НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені М. П. ДРАГОМАНОВА

На правах рукопису

ГРИЦИК Тетяна Андріївна

УДК 373.5.016:514.116(043.3)

ДИФЕРЕНЦІЙОВАНЕ ВИВЧЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНОГО МАТЕРІАЛУ У ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ

13.00.02 – теорія та методика навчання (математика)

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата педагогічних наук

Науковий керівник
Забранський Віталій Ярославович,
кандидат педагогічних наук, доцент

Київ – 2010

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Прискорення науково-технічного прогресу та глобалізація суспільного життя зумовлюють необхідність оновлення освітньої системи відповідно до нових вимог часу. Характерною рисою розвитку національної системи освіти є її гуманізація, що передбачає створення умов для самореалізації та індивідуального зростання особистості, розкриття її природних задатків та здібностей. Для успішної адаптації системи освіти до особистісних потреб учнівської молоді необхідні зміни усіх компонентів навчально-виховного процесу (цільового, стимулюючо-мотиваційного, змістового, контрольно-регулюючого та інших), переосмислення чинників, які впливають на його результативність (психолого-педагогічного, соціально-економічного, професійного).

Необхідною умовою гуманізації навчального процесу в основній та старшій школі законами України „Про освіту” [133], „Про загальну середню освіту” [132], Державною національною програмою „Освіта” („Україна XXI століття”) [106], Національною доктриною розвитку освіти в Україні [210], Концепцією профільного навчання в старшій школі [164] визначено його диференціацію. Вона передбачає таку організацію навчання, яка дає можливість в умовах класно-урочної системи врахувати індивідуальні особливості учнів, зорієнтувати їх навчальну діяльність на реалізацію власних пізнавальних здібностей та особистісних потреб.

Диференційоване навчання на сучасному етапі реалізується через профільну та рівневу диференціації, які створюють сприятливі умови для врахування навчально-пізнавальних можливостей та потреб різних груп учнів на рівні школи та класу. Профільна диференціація ґрунтується на виборі учнями профілю навчання, відповідно до їх пізнавальних інтересів, здібностей, професійних намірів, і спрямована на їх підготовку до продовження освіти після закінчення школи. Як зазначено в Концепції профільного навчання в старшій школі, „профільна школа найповніше реалізує принцип особистісно орієнтованого навчання, що значно розширює можливості учня у виборі власної освітньої траєкторії” [164, с.57]. Рівнева диференціація передбачає організацію навчання, в процесі якого учні, навчаючись в одному класі, за однією програмою і підручником, отримують можливість засвоювати навчальний матеріал на різних рівнях. Цей вид диференційованого навчання зумовлює варіативність педагогічного впливу на учня в межах класу.

Рівнева диференціація, що є провідною в основній школі, необхідна і в умовах профільної школи. Єдність рівневої та профільної диференціації у профільній школі дає змогу більш повно забезпечити особистісну орієнтацію навчального процесу, „наблизити” педагога до особистості школяра. Організація рівневої диференціації у профільному класі передбачає створення сприятливих умов для досягнення кожним учнем максимально можливого для нього рівня засвоєння навчального матеріалу, попередження розумових, фізичних та психічних перевантажень, врахування навчальних можливостей та задоволення пізнавальних потреб учнів. При цьому відбувається адаптація процесу навчання до рівнів навченості, здібностей, темпу учіння, а також розвиток мислительної, емоційної, вольової сфер особистості учня.

Питання диференційованого навчання в останні роки досліджувались багатьма українськими педагогами, методистами і науковцями: О. Г. Братанич [41], О. І. Бугайовим [43], В. К. Буряком [50], В. М. Володьком [61], Ю. З. Гільбухом [71], П. М. Гусаком [101], Є. В. Денчук [105], Г. І. Коберником [153], Н. А. Ковчин [154], С. П. Логачевською [186], П. І. Сікорським [267], А. В. Фурманом [304], О. Г. Ярошенко [335] та іншими. Організаційно-управлінські та психолого-педагогічні аспекти функціонування профільної школи в Україні розроблені у дослідженнях Н. О. Аніскіної [11], Г. О. Балла [17], Н. М. Бібік [31], М. І. Бурди [49], В. І. Кизенка [149], О. К. Корсакової [165], Л. А. Липової [183], П. С. Перепелиці [17], В. В. Рибалки [255], А. П. Самодрина [260], Н. І. Шиян [326] та інших науковців.

Математика як шкільний навчальний предмет створює особливо широкі можливості для здійснення диференційованого навчання, що обумовлені абстрактністю категорій, якими вона оперує, багатством її змісту та методів, різноманітністю внутрішньопредметних та міжпредметних зв’язків. Сучасні підходи до розв’язання проблем профільної та рівневої диференціації навчання математики знайшли відображення у працях багатьох вітчизняних та зарубіжних науковців: Г. П. Бевза [24], В. Г. Болтянського [36], М. І. Бурди [49], Г. Д. Глейзера [36], В. О. Гусєва [102], В. Г. Дорофєєва [112-114], М. І. Жалдака [123], В. Я. Забранського [128], М. Я. Ігнатенка [143], А. М. Капіносова [148], Ю. М. Колягіна [159], Т. В. Крилової [170], О. І. Скафи [269], З. І. Слєпкань [273, 274, 276], Н. А. Тарасенкової [290], В. В. Фірсова [300], В. О. Швеця [322, 323], М. І. Шкіля [327], С. Є. Яценко [336] та інших. В них досліджено різні аспекти диференційованого навчання математики: його понятійний апарат, психолого-педагогічні передумови, диференціацію цілей та змісту, прийоми, засоби та організаційні форми навчання.

В Україні дисертаційні роботи, в яких досліджується проблема диференційованого навчання математики, виконані М. І. Бурдою [48], Л. С. Голодюк [74], С. М. Григулич [76], Г. В. Дідик [111], В. Я. Забранським [128], С. В. Івановою [142], Г. В. Іщенко [144], В. М. Козирою [156], Т. М. Сукач [285], О. В. Труновою [297], С. Є. Яценко [336] та іншими науковцями.

Концепція профільного навчання в старшій школі [164] передбачає такі основні напрями профільного навчання: суспільно-гуманітарний, філологічний, художньо-естетичний, природничо-математичний, технологічний, спортивний. Вивчення математики за цими напрямами здійснюється за різними програмами, підручниками, навчально-методичним забезпеченням на різних рівнях засвоєння змісту:

1) рівень стандарту – обов’язковий мінімум змісту, який не передбачає подальшого вивчення математики після закінчення школи;

2) академічний рівень – обсяг змісту достатній для подальшого вивчення математики у вищих навчальних закладах;

3) рівень профільної підготовки (профільний рівень) – зміст поглиблений, передбачає орієнтацію на майбутню професію, тісно пов'язану з математикою [164].

Різним аспектам навчання математики у профільній школі присвячені дисертаційні роботи М. В. Василь'євої [54], Т. С. Жданової [126], С. В. Іванової [142], В. М. Козири [156], Н. В. Кугай [173], Т. Х. Пономарьової [239], Ю. М. Ткач [292], О. В. Шаран [318] та інші.

В дисертаційній роботі С. В. Іванової [142] досліджується різнорівнева геометрична діяльність старшокласників шкіл (класів) гуманітарного профілю та методика її формування. В. М. Козирою [156] розроблена система навчання алгебри в 10-11-х класах шкіл, ліцеїв та гімназій фізико-математичного профілю при вищих педагогічних навчальних закладах, запропонована система відбору учнів до цих класів. Дисертація Н. В. Кугай [173] присвячена удосконаленню методики формування та розвитку вмінь старшокласників доводити твердження шкільного курсу алгебри і початків аналізу для універсального та природничого профілів. Ю. М. Ткач [292] розроблено модель діяльності суб'єктів процесу навчання математики в класах економічного профілю.

У роботах названих авторів зазначається об'єктивна потреба в поєднанні різних форм диференціації навчання математики та окреслені окремі практичні способи здійснення рівневого навчання у профільних класах. Проте, питання взаємодоповнення, взаємозалежності та раціонального поєднання рівневої та профільної диференціації у процесі навчання математики в цих працях розроблені не достатньо. Потребують подальших досліджень психолого-педагогічні, процесуально-змістові та навчально-методичні аспекти впровадження рівневої диференціації в умовах профільного навчання математики.

Розглянуті дисертаційні роботи присвячені розробці методики навчання математики стосовно шкіл та класів окремих профілів або рівнів вивчення математики. Водночас, недостатня увага приділяється застосуванню комплексного та системного підходів до цього процесу. Необхідні систематизація та узагальнення наявного досвіду диференційованого навчання математики, цілісна розробка відповідного теоретичного обґрунтування та методичного забезпечення.

Сучасний розвиток науки та суспільства характеризується інтенсивним проникненням математичних методів у всі наукові галузі та сфери матеріального виробництва. Від рівня математичної підготовки та математичної культури випускників шкіл залежить науково-технічний прогрес, а відтак, і добробут життя людей. На сучасному етапі розвитку математичної освіти спостерігається зниження загального рівня математичної підготовки учнів. Низькою, також, є якість знань з тригонометрії, яка необхідна для розуміння багатьох явищ та процесів, що відбуваються у природі, техніці, побуті, для продовження освіти, всебічного (наукового, практичного, естетичного) пізнання навколишнього світу.

