЗДІЛ II
МЕТОДИЧНА СИСТЕМА
ФОРМУВАННЯ НАВЧАЛЬНО-ДОСЛІДНИЦЬКИХ УМІНЬ УЧНІВ
У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ СТОХАСТИКИ

Загально визнано, що методична система навчання складається з п'яти ієрархічних взаємопов'язаних компонентів: мети, змісту, методів, засобів та форм організації навчання. На наш погляд, методична система формування навчально-дослідницьких умінь учнів складається з: дослідницького підходу як основного методу навчання; психолого-педагогічних умов створення навчального середовища, що сприяє розвитку учнів; доцільно дібраних задач та форм організації навчання; передбачає використання інформаційно-комунікаційних технологій і визначення шляхів формування навчально-дослідницьких умінь учнів. Виходячи з цього нами запропоновано методичну систему формування навчально-дослідницьких умінь учнів у процесі навчання елементів стохастики.

2.1. Місце елементів стохастики в шкільному курсі математики

Шкільний курс математики посідає важливе місце в системі безперервної освіти. Це обумовлено насамперед тим, що на сучасному етапі розвитку суспільства багато спеціальностей потребують високого рівня освіти, застосувань математики. Крім того, у повсякденній практичній діяльності кожній людині доводиться мати справу з розрахунками, комп'ютерною технікою, формулами, ймовірнісним характером багатьох реальних подій і явищ, складанням і читанням таблиць, діаграм і графіків тощо. Повноцінна освіта сучасної людини неможлива без загальної математичної підготовки.

Основною метою освітньої галузі „Математика”, як зазначається в Державному стандарті базової і повної загальної середньої освіти [80], є:

— опанування учнями системою математичних знань, навичок і умінь, необхідних у повсякденному житті та майбутній трудовій діяльності, достатніх для успішного оволодіння іншими освітніми галузями знань і забезпечення неперервної освіти;

— формування в учнів наукового світогляду, уявлень про ідеї і методи математики, її роль у пізнанні дійсності;

— інтелектуальний розвиток учнів (логічного мислення і просторової уяви, алгоритмічної, інформаційної та графічної культури, пам'яті, уваги, інтуїції).

Умовно учнів, що вивчають математику в закладах середньої освіти, можна поділити на три групи (відповідно до перспектив використання математичних знань у майбутній професії):

- майбутніх математиків;
- тих, хто використовує математику;
- тих, хто її не використовує.

Як зазначав Д. Пойа, „до «математиків» зарахуємо також фізиків–теоретиків, астрономів, інженерів, які використовують математику з науково-дослідницькою метою ... Інженери, вчені не математики, учителі математики та деяких інших предметів належать до категорії тих, хто використовує математику в своїй професії ... Зарахуємо до цієї ж категорії тих, кому не доведеться використовувати математику у своїй професійній діяльності, але яким необхідні деякі знання з математики для успішного вивчення деяких інших дисциплін» [209, с. 312]. Більша ж частина решти учнів може використовувати математику, але в дійсності їм ніколи не доведеться застосовувати знання з цієї дисципліни в тому обсязі, що вивчається в школі.

У зв'язку з цим навчання сьогодні в старшій школі стає профільним. І зміст освіти та вимоги до його засвоєння диференціюються за трьома рівнями: обов'язкові результати навчання, визначені в Державному стандарті, профільний, зміст якого визначається в програмах, затверджених МОН, та академічний, за програмами якого вивчаються дисципліни, що тісно пов'язані з профільними предметами, а також здійснюється загальноосвітня підготовка учнів, які не визначилися щодо напряму спеціалізації [123], [124]

], [240].

Сьогодні у все більшій кількості різних галузей наук та виробництва використовуються ймовірнісні методи та моделі. Методи досліджень теорії ймовірностей сьогодні широко використовуються в теорії масового обслуговування, теорії надійності, теорії інформації, дослідженні операцій, теорії ігор, статистичній фізиці, астрономії, кібернетиці, математичній статистиці, інформатиці. На базі теорії ймовірностей і математичної статистики ґрунтується багато досліджень у сучасній біології, медицині, сільському господарстві, військових науках, педагогіці, психології, соціології, економіці, страхуванні, мовознавстві і т. п.

Отже, нинішнє суспільство потребує все більше фахівців, які вміють аналізувати випадкові явища, оцінювати шанси, робити прогнози, висувати гіпотези, приймати рішення в умовах, що мають ймовірнісний характер. Формування зазначених умінь повинно починатися в шкільному віці, і навчання в загальноосвітній школі має сприяти оволодінню цими вміннями.

На думку А. Реньї [227], вивчення теорії ймовірностей належним чином впливає і на характер учнів, наприклад, розвиває хоробрість, оскільки дає змогу зрозуміти, що за певних обставин невдачі можна віднести до випадковостей і, отже, зазнавши невдачі, зовсім не варто відмовлятися від боротьби за досягнення поставленої мети. Люди, які перебувають на низькому рівні розвитку, схильні до надмірної недовірливості: яка б біда не трапилася з ними, вони схильні приписувати її чіємусь злому наміру, навіть якщо такі твердження позбавлені найменших підстав. Пояснюється це необізнаністю з таким феноменом, як випадковість.

Тому ознайомлення з елементами стохастики важливе не тільки для тих, хто стане в майбутньому математиком чи фізиком, воно необхідне також майбутньому лікарю, психологу, агроному, інженеру, підприємцю, економісту. Оскільки неможливо знати завчасно, хто ким стане в майбутньому, то, навчаючи учнів математики, треба брати до уваги, що кожен із них повинен мати можливість отримати користь із того, чого навчається.

Зауважимо, що терміном стохастика (від грецького слова „stochastikos” – випадковий) об’єднують розділи математики, в яких вивчаються випадкові явища, теорія ймовірностей та математична статистика, теорія ігор, теорія випадкових процесів та ін. У шкільному курсі математики «стохастика» розуміється як поєднання початків теорії ймовірностей і математичної статистики. Вивчення елементів стохастики в шкільному курсі математики впроваджується в Україні з 1996 року.

На рівні обов’язкових результатів навчання в Державному стандарті базової і повної середньої освіти [80] з математики для основної школи передбачено такий зміст навчального матеріалу зі стохастики: випадкова подія; ймовірність випадкової події; способи подання даних; частота; середнє значення.

Основна мета вивчення зазначених тем — сформуванню уявлення про основні поняття теорії ймовірностей та виробити вміння застосовувати їх до розв’язування задач.

При цьому учні повинні:

—мати уявлення про теорію ймовірностей і математичну статистику як науку, про випадкові події, ймовірність випадкової події, частоту, середні значення;

—знати способи збирання і подання даних стосовно різних сфер діяльності.

У старшій школі Державним стандартом базової і повної середньої освіти [80] з математики передбачено розширення і поглиблення уявлень зі стохастики: випадкові події; ймовірність випадкової події; умовні ймовірності; незалежні випадкові події; закон великих чисел; означення ймовірності; статистичні таблиці; ряди розподілу та наочне їх зображення; мода і медіана; середні значення.

При цьому учні повинні:

—мати уявлення про випадкові події та їх ймовірності; способи подання даних;

—знати основні поняття елементів стохастики;

—уміти застосовувати набуті знання під час розв'язування задач прикладного змісту.

Враховуючи основне завдання шкільної освіти – широка загальноосвітня підготовка учнів, а не їх вузька спеціалізація – у старшій школі виділено наступні напрями диференціації навчання: природничо-математичний, філологічний, суспільно-гуманітарний, художньо-естетичний, технологічний, спортивний [35], [124], [215]. Навчання математики в старшій школі має сприяти поглибленню уявлень про математику як елемент загальнолюдської культури, про застосування її в практичній діяльності, різних галузях науки і техніки.

За чинною програмою з математики для загальноосвітніх навчальних закладів вивчення елементів стохастики здійснюється в курсі алгебри і початків аналізу у другому семестрі 11-го класу. При цьому основною метою вивчення елементів стохастики вважають: введення основних понять теорії ймовірностей, поняття про теорію ймовірностей і про математичну статистику як науку [217].

У класах з поглибленим вивченням математики та спеціалізованих навчальних закладах передбачається вивчення елементів стохастики в курсі математики основної та старшої школи [218].

Опитування вчителів математики м. Бердянська, Приморського та Куйбишевського районів Запорізької області, студентів заочної форми навчання Бердянського педагогічного університету, які працюють вчителями математики в школах Запорізької, Дніпропетровської та Донецької областей, виявило цілу низку проблем навчання елементів стохастики в другому півріччі 11 класу в загальноосвітніх навчальних закладах.

Тільки 19% опитаних вчителів вважають доцільним вивчення елементів стохастики у другому семестрі одинадцятого класу; 13% опитаних респондентів вважають доцільним вивчення елементів стохастики в класах з поглибленим вивченням математики; 16% опитаних вважають, що вивчення елементів стохастики потрібно проводити окремим курсом (на факультативних заняттях), при цьому матеріал, що вивчається, повинен відрізнятися від того, що вивчається у вищому навчальному закладі (змістом, методикою викладання).

61% вчителів вважають недоцільним вивчення початків теорії ймовірностей і статистики в одинадцятому класі. Серед них 26% вчителів пропонують вивчати вказаний розділ у вищих навчальних закладах, а звільнений час перерозподілити на тригонометрію та повторення і систематизацію знань з математики за курс середньої школи.

На думку опитаних вчителів:

— навчальний матеріал зі стохастики, що пропонується у поширених підручниках є ізолюваним від традиційного курсу математики;

— запропонований матеріал не містить внутріпредметних та міжпредметних зв'язків;

— учні не мають мотивів до вивчення цих тем (особливо учні гуманітарних класів);

— вчителі вимушені скорочувати навчальний час, що відводиться на вивчення вказаних розділів програми з математики (карантини, які останнім часом регулярно припадають на початок другого семестру);

— за час, що відводиться на вивчення елементів стохастики у звичайних класах загальноосвітньої школи (12 годин – на вивчення початків теорії ймовірностей і 4 години – на статистику) ґрунтовно оволодіти знаннями й особливо уміннями з цієї теми неможливо;

Разом з тим відомо (див., наприклад, [205] – [207]), що:

— основні властивості статистичних ймовірностей майже дослівно повторюють основні властивості фігур, що мають міру (довжину, площу, об'єм) [205], [206], [207];

—і ймовірність, і статистична ймовірність мають такі ж властивості, як і довжина відрізків та їх об'єднань, площа областей та їх об'єднань, об'єми тіл та їх об'єднань, маси тіл та їх об'єднань, кількості елементів в множинах та їх об'єднаннях – все це міри множин.

І тому тут сила силенна і міжпредметних, і внутріпредметних зв'язків, розуміння яких сприяло б впровадженню елементів стохастики в навчальний процес.

Відповідно до програми з математики для 12-річної освіти [160], знайомство з елементами стохастики починається в курсі математики в 6-му класі, продовжується в курсі алгебри в 9-му класі та закінчується в курсі алгебри та початків аналізу в 11-му класі. На всіх етапах навчання передбачається формування зазначених знань і умінь на різних рівнях різними засобами.

Аналіз сучасних навчальних посібників і підручників з математики, методичних рекомендацій для вчителів і учнів виявив різні підходи до введення поняття ймовірності в шкільному курсі математики. Найбільш поширеним є вивчення початків теорії ймовірностей на основі так званого „класичного означення” ймовірності.

Між тим, багато науковців, що займаються вивченням теорії ймовірностей, вважають, що класичне означення ймовірності некоректне [89], [261], [270], [273]. На думку А. Реньї, „класичне означення ймовірності” є лише одним із прикладів задання ймовірнісної міри та обчислення ймовірностей в простіших випадках [227].

Класична ймовірнісна модель придатна для розв'язування певного класу задач, однак вимоги скінченного простору елементарних подій і рівноможливості елементарних подій обмежує її застосування. Видатний російський математик А. М. Колмогоров зауважував, що математика не дає відповіді на запитання, які події слід вважати рівноможливими [118].

Предметом сучасної теорії ймовірностей є побудова й дослідження ймовірнісних моделей (ймовірнісних просторів). Саме моделювання, побудову й дослідження різноманітних моделей вважають потужним засобом вивчення природи, світу та методом пізнання дійсності.

„Теорія ймовірностей як математична дисципліна може й повинна бути аксіоматизованою цілком в тому сенсі, як геометрія або алгебра”, вважав А. М. Колмогоров [119, с. 9]. Аксіоматичний підхід до побудови теорії ймовірностей, запропонований ним, був визнаний у всьому світі ще в 30-ті роки ХХ століття. Цей підхід до означення ймовірності долає некоректність інших означень, зокрема класичного. Він тісно пов'язаний із сучасною метричною теорією функцій і теорією множин.

Сформувати в учнів уявлення про сучасний (аксіоматичний) метод побудови теорії ймовірностей надає можливість вивчення в школі статистичних ймовірностей, що буде потужною пропедевтикою побудови теорії ймовірностей на аксіоматичній основі. Такий підхід до формування поняття ймовірності запропоновано М. І. Жалдаком та Г. О. Михалінім [88] – [89], [98] – [100].

Пропонований підхід дає змогу, по-перше, достатньою мірою з'ясувати і усвідомити сутність основних понять теорії ймовірностей і математичної статистики, уникаючи протиріч, по-друге, вивчати і теорію ймовірностей, і елементи математичної статистики, не відокремлюючи їх на два окремих розділи, а по-третє, сформувати науковий світогляд учня. Такий підхід до вивчення елементів стохастики відповідає віковим особливостям і життєвому досвіду учнів старшої школи. Саме при такому навчанні набуті знання будуть відображати дійсну картину світу, сучасний стан науки й бути порадиником у практичній діяльності.

2.2. Задачі зі стохастики як засіб формування навчально-дослідницьких умінь учнів

Деякий запас ймовірнісно-статистичних знань є невід'ємною умовою творчої роботи людини в багатьох галузях. Ці знання необхідні й у школі при вивченні фізики, хімії, біології, астрономії, адже більшість розглянутих там закономірностей є статистичними й вимагають для глибокого пояснення залучення ймовірнісних ідей і відповідного понятійного апарата.

Задача в дидактиці розглядається як засіб і як метод організації навчальної діяльності учнів. Згідно з Ю. М. Колягіним, задача – це система, що складається із двох компонентів: перший компонент – це множина взаємозв'язаних між собою елементів (елементи, властивості, співвідношення „умови”, „вимоги”, „розв'язку”), а другий компонент – це суб'єкт, що має інтерес до пізнання певних властивостей елементів, до знаходження окремих елементів або встановлення яких-небудь зв'язків між елементами першого компонента [120]. Наявність у задачі першого компонента надає можливість розглядати її як засіб навчання, оскільки вона є джерелом одержання математичних знань і обумовлює формування умінь і навичок учнів. Наявність другого компонента робить її методом навчання, що надає можливість організувати цілеспрямовану, впорядковану, взаємозв'язану діяльність учнів та учителя.

Задачі зі стохастичності сприяють формуванню методологічно правильних поглядів на природу та суспільство, поглядів, які відповідають сучасній науковій картині світу. Вони не є суто алгоритмічними. Всім їм притаманна об'єктивна або, щонайменше, психологічна віддаленість від звичних алгоритмічних схем. Вони мають також низку інших позитивних дидактичних властивостей: чітке психологічно прийнятне для дітей формулювання, широкі можливості для експериментування, узагальнень та спеціалізації, висока пізнавальна та естетична якість розв'язків, практично необмежені можливості для дитячої задачної творчості.

На думку науковців [31], [38], [39], [59], [61], [98], [118], [204], [253], [270], [274], задачі стохастичного характеру:

- сприяють засвоєнню методів і принципів описування реальних ситуацій математичною мовою;

- вчать раціонально вибирати адекватний математичний апарат для вирішення позаматематичних завдань;

- підводять до математичного „відкриття”, виховують потребу в розширенні знань;

- підвищують мотивацію введення ймовірнісних понять, розвивають інтуїтивне уявлення про ймовірнісно-статистичні поняття й методи;

- знайомлять учнів з методологією математики й особливим характером стохастичних умовиводів;

- демонструють розбіжність в характері двох світів - світу математики й реальної ситуації;

- дають можливість підсилити внутріпредметні та міжпредметні зв'язки за допомогою застосування стохастичних методів у різних галузях знання й практики.

Отже, задачі зі стохастичності у шкільному курсі математики можна розглядати як засіб формування навчально-дослідницьких умінь учнів.

Сучасний підручник для переважної більшості учнів, з одного боку, є основним джерелом, носієм змісту освіти, з іншого – засобом навчання. І як засіб навчання, він покликаний допомогти школярам засвоїти навчальний матеріал, сприяти формуванню досвіду самостійної роботи, розвивати уміння орієнтуватися в матеріалі, знаходити потрібні відомості. Щоб шкільний підручник був придатним для успішного використання, його структурні компоненти (тексти, запитання, завдання, задачі й ілюстрації тощо), крім передавання змісту предмета, повинні служити формуванню прийомів розумової праці, покладених в основу самостійної пізнавальної діяльності школярів.

Задачі та завдання є одними з важливих компонентів навчальної книги, за допомогою яких досягається цілеспрямоване опрацювання матеріалу у свідомості школяра. Від умілого, методично продуманого добору задач і завдань залежить не лише успішне опанування навчальним матеріалом, а й правильна організація самостійної пізнавальної діяльності учнів.

Завдання за характером передбачуваної в них розумової праці поділяють на дві групи: репродуктивні та продуктивні. Репродуктивними вважають ті, при виконанні яких від учня вимагається відтворення наявних знань. Наприклад, побудувати варіаційний ряд для спостережених значень: 5, 6, 6, 6, 4, 3, 5, 2, 6, 4, 5, 6, 3, 3, 5. Оскільки під варіаційним рядом спостережених значень розуміють ряд, що утворюється з заданих значень шляхом розміщення їх у порядку неспадання, то учню необхідно тільки розташувати задані значення в потрібному порядку: 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6.

До продуктивних відносять завдання, виконання яких потребує внесення істотних змін до структури засвоєних знань чи пошуку нових знань або методів роботи. Наприклад, відомо, що варіаційний ряд складається з натуральних чисел. Чи може бути дробовим числом значення:

- а) середнього арифметичного;
- б) моди;
- в) медіани цього ряду?

(Відповідь: так; ні; так, якщо ряд складається з парного числа членів ряду). Розв'язування такої задачі потребує не застосування формули для обчислення числових характеристик ряду, а знання учнями властивостей натуральних чисел, розуміння суті розглядуваних числових характеристик ряду, вміння аналізувати та узагальнювати, вміння працювати з абстрактними даними. Справді, що таке, наприклад, мода? Це таке значення варіанти, що зустрічається найчастіше в розглядуваному варіаційному ряду. Отже, мода виражається числом, що міститься в даному ряді чисел, а оскільки заданий ряд складається з натуральних чисел, то значення моди не може бути дробовим числом.

Із зростанням пізнавальної самостійності учнів у ході навчальної діяльності має зростати кількість продуктивних завдань, які вони виконують і які сприяють формуванню навчально-дослідницьких умінь учнів.

У психологічній літературі [48], [126], [129] [168], [187] зазначається, що оволодіння способами дій потребує спеціально організованих вправ, що якісно відрізняються від способів набування знань. Вправи повинні бути варіативними. Оволодіння способами дій може відбуватися різними темпами, в залежності від виду умінь, підготовленості учнів, в ході творчої роботи або одразу після отримання відомостей про порядок виконання дії. Принципово новими діями можна оволодіти, тільки якщо репродукувати їх цілком або частково.

Процесуальні риси дослідницької діяльності виявляються не одночасно при розв'язуванні кожної проблеми чи задачі, а в різних комбінаціях і з різною виразністю. Досвід дослідницької діяльності учнями накопичується поступово, і навіть не при кожній дослідницькій діяльності вказаний досвід формується і виявляється цілком. Цей досвід можна набути лише в процесі розв'язування нових проблем, при якому вимагається перенесення, комбінація, перетворення способів діяльності, умінь бачити проблему тощо.

Спираючись на ідеї М. І. Жалдака і Г. О. Михаліна [89], [98] – [99] та на досвід вивчення елементів стохастичності, на уроках математики в другому семестрі 11 класу нами запропоновано методику навчання елементів стохастичності на основі статистичного (або емпіричного) підходу до формування поняття ймовірності, спрямовану на формування навчально-дослідницьких умінь, наукового світогляду учнів, уявлень про ідеї і методи сучасної теорії ймовірностей, її роль у пізнанні дійсності та інтелектуальному розвитку учнів: логічного мислення, алгоритмічної, інформаційної культури, пам'яті, уваги, інтуїції.

Досвід науковців і вчителів-практиків доводить, що учнів потрібно вчити так, щоб вони поступово оволодівали окремими етапами наукового пізнання, вирішення проблем, набували досвіду дослідницької діяльності, окремих навичок творчої діяльності. Запропонована методика навчання елементів стохастичності передбачає діяльнісний підхід. Основна увага приділяється формуванню вмінь моделювати, читати та складати таблиці, схеми, діаграми, проводити власні дослідження, збирати емпіричні дані, висувати гіпотези,

опрацьовувати отримані результати.

В процесі розробки системи задач зі стохастики ми дотримувалися принципів, сформульованих Є. І. Машбіцем [167]:

1. Конструювати слід не одну задачу, а систему задач;
2. Конструювання задач має забезпечувати досягнення як найближчої, так і найвіддаленішої навчальної мети;
3. Розв'язування навчальних задач повинно забезпечувати засвоєння системи засобів, необхідних і достатніх для успішної навчальної діяльності;
4. Навчальну задачу належить конструювати так, щоб способи діяльності, які застосовуються для її розв'язування, виступали як прямий продукт навчання.

При складанні системи завдань і задач зі стохастики використовувалися числові значення, таблиці, фабули окремих задач з підручників та посібників М. І. Жалдака та Г. О. Михаліна [89], М. І. Жалдака, Ю. В. Горошка та Є. Ф. Вінниченка [92], Є. А. Бунімовича та В. О. Буличова [38], А. М. Бородин [29], Я. С. Бродського [30], М. І. Шкіля, З. І. Слєпкань і О. С. Дубинчук [3], [278], М. І. Шкіля, Т. В. Колесник і Т. М. Хмари [4], О. М. Афанасьєвої, Я. С. Бродського, О. Л. Павлова й А. К. Сліпенко [5], [78], О. С. Вентцель та Л. А. Овчарова [46], В. С. Лютікаса [156], Г. В. Дорофєєва [158], [159], Є. П. Неліна та О. Є. Долгової [183], І. Г. Венецького та Г. С. Кільдишева [44], А. В. Прохорова, В. Г. Ушакова та Н. Г. Ушакова [219], Г. В. Токмазова [253], В. Феллера [261], Я. І. Хургіна [270].

Сучасна наука володіє потужним набором різноманітних методів, що призначені для розв'язування різних за своїм характером задач. При проведенні конкретного дослідження використовують ті методи, що спроможні дати глибоку й всебічну характеристику досліджуваного явища. Вибір їх залежить від мети і задач дослідження, специфіки предмета пізнання, тощо. До теоретичних відносять ті з них, які не пов'язані з дослідом прямо: висунення гіпотези, моделювання, мисленевий експеримент, синтез наслідків тощо. Необхідність навчати цих методів обумовлена вимогами, які пред'являє сучасне життя до випускників школи. Щоб адаптуватися у швидко мінливих умовах, необхідно вміти аналізувати ситуацію, ставити перед собою конкретну мету, розробляти шляхи її досягнення, міркувати, добирати аргументацію „за” чи „проти”, адекватно оцінювати результати своїх зусиль. Саме такі вміння формуються в міру освоєння теоретичних методів пізнання.

Моделювання посідає особливе місце в процесі пізнання. Метод моделювання – метод теоретичного дослідження, який припускає створення штучних або природних систем (моделей), в яких відтворюються істотні властивості оригінала. На думку А. В. Фурмана [267], моделювання надає можливість перетворити навчання у дослідницьку діяльність учнів.

Моделлю, за В. А. Штоффом [280], можна назвати будь-яку систему, що реально існує, котра знаходиться у певних відношеннях до іншої системи (що є оригіналом, об'єктом або натурою).

У Філософському енциклопедичному словнику дається таке тлумачення поняття моделі: „Модель (від французького слова *modele*, від латинського *modulus* – міра, образ, норма) у логіці і методології науки – аналог (схема, структура, знакова система) певного фрагмента природної чи соціальної реальності, породження людської культури, концептуально-теоретичні утворення тощо” [262, с. 382]. Цей аналог служить для збереження і розширення знань про оригінал, конструювання оригіналу, перетворення або управління ним. Із гносеологічного погляду модель – це „представник”, „заступник” оригіналу в пізнанні і практиці.

Під моделлю будемо розуміти матеріальну, знакову або уявну (мислену) систему, що відтворює, імітує чи відображає принципи внутрішньої організації або функціонування, певні властивості, ознаки чи характеристики об'єкта дослідження (

оригіналу), безпосереднє вивчення якого неможливе, ускладнене або недоцільне, і може в пізнавальному процесі замінити об'єкт дослідження з метою одержання нових знань про нього [94].

Модель завжди виконує пізнавальну роль, виступаючи засобом пояснення, прогнозування й евристики.

При цьому моделі властиві такі ознаки, що є одночасно її характеристиками:

- імітація досліджуваного об'єкта або процесу в моделі;
- придатність до заміщення об'єкта, процесу, що пізнається;
- придатність до отримання нових відомостей (нових знань) про об'єкт;
- наявність точних умов і правил побудови моделі та переходу від відомостей про модель до відомостей про об'єкт;
- наочність.

В. Ф. Паламарчук, в залежності від основної дидактичної функції, розрізняє три види моделей: описові, конструктивні та евристичні. При цьому форма вираження може бути різною: модельна схема, знакова модель, графічна та ін. Вона вважає, що діти, які здатні розуміти моделі та самостійно моделювати, володіють найвищим рівнем творчості [195, с. 118-119].

„Особливо значна роль моделей, – вважає В. Ф. Паламарчук [195, с. 123], – в старших класах, у середовищі мислителів та суперечників, які обмірковують своє життя.”

Процес створення моделей та їх дослідження засобами математики називається математичним моделюванням. Математичне моделювання використовується як один із найбільш зручних і ефективних засобів дослідження природи, світу, що оточує нас. Звичайно, задачі, що виникають у життєвих ситуаціях і стосуються реальних об'єктів або процесів вимагають опису їх мовою математики. Такий опис прийнято називати формалізацією, а формулювання прикладної задачі в математичних термінах – математичною моделлю цієї задачі.

Математична модель являє собою систему математичних залежностей і відношень, які описують певні властивості, ознаки чи характеристики реальних об'єктів, процесів, явищ, що досліджуються, і відображають принципи їх внутрішньої організації або функціонування [94].

Отже, математична модель реального об'єкта або процесу являє собою знакову систему і може бути подана у вигляді формули (функції, рівняння, нерівності), таблиці, діаграми, схеми, геометричної фігури, пропорції тощо. Яка з форм подання математичної моделі доцільна для розв'язування тієї чи іншої задачі, залежить від самої задачі (тобто від цілей дослідження конкретного об'єкта або процесу). Основним способом і засобом навчання учнів математичного моделювання є розв'язування задач. Розв'язування вдало дібраної системи задач забезпечує формування навичок та вмінь математичного моделювання на досить високому рівні.

Одним з основних понять теорії ймовірностей є поняття ймовірнісного простору. Предметом теорії ймовірностей є побудова й дослідження ймовірнісних просторів – математичних моделей реальних явищ, процесів що вивчаються. Предметом дослідження ймовірнісних просторів є формулювання і доведення деяких властивостей цих просторів. Розрізняють:

- властивості загальні для всіх ймовірнісних просторів (це основні властивості подій та ймовірностей), а також властивості, що впливають з основних, наприклад, в кожному ймовірнісному просторі ймовірність події A , яка протилежна події \bar{A} , дорівнює $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;
- властивості локальні, тобто окремі властивості конкретного простору (наприклад, в деякому ймовірнісному просторі є лише дві події, що мають ймовірності, відмінні від 0 і від 1, а в деякому просторі всі елементарні події ω_i утворюють події A_i);

, що мають однакові ймовірності).

До загальних для всіх ймовірнісних просторів властивостей належать теореми (формули), за допомогою яких можна обчислити ймовірність подій, якщо на відповідному просторі подій задано ймовірнісну міру. Підрахунок або оцінювання невідомої ймовірності події з деякого простору за відомою ймовірністю інших подій того ж простору є одним з головних завдань теорії ймовірності. Походження вказаної відомої ймовірності може бути різним. Питання походження відомої ймовірнісної міри розглядається при побудові ймовірнісного простору під час вивчення елементів стохастички з учнями як узагальнення наслідків певної серії стохастичних випробувань, пов'язаних з даним стохастичним експериментом.

У навчанні математики ймовірнісні простори є математичними моделями випадкових (стохастичних) експериментів, тобто експериментів, дослідів, точні наслідки яких передбачити неможливо. Разом з тим відома множина можливих наслідків кожного випадкового експерименту, і при кожному випробуванні (проведенні цього експерименту) відбувається один із таких наслідків, який саме – наперед передбачити неможливо. При побудові ймовірнісної моделі формалізуються вихідні поняття, сприяючи розвитку абстрагування. Під абстрагуванням будемо розуміти нехтування другорядними ознаками (фактами) з метою зосередження на найважливіших особливостях досліджуваного об'єкта, предмета, явища.

Теорія ймовірностей відповідає на питання, як обчислити ймовірності подій, пов'язаних з побудованим ймовірнісним простором (ймовірнісною моделлю стохастичного експерименту). Тому важливо сформулювати правильне уявлення учнів про теорію ймовірностей як науку, розширити знання учнів про математичні моделі та навчити будувати ймовірнісні моделі стохастичних експериментів.

2.2.1. Випадковий експеримент та простір елементарних подій. На першому кроці побудови ймовірнісної моделі кожному експерименту можна поставити у відповідність множину усіх можливих його наслідків. Ця множина Ω називається множиною або простором елементарних подій, а її елементи називають елементарними подіями. Поняття „множина елементарних подій” та „елементарна подія” є первинними. Вони не означаються, а розтлумачуються на конкретних прикладах. Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 1. Експеримент полягає в однократному підкиданні монети та фіксації грані, якою монета впаде догори. Для даного експерименту простором елементарних подій

можна вважати множину $\Omega = \{Г, Ц\}$, де елементарна подія Г – поява герба, а елементарна подія Ц – поява числа, що виражає номінальну вартість монети.

Приклад 2. Експеримент полягає в підкиданні монети двічі та фіксації пари граней, якими монета впаде догори. Для даного експерименту простором елементарних подій можна вважати сукупність результатів першого та другого підкидань монети, тобто $\Omega = \{ГЦ, ЦГ, ГГ, ЦЦ\}$, де літера Г означає появу герба, а літера Ц – появу числа номінальної вартості монети у відповідному підкиданні.

Приклад 3. Монету підкидають доти, поки не впаде герб. Можливий простір елементарних подій матиме вигляд: $\Omega = \{Г, Ц, ЦГ, ЦЦ, ЦЦГ, ЦЦЦ, \dots\}$ або $\Omega = \{Г, Ц^n\}$, якщо ототожнювати кількість підкидань з натуральним рядом чисел.

Приклад 4. В кругову мішень, з радіусом 10 см, яку можна вважати множиною точок (x, y) , таких, що $x^2 + y^2 \leq 10$, виконується один постріл. При цьому попадання кулі за межі мішені вважається неможливим. Тоді множина елементарних подій $\Omega = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 10\}$ характеризує можливі результати експерименту: точки (x, y) , в які може влучити куля, визначають відповідні елементарні події в даному експерименті.

Приклад 5. Стержень довжиною l навмання розламають на дві частини. Як результат експерименту розглядають місце зламу стержня. Тоді за простір елементарних подій можна прийняти точки інтервалу числової прямої:

В останніх трьох прикладах ілюструються простори елементарних подій, як не обов'язково скінченні множини, що розширює кругозір учнів.

Стохастичний експеримент полягає в тому, що з деякої множини елементів навмання вибирається один єдиний елемент. З кожним таким елементом пов'язується відповідна елементарна подія.

Приклад 6. Експеримент полягає в підкиданні монети двічі та фіксації того, чи однаковими гранями, чи різними гранями обидва рази випала догори монета. Простором елементарних подій буде множина, де елементарна подія – монета падала догори однаковими гранями, а елементарна подія – монета падала різними гранями догори.

Приклад 7. Експеримент полягає в підкиданні одночасно трьох монет і фіксації граней, якими монети впадуть догори. Залежно від того, що вивчається, простором елементарних подій може бути обрана множина, що містить чотири елементи:

, де – поява трьох гербів, – поява двох гербів та одного числа номінальної вартості монети, – поява двох чисел номінальної вартості монет та одного герба, – поява трьох чисел номінальної вартості монет, або множина, що містить вісім елементів:

$$= \{GGG, GGЦ, ГЦГ, ЦГГ, ГЦЦ, ЦГЦ, ЦЦГ, ЦЦЦ\}.$$

Приклад 8. Нехай є шестигранний кубик, на гранях якого нанесено цифри «1», «2», «3», «4», «5», «6». Якщо експеримент полягає в підкиданні цього кубика і фіксації грані,

якою кубик впаде догори, то множина є множиною можливих наслідків експерименту, тобто простором елементарних подій, який містить шість елементарних подій. Якщо фіксується лише парна чи непарна цифра випадає на грані, якою кубик впаде догори, тоді множина $\Omega = \{\text{«парна»}, \text{«непарна»}\}$ є множиною двох можливих наслідків експерименту, тобто простором із двох елементарних подій. Якщо фіксувати при підкиданні того ж кубика випадання простих і складених чисел, то отримаємо простір елементарних подій з трьох елементарних подій: $\Omega = \{\text{«просто»}, \text{«складене»}, \text{«ні просто, ні складене»}\}$. Можна розглядати, як наслідки експерименту, кількість дільників числа, що випало на верхній грані, тоді простір елементарних подій міститиме чотири елементи:

Приклад 9. Експеримент полягає в підкиданні двох монет. Якщо фіксувати грані кожної монети, якими вони падають догори, то простором елементарних подій можна вважати множину з прикладу 2. Якщо фіксувати однаковими чи різними гранями догори впали монети, то простором елементарних подій може бути множина з прикладу 6. Якщо фіксувати кількість гербів та чисел номінальної вартості монет, що випали в даному

експерименті, тоді простором елементарних подій буде множина, яка складається з елементарних подій виду (a, b) , де a – кількість гербів, b – кількість чисел номінальної вартості монети, що випали при проведенні експерименту.

У наведених прикладах акцентується увага на розмаїтті побудованих математичних моделей просторів елементарних подій, що відповідають проведенням явно чи уявно

експериментам. Приклади такого характеру дозволяють розвивати уяву учнів, варіативність мислення, особливо тоді, коли учні самі пропонують різноманітні простори елементарних подій. Інколи уява важливіша за знання, оскільки уява є прямою причиною відкриття малого та великого, – стверджували свого часу А. Ейнштейн, Т. Рібо [229]. Внаслідок скутої фантазії багато високоінтелектуальних людей з енциклопедичними знаннями, на думку Л.

П. Грімака [69], виявляються малоздібними до творчості. Людина без фантазії діє завжди за певними шаблонами і не здатна на винаходи і справжні відкриття. „За допомогою фантазії проектують наукові експерименти, висувають гіпотези”, – вважав Г. С. Костюк [126, с. 321].

Отже, саме там, де людина уявляє, комбінує і створює щось нове, якою б крихтою не здавалося це нове, можна казати про творчість особистості. Якщо ми прагнемо навчити дитину думати, то раніше повинні навчити її вигадувати. Саме спирання на уяву, здатність вигадувати є характерною рисою дивергентного мислення, яке для творчого процесу поряд з конвергентним мисленням має істотне значення.

В широкому сенсі уява визначається, як психічна діяльність, що полягає у створенні уявлень і мисленневих ситуацій, які ніколи в цілому не сприймалися людиною в дійсності. У навчанні уява стосується предмета вивчення. У ході пізнавальної діяльності уява взаємодіє зі сприйманням, пам'яттю, мисленням. Під час сприймання вона доповнює елементи об'єктів, яких бракує, привносить у пам'ять зміни з боку можливого майбутнього, разом з мисленням виходить за межі наявного і відкриває шлях до майбутнього. При цьому уява чи не найтісніше пов'язана з наочно-образним мисленням, яке також передбачає відтворення образу певної ситуації. Уява не існує без мислення, але вона не зводиться і до логіки, тому що в ній (в уяві) завжди передбачається перетворення чуттєвого матеріалу.

Розглядаючи подібність і відмінність мислення і уяви, необхідно відмітити, що проблемна ситуація може характеризуватися більшою чи меншою невизначеністю. Якщо вихідні дані задачі, наприклад наукової проблеми, відомі, то хід її розв'язування підпорядкований переважно законам мислення. Інша картина спостерігається, коли проблемна ситуація відрізняється певною невизначеністю, вихідні дані з деякими труднощами піддаються точному аналізу. У цьому випадку в дію вступають механізми уяви. Наприклад, можна запропонувати учням розв'язати наступну задачу. Потрібно провести серію випробувань () з підкиданням монети. Проблема полягає в тому, що в наявності монети немає. Але є шестигранний кубик з нанесеними літерами абетки (дитяча абетка на кубиках). Як вийти з такої ситуації?

Тут головними виступають уміння уявляти, моделювати, проводити аналогію та порівняння. За умовою задачі є шестигранний кубик з нанесеними літерами абетки. Розрізняють голосні та приголосні звуки, що позначаються на письмі буквами. Отже, якщо при підкиданні шестигранного кубика як наслідки експерименту розглядати множину

, де Г – на верхній грані кубика випала буква, що позначає голосний звук, а П – відповідно приголосний, то такий експеримент має відтворити серію випробувань з підкиданням монети. Принаймні, запропонована модель відповідає вимогам заданого стохастичного експерименту.

На відміну від мислення, завжди спрямованого на встановлення реально існуючих, але ще не пізнаних зв'язків, уява створює те нове, якого насправді немає, а інколи й не може бути взагалі. Мислення та уява є двома взаємодоповнюючими системами випереджувального відображення дійсності. Перша – система понять і образів, що несуть у собі узагальнене значення, засіб розв'язування задач, опосередковане пізнання дійсності, друга – система наочних образів – моделей проміжних і кінцевих продуктів діяльності.

Моделі простору елементарних подій можуть мати вигляд таблиць, „дерев можливостей”.

Задача 1. Чоловік забув дві останні цифри телефонного номера, але він знає, що ці цифри різні та вони є серед чисел 1, 2, 3, 4. Побудувати простір елементарних подій, який

би відповідав експерименту, що полягає в набиранні навмання згаданих двох цифр.

Розв'язання. Позначимо через (x,y) – пару цифр, що відповідає випробуванню, де x – це число, що відповідає першій невідомій цифрі, а y – це число, що відповідає другій

невідомій цифрі телефонного номеру. Відомо, що _____, та _____.
Простір елементарних подій опишемо за допомогою наступної таблиці:

X \ Y	1	2	3	4
1	-	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,1)	-	(2,3)	(2,4)
3	(3,1)	(3,2)	-	(3,4)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	-

Задача 2. Побудувати простір елементарних подій, що відповідає трьом випробуванням, в кожному з яких може з'явитися У – „успіх” або Н – „невдача”.

При розв'язуванні цієї задачі пропонуємо учням скористатися графом, який називаємо „деревом можливостей” (рис. 2.1).

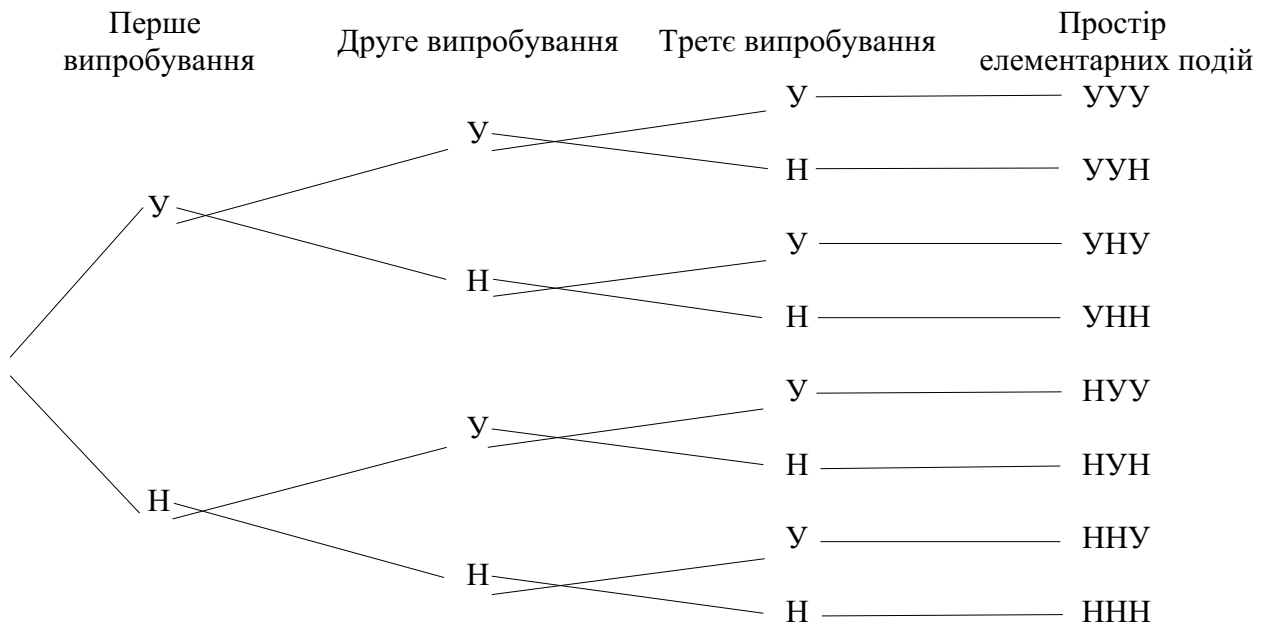


Рис. 2.1. Модель простору елементарних подій до задачі 2.

В першому випробуванні маємо два наслідки У, Н. При наступних випробуваннях отримаємо розгалуження, що надають можливість унаочнити простір елементарних подій та записати його у вигляді множини:

Оскільки умова задачі досить абстрактна, то пропонуємо учням навести приклади випробувань, скласти задачі, що відповідатимуть побудованому простору елементарних подій.

Велика кількість наведених учнями різноманітних прикладів (влучення чи невлучення при киданні тричі м'яча в корзину, при стрілянні тричі у мішень, якісні чи неякісні вироби виявили при перевірці, виграш чи програш у фіналі футбольного турніру, підкидання трьох монет тощо) надає можливість акцентувати їх увагу на тому, що в реальному житті виникає багато ситуацій з двома можливими наслідками.

2.2.2. Випадкова подія та простір випадкових подій. Випадковою подією називається деяка (не будь-яка) підмножина множини _____, _____. Якщо в результаті стохастичного

експерименту вибрано елемент ω і при цьому $\omega \in E_i$, то вважають, що подія відбулася.

Оскільки яскравий видимий образ активізує мислення учнів, то деякі поняття стохастики краще подати графічним зображенням, схемою. Наприклад, поняття випадкової події, що спричинюється елементарними подіями $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$, можна подати наочно (рис. 2.2, 2.3).

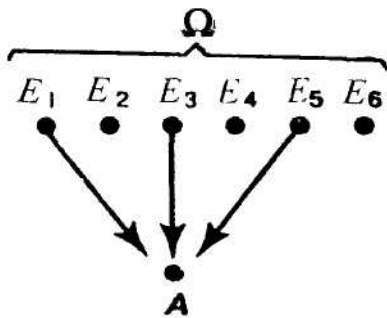


Рис. 2.2.

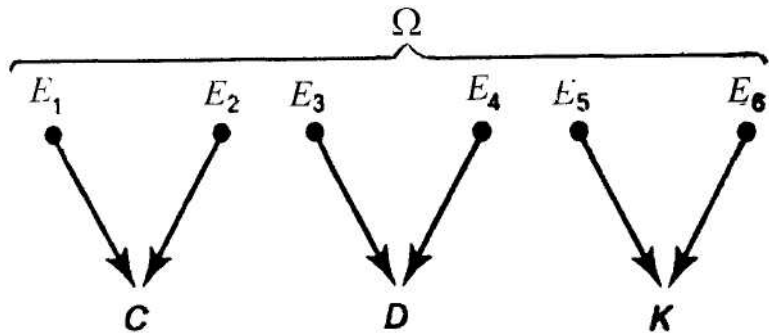


Рис. 2.3.

Так на рис. 2.2 подія A спричинюється елементарними подіями E_1, E_3, E_5 , на рис. 2.3 подія C спричинюється елементарними подіями E_1, E_2 , подія D – елементарними подіями E_3, E_4 , а подія K – елементарними подіями E_5, E_6 .

На рис. 2.4 подія A спричинюється елементарною подією E_2 , а подія B спричинюється елементарними подіями E_2, E_4 або E_3, E_4 . В той же час або елементарна подія E_2 спричинює подію A або елементарна подія E_2, E_4 спричинює подію B , а елементарна подія E_3, E_4 спричинює і подію A , і подію B . Також можна сказати, що подія A спричинює подію B .

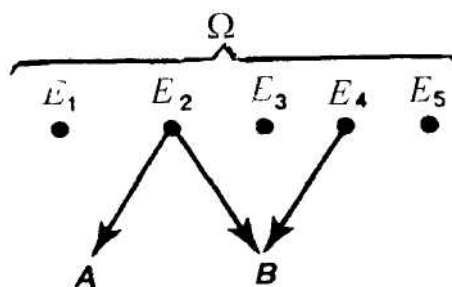


Рис. 2.4.

Події A і B називають несумісними, якщо $A \cap B = \emptyset$, тобто якщо вони не можуть відбутися обидві в одному і тому ж випробуванні. В іншому разі події A і B називають сумісними.