В умовах профільного навчання математики роль тригонометричного матеріалу в математичній підготовці учнів значно посилилась, що пояснюється великим прикладним потенціалом тригонометрії, її значенням для розвитку фу нкціонального мислення, обчислювальної та графічної культури, математичних здібностей учнів. Значущим є внесок тригонометричного матеріалу в підготовку учнів до продовження освіти після закінчення школи за математичними, технічними, природничими спеціалізаціями. Таким чином, методична система вивчення тригонометричного матеріалу в школі має бути оновлена відповідно до сучасних освітніх пріоритетів, зокрема особистісної орієнтації процесу навчання, його спрямованості на загальний розвиток учнів, формування їх пізнавальної активності та творчої самостійності.

Тригонометричний матеріал вивчається в класах усіх профілів на різних рівнях засвоєння змісту: рівні стандарту, академічному рівні і рівні профільної підготовки. Водночас, кожен профільний клас неоднорідний за своїм складом і умовно поділяється на типологічні групи учнів, які потребують неоднакових методів та засобів роботи з ними (рівнева диференціація).

Удосконаленням методики навчання тригонометричного матеріалу в школі у різні часи займалися відомі науковці, математики, методисти: І. К. Андронов [10], О. Ф. Бермант [27], М. М. Бескін [28], В. М. Брадіс [38], Н. Я. Віленкін [59], В. І. Зарецький [134], Л. А. Люстерник [27], А. Г. Мерзляк [295], Г. О. Михалін [201], О. Г. Мордкович [205], С. І. Новосьолов [220], В. В. Рєп'єв [254], М. О. Рибкін [258], І. І. Смірнов [280], П. В. Стратілатов [283], В. Г. Чичигін [314], М. І. Шкіль [327], Н. М. Шунда [331] та інші.

Протягом 50-80-х років XX ст. різним аспектам вивчення тригонометричного матеріалу в школі були присвячені дисертаційні роботи І. В . Баума [18], Л. І. Жогіної [127], О. А. Кузьменко [175], О. К. Окунєва [225], В. В. Пікан [231], В. В. Попова [240], З. І. Слєпкань [271], Г. С. Табідзе [287] та інших.

У роботі І. В. Баума [18] розроблена система вивчення тригонометрії в курсі алгебри середньої школи на векторній основі. Теорія векторів значно розширює і спрощує застосування тригонометрії до розв'язання багатьох теоретичних і практичних задач геометрії, фізики, астрономії та інших наук. Розроблену систему автор пропонує застосовувати в класах з фізико-математичною спеціалізацією.

В дисертаційному дослідженні З. І. Слєпкань [271] розглянуті питання теорії і практики тригонометричних обчислень у восьмирічній і середній школі та розроблені шляхи підвищення культури тригонометричних обчислень в учнів.

В. В. Пікан [231] опрацьовано ідею теоретико-множинного підходу до вивчення тригонометричних функцій в середній загальноосвітній школі.

У роботі Г. С. Табідзе [287] основна увага приділяється функціональній змістовій лінії на тригонометричному матеріалі; досліджуються причини формалізму знань учнів з тригонометрії та вказуються шляхи, якими досягається усвідомлене та активне засвоєння знань.

Питання методики навчання тригонометричного матеріалу в сучасній школі розглядаються в дисертаційних дослідженнях О. В. Генкулової [68], В. П. Джаджи [108], О. Є. Неліної [215], О. В. Нестерук [217], С. М. Суханової [286] та інших.

В дисертації С. М. Суханової [286] запропоновано технологію вивчення тригонометрії на основі діяльнісного підходу і дистанційного навчання як засіб розвитку математичних здібностей старшокласників.

В. П. Джаджа [108] на прикладі тригонометрії розробив метод тематичного завантаження на основі мультимедійних технологій в навчанні математики. У роботі доведено, що застосування цього методу дозволяє забезпечити ґаранто ване досягнення учнями базового рівня навченості і обумовлює диференціацію навчання на підвищеному рівні.

У працях вищезазначених авторів нагромаджений значний досвід навчання тригонометричного матеріалу в школі. Однак, недостатньо дослідженими залишились питання вивчення тригонометричного матеріалу відповідно до про фесійних намірів учнів, їх планів щодо продовження освіти після закінчення школи. Необхідні подальші дослідження можливостей тригонометричного матеріалу для розвитку загальної культури, формування наукового світогляду учнів, розширення їх уявлень про прикладні застосування математики.

Сучасне суспільство потребує високоосвічених та інтелектуальнорозвинених випускників шкіл, які здатні творчо застосовувати отримані математичні знання, в тому числі з тригонометрії, в своїй професійній діяльності, оперувати математичними ідеями та методами в практичному перетворенні дійсності. Якісне засвоєння тригонометричного матеріалу можливе лише за умови організації процесу навчання відповідно до вікових та індивідуальних особливостей учнів, їх особистісних можливостей та потреб. А для цього необхідні нові психолого-педагогічні дослідження, оновлення педагогічних засобів та методичних прийомів.

Актуальність нашого дослідження обумовлена об’єктивно існуючими протиріччями між:

- суспільними вимогами до випускників шкіл та низьким рівнем їх загальної математичної підготовки з тригонометрії;
- наявністю індивідуальних пізнавальних відмінностей учнів в межах профільного класу та недостатнім їх врахуванням у процесі навчання;
- необхідністю забезпечення умов для досягнення кожним учнем практичної та полікультурної компетентностей та слабким відображенням в процесі навчання прикладної та гуманітарної складових змісту тригонометричного матеріалу;
- варіативністю інтересів, нахилів, здібностей суб’єктів учіння та недостатньою особистісною орієнтацією змісту та організації навчання тригонометричного матеріалу;
- розвивальним потенціалом тригонометричного матеріалу та формально-алгоритмічними підходами до його вивчення;
- великим вітчизняним досвідом викладання тригонометричного матеріалу в загальноосвітній школі та низьким рівнем знань з тригонометрії сучасних

випускників шкіл.

Таким чином, з огляду на зазначені протиріччя, однією з актуальних проблем сьогодення математичної освіти, розв'язанню якої присвячене дане дисертаційне дослідження, є **проблема** підвищення ефективності вивчення тригонометричного матеріалу в умовах диференційованого навчання і особистісно орієнтованого підходу до навчання відповідно до потреб суспільства і особистостей тих, хто навчається.

Виходячи з вищевикладеного, нами була обрана **тема дослідження:** „Диференційоване вивчення тригонометричного матеріалу у профільній школі" , яка пов'язана з такими пріоритетами розвитку освіти в Україні, як створення умов для задоволення освітніх та професійних потреб учнів, особистісна орієнтація освіти, приведення обсягу і складності змісту у відповідність з віковими можливостями учнів, посилення практичної і прикладної спрямованості навчального процесу, використання у процесі навчання нових педагогічних технологій.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Напрям дисертаційного дослідження пов'язаний з держбюджетною темою науково-дослідної роботи кафедри математики і теорії та методики навчання математики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова „Розробка науково-методичної системи математичної підготовки учнів середніх закладів освіти в умовах впровадження освітніх стандартів" (номер державної реєстрації 0198 № 001666).

Тему дисертаційного дослідження затверджено Вченою радою Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова (протокол № 9 від 30 березня 2007 р.) та узгоджено в Міжвідомчій раді з координації наукових досліджень у галузі педагогіки і психології в Україні (протокол № 9 від 27 листопада 2007 р.)

Об'єктом дослідження є процес навчання математики у профільній школі.

Предметом дослідження є методика вивчення тригонометричного матеріалу в курсі алгебри і початків аналізу профільної школи.

Мета дослідження полягає у розробці методики диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу в курсі алгебри і початків аналізу профільної школи.

Гіпотеза дослідження: використання методики диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу в курсі алгебри і початків аналізу профільної школи, яка побудована з урахуванням індивідуальних особливостей учнів, специфіки процесу навчання в класах різних напрямів профілізації, особистісно орієнтованого підходу до навчального процесу, забезпечує більш високу якість навчання та засвоєння знань.

Для досягнення поставленої мети та перевірки гіпотези були поставлені **завдання:**

1) проаналізувати психолого-педагогічну, методичну, навчальну літературу з проблеми дослідження та з'ясувати стан диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу у профільній школі;

2) виявити та теоретично обґрунтувати психолого-педагогічні передумови диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу у профільній школі ;

3) визначити методичні вимоги до організації диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу учнями профільної школи;

4) розробити концептуальну модель диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу в курсі алгебри і початків аналізу профільної школи;

5) експериментально перевірити ефективність розробленої методики і внести корективи в методичні рекомендації.

Методологічна основа дослідження: теорія пізнання, психологічні теорії мислення (С. Л. Рубінштейн, Л. С. Виготський, Дж. Дьюї), особистісно орієнтований підхід до навчання, теорія розвивального і проблемного навчання (Л. В. Занков, І. С. Якиманська, М. І. Махмутов), основні положення психології, дидактики і методики про формування та розвиток логічного мислення учнів (В . Ф. Паламарчук, А. А. Столяр, І. Л. Нікольська), теорія поетапного формування розумових дій (П. Я. Гальперін, В. Ф. Моргун, Н. Ф. Тализіна), психологічні дослідження проблеми індивідуальних відмінностей (Б. Г. Ананьєв, Л. С. Виготський, В. Д. Небиліцин, Б. М. Теплов), теоретичні основи індивідуалізації та диференціації навчання (Ю. К. Бабанський, А. О. Бударний, А. О. Кірсанов, Х. Й. Лійметс, Є. С. Рабунський, І. Е. Унт, А. В. Фурман).

Мета, гіпотеза та завдання обумовили вибір сукупності **науково-педагогічних методів дослідження,** в числі яких

теоретичні: *аналіз та синтез* наукової, психолого-педагогічної літератури з проблеми дослідження, законодавчого та нормативного забезпечення функціонування профільної школи, змісту навчальних програм, підручників, навчально-методичних посібників для профільного навчання математики (1.1-1. 4 (тут і далі підрозділи дисертації)); *систематизація та узагальнення* педагогічного досвіду, емпіричних даних, що отримані у процесі дослідження (1.1-1.4, 2.1-2.5); *теоретичне моделювання* процесу диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу у профільній школі (1.4-1.5);

емпіричні: *діагностичні* (бесіди, опитування, анкетування, тестування учнів та вчителів), *обсерваційні* (спостереження за процесом навчання тригонометричного матеріалу у профільній школі, аналіз уроків, письмових робіт учнів, узагальнення та систематизація кращого педагогічного досвіду) (2. 1-2.6); *педагогічний експеримент* (констатувальний, пошукувальний, формувальний) для розробки та перевірки ефективності запропонованої методики; *методи математичної статистики* для обробки та аналізу результатів педагогічного експерименту (2.6).

Наукова новизна дисертаційного дослідження полягає в тому, що *вперше:*

- розроблена, теоретично обґрунтована та експериментально перевірена концептуальна модель диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу в курсі алгебри і початків аналізу профільної школи, яка побудована на основі концепції єдності рівневої та профільної диференціації навчання і спрямована на особистісний розвиток учнів засобами тригонометрії;

- запропоновано та теоретично обґрунтовано структурну схему змістової диференціації тригонометричного матеріалу, яка створює умови для реалізації особистісно орієнтованого підходу до учнів і дозволяє: встановлювати доміну ючі елементи змісту навчання, варіювати навчальне навантаження учнів, підтримувати і розвивати їхні пізнавальні інтереси, диференційовано залучати учнів до різних видів навчально-пізнавальної діяльності, моделювати соціальне замовлення шкільній математичній освіті;

- *подальшого розвитку дістали* дослідження з питань типологічного групування учнів на уроках математики; розроблено методику типологічного групування учнів, яка побудована на основі критеріїв навченості, загальних та математичних здібностей і дає можливість включити кожного школяра в активну пізнавальну діяльність та покращити результати навчання;

- *удосконалено* методику контролю навчально-пізнавальної діяльності учнів на уроках алгебри і початків аналізу профільної школи, яка передбачає конкретизацію рівнів вимог до засвоєння навчального матеріалу системами еталонних задач, що дозволяє підвищити об'єктивність перевірки та оцінювання навчальних досягнень учнів.

Практичне значення результатів дослідження полягає в розробці програм елективних курсів з тригонометрії для профільного навчання математики („Обернені тригонометричні функції”, „Тригонометрія в задачах фізики”, „Історія тригонометрії”), створенні методичних рекомендацій для вчителів щодо виділення типологічних груп в класі, вивчення теоретичного матеріалу, побудови системи вправ, організації контролю навчально-пізнавальної діяльності учнів в процесі навчання тригонометричного матеріалу.

Вірогідність і обґрунтованість одержаних наукових результатів і висновків дисертації забезпечена методологічною обґрунтованістю її теоретичних положень, відповідністю методів дослідження його меті і завданням, репрезентативністю вибірок об'єктів дослідження, кількісним та якісним аналізом значного обсягу теоретичного та емпіричного матеріалу, репрезентативністю та повнотою результатів педагогічного експерименту.

Особистий внесок здобувача полягає у формулюванні та реалізації завдань дослідження, власному підході до досліджуваної проблеми, розробці та впровадженні методики диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу у профільній школі, розробці відповідного навчально-методичного забезпечення (програми елективних курсів з тригонометрії, методичні рекомендації), опублікуванні одноосібних праць за темою дисертаційного дослідження.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дослідження доповідались, обговорювались і знайшли схвалення у період з 2006 по 2010 роки на конференціях, семінарах, зокрема на Всеукраїнському науково-методичному семінарі „Актуальні проблеми методики навчання математики” в НПУ імені М. П. Драгоманова (Київ, 2008), ІІІ Всеукраїнській науково-практичній конференції „Особистісно орієнтоване навчання математики: сьогодення і перспективи” (Полтава, 2008), Міжнародній науково-методичній конференції „Проблеми математичної освіти” (Черкаси, 2009), Всеукраїнській науково-методичній конференції „Профільне навчання: проблеми, перспективи, шляхи реалізації” (Черкаси, 2009), Міжнародній науково-методичній дистанційній конференції молодих вчених, аспірантів і студентів „Евристика і дидактика математики” (Донецьк, 2009), II Всеукраїнській науково-практичній конференції „Безперервна фізико-математична освіта: проблеми, пошуки, перспективи” (Бердянськ, 2009), Міжнародній науково-методичній конференції „Евристичне навчання математики” (Донецьк, 2009), III Всеукраїнській науково -методичній конференції „Рішельєвські читання” (Одеса, 2009), Всеукраїнській науково-методичній конференції „Стан та перспективи підготовки вчителя математики в Україні” (Вінниця, 2009), Всеукраїнській науково-методичній конференції „Розвиток інтелектуальних вмінь та творчих здібностей учнів і студентів в процесі навчання математики” (Суми, 2009).

Розроблену в дисертації методику диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу у профільній школі експериментально перевірено на практиці та впроваджено в природничо-математичному ліцеї „Елітар”(довідка № 329 від 25.10.10), загальноосвітній школі № 4 (довідка № 82 від 17.09.10) та спеціалізованій спортивній школі № 26 (довідка № 105 від 25.03 .10) м. Рівне, в економіко-гуманітарному ліцеї м. Березне (довідка № 222 від 17. 09.10), в гуманітарній гімназії з поглибленим вивченням іноземних мов м. Здолбунів (довідка № 78 від 11.02.10), Соснівському НВК „гімназія – загальноосвітня школа І ступеня” Рівненської області (довідка № 54 від 20.04. 10), Попільнянській гімназії № 1 Житомирської області (довідка № 53 від 05.05. 10), Стуфчинецькій загальноосвітній школі Хмельницької області (довідка № 72 від 26.05.10).

Публікації. Основні положення і результати дисертаційного дослідження опубліковані у 21 праці, серед яких: 11 статей у наукових фахових виданнях, затверджених ВАК України [77, 79, 87-92, 94-95, 129] (з них 2 у співавторстві [79, 129]), 2 статі в науково-методичних виданнях [78, 93], 8 матеріалів і тез на укових конференцій [80-86, 96] (з них 1 у співавторстві [80]).

Структура дисертації. Дисертація складається із вступу, двох розділів, висновків до кожного розділу, висновків, списку використаних джерел (347 найменувань) на 34 сторінках та 20 додатків обсягом 60 сторінок. Повний обсяг дисертації – 277 сторінок. Обсяг основного тексту становить 183 сторінки і містить 13 рисунків і 14 таблиць.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ПРЕДМЕТА ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Мета і завдання, місце та структура вивчення тригонометричного матеріалу у профільній школі

Одним з основних компонентів методичної системи вивчення математики є постановка та усвідомлення учнями мети навчально-пізнавальної діяльності, від якої залежить результативність всього навчального процесу. Визначаючи мету вивчення тригонометричного матеріалу, в основу покладемо трактування цього поняття, дане В. І. Бондарем. Він визначає мету як „ … ідеальний, наперед визначений еталон результату людської діяльності, спрямованої на перетворення дійсності відповідно до усвідомленої людиною потреби” [37, с.38].

Глобалізація усіх сфер життя сучасного суспільства, прискорення темпів соціально-економічних перетворень, швидкий розвиток інформаційних та комунікаційних технологій зумовлюють спрямованість системи освіти не на певно визначену суму знань, навичок та умінь, якими повинен оволодіти випускник школи (знаннєво орієнтований підхід), а на загальні здатності людини до успішної, продуктивної, соціально та особистісно значущої діяльності, які базуються на знаннях, досвіді, цінностях [171].

В умовах компетентнісного підходу вивчення математики орієнтоване на формування і розвиток ключових (базових) та математичних (предметно-галузевих) компетентностей. Набуття математичних компетентностей передбачає формування вміння „ … бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання … будувати математичну модель, досліджувати її математичними методами, інтерпретувати отримані результати, оцінювати похибку обчислень” [252, с.15].

Профільна школа орієнтована на становлення індивідуальності учня, що є своєрідним та неповторним поєднанням таких психологічних особливостей людини, як характер, темперамент, особливості перебігу психічних процесів, мотиваційна сфера, спрямованість [188, с.51]. У вивченні тригонометричного матеріалу за цих умов пріоритетна роль відводиться розвитку раціонального стилю мислення, пам’яті, уваги, пізнавальних властивостей особистості засобами тригонометрії.

Відповідно до потреб у математичній підготовці учнів та сфери їхньої майбутньої трудової діяльності, З. І. Слєпкань виділено три категорії старшокласників [275, с.16].

До першої належать учні, які після закінчення старшої школи працюватимуть у тих галузях народного господарства, що не потребують високого рівня математичної підготовки, або учні, які діставатимуть професійну підготовку у навчальних закладах за спеціальностями, не пов’язаними із застосуванням математичних знань. Переважно учні цієї групи навчаються в профільних класах суспільно-гуманітарного, філологічного, художньо-естетичного, спортивного напрямів та вивчають математику на рівні стандарту.

До другої категорії віднесено учнів, майбутня навчальна або професійна діяльність яких пов’язана з ґрунтовним застосуванням математики. Як правило, учні з такими планами на майбутнє складають основний контингент класів еко номічного, фізико-хімічного, біолого-географічного, екологічного та інших профілів (академічний рівень вивчення математики).