Так на рис. 2.3 події C, D, K є попарно несумісними (вони попарно не мають спільних елементів з простору елементарних подій), а події A і B , що зображено на рис. 2.4, є сумісними, оскільки мають спільний елемент E_2 з простору елементарних подій, а тому можуть відбутися обидві в одному і тому ж випробуванні.

Задача 3. Нехай $\Omega = \{ \dots \}$ – множина елементарних подій деякого експерименту. Які із зображених на рис. 2.5 подій є сумісними, а які – несумісними?

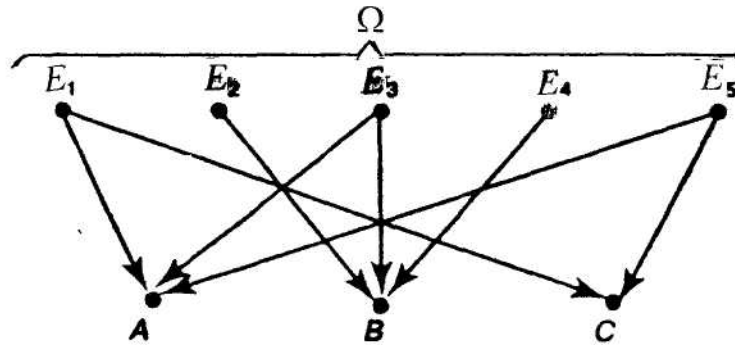


Рис. 2.5.

Сумісними подіями на рис. 2.5 будуть події A та B (мають спільний елемент E_3), події A та C (спільні елементи E_3, E_4), а несумісними – події B та C (немає спільних елементів з простору елементарних подій).

Подією, протилежною до події A , називають різницю \bar{A} , яку позначають \bar{A} . Подія \bar{A} , протилежна до події A , відбувається тоді і тільки тоді, коли не відбувається подія A . Очевидно, що події A і \bar{A} є несумісними. Наочно це подано на рис. 1.3.

На етапі формування основних понять стохастички використання схем, що подано на рисунках 2.2 – 2.5, сприяє наочному поданню зв'язків між подіями, між подіями та елементарними подіями з простору Ω . В процесі навчання учнів елементів стохастички до зазначених схем варто періодично повертатися, що дасть змогу глибше усвідомити, засвоїти розглядувані поняття та зв'язки між ними. При цьому завдання можуть носити репродуктивний характер: „Які події на рис. 2.5 є сумісними?“, „Назвіть елементарні події, що сприяють події A на рис. 1.3“; продуктивний характер: „Чи можна вважати події A та B , що зображені на рис. 2.5, протилежними?“, „На рис. 2.5 \bar{A} , чи \bar{B} ?“; творчий характер: „Наведіть приклад стохастичного експерименту, що відповідає рисунку 1.3“, „Придумати задачу за схемою, що подано на рисунку 2.3“, „Придумати задачу з числовими даними за схемою 2.5“.

Слід відзначити, що саме такий підхід до навчання учнів елементів стохастички сприяє здійсненню в мисленні школярів поступового переходу від конкретної ситуації до абстрактних моделей експериментів. Це виявляється також в тих прикладах і задачах, що складають учні. Наведемо приклади та задачі, складені учнем Олександром Н.:

1. Експеримент полягає в підкиданні один раз шестигранного кубика, на гранях якого нанесені цифри «1», «2», «3», «4», «5», «6». Можлива подія A (рис. 1.3) полягає у випаданні на верхній грані числа, що кратне трьом.

2. На картках дитячого лото нанесено цифри, що відповідають натуральним числам від 1 до 16. Навмання витягують одну картку. Як наслідок експерименту розглядають кількість дільників отриманого числа. Користуючись схемою, що подано на рисунку 2.3, описати можливі події A , B , C .

3. Нехай $\Omega = \{ \dots \}$ – множина елементарних подій, що відповідає певному експерименту. Відомо, що відносні частоти появи елементарних подій E_1 і

відповідно дорівнюють 0.5 і 0.125. Користуючись схемою, що подана на рисунку 2.5,

обчислити статистичні ймовірності всіх подій з простору Ω .

Окрім простору Ω елементарних подій, ймовірнісний простір включає простір подій S . Нехай S – деяка (не будь-яка) сукупність підмножин множини Ω , що задовольняє умови:

1s) $\emptyset \in S$;

2s) якщо $A, B \in S$, то $A \cup B \in S$;

3s) якщо $A \in S$, то $A^c \in S$.

Тоді кожен підмножину $A \in S$, що належить до сукупності S , називають випадковою подією або просто подією, а сукупність S називають простором випадкових подій, що відповідає даному простору Ω елементарних подій. Слід звернути увагу учнів, що поняття події вводиться не само по собі, а лише у зв'язку з поняттям простору подій.

Одному і тому самому простору Ω елементарних подій може відповідати кілька просторів S випадкових подій. Наприклад, $S_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ - „найбідніший” (найвужчий)

простір подій з усіх можливих, $S_2 = \Omega$ - „найбагатший” (найширший) простір подій з усіх можливих.

Приклад 10. Якщо при підкиданні грального кубика фіксувати число, що випало на верхній грані, то $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ є одним з можливих просторів випадкових подій, що відповідає простору елементарних подій Ω .

З наведеним простором Ω елементарних подій можна пов'язати й інші простори подій:

;

;

;

та інші.

Вибір того чи іншого простору подій S пов'язаний, з одного боку, з простором елементарних подій Ω , з іншого – із сутністю задачі. Неоднозначність у побудові просторів випадкових подій надає можливість розвивати мислення школярів, їх уяву і фантазію, заохочувати намагання учнів втілити власний задум, шукати нові можливі розв'язки. При розв'язуванні задач кожен учень має відчувати себе не спостерігачем, а співучасником розв'язування. Дитина може помилятися, сумніватися, шукати інший шлях до відповіді запитання, що виникли.

Найважливішим елементом пізнавального циклу є гіпотеза. Вона зв'язує наявні знання з новими фактами, надає можливість шукати шляхи вирішення пізнавальних протиріч. Роль гіпотез, припущень, які зумовлюють рух, особливо важлива в пізнанні. По суті, „наукову” думку рухає гіпотеза.

Вільне висловлення будь-яких гіпотез, що стосуються досліджуваної проблеми, вимагає демократичної атмосфери на уроках, сприяє розвитку вміння доводити, критично осмислювати свої й „чужі” думки, робити розумні й обгрунтовані висновки. У такій

атмосфері свободи висловлень немає страху помилитися, як і в самій науці: без перебору множини гіпотез, більшість яких виявляться неточними, не може бути встановлена дійсна картина явища. Важливо те, що верховним суддею в науковій суперечці в очах учнів виступатиме досвід, експеримент, реальність.

Цілеспрямоване і поступове формування у них в ході вивчення математики вмінь самостійно висувати і обґрунтовувати гіпотези, які базуються на висновках з раніше отриманих фактів, законів, теорій шляхом їх дедуктивної екстраполяції, тобто розповсюдженні на нові явища і факти, є одним з головних завдань процесу навчання школярів. При цьому слід звернути увагу на розвиток творчого мислення школярів, яке виконує важливу роль в ході побудови і висування гіпотези. Схематично структуру роботи учнів над гіпотезою подано в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

Основні прийоми розумового та практичного характеру, що входять до уміння висувати гіпотези

Г	Висунення й усвідомлення гіпотези
І	Мобілізація резерву знань, умінь і навичок відповідно до умови завдання й висуненої гіпотези
П	
О	Добір методів і засобів для розв'язування завдання
Т	Виконання системи дій і операцій, спрямованих на розв'язування завдання
Е	Перевірка здобутих результатів і зіставлення їх з гіпотезою
З	Встановлення логічного зв'язку між знаннями, набутими раніше і тепер
А	

Наведені нижче задачі сприяють розвитку уяви учнів, вміння аналізувати, порівнювати, висувати гіпотези та перевіряти їх (за умови, що вчитель вислухає всі висунуті та обґрунтовані відповіді учнів, зможе створити ситуацію обговорення на уроці та поставленими запитаннями спрямувати «потрібний» хід думки учнів).

Задача 4. Запишіть простір елементарних подій Ω , що відповідає експериментам: а) на шести картках написані цифри від 1 до 6. Картки перемішують і вибирають спочатку одну з них, а потім другу та фіксують числа, що написані на картках; б) з тих самих карток беруть навмання одночасно дві картки та фіксують числа, що написані на картках.

При розв'язуванні цієї задачі в пункті а) учні одразу дають відповідь:

що свідчить про сформоване стереотипне мислення школярів. Тільки акцентування уваги вчителем на проведенні учнями ретельного аналізу умови задачі дозволяє їм зробити висновок, що розглядувана задача є задачею з неповною умовою. В умові задачі не зазначено, чи повертають першу картку назад, чи ні. Отже, заданому експерименту може відповідати простір елементарних подій:

якщо взяли першу картку, зафіксували отримане число і повернули назад, а потім вже взяли другу картку, або названий учнями простір елементарних подій , якщо першу картку не повертали назад.

При цьому слід звернути увагу учнів, що отримані множини та – це різні моделі простору елементарних подій розглядуваного експерименту. Тоді розв'язування пункту б) даної задачі надає можливість учням вже уважніше підійти до розв'язування та дати відповідь на поставлене запитання: в даному випадку простір елементарних подій буде

складати множина

Задача 5. Експеримент полягає в п'ятикратному підкиданні монети. Як наслідки випробування розглядаються: а) вигляд сторін, якими монета падала догори в кожному з п'яти підкидань; б) число появ герба.

Записати простори елементарних подій для кожного варіанту. Якщо кидати п'ять монет один раз і розглядати аналогічні наслідки, як зміниться при цьому відповідний простір подій?

В процесі розв'язування цієї задачі в пункті а) учням слід усвідомити, що монету підкидають послідовно п'ять разів, фіксують отриманий результат і тільки отриману сукупність з п'ятьма проміжними результатами розглядають, як окремий наслідок (результат) експерименту:

в пункті б) також відбувається послідовне підкидання монети п'ять разів, фіксування отриманого результату і тільки узагальнення п'яти проміжних результатів розглядається, як окремий наслідок (результат) експерименту:

Додаткове запитання задачі надає можливість привернути увагу учнів на можливості моделювання розглядуваного експерименту за допомогою п'яти монет. При цьому відповідний простір елементарних подій залишиться таким самим. Отже, немає потреби підкидати п'ять монет, оскільки результати досліду можна відтворити за допомогою однієї монети.

2.2.3. Статистична ймовірність та ймовірнісний простір. Означення поняття статистичної ймовірності вводиться абстрактно-дедуктивним методом. Розглянемо деякий простір S випадкових подій, що відповідає простору елементарних подій. Нехай проведено серію із n випробувань (спостережень), в яких відбулися так звані спостережені елементарні події E_{sp} і A . Візьмемо довільну подію A . Тоді число n_A , що дорівнює кількості тих спостережень, в яких спостережені елементарні події E_{sp} і належать до A (сприяють події A), тобто число спостережень, в яких відбувалася подія A , називається абсолютною частотою відбування події A в даній серії із n випробувань.

Число n_A називається статистичною ймовірністю або відносною частотою події A в даній серії із n випробувань [89].

Підкреслимо, що аргументами функцій f_A і f_{A^c} є події простору S (певні підмножини множини S , включаючи множини A і A^c). Про абсолютні і відносні частоти в даній серії із n випробувань можна говорити лише для будь-якої події A , що належить даному простору S випадкових подій.

Після введення означення поняття статистичної ймовірності потрібно навести конкретні приклади, що ілюструють це поняття. Наприклад, нехай простір елементарних подій $S = \{\Gamma, \Pi\}$, простір подій $S = \{\Gamma, \Pi, \Gamma\pi, \Pi\Gamma\}$ і подія $A = \{\Gamma, \Gamma\pi, \Pi\Gamma\}$ – випадання герба при однократному підкиданні монети, тобто $A = \{\Gamma\}$.

Припустимо, що проведено $n = 45$ підкидань монети, в результаті яких герб випадав 45 разів. Тоді $n_A = 45$, $n_{A^c} = 0$, $f_A = 1$, $f_{A^c} = 0$.

– абсолютні частоти відповідних подій. Числа f_A і f_{A^c} – відносні частоти.

, , – це статистичні ймовірності (відносні частоти) відповідних подій у даній серії із підкидань монети. Очевидно, що якщо провести іншу серію із 200 підкидань монети, то отримані значення не обов'язково збігатимуться із попередніми.

Якщо простір елементарних подій $\{\Gamma, \Omega\}$, простір подій , а серія випробувань така ж сама, як і раніше, тоді про абсолютні (чи відносні) частоти подій $A = \{\Gamma\}$ і $\{\Omega\}$ говорити не можна, оскільки таких подій нема в просторі подій S .
Основні властивості статистичних ймовірностей [89]:

1р. , тобто статистична ймовірність довільної події невід'ємна;

2р. , коли і при (події A_k попарно несумісні), тобто статистична ймовірність скінченної або зчисленної суми попарно несумісних подій дорівнює сумі статистичних ймовірностей цих подій. Це так звана властивість повної (або зчисленної) адитивності статистичної ймовірності.

3р. , тобто статистична ймовірність вірогідної події дорівнює одиниці.

Властивості 1р-3р називають основними або визначальними властивостями статистичних ймовірностей. З властивостей 1р-3р випливають усі інші властивості статистичних ймовірностей.

Тут для учнів слід зауважити, що властивості 1р, 2р статистичної ймовірності такі самі, як і властивості довжин відрізків на прямій, площ областей, об'ємів тіл, маси тіл, кількості елементів в скінченних множинах та їх об'єднаннях – все це міри відповідних множин. Адже поняття довжини, площі, об'єму формуються з початкової школи, і для учнів старшої школи вже є очевидним, що довжина, площа, об'єм, маса – все це невід'ємні величини, що характеризують конкретну кількісну міру розглядуваного предмета. А з практичного досвіду вони вже знають, що довжина, площа, об'єм, маса предмета складаються з довжин, площ, об'ємів, мас частин, що складають даний предмет. Таким чином, можна при вивченні елементів стохастички використовувати наявний досвід учнів і сприяти формуванню внутріпредметних зв'язків.

Використання фізичних експериментів та інших аналогів для ілюстрації понять, що вивчаються, сприяють реалізації міжпредметних зв'язків. Наприклад, величину називають адитивною, якщо її значення для всього тіла дорівнює сумі її значень для підсистем, що складають дане тіло: енергія тіла з достатньою точністю дорівнює сумі енергій підсистем, маса розчину дорівнює масі складових компонентів. Досвід вивчення шкільних навчальних дисциплін робить очевидним для учнів те, що і енергія тіла, і маса речовин є величини невід'ємні. Отже, наведені характеристики також задовольняють властивості 1р, 2р.

Якщо задано простір елементарних подій , сукупність S підмножин множини , що задовольняє вимоги 1s–3s:

1s) ;

2s) якщо , то ;

3s) якщо , то

і на цій сукупності визначена числова функція , що задовольняє вимоги 1р–3р, тоді говорять, що задано ймовірнісний простір

[89].

При цьому елементи множини Ω називаються елементарними подіями, елементи сукупності S – подіями, а числа $P(A)$, $P(B)$ – статистичними ймовірностями подій A .

Властивості 1p-3p функції $P(A)$, $P(B)$ називаються основними або визначальними. Властивість 2p називають властивістю повної адитивності функції $P(A)$ [89].

Статистична ймовірність $P(A)$ характеризує середню можливість відбування події A у кожному з n проведених випробувань. Разом з тим вона може характеризувати досить добре і можливість відбування події A в інших випробуваннях. Часто для того, щоб дістати таку характеристику проводять серії з n випробувань, за допомогою яких помічають певні тенденції, згідно з якими дещо змінюють одержані статистичні ймовірності подій $P(A)$, дістають числові функції $P(A)$, $P(B)$, що задовольняють умови 1p-3p.

Будь-яку числову функцію $P(A)$, $P(B)$, що задана на просторі подій S і задовольняє вимоги 1p-3p, називають ймовірністю подій A або ймовірнісною мірою, заданою на просторі S .

Вимоги (властивості) 1s-3s, 1p-3p складають систему аксіом теорії ймовірностей (систему аксіом А. М. Колмогорова), проте учням їх слід подавати так, щоб вони самі природним чином прийшли до цих властивостей, зрозуміли їх важливість.

Множини Ω , для яких міра $P(A)$ не визначена, називаються невимірними відносно міри $P(A)$. Відповідно множини Ω , для яких $P(A)$ визначена, називаються вимірними відносно міри $P(A)$.

Невимірні (відносно міри $P(A)$) підмножини Ω множини Ω не розглядаються як події (не вважаються подіями), а до простору подій S включають лише вимірні (відносно міри $P(A)$) підмножини множини Ω .

Таким чином, остаточно сказати, які саме підмножини множини Ω можна вважати подіями, можна лише після того, як побудовано ймовірнісний простір $(\Omega, S, P(A))$ [89].

Аксіоматична побудова теорії ймовірностей і та жорсткість і чіткість, що цим забезпечується, передбачає певну особливість дослідницької діяльності. Слід звернути увагу учнів на те, що:

– статистична ймовірність (або відносна частота) $P(A)$, $P(B)$ є одним з прикладів ймовірності (ймовірнісної міри), визначеної на просторі подій S ;

– статистична ймовірність (або відносна частота) $P(A)$, $P(B)$ є числовою функцією;

– остаточно сказати, які саме підмножини A множини Ω вважаються подіями, можна лише після того, як побудовано ймовірнісний простір $(\Omega, S, P(A))$.

Введення означення ймовірності за допомогою основних властивостей $1s-3s, 1p-3p$ дає змогу уникнути некоректності і протиріч, що виникають при намаганні дати інші означення ймовірності – класичне, геометричне, статистичне [99]. Випадкова подія означається як елемент деякого простору подій, вимірних за заданою на такому просторі ймовірнісною мірою. Означення випадкової події поступово уточнюється і з'ясується остаточно лише після побудови ймовірнісного простору Ω , де \mathcal{S} – простір елементарних подій (множина можливих наслідків деякого випробування), \mathcal{P} – простір подій (підмножин множини Ω), \mathbb{P} – ймовірнісна міра, задана на \mathcal{P} .

Отже, ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{P}, \mathbb{P})$ є математичною моделлю розглядуваних стохастичних експериментів і відповідних задач, а процес побудови ймовірнісного простору – це переклад умов задачі на мову математики.

Наведемо приклади задач, що сприяють формуванню понять ймовірнісного простору, статистичної ймовірності та містять елементи дослідження.

Задача 6. Проводиться експеримент на визначення «дня народження» довільно обраної людини. Запропонувати можливу множину наслідків цього випробування, яка містить:

- 1) 7 елементів; 2) 12 елементів; 3) 365 елементів.

Задача 7. Визначити, скільки елементів може містити простір S випадкових подій, якщо відповідний йому простір Ω елементарних подій містить: 1 елемент; 2 елементи; 3 елементи.

Задача 8. Кількість елементарних подій простору Ω дорівнює n . Визначити найбільшу та найменшу можливу кількість елементів простору S випадкових подій.

Задача 9. Виріб, що виготовляється на деякому верстаті, може виявитися бракованим, що не підлягає доопрацюванню (елементарна подія A), якісним (елементарна подія B), частково бракованим, тобто таким, що підлягає доопрацюванню (елементарна подія C). Скільки можна побудувати просторів випадкових подій S , що відповідають простору елементарних подій Ω .

Для розв'язування задачі 6 учням надано підказку, що можна записати множину можливих наслідків кількома способами. Розв'язування задач 7 – 9 потребує висунення припущення (гіпотези) та перевірки цього припущення. При цьому основою такої перевірки є знання теоретичних основ стохастики та вміння проводити теоретичне дослідження. В учнів, які мають достатньо розвинуті навчально-дослідницькі уміння, проведення теоретичного дослідження здійснюється більш згорнутими мисленнєвими діями. Обговорення пропонованих учнями розв'язувань задач надає можливість іншим осмислити незрозумілі поняття, простежити „хід думки” в процесі дослідження. В наступних задачах ілюструється міркування учнів під час їх розв'язування.

Задача 10. Після підкидання двох кубиків 100 разів отримали таблицю, що подана нижче.

1-й	2-й	1	2	3	4	5	6
1	1	3	2	3	1	3	7
2	2	2	2	5	1	5	1
3	3	2	3	3	3	1	4
4	4	7	3	1	2	5	2
5	5	1	1	1	1	5	2
6	6	2	3	1	3	5	4

В клітинках вказано кількість випадань відповідної пари чисел. Нехай

, де i, j – число очок, що випали на першому та другому кубиках відповідно, простір подій S_1 – сукупність будь-яких підмножин простору Ω , а

простір Ω де подія Π – обидва числа парні. Визначити статистичні ймовірності наступних подій в кожному з зазначених просторів: а) подія A – на обох кубиках випало однакове число очок; б) подія B – на першому кубику випало більше очок; в) подія C – випало парне число очок на кожному кубику.

Розв'язання. Простір подій S_1 за умовою є сукупністю будь-яких підмножин простору Ω , тому статистичну ймовірність події A – випало однакове число очок - обчислюють так:

Для унаочнення події A – на першому кубику випало більше очок - задану таблицю можна подати так:

1-й	2-й	1	2	3	4	5	6
1	3	2	3	1	3	7	
2	2	2	5	1	5	1	
3	2	3	3	3	1	4	
4	7	3	1	2	5	2	
5	1	1	1	1	5	2	
6	2	3	1	3	5	4	

Для унаочнення події C – випало парне число очок на кожному кубику - задану таблицю можна представити таким чином:

1-й	2-й	1	2	3	4	5	6
1	3	2	3	1	3	7	
2	2	2	5	1	5	1	
3	2	3	3	3	1	4	
4	7	3	1	2	5	2	
5	1	1	1	1	5	2	
6	2	3	1	3	5	4	

Використовуючи дані таблиці, отримують статистичну ймовірність події A :

а статистична ймовірність події C обчислюється за формулою:

Простір подій

(де подія Π – обидва числа парні, тобто

, а подія

) не містить подію A – випало однакове число очок та не містить подію B – на першому кубіку випало більше очок ніж на другому, тому обчислення статистичної ймовірності таких подій в даній серії із 100 випробувань втрачає смисл. Статистична ймовірність події $C=\Pi$ – випало парне число очок на кожному кубіку, обчислюється таким чином:

Задача 11. Експеримент полягає у підкиданні грального кубика один раз. Нехай одна з подій A полягає у випаданні парного числа очок, а подія B – випало число очок, кратне 3. Перевірити, чи може бути множиною можливих наслідків випробування множина

, де елементарна подія означає випадання парного числа очок, а – випадання числа очок, що кратне трьом.

Розв'язання. Подія полягає у випаданні парного числа очок, тобто

, а подія – випало число очок, кратне 3, тобто

. Оскільки множини A і B містять спільний елемент , тобто

, то події A і B є сумісними. Це означає, що і можуть відбутися в одному випробуванні, а тому і не можуть бути елементарними подіями (окремими наслідками випробування). Отже, вказана множина не може бути простором елементарних подій.

Відповідь: множина не може бути множиною елементарних подій (можливих наслідків) розглядуваного експерименту.

Задача 12. В ціль зроблено 24 постріли, після яких виявлено 19 влучень. Обчислити статистичну ймовірність (відносну частоту) влучення у ціль. Знайти число влучень у мішень при відомій статистичній ймовірності, якщо було проведено k пострілів. Чи є це число точним?

Розв'язання. Нехай , де елементарна подія - влучення у мішень при одному пострілі, а - невлучення у мішень при одному пострілі, простір подій

, подія – влучення у мішень, тобто .

За умовою задачі проведено постріли у мішень, в результаті яких зареєстровано 19 влучень. Тоді – абсолютна частота події . Шуканою

статистичною ймовірністю події є число – це середня (і наближена) можливість влучення при одному пострілі, і тому при k пострілах наближене

число влучень дорівнює .

Відповідь: ; .

Задача 13. Скільки пострілів було зроблено, якщо статистична ймовірність (відносна частота) влучень дорівнює 0,7, а кількість промахів дорівнює 12?

Розв'язання. Подія – влучення у мішень. Тоді подія – невлучення у мішень.

За умовою статистична ймовірність влучень у мішень ,

тоді . Оскільки , то .

Враховуючи, що кількість промахів за умовою дорівнює 12, знаходимо кількість

проведених пострілів .

Відповідь: 40.

З метою формування навчально-дослідницьких умінь учнів також пропонуються для розв'язування задачі з несформульованим запитанням і задачі з надлишковими умовами. Задачі з надлишковими умовами спрямовані на формування вміння бачити комплекс даних, що потрібні для розв'язування задачі. Задачі з неформульованим запитанням створюють необхідність „особистісного” втручання в розглядуваний експеримент та самостійного створення моделі цього експерименту. Прикладами таких задач зі стохастики є задачі 14, 15 .

Задача 14. При підкиданні шестигранного грального кубика фіксували число, що випало на верхній грані. В результаті 100 підкидань “1” випала 20 разів, “3” – 15 разів, “5” – 7 разів. Закінчити формулювання задачі.

Задача 15. Нехай підкидається шестигранний гральний кубик і розглядаються простір елементарних подій та простір подій

. Припустимо, що

проведено $n=10$ таких підкидань і статистичні ймовірності елементарних подій

дорівнюють:

Обчислити статистичні ймовірності всіх подій з простору подій S .

При розв'язуванні таких задач відбувається не просто пошук шляху досягнення визначеної мети у визначених умовах, але й пошук самої мети, пошук умов, їхніх взаємозв'язків, уточнення того й іншого, що в свою чергу сприяє розвитку мислення школярів, їх уяви та фантазії.

Серед дидактичних принципів розвивального навчання науковці особливо відзначають провідну роль теоретичних знань. Для різностороннього і глибокого усвідомлення, міцного запам'ятовування учень повинен вдумливо вивчати новий матеріал не за один раз, а повертатися до його вивчення кілька разів протягом певного часу. Тому навіть пояснення нового матеріалу потрібно проводити не менше двох разів. Перший –

звичайними традиційними чи нетрадиційними методами: поясненням, евристичною бесідою, роботою з підручником, дослідженням тощо. Другий раз пояснення здійснюється більш швидким темпом з акцентуванням на вузлових питаннях теми. Під час пояснення нового матеріалу вчитель час від часу, зокрема тоді, коли необхідна особлива увага, звертається до учнів: „Зверніть увагу на ...”, „Подумайте над ...”, „Порівняйте ...”, „Чи можна стверджувати, що ...”, „Спробуйте пояснити ...”, „Сформулюйте твердження ...”.

Домашнє завдання учнів передбачає розв’язування завдань типу „Перевірити, чи є правильними наступні твердження ...”, у яких фактично перевіряється, наскільки учень зрозумів і усвідомив кожне поняття, кожне твердження. Така система питань до кожної теми зі стохастики розроблена М. І. Жалдаком та Г. О. Михаліним (див. [89]).

На початку наступного уроку відтворюються ключові питання теми. При цьому запитання формулюються не обов’язково в стандартному вигляді. Одне з типових питань: „Наведіть приклад”, зокрема:

1. Наведіть приклади експериментів, пов’язаних з підкиданням грального кубика, з двома, трьома, чотирма, п’ятьма, шістьма можливими наслідками випробування. Запишіть відповідні простори елементарних подій.

2. Наведіть приклади експериментів з трьома можливими наслідками випробування. Запишіть простори елементарних подій для таких експериментів. Чи може простір подій складатися лише з трьох подій?

Такі запитання відповідають вищому ступеню оволодіння матеріалом, що вивчається. Їх розгляд допомагає розвивати творче ставлення до предмета, критичне мислення, прищеплює звичку мати власну думку з обговорюваного питання, застосовувати твердження загального характеру на практиці. Досвід показує, що такі питання зазвичай викликають певні труднощі в учнів, оскільки випадають із стандартної схеми „дано – потрібно знайти”. Вони ближчі за своїм характером до так званих „обернених завдань”, у яких „результат” відомий, а потрібно відновити „початкові умови”. Іноді це може бути досить серйозне завдання – наприклад, у тому випадку, коли необхідно проаналізувати ситуацію, порівнюючи різні можливі варіанти. Рівень складності такого питання-завдання можна варіювати залежно від підготовленості учнів.

Наведемо приклади експериментів з трьома можливими наслідками випробування, що запропонували учні:

1. Експеримент полягає у визначенні розчинності у воді хімічних речовин:

;

2. Експеримент полягає у визначенні складових частинок атома елемента:

;

3. Експеримент полягає у визначенні агрегатного стану речовини:

;

4. Експеримент полягає у дослідженні функції на парність: $\Omega = \{\text{парна, непарна, ні парна ні непарна}\}$;

5. Експеримент полягає у підкиданні монети два рази та фіксації числа появи цифри: $\Omega = \{0, 1, 2\}$;

6. Кількість днів у місяцях високосного року: ;

7. Завоювання командою на олімпійських іграх золотої, срібної чи бронзової медалей ;

8. Вид атмосферних опадів у негоду в окремо взятій точці земної кулі: дощ, сніг, град .

„Опорні” фрази сформульовані у формі твердження, запитання, вимоги перевірити – з їх допомогою учні згадують важливі істини, на які потрібно „спиратися” при розв’язуванні задач. Наприклад, чи правильні твердження:

1. Число всіх подій деякого ймовірнісного простору може дорівнювати 3; 6; 8. (Відповідь: ні; ні; так.)

2. Для будь-яких подій A і B принаймні одна з них спричинює іншу. (Відповідь: ні.)

3. Поняття простору подій визначається за допомогою поняття події (чи поняття події визначається за допомогою поняття простору подій). (Відповідь: Ні. Так.)

Розгляд питань-„капканів” примушує внести необхідні корективи до помилкової точки зору:

1. Випробування полягає у підкиданні грального кубика один раз. Яку кількість елементів може містити простір елементарних подій? (Відповідь: від 2 до 6)

2. Чи може число елементарних подій бути строго більше, ніж число всіх подій? (Відповідь: так.)

3. Чи може бути число елементарних подій скінченним, а число подій нескінченним? А навпаки? (Відповідь: ні; так.)

Учням пропонується самостійно сформулювати та поставити запитання. Адже функції мислення не обмежуються тільки розв’язуванням конкретної задачі. Людина, що мислить, робить відкриття, виявляє більш глибокі запитання. Часто у відкритті найбільш важливим є правильна постановка питання. Прозріння, постановка продуктивного питання інколи є більш вагомим досягненням, ніж розв’язання самої задачі.

Зміст теоретичного матеріалу передбачає повторення й відтворення по кілька разів нового матеріалу. При цьому вчитель може провести з учнями роботу за картками взаємоконтролю, де ще раз повторюється і глибше усвідомлюється теоретичний матеріал. Питання, що пропонуються під час вивчення елементів стохастички учням, націлені на вироблення системного підходу до аналізу матеріалу, що вивчається.

Шкільна практика і дослідження фізіологів свідчать, що лише за таких умов у пам’яті учнів залишається „глибоко закарбований слід”, а знання зберігаються надовго. Розподілене в часі вивчення і закріплення нового матеріалу забезпечує більш глибоке усвідомлення і міцне запам’ятовування основного в навчальному матеріалі.

Свого часу К. Е. Цюлковський писав, що спочатку він робив відкриття, відомі всім, потім відомі небагатьом та, нарешті, нікому невідомі [69]. Тому навчання математики в школі треба будувати так, щоб воно уявлялося для учня серією маленьких відкриттів. Під час вивчення основних понять стохастички доцільно пропонувати учням задачі, розв’язування яких сприяє розвитку навчально-дослідницьких умінь, творчого мислення учнів, поступово підводило б їх до власних відкриттів. Уміння „складати” та „читати” таблиці повинні стати під час вивчення математики не лише засобом, що використовується при розв’язуванні задач, а й предметом спеціального навчання учнів, що здійснюється як при розв’язуванні задач, так і через спеціально дібрані вправи. Розглянемо розв’язування деяких з них.

Задача 16. 1. В коробці 3 червоних, 3 жовтих, 3 зелених кульки. Навмання по черзі беруть N кульок і фіксують колір отриманої кульки. Нехай деяка подія A полягає в тому, що серед взятих кульок є кульки трьох кольорів: червоного, жовтого та зеленого. Для кожного N від 1 до 9 заповнити таблицю таким чином:

– Якщо для розглядуваного експерименту подія $A = \emptyset$ – поставити H;

– Якщо подія A спричинюється деякими, проте не усіма, елементарними подіями E простору Ω – поставити П;

– Якщо подія A спричинюється кожною елементарною подією E простору Ω – поставити В.

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Подія А									

2. В коробці 3 червоних, 3 жовтих, 3 зелених кульки. Навмання вибирають по черзі 4 кульки і фіксують колір отриманої кульки. Подія В полягає в тому, що серед вибраних кульок є М кульок попарно різних кольорів. Для кожного М від 1 до 4 заповнити таблицю таким чином:

- Якщо для розглядуваного експерименту подія $V=\emptyset$ – поставити Н;
- Якщо подія В спричинюється деякими, проте не усіма елементарними подіями Е простору Ω – поставити П;
- Якщо подія В спричинюється усіма елементарними подіями Е простору Ω – поставити В.

М	1	2	3	4
Подія В				

3. У коробці 3 червоних, 3 жовтих, 3 зелених кульки. Навмання вибирають N кульок і фіксують колір отриманої кульки. Нехай подія С полягає в тому, що серед N кульок буде рівно М кульок попарно різного кольору. Який рядок та який стовпчик поданої нижче таблиці можна заповнити за результатами попередніх задач?

М	N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1										
2										
3										
4										

Розв’язання. Нехай подія А – „серед взятих кульок є кульки трьох кольорів: червоного, жовтого та зеленого”.

1. Якщо $N=1$, тоді можливим простором елементарних подій є множина

, де елементарна подія «Ч» – взяли червону кульку, елементарна подія «Ж» – взяли жовту кульку, елементарна подія «З» – взяли зелену кульку. Події А не сприяє жодна елементарна подія з простору Ω . Отже, для розглядуваного експерименту подія $A=\emptyset$ і потрібно в клітинку поставити Н.

Якщо $N=2$, тоді можливим простором елементарних подій є множина

, де елементарна подія «ЧЧ» – взяли дві червоні кульки, елементарна подія «ЧЖ» – взяли червону та жовту кульки і т.д. Множина не містить елементів з множини Ω . Отже, для розглядуваного експерименту подія $A=\emptyset$ і потрібно в клітинку поставити Н.

Якщо $N=3$, тоді можливим простором елементарних подій є множина

, де елементарна подія «ЧЧЧ» – взяли три червоні кульки, елементарна подія «ЧЧЖ» – взяли дві червоні та одну жовту кульки і т. д. В розглядуваному просторі елементарних подій містяться події E_i , які спричинюють розглядувану подію . Отже, в клітинку потрібно поставити П.

Міркуючи так само далі, отримаємо заповнену таблицю:

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Подія А	Н	Н	П	П	П	П	В	В	В
---------	---	---	---	---	---	---	---	---	---

2. Розв'язування є аналогічним до розглянутого в попередньому прикладі. Результати подані в таблиці:

М	1	2	3	4
Подія В	Н	П	П	Н

3. За умовою завдання заповнювати таблицю не треба, потрібно тільки вказати рядок та стовпчик, які можна заповнити за результатами, що отримані при розв'язуванні попередніх завдань:

М	Н	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1					Н					
2					П					
3		Н	Н	П	П	П	П	В	В	В
4					Н					

Це завдання є практичним і потребує застосування теоретичних знань, передбачає розвинуте вміння аналізувати, застосовувати синтез – об'єднувати пов'язані один з одним елементи у єдине ціле.

Задача 17. У трьох скриньках навмання розміщують три кульки. Побудувати простір елементарних подій, що відповідає експерименту. Описати можливу подію А – „існує скринька, що містить не менше двох кульок”.

Слід зазначити, що це є задача з неповною умовою, оскільки в умові немає жодного пояснення про властивості кульок та скриньок. Отже, ця задача може мати кілька розв'язків. Якщо і кульки і скриньки є однаковими (не розрізняються), то простір елементарних подій

Ω буде містити три елементи: , де – можливі наслідки, що визначаються таблицею 2.2. Для унаочнення елементарних подій виділимо ω_1 в таблиці сірим кольором.

Таблиця 2.2

Розподіл трьох однакових кульок у трьох скриньках, що не розрізняються

ω_1	***	-	-
ω_2	**	*	-
ω_3	*	*	*

Розглядуваній події А – „існує скринька, що містить не менше двох кульок” сприяють події ω_1, ω_2 .

Нехай маємо три скриньки різного кольору, в яких навмання розміщують три однакові кульки (які не розрізняються ні за кольором, ні за матеріалом, з якого вони виготовлені). Нехай маємо скриньки зеленого, червоного та жовтого кольорів. Щоб описати простір елементарних подій можливих наслідків випробування, складемо допоміжну таблицю 2.3, де $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{10}$ – можливі наслідки випробування. Для унаочнення також виділимо ω_1 в таблиці сірим кольором.

Таблиця 2.3

Розподіл трьох однакових кульок у трьох скриньках різного кольору

	Зелена скринька	Червона скринька	Жовта скринька
--	-----------------	------------------	----------------

ω_1	***	-	-
ω_2	-	***	-
ω_3	-	-	***
ω_4	**	*	-
ω_5	**	-	*
ω_6	*	**	-
ω_7	*	-	**
ω_8	-	*	**
ω_9	-	**	*
ω_{10}	*	*	*

Множина $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{10}\}$ є простором елементарних подій можливих наслідків випробування. Події A – „існує скринька, що містить не менше двох кульок”, сприяють елементарні події $\omega_1 - \omega_9$.

Нехай маємо ті ж самі скриньки зеленого, червоного та жовтого кольорів. Як зміниться простір елементарних подій Ω , якщо кульки різні? Позначимо кульки номерами 1, 2, 3. Для побудови простору елементарних подій складемо допоміжну таблицю 2.4.

Множина елементарних подій буде містити вже 27 елементів. А розглядуваній події A сприяють події $\omega_1 - \omega_{21}$.

Таблиця 2.4

Розподіл трьох різних кульок у трьох скриньках різного кольору

	Зелена скринька	Червона скринька	Жовта скринька		Зелена скринька	Червона скринька	Жовта скринька
ω_1	123	-	-	ω_{15}	3	-	12
ω_2	-	123	-	ω_{16}	-	12	3
ω_3	-	-	123	ω_{17}	-	13	2
ω_4	12	3	-	ω_{18}	-	23	1
ω_5	13	2	-	ω_{19}	-	1	23
ω_6	23	1	-	ω_{20}	-	2	13
ω_7	1	23	-	ω_{21}	-	3	12
ω_8	2	13	-	ω_{22}	1	2	3
ω_9	3	12	-	ω_{23}	1	3	2
ω_{10}	12	-	3	ω_{24}	2	1	3
ω_{11}	13	-	2	ω_{25}	2	3	1
ω_{12}	23	-	1	ω_{26}	3	1	2
ω_{13}	1	-	23	ω_{27}	3	2	1
ω_{14}	2	-	13				
Природним стає баж	123	-	-				

анн я учн ів скл аст и сам ості йно про стір еле мен тар них под ій, що від пов ідає екс пер име нту з трі ома різн ими кул ька ми, що роз таш ова ні в трі ох одн ако вих скр			
--	--	--	--

инь ках (таб лиц я 2. 5). Таб лиц я 2. 5				
Розподіл трюх різн их кул ьок у трюх одн аков их скр инь ках Ω1				
	Ω2	12	3	-
	Ω3	13	2	-
	Ω4	23	1	-
	Ω5	1	2	3

Розв'язування такої задачі надає можливість учням усвідомити важливість простору елементарних подій залежно від обраної моделі експерименту.

Кулькові схеми є поширеними в теорії ймовірностей. І розглянутий приклад є корисним для учнів, оскільки ілюструє той факт, що природа елементів простору елементарних подій не відіграє важливої ролі в теорії ймовірностей. Цей простір визначається ідеалізованим експериментом.

Кулькові схеми допускають велику кількість практично важливих інтерпретацій. Зокрема, розміщення k кульок у n скриньках:

1. Розподіл днів народження k чоловік у n скриньках;
2. Розподіл k чоловік за ознакою статі (n);
3. Розподіл k друкарських помилок у книзі, що має n сторінок;
4. При стрілянні в n мішеней із k гвинтівки;
5. У дослідженні віку обраної групи людей k – кількість людей, n – вік;
6. Класифікація k нещасних випадків, що сталися протягом тижня (n);
7. Розміщення k книжок на n полицях.

Допитливі учні можуть навести приклади розміщень k кульок у n скриньках з біології (розподіл генів), хімії (хімічні реакції), фізики (фотоемульсія, лічильник Гейгера).

Аналіз таблиць сприяє формуванню уміння робити висновки, а уміння оформити таблицю, побудувати графіки, діаграми включає читання відомостей із статистичних даних, порівняння цифр, їх групування. Розв'язування наступних задач сприяє формуванню саме таких умінь.

Задача 18. В таблиці 2.6 подано сторінку з книги реєстрації новонароджених деякого міста. Сформулювати запитання, на які можна знайти відповідь з цієї таблиці.

Використовуючи дані таблиці 2.6, запропонувати інші можливі таблиці, що дають відповіді на сформульовані запитання.

Після проведеного аналізу заданої таблиці 2.6 учні пропонують знайти відповіді на такі запитання:

- Скільки дітей народилося протягом тижня?
- Скільки народилося хлопчиків, скільки народилося дівчаток протягом тижня?
- Який відсоток дітей народилися в понеділок?
- У який день тижня народилася найбільша кількість дітей?
- Яке ім'я є найбільш поширеним?

Таблиця 2.6

Сторінка з книги реєстрації новонароджених

Дата народження	Ім'я	Стать дитини
01.10.2005	Дарина	жін.
01.10.2005	Кирило	чол.
02.10.2005	Микита	чол.
04.10.2005	Ілля	чол.
04.10.2005	Дарина	жін.
05.10.2005	Світлана	жін.
05.10.2005	Ілля	чол.
05.10.2005	Микола	чол.
06.10.2005	Ілля	чол.
07.10.2005	Тетяна	жін.

Дані таблиці 2.6 можна оформити у вигляді кількох таблиць (див., наприклад, табл. 2.7 – 2.10).

Таблиця 2.7

Дата народження	Кількість новонароджених
01.10.2005	2
02.10.2005	1
03.10.2005	0
04.10.2005	2
05.10.2005	3
06.10.2005	1
07.10.2005	1

Таблиця 2.8

Ім'я	Кількість новонароджених
Дарина	2
Ілля	3
Кирило	1
Микита	1
Микола	1
Світлана	1
Тетяна	1

Заповнення таблиці 2.10 потребує використання календаря, щоб з'ясувати відповідність дати народження дню тижня. Оскільки кожному дню тижня відповідає певне число та місяць року, то значення другого стовпчика таблиці 2.7 та таблиці 2.10 містять однакові відомості.

Таблиця 2.9

стать	Кількість новонароджених
жін.	4

Таблиця 2.10

День тижня	Кількість новонароджених
понеділок	0

чол.	6
------	---

вівторок	2
середа	3
четвер	1
п'ятниця	1
субота	2
неділя	1

Розглянуте завдання є корисним для формування вмінь працювати з таблицями, оскільки вдалий спосіб подання даних відіграє важливу роль у статистичних дослідженнях. А використання різних таблиць надає можливість подавати статистичні дані в найбільш зручній для сприйняття формі.

Задача 19. В таблиці 2.11 подано результати зовнішнього тестування учнів.

Таблиця 2.11

Результати зовнішнього тестування учнів

№п/п	Учень	№ задачі					
		1	2	3	4	5	6
1	Пенчук Д.	4	6			6	5
2	Сурков В.	4		2	8	8	
3	Сорокіна О.		5	6		6	8
4	Вороніна М.	3		2	3	5	
5	Гупалкін П.	4	6		2		5
6	Павлов Г.	2	5				3
7	Орел О.			4	2	10	
8	Соколова Т.	2	3			6	
9	Веткін Р.		5	6	1		4
10	Комісаренко А.	4				8	

Використовуючи дані таблиці 2.11, дати відповідь на запитання:

1. Хто посів перше, друге та третє місце?
2. Скільки балів можна було отримати за кожне завдання, якщо відомо, що кожне завдання розв'язав правильно хоча б один з учнів.

3. Яке завдання виявилось для учнів найважчим? Як це визначити?

Для відповіді на перше запитання задачі учню слід доповнити задану таблицю стовпчиком, у якому обчислюється загальна кількість отриманих учнями балів. Проаналізувавши отримані дані, можна дістати відповідь: Сорокіна О. набрала 25 балів, Сурков В. 22 бали, Пенчук Д. 21 бал.

Відповідь на друге запитання задачі передбачає аналіз кількості отриманих балів з кожного завдання окремо. Оскільки за умовою кожне завдання розв'язав правильно хоча б один з учнів, то за кожне завдання можна було отримати відповідно 4, 6, 6, 8, 10, 8 балів.

Щоб відповісти на третє запитання задачі, потрібно відшукати в заданій таблиці завдання, з яким більша частина учнів не змогла впоратися. Третє, четверте та шосте завдання не змогли розв'язати п'ятеро учнів. Серед тих учнів, які виконали третє завдання, двоє набрали найбільшу можливу кількість балів. Серед учнів, які правильно розв'язали четверте завдання, тільки один учень набрав найбільшу можливу кількість балів. Також тільки один учень набрав найбільшу можливу кількість балів при розв'язуванні шостого завдання.

Якщо ж порівняти між собою третє, четверте та шосте завдання за кількістю балів, що можна було отримати за їх правильне розв'язування, то можна зробити висновок, що

рівень складності четвертого та шостого є вищим за рівень складності запропонованого третього завдання. Разом з тим учні, які розв'язували шосте завдання, отримали в порівнянні з учнями, які розв'язували четверте завдання, більшу кількість балів. Тому найважчим для учнів завданням слід вважати запропоноване четверте завдання.