Третю категорію становлять учні, які в майбутньому потребуватимуть підвищеного рівня математичної підготовки. Навчання в профільних класах математичного, фізико-математичного профілів (профільний рівень вивчення математики) дає змогу цим учням розвинути власні математичні здібності, закріпити інтерес до математики і здобути поглиблену математичну підготовку.

Визначаючи мету вивчення тригонометричного матеріалу у профільній школі, необхідно враховувати вищезазначені потреби в математичній підготовці випускників шкіл, роль математичної освіти в майбутній життєдіяльності учня, в різних сферах суспільного життя (економічній, соціально-культурній, матеріально-виробничій та інших). Профільна школа повинна підготувати майбутнього випускника до активних суспільно-економічних відносин, ефективної трудової діяльності, успішної адаптації в су спільстві.

Мета вивчення тригонометричного матеріалу у профільній школі визначається метою профільної математичної освіти, яка безпосередньо випливає з відповідних нормативних документів (Закону України „Про освіту”, Державного освітнього стандарту та ін.). Це, зокрема, „опанування учнями системи математичних знань, навичок і умінь, необхідних у повсякденному житті та майбутній трудовій діяльності, достатніх для успішного оволодіння іншими освітніми галузями знань і забезпечення неперервної освіти” [107, с.3]. Конкретизуємо цю мету відповідно до рівня вивчення математики.

Мета вивчення математики, зокрема тригонометричного матеріалу, на профільному рівні – досягнення учнями високого рівня математичної підготовки і математичного розвитку, забезпечення їх готовності до успішного продовження освіти на математичних та фізико-математичних факультетах вищих навчальних закладів. Для тих учнів, які навчатимуться на цих факультетах, тригонометричний матеріал повинен стати міцною базою для вивчення вищої математики, фізики та інших інженерно-технічних дисциплін. Студенти вищих технічних навчальних закладів – найчисельніший контингент „споживачів тригонометрії”.

Основну увагу під час вивчення математики на академічному рівні слід приділити оволодінню математичними методами та моделями, які забезпечують успішне вивчення профільних предметів – фізики, географії, біології та інших. Тригонометричні функції, рівняння, нерівності та їх системи є важливими засобами математичного моделювання реальних процесів і явищ (механічних, електромагнітних, коливальних), з їх допомогою здійснюється пізнання законів природи. Таким чином, для учнів, які вивчають математику на академічному рівні, пріоритетним має бути формування на тригонометричному матеріалі практичної компетентності, що передбачає уміння будувати і досліджувати математичні моделі навколишнього світу.

Мета вивчення тригонометричного матеріалу на рівні стандарту полягає у засвоєнні учнями математичних знань і вмінь, що є складовими загальної культури людини та необхідні для вивчення інших шкільних предметів, у формуванні уявлень про ідеї та методи математики, її значення в пізнанні і перетворенні дійсності, набутті загальнокультурної компетентності. На цьому рівні важливого значення набуває загальний розвиток учня, збагачення його світогляду засобами тригонометрії.

Таким чином, систематичне і цілеспрямоване оволодіння учнями профільної школи тригонометричним матеріалом має виконувати триєдину мету: сприяти забезпеченню повноцінної математичної підготовки учнів (когнітивна мета), формування умінь застосовувати тригонометричний матеріал у процесі вивчення дисциплін професійного циклу, в практичній діяльності (соціалізуюча мета) та загальний розвиток особистості (особистісно-розвивальна мета). Її реалізація сприяє індивідуальному, освітньому та соціальному становленню особистостей школярів відповідно до їх природних задатків та набутого в процесі життя та навчання досвіду.

У навчальному процесі необхідно визначити систему завдань, які спрямовані на реалізацію поставленої мети. Під завданнями розуміємо систему умов, які мають привести до запланованого результату [267, с.75]. Мету і завдання розглядаємо як ціле і його частини, систему і її компоненти. Для досягнення сформульованої мети необхідна реалізація ряду завдань: розвиток функціонального мислення учнів; формування навичок алгоритмічної діяльності; виховання графічної та обчислювальної культури; формування політехнічних знань та інші.

Важливим завданням вивчення тригонометричного матеріалу у профільній школі є розвиток функціонального мислення учнів. Тригонометричні функції відображають функціональні залежності між багатьма явищами навколишньої дійсності, наприклад, моделюють механічні, електромагнітні, теплові коливальні процеси. Під час вивчення тригонометричних функцій прослідковуються як внутрішньопредметні зв’язки, які узагальнюють та систематизують знання учнів про функції, так і міжпредметні, важливі для розуміння багатьох понять фізики, геометрії, астрономії.

Стрімкий розвиток сучасної науки, техніки, обчислювальних технологій зумовлює необхідність виховання в учнів високої обчислювальної культури, яка передбачає „ … вміння розумно обирати порядок, засоби і форми обчислень , що забезпечують в умовах конкретної задачі отримання результату необхідної точності з мінімальною затратою часу і зусиль” [271, с.3]. Тригонометричні обчислення, до яких ми відносимо обчислення виразів з тригонометричними функціями, а також обчислення елементів геометричних фігур, є потужним засобом формування навичок числових розрахунків. Тригонометричні обчислення широко розповсюджені в техніці, природничих науках (фізиці, геодезії, астрономії та інших), що зумовлює необхідність збільшення уваги до них на академічному рівні вивчення математики. На сучасному етапі розвитку обчислювальної техніки проблема навчання тригонометричних обчислень не є гостроактуальною, проте вважаємо, що тригонометричні обчислення необхідні та важливі в математичній освіті особистості, формуванні її практичної компетентності. Таким чином, виховання обчислювальної культури – важливе завдання вивчення тригонометричного матеріалу у профільній школі.

Незаперечна роль тригонометричного матеріалу в реалізації завдання розвитку алгоритмічного мислення учнів, що передбачає сформованість умінь діяти відповідно до заданих алгоритмів. Виконання тригонометричних перетво рень і обчислень дисциплінує навчальну діяльність учня, спонукає до самоорганізації та самоконтролю дій, розвиває такі життєво необхідні якості особистості як лаконічність та точність думки, послідовність та пунктуальність в поведінці.

Оскільки робота з діаграмами, рисунками, графіками є одним із поширених видів практичної діяльності сучасної людини, то до важливих завдань вивчення тригонометричного матеріалу слід віднести виховання графічної культури учнів. Інженерам, архітекторам, дизайнерам, економістам необхідні вміння будувати і читати графіки функцій, здійснювати їх геометричні перетворення. Тригонометричні функції – зручний засіб для формування цих умінь.

Шкільний тригонометричний матеріал збагачує політехнічні знання учнів, оскільки він широко застосовується в сучасній техніці, в різних галузях виробничої діяльності людини. Дослідження тригонометричних функцій має важливе значення в електротехніці, де явища змінного струму найчастіше моделюють тригонометричні функції синус і косинус. Реалізація завдання збагачення політехнічних знань учнів на тригонометричному матеріалі особливо важлива в тих навчальних профілях, які орієнтують учнів на професії типу „людина-техніка" (за класифікацією професій Є. А. Клімова [151, с.45]). Слід зауважити, що питанням політехнічної спрямованості викладання шкільного тригонометричного матеріалу присвячені дисертаційні роботи О. К. Окунєва [225], В. В. Попова [240], праці ряду авторів (І. К. Андронова [10], О. Є. Волянської [62], П. Я. Кожеурова [155], С. І. Новосьолова [220, 221], З. І. Слєпкань [278], В. Г. Чичигіна [314], М. М. Шоластера [330] та інших).

В тригонометричному матеріалі представлений естетичний потенціал математики, який виявляється в моделюванні тригонометричними функціями багатьох явищ і процесів природи, побуту, життя людини, багатстві історії тригонометрії. Естетичний потенціал тригонометричного матеріалу активізує образно-емоційний тип сприймання учнів, сприяє зацікавленому засвоєнню знань. Формування та розвиток засобами тригонометрії естетичних відчуттів учнів належить до важливих завдань її вивчення на рівні стандарту.

Для майбутніх істориків, філософів, філологів та інших гуманітаріїв питання історії математики, зокрема тригонометрії, доступні, цікаві і повчальні. Тригонометрія як наука має багату історію свого зародження та розвитку, що є складовою історії загальнонаукової думки. Таким чином, для профільних класів суспільно-гуманітарного, філологічного напрямів одним із важливих завдань вивчення тригонометричного матеріалу є формування уявлень про історичний розвиток тригонометрії.

Сформульовані мета і завдання вивчення тригонометричного матеріалу у профільній школі відображають основні концептуальні ідеї особистісно орієнтованого навчання, що спрямоване на розвиток гармонійної, професійно компетентної, спроможної до саморозвитку особистості (І. Д. Бех [30], С. І. Подмазін [236], В. В. Сєриков [266], А. В. Хуторський [307], І. С. Якиманська [334]).

Однією із специфічних особливостей вивчення тригонометричного матеріалу в середній школі, яка склалась історично, є його розподіл в різних математичних курсах 8, 9, 10 і 11-х класів. Відповідно до цього, у вивченні тригонометричного матеріалу можна виділити два концентри.

І. В курсі геометрії 8-9-х класів основної школи вивчаються поняття синуса , косинуса, тангенса і котангенса гострого кута прямокутного трикутника та кутів від **до , основні тригонометричні тотожності та деякі формули зведення [13, 14, 23, 235]. Цей матеріал застосовується до розв'язування трикутників. Вивчення тригонометричних величин в курсі математики основної школи має практичний характер і орієнтоване на розв'язування трикутників.**

ІІ. В курсі алгебри і початків аналізу старшої школи вивчаються: означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса кутового та числового аргументу; графіки та властивості тригонометричних функцій; тригонометричні формули; похідні та первісні тригонометричних функцій [8, 22, 328]. На цьому етапі вивчення тригонометричного матеріалу має функціональну спрямованість, тригонометричні функції поглиблюють поняття функціональної залежності величин, знання учнів збагачуються методами дослідження і застосування функцій.

За діючими програмами з математики для профільного навчання [193, 243, 244], на систематичне вивчення тригонометричного матеріалу в 10-му класі виділено різну кількість годин: найбільшу для профільного рівня і найменшу для рівня стандарту (табл. 1.1). Аналіз цих програм свідчить про збільшення загальної кількості годин на вивчення тригонометрії порівняно з програмами для профільного навчання математики минулих років [45, 245, 246].

Таблиця 1.1

Розподіл годин на систематичне вивчення тригонометричного матеріалу в 10-х класах профільної школи

Рівні вивчення математики	Профілі навчання	Кількість годин
стандарт	історичний, правовий, філософський, художньо-естетичний, спортивний та інші;	26
академічний	біолого-хімічний, біолого-фізичний, біотехнологічний, фізико-хімічний,	36

	технологічний та інші;	
профільний	математичний, фізичний, фізико-математичний.	65

У програмах рівня стандарту, академічного та профільного [193, 243, 244] розподіл тригонометричного матеріалу за класами та порядок його вивчення відносно інших тем практично однакові. Так, систематичне вивчення тригонометричного матеріалу для усіх рівнів віднесене до 10-го, похідні та первісні тригонометричних функцій – до 11-го класу. Відповідно до змісту програми з математики профільного рівня, вивчення тригонометричного матеріалу на цьому рівні має яскраво виражену теоретичну спрямованість і орієнтоване на його подальше застосування у вищій школі і майбутній трудовій діяльності. Особлива роль в програмі академічного рівня приділяється реалізації прикладної спрямованості тригонометричного матеріалу, розгляду питань, що пов'язані з описом обертального руху та гармонічних коливань за допомогою тригонометричних функцій. В програмі з математики рівня стандарту тригонометричному матеріалу надається значна виховна та загальноосвітня роль.

Процес навчання тригонометричного матеріалу ми розглядаємо з позицій системного підходу, що „ ... спрямований на розкриття цілісності об'єктів навчання, виявлення в них різних типів зв'язків і зведення в єдину теоретичну характеристику" [275, с.46]. У змісті тригонометричного матеріалу виділимо такі основні модулі: тригонометричні величини, тригонометричні функції, тригонометричні формули, обернені тригонометричні функції і тригонометричні рівняння та нерівності. У ці модулі увійшли логічно завершені частини змісту, інтегровані спільними ознаками. Виділений модуль змісту визначають змістові та процесуальні складові, які функціонують у діалектичному взаємозв'язку і пропонуються учневі для засвоєння.

Під структурою тригонометричного матеріалу будемо розуміти його модулі, їх послідовність та взаємозв'язки між ними. Структурування виражає як систему функціональних зв'язків і логічних відношень між модулями, так і особливості змісту, способи його розгортання, умови ефективного застосування у навчальному процесі.

На основі аналізу сучасних підручників з математики (як вітчизняних, так і зарубіжних) розглянемо деякі типи структур систематичного викладу тригонометричного матеріалу, що мають місце в цих підручниках:

I тип: тригонометричні величини → тригонометричні функції → тригонометричні формули → обернені тригонометричні функції → тригонометричні рівняння та нерівності [168, 211, 328];

II тип: тригонометричні величини → тригонометричні функції → тригонометричні формули → тригонометричні рівняння та нерівності → обернені тригонометричні функції [58];

III тип: тригонометричні величини→ тригонометричні формули → тригонометричні функції → тригонометричні рівняння та нерівності [3, 22, 24];

IV тип: тригонометричні величини → тригонометричні функції → тригонометричні рівняння та нерівності → тригонометричні формули [4];

V тип: тригонометричні формули → тригонометричні рівняння та нерівності → тригонометричні величини → тригонометричні функції [5].

Проаналізуємо виділені структури, розглянемо їх переваги та недоліки :

Після означення тригонометричних функцій числового аргументу, що здійснюється в межах модуля „тригонометричні величини", логічно вивчати їх графіки та властивості, що і реалізують I, II, IV і V типи структурування. Розгляд цих тем тут не розривається в часі, на відміну від III структури, в якій дослідження тригонометричних функцій здійснюється значно пізніше означень синуса, косинуса, тангенса і котангенса дійсного числа. В I, II, IV і V типах структурування при дослідженні тригонометричних функцій вчителю доводиться витрачати значно меншу кількість часу на актуалізацію відповідних опорних понять, оскільки учні тільки на попередніх уроках вивчили означення тригонометричних функцій числового аргументу.

В I, II і IV типах структур дослідження тригонометричних функцій передує вивченню тригонометричних тотожностей, на відміну від III і V типів, де тригонометричні формули вивчаються перед тригонометричними функціями. Кожен з цих підходів має як позитивні, так і негативні сторони. Вважаємо, що недоліком послідовності „тригонометричні функції → тригонометричні формули" є часовий розрив між формулюванням властивостей монотонності тригонометричних функцій та їх аналітичними доведеннями за допомогою формул додавання. Але, з іншого боку, вивчення тригонометричних тотожностей перед властивостями та графіками тригонометричних функцій (III тип) створює часовий розрив між означеннями цих функцій та їх дослідженням.

Типи структур I-V відрізняються також взаємним розміщенням ланок „тригонометричні формули" та „тригонометричні рівняння та нерівності". Так, в I, II, III і V структурах тригонометричні формули передують тригонометричним рівнянням та нерівностям, що виправдано з логічної точки зору: учні спочатку набувають навичок та вмінь тотожних перетворень тригонометричних виразів, які потім використовують при розв'язуванні тригонометричних рівнянь та нерівностей. За такого підходу з'являється можливість урізноманітнити типи та методи розв'язування тригонометричних рівнянь і нерівностей за рахунок формул додавання та їх наслідків. В III і V типах структур тригонометричні формули закріплюються на матеріалі не тільки тригонометричних рівнянь, а й та кож на матеріалі тригонометричних функцій. У IV структурі рівняння та нерівності вивчаються перед тригонометричними тотожностями, що є недоцільним з таких міркувань: тригонометричні рівняння та нерівності

розв'язуються без застосування формул додавання та їх наслідків, при цьому, рівняння і нерівності, як засіб закріплення тригонометричних формул, втрачаються. Така послідовність розгляду зазначених тем можлива лише на рівні стандарту, оскільки тут вивчаються лише найпростіші тригонометричні рівняння і ті, що безпосередньо до них зводяться. Тому в темі „Тригонометричні рівняння" практично відсутня потреба в формулах додавання та їх наслідках. З іншого боку, якщо здійснювати рівневу диференціацію навчання в цих класах, то частині учнів знадобляться формули додавання в процесі розв'язування рівнянь та нерівностей. Таким чином, вважаємо за доцільне в усіх профільних класах дотримуватись послідовності „тригонометричні формули → тригонометричні рівняння та нерівності".

В I – IV типах структур дослідження властивостей тригонометричних функцій здійснюється перед вивченням тригонометричних рівнянь, на відміну від V типу, де ці теми розглядаються у протилежному порядку. Порядок „тригонометричні рівняння → тригонометричні функції" недоцільний з таких причин:

- вивчення тригонометричних рівнянь передбачає введення обернених тригонометричних величин. В V типі структури учні спочатку вивчають поняття арксинуса, арккосинуса, арктангенса і арккотангенса числа, після чого приступають до роботи з функціями синус, косинус, тангенс і котангенс числового аргументу, що з логічної точки зору краще зробити навпаки;
- вивчення тригонометричних функцій після тригонометричних рівнянь вилучає з розгляду один із важливих методів розв'язування тригонометричних рівнянь – графічний метод (учні під час вивчення тригонометричних рівнянь не вміють будувати графіки тригонометричних функцій).

I і II типи структур відрізняються послідовністю слідування модулів „обернені тригонометричні функції" і „тригонометричні рівняння та нерівності". В традиційній шкільній методиці навчання тригонометричного матеріалу дотримано першого підходу: спочатку вивчаються обернені тригонометричні функції, а потім – тригонометричні рівняння. Ця послідовність, яка прийнята в нашому дослідженні, виправдана з таких міркувань: не створюється часовий розрив між означеннями обернених тригонометричних величин (арксинуса, арккосинуса, арктангенса і арккотангенса) і вивченням обернених тригонометричних функцій; при розв'язуванні тригонометричних рівнянь застосовуються властивості та графіки обернених тригонометричних функцій; з'являється можливість паралельного вивчення тригонометричних рівнянь, які містять основні та обернені тригонометричні функції. Другий підхід створює концентричний шлях введення обернених тригонометричних функцій: спочатку поняття арксинуса, арккосинуса, арктангенса і арккотангенса розглядаються з метою розв'язування тригонометричних рівнянь, а потім здійснюється

дослідження обернених тригонометричних функцій.

Підсумовуючи аналіз типів структур вивчення тригонометричного матеріалу, зробимо висновок, що найбільш виправданий з логічної та методичної точки зору I тип, якого доцільно дотримуватися на усіх рівнях вивчення математики. Така послідовність сприяє формуванню системності знань учнів, системному характеру їх розумової діяльності.

Розглянемо особливості змістового наповнення виділених модулів тригонометричного матеріалу.

Означення тригонометричних величин є вузловими питаннями методики навчання тригонометричного матеріалу, вони складають першу ланку структур I-IV. Аналізуючи різні шляхи побудови теорії тригонометричних функцій в науковій, навчальній та методичній літературі, можна виділити аналітичний та геометричний способи означення тригонометричних величин.