Щоб сприяти формуванню в учнів умінь табличні дані подавати графічно, пропонуємо учням наочно представити відповідь на останнє запитання.

Для цього можна, наприклад, визначити «середній бал» для кожної задачі та знайти його відношення до максимального балу за цю задачу. За побудованою діаграмою (рис. 2.7) відповідь на третє запитання стає очевидною.

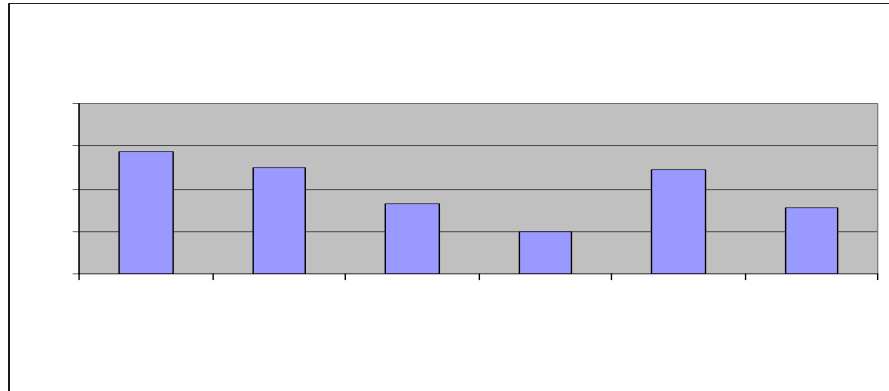


Рис. 2.7.

2.2.4. Числові характеристики розподілу ймовірностей. Особливо важко для учнів на етапі формування умінь моделювати здійснити перехід від абстрактного до конкретної практичної ситуації. Тому при вивченні числових характеристик розподілів учням можна запропонувати завдання, що сприяють розумінню суті цих характеристик та містять елементи дослідження, при цьому зміст задач досить точно описує деяку реальну ситуацію:

Задача 20. На шосе завдовжки 100 км є 10 гаражів. Для проектування будівництва бензоколонки були зібрані дані про число передбачуваних поїздок на заправку з кожного гаража. Результати обстеження подані в наступній таблиці:

На якому км шосе розташований гараж	7	26	28	37	40	46	60	78	86	92	Всього поїздок
Передбачуване число поїздок	10	15	5	20	5	25	15	30	10	65	200

Де поставити бензоколонку, щоб загальний пробіг автомашин до бензоколонки був найменшим?

Розв'язання. Довжина шосе – 100 км, серединою розглядуваного шосе буде 50 км. Якщо бензоколонку поставити посередині шосе, тобто на 50-му км, то пробіг автомашин з урахуванням числа поїздок складе:

в одному напрямку та

у протилежному напрямку. Загальний пробіг в обидва напрямки складатиме 5390 км.

Розглянемо розподіл частот, що відповідає умові задачі та визначається наступною таблицею:

	7	26	28	37	40	46	60	78	86	92
	10	15	5	20	5	25	15	30	10	65

Середнім арифметичним спостережених значень буде число 63,85, тобто середньою ділянкою шосе з урахуванням числа поїздок є 63,85км. В цьому випадку пробіги автомашин складуть:

в одному напрямку та у протилежному.
Загальне число складає 4951,5 км, що на 438,5 км менше, ніж в попередньому обчисленні.

Ще однією величиною, що відноситься до середніх, є медіана. Медіана – це таке значення, що є серединою впорядкованого варіаційного ряду. За допомогою педагогічного програмного засобу GRAN1 знаходимо, що 78 км шосе є медіаною. Тоді пробіги автомашин складуть:

в одному напрямку та у протилежному. Загальний пробіг дорівнює 4810 км, тобто менше загальних пробігів, обчислених у попередніх випадках. Таким чином, для даної задачі медіана має таку властивість, що сума абсолютних величин відхилень варіант від медіани менша, ніж від будь-якої іншої з розглянутих величини.

Можливо, що і медіана – не найкращий варіант, може є ще кращий? Знайдемо мінімум середнього пробігу:

(*)

Такий мінімум можна знайти графічно за допомогою педагогічного програмного засобу GRAN1 (рис. 2.8). Чи буде він співпадати з медіаною чи ні?

За графіком побудованої функції (рис. 2.8), що відповідає (*), переконуємося, що мінімум середнього пробігу співпадає зі знайденим значенням медіани.

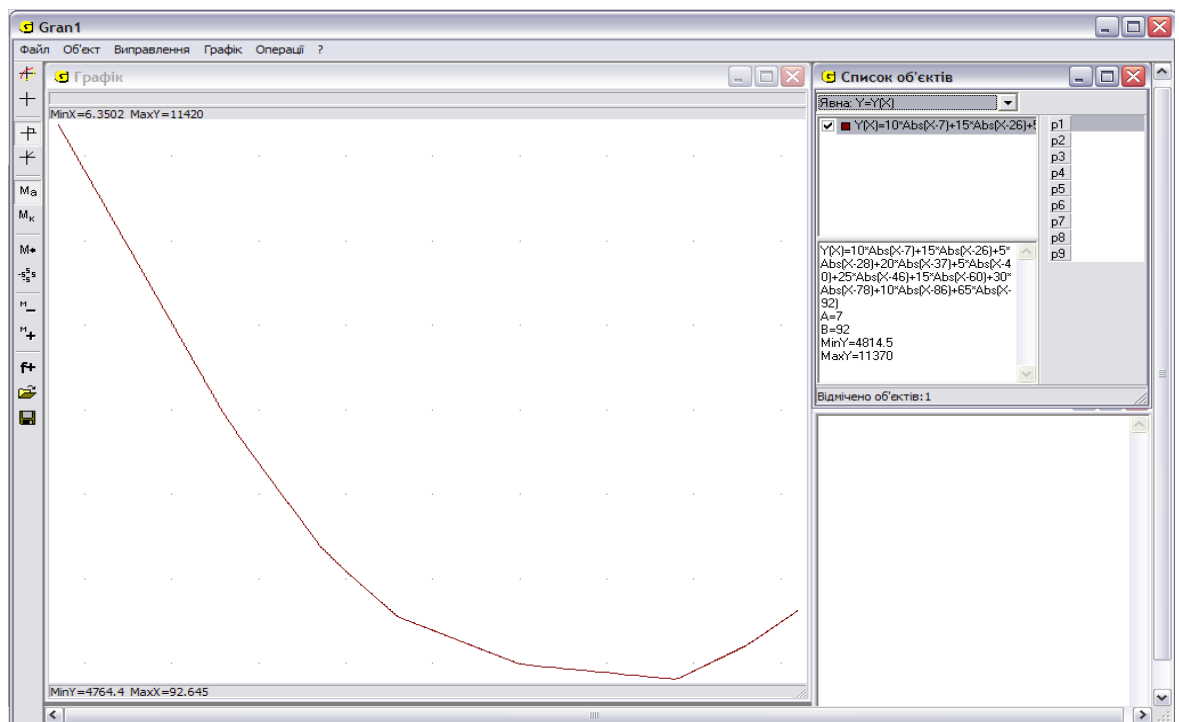


Рис. 2.8.

Відповідь: щоб загальний пробіг автомашин на заправку був найменшим, бензоколонку потрібно поставити на 78 км шосе.

Розв'язування цієї задачі вимагає розглянути всі можливі випадки. Уміння передбачити всі можливі варіанти деякої ситуації свідчать про рівень розвинутого мислення того, хто її розглядає. Інколи задача, яка прийнята суб'єктом, видається йому такою, що не вимагає винахідливості і розв'язується стандартним чином. Але на подальших етапах розв'язування з'ясовується, що раніше відомі методи не ведуть до розв'язку. Розглянемо приклад такої задачі:

Задача 21. В таблиці наведено дані про кількість міжміських дзвінків, що отримували на АТС кожної години протягом доби:

Проміжок часу	(0;1]	(1;2]	(2;3]	(3;4]	(4;5]	(5;6]	(6;7]	(7;8]	(8;9]	(9;10]
Кількість дзвінків	132	108	76	28	12	34	98	116	408	414

Проміжок часу	(10;11]	(11;12]	(12;13]	(13;14]	(14;15]	(15;16]	(16;17]
Кількість дзвінків	426	408	408	170	172	396	380

Проміжок часу	(17;18]	(18;19]	(19;20]	(20;21]	(21;22]	(22;23]	(23;24]
Кількість дзвінків	362	182	168	156	174	176	120

Розраховуючи, що „середня” хвилина коштує 0.35 гривень, запропонувати можливі тарифи погодинної сплати та побудувати відповідну таблицю. Порівняти отримані тарифи з системою тарифів вашої АТС.

Розв'язування цієї задачі викликає певні труднощі в учнів, оскільки подана таблиця розуміється ними як заданий інтервальний розподіл кількості дзвінків. І тому розв'язування йде за класичною схемою: за допомогою педагогічного програмного засобу GRAN1 знаходять числові характеристики, будують гістограму. Проаналізувавши отримане графічне зображення, роблять висновок, що найбільша кількість дзвінків надійшла з 10 до 11 години, найменша – з 4 до 5 години, але це видно і з таблиці, а тлумачення отриманих числових характеристик, яке б відповідало умові задачі, також важко сформулювати учням.

„Основна небезпека використання гіпотези, яка напевно не відповідає дійсності, полягає в тому, що вона може перешкоджати появі кращої”, - вважає Е. Боно. Саме це і відбувається з учнями на шляху до розв'язку цієї задачі. Для її розв'язування потрібно знайти середню кількість дзвінків, що надійшли на АТС протягом години. Тому задану кількість дзвінків доцільніше розглядати як спостережені значення дискретної величини. За допомогою педагогічного програмного засобу GRAN1 знаходять математичне сподівання

Отже, якщо в деякому проміжку є наближене число дзвінків, то сплата за хвилину розмови повинна бути 0.35 грн., оскільки „середня” хвилина розмови коштує 0.35 гривень за умовою задачі. Якщо число дзвінків значно більше середнього значення

, то й сплата повинна бути більшою, і навпаки, якщо число дзвінків менше, ніж – оплата повинна бути меншою. Така економічна політика повинна „змусити” клієнтів АТС відмовитися від дзвінків, коли лінія перевантажена, й дзвонити тоді, коли вона вільна. Тарифна таблиця може виглядати по-різному – це власний погляд того, хто розв'язує задачу, але середнє значення чисел, що позначають тариф, має дорівнювати 0.35, тобто відповідати ціновій політиці АТС та сприяти запланованому прибутку. Наприклад, тарифна політика може виглядати наступним чином:

Проміжок часу	(0;1]	(1;2]	(2;3]	(3;4]	(4;5]	(5;6]	(6;7]	(7;8]	(8;9]	(9;10]
---------------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	--------

Ціна за хв. (грн.)	0,22	0,18	0,12	0,05	0,02	0,06	0,16	0,19	0,70	0,68
Проміжок часу	(10;11]	(11;12]	(12;13]	(13;14]	(14;15]	(15;16]	(16;17]			
Ціна за хв. (грн.)	0,70	0,67	0,67	0,28	0,28	0,65	0,62			
Проміжок часу	(17;18]	(18;19]	(19;20]	(20;21]	(21;22]	(22;23]	(23;24]			
Ціна за хв. (грн.)	0,59	0,30	0,28	0,26	0,28	0,29	0,20			

Задача 22. Кількісний розподіл учителів за віком подано в таблиці:

Вік	[25;30)	[30;35)	[35;40)	[40;45)	[45;50)	[50;55)	[55;60)	[60;65)
% учителів	7	9,5	12	18	22	17,5	10,5	3,5

Через скільки років близько половини з них вийде на пенсію, якщо середній вік, в якому вчитель йде на пенсію, складає 62 роки?

Розв'язання. Оскільки сума абсолютних величин відхилень варіант від медіани менша, ніж від будь-якої іншої величини, то потрібно обчислити значення медіани. За допомогою GRAN1 знаходимо, що значення медіани дорівнює 45.8. Отже, половина вчителів за віком старші 45.8, тому через _____ років близько половини вчителів, що працюють сьогодні, вийдуть на пенсію.

Задача 23. Різницю між варіантою та значенням середнього арифметичного назвемо відхиленням від середнього арифметичного. Чому дорівнює в довільному ряді спостережуваних даних сума відхилень даних від середнього арифметичного?

Розв'язання. Нехай _____ – заданий ряд даних з середнім арифметичним спостережених значень, що дорівнює _____. Значення _____, _____, …, _____ – є відхиленнями від середнього арифметичного. Знаходимо суму значень _____, _____, …, _____:

оскільки _____.

Відповідь: 0.

Розв'язування цієї задачі є корисним, оскільки надає можливість пояснити учням, чому під мірою розсіювання ряду даних розуміють середнє квадратичне відхилення.

Учні мають набути вміння розв'язувати обернену задачу – добувати відомості з рисунків, діаграм, полігонів, гістограм. Адже „читання” таблиць, діаграм, інших графічних об'єктів передбачає вміння аналізувати дані, бачити за ними конкретні явища з відповідними властивими особливостями і причинними зв'язками.

Задача 24. Графічно число запізнь потягів протягом тижня подано на рис. 2.9. Скласти таблицю відносних частот запізнь протягом тижня, визначити середнє число запізнь за тиждень та середнє квадратичне відхилення отриманого розподілу.

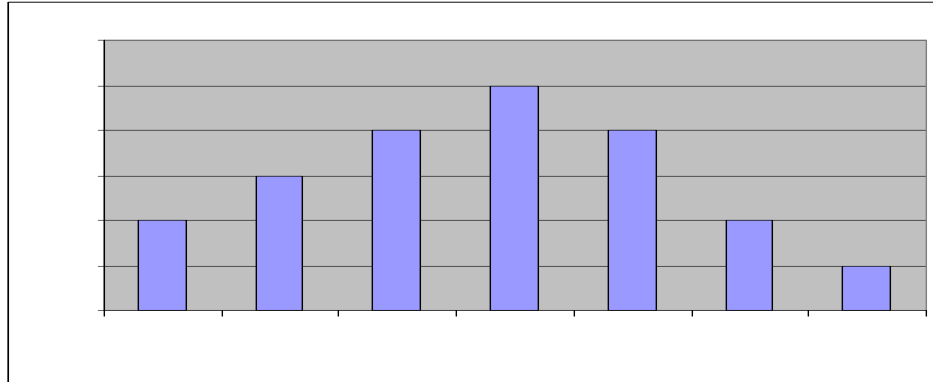


Рис. 2.9.

За заданою діаграмою учні визначають, що потяги запізнювалися 1, 2, 3, 4 та 5 разів. При цьому спостережені значення склали наступний ряд: 2, 3, 4, 5, 4, 2, 1. Використовуючи діаграму, учні складають відповідні ряди розподілу абсолютних та відносних частот, що подані в таблицях 2.12 і 2.13.

Таблиця 2.12

	1	2	3	4	5	Разом
	1	2	1	2	1	7

Таблиця 2.13

	1	2	3	4	5	Разом
	0,14	0,29	0,14	0,29	0,14	1

Середнє число запізнень за тиждень відповідає значенню центра розсіювання

відносних частот, що обчислюється за формулою

. Отже,

Для обчислення середнього квадратичного відхилення знаходять спочатку значення дисперсії отриманого дискретного розподілу за формулою:

Тоді середнім квадратичним відхиленням є число

Ця задача спрямована також на формування умінь працювати з заданими даними в понятійних рамках самої стохастики. Оскільки більша частина учнів, користуючись власним досвідом складання таблиць, пропонує для розв'язування таблицю відносних частот запізнень протягом тижня в наступному вигляді:

День тижня	Понеділок	Вівторок	Середа	Четвер	П'ятниця	Субота	Неділя	Разом
Число запізнь	2	3	4	5	4	2	1	21
Відносна частота	0,0952	0,1429	0,1905	0,2381	0,1905	0,0952	0,0476	1

2.2.5. Про випадкову величину в шкільному курсі математики. З введенням поняття ймовірнісної моделі (ймовірнісного простору) з'являється можливість ознайомити учнів з поняттям випадкової величини на достатньому науковому рівні, коректно і доступно.

Нехай задано ймовірнісний простір Ω і на множині елементарних подій задано числову функцію f , яка кожному елементові ω множини ставить у відповідність деяке дійсне число $f(\omega)$. Це число $f(\omega)$ (чи відповідну точку на числовій осі) називають образом елемента ω . Множина всіх точок (елементарних подій) Ω , яким поставлено у відповідність на числовій осі одну і ту ж точку x , називається *прообразом* точки x . Прообраз точки x позначають символами $f^{-1}(x)$. Щоб знайти прообраз точки x , потрібно знайти множину всіх розв'язків рівняння $f(\omega) = x$.

Образом деякої множини A називають об'єднання образів всіх елементів множини A , тобто $f(A)$, яке позначають через $f(A)$. Прообразом деякої множини B точок на числовій осі називають об'єднання прообразів всіх елементів множини B , тобто $f^{-1}(B)$, яке позначають через $f^{-1}(B)$. Зокрема $f^{-1}(\{x\})$ – це множина розв'язків нерівності $f(\omega) \leq x$, тобто $\{\omega \in \Omega : f(\omega) \leq x\}$.

Нехай f образ множини A при відображенні f , тобто $f(A)$ – це множина значень функції f , і задана деяка сукупність підмножин B_1, B_2, \dots, B_n множини $f(A)$, що задовольняє вимоги 1s-3s:

1s. $B_i \cap B_j = \emptyset$;

2s. Якщо $x \in B_i$, то $i \in \{1, 2, \dots, n\}$;

3s. Якщо $x \in B_i$, то $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Якщо при цьому для будь-якої підмножини A виявляється $f(A) \cap B_i = \emptyset$, тоді функцію f , x , називають випадковою величиною [89]. Оскільки при цьому значення $f(\omega)$ належить множині B_i тоді й тільки тоді, коли $\omega \in A_i$, то статистична ймовірність (відносна частота) попадання значень $f(\omega)$ у множину B_i дорівнює статистичній ймовірності (відносній частоті) попадання елементарних подій

.3 у множини .3 , тобто
.3 , .3 , .3 .
Лише у випадку, коли будь-яка множина є подією, будь-яка функція , є випадковою подією для будь-якої сукупності , що задовольняє умови 1s-3s.

Випадкову величину називають простою, якщо множина значень цієї величини скінченна, тобто , де натуральне число – фіксоване, а числа попарно різні [179]. Далі наведено окремі приклади простих випадкових величин.

Приклад 11. Функція , є простою випадковою величиною, яку називають сталою випадковою величиною. Множина значень сталої випадкової величини складається з одного елемента , тобто , а тому

Приклад 12. Якщо – випадкова подія і

то для будь-якої сукупності , що задовольняє умови 1s-3s, , є простою випадковою величиною і цю випадкову величину називають індикатором події . Множина значень цієї простої випадкової величини складається з двох елементів 1 і 0, тобто , а тому у випадку маємо і тому

Приклад 13. Нехай і кожна множина є подією, а , , тобто – кількість очок на грані грального кубика, якою кубик падає догори після однократного підкидання. Тоді для будь-якої сукупності , що задовольняє умови 1s-3s, – проста випадкова величина з можливими значеннями 1, 2, 3, 4, 5, 6, тобто .

Приклад 14. Кількість відбувань події в серії із випробувань – проста випадкова величина, що може набувати значень 0, 1, 2, ..., , . При цьому

– кількість , що дорівнюють , серед усіх , і кожна множина є подією з імовірнісною мірою , де – кількість координат , що дорівнюють . Тому

Приклад 15. Статистична ймовірність події, визначена за результатами

серії із випробувань – проста випадкова величина, що може набувати значень

, , , ..., , . При цьому і такі, як і у прикладі 4, а

, де – кількість, що дорівнюють, серед усіх

Якщо сукупність найширша з можливих, то для того щоб числова функція

була простою випадковою величиною, важливо щоб вона була визначена на просторі елементарних подій і мала б скінченну множину значень [97], [179].

Для обізнаності учнів загальноосвітніх шкіл, які навчаються в класах природничого чи загальнокультурного спрямування, цих відомостей про поняття випадкової величини достатньо. З метою формування навчально-дослідницьких умінь учнів і розтлумачення введених понять учитель має розглянути окремі приклади. При цьому пояснення має на меті показати шлях думки, шлях проведення перевірки теоретичних понять, шлях можливого проведення теоретичного дослідження.

Приклад 16. Підкидається тетраедр, одна грань якого пофарбована у синій колір, друга – у жовтий, третя – у зелений, а четверта – залишилася нефарбованою. Результатом експерименту вважають колір грані, на яку впав тетраедр. Тоді є простором елементарних подій розглядуваного експерименту.

Нехай - тетраедр впав на пофарбовану грань, – тетраедр впав на нефарбовану грань, простір подій розглядуваного експерименту складається з підмножин множини :

Відомо, що, . Тоді є ймовірнісним простором.

Нехай на множині задана функція наступним чином: , якщо ; , якщо . Тоді . Розглянемо сукупність підмножин множини :

Ця сукупність задовольняє вимоги .

Оскільки одне й те саме число 1 поставлено у відповідність елементарним подіям і “С”, і “Ж”, і “З”, то прообразом точки 1 є множина .

Це означає, що статистична ймовірність (відносна частота) того, що функція набуває значення 1, дорівнює статистичній ймовірності (відносній частоті) попадання в підмножину, тобто дорівнює 0.70.

Прообразом точки 2 є одноелементна множина $\{2\}$, тому статистична ймовірність того, що X набуває значення 2, дорівнює статистичній ймовірності того, що тетраедр впав на нефарбовану грань, тобто дорівнює 0.30.

Далі потрібно знайти статистичні ймовірності попадання значень X у різні підмножини множини Ω , \mathcal{A} . В нашому випадку статистична ймовірність попадання значень X у підмножину A така ж, як статистична ймовірність попадання елементарних подій E в підмножину A , тобто дорівнює 1.00.

Як бачимо, прообрази всіх підмножин $A \in \mathcal{A}$ належать до простору подій \mathcal{F} , тобто σ -алгебри, коли X є випадковою величиною, причому простою.

Таким чином, на сукупності підмножин множини Ω визначено ймовірнісну міру P . При цьому задовольняє вимоги 1s-3s, а P задовольняє вимоги 1p-3p:

1p. $P(A) \geq 0$.

2p. Якщо $A, B \in \mathcal{A}$, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

3p. $P(\Omega) = 1$.

Тому (Ω, \mathcal{A}, P) є ймовірнісним простором. При цьому говорять, що ймовірнісний простір (Ω, \mathcal{A}, P) породжується (генерується) випадковою величиною X із ймовірнісного простору (Ω, \mathcal{A}, P) .

Приклад 17. Нехай ймовірнісний простір (Ω, \mathcal{A}, P) той самий, що і в прикладі 16, а на множині Ω задано функцію наступним чином: $X(\omega) = 1$, якщо ω належить до множини A , тобто якщо тетраедр впаде на грань, що пофарбована у синій колір, і $X(\omega) = 2$, якщо ω належить до множини B , тобто якщо тетраедр впаде на грань не синього кольору. В цьому випадку також $P(A) = 0.30$.

Розглянемо таку ж саму сукупність підмножин множини Ω :

Оскільки X є випадковою величиною, так само, як і Y , то в даному прикладі функція X , задана на множині Ω , не є випадковою величиною. Для так заданої функції X , на заданому ймовірнісному просторі (Ω, \mathcal{A}, P) неможливо визначити статистичну ймовірність (відносну частоту)

чи , бо множини і виявляються невимірними відносно заданої ймовірнісної міри , .

Якщо ж в цьому прикладі розглянути таку сукупність .3 підмножин G множини .3 : .3 , тоді функція .3 , .3 , виявляється .3 вимірною, бо .3 і .3 , .3 .3

Учням, які цікавляться математикою, можна запропонувати з'ясувати, за яких умов будь-яка дійсна функція, задана на , буде -вимірною, тобто випадковою величиною. При висловленні припущень та самостійній їх перевірці учнями здійснюється повний процес теоретичного дослідження. А саме завдання спрямовано на розвиток спостережливості, винахідливості, самостійності.

2.3. Організаційні форми навчання, що сприяють формуванню навчально-дослідницьких умінь учнів

Досвід науковців, педагогів і власні спостереження показують, що схильність учнів до дослідницької діяльності в значній мірі індивідуальна. Вона залежить від розвитку їхніх пізнавальних інтересів, аналітичних здібностей, змісту й обсягу знань, спостережливості, пам'яті, уваги, гнучкості мислення, багатства уявлень, працьовитості, волі, спроможності до зосередженої й відповідальної праці.

Досвід навчання учнів показує, що від правильної організації процесу навчання в значній мірі залежить досягнення поставленої мети. Тому в практиці форми організації навчання (урок, семінарське заняття, практичне заняття, лабораторна робота, факультатив, екскурсія тощо) відіграють суттєву роль. З метою формування навчально-дослідницьких умінь учнів, навчання елементів стохастики має відбуватися в рамках різноманітних організаційних форм.

У процесі лекції для досягнення поставленої мети формування навчально-дослідницьких умінь учнів, вчитель при повідомленні теоретичного матеріалу сам чи з допомогою учнів формулює проблему, знайомить з логікою пізнання, сприяючи власним відкриттям учнів. При цьому в лекції має бути обов'язково присутнє слово учня, щоб уникнути пасивного сприйняття теоретичних відомостей, оскільки мовлення, як особливий самостійний вид діяльності, є необхідним при здійсненні багатьох видів діяльності, що потребують спілкування людей.

Для формування навчально-дослідницьких умінь учнів мовна діяльність має виключно важливе значення. „Ми добре знаємо лише стільки, скільки можемо сказати; ми добре знаємо лише те, що здатні висловити”, – вважав свого часу А. Дістервег [169]. У мовній діяльності відображається наукова лексика навчальних дисциплін, формується лаконізм подання навчального матеріалу, логіка доказовості. Мовлення забезпечує учням

сприйняття відомостей від вчителя та інших учнів, формує і реалізує прагнення доводити та переконувати, закріплює і реєструє в словах та реченнях результати мислення, робить можливим обмін думками, надає можливість висловлюватись. До того ж мовлення супроводжує весь навчальний процес, залучаючи вчителя й учнів до спілкування.

Для досягнення поставленої мети на лекції зі стохастики можна:

- запропонувати учням відповісти на 2-3 запитання, що записані попередньо на дошці. Наприкінці лекції окремі учні зачитують свої відповіді, інші проводять порівняння та аналіз прослуханого та співвідносять відповідність теоретичним відомостям;

- на дошці записати план лекції у вигляді запитань. Наприкінці лекції також відбувається аналіз та корегування відповідей окремих учнів;

- запропонувати учням скласти самостійно план лекції в процесі подання теоретичних відомостей вчителем. Наприкінці лекції складені плани заслуховуються та порівнюються;

- запропонувати учням наприкінці лекції поставити вчителю 2-3 запитання за змістом навчального матеріалу;

- попередити учнів на початку лекції, що висновки вони мають сформулювати самостійно та записати їх у зошит.

Слід відзначити, що в процесі навчання учні мають відчувати психологічну захищеність: до думок, які висловлюються учнями, потрібно ставитися з повагою. Дитина має впевнитися у власних силах і продукувати правильні ідеї. Без такої впевненості дитяча думка завжди буде скутою, а отже, втрачатиме оригінальність. Тому на уроці створюється атмосфера, що благотворно впливає на психологічний стан учнів, сприяє зацікавленості, що веде, у свою чергу, до появи нових, оригінальних ідей, бажанню творити. Для цього навчальний процес планується таким чином, щоб учні мали широкі можливості запитувати, могли висловлювати власні думки, тобто щоб завжди було місце для учня.

Під семінаром в дидактиці розуміють вид тематичного заняття, що має забезпечити учням створення особистих освітніх продуктів у ході колективно-групової роботи [271]. У процесі навчання учнів елементів стохастики результативним виявилось проведення семінару – круглого столу з теми „Стохастика як наука”, що проводився на початку вивчення теоретичних відомостей зі стохастики. Такий підхід дає змогу ввести учнів у навчальний предмет, орієнтувати їх на можливі результати навчання. На семінар учні готують повідомлення, доповіді, реферати переважно з історії виникнення, розвитку та сучасного стану елементів стохастики. Саме так можна дати учням уявлення про науку стохастичну, про питання та проблеми цієї науки, про місце стохастики в системі наук та в реальному житті.

Повідомлення – подання відомостей з одного, як правило, пункту теми, що розглядається, яка взята, зазвичай, з одного джерела і не передбачає узагальнення або певних самостійних висновків з боку учня. Повідомлення може стосуватися як самої науки, що вивчається, так і її історії. Наприклад: „Крива А. Кетле”, „При розв’язуванні яких задач виникла теорія ймовірностей”, „Застосування елементів стохастики на сучасному етапі” (застосування імовірнісних, статистичних методів у фізиці, хімії, біології, економіці, демографії, соціології, лінгвістиці, астрономії та ін.), „Критерій К. Пірсона”, „Діаграми Ейлера-Венна”, „Таблиці випадкових чисел”.

Доповідь, на відміну від повідомлення, є більш розгорнутою формою подання відомостей, базується на кількох джерелах, містить певні узагальнення та висновки самого учня. Теми доповідей з елементів стохастики можуть бути такими: „Чи існують закономірності, яким підпорядковуються випадкові явища?”, „Застосування методів теорії ймовірностей у військовій справі”, „Теорія ймовірностей і теорія інформації”, „Аксиоматичний підхід в теорії ймовірностей”, „Нормальний розподіл ймовірностей”, „Телефонний довідник як аналог таблиць випадкових чисел”.

Письмовою, найчастіше необмеженою за обсягом формою доповіді, створеної на основі кількох джерел з метою найбільш повного висвітлення певної теми, є реферат, наприклад, з теми: „Початки теорії ймовірностей”, „Становлення теорії ймовірностей у XVII столітті”, „Теорія ймовірностей та математична статистика в Росії та в Україні у XIX столітті”, „Теорія ймовірностей у XX столітті”, „Ймовірнісний характер законів Менделя”, „Крива Кетле та крива Гаусса”. При цьому теми для рефератів формулюються таким чином, щоб уникнути можливості отримати готовий реферат з мережі Internet.

Усі теми повідомлень, доповідей, рефератів, що подані в даній роботі, є власним набуттям автора з досвіду роботи з учнями. Усі ці види діяльності передбачають користування різноманітними джерелами: книгами, CD-дисками, матеріалами мережі Internet, що, в свою чергу, сприяє формуванню інформаційного компонента навчально-дослідницьких умінь учнів. Окремі повідомлення, доповіді учнів подано в додатку А.

Структура вивчення елементів стохастики повідомляється учням з самого початку. І вони вже знають всі теми можливих повідомлень, доповідей, рефератів або можуть запропонувати власні.

Підготовка до семінарів значно розширює кругозір учнів, вчить творчо відбирати й осмислювати факти, зв'язно і грамотно висловлювати свої думки, точно й коротко їх аргументувати. На семінарі учні обмінюються підготовленими відомостями, відповідають на поставлені запитання, формулюють власні питання з проблеми, що обговорюється. Участь в обговоренні виступів своїх товаришів формує вміння ставити питання за сутністю теми, що обговорюється, критично аналізувати почуте, «знаходити» та висловлювати факти, аргументи для підтвердження власної точки зору або висувати контраргументи. Наприкінці семінару визначаються найкращі повідомлення чи доповіді, найактивніші учасники семінару.

Проблема організації навчальної діяльності пов'язана з успішністю її усвідомлення. Рефлексія в навчанні – мисленнєвий або чуттєво пережитий процес пізнання суб'єктом витвору своєї діяльності [271]. Рефлексія допомагає учням сформулювати отримані результати, перевизначити мету подальшої роботи, скоректувати власний шлях пізнання. Тому в процесі навчання елементів стохастики кожне заняття закінчується не тільки підбиттям можливих підсумків чи узагальнень:

– Як геометрично показати взаємозв'язки простору елементарних подій з можливими подіями?

– Як вводиться поняття події?

– Яку фізичну інтерпретацію має ряд розподілу абсолютних частот?

але й постановкою таких запитань перед учнями:

– Яких результатів ви набули, що зрозуміли, чого навчилися?

– Які завдання були найцікавішими?

– Що викликало труднощі? Як були вони подолані?

– Які є зауваження до організації навчання?

В процесі обговорення аналізуються успіхи, проблеми, труднощі, що виникли під час роботи над навчальним матеріалом, а також способи усунення утруднень.

Проведення семінарів потребує попередньої підготовки учнів, тому на уроках зі стохастики систематично організовуються окремі види діяльності:

– Індивідуальне самонавчання – самостійна робота учнів за заданою темою з обов'язковим письмовим звітом. Це може бути розв'язування задач, робота з підручником, самостійне вивчення теми з наведенням прикладів, що ілюструють навчальний матеріал і відрізняються від прикладів, наданих у підручнику.

– Групова робота за заданою темою. Учні об'єднуються у групи. Навчання відбувається всередині групи. Учні самостійно вивчають новий матеріал, обговорюють, пояснюють один одному, готують виступ. Оцінюється результат навчання кожного учня з групи учнями іншої групи спільно з вчителем шляхом загального обговорення.

– Взаємонавчання груп. Учні об'єднуються в групи теоретиків (3-4 учні) або експериментаторів (всі інші учні). Теоретики вивчають відомості, надані в поширеній літературі, у різноманітних підручниках. Експериментатори проводять експерименти. Учні об'єднуються, щоб поділитися отриманими відомостями та досвідом, обговорити проблеми, що виникли. Наприклад:

1. Теоретики повідомляють про те, що відомі дослідники Ж. Бюффон і К. Пірсон експериментальним шляхом встановили: при підкиданні монети один раз кожна зі сторін випаде приблизно однакове число разів. Об'єднаними зусиллями експериментаторів проведено підкидання монети 400 разів – і в результаті число появ герба становить 312 разів. Таким чином, з'являється проблема, вирішення якої потребує спільної роботи всіх учнів.

2. Теоретики зазначають, що більша частина настільних ігор передбачає підкидання грального кубика. Проведене ними теоретичне дослідження надає можливість стверджувати, що всі можливі наслідки підкидання шестигранного кубика зустрічаються однаково часто. До того ж, шестигранний кубик є правильним многогранником. Експериментатори мають спростувати чи погодитися з висунутими твердженнями.

– Учень замість учителя. Один або двоє учнів навчають всіх учнів, ведуть заняття.

– Підготовка виступів. Подання результатів власної діяльності потребує досвіду.

Учнів слід навчати виступам та привчати до виступів. В процесі навчання елементів стохастики від учнів вимагається: сформулювати запитання, дати відповідь на запитання, навести аргументи; здійснити рецензування (відповіді, повідомлення, доповіді, реферату), дати оцінку (відповіді, повідомлення, доповіді, реферату), провести аналіз (відповіді), підготувати тези.

Під час обговорення навчального матеріалу іноді виникають дискусії. Дискусія, як метод навчання, заснована на обміні поглядами з певної проблеми, причому ці погляди відображають власну думку учасників або спираються на думки інших осіб. Цей метод використовується у тому випадку, коли учні володіють значним ступенем зрілості і самостійності мислення, уміють аргументувати, доводити і обґрунтовувати свою точку зору. Оскільки дискусія вчить глибшому розумінню й усвідомленню проблеми, умінню захищати власну позицію, враховувати думку інших, умінню висловлювати (а за необхідності – відстоювати) власний погляд, то вчитель повинен підтримувати дискусійні проблеми. В залежності від підготовленості учнів, від сформульованих у них умінь вести дискусію можна підтримувати стихійні дискусії чи спеціально запропонувати проведення дискусії. При цьому можна організувати урок-диспут і обговорити такі запитання:

– Непередбачені в житті події називають випадковими. Можливо, кожний випадок має свої закони?

– Статистика знає все?

– Якби азартні ігри не були так поширені у минулих століттях, щоб тоді стало джерелом розвитку теорії ймовірностей?

Під лабораторною роботою будемо розуміти таку організацію навчальної діяльності учнів, що передбачає використання спеціального обладнання та визначену технологію з метою отримання нових знань або перевірки певних наукових гіпотез на рівні досліджень [191]. Приклади лабораторних робіт зі стохастики наведено в додатку Б. Проведення цих робіт передбачає наявність комп'ютера та педагогічного програмного засобу GRAN. На початку роботи з учнями проводиться інструктаж, визначається тема та мета лабораторної роботи, здійснюється актуалізація опорних знань учнів й оглядове знайомство з порядком виконання лабораторної роботи. В процесі роботи учні самостійно виконують всі завдання, відповідають на контрольні запитання. З метою формування навчально-дослідницьких умінь учнів у завдання для самостійного виконання в лабораторній роботі включено питання, що вимагають від учнів практичної інтерпретації отриманих результатів:

– Який відсоток чоловіків носить найбільш поширений розмір взуття?

- Скільки відсотків чоловіків носить розмір взуття, менший, ніж 40?
 - Як за графіком функції розподілу визначити медіану даного варіаційного ряду?
 - Чи можна за побудованою гістограмою знайти числові характеристики i ?
 - Дайте практичне тлумачення знайдених характеристик.
- та проведення досліджень:

- Як зміниться значення i , якщо кожному варіанту збільшити на одне й те саме число?
- Як зміниться значення i , якщо кожному варіанту помножити на одне й те саме число?
- Що спільного в побудованих гістограмах і яка між ними різниця?

Наприкінці роботи проходить обговорення та захист отриманих результатів, здійснюється рефлексивна діяльність.

Стохастична культура передбачає не тільки наявність певного рівня знань, вмінь і навичок, а й потребу в їх практичному використанні. Головною відмінністю шкільного навчання елементів стохастики має бути тісний зв'язок абстрактних понять і структур із навколишнім світом. Тому математична діяльність школярів не повинна обмежуватися вивченням готових ймовірнісних моделей. Як вже зазначалося, статистичний (або емпіричний) підхід до формування поняття ймовірності надає можливість одночасно вивчати учням і елементи теорії ймовірностей, і елементи математичної статистики, не відокремлюючи їх [89], [98]. При цьому отриманих знань цілком достатньо для їх практичних застосувань.

Досвід дослідницької діяльності набувається в результаті цілеспрямованого навчання. Як показав власний досвід автора, однією з ефективних форм набуття учнями досвіду дослідницької діяльності є організація навчального статистичного дослідження. Навчальне статистичне дослідження дає можливість учням реалізувати набуті вміння. Навчальне статистичне дослідження є і пізнавальною діяльністю учнів, і засобом розвитку навчально-дослідницьких умінь учнів, і методом навчання. Через рефлексію дослідницької діяльності та навчальні дослідження набувається індивідуальна, особистісна методологія проведення досліджень, що сприяє набуттю навчально-дослідницьких умінь.

Ця форма реалізовувалася нами в ході проведення педагогічного експерименту з формування навчально-дослідницьких умінь учнів у процесі навчання елементів стохастики у 2004 – 2007 навчальних роках, зі студентами фізико-математичного факультету Бердянського державного педагогічного університету в рамках вивчення спеціального курсу „Елементи стохастики” у 2005-2008 навчальних роках, обговорювалася з учителями математики м. Бердянська, Бердянського, Куйбишевського та Приморського районів Запорізької області на методичних семінарах і практикумах. Вагомим результатом такої діяльності можна вважати подання у 2007/2008 навчальному році на конкурс-захисті робіт МАН в м. Запоріжжя дослідницької роботи «Застосування елементів математичної статистики до формування тарифів на міжміські телефонні розмови», що виконана В. О. Кравченко, ученицею дев'ятого класу багатoproфільної гімназії №2 м. Бердянська під керівництвом вчителя-методиста Т. П. Назаренко та науковою консультацією автора даної дисертації. За результатами захисту зазначена робота посіла II місце серед поданих робіт учнів 9-11 класів Запорізької області в секції прикладної математики.

Організація та проведення навчального статистичного дослідження надає можливість учням спланувати й здійснити власний науковий пошук, розробити задум, логіку й програму дослідження, дібрати наукові методи й застосувати їх, організувати й здійснити дослідно-експериментальну роботу, опрацювати, проаналізувати й оформити отримані результати, сформулювати висновки й захистити їх перед товаришами.

Проведення навчального статистичного дослідження учнів передбачає:

1. Визначення проблеми дослідження, обговорення теми і мети дослідження.

2. Визначення способів збирання відомостей та їх опрацювання.
3. Збирання і уточнення отриманих даних.
4. Опрацювання даних.
5. Аналіз отриманих результатів, висновки.
6. Оформлення та подання результатів дослідження.

Занурення в проблему дослідження здійснюється на початку вивчення елементів стохастичності, коли вчитель знайомить учнів зі структурою вивчення елементів стохастичності, оскільки на підготовку, проведення та захист такої дослідницької роботи потрібен час. Потребує часу навіть обрання теми дослідження – учень має „визріти”, продумати способи збирання відомостей. Здійснюється проведення навчального статистичного дослідження як індивідуально, так і в парах або навіть у групах. Головним в такому дослідженні є процес пошуку, на „науковому” рівні поставлена організація дослідження.

Кожне навчальне статистичне дослідження починається з вибору проблеми, яка особисто сприйнята учнем, цікава йому. Краще, коли учень сам визначає проблему, формулює тему дослідження, бо тоді для нього складаються такі умови, де бажані мотиви й цілі розвиваються з урахуванням й у контексті минулого досвіду, індивідуальності, внутрішніх устремлінь самого учня, сприяючи розгортанню його активності. Вчитель також може запропонувати учням теми досліджень. При цьому слід враховувати, що навчальне статистичне дослідження не повинно забирати багато часу в навчальному процесі, але має передбачати проходження учнями всіх (чи більшості) етапів процесу дослідження.

При постановці вчителем проблеми для дослідження враховуються наступні критерії:

- проблема повинна відповідати пізнавальним інтересам конкретного учня згідно з його нахилами;
- повинно відбутися бачення особистісної, життєвої, практичної цінності поставленої проблеми;
- проблема має вплинути на чуттєво-емоційний стан учня;
- учні мають бути учасниками добору проблем;
- наявність теоретичної бази для проведення дослідження;
- наявність ресурсної бази для розв’язування проблеми;
- способи розв’язування проблеми повинні весь час активізувати механізми прийняття рішень;
- вікові особливості учнів.

Визначення способів збирання відомостей та їх опрацювання передбачає наявність розробленої учнями самостійно чи за допомогою вчителя програми навчального статистичного дослідження. Планування майбутніх дій у процесі статистичного дослідження здійснюється послідовно з обов’язковою рефлексією власної діяльності. Доцільність і необхідність планування, логіка складання плану майбутнього експерименту обговорюється під час занять з участю всіх учнів чи в позакласні години окремими учнями з вчителем. Досвід показав, що дуже часто доводиться змінювати план проведення дослідження для досягнення поставленої мети, а іноді навіть мету дослідження, враховуючи умови проведення експерименту.

Наприклад, при написанні дослідницької роботи „Застосування елементів математичної статистики до формування тарифів на міжміські телефонні розмови” попередній план теоретичного статистичного дослідження передбачав:

- 1.Визначення тарифів на телефонні розмови зі стаціонарних телефонів протягом дня.

2.Визначення загальної кількості дзвінків зі стаціонарних телефонів протягом дня.

3.Визначення кількості міжміських розмов зі стаціонарних телефонів.

4.Визначення розподілу міжміських дзвінків у часі (з 600 до 700, з 700 до 800, ..., з 2200 до 2300).

5.Визначення напрямків міжміських розмов у часі та виокремлення тих великих міст, куди здійснюється більша частина дзвінків.

6.Обчислення середньої вартості хвилини розмови.

7.Аналіз отриманих результатів.

8.Висновки.

Слід відзначити, що ідея проведення такого дослідження виникла при розв'язуванні задачі 21 та в результаті нестабільної роботи міжміського зв'язку в місті Бердянську, коли зателефонувати по міжміській телефонній мережі неможливо, бо лінії перевантажені. При організації дослідження передбачалося, що основні статистичні дані кількості розмов за один, довільним чином обраний, день можна отримати від ВАТ „Укртелеком”. Тобто джерелом здобуття статистичних відомостей мав стати документальний облік. Як показав досвід, підприємства важко йдуть назустріч навчальним закладам. Тому попередній план зазнав значних змін.

Довелось розглянути історію появи телеграфних, телефонних мереж і їх роль у портовому місті, провести аналіз сучасних операторів мобільного зв'язку, що діють в місті, та їх цінову політику, порівняти з діючою ціною політикою ВАТ „Укртелеком”. Джерелом здобуття статистичних відомостей стало опитування. Тому дослідження прийняло виражений емпіричний характер. Опитування проводилося експедиційним способом: учениця разом з друзями опитувала мешканців міста Бердянська і з їх слів заповнювала бланк дослідження. При цьому характер відповідей залежав від віку опитаної людини, її статків, інтересів, складу родини та місця проживання членів родини. Тому при опрацюванні даних потрібно було провести групування даних за певною ознакою. Отже, не кожне навчальне статистичне дослідження можна провести легко. Разом з тим перший досвід проведення статистичних досліджень має формуватися в шкільному віці.

Опрацювання отриманих даних зводиться до їх групування за певними ознаками, зведення групових і загальних підсумків, розрахунку різних показників, проектування таблиць і занесення в них даних. Уміння реєструвати статистичні відомості і подавати їх у вигляді таблиць, різноманітних діаграм вже саме по собі свідчить про наявність у школяра деякого досвіду статистичного аналізу даних. У цьому досвіді знаходять відображення найперші, нехай ще не до кінця усвідомлені, уявлення про неоднозначність і мінливість

к частот

Впорядкування і графічне зображення отриманих даних

помітити деякі закономірності прояву спостережуваних явищ, побачити за формами подання статистичних даних конкретні явища із властивими їм особливостями і причинними зв'язками. Ці уміння формують правильне уявлення не лише про явища з яскраво вираженою випадковістю, але і про такі явища, випадкова природа яких неочевидна

Первинне впорядкування отриманих даних для учнів зображуємо у вигляді схеми, що подано на рис. 2.10.

Рис. 2.10. Схема опрацювання статистичних (спостережених) даних.

При опрацюванні зібраних даних учні використовують комп'ютер. Це допомагає основну увагу зосередити на сутності досліджуваної проблеми та скоротити час на виконання рутинних операцій. Адже особливо цінним при проведенні навчального статистичного дослідження учнів є формування вміння робити висновки про досліджувані процеси на основі самостійно зібраних і опрацьованих даних.

У заключній частині будь-якого дослідження можна виокремити наступні компоненти: інтерпретація результатів; аналіз умов, за яких протікало дослідження; формлення та подання результатів дослідження.

Учнів треба готувати до проведення навчальних статистичних досліджень. Підготовчими вправами до самостійного статистичного дослідження, що пропонуються для домашнього завдання, можна вважати такі:

Задача 25. Скласти таблицю витрат вашої родини на комунальні послуги за останні кілька місяців. Побудувати різні графічні зображення, що показують:

а) вартість кожної послуги за останній місяць;

б) зміну сумарних витрат на комунальні послуги за останні кілька місяців

Задача 26. Провести статистичне дослідження на тему „Скільки важить портфель школяра?”. Придумати запитання, на які цікаво знайти відповідь у процесі такого дослідження. Розробити форму опитувального бланка для проведення такого дослідження.

Задача 27. Провести серед знайомих опитування суспільної думки на тему: „Яка телепередача, на ваш погляд, найбільш цікава”. При опитуванні реєструвати вік опитуваної людини. Навести більш наочний графічний спосіб подання отриманих даних.

Задача 28. Обрати у телефонному довіднику поспіль 100 телефонних номерів. Знайти розподіл частот останніх цифр цих номерів. Скласти відповідний розподіл статистичних ймовірностей. Які висновки можна зробити про цей розподіл?

Задача 29. Дібрати з газет, підручників, книжок матеріали для побудови діаграм.

Досвід навчання учнів елементів стохастички показав, що більша частина учнів обирають такі теми досліджень, в яких треба перевірити усталені дані (триває акселерація людства, золотий переріз виражає середній статистичний закон, наскільки поширеними є розміри 90-60-90, тощо), чи реалізують в експерименті фабули задач, що пропонувалися їм в процесі навчання елементів стохастички (в чистому вигляді чи з невеликою модернізацією).

Наприклад, під час вивчення статистичної ймовірності учням пропонувалось за поданим текстом визначити статистичну ймовірність використання автором іменників, прикметників та дієслів [149]. Наприкінці навчання елементів стохастички ученицею Дариною Б. була подана робота, в

якій проводився порівняльний аналіз використання іменників, прикметників та дієслів в поезії Я. І. Щоголіва, І. Я. Франка та Л. В. Костенко (див. додаток Д).

У додатку В наведено перелік основних проблем, що досліджувалися учнями під час проведення навчальних статистичних досліджень. Окремі результати проведених учнями досліджень надано в додатку Д.

Навчальна екскурсія – це форма організації навчання в умовах природного ландшафту, виробництва, музею, виставки з метою спостереження й вивчення учнями різних об'єктів і явищ дійсності [271]. Завдання екскурсії - розвивати у дітей здібності діяти у навколишньому світі з пізнавальних позицій. В процесі проведення екскурсій у учнів з'являється можливість одержати статистичний матеріал для власного дослідження. Наприклад, на природі можна провести дослідження розмаїття рослинного світу в своїй місцевості.

Екскурсії в музеї, виставкові зали, крім розуміння творів мистецтва, розуміння краси людської праці, можуть також дати матеріал для проведення статистичного дослідження. Наприклад, перевага стилів у роботі художника. Для цього за консультаційною допомогою працівників музею проводиться аналіз представлених робіт. Таке дослідження носить серйозний пізнавальний характер для учнів, далеких від живопису.

При відвідуванні, наприклад, аптеки в ході комплексної (оглядової) екскурсії з хімії учні збирали статистичний матеріал у такий спосіб. Протягом двох годин учні фіксували куплені відвідувачами ліки та з'ясовували вік людини, для якої вони придбані (до 20 років, від 20 до 35, від 35 до 55, старше 55). У результаті такого дослідження треба було перевірити, які ліки користуються попитом (серцеві препарати, жовчогінні, заспокійливі, шлункові, ...) у кожній віковій групі.

Проведення таких досліджень прищеплює звичку критично сприймати відомості, що подаються в засобах масової інформації, сприяє формулюванню власного погляду на навколишній світ.

Повідомлення, доповіді готуються учнями не тільки в межах запланованих занять, семінарів, а й для виступів на учнівських *конференціях* (від лат. *conferre* – збирати в одному місці). Результати навчальних статистичних досліджень також презентуються на конференції, що проводиться наприкінці вивчення елементів стохастики. Проведення конференції з учнями старшої школи наближує процес навчання до наукових форм діяльності. Конференція проводиться у визначений час, протягом двох навчальних годин. Для виступів доповідачам відводиться п'ять – сім хвилин, після чого їм потрібно відповісти на поставлені запитання. Оскільки конференція носить навчальний характер, наприкінці конференції учитель підводить підсумки проведеної роботи, робить узагальнення, оголошує оцінки доповідачам, оцінює активних слухачів. При цьому оцінки доповідачам виставляє експертна група з числа учнів та запрошених вчителів. Оцінювання відбувається за попередньо визначеними та оголошеними параметрами (наприклад, трудомісткість, елемент творчості, значущість, стиль доповіді,

аргументованість відповідей) за десятибальною шкалою по кожному з параметрів, де 10 балів відповідають високому рівню підготовленості, 8-9 балів відповідають достатньому рівню, 6-7 балів – вище середнього рівня, 4-5 – середньому рівню, а 1-3 бали – низькому рівню підготовленості учнів.

Організація навчання учнів елементів стохастики в рамках різноманітних форм створює умови для становлення творчої індивідуальності учнів. Тому *консультація* учнів займає особливе місце в організації процесу навчання. Найчастіше це індивідуальні чи групові консультації. Під час їх проведення учні ставлять запитання, дають відповіді, слухають пояснення вчителя. Консультаційне спілкування навчає учнів точності формулювання проблем чи запитань, що виникли. Для вчителя таке спілкування може стати приводом для проведення спеціальних занять, що присвячуються виявленим проблемам чи потребам учнів.

Досвід навчання учнів елементів стохастики показав, що саме комплексне використання всіх зазначених організаційних форм сприяє ефективному формуванню навчально-дослідницьких умінь учнів, оволодінню школярами методами творчої діяльності, розвитку вміння працювати самостійно і в співпраці з іншими; формуванню життєвої позиції „дослідника” („вивчаю, прагну зрозуміти, сам вирішую проблеми”) на противагу позиції „споживача” („беру, користуюся, розв'язування проблем залишаю іншим”); підвищенню інтересу до вивчення математики.

2.4. Використання інформаційно-комунікаційних технологій у процесі формування навчально-дослідницьких умінь учнів

Зміст математичної освіти сьогодні суттєво і якісно розширюється за рахунок вимог набуття вміння розв'язувати особистісно і соціально значущі проблеми шляхом побудови відповідних математичних моделей, дослідження їх та інтерпретації і систематизації отриманих результатів.

Використання комп'ютера в навчальному процесі – це, безумовно, дієвий крок на шляху гуманізації навчального процесу та гуманітаризації освіти, орієнтації її на європейські стандарти підготовки фахівців, здатних бути корисними суспільству завдяки вмінням ефективно використовувати інформаційні ресурси для розв'язування різноманітних завдань.

При дослідженні психолого-педагогічних і методичних проблем застосування комп'ютера як засобу навчально-пізнавальної діяльності в загальноосвітній школі основні зусилля вчених були зосереджені на розкритті перспектив використання інформаційних технологій у навчанні, методичних і дидактичних проблем цього нововведення (В. П. Беспалько [20], В. Г. Болтянський [24], [25], А. П. Єршов [87], М. І. Жалдак [95], [96], В. І. Клочко [115], В. М. Монахов [171], С. А. Раков [225], Ю. В. Триус [255] і ін.), обґрунтуванні психолого-педагогічних основ застосування інформаційних технологій у навчанні та можливостей використання комп'ютерів для

інтенсифікації навчального процесу (Б. С. Гершунський [56], Ю. В. Горошко [67], Є. І. Машбіц [166], С. А. Раков [225], Ю. С. Рамський [226], О. І. Скафа [239] і ін.), вивченні питань формування інформаційної культури школярів і методики навчання інформатики (А. П. Єршов [87], М. І. Жалдак [89] - [92], [97], В. М. Монахов [171], Н. В. Морзе [172] і ін.)

У навчальному процесі інформаційні технології використовують:

–під час подання нового матеріалу для його унаочнення – демонстраційно-енциклопедичні програми, різноманітні презентації, створені вчителем;

–для проведення віртуальних лабораторних та практичних робіт з використанням навчальних програм;

–під час закріплення навчального матеріалу – програми-тренінги;

–під час контролю та оцінювання навчальних досягнень учнів – контролюючі програми;

–для самостійної роботи учнів – навчальні програми, електронні енциклопедії, розвивальні програми.

При цьому діяльність вчителя полягає в організації самостійної пізнавальної діяльності учнів, здійсненні оперативного управління індивідуальною роботою всіх учнів класу, своєчасному виявленні труднощів кожного з них при розв'язуванні пізнавальних задач, надання їм необхідної допомоги. Одним із вирішальних факторів ефективного використання засобів інформаційних технологій у навчально-виховному процесі є знання й уміння вчителя, який застосовує ці технології, раціонально поєднуючи їх з традиційними.

У нашому мінливому світі нові завдання виникають весь час і, як відзначає Н. В. Морзе, роль учителя полягає в тому, щоб підготувати учнів вирішувати ці задачі та завдання, перш за все розвиваючи мислення, інтуїцію і уяву, засновані на міцному розумінні явищ, що відбуваються, і допомагаючи їм аналізувати, яка частина завдання відповідає їх власним інтелектуальним зусиллям, що потрібно виконувати з використанням комп'ютера [171].

Дослідницький підхід у навчанні – це методологія перебудови освіти на компетентнісних засадах [224]. Це означає постійне розмірковування над питаннями: „Чому?“, „Для чого?“, „Як це можна використати на практиці?“, „Як отриманий результат можна узагальнити?“, „Як довести гіпотезу?“, „Яке відношення отриманий результат має до існуючої системи математичних знань” і т.д.

Математика – це не збірка готових правил, як розв'язувати типові задачі. Математика – це „мова науки”, математика – це „мова природи”, математика – це методологія розв'язування соціально і індивідуально значущих задач, математика – це методологія пошуку нового знання з використанням усіх творчих прийомів та технологічних засобів, які створило людство [224].

Для формування творчої, активної, самосвідомої, відповідальної особистості, здатної до самореалізації у сучасному інформаційному суспільстві, і тим більше у завтрашньому суспільстві знань, на перший план

виходять не тільки статичні знання, уміння і навички учня, а, насамперед, здатність людини вчитися і здобувати нові знання. Дослідницький підхід у навчанні математики надає можливість сформуванню адекватних поглядів учнів на місце математики у сучасному світі, на математичний метод, набути компетентностей у постановці математичних задач на основі аналізу суспільно і індивідуально значущих проблем, розв'язуванні задач математичними методами, обґрунтуванні правильності рішень, оцінюванні їх похибок, інтерпретуванні отриманих даних та їх подання, використання для цього засобів ІКТ і т.п.

Використання комп'ютерної техніки та інформаційних технологій у наукових дослідженнях надають можливість фахівцям розв'язувати широкий спектр задач:

- проведення математичних досліджень, що вимагають аналітичних перетворень та числових розрахунків;
- розробка алгоритмів, які реалізують чисельні методи розв'язування задач, їх аналіз і використання;
- математичне моделювання та комп'ютерний експеримент;
- аналіз і опрацювання експериментальних даних;
- візуалізація результатів дослідження, наукова та інженерна графіка, створення графічних і числових звітних матеріалів тощо.

Нині існує велика кількість професійних математичних пакетів (Derive, Mathematica, MathCad, MathLab, Maple та ін.) і спеціалізованих статистичних пакетів (Statistika, SPSS). Це відомі інструментальні засоби наукового та інженерного призначення, що мають широкий набір послуг для виконання графічних побудов, проведення складних обчислень і виконання аналітичних перетворень. Аналізуючи вказані програми, науковці відзначають, що більшість із них мають англomовний інтерфейс, реалізують багато стандартних і спеціальних математичних операцій і функцій, мають потужні графічні засоби, власні мови програмування, засоби підготовки математичних текстів до друку, забезпечують імпортування даних в інші програмні продукти (текстові і графічні редактори, електронні таблиці) та експортування з них даних для опрацювання [94].

Разом з тим, зазначені математичні і спеціалізовані статистичні пакети не орієнтовані на використання в школах України, оскільки не враховують особливостей програми шкільної математики. Найбільш прийнятними для школи в цьому відношенні є педагогічні програмні засоби: GRAN1, GRAN-2D, GRAN-3D – що розроблені в Національному педагогічному університеті імені М. П. Драгоманова, та пакет динамічної геометрії DG, розроблений в Харківському національному педагогічному університеті імені Г. С. Сковороди. Ці пакети є засобами візуалізації розв'язування задач, їх використання надає можливість ефективно конструювати та досліджувати математичні моделі різноманітних об'єктів. Рівень розробки зазначених педагогічних програмних засобів відповідає світовим, і вони рекомендовані Міністерством освіти і науки України до використання в навчальному процесі

загальноосвітніх навчальних закладів.

Педагогічний програмний засіб GRAN1 призначений для комп'ютерної підтримки вивчення алгебри, початків аналізу, планіметрії, тригонометрії, початків теорії ймовірностей і математичної статистики в школі. При опрацюванні статистичного матеріалу за допомогою педагогічного програмного засобу GRAN1 всі обчислення, побудови графіків (полігонів частот, гістограм, функцій дискретних чи неперервних розподілів статистичних ймовірностей), визначення деяких параметрів розподілу (середнє значення, характеристики розсіювання і т.п.) комп'ютер виконує автоматично. Тому з'являється можливість основну увагу зосередити на з'ясуванні сутності явищ, що вивчаються, їх властивостей, причинно-наслідкових зв'язків, їх різних проявів, різноманітних особливостей окремих їх проявів. При цьому всі рутинні операції, пов'язані з виконанням обчислень та графічних побудов, перекладаються на комп'ютер [89]. Потужні засоби сортування, фільтрування, зображення та аналізу даних має редактор електронних таблиць MS Excel, з можливостями якого учні знайомляться на уроках інформатики.

На жаль, сьогодні комп'ютер на уроках математики, зокрема під час вивчення елементів стохастички, вчителі майже не використовують. Опитування вчителів математики м. Бердянська виявило, що причинами такого стану є:

- відсутність комп'ютерних класів у школі - 16%;
- відсутність програмного та відповідного науково-методичного забезпечення - 60%;
- немає доступу до комп'ютерного класу (збіг уроків математики та інформатики) – 10%;
- недоцільність використання – 3%.

Починати роботу в комп'ютерному класі потрібно після опрацювання з учнями основних понять та розв'язування типових задач стохастички. До основних стохастичних понять, які повинні знати учні перед початком роботи з комп'ютером, віднесемо:

- вибірка;
- варіанта, варіаційний ряд;
- частота, статистична ймовірність (відносна частота);
- дискретний та неперервний розподіли статистичних ймовірностей;
- полігон і гістограма;
- основні характеристики розподілу статистичних ймовірностей: математичне сподівання (середнє арифметичне спостережених значень), статистичне середнє квадратичне відхилення, об'єм вибірки, мінімальне і максимальне значення варіант, мода, медіана.

Для з'ясування особливостей опрацювання статистичного матеріалу за допомогою педагогічного програмного засобу GRAN1 пропонуємо учням лабораторні роботи, що наведені в додатку Б:

1.,,Опрацювання статистичних даних за допомогою GRAN1: ознайомлення з програмою GRAN1”, мета якої сформувавши необхідні вміння та навички роботи з програмним засобом GRAN1 для опрацювання статистичних даних.

2.,,Розв’язування задач стохастички”, мета якої узагальнити та систематизувати знання зі стохастички, сформувавши необхідні вміння та навички розв’язування стохастичних задач за допомогою GRAN1.

Розпочати роботу над стохастичними задачами за допомогою програми GRAN1 доцільно з перевірки будь-якого з розв’язаних завдань. Наприклад, запропонувати учням перевірити, використовуючи програмний засіб GRAN1, проведені на попередніх уроках розрахунки та правильність графічних побудов. Більш детально це проілюстровано у роботі [151].

Використання педагогічного програмного засобу GRAN1 в процесі організації дослідницького підходу при вивченні нормального розподілу статистичних ймовірностей надано в роботі [143].

Наведемо нетипові завдання, які можна запропонувати учням під час вивчення елементів стохастички для розв’язування з використанням комп’ютера. Такі завдання мають умовну назву нетипових, оскільки або умова, або вимога, або розв’язування задачі містять елементи новизни, «нестандартності» для учня.

Задача 30. У міській поліклініці вели реєстрацію виданих карток: Х – до хірурга, Т – до травматолога, Е – до ендокринолога, П – до терапевта, О – до окуліста, Н – до онколога, І – до інфекціоніста. Практикант-стажер вирішив записати картки, які видавалися, і отримав такий результат: Х, Т, Е, П, Н, Х, О, Т, І, О, Х, О, Н, П, Т, Х, Х, Е, Т, Т, Е, П, Т, Х, Е, Х, О, Е, О, Х, Х, П, Х, І, О, Н, Х, І, П, Т, Т, Н, Х, Х, Т, Е, П, Е, П, Х, Т, Х, Е, О, П, Т, Н, Е, Х, П, Т, Е, Х, Т, О, Е, Х, Т, Т, Х, Н, Е, Х, П, Х, Т, Е, Х, І. Скласти таблицю відносних частот появи карток до кожного лікаря. Який лікар цього дня прийме найбільшу кількість пацієнтів, який найменшу? Як це зобразити графічно? Який відсоток складають пацієнти терапевта? Які ще висновки можна зробити за отриманими результатами?

Вимога скласти таблицю відносних частот провокує типову помилку учнів при виборі типу даних. Отже, треба проаналізувати умову задачі та з’ясувати, що задано в умові задачі. При виконанні завдання у більшій частині учнів виникає проблема, як вводити дані? Але повідомлення, що з’являється на екрані монітора: „Помилка в записі числа!”, наптовхує на застосування власного цифрового коду – і задана задача набуває особистісного значення, бо потребує подальшого дешифрування при відповідях на поставлені запитання. В цій задачі передбачено можливість відповісти на поставлені запитання, використовуючи заміну в типі даних (за допомогою кнопочового перемикача „Тип даних” – „відносні частоти”), або полігон відносних частот, або ж дані частотної таблиці: вибір залежить від бажання того, хто розв’язує задачу, і розуміння ним сутності досліджуваних запитань.

Задача 31. Адміністрація міста надрукувала дані про число кімнат в квартирах городян. Результати наведено на рис. 2.11. Щоб перевірити отримані дані, представники незалежної громадської організації опитали п'ятдесят випадкових перехожих: „Скільки кімнат у вашій квартирі?”. Нижче наведено відповіді в порядку надходження:

2,1,1,2,2,1,1,6,2,4,1,2,3,1,2,2,3,2,2,5,1,1,2,5,1,
2,2,3,3,4,2,6,1,1,6,2,3,1,2,1,4,2,1,1,3,1,2,2,5,4.

Чи відповідають дані, які отримали представники незалежної громадської організації, наведеній діаграмі?

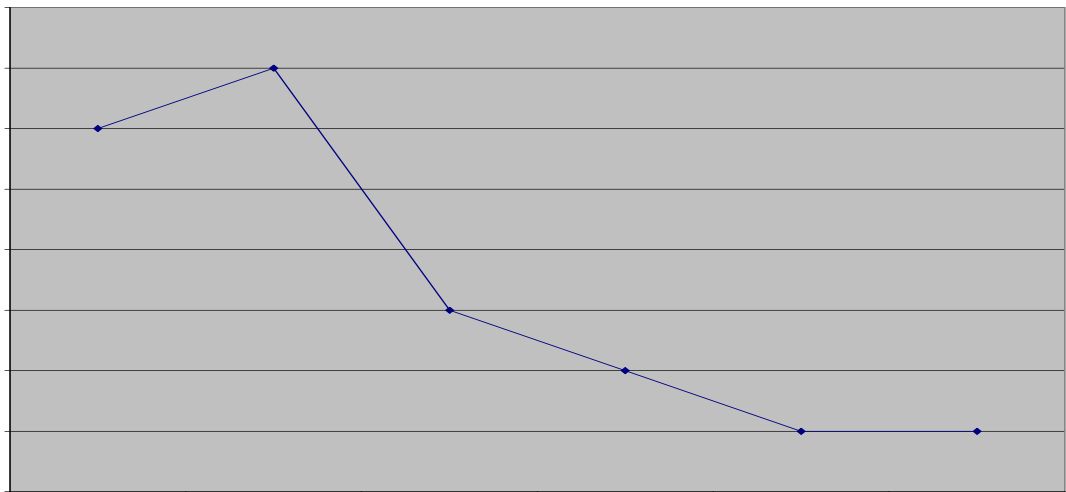


Рис. 2.11.

Для розв'язування цієї задачі за допомогою GRAN1 учням потрібно визначитися з типом даних та ввести їх (рис. 2.12).

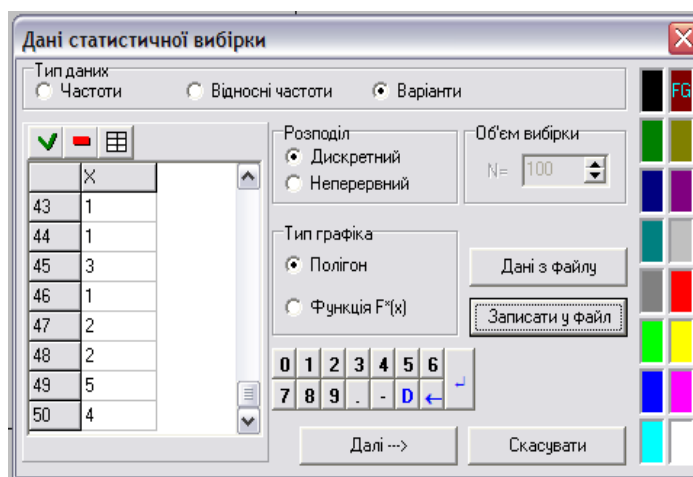


Рис. 2.12. Введення даних у вікно „Дані статистичної вибірки” ППЗ GRAN1

Побудувавши графічне зображення отриманого розподілу, потрібно провести аналіз отриманого графіка, порівняти його з заданим і зробити висновки.

Оскільки основні тенденції отриманого розподілу співпадають з заданим, то можна вважати, що дані, надані представниками незалежної громадської організації, відповідають наведеній діаграмі. Розв'язування цієї задачі представлено на рисунку 2.13.

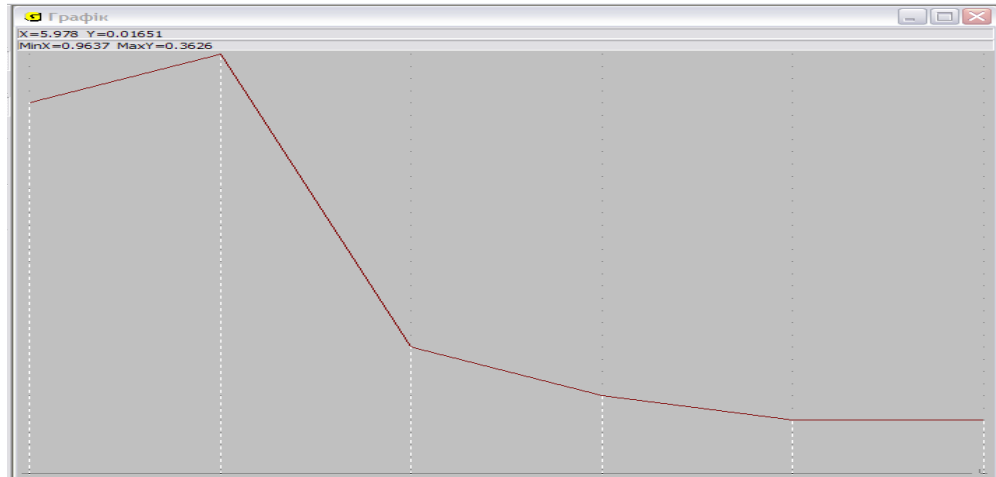


Рис. 2.13.

Задача 32. Пасічник помітив, що бджоли у двох його вуликах виробляють мед нерівномірно. Раз на десять днів він виймав соти з вулика і фіксував у таблицю 2.13 масу знятого меду, виробленого бджолами за десять днів. Бджоли з якого вулика працюють стабільніше?

Таблиця 2.13

Зведена таблиця знятого меду пасічником

Проміжок часу	Маса меду (кг)	
	1-й вулик	2-й вулик
20.04 – 30.04	11,4	11,9
30.04 – 10.05	12	10,8
10.05 – 20.05	11,5	13,2
20.05 – 30.05	11,7	12,6
30.05 – 10.06	11	11,1
10.06 – 20.06	10,6	11,4
20.06 – 30.06	13,1	13,2
30.06 – 10.07	12,8	12,9
10.07 – 20.07	11,9	13,5
20.07 – 30.07	13	10,9
30.07 – 10.08	12,5	12,3
10.08 – 20.08	12,9	11,7
20.08 – 30.08	11,6	12
30.08 – 10.09	12	10,5

В практичному житті часто зустрічаються таблиці такого виду. Учнім потрібно навчитися аналізувати їх і робити висновки.

Для розв'язування цієї задачі відомі дані заносяться в комп'ютер і проводиться аналіз отриманих результатів (рис. 2.14, 2.15).

Бджоли обох вуликів в середньому виробляли 12 кг меду за один день. Тому ця характеристика відповіді на поставлене запитання не дає.

Для знаходження відповіді на поставлене запитання та розв'язування задачі слід розглянути значення середнього квадратичного відхилення в обох вуликах. Порівняння цих величин дає можливість зробити висновок, що з першого вулика бджоли працюють стабільніше, оскільки значення середнього квадратичного відхилення в цьому вулику менше.

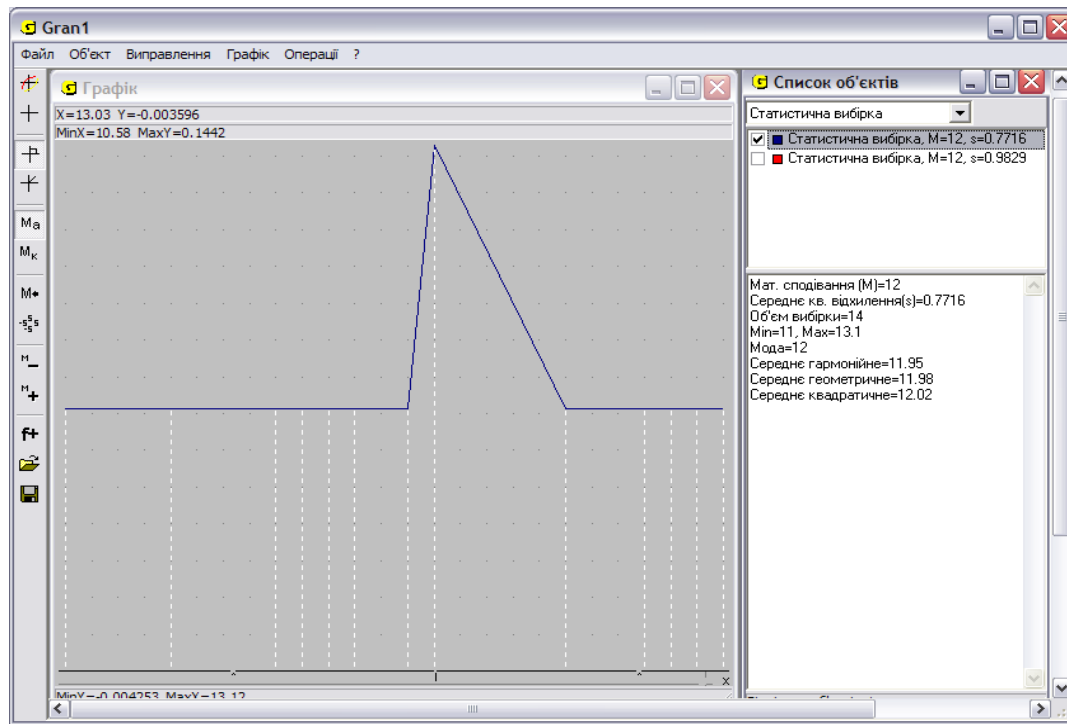


Рис.2.14.

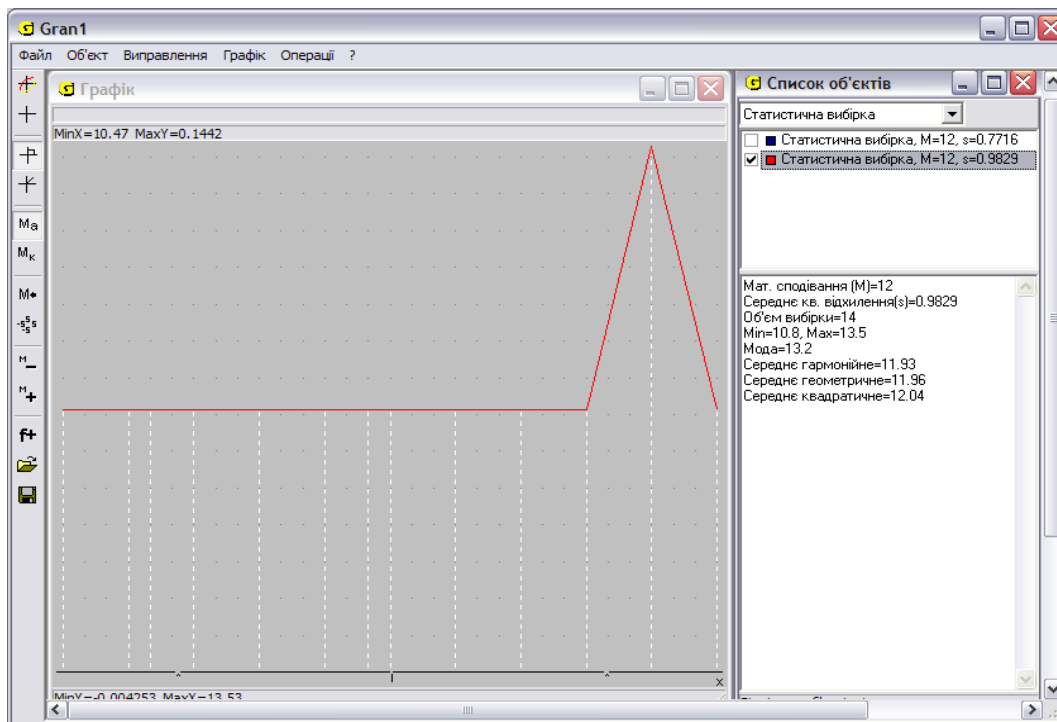


Рис. 2.15.

Як уже зазначалося, комп'ютер в процесі навчання учнів елементів стохастички використовується ними під час проведення лабораторних робіт, при опрацюванні статистичних даних, отриманих в процесі власних досліджень. Також слід звернути увагу, що при підготовці до виступів на семінарах і конференціях учні готують презентацію доповідей в PowerPoint MS Office. Оскільки методика роботи з PowerPoint MS Office не є предметом нашого дослідження, то зазначимо тільки, що, працюючи над мультимедійною презентацією, учень має можливість опановувати та подавати навчальний матеріал з урахуванням своїх індивідуальних особливостей. Створення власного мультимедійного проекту сприяє підвищенню зацікавленості учнів навчальною діяльністю, ефективності і результативності вивчення навчального матеріалу учнями.

Оскільки комп'ютеризація та інформатизація охоплює все більше й більше галузей сучасного суспільства, то використання персонального комп'ютера для власної освіти та уміле його застосування стає основою для вдосконалення навчального процесу, професійного росту та формування свідомого громадянина країни.

2.5 Особливості проведення педагогічного експерименту

В умовах ринкової економіки практично кожній людині доводиться не тільки часто змінювати місце роботи, але протягом трудового життя в середньому 5-6 разів змінювати професію. На думку психологів [48], професійне самовизначення є провідною діяльністю в ранній юності. Проте до

моменту закінчення школи про самовизначення говорити рано, бо це лише наміри, плани на майбутнє, які ще не реалізовані. Більшість дослідників розглядають професійне самовизначення як багатовимірний і багатоступінчастий процес, розгорнутий у часі. Зроблений професійний вибір не звужує можливості, навпаки, набутий на обраному шляху досвід змінює картину подальших можливостей вибору людини й спрямовує її подальший розвиток, відкриває для неї новий, раніше недоступний світ.

Рішення про вибір професії проходить ряд стадій: стадія фантазійного вибору до 11 років; стадія пробного вибору до 16-19 років, коли виділяється кілька найбільш реальних і прийнятних варіантів, між якими й робиться вибір; стадія реалістичного вибору після 19 років включає обговорення питання вибору з обізнаними людьми, усвідомлення можливості конфлікту між здібностями, цінностями, інтересами й об'єктивними умовами реального світу.

В ранньому юнацькому віці професійне самовизначення складає важливий момент особистісного самовизначення, хоча й не вичерпує його. Вибір професії фактично означає проектування у майбутнє певної соціальної позиції. Вже на попередніх вікових етапах складаються уявлення про ряд професій. Інформованість про професії, їх соціальний престиж, рівень майбутнього матеріального забезпечення, врахування позиції близьких авторитетних людей, особисті нахили і здібності тощо здійснюють вплив на професійне самовизначення молоді [48], [84], [122], [186].

Психологічні дослідження та досвід педагогів свідчать про те, що сьогодні зовсім небагато учнів свідомо можуть обрати профіль навчання. Вибір профілю навчання передбачає наявність у школярів відомостей двоякого роду: про світ професій взагалі та вимоги до знань і вмінь в кожній з них; про власні здібності та інтереси. В основі ставлення до світу професій лежить запозичений досвід – відомості, отримані від батьків, знайомих, друзів, однолітків, з книжок, кінофільмів, телепередач. Досвід цей зазвичай абстрактний, тому що не пережитий, не вистражданий людиною. Переважна більшість старшокласників обирає профіль навчання більш-менш стихійно. Наприклад, на фізико-математичному факультеті Бердянського державного педагогічного університету навчається достатня кількість студентів, які в старшій школі обрали гуманітарний напрям навчання. І рівень їх знань є недостатнім для успішного навчання за обраною спеціальністю на фізико-математичному факультеті.

Будь-яка спеціалізація, профілізація школи, тим більше рання, об'єктивно веде до звуження можливостей учня. Особливо в період реформування освіти, переходу її на нові стандарти та програми. Основним завданням шкільної системи освіти при цьому залишається широка загальноосвітня підготовка учнів. І саме сучасні заклади шкільної освіти насамперед повинні забезпечити цю загальноосвітню підготовку учнів, розкрити їхні творчі здібності. Однією з функцій математичної освіти сьогодні є забезпечення цілісного орієнтування у світі з позицій інтересів людини, ефективного використання математичних знань і умінь для визначення учнем

свого місця в житті.

Вивчаючи проблему формування навчально-дослідницьких умінь учнів у процесі навчання елементів стохастики, було виявлено низку проблем, що зазначені на стор. 78. Серед них слід особливо відзначити *фактично* малу кількість навчальних годин на вивчення елементів стохастики *наприкінці* опрацювання шкільного курсу математики та *необізнаність вчителів* у питаннях статистичної ймовірності. Сучасна профілізація старшої школи передбачає також різну кількість годин навчального часу на вивчення елементів стохастики в залежності від профілю навчання.

Формування ж навчально-дослідницьких умінь учнів вимагає комплексного методичного підходу у навчанні. Організація та проведення повноцінних навчальних статистичних досліджень, конференцій учнів вимагає більше навчального часу, ніж передбачено деякими навчальними програмами з математики. Тому навчання учнів елементів стохастики в загальноосвітніх класах доцільно проводити у 10 класі наприкінці навчального року, оскільки саме в десятому класі інструктивно-методичним листом Міністерства освіти і науки України від 07.03.2001 р. №№ 1/9-97 (v9-97290-01) передбачено проведення навчальної практики, що запроваджена з метою реалізації завдань загальної середньої освіти щодо посилення саме практичної спрямованості навчально-виховного процесу, професійно-орієнтаційної роботи з учнями тощо. Згідно з цим листом, зміст та форми організації навчальних екскурсій і навчальної практики *визначає адміністрація* навчального закладу залежно від місцевих умов, специфіки та профілю навчальних закладів, потреб виробництва та інших чинників.

Слід також відзначити, що кожен учень повинен мати можливість розширити та поглибити свої знання з будь-якого навчального предмету, незалежно від попередньо обраного профілю навчання. І це можна зробити на факультативних заняттях, що передбачені Державним стандартом базової і повної загальної середньої освіти в основній і старшій школі, Концепцією загальної середньої освіти (12-річна школа) [80], [123]. Тому для проведення педагогічного експерименту було створено факультативний курс „Елементи стохастики”.

Організація факультативних занять з окремих базових дисциплін, а також факультативних курсів у певній кількості передбачена навчальними планами загальноосвітніх навчальних закладів [213], [215]. Згідно з наказом „Про типові навчальні плани загальноосвітніх навчальних закладів на 2001/2002 – 2004/2005 навчальні роки” (№ 342 від 25.04.2001), мінімальна наповнюваність груп для факультативних занять у міських загальноосвітніх навчальних закладах становить 8 учнів [215].

Організація факультативних занять відповідає також програмі Кабінету Міністрів України „Назустріч людям” [212] у сфері освіти, що передбачає поліпшення якості освіти, створення умов для особистого розвитку та самореалізації кожного громадянина країни. Якість освіти визнана пріоритетним напрямом державної політики в галузі освіти [165]. Серед

шляхів поліпшення якості змісту освіти визначають:

- фундаментальність освіти, що передбачає забезпечення універсальності отриманих знань, вивчення основних теорій, ... можливість використання отриманих знань у життєвих ситуаціях;
- профілізацію та диференціацію змісту освіти як умову вибору учнями рівня та спрямованості навчальних програм;
- забезпечення практичної спрямованості освіти шляхом раціонального поєднання продуктивної і репродуктивної навчальної діяльності учнів.

Етимологія слова «факультативний» (від лат. facultatis – можливість) – можливий, необов'язковий, наданий за вибором. Принцип добровільності відвідування таких занять є важливим показником деавторитарності навчального процесу. Під факультативами мають на увазі такі заняття, які не збігаються за змістом з предметами базового циклу, а доповнюють та розширюють світогляд учнів. Класифікація факультативних курсів за метою навчання, згідно з В. В. Голобородько [65], подана в таблиці 2.14.

Таблиця 2.14

Класифікація факультативних курсів за метою навчання

Назва курсів	Мета навчання
Курси випереджаючого навчання	Формування підґрунтя для подальшого свідомого засвоєння фундаментальних наук
	Формування наукової бази для організації прискореного навчання
Спеціалізовані поглиблені курси	Розширення та доповнення знань учнів з предметів базового циклу
	Формування наукової бази для подальшого навчання в системі вищої освіти
Розвиваючі курси	Розвиток загальної ерудиції учнів, розширення їхнього світогляду
	Встановлення міжпредметних зв'язків

Назва розвиваючі курси є умовною, оскільки нерозвиваючих курсів не існує взагалі: вивчення будь-якої науки робить певний внесок до скарбнички учнівського інтелекту.

Основна мета факультативних занять з математики полягає в тому, щоб, враховуючи інтереси і уподобання учнів, розширити і поглибити вивчення програмного матеріалу; ознайомити учнів з деякими загальними математичними ідеями і методами; розвивати математичні здібності учнів, прищеплювати учням зацікавленість та смак до самостійних занять з математики; виховувати і розвивати ініціативу та творчість, показати застосування математики на практиці. Серед ознак, що відрізняють факультативи від звичайних занять – високий мотиваційний рівень; необов'язковість оцінювання знань; робота з групами учнів, які мають

непогану підготовку й цікавляться математикою чи тільки цікавляться математикою. Зміст факультативу повинен поглиблювати та доповнювати основний курс шкільної математики.

Отже, враховуючи особливості учнів старшої школи, навчання елементів стохастики на основі теоретико-множинного підходу здійснювалося за програмою, що наведена в таблиці 2.15.

Розроблена програма відрізняється від усіх діючих навчальних програм з математики для учнів загальноосвітніх шкіл, що навчаються не в математичних класах [160], [213], [216], [217].

Принциповою відмінністю є використання статистичного підходу до формування поняття ймовірності. Метою вивчення елементів стохастики на факультативних заняттях є побудова ймовірнісних просторів – математичних моделей стохастичних експериментів, в яких враховується вплив випадку, аналіз ймовірнісних моделей, формування навичок первинного опрацювання спостережених (статистичних) даних, зображення, аналіз та інтерпретація кількісних характеристик об'єктів дослідження, поданих в різних формах (у вигляді таблиць, графіків, діаграм), застосування сформованих знань і умінь у самостійних дослідженнях. Конструювання навчального матеріалу відповідає логіці побудови наукового знання з урахуванням рівня розвитку, ціннісних орієнтацій та суб'єктивного досвіду учнів.

Таблиця 2.15

Програма факультативного курсу «Елементи стохастики»

Номер уроку	Тема уроку	Кількість годин
1	Основні поняття теорії множин: множина, елементи множини; порожня множина; підмножина; скінченні та нескінченні множини.	1
2-3	Про стохастичну науку. Стохастичний експеримент. Простір елементарних подій.	2
4	Поняття випадкової події. Вірогідна та неможлива події.	1
5	Операції над подіями. Геометрична і теоретико-множинна інтерпретація операцій над подіями.	1
6-7	Простір подій. Поняття й властивості статистичної ймовірності події.	2
8	Ймовірнісні простори.	1
9-10	Поняття про дискретний та неперервний розподіли статистичних ймовірностей. Щільність розподілу статистичних ймовірностей.	2
11-12	Функція дискретного розподілу статистичних ймовірностей. Функція неперервного розподілу статистичних ймовірностей.	2
13-14		2

	Деякі числові характеристики дискретного та неперервного розподілу відносних частот.	
15	Нормальний розподіл статистичних ймовірностей.	1
16-17	Основні поняття й задачі математичної статистики. Організація та проведення навчального статистичного дослідження.	2
18-20	Опрацювання результатів статистичного дослідження. Представлення результатів. Учнівська конференція (семінар).	3
Разом		20

В результаті вивчення елементів стохастики на факультативних заняттях учні мають розширити знання про зміст і метод математичного моделювання, набути вмінь будувати ймовірнісні математичні моделі, досліджувати їх методами математики, інтерпретувати отримані результати, проводити власні опитування, спостереження, робити висновки, застосовувати комп'ютер для опрацювання отриманих даних.

Досвід навчання учнів елементів стохастики за розробленою програмою факультативних занять виявив, що для організації та проведення статистичних навчальних досліджень передбачено достатню кількість навчальних годин. Але при необхідності для цього можна використовувати і години навчальної практики, оскільки це дає змогу організувати комплексні екскурсії з різних предметів; ознайомитися не тільки з процесом чи виробництвом, але й знайти матеріал, ідеї для проведення власного дослідження, спостереження; дібрати матеріал для систематизації та статистичного опрацювання; показати та реалізувати внутріпредметні та міжпредметні зв'язки, зв'язок теорії з практикою.

Система оцінювання рівня сформованості навчально-дослідницьких умінь учнів складалася з п'яти рівнів, характеристика яких надана в таблиці 2.16.

Таблиця 2.16

Система оцінювання рівня сформованості навчально-дослідницьких умінь учнів

Рівень	Кількість балів	Загальні критерії оцінювання
Низький (початковий)	1-3	Дії учнів неусвідомлені, здійснюються інтуїтивно та вибірково. Учні виявляють слабку теоретичну підготовленість, не вміють самостійно ставити та розв'язувати дослідницькі задачі. Учні лише за вказівкою знаходять потрібну літературу. В учнів розвинене вміння слухати, але вони уникають виступів.
Середній	4-6	Учні виконують такі поодинокі операції дослідження, як спостереження, порівняння фактів і

		явищ, знаходження причинно-наслідкових зв'язків, формулювання на їх основі висновків. Осмислення сумісності цих операцій утруднене. Дії здійснюються шаблонно, виявляється невміння учнів розв'язувати дослідницькі задачі вищого порядку. Знаходять та користуються потрібними літературними та іншими джерелами. Висловлюють думки.
--	--	---

Продовження таблиці 2.16

Рівень	Кількість балів	Загальні критерії оцінювання
Вище середнього	7-8	Учні вміють формулювати мету роботи, вказати залежність між фактами, явищами; зробити висновок на основі раніше набутих знань; провести експеримент, опрацювати отримані результати, сформулювати висновки. В учнів виявляється деяка обмеженість у застосуванні вказаних дій. Не завжди успішно реалізується доцільність дій і переважають репродуктивні, стереотипні форми дій. Виступають перед аудиторією.
Достатній	9-10	Переважає суспільно значуща мотивація діяльності, виражена доцільність дослідницьких дій, наявні елементи новаторства і оригінальності у складі дій. Спостерігається точність, виразність, швидкість і економічність дій. Беруть участь у дискусії, наводять аргументи, обґрунтовують власну точку зору.
Високий	11-12	Високий рівень теоретичних знань. Знання, уміння і навички реалізуються в сукупності, формуючи дослідницьку компетентність, що надає можливість здійснювати дії вищого порядку: побачити проблему, висловити гіпотезу, скласти план дослідження, провести експеримент, опрацювати його результати, сформулювати висновки, оформити подання виконаної роботи.

Враховуючи сучасні тенденції профільного навчання в системі 12-річної шкільної освіти, слід відзначити, що факультативний курс, за яким здійснювалося експериментальне навчання учнів елементів стохастичності, може використовуватися вчителями як самостійний факультативний курс або трансформуватися у курс за вибором для поглиблення і розширення змісту профільних предметів або забезпечення профільної прикладної і початкової

професійної спеціалізації навчання.