Аналітичний спосіб передбачає введення понять синуса, косинуса, тангенса і котангенса числа аксіоматично, за допомогою диференціальних рівнянь, степеневих рядів, функціональних рівнянь та ін. [28, 38, 65, 166, 254]. Аналітична побудова теорії тригонометричних функцій була започаткована Ейлером і завершена в працях Лобачевського, Гауса, Коші, Фур'є та інших вчених. Цей спосіб означення потребує застосування відомостей з математичного аналізу, які не вивчаються в школі, тому з точки зору методичних та психолого-педагогічних міркувань аналітичну побудову теорії тригонометричних функцій в середній школі реалізувати не можна. Однак, елементи аналітичної теорії тригонометричних функцій можна розглянути як матеріал елективних курсів з тригонометрії.

В середній школі прийнятий геометричний спосіб як більш простий, доступний і наочний для учнів. Існують різні варіанти геометричного означення тригонометричних величин, які сформувались історично у вітчизняній та зарубіжній навчально-методичній літературі: класичний, координатний, векторний, а також їх різні модифікації та співвідношення.

Означення тригонометричних величин за класичним способом будується на основі одиничного кола та його елементів. Прикладом цього напряму є підручник тригонометрії М. О. Рибкіна [258].

Векторний спосіб ґрунтується на застосуванні понять вектора і його проекцій на вісь (підручники тригонометрії О. Ф. Берманта, Л. А. Люстерника [27], С. І. Новосьолова [222]). З векторним способом доцільно ознайомити учнів на академічному та профільному рівнях вивчення математики, зважаючи на широке використання тригонометричного матеріалу у фізиці, техніці, різних галузях науки, де розглядаються направлені величини.

У координатному варіанті застосовується відомий учням засіб – прямокутна система координат на площині, а косинус і синус числа означаються як відношення відповідно абсциси та ординати кінця рухомого радіуса тригонометричного кола, що утворює кут з додатною піввіссю абсцис, до довжини цього радіуса. В інших модифікаціях

координатного способу замість рухомого радіуса застосовуються поняття відповідності, відображення, повороту тощо. Саме координатний спосіб означення та його модифікації реалізовані в сучасному викладі тригонометричного матеріалу в загальноосвітній школі [3, 25, 46].

В сучасних навчальних програмах з математики та більшості підручників тригонометричні функції секанс і косеканс не розглядаються. На наш погляд, ці функції варто розглянути на академічному та профільному рівнях вивчення математики, що зумовлено як логічними, так і методичними міркуваннями. Так, в класах математичних, фізико-математичних профілів збільшується обсяг та складність тотожних перетворень тригонометричних виразів, що обумовлює необхідність зведення до більш зручного вигляду дробових виразів, які мають в знаменниках синуси і косинуси. Крім того, функції секанс і косеканс зустрічаються в багатьох довідкових та енциклопедичних виданнях математичного та технічного змісту. Доцільність введення секанса і косеканса виправдана і з логічної точки зору: в прямокутному трикутнику можна скласти шість можливих відношень його сторін, тому природно розглядати шість, а не чотири тригонометричні співвідношення. Вважаємо , що в класах, де математика вивчається на академічному рівні, секанс і косеканс числа достатньо означити, а на профільному рівні доцільно розглянути властивості та графіки функцій секанс і косеканс.

У навчально-методичній літературі зустрічається різна послідовність вивчення формул додавання та формул зведення. В діючих підручниках [2, 24, 58, 168, 211-213, 328] формули зведення виводяться з формул додавання як їх часткові випадки, на відміну від підручників [8, 25, 46, 294], де формули зведення передують вивченню формул додавання. Окремі формули зведення (для аргументів і) розглядаються ще на уроках геометрії основної школи. В 10-му класі вводиться термін „формули зведення" і вивчаються всі формули зведення для чотирьох тригонометричних функцій.

Виведення формул зведення з формул додавання просте, доступне і економить час. Тому послідовність „формули додавання → формули зведення" доцільна у тих профільних класах, де загальний рівень вимог щодо умінь учнів обґрунтовувати теоретичні твердження невисокий (рівень стандарту та академічний).

Формули зведення можна отримати також на основі геометричних міркувань, які ґрунтуються на означеннях тригонометричних функцій довільного числового аргументу та властивостях симетрії відносно точки та прямої [22]. За цього підходу формули зведення обґрунтовуються незалежно від формул додавання і можуть вивчатися перед ними. Послідовність „формули зведення → формули додавання" виправдана з таких міркувань. Формулу додавання для синуса суми двох аргументів дістають з формул додавання для косинуса і формул зведення

, [328]. Останні формули вивчаються ще в курсі геометрії основної школи, але їх справедливість доведена лише для гострих кутів. Тому розгляд формул зведення перед формулами додавання можна арґументувати необхідністю узагальнення формул зведення на довільні кути та їх наступним використанням у доведеннях формул додавання. Така послідовність навчального матеріалу не порушує цілісності доведення формул додавання. На профільному рівні вважаємо за доцільне здійснити доведення формул зведення двома способами: за допомогою формул додавання і незалежно від них. Завдяки цьому учні отримують можливість співставити та порівняти розглянуті способи, з'ясувати переваги та недоліки кожного з них.

У шкільному курсі математики існує два основні методичні підходи щодо введення арккосинуса, арксинуса і арктангенса. У діючих підручниках з алгебри і початків аналізу [3, 5, 22, 46] вони вводяться як корені відповідних рівнянь , , , у підручниках [2, 168, 327, 328] – як обернені тригонометричні функції.

Перший підхід в означенні арксинуса, арккосинуса і арктангенса має практичний характер, введення цих величин орієнтоване на розв'язування тригонометричних рівнянь. Тому цей підхід доцільно реалізувати на рівні стандарту, який не передбачає вивчення властивостей та графіків обернених тригонометричних функцій.

Другий підхід демонструє важливе поняття оберненої функції, необхідне для подальшого розвитку функціональної змістової лінії курсу алгебри і початків аналізу середньої школи. На думку З. І. Слєпкань, такий підхід усуває формалізм в процесі розв'язування тригонометричних рівнянь та готує учнів до введення логарифмічної функції як оберненої до показникової [272, с.7]. Знання властивостей, графіків аркфункцій, алгебраїчних співвідношень між ними необхідне для успішного вивчення математичного аналізу, особливо для учнів, які планують вступати на математичні і фізико-математичні факультети вищих навчальних закладів . Тому, другий, функціональний підхід, прийнятний для профільного та академічного рівнів вивчення математики.

У науково-методичній літературі розглядалась пропозиція вивчати обернені тригонометричні функції відразу після означення прямих тригонометричних функцій [230, с.25]. На наш погляд, такий порядок вивчення цього матеріалу недоцільний на усіх рівнях вивчення тригонометричного матеріалу. Дійсно, початкові поняття тригонометричного матеріалу 10-го класу складні для засвоєння, що пов'язано з новизною застосовуваних підходів, великою кількістю нових означень, символів тощо. Вводити ще новий ряд понять, пов'язаних з оберненими тригонометричними функціями, з психолого-педагогічних міркувань недоцільно. Виходячи з цього, вважаємо, що розгляд обернених тригонометричних функцій має бути розділений в часі від вивчення

прямих тригонометричних функцій.

У науково-методичній літературі дискусійним є питання визначення місця вивчення тригонометричних рівнянь в системі шкільної тригонометрії. Традиційно вони розглядаються в кінці вивчення тригонометричного матеріалу як самостійний навчальний розділ. Існує думка про доцільність розв'язування тригонометричних рівнянь в різних розділах тригонометричного матеріалу, в міру розгортання його змісту, а не тільки в спеціально виділеній темі [220, 229, 261].

Вважаємо, що схема поступового вивчення тригонометричних рівнянь сприяє інтеграції та взаємопроникненню математичних знань, створює цілісну картину тригонометрії як науки. Водночас, необхідність концентрації уваги учнів на головному, систематизації основних відомостей про тригонометричні рівняння, зумовлює традиційний підхід, якого дотримано і в нашому дослідженні. Але в пропедевтичному плані найпростіші тригонометричні рівняння типу , доцільно розглянути раніше систематичного вивчення тригонометричних рівнянь. Це можна зробити в темах, що стосуються властивостей тригонометричних функцій та їх графіків.

В методичній літературі [97, 230] зустрічаються пропозиції одночасного вивчення тригонометричних рівнянь і нерівностей. Для цих тем характерні змістова аналогія, схожість методичних прийомів навчання та необхідних наочно-демонстративних засобів. На нашу думку, варіант паралельного вивчення тригонометричних рівнянь і нерівностей доцільно реалізувати на академічному рівні, зважаючи на те, що тут розглядаються лише найпростіші тригонометричні нерівності, які зручно пов'язувати з відповідними тригонометричними рівняннями. Крім того, таке структурування дозволяє економити час при вивченні теоретичного матеріалу і більше уваги приділити практиці розв'язування тригонометричних рівнянь і нерівностей.

Таким чином, мета і завдання вивчення тригонометричного матеріалу у профільній школі визначаються загальною метою і завданнями профільної математичної освіти, значенням тригонометрії в загальнокультурному, освітньому зростанні особистості учня, в науковому та практичному пізнанні навколишнього світу. Розкриття сутності провідних понять тригонометричного матеріалу має відбуватися з дотриманням таких методологічних основ розгортання навчального матеріалу, як поступовості, систематичності, дидактичного адаптування елементів знань до вікових можливостей та навчальних потреб учнів.

1.2. Диференційоване навчання як психолого-педагогічна проблема сучасної школи

Диференціація навчання належить до ключових проблем організації сучасної школи [106, 107, 164].