2.6. Педагогічний експеримент і його результати

При проведенні дослідження, об'єктом якого був процес навчання математики учнів загальноосвітніх шкіл, а предметом – методична система формування навчально-дослідницьких умінь учнів у процесі навчання елементів стохастики, була висунута робоча гіпотеза: дотримання в процесі навчання учнів елементів стохастики принципу добору практично спрямованих задач, що потребують уяви, наполегливих та активних дій учнів, використання різноманітних методів, організаційних форм та засобів навчання сприятимуть формуванню навчально-дослідницьких умінь учнів, інтересу їх до математики як навчального предмета, підвищенню загального рівня математичної підготовки.

На *першому* (констатуючому) *етапі* дослідження (2002 – 2003 рр.) здійснювався теоретичний аналіз державних документів, навчальних планів і програм з математики, психолого-педагогічної та навчально-методичної літератури з проблеми дослідження. Вивчалась нормативна, психолого-педагогічна та навчально-методична література з питань методики навчання учнів елементів стохастики. Здійснювалося спостереження за навчальним процесом, вивчалися результати навчальної діяльності вчителів та навчально-пізнавальної діяльності учнів, проводилося анкетування учнів та вчителів, бесіди з учнями та вчителями, вивчення та аналіз педагогічного досвіду вчителів математики загальноосвітніх шкіл. Визначалися найбільш раціональні форми, методи, засоби навчання математики, зокрема елементів стохастики, учнів старшої школи.

На *другому* (пошуковому) етапі дослідження (2003 – 2004 рр.) на підставі висновків, зроблених за результатами теоретичного аналізу проблеми та результатами констатуючого експерименту, розроблялась концепція дослідження, створювалася методична система формування навчально-дослідницьких умінь учнів у процесі навчання елементів стохастики.

На *третьому*, завершальному (формуєчому) етапі дослідження (2004 – 2008 рр.) здійснювалося експериментальне навчання учнів елементів стохастики у відповідності до розробленої в ході дослідження методичної системи формування навчально-дослідницьких умінь та проводилося опрацювання отриманих результатів. Для перевірки ефективності створеної методичної системи на завершальному етапі дослідження застосовувалися статистичні методи опрацювання даних.

В ході першого етапу дослідження було проведено констатуючий експеримент і отримано наступні результати.

1. *Анкетування вчителів математики.* В анкетуванні брали участь 62 вчителі математики. Серед них 49 вчителів математики м. Бердянська, Приморського та Куйбишевського районів Запорізької області та 13 студентів

заочної форми навчання Бердянського державного педагогічного університету, що працюють вчителями математики в школах Запорізької, Дніпропетровської та Донецької областей. Запитання, що пропонувалися вчителям математики, подано в додатку Е.

Під навчально-дослідницькими вміннями школярів опитані вчителі розуміють:

- уміння логічно мислити;
- вміння логічно приходити до поставленої кінцевої мети;
- уміння аналізувати;
- уміння досліджувати об'єкти;
- практичні уміння;
- уміння виділяти головне;
- уміння застосовувати, варіювати набуті теоретичні знання при виконанні практичних завдань;
- уміння створювати математичні моделі;
- уміння розв'язувати прикладні задачі;
- уміння робити свої маленькі відкриття, хай навіть „велосипеда”; уміння узагальнювати.

44% опитаних вчителів математики не змогли сформулювати, що вони розуміють під навчально-дослідницькими вміннями учнів.

Засобами формування навчально-дослідницьких умінь учнів опитані респонденти вважають:

- розв'язування прикладних задач;
- індивідуальна робота з учнями;
- самостійна робота учнів;
- інтерактивні технології навчання;
- участь в роботі МАН;
- написання рефератів.

60% опитаних учителів математики не змогли визначитися з засобами формування навчально-дослідницьких умінь учнів.

На питання: „На якому математичному матеріалі шкільного курсу математики можна формувати навчально-дослідницькі вміння учнів?” 47% опитаних учителів відповісти не змогли. Інші вважають, це:

- інтеграл та його застосування (2%);
- математичне моделювання (2%);
- розв'язування задач кількома способами (2%);
- задачі на побудову (4%);
- теорія ймовірностей і математична статистика (4%);
- задачі на доведення (6%);
- функції (10%);
- будь-який (16%).

Стаж роботи вчителем математики опитаних респондентів подано в таблиці 2.17.

Таблиця 2.17

**Розподіл опитаних вчителів за стажом роботи
вчителем математики**

	Скільки років ви працюєте вчителем математики?				
	Перший рік	(1;5]	(5;10]	Більше 10 років	Разом
<i>n</i>	3	15	11	33	62
%	5,8	24,2	17	53	100

2. *Спостереження за навчальним процесом.* Аналіз планів і конспектів уроків вчителів математики показав відсутність уваги (з боку вчителів) до питань цілеспрямованого, систематичного процесу формування навчально-дослідницьких умінь учнів. Основна увага в навчанні математики учнів старшої школи приділяється формуванню знань та відтворенню фактичного матеріалу з математики при розв'язуванні задач. В процесі навчання віддається перевага тим методам і формам організації навчання, які забезпечують в основному пасивне сприйняття навчального матеріалу, не вимагають самостійної активної роботи учнів, творчого мислення й уяви.

Бесіди з вчителями математики виявили наявність проблеми методичного забезпечення навчання елементів стохастики, брак навчального часу на вивчення стохастичної змістової лінії. Особливо відмічено відсутність свідомого, зацікавленого, мотивованого ставлення учнів до навчального матеріалу, що обумовлюється місцем зазначеної змістової лінії в чинній програмі з математики.

В навчально-пізнавальній діяльності учнів переважають виконавський і репродуктивний методи учіння, надто малу частку посідають методи самостійної роботи учнів, спрямовані на осмислення та опрацювання нового матеріалу, методи навчання, використання яких надає можливість застосовувати набуті вміння в новій ситуації.

Отже, формуванню навчально-дослідницьких умінь учнів на уроках математики приділяється недостатня увага; відчувається брак методичної літератури з проблеми навчання елементів стохастики та літератури для вчителів, присвяченої проблемі формування навчально-дослідницьких умінь. Такий засіб формування навчально-дослідницьких умінь учнів, як організація та проведення статистичних досліджень, залишаються поза увагою вчителів математики.

Проведене анкетування вчителів математики виявило, що комп'ютерно-орієнтовані технології навчання математики майже не використовуються, хоча матеріально-технічна база для цього існує. Вчителі вважають, що впровадження в навчальний процес педагогічних програмних засобів стримується внаслідок відсутності методичних рекомендацій, посібників для вчителів, зорієнтованих на впровадження комп'ютерно-орієнтованих систем навчання математики.

Аналіз методичного забезпечення навчального процесу виявив, що в Україні надто мало робіт, в яких висвітлено особливості та перспективи використання комп'ютерно-орієнтованих технологій навчання математики, зокрема зі стохастички, у середніх навчальних закладах.

3. З метою виявлення інтересу до дослідницької діяльності було проведено анкетування учнів. Загалом було опитано 176 старшокласників. В ході опрацювання отриманих даних виникла робоча гіпотеза, що інтерес до дослідницької діяльності формується протягом життя, зокрема у період навчання в школі, та є найбільш сформованим у тих учнів, які визначилися з професійним вибором.

Для перевірки цієї гіпотези на початку 2003/2004 навчального року проведено анкетування учнів. У ньому брали участь 22 учні одинадцятого класу ЗОШ №15, 25 учнів десятого класу ЗОШ №11 м. Бердянська та 33 студенти першого курсу фізико-математичного факультету Бердянського державного педагогічного університету, які обрали навчання за спеціальністю „Математика”. Запитання, на які потрібно було відповісти учням, подані в додатку Ж. Результати опитування подані в таблицях 2.18 – 2.19.

Таблиця 2.18

Інтерес учнів до дослідницької діяльності (самооцінка)

Групи учнів	Кіл-сть учнів	%	Кіл-сть учнів	%	Кіл-сть учнів	%	Кіл-сть учнів	%
	Відчувають постійний інтерес		Інколи цікавляться		Майже не цікавляться		Не відчувають інтересу	
10 клас	1	4	14	56	8	32	2	8
11 клас	3	13,6	5	22,7	11	50	3	13,7
I курс	0	0	2	6	28	84,8	3	9,2
Разом	4		21		47		8	

Таблиця 2.19

Зведена таблиця результатів опитування учнів

Групи учнів	Загальна кількість учнів	Кількість учнів		Кількість учнів	
		Вважають, що вміють досліджувати	%	Назвали основні етапи дослідження	%
10 клас	25	12	48	7	28
11 клас	22	11	50	5	22,7
I курс	33	17	51,5	20	60,6
Разом	80	39		32	
		Формулюють поняття: „цікавість”, „допитливість”		Подобається експериментувати	

10 клас	25	17	68	17	68
11 клас	22	13	59	15	68,2
I курс	33	21	63,6	21	63,6
Разом	80	51		53	
		Формулюють поняття: „інтуїція”, „експеримент”, „дослідження”		Вважають написання реферату дослідженням	
10 клас	25	16	64	7	28
11 клас	22	17	77,3	4	18
I курс	33	32	97	21	63,6
Разом	80	65		32	

За отриманими результатами можна зробити висновок, що інтерес до дослідницької діяльності у студентів не більший, ніж у школярів. Майже половина опитаних учнів у кожній групі вважає, що вміє проводити дослідження. Але більш обізнаними про процес дослідження є опитані студенти. 13,8% всіх учнів проводили б дослідження з математичних дисциплін (алгебра, геометрія). 50% учнів в процесі дослідження цікавить результат роботи, 30% учнів подобається процес пошуку в дослідженні, 6,3% учнів цікавить і процес пошуку, і кінцевий результат.

Серед усіх опитаних старшокласників 47,3% подобається науково-популярна література, 81% учнів використовували б при проведенні дослідження комп'ютер для пошуку відомостей в мережі Internet, виведення звітів в Word, проведення презентацій отриманих результатів в PowerPoint. 14,9% опитаних учнів дуже часто виступають з доповідями, 43,2% – часто, 27% – інколи, 14,9% учнів уникають виступів.

В ході другого етапу дослідження продовжувався цілеспрямований пошук та добір змісту навчання елементів стохастички. Було розроблено програму факультативного курсу для учнів загальноосвітньої школи „Елементи стохастички”. Розроблявся первинний матеріал зі стохастички за темами факультативного курсу. Створювалися задачі та завдання, спрямовані на формування навчально-дослідницьких умінь учнів. Проводився пошук і методичний аналіз програмних засобів.

На третьому, формуючому, етапі педагогічного експерименту здійснювалося експериментальне навчання учнів десятого класу елементів стохастички на факультативному курсі „Елементи стохастички”. Заняття проводилися автором і вчителями математики протягом навчального року з тижневим навчальним навантаженням: одна година на тиждень. Експериментальним навчанням було охоплено 467 учнів десятого класу загальноосвітніх шкіл №№11, 15, 16 м. Бердянська, учні шкіл Бердянського, Приморського, Куйбишевського районів Запорізької області, які виявили бажання відвідувати факультативні заняття.

На початку навчання було проведено контрольний зріз, що мав на меті перевірити початковий рівень сформованості навчально-дослідницьких умінь

учнів. Запропоновані завдання передбачали перевірити наявні ймовірнісні уявлення школярів, які не вивчали ймовірнісні розділи математики, вміння працювати з таблицями, діаграмами, складати план, моделювати, висувати гіпотези. Зразки завдань подано в додатку 3. При оцінюванні відповідей головним вважалося наведення учнями аргументації.

68% учнів вважає, що в лото виграш числової комбінації 5,12,18,24,29,35 більш ймовірний, ніж комбінація чисел 4,5,6,7,8,9. Жоден з опитаних учнів не вважає запропоновані комбінації однаково ймовірними. Тільки 36,6% учнів вважає, що день народження Катерини 30 лютого неможливе. Без проведення експерименту визначили б ймовірність наслідків при киданні монети 26,8% учнів; кнопки – 10% учнів; грального кубика – 10%; гудзика – 12%; монети та грального кубика – 4,8%; кнопки та гудзика – 2%; монети, кнопки та гудзика – 2%; монети, грального кубика та гудзика – 4,8%. 46,3% учнів вважають, що в новій серії випробувань з тими ж умовами експерименту зберігається сталість наслідків.

36,6% учнів зробили аналіз запропонованої таблиці даних і визначили кількість учнів не початкової школи, що читають журнали не про звірів. 43,9% учнів зробили аналіз наданої діаграми і обчислили загальну кількість учнів класу, в якому проводилося опитування. 29,3% запропонували власні запитання для проведення дослідження.

Розподіл учнів за рівнями сформованості навчально-дослідницьких умінь на початку експериментального навчання подано в таблиці 2.20.

Таблиця 2.20

Розподіл учнів за рівнями сформованості навчально-дослідницьких умінь на початку експериментального навчання

Рівні сформованості навчально-дослідницьких умінь									
Низький		Середній		Вище середнього		Достатній		Високий	
Кіл-сть	%	Кіл-сть	%	Кіл-сть	%	Кіл-сть	%	Кіл-сть	%
101	21,6	188	40,3	156	33,4	12	2,6	10	2,1

Таким чином, добрі знання і усвідомлення інших розділів математики самі по собі не забезпечують розуміння випадкових явищ, процесів і не позбавляють від тривіальних імовірнісних забобонів і помилок. В процесі навчання елементів стохастичності слід звернути увагу на формування наукового уявлення про ймовірність та її властивості, на побудову ймовірнісного простору, особливості побудови простору елементарних подій.

Заняття з учнями проводились з використанням методики, розробленої під час пошукового етапу педагогічного експерименту. На початку експериментального навчання елементів стохастичності спостерігалось стереотипне мислення школярів, прагнення учнів до формального підходу до учіння, бажання засвоїти набір правил, алгоритмів, методів. В процесі навчання елементів стохастичності освітнє середовище створювалося таким чином, щоб активізувати навчальну діяльність учнів та спостерігати активність кожного окремого учня. Особлива увага приділялася наведеній учнями

аргументації.

В процесі експериментального навчання елементів стохастики були виділені наступні шляхи формування навчально-дослідницьких умінь учнів:

1. Розв'язування задач на:

а) моделювання:

- задачі з несформульованою вимогою до розв'язування;
- задачі з неповною умовою;
- задачі з надлишковими умовами;
- задачі із трансформацією з конкретного в абстрактний план (

побудова простору елементарних подій; подання простору елементарних подій різними способами; побудова простору подій і обчислення статистичних ймовірностей);

– задачі із трансформацією з абстрактного в конкретний план (складання учнями задач за даними моделями стохастичних експериментів; складання учнями задач на задану тему; складання задач за схемою; застосування теоретичних знань до розв'язування задач практичного характеру).

б) складання, «читання», перетворення таблиць з даними статистичних досліджень;

в) побудову та «читання» схем, діаграм, графіків.

2. Використання питань, що спрямовані на розвиток критичного мислення, уміння застосовувати твердження загального характеру на практиці.

3. Спонування учнів самостійно сформулювати та поставити запитання, систему запитань.

4. Проведення учнями міні-експериментів стохастичного характеру.

5. Використання комп'ютера і педагогічних програмних засобів в процесі навчання учнів елементів стохастики.

6. Залучення учнів до повідомлень, доповідей, реферування, участі в конференціях.

7. Організація та проведення навчального статистичного дослідження.

Наприкінці експериментального навчання учням пропонувалися для розв'язування задачі на побудову ймовірнісних просторів, складання, «читання», перетворення таблиць зі статистичними даними. При визначенні рівня сформованості навчально-дослідницьких умінь учнів наприкінці експериментального навчання елементів стохастики враховувалися ступінь самостійності та характер навчально-пізнавальної діяльності учнів (при підготовці та проведенні семінарів, конференції, навчальних статистичних досліджень). Розподіл учнів за рівнями сформованості навчально-дослідницьких умінь наприкінці експериментального навчання подано в таблиці 2.21.

Слід відзначити, що в процесі експериментального навчання елементів стохастики зросла частина учнів, які виявляли ініціативу при розв'язуванні задач, при виконанні завдань, при підготовці до презентацій отриманих результатів виконаної ними роботи. Із зацікавленістю учні використовували

GRAN1 при опрацюванні статистичних даних.

Таблиця 2.21

Розподіл учнів за рівнями сформованості навчально-дослідницьких умінь наприкінці експериментального навчання

Рівні сформованості навчально-дослідницьких умінь									
Низький		Середній		Вище середнього		Достатній		Високий	
Кіл-сть	%	Кіл-сть	%	Кіл-сть	%	Кіл-сть	%	Кіл-сть	%
61	13	71	15,2	203	43,5	91	19,5	41	8,8

На рис. 2.16 подано дані таблиць 2.20 – 2.21 у вигляді графіків, що відображають зміну показників рівнів сформованості навчально-дослідницьких умінь учнів у процесі експериментального навчання елементів стохастики.

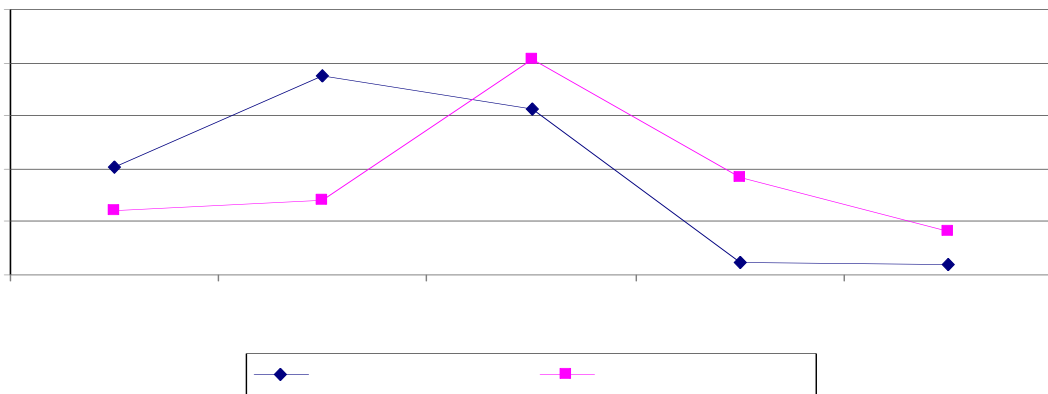


Рис. 2.16. Графіки значень показників рівнів сформованості навчально-дослідницьких умінь учнів

Наведені графіки унаочнюють ці зміни та наводять на думку про наявність певних тенденцій педагогічного експерименту. Застосування критерію Колмогорова-Смирнова [237] до отриманих результатів надає можливість зіставити два емпіричних розподіли.

Нехай гіпотеза H_0 полягає в тому, що емпіричний розподіл учнів за рівнями сформованості навчально-дослідницьких умінь наприкінці експериментального навчання (таблиця 2.21) не відрізняється від розподілу учнів за рівнями

сформованості навчально-дослідницьких умінь на початку експериментального навчання (таблиця 2.20). Гіпотеза H_1 – емпіричний розподіл учнів за рівнями сформованості навчально-дослідницьких умінь наприкінці експериментального навчання (таблиця 2.21) відрізняється від розподілу учнів за рівнями сформованості навчально-дослідницьких умінь на початку експериментального навчання (таблиця 2.20).

Всі допоміжні розрахунки для критерія $K-S$ проведемо у наступній таблиці (таблиця 2.22).

Таблиця 2.22

Рівні умінь	Обчислення критерія для двох емпіричних розподілів						Різниця
	Емпіричні частоти		Емпіричні частоти		Накопичені емпіричні частоти		
Низький	101	61	0,216	0,131	0,216	0,131	0,085
Середній	188	71	0,403	0,152	0,619	0,283	0,336
Вище середнього	156	203	0,334	0,434	0,953	0,717	0,236
Достатній	12	91	0,026	0,195	0,979	0,912	0,067
Високий	10	41	0,021	0,088	1	1	0
Разом	467	467	1,000	1,000			

Найбільша різниця між накопиченими емпіричними частотами складає \dots і припадає на середній рівень сформованості навчально-дослідницьких умінь учнів. Для обчислення критерію χ^2 скористасмося формулою:

де n_1 – кількість спостережених значень у першій вибірці, n_2 – кількість спостережених значень у другій вибірці.

В нашому випадку $n_1 = \dots$ і $n_2 = \dots$

Критичне значення $\chi^2_{кр}$ для рівня статистичної значущості $\alpha = 0,05$. Оскільки $\chi^2 < \chi^2_{кр}$, то потрібно прийняти гіпотезу H_0 .

Отже, розподіли учнів за рівнями сформованості навчально-дослідницьких умінь на початку та наприкінці експериментального навчання відрізняються. Динаміку зміни сформованості в учнів навчально-дослідницьких умінь під час експериментального навчання відображено на рисунку 2.17.

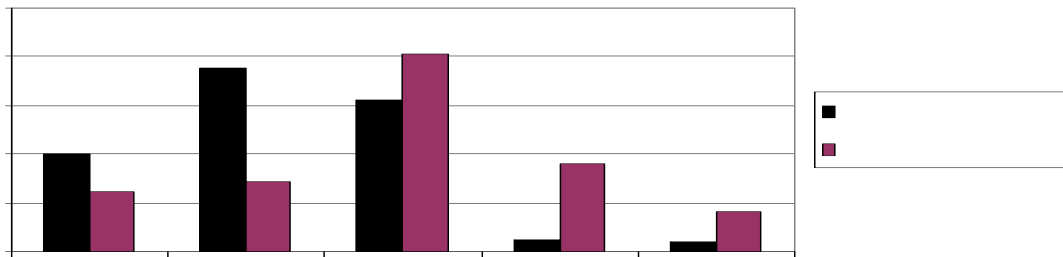


Рис. 2.17. Динаміка сформованості в учнів навчально-дослідницьких умінь під час експериментального навчання

Слід відзначити, що кількість учнів з низьким і середнім рівнями сформованості навчально-дослідницьких умінь зменшилася, зростає кількість учнів з достатнім і високим рівнями навчально-дослідницьких умінь. Після експериментального навчання на 10% збільшилася кількість учнів з уміньми дослідницької діяльності на рівні вище середнього.

Отже, якщо в процесі навчання учнів елементів стохастичності враховувати особливості науково-обґрунтованої методичної системи, дотримуватися принципу добору практично спрямованих задач і завдань, що потребують уяви, наполегливих та активних дій учнів, реалізуючи при цьому дидактичні і психологічні принципи розвивального

навчання, то це сприяє формуванню навчально-дослідницьких умінь учнів, їх інтелектуальному розвитку, інтересу до математики як навчального предмета, підвищенню загального рівня математичної підготовки.

З метою розширення і поглиблення методичних знань майбутніх учителів і учителів, які вже навчають учнів математики, було розроблено спецкурс „Елементи стохастики” та посібник-практикум для студентів вищих навчальних педагогічних закладів освіти, що відповідає програмі вказаного спецкурсу. З 2005/2006 навчального року спецкурс „Елементи стохастики” впроваджено на фізико-математичному факультеті Бердянського державного педагогічного університету для студентів IV, V, VI курсів, що навчаються за спеціальністю „Математика” (денної та заочної форм навчання).

Програму спецкурсу розраховано на 50 годин навчального часу, з них: 12 годин – лекції, 12 годин – практичні роботи, 8 годин – лабораторні роботи, 18 годин відводиться на самостійну роботу студентів.

Перелік тем спецкурсу:

1. Аналіз нормативних стандартів, програм, навчально-методичного забезпечення зі стохастики шкільного курсу математики;
2. Наука про випадкове: історія виникнення, становлення, розвиток та сучасний стан;
3. Стохастичний експеримент. Простір елементарних подій. Поняття випадкової події. Вірогідна та неможлива події;
4. Операції над подіями. Уточнення поняття випадкової події. Простір подій;
5. Відносна частота або статистична ймовірність події. Ймовірнісні простори. Уточнення поняття випадкової події;
6. Поняття дискретного та неперервного розподілів статистичних ймовірностей (відносних частот). Щільність неперервного розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот);
7. Функція дискретного та неперервного розподілів статистичних ймовірностей (відносних частот). Деякі числові характеристики дискретного та неперервного розподілів статистичних ймовірностей (відносних частот);
8. Приклади важливих розподілів статистичних ймовірностей. Поняття про статистичну перевірку гіпотез. Поняття випадкової величини;
9. Організація та проведення навчального статистичного дослідження;
10. Розв’язування шкільних задач зі стохастики, опрацювання статистичних даних за допомогою педагогічного програмного засобу GRAN1.

Самостійна робота студентів передбачала виконання творчих завдань, добір дидактичних матеріалів, складання тестів, розробку тематичних планів і конспектів навчально-практичних занять, складання тематики та плану проведення навчальних статистичних досліджень, організацію та проведення навчального статистичного дослідження.

Кількість студентів, що були охоплені навчанням у 2005/2006 навчальному році – 88, у 2006/2007 навчальному році – 36, у 2007/2008 навчальному році – 25.

Особливості методики розв’язування задач зі стохастики за допомогою комп’ютера розглядалися з учителями м. Бердянська, Бердянського та Приморського районів Запорізької області на методичних семінарах-практикумах, що проводилися на кафедрі

математики, методики викладання математики Бердянського державного педагогічного університету та курсах підвищення кваліфікації вчителів на базі Бердянської філії Запорізького обласного інституту післядипломної педагогічної освіти, з вчителями Куйбишевського району Запорізької області на базі Куйбишевської спеціалізованої загальноосвітньої школи I-III ступенів „Інтелект”.

Висновки за розділом II

Проведене експериментальне дослідження, що ґрунтувалося на теоретичному аналізі філософської, психолого-педагогічної та науково-методичної літератури з проблеми дослідження; аналіз освітніх стандартів, програм з математики, програм факультативних курсів та курсів за вибором з математики для загальноосвітніх навчальних закладів різного профілю, підручників і навчальних посібників, педагогічних програмних засобів, монографій, дисертаційних досліджень, статей і матеріалів науково-методичних конференцій з проблеми дослідження, приводить до висновку про можливість і доцільність формування навчально-дослідницьких умінь учнів в процесі навчання елементів стохастички.

Результати констатуючого експерименту показали, що формуванню навчально-дослідницьких умінь учнів на уроках математики сьогодні приділяється недостатня увага; відчувається брак методичної літератури з проблеми навчання елементів стохастички та літератури, присвяченої проблемі формування навчально-дослідницьких умінь. Такий засіб формування навчально-дослідницьких умінь учнів, як організація та проведення статистичних досліджень, залишаються поза увагою вчителів математики.

Під час дослідження проблеми формування навчально-дослідницьких умінь учнів в процесі навчання елементів стохастички нагальною потребою постали:

1. Перегляд і розробка окремих компонентів методичної системи навчання елементів стохастички:

— змісту як сукупності двох взаємопов'язаних компонентів: теоретичного та практичного (теоретичного матеріалу і системи вправ, задач, передбачених програмою і підручниками, та спеціальної системи прикладів і задач, які сприяють формуванню навчально-дослідницьких умінь учнів);

— методів — як традиційних (словесних, наочних, практичних, контролю), так і методів активізації навчально-пізнавальної діяльності (доцільно дібраних задач, навчальної дискусії, висунення гіпотез, надання рецензій, створення учнівських проектів, методів самонавчання учнів);

— засобів, у тому числі педагогічних програмних засобів;

— організаційних форм: лекцій, семінарів, лабораторних робіт, навчальних статистичних досліджень, факультативу, екскурсії, навчальних конференцій.

2. Визначення шляхів формування навчально-дослідницьких умінь учнів в процесі навчання елементів стохастички.

Доцільність організації процесу навчання учнів елементів стохастички на основі створеної методичної системи формування навчально-дослідницьких умінь учнів об'єктивно підтверджується аналізом результатів анкетування учнів, результатами виконання письмових робіт учнів, результатами апробації розробок, отриманих в ході дослідження, під час проведення занять факультативного курсу „Елементи стохастички”.

Статистичний аналіз даних, отриманих у результаті формуючого етапу педагогічного експерименту, дав математичне підтвердження позитивних змін у формуванні навчально-дослідницьких умінь учнів.

Результати дослідно-експериментальної перевірки підтверджують той факт, що розроблені підходи до навчання учнів елементів стохастички мають високу ефективність, а їх реалізація дійсно сприяє формуванню навчально-дослідницьких умінь сучасних школярів

ВИСНОВКИ

Входження України в Міжнародне освітнє співтовариство, впровадження компетентнісної освітньої парадигми, впровадження у навчальний процес особистісно орієнтованих технологій, роль умінь здобувати і опрацювати відомості, одержані з різних джерел, застосовувати їх для індивідуального розвитку і самовдосконалення, особистісна значимість для сучасних школярів визначають своєчасність і актуальність обраної теми дослідження „Формування навчально-дослідницьких умінь учнів у процесі навчання елементів стохастичності”.

В ході дослідження розглядався процес навчання математики учнів загальноосвітніх навчальних закладів з метою вдосконалення методичної системи формування навчально-дослідницьких умінь учнів, зокрема:

1. Проведено аналіз державних документів, навчальних планів і програм з математики; психолого-педагогічної, науково-методичної та навчальної літератури з теми дослідження.
2. З'ясовано особливості навчально-дослідницької діяльності учнів і уточнено поняття навчально-дослідницької діяльності учнів; виявлено і доповнено структурні компоненти навчально-дослідницьких умінь; визначено роль задач імовірнісного характеру в процесі розвитку дослідницьких умінь учнів.
3. Вивчено досвід вчителів математики загальноосвітніх шкіл навчати учнів елементів стохастичності, проаналізовано результати навчально-пізнавальної діяльності учнів, виявлено актуальні проблеми навчання учнів елементів стохастичності та проблеми застосування інформаційних технологій в процесі навчання математики, зокрема елементів стохастичності.
4. Визначено передумови та шляхи формування навчально-дослідницьких умінь учнів у процесі навчання елементів стохастичності.
5. Запропоновано систему оцінювання навчально-дослідницьких умінь учнів, що відповідає сучасним вимогам оцінювання навчальних досягнень учнів за 12-бальною шкалою.
6. Розроблено окремі компоненти методичної системи формування навчально-дослідницьких умінь учнів у процесі навчання учнів загальноосвітніх навчальних закладів елементів стохастичності на основі статистичного підходу:
 - визначено цілі навчання;
 - побудовано дидактичну модель навчання учнів десятого класу елементів стохастичності на основі статистичного підходу, спрямовану на формування навчально-дослідницьких умінь учнів;
 - розроблено програму факультативного курсу „Елементи стохастичності” для учнів десятого класу загальноосвітніх навчальних закладів;
 - запропоновано зміст навчання та методику навчання учнів елементів стохастичності, що спрямована на формування навчально-дослідницьких умінь учнів;
 - запропоновано засоби, методи, організаційні форми навчання учнів старшої школи елементів стохастичності, у тому числі з використанням сучасних інформаційних технологій, використання яких спрямовано на формування навчально-дослідницьких умінь учнів;
 - розроблено тематику навчальних статистичних досліджень;
 - розроблено тематику практичних завдань, розв'язування яких сприяє формуванню навчально-дослідницьких умінь учнів;
 - розроблено лабораторні роботи та методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт з розв'язування задач стохастичності за допомогою педагогічного програмного засобу GRAN1;
 - розроблено спецкурс „Елементи стохастичності” для студентів вищих навчальних педагогічних закладів освіти – майбутніх вчителів математики;
 - розроблено посібник-практикум „Елементи стохастичності” для студентів вищих навчальних педагогічних закладів освіти, що відповідає програмі вказаного спецкурсу.

7. Експериментально перевірено ефективність розробленої методичної системи формування навчально-дослідницьких умінь учнів у процесі навчання елементів стохастичності

Узагальнення отриманих результатів проведеного дисертаційного дослідження надає можливість зробити наступні висновки:

1. Навчально-дослідницька діяльність учнів організовується вчителем з використанням різноманітних форм організації навчання та дидактичних засобів. Вона спрямована на виявлення закономірних зв'язків і відношень теоретичних або експериментально спостережених фактів, явищ, процесів. В навчально-дослідницькій діяльності учнів домінує самостійне застосування прийомів наукових методів пізнання. В процесі навчально-дослідницької діяльності учні активно здобувають знання, розвивають свої дослідницькі вміння.

2. Навчально-дослідницькі вміння учнів, як складові творчої діяльності (навчальної та дослідницької), неможливо подати як точно описані та строго регульовані системи операцій або дій. Але можна виокремити наступні структурні компоненти навчально-дослідницьких умінь: організаційний, інформаційний, інтелектуальний, комунікативний, технічний.

3. Задачі зі стохастичності є засобом формування навчально-дослідницьких умінь учнів. Їх розв'язування сприяє формуванню методологічно правильних поглядів на природу та суспільство, поглядів, що відповідають сучасній науковій картині світу, оскільки демонструють розбіжність в характері двох світів – світу математики й реальної ситуації. Вони не є алгоритмічними. Всім їм притаманна об'єктивна або, щонайменше, психологічна віддаленість від алгоритмічних схем. Статистичний підхід до навчання учнів елементів стохастичності надає можливість розширити знання учнів про математичні моделі та навчити будувати ймовірнісні моделі стохастичних експериментів, формуючи в учнів науковий світогляд, уявлення про ідеї і методи математики, її роль у пізнанні дійсності.

4. Процесуальні риси дослідницької діяльності проявляються не одночасно при розв'язуванні кожної проблеми, задачі чи завдання, а у різних комбінаціях і з різною виразністю. Досвід дослідницької діяльності учнями накопичується поступово.

5. Запропонована методика навчання учнів елементів стохастичності надає можливість перетворити процес учіння у цікавий дослідницький процес; полегшує усвідомлення ймовірнісно-статистичних законів; сприяє розвитку логічного мислення, творчої уяви; покращує рівень знань учнів; сприяє формуванню навчально-дослідницьких умінь та індивідуальному розвитку творчих здібностей учнів.

Проведене дослідження є внеском у вирішення проблеми формування навчально-дослідницьких умінь учнів в процесі навчання. Вірогідність та обґрунтованість отриманих в ході дисертаційного дослідження результатів забезпечується: методологічною і теоретичною обґрунтованістю вихідних позицій дослідження, використанням комплексу взаємопов'язаних методів, що відповідають меті та завданням дослідження; поєднанням якісного аналізу з математичними методами опрацювання емпіричних даних, а також позитивними результатами впровадження основних результатів дослідження.

Результати дослідження, розроблені матеріали можуть бути використані викладачами і студентами вищих педагогічних навчальних закладів, вчителями математики, методистами інститутів післядипломної освіти, а також при підготовці підручників і навчальних посібників.

Подальшого розвитку має набути тематика та методика проведення навчальних статистичних досліджень з урахуванням сучасних вимог 12-річної освіти та особливостей навчальної практики учнів.

ДОДАТКИ

Додаток А

Приклади повідомлень, доповідей, що готувалися учнями для виступів на семінар – круглий стіл „Стохастика як наука”

№1. Тема: Застосування методів стохастики в лінгвістиці

Підготувала Ганна Б.

Застосування кількісних методів стохастики (імовірнісних і статистичних) у лінгвістиці викликали бурхливу дискусію серед учених. У ході дискусії виникло багато проблем. Серед них:

- Які завдання можна розв’язувати за допомогою методів стохастики в області фонетики мови й звукової організації мовлення?
- Чи можливі математичні оцінки таких якостей мовлення, як багатство, розмаїтість, виразність тощо?

Автор першого підручника з теорії ймовірностей російською мовою В. Я.

Буняковський (1804–1889) уже в 1847 році не сумнівався в корисності використання теорії ймовірностей у лінгвістиці: „... нове застосування відноситься до граматичних і етимологічних досліджень будь-якої мови, також до порівняльної філології”.

Велике значення питанням застосування математичних методів у лінгвістиці надавав А. А. Марков (1856–1922). Лінгвістичні дослідження він використовував для експериментальної перевірки деяких імовірнісних процесів, які потім були названі за його ім'ям „марковськими процесами”. Вчений вивчав чергування голосних і приголосних букв у російській мові, для чого проаналізував послідовність із 20000 букв у поемі О. С. Пушкіна „Євгеній Онегін” і послідовність із 100000 букв у книзі С. Т. Аксакова „Дитячі роки Багрова-онука”. На базі цього статистичного матеріалу А. А. Марков оцінював імовірність того, що взята навмання буква з російського тексту буде голосною. Ця ймовірність істотно пов'язана з тим, голосною або приголосною була попередня буква. Для роману „Євгеній Онегін” було обчислено, що відносна частота появи голосної після голосної дорівнює 0.128, голосної після приголосної – 0.663. А. А. Марков не абсолютизував отримані їм числові значення. Оскільки завдання застосування методів стохастики в лінгвістиці, вважав він, полягає не в тім, щоб обчислити якісь імовірнісні характеристики й представити їх як критерії творчості, а в тім, щоб визначити, чи дійсно те або інше значення є характерним для даного письменника або лише відображає неминучі коливання навколо деяких середніх величин, підкоряючись загальним законам мови.

Дослідження А. А. Маркова сприяли розвитку різних корисних досліджень. Для кожної букви алфавіту була обчислена відносна частота появи в тексті (див. таблицю А.1).

Таблиця А.1

Частотна таблиця букв російського алфавіту

Буква	Частота	Буква	Частота	Буква	Частота	Буква	Частота
А	0,062	И	0,062	Р	0,040	Ш	0,006
Б	0,014	Й	0,010	С	0,045	Щ	0,003
В	0,038	К	0,028	Т	0,053	Э	0,003
Г	0,013	Л	0,035	У	0,021	Ю	0,006
Д	0,025	М	0,026	Ф	0,002	Я	0,018
Е, Ё	0,072	Н	0,053	Х	0,009	Ы	0,016
Ж	0,007	О	0,090	Ц	0,004	Ь, Ь	0,014
З	0,016	П	0,023	Ч	0,012	Пробел	0,175

Частоти появи тих або інших букв приймають за наближені значення ймовірностей. Знання частоти дозволяє, наприклад, розробляти оптимальні коди передачі мовних текстів, що особливо було актуальним у розвитку телефонного зв'язку.

Література: 1. Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. – М. : Наука, 1982.

2. Чубарев А. М., Холодный В. С. Невероятная вероятность. – М. : Знание, 1976.

3. Яглом А. М., Яглом И. М. Вероятность и информация. – М. : Наука, 1973.

№2. Тема: Застосування методів стохастики в демографії

Підготував Віктор Х.

Сьогодні за допомогою техніки медици можуть передбачити стать немовля з певною точністю. Раніше наука не могла завбачати стать немовля в кожному конкретному випадку, але демографам добре відома цифра 0.514 – частка хлопчиків серед немовлят. Вважається, що за всіх часів і у всіх країнах на кожен 1000 немовлят приходить 514 хлопчиків.

Ця закономірність була помічена давно. Ще в Древньому Китаї за 2238 років до нашої ери на підставі переписів було знайдено це число, щоправда, воно приймалося рівним 0.5. Одним із перших учених, який висловив припущення, що ця закономірність можна розглядати, як загальний закон для всього людства був А. Гумбольт (1769–1859). Він установив, що це відношення дорівнює 22:21.

Слідом за Гумбольтом докладно вивчив цю проблему знаменитий французький математик П. Лаплас (1749–1827), але, обробивши статистичні дані, Лаплас одержав зовсім інше значення. З 1745 року в Парижі в метричних книгах стали робити позначку про стать немовля. До кінця 1784 року в Парижі охрестили 393386 хлопчиків і 377555 дівчинок, тобто 25:24. Учений спробував з'ясувати, чому це відношення відрізняється від того, що отримав А. Гумбольт. П. Лаплас ретельно проаналізував метричні книги майже за 40 років і встановив, що діти віддані в притулок, оформлялися в цих книгах двічі: при народженні й після того, як вони попадали в притулок. Причому селяни в притулок віддавали більше дівчаток, ніж хлопців. Цією невеликою неточністю обліку й пояснювалося збільшення частки дівчинок у загальному числі немовлят.

Література: 1. Жалдак М. І., Михалін Г. О. Елементи стохастики з комп'ютерною підтримкою. – К. : Шкільний світ, 2006.

2. Чубарев А. М., Холодный В. С. Невероятная вероятность. – М. : Знание, 1976.

3. Шляхами математики: Хрестоматія для учнів 5-9 кл. / Т. М. Хмара. – К. : Пед. преса, 1999.

№3. Тема: Внесок Ф. Гальтона в розвиток науки

Підготувала Надія Ш.

Сер лорд Френсіс Гальтон народився в 1822 році в батьківському маєтку Лерчес біля Бірмінгама (Англія). Він був самою молодшою дитиною в багатодітній сім'ї. Генеалогічне дерево Гальтона охоплює близько 50 поколінь. Чарлз Дарвін (1809–1882) і Френсіс Гальтон (1822–1911) були двоюрідними братами. Найдавніші предки Гальтона сягають раннього середньовіччя, і серед них були такі особи, як Карл Великий, Ярослав Мудрий, Вільгельм Завойовник, кілька англійських королів. Це предки двох бабусь Гальтона. Предки його дідів походили із селян.

Талант Гальтона проявився в кількох галузях науки.

1. Як мандрівник він збагатив знання свого часу з географії й етнографії Африки.

2. Як метеоролог він створив поняття антициклона й сприяв створенню синоптичних карт для вивчення атмосферних явищ.

3. Важливі його заслуги як статистика й антрополога. Він запровадив статистику у вивчення біологічних проблем, заснувавши біометрію, і розробив методи статистики. Він статистично показав спадковість таланту людини й взагалі відкрив шлях до вивчення мінливості й спадковості людини й інших організмів статистичними методами.

4. Створив метод близнюків у генетиці.
5. Створив дактилоскопію як метод ідентифікації особи.
6. Створив метод тестів в експериментальній психології для кількісної оцінки психічних властивостей людини.
7. Створив метод «типового» портрета.
8. Винайшов ряд інструментів і приладів.

Більш докладно про прилад, що створив Гальтон для механічної ілюстрації статистичної кривої частоти подано в шкільному підручнику „Алгебра й початку аналізу”.

Зупинимося на історії одного поняття, що ввів Ф. Гальтон. Він вивчав залежність зросту синів від зросту батьків. Їм був зібраний значний статистичний матеріал, на підставі якого вчений зробив висновок про те, що в середньому зріст синів зменшується в порівнянні з зростом батьків. Він навіть обчислив рівняння цієї залежності, що назвав рівнянням регресії. Але висновок Гальтона про зменшення зросту синів у порівнянні зі зростом батьків не знайшов підтвердження в дослідженнях інших учених. Проте метод, їм розроблений, був узятий на озброєння всіма, кому доводилося обробляти експериментальні дані. У ході цього дослідження Ф. Гальтон не тільки ввів термін „регресія” у математику, але й поклав основу новому напрямку в науці – теорії кореляції.

На практиці зустрічаються задачі коли одному значенню аргументу можуть відповідати різні значення функції (наприклад, міцність сталі залежить від змісту вуглецю, марганцю, кремнію, зміни технології, погрішності випробування тощо). Такий зв'язок називають кореляційним зв'язком (від древнелатинського слова *correlation*, що означає взаємозалежність).

Через якийсь час російський учений А. А. Чупров (1874–1926) виявив ряд помилок і методологічних неточностей у працях Гальтона і його учнів. Чупров написав лист Гальтону в порядку приватної переписки, не бажаючи підривати авторитет всесвітньо відомої школи. Через півроку у відомому журналі вийшла стаття за назвою „Згрішили” з виправленими помилками і вираженням подяки А. А. Чупрову.

Ф. Гальтон увів дактилоскопію як метод ідентифікації особи в практику карного розшуку. Зібраний ним статистичний матеріал підтвердив сталість візерунків пальців протягом життя й те, що ці візерунки відновлюються у випадку їхнього пошкодження або руйнування (наприклад, якщо людина обварилася окропом). Серед інших питань пов'язаних з дактилоскопією розглядав Гальтон і питання про спадковість типів дактилоскопічних візерунків, порівнюючи відбитки батьків і дітей. Він зібрав відбитки 136 синів і 219 дочок і порівняв їхні візерунки з візерунками батьків. Результати його дослідження представлені в таблиці А.2.

Таблиця А.2

Результати досліджень Ф. Гальтона

Степінь споріднення	Вказівний	Середній	Підмізинний	Загальний %	Середнє значення, %
Батько й син	12,5	25,7	20,6	58,8	54,75
Батько й дочка	13,2	23,5	14,0	50,7	
Мати й син	13,2	36,8	19,1	69,1	68,4
Мати й дочка	17,4	34,3	16,0	67,7	

За отриманими даними Гальтон зробив висновок, що син не має більшої степені подібності з батьком і матір'ю, ніж дочка. Немає помітної степені розходження між подібністю батьків з дітьми за візерунком вказівного й підмізинного пальців, але є за середнім пальцем: тут відсоток подібності з матір'ю в дітей більше, ніж з батьком. Ясного пояснення цього факту Гальтон дати не зміг. Можливо потрібні нові дослідження.

Література: 1. Алгебра и начала анализа 11 класс. / Н. И. Шкіль, З. И. Слєпкань, Е. С. Дубинчук. – К. : Зодіак-ЕКО, 2003.

2. Канаев И. И. Фрэнсис Гальтон. – Ленинград : Наука, 1972.

3. Чубарев А. М., Холодный В. С. Невероятная вероятность. – М. : Знание, 1976.

№4. Тема: Теорія ймовірностей і питання ціноутворення. Парадокс Джиффена
Підготувала Євгенія І.

Дослідження статистичних взаємозв'язків між явищами приводить іноді до парадоксів у досить простих й, здавалося б, очевидних ситуаціях. Наприкінці ХІХ століття англійський статистик Джиффен установив, що при підвищенні ціни на дешевий, але необхідний товар (наприклад, хліб) попит на нього збільшується, а не зменшується, хоча начебто б є очевидним те, що з підвищенням ціни на товар попит на нього повинен падати.

На практиці все відбувалося за принципом: „Чим дорожче хліб, тим більше його їдять”. Серед математиків і економістів це явище одержало назву парадокса Джиффена. Цей парадокс довго не могли розгадати. В 1915 році в італійському економічному журналі з'явилася стаття російського математика й економіста Є. Є. Слуцького (1880–1948) „До теорії збалансованого бюджету споживача”, у якій давалося пояснення цього парадоксу. Грунтуючись на знаннях теорії ймовірностей учений зміг розплутати клубок взаємозв'язків, проілюструвавши це математичними викладками. Коротко, отримані Є. Є. Слуцьким результати, можна викласти так: підвищення ціни на товар повинно спричинити зниження купівельної спроможності, однак якщо товар насущний і необхідний (яким є хліб), то попит на нього не може скоротитися, як би не змінювалася ціна в межах бюджету покупця. Тому попит на хліб не зменшився, а зменшилися можливості покупки інших більш дорогих продуктів (м'ясо, олія тощо). Виходить, замість цих продуктів доводиться купувати більш дешевий продукт, тобто хліб.

Література: 1. Чубарев А. М., Холодный В. С. Невероятная вероятность. – М. : Знание, 1976.

№5. Тема: Епоха Бернуллі

Підготував Андрій Т.

Багато виведено формул, доведено теорем, поставлено задач з математики, механіки, фізики представниками родини Бернуллі. Якщо поставити в ряд дати появи всіх їх робіт, то він розтягнеться більше ніж ... на два сторіччя.

Родина Бернуллі – унікальна в науці. Проживала вона у швейцарському місті Базелі. З кінця ХVІІ сторіччя й по ХХ сторіччя ця родина в кожному поколінні давала вчених. Математичне дарування Бернуллі проявлялося рано: всі вони мали перші вчені ступені у віці 14-19 років. Родоначальниками династії вчених були два брати – математики Якоб (1654–1705) і Іоганн (1667–1748). Якоб почав роботу на кафедрі математики в Базельському університеті в 1687 році, де викладав до самої смерті. Після нього кафедру очолив Іоганн – він викладав 43 роки. Згодом більше двохсот років Бернуллі були професорами в Базельському університеті. Одинадцять членів цього сімейства займали кафедри й були великими вченими. В 1699 році Паризька академія наук обрала з восьми іноземних членів двох із сімейства Бернуллі. З того часу, без перерви, протягом сторіччя один із Бернуллі був членом Паризької академії наук.

В теорії ймовірностей ім'я Бернуллі зв'язано з теоремою Бернуллі, схемою Бернуллі, розподілом Бернуллі.

Якоб Бернуллі написав книгу „Мистецтво припущень”, де зокрема наводить так звані біноміальний розподіл ймовірностей та закон великих чисел.

Микола Бернуллі (1687–1759) своєю працею „Досвід застосування мистецтва припущень до правових питань” (1711 р.) продовжив працю Я. Бернуллі. Він застосував ймовірнісні ідеї та методи до оцінки показань свідків, підрахунку рент, страхування життя та товарів.

Данііл Бернуллі (1700–1782) першим висунув ідею застосування нескінченно малих до задач теорії ймовірностей. Головна його робота у галузі теорії ймовірностей „Досвід дослідження застосування числення нескінченно малих у мистецтві припущень”.

Література: 1. Бородин А. И., Бугай А. С. Биографический словарь деятелей в области математики. – К. : Радянська школа, 1979.

2. Жалдак М. І., Михалін Г. О. Елементи стохастики з комп'ютерною підтримкою. – К. : Шкільний світ, 2006.

№6. Тема: Аксиоматичний підхід в теорії ймовірностей

Підготувала Анастасія Н.

До певного часу в науці вважалося, що ймовірність події існує об'єктивно й тому в означенні не має потреби. Питання полягало в тому, як порахувати цю ймовірність.

Основним полем застосувань теорії ймовірностей спочатку були азартні ігри й аналіз показань свідків. Азартні ігри, пов'язані з картами, гральними костями, киданням монет дозволяли так будувати відповідні стохастичні експерименти, що їх наслідки були симетричними щодо умов експерименту. Але такий підхід до обчислення ймовірностей не міг задовольнити вчених натуралістів, оскільки застосування теорії ймовірностей до вивчення явищ природи були обґрунтовані слабо й зустрічали різку й обґрунтовану критику.

Розвиток природознавства на початку минулого сторіччя пред'явив до теорії ймовірностей підвищені вимоги. Виникла необхідність у систематичному вивченні основних понять теорії ймовірностей і з'ясуванні тих умов, при яких можливе використання її результатів. От чому особливо важливого значення набуло формально-логічне обґрунтування теорії ймовірностей, її аксіоматична побудова. При цьому в основу теорії ймовірностей як математичної науки повинні бути покладені деякі передумови, що є узагальненням багатовікового людського досвіду. Подальший ж її розвиток повинен будуватися за допомогою дедукції¹ із цих основних положень без звертання до наочних представлень, до висновків „відповідно здоровому глузду”. Іншими словами, теорія ймовірностей повинна будуватися з аксіом так само, як будь-яка математична наука, наприклад, геометрія.

Уперше така точка зору була висловлена й розвинена в 1917 р. російським математиком С. Н. Бернштейном (1880–1968). При цьому С. Н. Бернштейн виходив з якісного порівняння випадкових подій за їх більшою чи меншою імовірністю.

Німецький математик Р. Мізес (1883–1958) запропонував у 1919 році свою систему аксіом імовірності. Перша аксіома зазначала існування границі частоти й значення цієї границі називалося ймовірністю події. Така аксіоматика приводила до істотних математичних труднощів, пов'язаних з проведенням нескінченної послідовності експериментів. А значення ймовірності залежало від спостерігача, від проведення ним послідовностей випробувань. В аксіоматиці Р. Мізеса ймовірність чисельно переставала бути об'єктивною характеристикою реальних явищ, як, наприклад, довжина, температура, вага в природознавстві.

Система аксіом, що має стати основою теорії ймовірностей не повинна бути тільки фантазією математика. Аксіоми в стислій і ясній формі мають відображати ті властивості, якими володіють окремі реальні явища. При строгому викладі теорії, приймаючи ту або іншу систему аксіом, необхідно ще переконатися в тім, що всі прийняті аксіоми не суперечать одна одній і логічно не залежать одна від одної. Коли це зроблено, до системи аксіом, що є формальним визначенням поняття ймовірності, додається принцип вибору чисельного значення ймовірності. Цей принцип полягає в тому, що за чисельне значення ймовірності вибирається не будь-яке число, а число, поблизу якого коливається частота

¹ Дедукція – спосіб міркування від загальних положень до часткових висновків.

події при великій кількості спостережень.

Такий підхід до побудови теорії ймовірностей був запропонований А. М. Колмогоровим. Цей підхід тісно зв'язує теорію ймовірностей із метричною теорією функцій і теорією множин. Аксиоматичний підхід до означення ймовірності долає некоректність усіх інших означень.

Література: 1. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. – М. : Наука, 1988.

2. Скороход А. В. Вероятность. Основные понятия. Структура. Методы. – М. : Наука, 1989.

Додаток Б
Застосування педагогічного програмного засобу GRAN1
до розв'язування задач стохастички

Лабораторна робота №1.

Ознайомлення з програмою GRAN1

Мета: сформувати необхідні вміння та навички роботи з програмним засобом GRAN1 для опрацювання статистичних даних.

Обладнання: ПК, програмний засіб GRAN1.

Порядок роботи:

Крок 1. Запуск програми.

Завантажте GRAN1. Для цього можна скористатися ярликом GRAN1 на робочому столі, або відкрити за допомогою однієї з файлових оболонок (Провідник Windows чи Windows Commander) файл C:/ GRAN1/ gran1.exe.

Після запуску програми на екрані ПЕОМ з'явиться робоче вікно (рис. Б.1). Розгляньте його, з'ясуйте, з яких вікон воно складається, які ще об'єкти на ньому розташовано. Вивчіть відомості, подані в кожному з вікон програми.

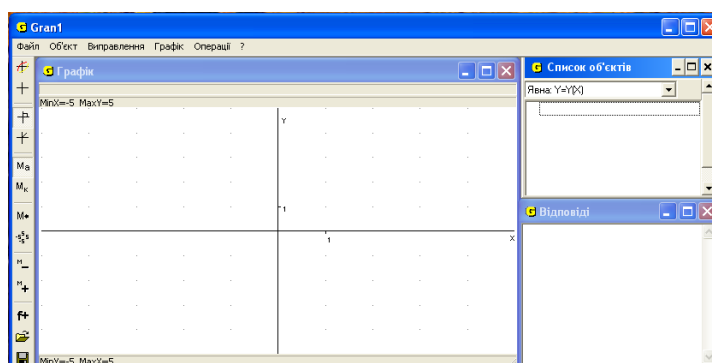


Рис. Б.1

Крок 2. Вивчення головного меню програми GRAN1.

2.1. У верхньому рядку робочого вікна GRAN1 розміщено головне меню – перелік послуг, до яких можна звернутися в процесі роботи з програмою. При зверненні до певного пункту головного меню з'являється перелік пунктів відповідного підменю (рис. Б.2). Пункти підменю, в свою чергу, можуть розгалужуватись на підпункти, перелік яких з'являється при зверненні до відповідного пункту підменю. Назви підпунктів підменю, використання яких в даний момент не є коректними, подано блідим кольором. Ще кажуть, що вони недоступні.

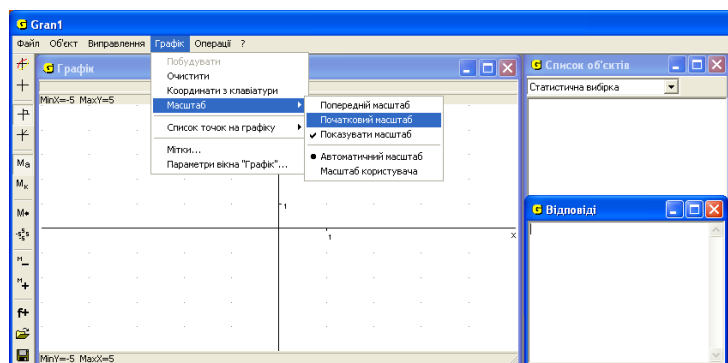


Рис. Б.2

2.2. Встановивши курсор на пункті головного меню, позначеного „?”, натисніть праву кнопку миші. Оберіть пункт Про програму цього підменю. На екрані з'явиться віконце, в якому подаються короткі відомості про програму GRAN1. Щоб закрити його, скористайтеся кнопкою з хрестиком в правому верхньому куті вікна, або натисніть конопку Ok.

2.3. Оберіть пункт головного меню Графік, перегляньте зміст підменю, та впевніться, що біля пунктів Масштаб та Список точок на графіку зображено стрілочки. Це говорить про те, що такі пункти розгалужуються на підпункти. Перегляньте їх перелік при зверненні до кожного з пунктів.

Зверніть увагу на те, що в підменю Графік пункт Побудувати недоступний, тому що не створено математичний об'єкт, а отже неможливо побудувати його графічне подання.

Крок 3. Способи звернення до послуг програми.

Звернення до окремих послуг програми GRAN1 не завжди зручне, якщо перебирати пункти головного меню і підпункти відповідних підменю. При необхідності це можна здійснити за допомогою Панелі інструментів чи функціональних клавіш (певних комбінацій клавіш).

3.1. Панель інструментів розташовано ліворуч на робочому вікні GRAN1. Вивчіть призначення кожного з об'єктів на Панелі інструментів. Якщо навести мишку на об'єкт та потримати її деякий час, з'явиться підказка. Занесіть до зошитів схематичне зображення кнопок Панелі інструментів та запишіть їх призначення.

3.2. Відповідність окремих функціональних клавіш та їх комбінацій послугам програми показано у відповідних підменю пунктів головного меню.

Вивчіть, які функціональні клавіші використовуються при користуванні програмою GRAN1, та запишіть до робочого зошиту комбінації клавіш та їх призначення.

Відмова від роботи із щойно обраною послугою і повернення до головного меню здійснюється за допомогою клавіші Esc, або натисканням правої клавіші мишки.

Крок 4. Збереження наробок.

4.1. Оберіть в головному меню пункт Файл, пункт підменю Записати чи Записати як ... З'являється вікно Збереження файлу. В полі Ім'я файлу введіть назву, яка вам до вподоби. Вона не повинна містити більше, ніж 255 символів, та містити деякі спеціальні символи. Натисніть кнопку Зберегти.

4.2. Зверніться до будь-якої з файлових оболонок (Провідник Windows чи Windows Commander) та знайдіть свій збережений файл. Він буде мати розширення .gr1. При необхідності можна скористатися послугою Файл / Відкрити, щоб відкрити один зі збережених файлів.

Крок 5. Звернення до допомоги.

Програму GRAN1 оснащено контекстно-чутливою допомогою. Якщо вказівник встановлено на певний підпункт деякого пункту головного меню, то при натисненні клавіші F1 у вікні Графік з'являється допоміжне вікно, в якому міститься коротка довідка про призначення зазначеного пункту та про правила його використання.

Одночасне натискання клавіш Ctrl + F1 приводить до появи на екрані вікна з переліком всіх пунктів допомоги.

Скористайтесь контекстно-чутливою допомогою при підготовці відповідей на контрольні запитання до цієї лабораторної роботи.

Запитання для контролю:

- 1.З яких об'єктів складається робоче вікно програми GRAN1? Яке їх призначення?
- 2.Охарактеризуйте кожне з вікон програми.
- 3.Скільки пунктів є в головному меню програми? Як називаються ці пункти?

4.Що і де з'явиться на екрані, якщо встановити вказівник пунктів головного меню на деякий пункт і натиснути клавішу Enter?

5.Які дії необхідно виконати, щоб звернутися до деякого підпункту деякого підменю?

6.Що потрібно зробити, щоб вивести на екран перелік всіх пунктів допомоги?

7.Що являє собою панель інструментів? Яке призначення кожного з її елементів?

8.Скільки підпунктів у підменю пункту „Операції”? Як називаються ці підпункти?

9.Як довідатися, чи коректним є звертання до підпункту деякого підменю в даний момент часу?

10. Як дізнатись про призначення того чи іншого підпункту деякого підменю?

11. Як звернутися до потрібного пункту меню, використовуючи маніпулятор „мишка”?

12. Як звернутися до потрібного підпункту підменю в зазначеному пункті головного меню, використовуючи маніпулятор „мишка”?

13. Як довідатися про призначення деяких комбінацій функціональних клавіш?

14. Як відмовитися від виконання обраної послуги?

Лабораторна робота №2.

Опрацювання статистичних даних за допомогою GRAN1

Мета: узагальнити та систематизувати знання, сформувати необхідні вміння та навички розв'язування статистичних задач за допомогою GRAN1.

Обладнання: ПК, програмний засіб GRAN1.

Порядок роботи:

Дайте відповіді на запитання:

1.Який розподіл частот називають дискретним? Який – неперервним? Чим відрізняються дискретні та неперервні розподіли частот?

2.Як ви розумієте поняття „варіанта”?

3.Як задаються розподіли абсолютних частот та статистичних ймовірностей? Чи однаковий вигляд вони мають для дискретного та неперервного розподілів?

4.Що називають варіаційним рядом?

5.Дайте означення многокутника розподілу статистичних ймовірностей.

6.Що називають щільністю розподілу статистичних ймовірностей на проміжку [a;b)?

7.Як називають графік щільності розподілу статистичних ймовірностей?

8.Назвіть основні властивості щільності розподілу статистичних ймовірностей.

Крок 1. Початок роботи.

Завантажте GRAN1.

Крок 2. Створення об'єкту „статистична вибірка”.

У вікні Список об'єктів зі списку для вибору типу об'єкту обираємо статистичну вибірку(рис.

Б.3).

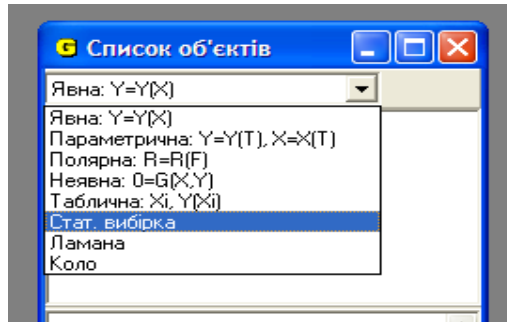


Рис. Б.3

Використавши або контекстне меню цього вікна (права кнопка миші), або головне меню Об'єкт, обираємо послугу Створити. На екрані з'являється вікно Дані статистичної вибірки. За допомогою кнопкового перемикача „Розподіл” можна вказати, який з двох можливих типів розподілів статистичних ймовірностей досліджується: дискретний чи неперервний.

Набір спостережених значень в обох випадках вводиться однаково. Після того, як вказано тип досліджуваного розподілу частот, необхідно вказати тип даних (частоти, відносні частоти або варіанти) (рис. Б.4).

Тип даних необхідно вказати перед початком введення самих даних, оскільки при зміні типу даних таблиця, що їх містить, очищується.

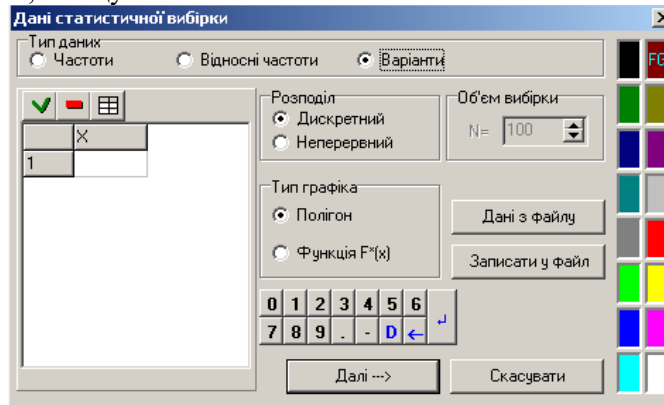


Рис. Б.4

Для дискретного розподілу при введенні:

– частот – слід вказати в стовпці “X” можливі значення досліджуваної величини, а в стовпці “n” – кількість появ даного значення;

– відносних частот – слід вказати в стовпці “X” можливі значення досліджуваної величини, а в стовпці “ ” – відносну частоту появи даного значення. При цьому також необхідно вказати об'єм вибірки в рядку “N=”;

– варіант – в єдиному стовпці “X” вказуються значення варіант (спостережені значення) досліджуваної величини.

Для неперервного (інтервального) розподілу при введенні:

– частот – слід вказати в стовпці “X” середину інтервалу, в який попадають спостережені значення, а в стовпці “n” – кількість попадань таких значень (варіант) в цей інтервал;

– відносних частот – слід вказати в стовпці “X” середину інтервалу, в який попадають варіанти, а в стовпці “ ” – відносну частоту попадання варіант в даний інтервал. При цьому також необхідно вказати об'єм вибірки в рядку “N=”;

– варіант – в єдиному стовпці “X” вказуються значення варіант .

При введенні даних можуть стати у нагоді кнопки Вставити рядок (📄), Вилучити рядок (🗑️) та Очистити таблицю (🧼).

За допомогою перемикача „Тип графіка” вказується тип графічного представлення даної статистичної вибірки. Для дискретного розподілу частот це полігон або функція розподілу, а для неперервного – гістограма або функція розподілу. За бажанням можна обрати колір, яким буде подано графічне зображення, вибравши довільний колір у палітрі, що знаходиться справа. Після закінчення введення даних потрібно натиснути кнопку „Далі>”. При цьому у вікні „Список об’єктів” з’явиться позначення нового об’єкта – статистичної вибірки.

У вікні „Список об’єктів” для статистичної вибірки виводяться деякі її характеристики: статистичне математичне сподівання (середнє арифметичне спостережених значень), статистичне середнє квадратичне відхилення, об’єм вибірки, мінімальне і максимальне значення варіант, мода (для дискретної величини) чи медіана (для неперервної), середнє геометричне, середнє гармонійне, середнє квадратичне, а також для неперервної величини – відрізок задання.

Якщо неперервний розподіл задається за допомогою варіант, то при натисненні на кнопку „Далі>” з’являється допоміжне вікно „Додатково” (рис. Б.5).

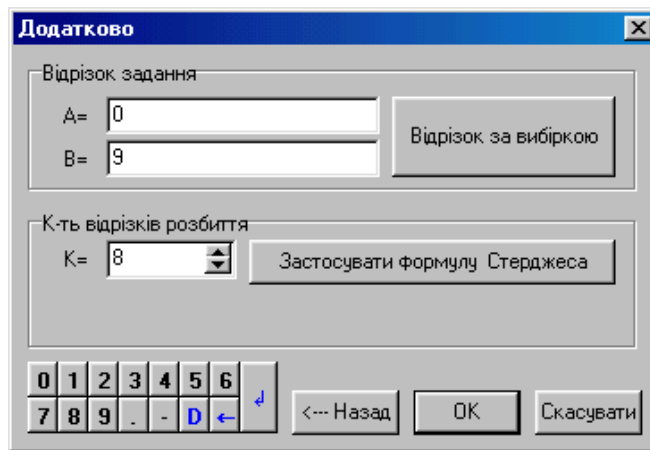


Рис. Б.5

В цьому вікні необхідно вказати відрізок, що охоплює всі введені значення варіант. За допомогою кнопки „відрізок за вибіркою” встановлюються як значення лівого і правого кінців відрізка мінімальне та максимальне значення варіант вибірки. Також в цьому вікні необхідно вказати кількість відрізків розбиття (від 2 до 50), на які ділиться відрізок задання вибірки, або скористатись кнопкою „Застосувати формулу Стерджеса”, за якою

обчислюється рекомендована кількість відрізків розбиття $n = \sqrt{N}$, де n – об’єм вибірки. Натиснення кнопки „<Назад” дозволяє повернутися до режиму введення даних вибірки.

При необхідності переглянути таблицю частот поточної вибірки використовується послуга „Операції/Статистика/Частотна таблиця” (рис. Б.6 – Б.7).

х	n	Накопич. n	Pn*	Накопич. Pn*
1	4	4	0.1	0.1
2	5	9	0.125	0.225
3	4	13	0.1	0.325
4	8	21	0.2	0.525
5	6	27	0.15	0.675
6	13	40	0.325	1

Рис. Б.6

Відрізок	n	Накопич. n	Pn*	Накопич. Pn*
0.5 - 1.5	10	10	0.1	0.1
1.5 - 2.5	30	40	0.3	0.4
2.5 - 3.5	5	45	0.05	0.45
3.5 - 4.5	30	75	0.3	0.75
4.5 - 5.5	15	90	0.15	0.9
5.5 - 6.5	10	100	0.1	1

Рис. Б.7

Крок 3. Графічне подання результатів статистичного аналізу експериментальних даних

Для графічного подання полігонів частот, гістограм, функцій розподілу статистичних ймовірностей появи значень досліджуваної величини, деяких числових характеристик розподілу статистичних ймовірностей і т.п. можна скористатися послугою „Графік/Побудувати” (або

відповідною послугою контекстного меню чи кнопкою панелі інструментів).

У вікні „Графік” також можна бачити деякі характеристики вибірки:

- найменше і найбільше значення частот можна одержати, визначивши за полігоном частот або гістограмою (з урахуванням кроку) відповідні координати точок;
- відносні частоти кожного з можливих значень дискретної величини або влучення в кожен інтервал також можна визначити за графіком як відповідні ординати точок на полігоні частот або гістограмі (з урахуванням кроку);
- накопичені відносні частоти для кожної з варіант можна визначити за графіком функції розподілу статистичних імовірностей;
- статистичне математичне сподівання відмічене на осі абсцис міткою “|”;
- статистичне середнє квадратичне відхилення можна визначити, враховуючи, що на осі абсцис мітками “^” відзначені межі відрізка .

Для наочності можна зменшити масштаб, або за допомогою послуги Графік/Масштаб/Масштаб користувача обрати найбільш зручний. Масштаб відображається у верхній частині вікна.

Щоб побудувати графік функції розподілу відносних частот , потрібно звернутися до послуги „Об’єкт/Змінити ...” та вказати тип графіка „Функція $F^*(x)$ ”, і потім знов побудувати графік, що відповідає цьому об’єкту. В результаті одержимо графік функції .

Основні числові характеристики розглядуваної вибірки, можна побачити в нижній частині вікна „Список об’єктів”, а переглянути частотну таблицю можна за допомогою послуги „Операції/Статистика/Частотна таблиця”.

Запитання для контролю:

1. Який тип задання залежності потрібно встановити перед початком статистичного аналізу експериментальних даних за допомогою програми GRAN1?
2. Як вводяться експериментальні дані в робочі файли програми GRAN1?
3. Чи передбачено в програмі GRAN1 розгляд окремо дискретного та неперервного розподілів частот?
4. Як вводяться варіанти в програмі GRAN1? В чому полягає різниця між введенням варіант для дискретного та неперервного розподілів статистичних ймовірностей?
5. Як вводяться частоти в програмі GRAN1? Як вводяться відносні частоти в програмі GRAN1?
6. Яку додаткову вимогу повинні задовольняти відносні частоти, які вводяться?
7. Яку додаткову вимогу повинні задовольняти середини інтервалів при введенні частот та відносних частот для неперервного розподілу статистичних ймовірностей?
8. Як вводяться дані з файлу на диску?
9. Чи є різниця в структурі файлу для введення варіант та частот?
10. Як створити текстовий файл для введення даних вибірки?

11. Як переглянути дані, що зберігаються в файлі?
12. Як при необхідності можна коригувати раніше введені дані?
13. Чи можна змінити тип розподілу частот при редагуванні даних, що задають вибірку?
14. Чи можна змінити тип даних, що задають вибірку? Чому?
15. Чи можна змінити тип графічного подання розподілу статистичних ймовірностей?
16. Чи можна відрізнити – дискретний чи неперервний розподіл частот описує частотна таблиця?
17. Чи можна спочатку ввести вираз, а потім вказати тип задання залежності між змінними?
18. Яким буде тип задання залежності між змінними, якщо не змінювати параметри у вікні „Список об’єктів” і не вказувати ніякий тип залежності?
19. Як вказати потрібний тип залежності між змінними, використовуючи маніпулятор „мишка”?
20. Як можна перевірити, який вираз було щойно введено? Де його можна прочитати?
21. Як вводяться дані з клавіатури без використання панелі введення даних, поданої на екрані?
22. Як вводяться дані з використанням панелі введення даних, поданої на екрані?
23. Як можна відредагувати раніше введені дані:
 - а) з використанням клавіатури?
 - б) без використання клавіатури?
24. Чи можна вважати, що вираз введено до пам’яті комп’ютера, якщо його набрано з клавіатури і зображення виразу з’явилося на екрані в рядку введення?
25. Як можна відмовитися від послуги чи припинити її виконання, якщо звернення до послуги вже розпочато?
26. Як з використанням послуг програми GRAN1 побудувати:
 - а) гістограму інтервального розподілу відносних частот появи спостережених значень досліджуваної величини?
 - б) функцію дискретного розподілу відносних частот ?
 - в) функцію неперервного розподілу відносних частот ?
 - г) полігон дискретного розподілу відносних частот?
27. Як з використанням послуг програми GRAN1 одержати основні числові характеристики досліджуваного розподілу відносних частот?
28. Як визначити найбільшу відносну частоту і відповідне значення досліджуваної величини, якщо побудовано полігон частот?
- 29.** Чи потрібно виконувати які-небудь обчислення перед зверненням до послуг програми GRAN1 для статистичного аналізу експериментальних даних?

Завдання для самостійного опрацювання:

1. Починаючи з першого тижня січня у деякому маленькому містечку було зареєстровано таку кількість новонароджених: 35, 21, 33, 23, 12, 27, 20, 41, 16, 0, 9, 43, 26, 0,

21, 37, 24, 25, 21, 26, 38, 0, 32, 14, 11, 38, 14, 17, 31, 4, 25, 28, 14, 7, 9, 34, 48, 20, 14, 19, 6, 37, 26, 30, 12, 18, 15, 10, 28, 23, 11, 10. Використовуючи програму GRAN1 побудуйте ряд

розподілу та полігон частот. Визначити середнє арифметичне і середнє квадратичне

відхилення. Як зміниться значення і, якщо:

- кожному варіанту збільшити на одне й те саме число?
- кожному варіанту помножити на одне й те саме число?

2. При визначенні похибки вимірювального приладу зроблено 40 вимірювань, в яких зафіксовані похибки: $-2.5; 3; 4; 2; 0.5; -1; 2; 4; -4; 0; -0.5; -0.5; 1; 0.5; 2.5; -0.5; 2; 1; -4; -2; -1; 1.5; 0.5; 4; -1.5; -1; 0; 1; 0; 1; -1.5; 1.5; 0.5; 0.5; -0.5; -1.5; -0.5; -1; 2; 0.5$. Побудувати інтервальний розподіл частот і

гістограму, поклавши. Визначити числові характеристики і. Як

зміниться значення і, якщо:

- кожному варіанту збільшити на одне й те саме число?
- кожному варіанту помножити на одне й те саме число?

3. На телефонній станції досліджувалася кількість неправильних з'єднань за хвилину. Результати, отримані протягом 40 хв. спостереження, зведені в таблицю:

	0	1	2	3	4	5	6	7
DSMT4	5	6	5	5	5	6	4	4

Побудувати графік функції розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот). Визначити моду, медіану заданого розподілу.

4. Результати дослідження тривалості роботи (в тис. год.) електричних лампочок наведені в таблиці:

	2	8	22	40	12	10	6

Побудувати графік функції розподілу відносних частот. Визначити значення

функції розподілу відносних частот на кінцях заданих інтервалів.

5. Магазин взуття за один робочий день продав 45 пар чоловічого взуття наступних розмірів: 41, 40, 39, 40, 42, 41, 42, 40, 44, 41, 43, 42, 43, 42, 39, 41, 39, 41, 42, 43, 37, 41, 42, 43, 38, 41, 40, 42, 41, 40, 40, 42, 40, 41, 39, 40, 44, 38, 41, 40, 39, 38, 43, 42, 41. Побудувати таблицю частот, полігон відносних частот. Знайти, який середній розмір взуття купували цього дня та на який розмір є найбільший попит. Який відсоток чоловіків носить найбільш поширений розмір взуття? Скільки відсотків чоловіків носить розмір взуття, менший, ніж 40? Як за графіком функції розподілу визначити медіану даного варіаційного ряду?

6. Для проведення лотереї в мішок помістили кульки семи кольорів: Ч – червоний, С – синій, З – зелений, Ж – жовтий, Г – голубий, Р – рожевий, Б –

білий. Сергійко вирішив записати порядок витягування кульок і отримав такий результат: Ж, Р, Б, С, Ч, Ж, Г, Р, З, Г, Ж, Г, Ч, С, Р, Ж, Ж, Б, Р, Р, Б, С, Р, Ж, Б, Ж, Г, Б, Г, Ж, Ж, С, Ж, З, Г, Ч, Ж, З, С, Р, Р, Ч, Ж, Ж, Р, Б, С, Б, С, Ж, Р, Ж, Б, Г, С, Р, Ч, Б, Ж, С, Р, Б, Ж, Р, Г, Б, Ж, Р, Р, Ж, Ч, Б, Ж, С, Ж, Р, Б, Ж, З. Складіть таблицю відносних частот. Якого кольору кульок у мішку було більше, якого менше? Як це зобразити графічно? Який відсоток складають зелені кульки?

7. Ціни на взуття, що було продано за один день у магазині, представлені наступними даними: 120, 111, 230, 890, 320, 120, 56, 134, 140, 105, 105, 470, 320, 290, 210, 245, 89, 111, 120, 120, 230, 105, 140, 120, 89, 32, 132, 89, 110, 105. Побудувати інтервальний розподіл статистичних ймовірностей (відносних частот) та гістограму. Який „інтервал цін” користується найбільшим попитом? Як це визначити? Як визначити кількість проданого взуття за ціною, меншою ніж 175 грн.? Чи можна за побудованою гістограмою знайти числові

характеристики і ? Дайте практичне тлумачення знайдених характеристик.

8. У дитячому оздоровчому таборі були отримані дані про вагу 28 хлопчиків: 21.8, 20.8, 22.5, 26.8, 29.1, 22.0, 21.0, 23.2, 30.2, 20.8, 24.5, 27.0, 20.0, 22.0, 24.8, 22.0, 23.8, 25.0, 24.6, 23.0, 24.5, 25.5, 24.3, 22.8, 24.0, 28.2, 26.0, 23.2.

Побудувати інтервальний розподіл частот і гістограму, поклавши .

Визначити числові характеристики і та пояснити їх зміст. Що спільного в побудованих гістограмах і яка між ними різниця?

Література:

1. Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках математики. – К. : Техніка, 1997. – 303 с.

2. Жалдак М. І., Грохольська А. В., Жильцов О. Б. Математика (Алгебра і початки аналізу) з комп'ютерною підтримкою : Навчальний посібник для підготовчих відділень, – К. : МАУП, 2003. – 304 с.

3. Жалдак М. І., Горошко Ю. В., Вінниченко Є. Ф. Математика з комп'ютером. – К. : РННЦ «ДІНІТ», 2004. – 254 с.

4. Жалдак М. І., Михалін Г. О. Елементи стохастичності з комп'ютерною підтримкою. – К. : Шкільний світ, 2006. – 120 с.

Додаток В
Перелік проблем, що досліджували учні
під час проведення навчальних статистичних досліджень

1. Аналіз підручників (визначення кількості творів різних літературних жанрів у підручниках різних авторів; визначення кількості задач з геометрії на доведення, обчислення та побудову у підручниках різних авторів).
2. Аналіз тексту (кількість знаків у рядку, кількість окремих букв, букв у слові, частин мови, помилок різного характеру).
3. Вага, зріст людей різного віку (визначення середнього росту, середньої ваги; для перевірки відповідності нормальному закону; визначення частки людей високого зросту; визначення частки людей з зайвою масою (особливо серед підлітків)). Вага курей, поросят різного віку; вилову риби.
4. Використання мовних кліше, штампів, складених найменувань в документах різного характеру (медична література, засоби масової інформації).
5. Витрати родини за споживчі комунальні послуги.
6. Властивості грального кубика, монети (реалізація в експерименті задач, що розв'язувалися під час навчання елементів стохастички для отримання власних значень).
7. Досягнення у спорті (результати бігу, влучення у мішень, кількість командних перемог в турнірах).
8. Жанри книжок домашньої бібліотеки.
9. Кількість відсутніх учнів одного класу протягом семестру на уроках з одного предмета (за журналом обліку), кількість учнів школи, які запізнюються на перший урок.
10. Кількість книжок, що прочитані учнями одного віку протягом визначеного періоду (дані бібліотеки та опитування).
11. Кількість дітей у родині (опитували учнів різного віку з метою порівняння демографічного стану).
12. Кількість дитячих програм на телебаченні (одного дня, протягом тижня, розподіл у часі).
13. Кількість листя на стеблі, довжина листя кімнатних квітів (перевірка нормального розподілу).
14. Кількість часу, що витрачають учні різного віку на виконання домашнього завдання.
15. Кількість членів родини, що мешкають в одному багатоповерховому будинку та їх віковий склад.
16. Кількість яєць кожного дня від курок одного двору.
17. Кількість пацієнтів лікаря (за документами обліку).
18. Розмір взуття, одягу випадкових перехожих, учнів одного віку.
19. Стан здоров'я учнів одного віку (порушення зору, осанки).
20. Улюблені жанри телепередач серед людей різного віку.
21. Улюблені заняття учнів у вільний час.

22. Улюблені шкільні предмети серед учнів одного (різного) віку.

23. Успішність учнів (одного класу за виконану роботу, по різних предметам, по одному предмету за різними темами, по одному предмету з різними викладачами (учитель, студент-практикант), одного учня протягом семестру по одному предмету).

24. Продаж товару (кількість, види, розподіл за розміром, віковими групами; ціна на один і той же товар в різних точках продажу).

25. Розподіл за віком дітей одного колективу (футбольної команди, танцювального колективу).

26. Розмір пенсій у городян.

27. Рослинний світ рідної місцевості.

28. Створення статистичного портрету учнів одного класу.

29. Температура повітря, сила вітру в рідній місцевості; кількість сонячних днів протягом однієї пори року.

30. Час народження людей різного віку (число місяця, місяць року, день тижня)

Додаток Д
Приклади результатів, що отримали учні при проведенні власних статистичних досліджень

№1. Тема: Порівняльна характеристика використання частин мови в поезії Я. І. Щоголіва, І. Я. Франка, Л. В. Костенко

Дарина Буряк, 10 клас

Вважають, що математика – це цариця наук, що методи математики можна використовувати в різноманітних галузях знань. Я чистий гуманітарій. Мені подобається СЛОВО яке дає можливість по-перше, спілкуватися, а по-друге, передати красу світу. Тому улюбленим літературним жанром для мене є поезія. Мені здається, що в поезії прикметники мають переважні функції, оскільки саме вони уточнюють поняття, названі іменниками, увиразнюють і конкретизують висловлювання.

Метою мого дослідження є перевірка висунутої гіпотези, тобто виявлення, методами стохастики, такої частини мови, що найкраще допомагає передати в слові красу світу.

Для реалізації поставленої мети, мною були обрані три поетичні твори різних авторів присвячені осені. Авторі запропонованих віршів є поети різних епох. Проте вони майстри одного мистецтва – літератури – і відповідно інструментом творчості обирають слово. Незважаючи на велику відстань у часі написання, кожна з поезій викликає емоційну насолоду:

ОСІНЬ

І. Я. Франко

Осінній вітре, що могучим стоном
Над лісом **стогнеш**, мов над сином мати,
Що хмари люто **гониш** небосклоном,
Мов **хочеш** зиму, сон і смерть **прогнати**;
Що у щілинах диким **виєш** тоном
І **рвеш** соломі із сільської хати,
Зів'яле листя гоном-перегоном
По полю **котиш**, – вітре мій крилатий!
Я довго пильно **слухав** стону твого
І **знаю**, чом так **стогнеш** ти і **плачеш**:
Тобі жаль сонця, цвіту, дня літнього!

ОСІНЬ

Я. І. Щоголів

Висне **небо** синє,
Синє, та не те!
Світе, та не гріє
Сонце золоте.

Оголилось **поле**

Темная **дїброва**
Стихла і мовчить;
Листя пожовтіле
З **дерева** летить.

Хоч би де замріла

Од серпа й коси;
Ніде приліпитись
Крапельці роси.

Квіточка одна;
Тільки й червоніє,
Що горобина.

Здалека під небом,
В вирій летючи,
Голосно курличуть
Журавлів ключі.

ОСІНЬ

Л. В. Костенко

Чатує вітер на **останнє** листя
старого дуба, що своїм корінням
тримає схили урвища...
А знизу,
по гнилищах,
по **збляклих** травах
вповзає дим **циганського** багаття
і чутно – перегукуються люди
за **сірою гіркою** пеленою.

Строката хустка – **жовте і багряне** –
з плечей лісів упала їм під ноги.
І вся природа схожа на циганку –
Вродливу,
темнооку,
напівголу,
в **червоному** намисті з горобини,
з **горіховими** бубнами в руках...

В результаті проведеного аналізу цих творів були виділені наступні частини мови: іменник, прикметник, дієслово, інші. Потім в кожному вірші проводився підрахунок цих частин мови. Результати обчислень представлено в таблиці Д.1. Відносні частоти появи зазначених частин мови в кожному творі надано в таблиці Д.2.

Таблиця Д.1

Абсолютні частоти

Спостережені значення	Іменник	Прикметник	Дієслово	Інші	Загальна кількість слів
Я. І. Щоголів	16	5	11	22	54
І. Я. Франко	21	7	10	28	66
Л. В. Костенко	22	14	6	21	63

Таблиця Д.2

Відносні частоти

Спостережені значення	Іменник	Прикметник	Дієслово	Інші	Разом
Я. І. Щоголів	0,30	0,09	0,20	0,41	1
І. Я. Франко	0,32	0,11	0,15	0,42	1
Л. В. Костенко	0,35	0,22	0,10	0,33	1

Аналіз таблиці Д.2 дозволяє стверджувати, що в кожному розглядуваному творі найбільш поширеною частиною мови є іменник. Співвідношення відносних частот прикметників і дієслів в кожному вірші є

різним.

У поезії Якова Івановича Щоголіва (1823-1898) переважають іменники, що називають предмети, явища. Ними автор ніби стверджує буття, послідовно змальовуючи осінні образи, які постають перед ним. Але вірш при цьому не перестає бути високохудожнім. На перший погляд прості, образи-іменники створюють картину поступового спустошення природи. Образ поступового спустошення природи досягається автором з використанням значно більшої кількості дієслів у порівнянні з прикметниками.

А от у творі Івана Яковича Франка (1856-1916) відносна кількість дієслів майже відповідає відносній кількості прикметників. І все ж читач відчуває „рух” і розуміє причину дії („стогнеш”, „гониш”, „котиш”, „виєш”, „рвеш”, „плачеш”, „знаю”). Відомо, що дієслова є одним із найголовніших засобів вираження руху. Їхня мета, передусім, інформативна – „що відбулося, відбувається, буде відбуватися”. Вплив на думки й почуття людей дієслово частіше здійснює шляхом наказового способу, у чомусь переконуючи, до чогось закликаючи, як от:

... Учітесь, читайте,
І чужому наuczайтесь,
Й свого не цурайтесь. *(Т. Г. Шевченко)*

Проте своєрідний майстерний добір дієслів у поезії Івана Франка допомагає відчути різкий характер осінньої негоди, динамічність і перебіг дій, приглушуючи більшу кількість образів-іменників.

Як бачимо, твір Ліни Костенко (1930) насичений прикметниками (хоча в цій поезії вони також поступаються кількістю іменникам) – перед нами постає жіночий образ природи о цій порі: вродлива, темноока, напівгола ... Прикметники є прекрасним матеріалом увиразнення думки. Ця частина мови забезпечує яскраву характеристику предмета, його образне бачення, надає вислову емоційного забарвлення.

Отже, різні частини мови можуть надавати текстові різного стилістичного забарвлення. Це залежить від значення кожної частини мови, особливостей її форм та їх емоційно-експресивних відтінків.

За результатами проведеного дослідження можна зробити висновки:

1. Будь-яка частина мови не має самодостатнього значення.
2. Кожна частина мови виконує власні функції в творі.
3. Найбільш уживаною частиною мови є іменник.
4. Для того, щоб виразити красу світу співвідношення дієслова і прикметника може бути різним.
5. Кожна частина мови є лише інвентар, за допомогою якого передається краса світу.
6. Кожна частина мови може передати красу світу тільки в руках майстра слова.

№2. Тема: Яблуко від яблуньки недалеко котиться

В народі говорять, що яблуко від яблуньки недалеко падає. Я хочу в цьому впевнитися на підставі порівняння тенденцій зросту та ваги кількох різних поколінь. Моє дослідження має також на меті перевірити поширену думку про те, що зараз триває акселерація людства.

На початку дослідження був зроблений аналіз медичної літератури з педіатрії, дитячої ендокринології² та поширеної неспеціалізованої літератури, в якій наводяться таблиці зросту та ваги людей. Найбільш придатними для дослідження виявилися графіки перцентильних кривих, що розроблені під керівництвом М. О. Жуковського (Рис. Д.1).

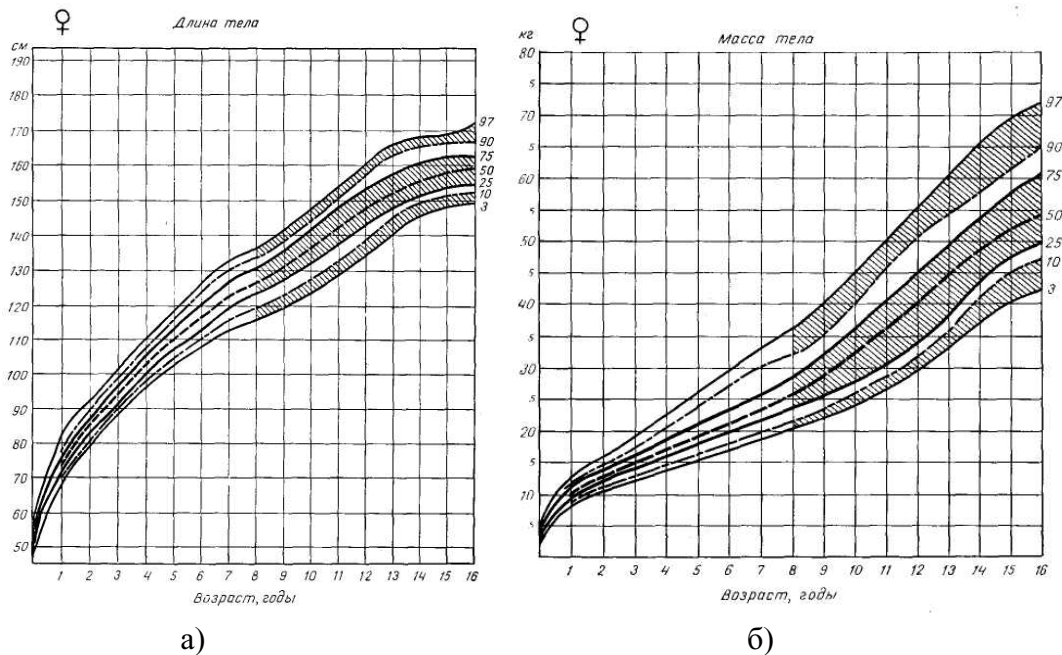


Рис. Д.1. Перцентильні таблиці довжини та маси тіла для дівчат

Перцентильні криві розроблено для довжини й маси тіла дітей від народження до 16 років. Матеріалом для побудови графіків послужили результати багаторічних обстежень московських дітей і підлітків. Відомості про дітей і підлітків від 8 до 17 років зібрані спеціальним методом у школах-інтернатах Москви в 1968–1973 р. Математична обробка результатів проведена в ІЕЕ й ХГ АМН СРСР. Графіки надруковані типографським способом на щільних аркушах паперу різного кольору для хлопців і дівчат.