Проблема диференційованого навчання досліджувалась у різні роки багатьма українськими та зарубіжними психологами, дидактами, методистами. Психолого-педагогічні основи диференційованого навчання обґрунтовані у дослідженнях Ю. К. Бабанського [15, 16], В. В. Давидова [103], Є. М. Кабанової-Меллер [145], І. Я. Лернера [181], Н. О. Менчинської [196], М. М. Скаткіна [268], І. Е. Унт [298], І. С. Якиманської [333] та інших. Технологічні аспекти проблеми диференційованого навчання розглядалися у працях О. І. Бугайова [43], І. Д. Бутузова [52], А. О. Кірсанова [150], В. Ф. Моргуна [204], Є. С. Рабунського [251], І. М. Чередова [312], М. М. Шахмаєва [319] та інших.

Серед зарубіжних педагогів, які зробили вагомий внесок в розв'язання цієї проблеми, слід відмітити Г. Айзенка [341], Й. Бастіана [344], І. Берне [339], Дж. Брунера [337], Г. Гербера [342], Дж. Гудледа [343], Дж. Конанта [338], Г. Майстера [345], Л. Парадіз [346], Д. Равіча [347], М. Фішера [340], С. Френе [301]. В працях цих авторів розглядаються теоретичні основи диференціації навчання, можливості їх практичної реалізації в навчальному процесі, питання вивчення та урахування індивідуальних особливостей школярів.

В методиці навчання математики питання диференціації навчального процесу досліджували О. М. Афанасьєва [110], М. І. Башмаков [19], Я. С. Бродський [110], М. І. Бурда [49], М. А. Вайнтрауб [53], Г. В. Дорофєєв [112, 113], О. С. Дубинчук [116], Є. П. Нелін [214], О. Л. Павлов [110], З. І. Слєпкань [276], В. В. Фірсов [234, 300], Т. М. Хмара [306], В. О. Швець [322] та інші.

Аналіз наукової літератури ([40, 61, 267 та ін.]) свідчить, що існують різні тлумачення поняття „диференційоване навчання" та близьких до нього за змістом понять „диференціація навчання" та „диференційований підхід". Незважаючи на досить велику кількість досліджень проблеми диференційованого навчання як в зарубіжній, так і в українській педагогічній науці, чіткого визначення базових понять, на нашу думку, немає (додаток А).

Термін „диференціація" у перекладі з латинської мови означає розділення цілого на різні частини, форми, ознаки [267, с.170]. Г. В. Дорофєєв, Л. В. Кузнєцова, С. Б. Суворова, В. В. Фірсов [112] під диференціацією навчання розуміють таку систему навчання, при якій кожен учень опановує деякий мінімум загальноосвітньої підготовки, що є загальнозначущою, та забезпечує можливість адаптації до життєвих умов, які постійно змінюються, одержує право й ґарантовану можливість приділяти увагу переважно тим напрямам, які відповідають його нахилам.

Диференційоване навчання більшість науковців розглядає як форму організації навчання, що спрямована на створення сприятливих умов для розвитку учнів і передбачає вивчення їх індивідуальних особливостей та виділення на цій основі груп учнів класу з метою пред'явлення

диференційованих вимог до засвоєння навчального матеріалу за рівнями. Диференційоване навчання генетично передбачає спрямованість на особистість учня. Паралельно із суміжним поняттям „індивідуалізація навчання”, диференційоване навчання інтерпретується як підхід, принцип, концепція і технологія [101, с.86].

Розрізняють два основні види диференційованого навчання: за рівнями вимог (рівнева диференціація) і за змістом (профільна диференціація).

Перший вид передбачає, що учні, навчаючись в одному класу, за однією програмою і підручником, отримують право і можливість засвоювати навчальний матеріал на різних рівнях. Визначальним при цьому є рівень мінімально необхідної підготовки, який повинні досягти усі учні класу. Цей рівень утворює основу для формування більш високих рівнів засвоєння матеріалу. Рівнева диференціація є важливим фактором індивідуалізації навчання, і передбачає умовний розподіл учнів на типологічні групи за різними ознаками (здібностями, інтересами, навченістю тощо), варіативність темпу вивчення матеріалу, визначення характеру та міри педагогічної допомоги.

Значний внесок в розробку теорії рівневої диференціації навчання математики зроблено Г. В. Дорофєєвим [112], А. М. Капіносовим [148], Л. В . Кузнєцовою [112, 174], І. А. Лур’є [137], В. М. Монаховим [163, 203], В. О. Орловим [163], З. І. Слєпкань [274], Р. А. Утєєвою [299], В. В. Фірсовим [300].

У педагогічній теорії та практиці рівнева організація навчальної діяльності учнів визначається такими аспектами: 1) вивчаються індивідуальні особливості учнів і на цій основі виділяються типологічні групи; 2) впроваджуються такі організаційно-управлінські заходи: визначається час здійснення диференціації; послідовність її застосування; здійснюється добір дидактичного матеріалу; визначається характер навчання; добираються диференційовані навчальні завдання; варіюються методи корекції, контролю та оцінювання навчальних досягнень учнів [165, с.41].

Другий вид диференціації передбачає навчання учнів різних навчальних можливостей за програмами, підручниками, які відрізняються за об’ємом, глибиною теоретичних узагальнень, змістом навчального матеріалу. Цей вид диференціації лежить в основі профільного навчання. Профільне навчання є основним способом організації диференційованого навчання в старшій школі і передбачає „ ... об’єднання учнів у відносно стабільні групи, де навчання проходить за особливими програмами, що відрізняються змістом, вимогами до знань і умінь учнів” [253, с.11]. Профільна диференціація створює умови для навчання і професійного самовизначення учнів, враховує їх освітні потреби, нахили та здібності.

Проблеми профільної диференціації у навчанні математики розглядаються у працях В. Г. Болтянського [36], М. І. Бурди [49], Г. Д. Глейзера [36], Ю. М. Колягіна [159], Ф. М. Рафікової [253], Г. І. Саранцева

[263], З. І. Слєпкань [273, 276], С. Б. Суворової [112], М. В. Ткачової [159], Н. Є. Фьодорової [159], О. С. Чашечникової [309, 310] та інших науковців. В цих дослідженнях розглядаються різні аспекти диференціації, наприклад, шляхи формування змісту профільного навчання математики, особливості організації навчальної діяльності учнів профільних класів, контроль та оцінювання їх навчальних досягнень, прикладні застосування шкільного курсу математики.

В педагогічній літературі розглядались поняття внутрішньої та зовнішньої диференціації навчання [223, 332], які за своїм змістом досить близькі до сучасних понять рівневої та профільної диференціації навчання.

Під внутрішньою диференціацією навчання розуміють навчання дітей в гетерогенних класах, яке передбачає варіативність темпу вивчення матеріалу, диференціацію навчальних завдань, визначення характеру і міри допомоги з боку вчителя [332].

В. М. Монахов, В. О. Орлов, В. В. Фірсов під зовнішньою диференціацією навчання розуміють „ ... створення на основі певних принципів (інтересів, нахилів, здібностей ...) відносно стабільних груп учнів, в яких зміст освіти і навчальні вимоги до учнів відрізняються” [203, с.43]. Зовнішня диференціація навчання означає направлену спеціалізацію освіти відповідно до індивідуальних можливостей та потреб учнів і передбачає функціонування спеціальних класів та шкіл, в яких зміст та організація навчання суттєво відрізняються.

А. В. Фурман, аналізуючи процеси навчальної диференціації з позицій системного підходу, розглядає їх у двох площинах: вертикальній і горизонтальній. „Диференціація за вертикаллю фіксує організаційно-управлінські рівні членування єдиного культурно-освітнього простору і змінюється шляхом адміністративного втручання ... диференціація за горизонталлю зачіпає глибинні чинники і механізми педагогічної взаємодії, сутнісний зміст освітньої діяльності вчителя, його професійний досвід і творчий потенціал” [303, с.44].

В соціально-педагогічному аспекті А. В. Фурман виділяє такі рівні диференціації освітнього простору: посоціальна, пошкільна, покласна, внутрішньокласна, індивідуалізоване навчання. В психолого-дидактичному аспекті він розглядає таку послідовність організації навчального процесу: диференціація навчально-виховних цілей і завдань, змісту і навчально-засобового забезпечення освіти, організаційних форм і способів навчального процесу, педагогічних технологій, навчальних методик і прийомів, результатів навчальної діяльності учня й учителя [303, с.45].

В. Г. Моторіна виділяє три основні аспекти диференціації: врахування індивідуальних особливостей учнів; групування учнів на основі цих особливостей; варіативність навчального процесу в групах [208, с.98].

В психолого-педагогічній та методичній літературі висловлюється думка про доцільність поєднання та взаємодоповнення різних видів диференціації навчання. Так, в основній школі пріоритетною є рівнева диференціація, а в старшій школі, де здібності та інтереси учнів чітко визначені, провідною стає профільна диференціація. Положення про об'єктивну необхідність та доцільність рівневої диференціації у профільних класах обґрунтовується багатьма науковцями, зокрема, О. Л. Болотовою [35], Т. Б. Захаровою [136], О. О. Пєсцовою [228], Ф. М. Рафіковою [253], Рональдом де Гротом [256], З. І. Слєпкань [273], В. О. Чистяковою [313].