Для перцентильних кривих (Рис. Д.1) на осі абсцис відкладено у роках вік дитини, на осі ординат – значення відповідної ознаки. На осі абсцис кожний річний відрізок розбито на 12 частин (за числом місяців). Виділено ділянки варіаційного ряду, що включають 3, 10, 25, 50, 75, 90 і 97% випадків

Як користуються такими графіками? Якщо в 12-річній дівчинки ріст 160 см, то він відповідає 97-му перцентилю. Це означає, що зріст дівчинки вище середньої величини й попадає в ту ділянку варіаційного ряду, нижче якого зріст зустрічається в 97% випадків, а вище – в 3%.

Для дослідження було вирішено обрати дівчат 12-ти років (1995 року народження), які навчаються у шостому класі. Результати вимірювань відповідають медичному огляду. Всього було опрацьовано дані про вагу і зріст 22 дівчат зазначеного віку. За обробленими документами обліку росту та ваги учнів зазначеного віку було отримано результати, що подані в таблиці Д.3.

Таблиця Д.3

Отримані результати зросту та ваги дівчат 1995 року народження

№п/п	Дівчата	Зріст (см)	Вага (кг)	№п/п	Дівчата	Зріст (см)	Вага (кг)
1	Валерія	136,5	23	12	Олена	147	38
2	Тетяна	140	34	13	Аліна	141	25,5
3	Інна	147	32	14	Маргарита	143	43
4	Катерина	156	31	15	Ксенія	144,5	28
5	Ліза	140,5	25	16	Анастасія	144	31,5
6	Ксенія	150	35	17	Юлія	144,5	31
7	Олександра	138	32	18	Марія	149	33
8	Ганна	137	22	19	Анастасія	150	45
9	Дар'я	147	28	20	Ольга	140	28
10	Діана	140,5	24	21	Олена	153	45
11	Анастасія	158,5	35	22	Ганна	150	30

За графіками перцентильних кривих (Рис. Д.1) було визначено значення, що відповідають 12-річному віку дітей. Після опрацювання за допомогою педагогічного програмного засобу GRAN1 спостережених значень, за графіком функції неперервного розподілу в кожному випадку було визначено відсоткове значення відповідних перцентильних кривих. Всі дані подано в таблиці Д.4.

Проведений аналіз даних таблиці Д.4 дозволяє зробити наступні висновки:

1. Маса тіла 12-річних дівчат у 2007 році нижче відповідних значень, що вимірювалися у 1973 році. Наприклад, серед спостережених значень у 2007 році 100% дівчат мали масу тіла не вище 45 кг, а у 1973 році це значення відповідало 75% дітей.

Таблиця Д.4

Значення ваги та зросту дівчат 12-річного віку

Вага (кг)	Значення перцентилля (%)	Спостережені значення (%)	Зріст (см)	Значення перцентилля (%)	Спостережені значення (%)
30	3	36	134	3	6
32	10	51	139	10	12
34	25	66	143	25	31
40	50	86	148	50	61
45	75	100	153	75	81
50	90	-	158	90	94

55	97	-	160	97	100
----	----	---	-----	----	-----

2.Зріст 12-річних дівчат у 1973 році та у 2007 році майже однаковий. Це краще проілюструвати за допомогою діаграми (Рис. Д.3).

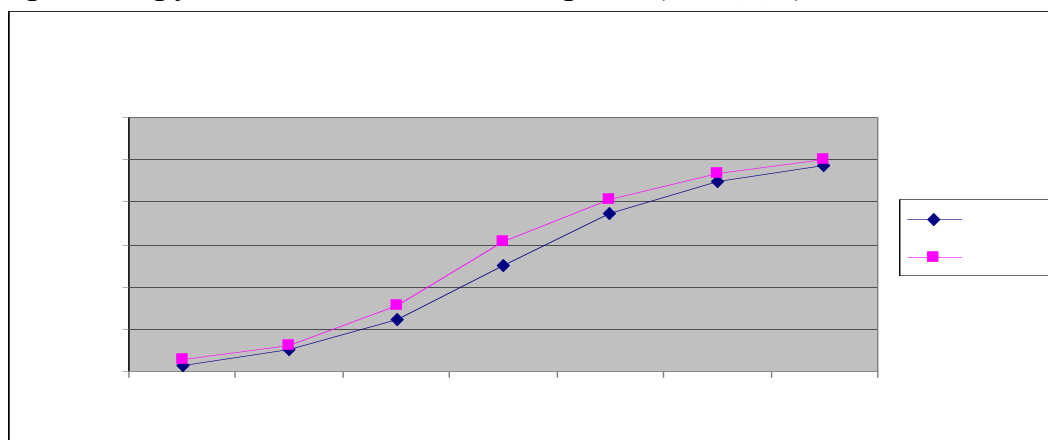


Рис. Д.3

В ході проведеного дослідження я перевірила та показала, що яблуко від яблуньки недалеко котиться. Вікова відстань у 34 роки не надто сильно впливає на зміну росту тіла дітей. Звичайно, в процесі дослідження було проаналізовано надто мало даних, щоб говорити про акселерацію людства. Разом з тим отримані дані про масу тіла 12-ти річних дівчат свідчать про те, що сучасні школярки мають меншу вагу ніж їх потенційні мами.

№3. Тема: Використання електроенергії сім'єю з трьох чоловік

Богдан Дудка, 10 клас

Для того щоб з'ясувати, скільки в середньому за місяць використовує моя сім'я (у складі з трьох чоловік) електроенергії було проаналізовано дані квитанцій за оплату послуг енергопостачання в період з січня 2003 року до грудня 2005 року. Також в процесі дослідження потрібно визначити, в яку пору року витрачається найбільша та найменша кількість електроенергії, тобто перевірити на досвіді власної родини думку про те, що більше світла ми витрачаємо взимку, а менше – влітку.

На початку дослідження кількість витраченої електроенергії за вказаний період було записано у вигляді таблиці Д.5. Дані таблиці Д.5 унаочнено графіками, що зображено на рисунках Д.4, Д.5.

За графіком, що зображено на рисунку Д.4 можна зробити висновки, що у січні та травні розглядуваних років витрати електроенергії були майже однакові. Останні два роки в серпні витрати електроенергії зростають.

За графіком, що подано на рисунку Д.5 можна відзначити, що взимку витрати електроенергії є приблизно однаковими. Можна також відмітити тенденцію зниження витрат електроенергії весною. Найбільш не прогнозованими, за отриманими даними, є витрати електроенергії восени.

Дані останнього стовпця таблиці Д.5 дозволяють зробити висновок, що витрати електроенергії взимку дійсно є найвищими, а найнижчими - весною. Наочно це подано на рисунку Д.6 за допомогою діаграми.

Таблиця Д.5

Витрати електроенергії (кВт/год) по місяцях
з січня 2003 до грудня 2005 року

Місяць року	2003	Середнє значення	2004	Середнє значення	2005	Середнє значення	Середнє значення за три роки
Березень	79	57	60	64,3	62	60	60,4
Квітень	33		74		60		
Травень	59		59		58		
Червень	78	56,3	52	72	62	67,7	65,3
Липень	32		65		59		
Серпень	59		99		82		
Вересень	54	52,3	48	56,7	72	79,7	62,9
Жовтень	47		53		77		
Листопад	56		69		90		
Грудень	69	67,3	67	67,7	92	72,3	69,9
Січень	80		76		76		
Лютий	53		60		49		

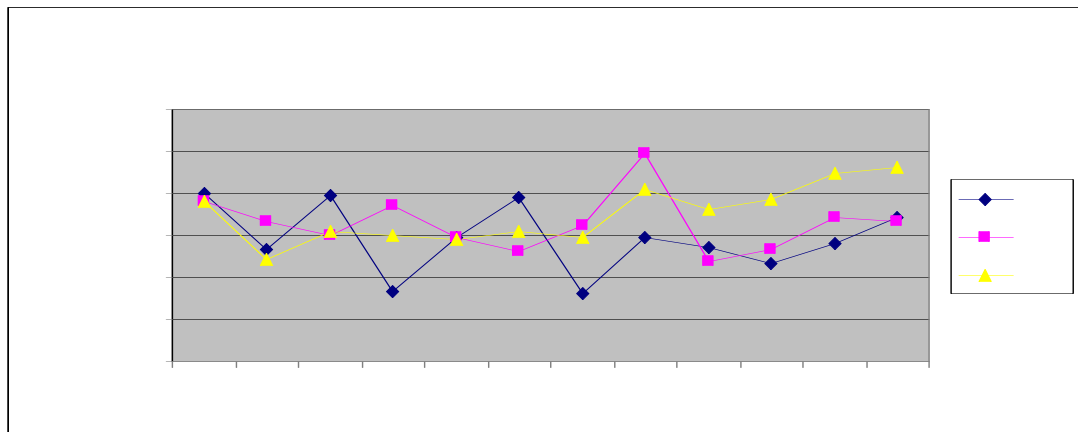


Рис. Д.4

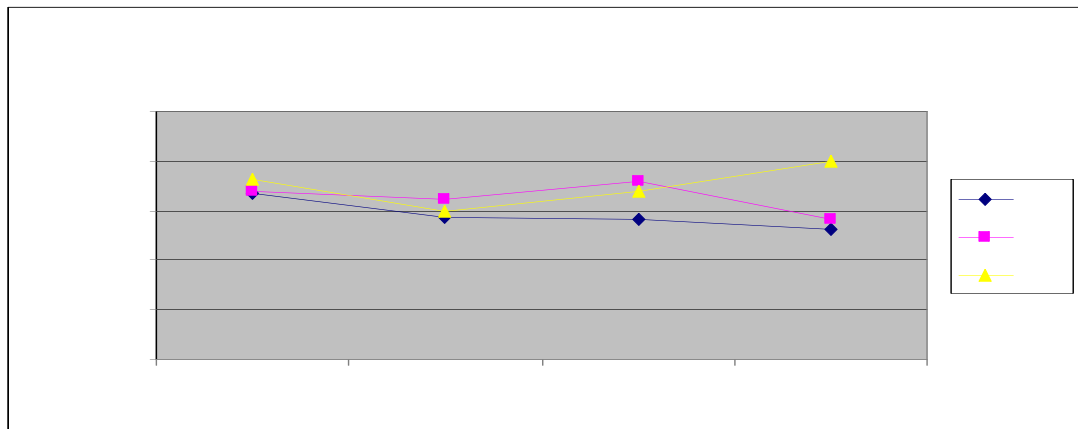


Рис. Д.5

Рис. Д.6

Для знаходження середньої кількості споживчої електроенергії протягом зазначеного періоду скористаємося педагогічним програмним засобом GRAN. Середнє значення

Таким чином, проведене дослідження використання електроенергії протягом зазначеного періоду членами родини з трьох чоловік дозволило визначити, що:

1. В середньому кожного місяця родина споживала 64,639 кВт/год електроенергії.
2. Найбільшу кількість електроенергії використовують взимку, а найменшу – весною.

№4. Тема: Нормальний розподіл

Під час вивчення учнями теми „Нормальний розподіл статистичних ймовірностей” зазначалося, що нормальний розподіл ймовірностей є математичною моделлю цілого ряду ситуацій і він є одним із найбільш розповсюджених на практиці розподілів [142]. Учениця 10 класу Ірина К. вирішила це перевірити і вдома провела дослідження: збрала листя верби, виміряла їх і отримала наступні результати (см):

9 11,2 8,8 8 8 8 7,8 9,6 9,8 6
 5 7,8 8,6 9,8 8,5 10,7 8,3 11,9 8,3 10,1
 7,5 9,6 8 10,1 9,8 8,6 10,3 9 8 7,5
 9 9,8 7,6 8,8 8,8 9,2 10,3 9,6 9,4 9,8

Вона побудувала за спостереженими значеннями варіаційний ряд:

5 6 7,5 7,5 7,6 7,8 7,8 8 8 8 8 8 8,3 8,3 8,5
 8,6 8,6 8,8 8,8 8,8 9 9 9 9,2 9,4 9,6 9,6 9,6 9,8 9,8
 9,8 9,8 9,8 10,1 10,1 10,3 10,3 10,7 11,2 11,9

Побудувала ряди розподілу, визначивши його дискретним:

	5	6	7,5	7,6	7,8	8	8,3	8,5	8,6	8,8	
	1	1	2	1	2	5	2	1	2	3	
	0,025	0,025	0,05	0,025	0,05	0,125	0,05	0,025	0,05	0,075	
	9	9,2	9,4	9,6	9,8	10,1	10,3	10,7	11,2	11,9	Разом

	3	1	1	3	5	2	2	1	1	1	40
	0,075	0,025	0,025	0,075	0,125	0,05	0,05	0,025	0,025	0,025	1

Вирахувала числові характеристики:

центр розсіювання відносних частот ; дисперсію та значення середнього квадратичного відхилення .

За отриманими даними побудувала полігон відносних частот (Рис. Д.7):

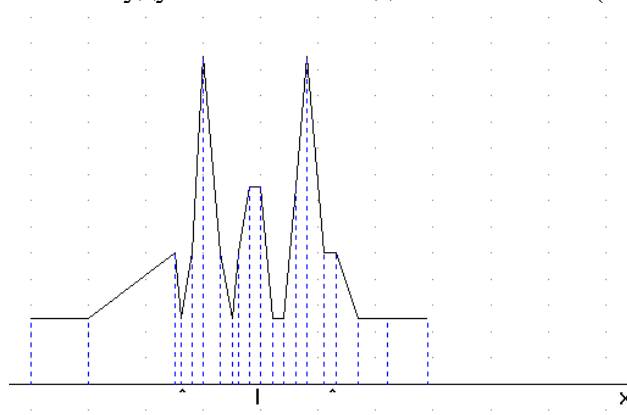


Рис. Д.7

І на наступному уроці виступила з результатами свого дослідження. Основним висновком якого було те, що нормальний закон розподілу статистичних ймовірностей не настільки розповсюджений, як про нього кажуть. Таким чином з ініціативи учениці, була створена проблемна ситуація, що потребувала обговорення та вирішення.

Помилка у виборі типу розподілу була знайдена учнями і за допомогою програмного засобу GRAN виправлено всі помилки. В результаті отримали наступні результати, що зображено на рисунку Д.8.

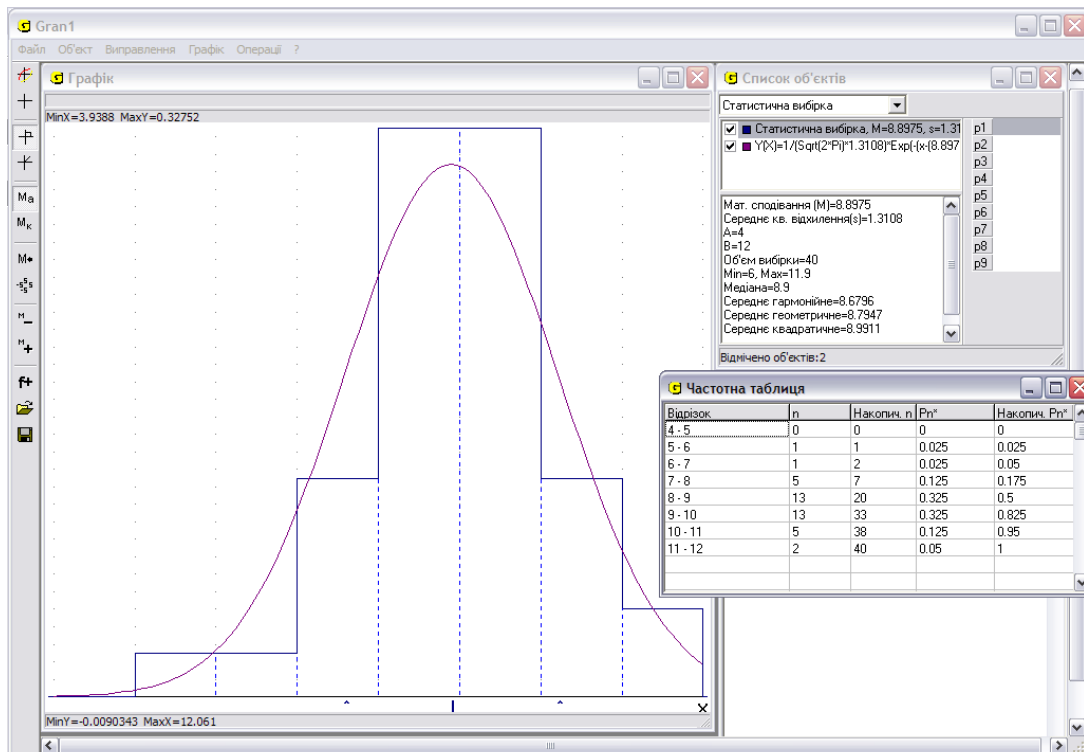


Рис. Д.8

В ході обговорення отриманих результатів було порівняно також числові характеристики, що обчислювалися для одних й тих спостережених значень, але різними способами. Отже проведене Іриною К. статистичне дослідження виявилось навчальним не тільки для неї, а й для інших учнів.

Додаток Е

Анкета №1. (для вчителів математики)

1. Ви викладаєте (викладали) початки теорії ймовірностей та статистику в 11 класі:
 - а) перший рік;
 - б) до п'яти років;
 - в) більше п'яти років;
 - г) ще не викладав.
2. На Ваш погляд, учні 11 класу:
 - а) готові до сприйняття елементів теорії ймовірностей та статистики (мають теоретичну базу, вміють мислити аналітично, мають практичний досвід, ...);
 - б) не готові до сприйняття елементів теорії ймовірностей та статистики. Поясніть чому. _____
3. На Ваш погляд, чи доцільно вивчення початків теорії ймовірностей та статистики в 11 класі:
 - а) так;
 - б) так, але бажано _____
 - в) ні, тому що _____
 - г) вивчення початків теорії ймовірностей та статистики потрібно перенести в _____ клас.
4. Ви вивчали теорію ймовірностей:
 - а) від 1 до 5 років тому назад;
 - б) від 5 до 10 років тому назад;
 - в) більше 10 років тому назад;
 - г) не вивчала(в).
5. Чи використовуєте Ви комп'ютер на уроках математики при вивченні теорії ймовірностей та статистики в 11 класі:
 - а) так, програмний засіб (програму) _____ до вивчення _____
 - б) ні (поясніть чому) _____
6. На Ваш погляд, на якому математичному матеріалі можна формувати дослідницькі уміння школярів: _____
7. На Ваш погляд, дослідницькі уміння школярів – це _____
8. Засобами формування дослідницьких умінь учнів є _____
9. Які методи, форми організації навчання сприяють, на Ваш погляд, формуванню навчально-дослідницьких умінь учнів _____
10. Ви працюєте вчителем математики:
 - а) перший рік;
 - б) від 1 до 5 років;
 - в) від 5 до 10 років;
 - г) більше 10 років.
11. Чи потрібна Вам методична допомога з теорії ймовірностей та математичної статистики? Яка саме?
12. Місцезнаходження школи, в якій ви працюєте: _____

Додаток Ж
Анкета №2. Виявлення наявності інтересу учнів
до дослідницької діяльності

1. Прізвище та ім'я _____
2. Рік народження _____
3. Поясніть, як ви розумієте поняття:
Цікавість (любопытство) – це _____
Допитливість (любопытность) – це _____
Експеримент – це _____
Інтуїція – це _____
Дослідження - це _____
4. Чи вважаєте ви себе цікавим? _____ Допитливим? _____
5. Чи вмієте ви досліджувати? _____
6. Чи подобається вам проводити дослідження, експериментувати? ____ Якщо «так», то як саме? _____
7. Чи подобається вам науково-популярна література? ____ Якщо «так», то яка саме (технічна, медична, історична, ...)? _____
8. В яких джерелах ви намагаєтеся знайти пояснення незрозумілих явищ, фактів?

9. Чи відчуваєте ви задоволення від самого пошуку, чи вас цікавить тільки кінцевий результат? (потрібно підкреслити).
10. З яких навчальних предметів, на ваш погляд, можна проводити дослідження?

11. Які основні етапи дослідження (на ваш погляд)? _____
12. Чи можна при дослідженні використовувати комп'ютер? ____ Як саме?
_____ Які програмні засоби, пакети, програми ви б використовували?

13. Написання реферату, на ваш погляд, є дослідженням? _____
14. Оцініть свій інтерес до дослідницької діяльності (потрібно підкреслити):
– відчуваю постійний інтерес; – іноді цікавлюсь;
– майже не цікавлюсь; – не відчуваю інтересу.
15. Чи доводилось вам виступати з доповідями, вести полеміку, брати участь у дискусії? Оцініть як часто (потрібно підкреслити):
– дуже часто; – часто; – іноколи; – уникаю виступів.

Додаток 3

Завдання для виявлення початкових рівнів сформованості навчально-дослідницьких умінь учнів

1. На першій картці лото «б» з «3б» закреслено номери: 4,5,6,7,8,9, а на другій – 5,12, 18,24,29,35. Як ви вважаєте, виграш якого набору чисел більш ймовірний? Потрібне підкресліть. Поясніть відповідь.

2. На дорогу від дому до школи Сашко витрачає від 10 до 15 хвилин, якщо йде пішки, і від 2 до 3 хвилин, якщо їде на тролейбусі. При яких інтервалах руху тролейбусів Сашка випередить хоча б один тролейбус?

3. Проводиться експеримент по підкиданню: а) монети; б) кнопки; в) грального кубика, г) гудзика. Потрібно оцінити ймовірність наслідків експерименту. В яких із цих ситуацій ви би одразу дали відповідь (без проведення експерименту)? Потрібне підкресліть.

4. Канцелярську кнопку кидали на стіл 100 разів. Гострою частиною вгору вона впала 32 рази, а 68 разів гострою частиною вниз. Через деякий час цю ж кнопку знов кидали 100 разів і спостерігали, якою частиною догори вона впаде. На ваш погляд, гострою частиною вгору вона впаде:

– 30 разів; – 50 разів; – 70 разів; – 90 разів.

5. В школі проведено опитування 100 учнів на предмет тематики журналів, які їм подобається читати. Розглянуто чотири види журналів: про спорт (S), про звірів (A), про сучасні напрямки в музиці (M) та про все на світі (U). Відповіді групувалися в залежності від ступеня школи, в якому навчались учні: початковий (I), основний (II), старший(III). Результати обстеження наведені в таблиці:

Види журналів	Ступінь школи			Разом
	I	II	III	
S	5	7	20	32
A	15	18	3	36
M	2	3	15	20
U	4	3	5	12
Разом	26	31	43	100

Використовуючи дані таблиці визначте, скільки учнів не початкової школи читають журнали не про звірів. Запишіть, як ви це визначили.

6. У запропоновані речення вставте найбільш потрібні, на ваш погляд, слова: „неможливо”, „малоймовірно”, „можливо”, „обов'язково”:

–Завтра Сонце _____ підніметься на сході;

– _____ бутерброд впаде маслом вниз;

– _____, що ви виграєте автомобіль у лотерею;

– _____, що день народження Катерини 30 лютого;

– _____, що в місті ви на вулиці зустрінете верблюда.

7. Перед вами дані про заробітну платню менеджерів з продажу товарів на двох малих підприємствах А та В:

А: 513,590,934,541,535,492,972,1042,509,1092,995,576,518,963,597.

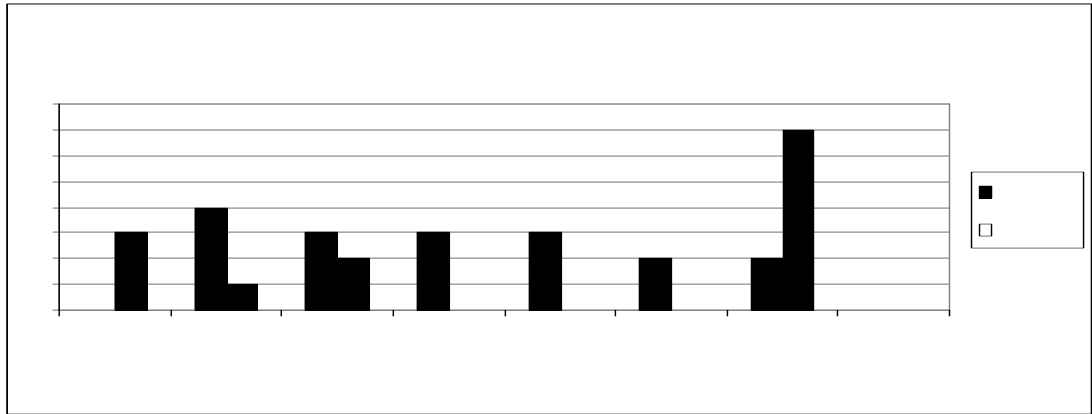
В: 684,1088,791,617,529,698,786,574,534,991,702,1002,836,955,898.

Куди піти працювати?

8. З метою попередження порушень осанки школярів потрібно провести дослідження на тему: „Скільки важить портфель школяра?”. Придумайте запитання, на які цікаво знайти відповідь у процесі такого дослідження.

9. У п'ятому класі було проведено опитування учнів на предмет улюбленої телепередачі. На діаграмі представлено результати цього опитування. Визначити загальну

кількість учнів класу. Які відповіді ще можна знайти з цієї діаграми?



Додаток И

Задачі, що спрямовані на формування навчально-дослідницьких умінь учнів у процесі навчання елементів стохастики

Основні поняття теорії множин

1. Якщо дано множину $M = \{\{1, 5\}, \{3, 6\}\}$, то чи можна записати, що $5 \in \{1, 5\}$; $5 \in M$?

2. Замість написати знак або знак так, щоб отримати правильний запис:

- 1) $\{3,7\} \{3,7,8\}$; 2) $7 \{3,7,8\}$; 3) $\emptyset \{3,7,8\}$;
4) $\{5,6\} \mathbb{N}$; 5) $-2 \in \mathbb{Z}$; 6) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

3. Сформулювати правило, за яким можна встановити коли потрібно писати знак , а коли знак .

4. Нехай $X = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 4\}$, $Y = \{x \mid (x-1)(x-2)(x-3) = 0\}$. Який запис є правильним: $X=Y$ чи $X \subset Y$?

5. Перевірити, чи буде множина розв'язків рівняння підмножиною

множини ?

6. K - множина книжок бібліотеки. Які підмножини множини K можна виділити?

7. Назвіть невластні підмножини множини X .

8. Скільки власних і невластних підмножин має одноелементна множина .

9. Математичне дослідження:

1. Виписати всі підмножини множин:

- а) $\{1,2\}$; б) $\{\{1,3\}, \{1,2\}, \{2,3\}\}$;
в) $\{0,1,2,3\}$; г) $\{\{1,2\}, \{2,3\}, 1,2,3\}$.

Визначити число всіх підмножин кожної з множин. Яка закономірність спостерігається?

2. Сформулювати гіпотезу про число всіх підмножин скінченної множини M .

3. Довести гіпотезу за допомогою математичної індукції.

10. а) Чи буде множина точок відрізка скінченною множиною?

б) Чи буде множина прямих, що проходять через одну точку, скінченною множиною?

Простір елементарних подій

1. Експеримент полягає у складанні букету з 4-х червоних і 3-х білих троянд.

Побудувати простір елементарних подій, якщо наслідками розглядаються можливі набори квітів в букеті при умові, що букет складається з непарного числа квітів.

2. Зі скриньки в якій 2 червоні, 2 жовті, 2 зелені кульки навмання виймають дві кульки. Два різні учні побудували наступні простори елементарних подій:

Пояснити, як міркували учні.

3. Експеримент полягає у виборі навмання однієї букви з числа тих, що утворюють слово формула. Вказати можливу множину наслідків експерименту.

4. На картках дитячого лото є числа 1, 2, ..., 10. Навмання виймають одну картку. В яких випадках вказані всі можливі наслідки випробування:

- а) {„парне”, „непарне”};
- б) {„парне”, „не ділиться на 3”};
- в) {„просте”, „складне”};
- г) {„не більше 3”, „не менше 4”}.

5. У коробці лежать 3 червоних, 1 зелений та 2 синіх олівці. З коробки навмання виймають два олівці. Вказати множину Ω елементарних подій.

Операції над подіями

1. Двоє грають у шахи. Можлива подія А – „виграв перший”, а можлива подія В – „виграв другий”. Пояснити, що тоді означають події:

- а) ; б) ; в) ; г) .

2. В школі проведено опитування 100 учнів на предмет тематики журналів, які їм подобається читати. Розглянуто чотири види журналів: про спорт (S), про звірів (A), про сучасні напрямки в музиці (M) та про все на світі (U). Відповіді групувалися в залежності від ступеня школи, в якому навчались учні: початковий (I), основний (II), старший(III). Результати обстеження наведені в таблиці И.1:

Таблиця И.1

Види журналів	Ступінь школи			Разом
	I	II	III	
S	5	7	20	32
A	15	18	3	36
M	2	3	15	20
U	4	3	5	12
Разом	26	31	43	100

Пояснити, що означають можливі події: 1) S, 2) U . 3 III, 3) I . 3 M, 4) . 3 , 5) Ω , 6) II . 3 A, 7) M . 3 II, 8) . Визначити в кожному випадку кількість учнів, що читають зазначені журнали.

Простір подій

1. Визначити, скільки елементів може містити простір S випадкових подій, якщо відповідний йому простір Ω елементарних подій містить:

- а) 1 елемент, б) 2 елементи, в) 3 елементи.

2. Число елементарних подій простору Ω дорівнює n. Визначити найбільшу та найменшу можливу кількість елементів простору S випадкових подій.

3. Чи може бути число елементарних подій скінченним, а число подій нескінченним?

4. Скільки можна побудувати просторів випадкових подій S, що відповідали б простору

елементарних подій і містили б події та .

5. Виріб, що виготовляється на деякому станку може виявитися бракованим, що не підлягає доопрацюванню (елементарна подія), якісним (елементарна подія),

частково бракованим, тобто таким, що підлягає доопрацюванню (елементарна подія). Скільки можна побудувати просторів випадкових подій S , що відповідають простору

елементарних подій

6. Визначити, скільки елементів може містити простір S випадкових подій, якщо відповідний йому простір Ω елементарних подій містить:

- а) 1 елемент, б) 2 елементи, в) 3 елементи.

Статистична ймовірність події

1. В деякому випробуванні можливі три наслідки: , що утворюють множину можливих наслідків випробування (простір елементарних подій). Статистична ймовірність елементарної події дорівнює 0.3, а статистична ймовірність

елементарної події дорівнює 0.5. Чому дорівнює статистична ймовірність

?

2. В деякому експерименті простір елементарних подій складає множина

. Побудувати: а) простір подій S , що містить найменшу кількість подій; б)

найменший простір подій S , що містить події .3 . Обчислити статистичні ймовірності подій кожного з побудованих просторів S , якщо

3. Було проведено три серії по 60 підкидань гральної кістки, що має форму неправильного шестигранника. Результатами цього експерименту розглядали грань, якою кубик впаде догори. При проведенні експерименту отримали дані, що подано в таблиці И.2:

Таблиця И.2

Грані	1	2	3	4	5	6	Разом
1 серія	8	11	7	12	9	13	60
2 серія	9	12	6	13	9	11	60
3 серія	8	10	7	10	8	17	60
Разом	25	33	20	35	26	41	180

Чи можуть бути статистичними ймовірностями елементарних подій розглядуваного експерименту наступні числа 0.14, 0.18, 0.11, 0.19, 0.14, 0.23?

4. Монету підкидали 10 разів. Якими можуть бути при цьому абсолютні і відносні частоти появ герба і цифри?

5. Шестигранний кубик, частина граней якого пофарбовані в білий колір, друга частина – у червоний колір, третя частина – у зелений колір, підкидали 5 разів. Якими при цьому можуть бути абсолютні і відносні частоти випадань на верхній грані кожного з трьох кольорів?

6. Шестигранний кубик, частина граней якого пофарбована в білий колір, друга частина – у червоний колір, третя частина – у зелений колір, підкидали 1000 разів. При цьому як результати випробувань розглядали колір верхньої грані. Виявилося, що в 1000 випробуваннях білою гранню догори кубик падав 500 разів, червоною – 300, зеленою – 200. Побудувати всі можливі простори подій, що відповідають даному експерименту, і визначити статистичні ймовірності всіх подій кожного з просторів, виходячи з зазначених даних.

7. Провести випробування, що полягає у підкиданні двох однакових монет 100 разів і заповнити таблицю:

Результати випробування	Кількість випадань
два герби	

дві цифри	
одна цифра та один герб	

Який результат випробування повторюється частіше? Чим це пояснити? Який простір елементарних подій відповідає даному випробуванню? Побудувати всі можливі простори подій, що відповідають даному експерименту, і визначити статистичні ймовірності всіх подій у одному з них, використовуючи отримані дані.

8. На початку XX ст. англійський математик Карл Пірсон провів серію експериментів по підкиданню монети, у результаті чого одержав наступну таблицю:

Результат випробування	Абсолютна частота
„Орел”	12012
„Решка”	11988

Які наслідки експерименту розглядав К.Пірсон? Побудувати простір елементарних подій, що відповідає цьому експерименту. Запропонувати різні простори подій і обчислити статистичні ймовірності всіх подій в розглядуваних просторах.

Довідавшись про результати експерименту Пірсона по підкиданню монети, Сашко провів свою серію експериментів і одержав наступні результати:

Результати випробування	Абсолютна частота	Відносна частота
„Орел”	141	
„Решка”		0,53

У цій таблиці він не став заповнювати всі клітинки, порахувавши це зайвим. Чи прав Сашко? Спробуйте відновити відсутні значення.

9. Нехай Ω – простір елементарних подій експерименту, що полягає у визначенні використаних автором тексту частин мови. Побудувати можливий простір подій, що відповідає даному експерименту, і визначити статистичні ймовірності всіх подій з простору, виходячи з даних тексту:

„Давньоруська назва березня – сухий, цебто бідний на опади. Снігопади минають, а дощі за стійкого антициклону ще не приходять. За кожною назвою – віковічні спостереження й постійно узагальнюванні висновки. Отже, березень. Назва походить із давнини, коли було поширене вирубне, вогневе рільництво. Звалювали дерева, кращі з них висушували для будівель, а решту спалювали й на згарищах сіяли збіжжя. Для хліборобства найпридатнішим вважався березовий попіл. Березоль – від береза і зола”.

Ймовірнісні простори

1. Нехай Ω , і відомі відносні частоти

. Чи буде трійка

ймовірнісним простором, якщо:

а) Ω ?

б) Ω ?

в) Ω ?

г) Ω ?

д) Ω ?

2. Побудувати простір подій так, щоб трійка була ймовірнісним простором, якщо ,

а) ;

б) ;

в) ,

де – значення центру розсіювання відносних частот, а – середнє квадратичне відхилення.

5. Групу учнів з 20 чоловік запитали, скільки часу вони витрачають на виконання домашнього завдання. Їх відповіді представлено на гістограмі (рис. И.1).

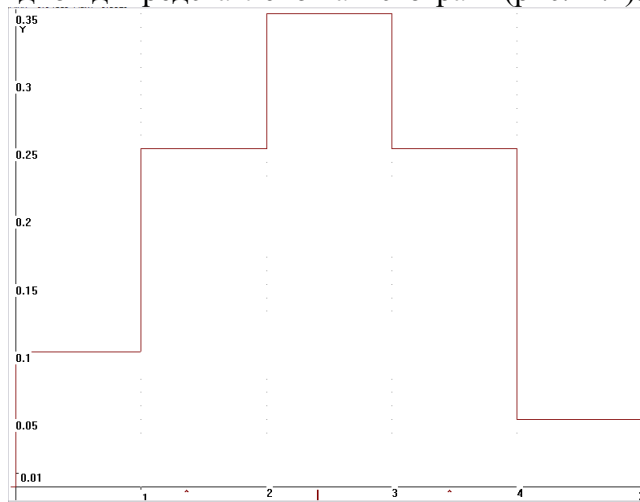


Рис. И.1

Скласти неперервний розподіл абсолютних та відносних частот. Визначити кількість учнів, які витрачають на виконання домашнього завдання більше години. Знайти центр розсіювання відносних частот, значення моди та медіани (за допомогою ППЗ GRAN1). Пояснити отримані числові характеристики.

6. Учням доручено провести статистичне дослідження, що полягає у визначенні середнього зросту однокласників. Один учень записав зріст учнів у сантиметрах:

162, 181, 179, ...

А другий – в метрах:

1.62, 1.81, 1.79, ...

Потім вони обчислили значення середнього зросту, дисперсії, середнього квадратичного відхилення. Перший учень отримав відповідно такі результати 172, 16 та 4. Які значення отримав другий учень?

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- 1.Абдуллаев Г. Развитие поисковой деятельности учащихся при изучении математики в 7-9 классах : дис. ... кандидата пед. наук : 13.00.02 / Абдуллаев Гафурджон. – Ленинабад, 1990. – 265 с.
- 2.Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики / Жак Адамар ; [пер. с фр. М. А. Шаталов, О. П. Шаталова]. – М. : МЦНМО, 2001. – 128 с.
- 3.Алгебра и начала анализа : учебник для 11 кл. общеобразовательных учебных заведений / Н. И. Шкіль, З. И. Слєпкань, Е. С. Дубинчук ; пер. с укр. – К. : Зодіак-ЕКО, 2003. – 400 с.
- 4.Алгебра і початки аналізу : Підруч. для 11 кл. з поглибленим вивченням математики в середніх закладах освіти / М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, Т. М. Хмара. – К. : Освіта, 2003. – 311 с.
- 5.Алгебра і початки аналізу. 10 клас : Пробний підручник / О. М. Афанасьєва, Я. С. Бродський, О. Л. Павлов, А. К. Сліпенко. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2004. – 456 с.
- 6.Алексюк А. М. Загальні методи навчання в школі / А. М. Алексюк. – К. : Рад. шк., 1981. – 206 с.
- 7.Андреев В. И. Дидактические условия развития исследовательских способностей старшеклассников (в процессе обучения физике) : автореф. дис. на соискание ученой степени канд. пед. наук : спец. 730 / В. И. Андреев. – М., 1972. – 21 с.
- 8.Андреев В. И. Эвристическое программирование учебно-исследовательской деятельности / Валентин Иванович Андреев. – М. : Высшая школа, 1981. – 240 с.
- 9.Анисимова О. И. Некоторые аспекты и особенности научно-исследовательской деятельности как образовательной технологии / О. И. Анисимова // Отечество. – 2001. – №7. – С. 12-18.
- 10.Бабанский Ю. К. Методы обучения в современной общеобразовательной школе / Ю. К. Бабанский. – М. : Просвещение, 1985. – 208 с.
- 11.Баландин Р. К. Вернадский : жизнь, мысль, бессмертие / Р. К. Баландин. – М. : Знание, 1988. – 205 с.
- 12.Балк М. Б., Балк Г. Д. О привитии школьникам навыков эвристического мышления / М. Б. Балк, Г. Д. Балк // Математика в школе. – 1985. – №2. – С. 55-61.
- 13.Балк М. Б., Балк Г. Д. Поиск решения / М. Б. Балк, Г. Д. Балк. – М. : Дет. лит., 1983. – 143 с.
- 14.Балл Г. О. Культурологічні та психолого-педагогічні проблеми гуманізації освіти : Наук.-метод. зб. Вип. 2 / За ред. Г.О.Балла. – К. – Рівне : Ліста – М., 2003. – 156 с.
- 15.Балл Г. А. Теория учебных задач : Психолого-педагогический аспект / Г. А. Балл. – М. : Педагогика, 1990. – 183 с.
- 16.Балашова С. П. Формування дослідницьких умінь у студентів педагогічного коледжу в процесі вивчення природознавчих дисциплін : дис. ... кандидата пед. наук : 13.00.04 / Балашова Світлана Петрівна. – К., 2000. – 274 с.
- 17.Барабанщиков В. А. Динамика зрительного восприятия / В. А. Барабанщиков. – М. : Наука, 1990. – 238 с.
- 18.Бевз Г. П. Методи навчання математики / Григорій Петрович Бевз. – Х. : Вид. група «Основа», 2003. – 96 с.
- 19.Безрукова В. С. Педагогика. Проективная педагогика / В. С. Безрукова. – Екатеринбург : Деловая книга, 1996. – 344 с.
- 20.Беспалько В. П. Программированное обучение (дидактические основы) / В. П. Беспалько. – М. : Высш. школа, 1970. – 300 с.

21. Бех І. Д. Виховання особистості : У 2 кн. : Навч.-метод. посіб. / І. Д. Бех. – К. : Либідь, 2003.
Кн. 1 : Особистісно орієнтований підхід : теоретико-технологічні засади. – 2003. – 278 с.
Кн. 2 : Особистісно орієнтований підхід: науково-практичні засади. – 2003. – 344 с.
22. Богоявленская Д. Б. Психология творческих способностей / Д. Б. Богоявленская. - М. : Academia, 2002. – 317 с.
23. Бойко Е. И. Еще раз об умениях и навыках / Е. И. Бойко // Вопросы психологии. – 1957. – №1. – С. 18-20.
24. Болтянский В. Г. Программированное обучение и методы его осуществления / В. Г. Болтянский // Учебно-наглядные пособия по математике. – 1968. – Вып. 3. – С. 24-36.
25. Болтянский В. Г. К проблеме дифференциации школьного математического образования / В. Г. Болтянский, Г. Д. Глейзер // Математика в школе. – 1988. – №3. – С. 9-10.
26. Бондар В. І. Дидактика / В. І. Бондар. – К. : Либідь, 2005. – 264 с.
27. Боно Э. Развитие мышления : три пятидневных курса / Э. Боно ; пер. с англ. – Мн. : Попурри, 1997. – 125 с.
28. Боно Э. Рождение новой идеи. О нешаблонном мышлении / Э. Боно ; пер. с англ. под общ. ред. и послесл. О.К.Тихомирова. – М.: Прогресс, 1976. – 101 с.
29. Бородин А. Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики / Андрей Николаевич Бородин. – СПб. : Лань, 2002. – 256 с.
30. Бродський Я. С. Події, ймовірності, частоти / Яків Соломонович Бродський. – Х. : Основа: «Тріада+», 2007. – 144 с.
31. Бродський Я. С. Про вивчення елементів комбінаторики, ймовірності, статистики в школі / Яків Соломонович Бродський // Математика в школах України. – 2004. – №35(83) – С. 6-10, №36(84). – С. 15-17.
32. Бродський Я. С. Про прикладну спрямованість навчання математики / Я. С. Бродський, С. І. Великодній, О. Л. Павлов // Рідна школа. – 2006. – №2. – С. 60-63.
33. Брызгалова С. И. Исследовательский метод обучения как способ развития учебно-исследовательской деятельности учащихся / Светлана Ивановна Брызгалова // Развитие учебно-исследовательской деятельности в системе дополнительного образования детей: Доклады и сообщения. – Калининград, 2001. – С. 10-19.
34. Брызгалова С. И. Формирование готовности учителя к педагогическому исследованию : дис. ... доктора пед. наук : 13.00.08 / Брызгалова Светлана Ивановна. – Калининград, 2004. – 342 с.
35. Бурда М. І. Структура і зміст профільного навчання математики/ Михайло Іванович Бурда // Математика в школі. – 2007. – №7. – С. 3-6.
36. Бурда М. І. Математика 10-11 : Навчальний посібник для шкіл, ліцеїв та гімназій гуманіст. профілю / М. І. Бурда, О. С. Дубинчук, Ю. І. Мальований. – К. : Освіта, 2004. – 224 с.
37. Буряк В. К. Вироблення в учнів дослідницьких навичок / В. К. Буряк // Радянська школа. – 1987. – №2. – С. 17-22.
38. Бунимович Е. А. Основы статистики и вероятность : Пособие для общеобразоват. учреждений / Е. А. Бунимович, В. А. Булычев. – М. : Дрофа, 2004. – 288 с.
39. Вандер Б. Л. Математическая статистика / Б. Л. Вандер ; пер. с нем. Л. Н. Большева. – М. : ИЛ, 1960. – 434 с.
40. Ващенко Г. Г. Загальні методи навчання : підручник для педагогів / Всеукраїнське Педагогічне Товариство ім. Г. Ващенка. – К., 1997. – 410 с.

41. Введение в теорию и практику исследовательской деятельности : учеб. пособие / [сост. В. П. Ушачев]. – Магнитогорск : Изд-во Магнитогор. гос. пединститута, 1993. – 54 с.
42. Векслер С. И. Развитие критического мышления старшекласников в процессе обучения : автореф. дис. на соискание ученой степени кандидата пед. наук : спец. 13.00.01 «Общая педагогика и история педагогики» / С. И. Векслер. – К., 1974. – 23 с.
43. Великодний С. І. Математичне моделювання при розв'язуванні задач / С. І. Великодний // Математика в школі. – 2005. – №9. – С. 15-20.
44. Венецкий И. Г. Основы теории вероятностей и математической статистики / И. Г. Венецкий, Г. С. Кильдишев. – М. : Изд-во «Статистика», 1968. – 360 с.
45. Вентцель Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. – М. : Высш. шк., 1999. – 575 с.
46. Вентцель Е. С. Задачи и упражнения по теории вероятностей / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 3-е изд. – М. : Высш. шк., 2000. – 366 с.
47. Вертгеймер М. Продуктивное мышление / М. Вертгеймер ; пер. с англ. / Ред. С. Ф. Горбова, В. П. Зинченко. – М. : Прогресс, 1987. – 335 с.
48. Вікова та педагогічна психологія : [навч. посібн.] / О. В. Скрипченко, Л. В. Долинська, З. В. Огородійчук та ін. 2-ге вид. – К. : Каравела, 2007. – 400 с.
49. Виленкин Н. Я. Алгебра и математический анализ для 11 класса : Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд. – 3-е изд. – М. : Просвещение, 1993. – 288 с.
50. Вильямс Р. Компьютеры в школе / Р. Вильямс, К. Маклин ; пер. с англ. / Общ. ред. и вступ. ст. В. В. Рубцова. – М. : Прогресс, 1988. – 335 с.
51. Волкова Н. Д. Дослідницька діяльність учнів при вивченні геометрії, як засіб розвитку їх творчого мислення : автореф. дис. на соискание ученой степени кандидата пед. наук / НДІ педагогіки УРСР. – К., 1972. – 21 с.
52. Волощук І. С. Методи розвитку творчих здібностей учнів молодшого шкільного віку. Методичний посібник / І. С. Волощук // Рідна школа. – 1998. – №3. – С. 29-51.
53. Всесвятский Б. В. Системный подход к биологическому образованию в средней школе / Б. В. Всесвятский – М. : Просвещение, 1985. – 143 с.
54. Выготский Л. С. Воображение и творчество в детском возрасте / Л. С. Выготский : Психологический очерк : Книга для учителя. 3-е изд. – М. : Просвещение, 1991. – 90 с.
55. Гальперин П. Я. Психология мышления и учение о поэтапном формировании умственных действий / П. Я. Гальперин // Исследования мышления в советской психологии : Сб-к научн. трудов. – М. : Наука, 1966. – С. 236-278.
56. Гершунский Б. С. Компьютеризация в сфере образования : Проблемы и перспективы / Б. С. Гершунский. – М. : Педагогика, 1987. – 264 с.
57. Гилфорд Дж. Три стороны интеллекта. Психология мышления / Дж. Гилфорд. ; под ред. А. М. Матюшкина. – М. : Прогресс, 1965. – С. 433-456.
58. Гиппенрейтер Ю. Б. Введение в общую психологию / Ю. Б. Гиппенрейтер. – М. : ЧеРо : Юрайт, 2002. – 332 с.
59. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – Изд. 4-е, доп. – М. : Высш. шк., 1975. – 368 с.
60. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. – М. : Едиториал УРСС, 2005. – 448 с.
61. Гнеденко Б. В. Об обучении математике в университетах и педвузах на рубеже двух тысячелетий / Б. В. Гнеденко, Д. Б. Гнеденко. М. : ЛЕНАНД, 2006. – 158 с.
62. Гнеденко Б. В. Элементарное введение в теорию вероятностей / Б. В. Гнеденко, А. Я. Хинчин. – М. : Наука, 1982. – 160 с.

- 63.Боженко Л. И. Система познавательных заданий как средство формирования общеучебных умений школьников : автореф. дис. на соискание ученой степени кандидата пед. наук : спец. 13.00.01 «Общая педагогика и история педагогики» / Л. И. Гоженко. – К., 1985. – 18 с.
- 64.Гончаренко С. У. Український педагогічний словник / Семен Устинович Гончаренко. – К. : Либідь, 1997. – 374 с.
- 65.Голобородько В. В. Наукова робота учнів / В. В. Голобородько. Програма організації науково-дослідницької діяльності учнів / В. М. Гнедашев. – Х. : Вид.група «Основа», 2005. – 208 с.
- 66.Голант Е. Я. Методы обучения в современной школе / Е. Я. Голант. – М. : Учпедгиз, 1957. – 152 с.
- 67.Горошко Ю. В. Вплив нової інформаційної технології на практичну значимість результатів навчання математики в старших класах середньої школи : дис. ... кандидата пед. наук : 13.00.02 / Горошко Юрій Васильович. – К., 1993. – 104 с.
- 68.Грабарь М. И. Применение математической статистики в педагогических исследованиях . Непараметрические методы / М. И. Грабарь, К. А. Крас-нянская. – М. : Педагогика, 1977. – 136 с.
- 69.Гримак Л. П. Резервы человеческой психіки : Введение в психологию активности / Л. П. Гримак. – М. : Политиздат, 1989. – 319 с.
- 70.Гриньова М. В. Феномен навчальної діяльності / М. В. Гриньова // Педагогіка і психологія. – 1995. – №2. – С. 23-29.
- 71.Грохольська А. В. Застосування кодопозитивів під час вивчення теми «Вступ до стохастики» / Алла Василівна Грохольська // Математика в школі. – 2004. – №9. – С. 31-36.
- 72.Груденов Я. И. Психолого-дидактические основы методики обучения математике / Я. И. Груденов. – М. : Педагогика, 1987. – 158 с.
- 73.Груздев П. Н. Вопросы воспитания мышления в процессе обучения / П. Н. Груздев, Ш. Н. Ганелин. – М. : АПН РСФСР, 1949. – 356 с.
- 74.Гурова Л. Л. Мыслительные операции в процессе осознанного решения задач / Л. Л. Гурова // Вопросы психологии, 1968. – №2. – С. 5-8.
- 75.Давыдов В. В. Теория развивающего обучения / В. В. Давыдов. – М. : Интор, 1996. – 540 с.
- 76.Данилов М. А. Взаимодействие деятельности учителя и самостоятельной работы учащихся в процессе изучения нового материала / М. А. Данилов. – М. : Педагогика, 1972. – 204 с.
- 77.Дидактика средней школы : [под ред. М. А. Данилова и М. Н. Скаткина]. – М. : Просвещение, 1975. – 303 с.
- 78.Дидактичні матеріали з математики : Навчальний посібник / О. М. Афа-насьєва, Я. С. Бродський, О. Л. Павлов, А. К. Сліпенко. – К. : Вища шк., 2001. – 271 с.
- 79.Державна національна програма «Освіта» («Україна ХХІ століття»). – К. : Райдуга, 1994. – 62 с.
- 80.Державний стандарт базової і повної середньої освіти // Математика в школі. – 2004. – №2. – С. 2-5.
- 81.Джонс Дж. К. Методы проектирования / Дж. К. Джонс : пер. с англ. – 2-е изд., доп. – М. : Мир, 1986. – 326 с.
- 82.Дорно И. В. Проблемное обучение в школе / И. В. Дорно. – М. : Просвещение, 1984. – 31 с.

83. Дусавицький О. К. Повернемо дитині мислення: розвивальне навчання / О. К. Дусавицький. // Рідна школа. – 1997. – №11. – С. 3-4.
84. Дьяченко М. И. Краткий психологический словарь : Личность : образование, самообразование, профессия / М. И. Дьяченко, Л. А. Кан-дыбович. – Мн. : «Хэлтон», 1998. – 399 с.
85. Єйнох Г. Й. Позакласна робота та факультативні заняття з математики / Г. Й. Єйнох // Математика в школах України. – 2006. – №16-18. – С. 2-7.
86. Егоров С. Ф. Хрестоматия по истории школы и педагогики в России (до Великой Октябрьской социалистической революции). Учебное пособие для студентов пед ин-тов / С. Ф. Егоров : под ред. д-ра пед. наук, проф. Ш. И. Ганелина. – М. : Просвещение, 1974. – 527 с.
87. Ершов А. П. Компьютеризация школы и математическое образование / А. П. Ершов // Информатика и образование. – 1992. – №5. – С. 3-12.
88. Жалдак М. І. Деякі властивості ймовірнісних моделей стохастичних експериментів / М. І. Жалдак, Г. О. Михалін // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. Збірник наукових праць. – К. : Комп'ютер в школі та сім'ї. – 2001. – Вип. 3. – С. 49-68.
89. Жалдак М. І. Елементи стохастики з комп'ютерною підтримкою. Посібник для вчителів / М. І. Жалдак, Г. О. Михалін. – К. : Шкільний світ, 2006. – 120 с.
90. Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках математики. Посібник для вчителів / Мирослав Іванович Жалдак. – К. : Техніка, 1997. – 303 с.
91. Жалдак М. І. Математика (Алгебра і початки аналізу) з комп'ютерною підтримкою : Навчальний посібник для підготовчих відділень / М. І. Жалдак, А. В. Грохольська, О. Б. Жильцов. – К. : МАУП, 2003. – 304 с.
92. Жалдак М. І. Математика з комп'ютером. Посібник для вчителів / М. І. Жалдак, Ю. В. Горошко, Є. Ф. Вінниченко. – К. : РННЦ «ДІНІТ», 2004. – 254 с.
93. Жалдак М. І. Методика навчання елементів стохастики учнів старшої школи. Матеріали для проведення уроків / М. І. Жалдак, Г. О. Михалін, І. С. Соколовська // Математика в школі. – 2007. – №6. – С. 26-31, №7. – С. 17-22, №8. – С. 3-7, №9-10. – С. 9-14; 2008. – №1. – С. 6-10.
94. Жалдак М. І. Основи теорії і методів оптимізації : Навчальний посібник / М. І. Жалдак, Ю. В. Триус. – Черкаси : Брама-Україна, 2005. – 608 с.
95. Жалдак М. І. Педагогічний потенціал комп'ютерно-орієнтованих систем навчання математики / Мирослав Іванович Жалдак // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Збірник наукових праць – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2003. – Вип. 7. – С. 3-16.
96. Жалдак М. І. Проблема інформатизації навчального процесу в школі і в вузі // Сучасна інформаційна технологія в навчальному процесі : Збірник наукових праць Ключко В. І. Застосування новітніх інформаційних технологій при вивченні вищої математики у технічному вузі : Навчально-методичний посібник. – Вінниця : ВДТУ, 1997. – 300 с. – К. : КДПІ імені М. П. Драгоманова, 1991. – С. 3-16.
97. Жалдак М. І. Теорія ймовірностей і математична статистика з елементами інформаційної технології. Навчальний посібник / М. І. Жалдак, Н. М. Кузьміна, С. Ю. Берлінська. – К. : Вища школа, 1995. – 351 с.
98. Жалдак М. І. Про вивчення елементів стохастики у школі / М. І. Жалдак, Г. О. Михалін // Математика в школі. – 2004. – №9-10. – С. 7-12.
99. Жалдак М. І. Про коректність введення понять «випадкова подія», «ймовірність», «випадкова величина» у шкільному курсі математики / М. І. Жалдак, Г. О. Михалін // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія №2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. Збірник наукових праць. – К. : НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2008. –

№6 (13). – С. 3-12.

100. Жалдак М. І. Про поняття випадкової події, ймовірності, ймовірнісного простору, випадкової величини / М. І. Жалдак, Г. О. Михалін // Математика в школі. – 2002. – №2. – С. 18-23.
101. Закон України “Про освіту”. – К. : Міністерство освіти України, 1996. – 36 с.
102. Закон України “Про загальну середню освіту”[Електронний ресурс] : Законодавство України. – К. : CD-вид-во «Инфодиск», 2006. – № 11. – 1 електрон . опт. диск (CD-ROM); 12 см. – Систем. вимоги : Pentium-233; 32 Мб RAM; CD-ROM Windows 98/2000/NT/XP.
103. Зимняя И. А. Исследовательская работа как специфический вид человеческой деятельности / И. А. Зимняя, Э. А. Шашенкова. – Ижевск : ИЦПКПС, 2001. – 103 с.
104. Иодко А. Г. Формирование у учащихся умений исследовательской деятельности в процессе обучения химии : дис. ... кандидата пед. наук : 13.00.02 / Иодко А. Г. – М., 1983. – 183 с.
105. Ительсон Л. Б. Лекции по современным проблемам психологии обучения / Л. Б. Ительсон. – Владимир. – 1972. – 264 с.
106. Кабанова-Меллер Е. Н. Учебная деятельность и развивающее обучение / Е. Н. Кабанова-Меллер. – М. : Знание, 1981. – 96с.
107. Калмыкова З. И. Продуктивное мышление как основа обучаемости / З. И. Калмыкова . – М.: Педагогика, 1981. – 200 с.
108. Камышникова Т. А. Применение исследовательского подхода в обучении / Т. А. Камышникова // Советская педагогика. – 1987. – № 12. – С. 32-36.
109. Карелин Л. З. Задачи на исследование в школьном курсе геометрии : автореф. дис. на соискание ученой степени кандидата пед. наук : спец. 13.00.02 «Теория и методика обучения» / Л. З. Карелин. – К., 1968. – 15 с.
110. Карлащук А. Ю. Формування дослідницьких умінь школярів у процесі розв'язування математичних задач з параметрами : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня кандидата пед. наук : спец. 13.00.02 «Теорія та методика навчання» / А. Ю. Карлащук. – К., 2001. – 19 с.
111. Кирсанов А. А. Индивидуализация учебной деятельности как педагогическая проблема / А. А. Кирсанов. – Изд-во Казанского ун-та : Казань, 1982. – 224 с.
112. Клименко В. Механізм творчості: чи можна його розвивати? / В. Клименко // Шкільний світ. – 2001. – №2-3 (82-83).
113. Клименко В. Механізм творчості: чим його розвивати? / В. Клименко // Шкільний світ. – 2001. – №25-28 (105-108).
114. Клименченко Д. В. Воспитывать исследовательские навыки / Д. В. Клименченко // Математика в школе. – 1972. – №3. – С. 26-27.
115. Ключко В. І. Нові інформаційні технології навчання математики в технічній вищій школі : дис. ... доктора пед. наук : 13.00.02 / Ключко Віталій Іванович. – Вінниця, 1998. – 396 с.
116. Ковалев С. М. Исследование / С. М. Ковалев // СЭС. – М. : «Советская энциклопедия», 1979. – С. 516.
117. Коваленко В. Г. Проблемний підхід до навчання математики : методичний посібник / В. Г. Коваленко, І. Ф. Тесленко. – К. : Рад.шк., 1985. – 88 с.
118. Колмогоров А. Н. Введение в теорию вероятностей и комбинаторику / А. Н. Колмогоров // Математика в школе. – 2000. – №8. – С. 2-9.
119. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей / А. Н. Колмогоров. – М.-Л. : Объединенное научно-техническое изд-во НКТП СССР, Главная редакция

- общетехнической литературы и номографии, 1936. – 80 с.
120. Колягин Ю. М. Задачи в обучении математики / Ю. М. Колягин. – М. : Просвещение, 1977.
Ч. 1 : Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. – М. : Просвещение, 1977. – 110 с.
Ч. 2 : Обучение математике через задачи и обучение решению задач. – М.: Просвещение, 1977. – 144 с.
121. Коменский Я. А. Высшая дидактика / Я. А. Коменский / под ред. А. И. Пискунова и др. – М. : Педагогика, 1982. – 656 с.
122. Кон И. С. Психология старшеклассника / И. С. Кон. – М. : Просвещение, 1982. – 207 с.
123. Концепція загальної середньої освіти (12-річна школа) [Електронний ресурс] : Законодавство України. – К. : CD-вид-во «Инфодиск», 2006. – № 11. – 1 електронн . опт. диск (CD-ROM); 12 см. – Систем. вимоги : Pentium-233; 32 Мб RAM; CD-ROM Windows 98/2000/NT/XP.
124. Концепція профільного навчання у старшій школі // Математика в школі. – 2006. – №4. – С. 2-7.
125. Коротяев Б. И. Методы навчально-пізнавальної діяльності учнів / Б. И. Коротяев. – К. : Рад.шк.,1971. – 175 с.
126. Костюк Г. С. Навчально-виховний процес і психічний розвиток особистості / Григорій Силович Костюк / під ред. Л. М. Проколієнко. – К. : Рад.школа, 1989. – 608 с.
127. Кравцова И. А. Дидактические условия формирования у учащихся интереса к учебно-исследовательской работе : дис. ... кандидата пед. наук: 13.00.01 / Кравцова Инна Адамовна. – Кривой Рог, 1997. – 180 с.
128. Критерії оцінювання навчальних досягнень у системі загальної середньої освіти [Електронний ресурс] : Законодавство України. – К. : CD-вид-во «Инфодиск», 2006. – № 11. – 1 електронн. опт. диск (CD-ROM); 12 см. – Систем. вимоги : Pentium-233; 32 Мб RAM; CD-ROM Windows 98/2000/NT/XP.
129. Крутецкий В. А. Психология обучения и воспитания школьников / В. А. Крутецкий. – М. : Просвещение, 1976. – 303 с.
130. Кузнецова А. Ф. Проблемно-поисковые домашние задания как средства формирования познавательных интересов учащихся : автореф. дис. на соискание ученой степени кандидата пед. наук : спец. 13.00.02 «Теория и методика обучения» / А. Ф. Кузнецова. – К., 1983. – 13 с.
131. Кузьмінський А. І. Педагогіка : підручник / А. І. Кузьмінський, В. Л. Омеляненко. – 2-ге вид., перероб. і доп. – К. : Знання-Прес, 2004. – 445 с.
132. Кукушин В. С. Дидактика (теория обучения) : [учебное пособие] / В. С. Кукушин. – М. : ИКЦ «МарТ», 2003. – 368 с.
133. Кулько В. А. Формирование у учащихся умений учиться : пособие для учителей / В. А. Кулько, Т. Д. Цехмистрова. – М. : Просвещение, 1983. – 80 с.
134. Кулюткин Ю. Н. Диалог как предмет педагогической рефлексии / Ю. Н. Кулюткин. — СПб. : СпецЛит, 2001. — 75 с.
135. Лазарев М. О. Основи педагогічної творчості / М. О. Лазарев. – Суми : ВВП Мрія-ЛТД, 1995. – 212 с.
136. Левинов А. М. О содержании понятий «навык» и «умение» / А. М. Левинов // Советская педагогика. – 1980. – №3. – С. 68-72.

137. Левитес Д. Г. Практика обучения : современные образовательные технологии / Д. Г. Левитес. - Москва-Воронеж, 1998. – 288 с.
138. Левченко Л. С. Творча самореалізація старшокласників у науково-дослідницькій діяльності шкіл нового типу : дис. ... кандидата пед. наук : 13.00.01 / Левченко Людмила Степанівна. – Суми, 1999. – 211 с.
139. Лемберг Р. Г. Дидактические очерки / Р. Г. Лемберг. – Алма-Ата : Казгосучпедгиз, 1960. – 194 с.
140. Леонтьев А. Н. Деятельность, сознание, личность / А. Н. Леонтьев. – М. : Политиздат, 1975. - 304 с.
141. Лернер И. Я. Дидактические основы методов обучения / И. Я. Лернер. – М. : Педагогика, 1981. – 186 с.
142. Лернер И. Я. Поисковые задачи в обучении как средство развития творческих способностей / И. Я. Лернер / В кн. : Научное творчество / под ред. С. В. Микулинского, М. Г. Ярошевского. – М. : Наука, 1969. – С. 413-418.
143. Лиходеева Г. В. Дослідницький підхід у навчанні учнів елементів стохастичності з використанням інформаційних технологій / Г. В. Лиходеева // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія № 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. Збірник наукових праць. – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2008. - №6 (13). – С. 105 – 111.
144. Лиходеева Г. В. Елементи стохастичності : практикум для студентів вищих навчальних педагогічних закладів освіти / Г. В. Лиходеева. – Бердянськ : БДПУ, 2005. – 68 с.
145. Лиходеева Г. В. Задачі математичної статистики для учнів, методика їх постановки та розв'язування з використанням персонального комп'ютера / Г. В. Лиходеева / Підготовка вчителя математики до роботи в умовах використання комп'ютерно-орієнтованих систем навчання: Колективна монографія / За ред. О. М. Литвина. – Донецьк: ТОВ «Юго-Восток, ЛТД», 2006. – С. 325-335.
146. Лиходеева Г. В. Математичне моделювання в процесі формування навчально-дослідницьких умінь учнів / Г. В. Лиходеева // Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції «Безперервна фізико-математична освіта : проблеми, пошуки, перспективи» - Бердянськ : БДПУ, 2007. – С. 52-53.
147. Лиходеева Г. В. Навчально-дослідницькі вміння та дослідницька діяльність учнів у психолого-педагогічній літературі / Г. В. Лиходеева // Дидактика математики : проблеми і дослідження : міжнародний збірник наукових робіт. – Вип. 27. Донецьк : Фірма ТЕАН, 2007. – С. 89-94.
148. Лиходеева Г. В. Навчальне статистичне дослідження як засіб формування навчально-дослідницьких умінь учнів / Г. В. Лиходеева // Тези Міжнародної науково-практичної конференції «Математична освіта в Україні : минуле, сьогодні, майбутнє» – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2007. – С. 73-74.
149. Лиходеева Г. В. Особливості учбової діяльності учнів при вивченні ймовірностей / Г. В. Лиходеева // Збірник наукових праць Бердянського державного педагогічного університету (Педагогічні науки). – №4. – Бердянськ : БДПУ, 2003. – С. 104-110.
150. Лиходеева Г. В. Підготовка майбутніх учителів математики до викладання теорії ймовірностей та основ математичної статистики у різнопрофільних класах загальноосвітньої школи / Г. В. Лиходеева // Збірник наукових праць Бердянського державного педагогічного університету (Педагогічні науки). – №2. – Бердянськ : БДПУ, 2002. – С. 206-212.
151. Лиходеева Г. В. Розв'язування задач математичної статистики з використанням комп'ютера / Г. В. Лиходеева // Математика в школі. – 2007. – №1. – С. 27-33.

152. Лиходєєва Г. В. Структурні компоненти навчально – дослідницьких умінь учнів / Г. В. Лиходєєва // Тези доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції «Навчання, виховання та розвиток» - Бердянськ : БДПУ, 2004. – С. 27-28.
153. Лиходєєва Г. В. Формування навчально-дослідницьких умінь учнів при вивченні елементів стохастички / Г. В. Лиходєєва // Наукові записки. – Випуск 60. – Серія : Педагогічні науки. – Кіровоград : РВВ КДПУ ім. В. Винниченка. – 2005. – Частина 1. – С. 174-179.
154. Ломов Б. Ф. Информационное взаимодействие человека и машины / Б. Ф. Ломов. – М. : Прогресс, 1983. – 430 с.
155. Лук А. Н. Психология творчества / А. Н. Лук. – М. : Просвещение, 1978. – 127 с.
156. Лютикас В. С. Факультативный курс по математике. Теория вероятностей? Это интересно! / В. С. Лютикас. – М. : Мир, 1993. – 216 с.
157. Маркова А. К. Формирование мотивации учения : книга для учителя / А. К. Маркова, Т. А. Матис, А. Б. Орлов. – М. : Просвещение, 1990. – 192 с.
158. Математика : 5 кл. : учебн. для общеобразоват. учреждений / под ред. Г. В. Дорофеева, И. Ф. Шарыгина. – 6-е изд. – М. : Просвещение : Дрофа, 2003. – 368 с.
159. Математика. Алгебра. Функции. Анализ данных. 9 кл. : учеб. для общеобразоват. учреждений / под ред. Г. В. Дорофеева. – 5-е изд. – М. : Дрофа, 2004. – 352 с.
160. Математика 5-12 класи. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. – Київ-Ірпень : Перун, 2005. – 64 с.
161. Матюшкин А. М. Проблемные ситуации в мышлении и обучении / А. М. Матюшкин. – М. : Педагогика, 1972. – 206 с.
162. Матюшкин А. М. Мышление, обучение, творчество / А. М. Матюшкин. – Воронеж : Модек, 2003. – 718 с.
163. Махмутов М. И. Организация проблемного обучения в школе / М. И. Махмутов. - М. : Просвещение, 1977. – 240 с.
164. Махмутов М. И. Проблемное обучение : Основные вопросы теории / М. И. Махмутов. – М., 1975. – 257 с.
165. Мацкевич В. Ф. Методичні рекомендації щодо вивчення математики у 2006/2007 навчальному році / В. Ф. Мацкевич // Математика в школах України. – 2006. – №25(145). – С. 5-8.
166. Машбиц Е. Й. Психолого-педагогические проблемы компьютеризации обучения / Е. Й. Машбиц. – М. : Педагогика, 1988. – 191 с.
167. Машбиц Е. Й. Психологические основы управления учебной деятельностью / Е. Й. Машбиц. – К. : Вища школа, 1987. – 224 с.
168. Милерян Е. А. Психология формирования общетрудовых политехнических умений / Е. А. Милерян. – М. : Педагогика, 1973. – 299 с.
169. Мойсеюк Н. Є. Педагогіка. Навчальний посібник / Н. Є. Мойсеюк. - 3-є вид., доповнене. – К. – 2001 – 608 с.
170. Моляко В. А. Психология решения школьниками творческих задач / В. А. Моляко. – К. : Рад. школа, 1983. – 94 с.
171. Монахов В. М. Перспективы использования и внедрения новой информационной технологии обучения на уроках математики / В. М. Монахов // Математика в школе. – 1991.– № 3.– С. 23-28.
172. Морзе Н. В. Система методичної підготовки майбутніх вчителів інформатики в педагогічних університетах : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора пед. наук : спец. 13.00.02 «Теорія та методика навчання» / Н. В. Морзе. – К., 2003. – 39 с.

173. Морозов Г. М. Проблема формирования умений, связанных с применением математики : автореф. дис. на соискание ученой степени кандидата пед. наук : спец. 13.00.02 «Теория и методика обучения» / Г. М. Морозов. – М., 1978. – 22 с.
174. Мостеллер Ф. Вероятность / Ф. Мостеллер, Р. Рурке, Дж. Томас ; пер. с англ. В. В. Фирсова / под ред. И. М. Яглома. – М. : Мир, 1969. – 431 с.
175. Мочалова Н. М. Методы проблемного обучения и границы их применения / Н. М. Мочалова. – Казань : Изд-во КГУ, 1979. – 158 с.
176. Михалін Г. О. Математичний кругозір учителя математики та його формування у процесі навчання математичного аналізу / Г. О. Михалін // Математика в школі. – 2004. – №4. – С. 12-16.
177. Михалін Г. О. Професійна підготовка вчителя математики у процесі навчання математичного аналізу / Г. О. Михалін. – К. : ДІНІТ, 2003. – 320 с.
178. Михалін Г. О. Проблема навчання теорії ймовірностей майбутнім учителем у світлі історичного розвитку наукових теорій / Михалін Г. О., Надточий С. Л. // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики. В кн. VII, М. – Кривий Ріг : Видавничий відділ НметаУ. – С. 238 -245.
179. Михалін Г. О. Статистичні ймовірності. Прості випадкові величини. Закон великих чисел / Г. О. Михалін, О. В. Стогній // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія №2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. Збірник наукових праць. – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2006. – №4 (11). – С. 163-170.
180. Національна доктрина розвитку освіти [Електронний ресурс] : Законодавство України. – К. : CD-вид-во «Инфодиск», 2006. – № 11. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM); 12 см. – Систем. вимоги : Pentium-233; 32 Мб RAM; CD-ROM Windows 98/2000/NT/XP.
181. Недодатко Н. Г. Формування навчально-дослідницьких умінь старшокласників : дис. ... кандидата пед. наук : 13.00.09 / Недодатко Наталя Григорівна. – Кривий Ріг, 2000. – 212 с.
182. Нейман Ю. Вводный курс теории вероятностей и математической статистики / Ю. Нейман ; пер. с англ. Н. М. Митрофановой и А. П. Хусу. – М. : Наука, 1968. – 448 с.
183. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу : дворівневий підручник для 11 кл. загальноосвітніх навчальних закладів / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. – Х. : Світ дитинства, 2005. – 392 с.
184. Немов Р. С. Психология : учебник для студентов высших пед. учеб. заведений / Р. С. Немов : В 3 кн. – М. : Гуманит. Изд. Центр ВЛАДОС, 2003. – Кн.1 : Общие основы психологии. – 688 с.
185. Новий тлумачний словник української мови : в 4 т. / [укл. В. В. Яре-менко, О. М. Сліпушко]. – К. : АКОНІТ, 1999.
Т.1. – 1999. – 910 с.
Т.2. – 1999. – 911 с.
Т.3. – 1999. – 927 с.
Т.4. – 1999. – 941 с.
186. Новиков А. М. Методология учебной деятельности / А. М. Новиков. – М. : Эгвес, 2005. – 176 с.
187. Новиков А. М. Процесс и методы формирования умений / А. М. Но-виков. - М. : Высшая школа, 1986. – 232 с.
188. **Обухов А. С. Исследовательская деятельность как способ формирования мировоззрения / А. С. Обухов // Народное образование. – 1999. – №10 – С. 158-160.**
189. Оконь В. Введение в общую дидактику / В. Оконь ; пер. с польск. Л. Г. Кашкуревича, Н. Г. Горина. – М. : Высш. шк., 1990. – 382 с.

190. Оконь В. Основы проблемного обучения / В. Оконь ; пер. с польск. – М. : Просвещение, 1968. – 208 с.
191. Онищук В. О. Типи, структура і методика уроку в школі / В. О. Онищук. – К. : Радянська школа, 1976. – 184 с.
192. Особистісний підхід у профільному навчанні старшокласників / за ред. Г. О. Балла, – К. : Деміург, 1998. – 160 с.
193. Павленко О. П. Формування творчої особистості гімназиста у пошуково-дослідницькій діяльності : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня кандидата пед. наук : спец. 13.00.09 «Теорія навчання» / О. П. Павленко. – Луцьк, 2005. – 23 с.
194. Павлов И. П. Полное собрание сочинений / И. П. Павлов. – М.-Л., 1951, т. 4. – 245 с.
195. Паламарчук В. Ф. Школа учит мыслить / В. Ф. Паламарчук. – 2-е изд., доп. и перераб. – М. : Просвещение, 1987. – 208 с.
196. Педагогический словарь : В 2 т. / АПН РСФСР / гл. ред. Каиров И. А. - М. : Изд-во Акад. пед. наук РСФСР, 1960.
Т. 1. – 1960. – 774 с.
Т. 2. – 1960. – 766 с.
197. Перовский Е. И. Проблема метода в обучении / Е. И. Перовский // Советская педагогика. – 1956. – №12. – С. 75-90.
198. Пестерева В. Л. Формирование исследовательских умений учащихся при изучении функций в курсе алгебры восьмилетней школы : автореф. дис. на соискание ученой степени кандидата пед. наук : спец. 13.00.02 «Теория и методика обучения» / В. Л. Пестерева. – Ленинград, 1987. – 17 с.
199. Пиаже Ж. Суждение и рассуждение ребенка / Жан Пиаже. – С-П. : Союз, 1997 – 95 с.
200. Пиаже Ж. Эволюция интеллекта в подростковом и юношеском возрасте / Жан Пиаже // Психологическая наука и образование. – 1997. – №4. – С. 56-64.
201. Пидкасистый П. И. Самостоятельная деятельность учащихся в обучении / П. И. Пидкасистый, В. И. Коротяев. – М., 1978. – 76 с.
202. Платонов К. К. Проблемы способностей / К. К. Платонов. – М. : Наука, 1972. – 312 с.
203. Плоцкі А. М. Імовірнісний простір на уроках математики як засіб розв'язування проблем / А. М. Плоцкі // Математика в школі. – 1999. – №4. – С. 7-12.
204. Плоцки А. М. Стохастические задачи и прикладная направленность в обучении математике / А. М. Плоцки // Математика в школе. – 1991. – №3. – С. 69-71.
205. Погорелов А. В. Геометрия / А. В. Погорелов. – М. : Наука, 1983. – 288 с.
206. Погорелов О. В. Планіметрія : Підручник для 7-9 класів середньої школи / О. В. Погорелов. – 3-тє видання. – К. : Освіта, 1998. – 223 с.
207. Погорелов О. В. Стереометрія : Підручник для 10-11 класів середньої школи / О. В. Погорелов. – 3-тє видання. – К. : Освіта, 1997. – 128 с.
208. Пойа Д. Как решать задачу / Дьердь Пойа ; пер. с англ., 2-е изд., испр. – М. : Учпедгиз, 1961. – 207 с.
209. Пойа Д. Математическое открытие. Решение задач : основные понятия, изучение и преподавание / Дьердь Пойа ; пер с англ. – М. : Наука, 1970. – 452 с.
210. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения / Дьердь Пойа ; пер. с англ., 2-е изд., испр. – М. : Наука, 1975. – 463 с.
211. Понамарев Я. А. Психология творчества и педагогіка / Я. А. Понамарев. – М. : Педагогика, 1976. – 280 с.
212. Програма діяльності Кабінету Міністрів «Назустріч людям» [Електронний ресурс] : Законодавство України. – К. : CD-вид-во «Инфодиск», 2006. – № 11. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM); 12 см. – Систем. вимоги : Pentium-233; 32 Мб RAM; CD-ROM

Windows 98/2000/NT/XP.

213. Програми факультативних курсів та курсів за вибором з математики для загальноосвітніх навчальних закладів. – К. : Навчальна книга, 2002. – 154 с.
214. Про запровадження 12-бальної шкали оцінювання навчальних досягнень учнів у системі загальної середньої освіти [Електронний ресурс] : Законодавство України. – К. : CD-вид-во «Инфодиск», 2006. – № 11. – 1 електронн. опт. диск (CD-ROM); 12 см. – Систем. вимоги : Pentium-233; 32 Мб RAM; CD-ROM Windows 98/2000/NT/XP.
215. Про типові навчальні плани загальноосвітніх навчальних закладів на 2001/2002 – 2004/2005 навчальні роки [Електронний ресурс] : Законодавство України. - К. : CD-вид-во «Инфодиск», 2006. – № 11. – 1 електронн. опт. диск (CD-ROM); 12 см. – Систем. вимоги : Pentium-233; 32 Мб RAM; CD-ROM Windows 98/2000/NT/XP.
216. Програма з математики для класів гуманітарного напрямку. Математика 10-11 кл. [укл. М. І. Бурда, Ю. І. Мальований] // Математика. – 2001. – №37 (145).
217. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5-11 класи // Математика. – 2001. – №35 (143).
218. Програма для класів з поглибленим вивченням математики. Математика 8-11 класи [укл. М. І. Бурда, М. І. Жалдак, Т. В. Колесник, Т. М. Хмара, М. Й. Ядренко] // Математика. – 2001. – №37 (145).
219. Прохоров А. В. Задачи по теории вероятностей / А. В. Прохоров, В. Г. Ушаков, Н. Г. Ушаков. – М. : Наука, 1986. – 328 с.
220. Процик И. И. Формирование исследовательских умений и навыков у учащихся сельской школы : автореф. дис. на соискание научной степени кандидата пед. наук : 13.00./ И. И Процик. – К., 1977 – 21 с.
221. Психология : словарь / под общ. ред. А. В. Петровского, М. Г. Яро-шевского. – 2-е изд. – М. : Политиздат, 1990. – 494 с.
222. Пустильник И. Г. Концепция учебного познания как исследования / И. Г. Пустильник // Образование и наука. – 2000. – №2. – С. 5-8.
223. Райков Б. Е. Исследовательский метод в педагогической работе / Б. Е. Райков, В. Ю. Ульяновский, К. П. Ягодовский. – Л. : Госиздат, 1924. – 68 с.
224. Раджабов М. Б. Формирование исследовательских умений и навыков учащихся неполной средней школы при изучении курса геометрии : автореф. дис. на соискание научной степени кандидата пед. наук : спец. 13.00.02 «Теория и методика обучения» / М. Б. Раджабов. – М., 1988. – 18 с.
225. Раков С. А. Формування математичних компетентностей учителя математики на основі дослідницького підходу у навчанні з використанням інформаційних технологій : дис. ... доктора пед. наук : 13.00.02 / Раков Сергій Анатолійович. – Харків, 2005 – 516 с.
226. Рамський Ю. С. Про роль математики і деякі тенденції розвитку математичної освіти в інформаційному суспільстві / Ю. С. Рамський // Математика в школі. – 2007. – № 7. – С. 36-40.
227. Реньи А. А. Трилогия о математике / А. А. Реньи ; пер. с венг. / под ред. и с пред. акад. АН УССР, проф. Б. В. Гнеденко. – М. : Мир, 1980. – 187с.
228. Решетова З. А. Психологические основы профессионального обучения / З. А. Решетова. – М. : Изд-во МГУ, 1985. – 207 с.
229. Рибо Т. Творческое воображение [электронный ресурс]. – С.-Пб., 1901. – С. 132-140. – Режим доступа : HYPERLINK "http://web.psychology" <http://web.psychology.ru>

230. Резіна О. В. Формування інформаційно-пошукових та дослідницьких умінь учнів старшої школи в процесі навчання інформатики : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня кандидата пед. наук : спец. 13.00.02 «Теорія та методика навчання» / О. В. Резіна. – К., 2005, 20 с.
231. Рыков Н. А. К вопросу об образовании умения / Н. А. Рыков // Советская педагогика. – 1953. – №10. – С. 29-37.
232. Рубинштейн М. М. Исследовательский метод в преподавании / М. М. Рубинштейн // Мир. – 1926. – № 5. – С. 35-41.
233. Рубинштейн С. Л. Основы общей психологии / С. Л. Рубинштейн. – М. : Педагогика, 1973. – 423 с.
234. Самарин Ю. А. Очерки психологии ума / Ю. А. Самарин. – М. : Изд-во АПН РСФСР, 1962. – 148 с.
235. Сенько Ю. В. Приобщение учащихся к элементам научного исследования и эксперимента / Ю. В. Сенько // Советская педагогика. - 1976. – № 9. – С. 18-23.
236. Сериков В. В. Личностно-ориентированное образование / В. В. Сериков // Педагогика. – 1994. – №5. – С. 16-21.
237. Сидоренко Е. А. Методы математической обработки в психологии / Е. А. Сидоренко. – СПб. : ООО «Речь», 2004. – 350 с.
238. Скаткин М. Н. Проблемы современной дидактики / М. Н. Скаткин. – 2-е изд. – М. : Педагогика, 1984. – 96 с.
239. Скафа Е. И. Эвристическое обучение математике : теория, методика, технология. Монография / Е. И. Скафа. – Донецк : Изд-во ДонНУ, 2004. – 439 с.
240. Слепкань З. І. Методика навчання математики : підручник / З. І. Слепкань. – 2-ге вид., допов. і переробл. – К. : Вища шк., 2006. – 582 с.
241. Слепкань З. І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики / З. І. Слепкань. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2004. – 240 с.
242. Слепкань З. І. Формування творчої особистості учня в процесі навчання математики / З. І. Слепкань // Математика в школі. – 2003. – №3. – С. 7-13.
243. Смагин В. И. Обучение приемам экспериментально-исследовательской деятельности как средство формирования творческой активности старшеклассников : дис. ... кандидата пед. наук : 13.00.01 / В И. Смагин – Харьков, 1989. – 201 с.
244. Смирнов С. Д. Педагогика и психология высшего образования. От деятельности к личности / С. Д. Смирнов. – М. : Academia, 2001. – 304 с.
245. Современный словарь по педагогике / [сост. Рапацевич Е. С.]. – Мн. : Современное слово, 2001. – 928 с.
246. Сорокин Н. А. Дидактика : учеб. пособие для студентов пед. институтов / Н. А. Сорокин. – М. : Просвещение, 1974. – 222 с.
247. Спиркин А. Г. Сознание и самосознание / А. Г. Спиркин. – М. : Политиздат, 1972. – 303 с.

248. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В. С. Королюк, Н. И. Портенко, А. В. Скороход, А. Ф. Турбин. – 2-е изд. – М. : Наука, 1985. – 640 с.
249. Талызина Н. Ф. Педагогическая психология / Н. Ф. Талызина. – М. : Издат. центр «Академия», 1999. – 288 с.
250. Талызина Н. Ф. Теория поэтапного формирования умственных действий и проблемы развития мышления / Н. Ф. Талызина // Советская педагогика. – 1967. – №1. – С. 28-32.
251. Творча особистість у системі неперервної професійної освіти : матеріали Міжнародної наукової конференції 16-17 травня 2000 року / За ред. С. О. Сисоєвої, О. Г. Романовського. – Харків : ХДПУ, 2000. – 436 с.
252. Токмазов Г. В. Система задач как средство формирования исследовательских умений / Г. В. Токмазов. – М. : Моск. пед. гос. ун-т, 1999. – 70 с.
253. Токмазов Г. В. Задачи по теории вероятностей как средство формирования исследовательской деятельности учащихся / Г. В. Токмазов. – М. : Моск. пед. гос. ун-т, 1997. – 96 с.
254. Токмазов Г. В. Формирование исследовательских умений в процессе решения математических задач / Г. В. Токмазов. – М. : Прометей, 1996. – 90 с.
255. Триус Ю. В. Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математичних дисциплін : Монографія / Ю. В. Триус. – Черкаси : Брама-Україна, 2005. – 400 с.
256. Усова А. В. О критериях и уровнях сформированности познавательных умений у учащихся / А. В. Усова // Советская педагогика. – 1980. – №12. – С. 45-48.
257. Усова А. В. Формирование у учащихся учебных умений / А. В. Усова, А. А. Бобров. – М. : Знание, 1987. – 80 с.
258. Успенский В. В. Школьные исследовательские задачи и их место в учебном процессе : автореф. дис на соискание ученой степени кандидата пед. наук : спец. 13.00.02 «Теория и методика обучения» / В. В. Успенский. – М., 1967. – 23 с.
259. Успенский В. В. Школьные исследовательские задачи / В. В. Успенский // Советская педагогика. – 1968. – №7. – С. 31-39.
260. Ушачев В. П. Формирование исследовательских умений у учащихся в процессе производственной практики на основе активного знания по физике : дис. ... кандидата пед.наук : 13.00.02 / Ушачев В. П. – Челябинск, 1988. – 202 с.
261. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения / Вильям Феллер. – М. : Мир, 1984. – Т. 1. – 1984. – 528 с.
262. Философский энциклопедический словарь / под ред. С. С. Аверинцева и др. – 2-е изд. перераб. и доп. – М. : Сов. энциклопедия, 1989. – 815 с.
263. Фирсов В. В. Некоторые проблемы обучения теории вероятностей как прикладной дисциплине : автореф. дис. на соискание ученой степени

- кандидата пед. наук : спец. 13.00.02 «Теория и методика обучения» / В. В. Фирсов. – М., 1974. – 27 с.
264. Формирование учебной деятельности школьников / В. В. Давыдов, А. К. Маркова, И. Ломпшер и др. – М : Педагогика, 1982. – 216 с.
265. Фридман Л. М. Формирование у учащихся общеучебных умений. Метод. рекомендации / Л. М. Фридман, И. Ю. Калугина. – М : Просвещение, 1995. – 30 с.
266. Фридман Л. М. Как научиться решать задачи : Кн. для учащихся старших классов средней школы / Л. М. Фридман, Е. Н. Турецкий. – 3-е изд., дороб. – М. : Просвещение, 1989. – 192 с.
267. Фурман А. В. Проблемна ситуація в пізнавальній діяльності школярів / А. В. Фурман // Радянська школа, 1985. – №8. – С. 28-34.
268. Хамблин Д. Формирование учебных навыков / Д. Хамблин ; пер. с англ. – М. : Педагогика, 1986. – 160 с.
269. Хмара Т. М. Створюємо особистісно-орієнтовану систему навчання математики / Т. М. Хмара // Математика в школі. – 2001. – № 5. – С. 4.
270. Хургин Я. И. Как объять необъятное / Я. И. Хургин. – М. : Знание, 1985. – 192 с.
271. Хуторской А. В. Современная дидактика. Учебное пособие. 2-е изд., перераб. / А. В. Хуторской. – М. : Высш. шк., 2007. – 639 с.
272. Цехмістрова Г. С. Основи наукових досліджень / Г. С. Цехмістрова. — К. : Слово, 2003. — 240 с.
273. Чистяков В. П. Курс теории вероятностей / В. П. Чистяков. – М. : Наука, 1978. – 224 с.
274. Чубарев А. М. Невероятная вероятность (О прикладном значении теории вероятностей) / А. М. Чубарев, В. С. Холодный. – М. : Знание, 1976. – 128 с.
275. Шацкий С. Т. Педагогические сочинения : в 4 т. / С. Т. Шацкий. – М. : Изд-во Акад. пед. наук РСФСР, 1962. – Т. 1. – 1962. – 503 с.
276. Шеварев П. А. Обобщенные ассоциации в учебной работе школьника / П. А. Шеварев. – М. : Изд-во АПН РСФСР, 1959. – 302 с.
277. Шимбирев П. Н. Педагогическая подготовка учителя средней школы в царской России / П. Н. Шимбирев // Педагогическое образование. – 1935. – №4. – С. 64-72.
278. Шкиль Н. И. Алгебра и начала анализа : учеб. для 11 кл. общеобразоват. учеб. заведений / Н. И. Шкиль, З. И. Слепкань, Е. С. Дубинчук. – К. : Зодиак-Эко, 2003. – 399 с.
279. Шляхами математики : Хрестоматія для учнів 5-9 класів / [упоряд. Т. М. Хмара]. – К. : Пед. преса, 1999. – 196 с.
280. Штофф В. А. Моделирование и философия / В. А. Штофф. – М. : Наука, 1966. – 231 с.
281. Шут М. І. Науково-дослідна робота з фізики у середніх та вищих навчальних закладах / М. І. Шут, В. П. Сергієчко : Навч. посіб. – К. : Шкільний світ, 2004. – 128 с.

282. Щиголев В. А. Исследовательский метод в работе учащихся / В. А. Щиголев. – М., 1926. – 70 с.
283. Щукина Г. И. Роль деятельности в учебном процессе / Г. И. Щукина. – М. : Просвещение, 1986. – 142 с.
284. Эльконин Д. Б. Концепция формирования умственных действий и ее критика Ю. А. Самариным / Д. Б. Эльконин // Вопросы психологии. – 1959. – №6. – С. 25-34.
285. Ягодовский К. П. Исследовательский метод в преподавании естествознания / К. П. Ягодовский. – Л. : Госиздат, 1924. – 180 с.
286. Якиманская И.С. Разработка технологии личностно-ориентированного обучения / И. С. Якиманская // Вопросы психологии. – 1995. – №2. – С. 31-42.
287. Ярошенко О. Г. Проблеми групової навчальної діяльності школярів : дидактико-методичний аспект / О. Г. Ярошенко. – К. : Станіца, 1990. – 245 с.
288. Batson T., Bass R. Primacy of Process : Teaching and Learning in the Computer Age / T. Batson, R. Bass // Change, March-April, 1996. – P. 12-21.
289. Hudson B., Borba M. The role of technology in the mathematics classroom: ICME-8 Working group 16 – Secondary School Sub-Group. – MicroMath. – 1999, Vol. 15, No. 1, pp. 19-23.
290. Jaworski, B. “Mathematics teacher research: Process practice and the development of teaching”. - Journal of Mathematics Teacher Education, 1(1), 1998. – pp. 3-31.
291. Lampert M. “What can research on teacher education tell us about improving quality in mathematical education?” Teaching and Teacher education 4(2). – 1988. – pp. 157-170.
292. Maslow A. N. Motivation and personality / A. N. Maslow // Under the eq. of Munphy CNY, 1989. – YXIY. – 44 p.
293. Shulman L.S. “Those who understand, Knowledge growth in teaching.” Educational Researcher, 15(2). – 1986. – pp. 4-14.