Так, на думку З. І. Слєпкань „в процесі реалізації профільної диференціації ... рівнева диференціація має не менше значення, ніж в звичайних класах, оскільки і серед учнів профільних та спеціалізованих класів є учні з різним рівнем навченості і математичного розвитку" [273, с. 30]. Цієї точки зору дотримується також А. П. Самодрин, який вважає, що профільне навчання „ ... містить внутрішньопрофільну диференціацію навчання на кількох рівнях освіти" [260, с.78]. Він вводить поняття „профільно-диференційоване навчання", під яким розуміє диференційоване навчання в профільній школі [260, с.83].

Я. С. Фруктова пропонує модель триєдиної диференціації навчання, яка передбачає співіснування різних напрямів та форм диференціації (рівнева, профільна диференціація, факультативні заняття), їх доцільне поєднання [302, с.141].

Наші дослідження у профільних класах різних напрямів підтверджують висновки про відносну гетерогенність цих класів: учні відрізняються за рівнями навченості, розвитку математичних здібностей, темпом засвоєння навчального матеріалу, працездатністю, впливом зовнішніх чинників (соціально-економічних, сімейних тощо). Таким чином , в профільних класах необхідна рівнева диференціація, яка, зокрема, передбачає виділення типологічних груп учнів та організацію навчальної роботи, що максимально адаптована до їх пізнавальних особливостей.

Узагальнюючи вищесказане, зазначимо, що під диференційованим навчанням у профільній школі будемо розуміти таку форму організації навчання, яка характеризується врахуванням індивідуально-типологічних особливостей учнів, що об'єднані у відносно гомогенні групи (профільні класи) з метою максимальної реалізації їх природних здібностей, особистісного розвитку та забезпечення ефективного засвоєння нового матеріалу. Диференційоване навчання спрямоване на особистість учня, який здійснює діяльність учіння, опановує, в міру своїх можливостей, нові знання та розв'язує посильні завдання, а також будує навчальні та професійні плани на майбутнє.

Навчання має двосторонній характер, в якому процеси викладання та учіння тісно взаємопов'язані та взаємозалежні. Викладання – це „діяльність учителя в навчальному процесі, яка передбачає постановку мети співпраці з учнем і її реалізацію" [202, с.631]. Учіння – „діяльність учня, результатом якої є знання, уміння, навички, способи діяльності, готовність до самостійного навчання" [202, с.654].

Навчаюча діяльність вчителя передбачає організацію та планування учіння, визначення його цілей, завдань, змісту, способів та засобів здійснення. У процесі учіння відбувається вивчення суб'єктивно нового для учня, формування тих мисленнєвих та практичних дій, якими він до цього часу не володів. Взаємодія вчителя та учнів у процесі диференційованого навчання відбувається з урахуванням пізнавальних відмінностей між групами учнів та окремими учнями профільного класу (відмінності психічних процесів відчуття, сприймання, мислення, уяви, пам'яті), індивідуально-психологічних особливостей особистості (темперамент, здібності, характер). Результатом цієї взаємодії є засвоєння навчального матеріалу на різних рівнях, розвиток особистих якостей та мотиваційної сфери школяра.

Згідно тлумачного словника сучасної української мови поняття „вивчення" означає дію за значенням слів „вивчити" або „вивчати", тобто „навчаючись, набувати певних знань, відомостей у якій-небудь галузі; опановувати щось", „запам'ятовувати, засвоювати матеріал", „старанно ознайомлюючись, спостерігаючи, намагатися збагнути, зрозуміти кого- або що-небудь, зробити певні висновки" [130, с.76]. Дія „навчати" означає „передавати комусь знання, вміння, досвід тощо; учити, просвіщати", „готувати до певної діяльності" [130, с.297].

Таким чином, під диференційованим вивченням математики, зокрема тригонометричного матеріалу, у профільній школі будемо розуміти процес учіння, спрямований на різнорівневе засвоєння учнями профільного класу навчального матеріалу відповідно до їх пізнавальних можливостей, інтересів, професійних планів.

В сучасній психолого-педагогічній літературі поняття „засвоєння" розглядають в процесуальному аспекті і як результат навчально-пізнавальної діяльності учнів. В дослідженнях В. П. Беспалька [29], І. Я. Лернера [181], М. І. Махмутова [194], В. Ф. Паламарчук [227], М. М. Скаткіна [109] пропонуються різні схеми побудови рівнів засвоєння знань. Для оцінки результату засвоєння тригонометричного матеріалу виділимо чотири рівні засвоєння, взявши за основу класифікацію В. П. Беспалька [29, с.55]: догматичний, алгоритмічний, евристичний та творчий рівні.

Догматичний рівень характеризує здатність учня розпізнавати, розрізнювати інформацію на основі повторного її сприймання. На цьому рівні учень відтворює знання без істотних змін відносно їх сприймання (відтворення фактів, правил).

Алгоритмічний рівень засвоєння передбачає оперування знаннями в стандартних ситуаціях, здійснення способів діяльності за зразком. Цей рівень умовно називають рівнем „репродукції", а відповідні знання – „знаннями-копіями".

На евристичному рівні учень застосовує знання в новій для нього ситуації, яка „схожа" на типову. Евристичний рівень передбачає елементи дослідницької діяльності, яка дає змогу звести певне навчальне завдання до відомого.

Творчий рівень дозволяє переносити знання і способи діяльності в нетипові ситуації і відповідає творчій діяльності. Крім фактологічних знань, цей рівень передбачає оволодіння операційними знаннями про математичні методи, способи навчальної діяльності, самостійне формулювання та розв'язування проблем.

Процес вивчення тригонометричного матеріалу здійснюється шляхом поступового просування по рівнях, від найнижчого (догматичного) до найвищого (творчого), та визначається індивідуальністю учня. Варто зауважити, що найвищий темп просування по рівнях засвоєння навчального матеріалу з математики характерний для учнів класів математичних та фізико-математичних профілів.

Диференційоване навчання необхідно здійснювати не тільки за рахунок відмінностей змісту та обсягу профільних навчальних програм, а й за рахунок варіативності в методах отримання знань, в системі пропонованих учням задач. Знання, які отримує учень, мають включати оволодіння математичними методами дослідження, загальнонавчальними уміннями, алгоритмічними та евристичними прийомами навчальної діяльності. Диференціація передбачає широкий діалог вчителя та учня, що породжує нові думки, гіпотези, проблеми та способи їх розв'язання. Диференційоване навчання має бути засобом підтримки віри учня у власні сили.

На основі науково-педагогічного аналізу останніх публікацій та досліджень ([31, 63, 183, 233, 273, 276, 310, 326] та ін.) виділимо найбільш важливі проблеми та завдання диференційованого навчання математики у профільній школі.

Проблема відбору змісту математичної освіти в умовах диференційованого навчання є однією з найважливіших. Питання змістової диференціації навчання математики відображені в багатьох педагогічних дослідженнях, зокрема у працях Я. С. Бродського [42], М. І. Бурди [49], Г. В. Дорофєєва [114], Т. В. Крилової [170], Л. І. Нічуговської [219], О. Л. Павлова [42], М. В. Працьовитого [242], Т. М. Хмари [306], В. О. Швеця [323].

Основу змісту освіти у профільній школі утворює особистість учня з її запитами, можливостями, інтересами та планами на майбутнє. Так, одним з головних напрямів оптимізації змісту освіти А. П. Самодрин вважає відповідність його рівнів психологічному п'ятикомпонентному коду особистості, побудованому в межах п'яти основних відносин („людина-людина", „людина-природа", „людина-техніка", „людина-художній образ", „людина –знакова система"), можливість вибору змісту навчання учнем [247, с.61].

На думку М. І. Бурди, і ми її поділяємо, поглиблений, прикладний та загальнокультурний курси математики повинні мати різну інформаційну та інтелектуальну ємність, діагностико-прогностичну спрямованість та соціальну ефективність [49, с.3]. Вони мають відрізнятися не стільки об'ємом знань, якими повинні оволодіти учні, скільки рівнем

обґрунтованості та загальності.

Концепція профільного навчання в старшій школі [164] визначає три основні змістові блоки у загальній структурі профільного навчання: базовий (інваріантна складова), профільний і елективний (варіативна складова).

Інваріантний компонент змісту навчання математики покликаний забезпечити середню загальноосвітню математичну підготовку учнів та створити умови для оволодіння ними мінімумом математичних знань, умінь і навичок, що необхідні для продовження освіти. Виокремлення базового змісту визначається існуючими стандартами математичної освіти [107], які виражають державні вимоги до загальноосвітньої підготовки учнів.

Варіативний компонент змісту навчання математики дозволяє диференціювати математичну підготовку школярів та враховувати особисті навчальні інтереси, запити, можливості кожного учня (індивідуалізувати навчальний процес). Цей компонент враховує плани учня щодо майбутньої професії і забезпечує загальнокультурну, прикладну та теоретичну спрямованість математичної освіти відповідно до профілю.

Таким чином, засвоєння змісту математики у профільній школі має, по-перше, забезпечувати загальноосвітню підготовку учнів, по-друге – їх підготовку до майбутньої професійної діяльності. Тому критерії відбору змісту математичної освіти у загальноосвітніх закладах з профільним навчанням повинні поєднувати вимоги профільної спрямованості та стандарту загальної середньої освіти, відображати різний обсяг навчального матеріалу, способи його упорядкування, ступінь узагальнення знань, співвідношення між теоретичними та емпіричними знаннями.

Однією з сучасних тенденцій формування змісту математичної освіти є зменшення питомої ваги його інформаційної складової, що виражає перехід від знаннєво орієнтованої до особистісно орієнтованої освіти. Відповідно до принципу фундаменталізації освіти навчання має бути не лише способом отримання знань, а й засобом озброєння школярів методами здобуття нових знань, самостійного формування навичок та вмінь. Це обумовлює необхідність зменшення кількості формул, зокрема тригонометричних, які учні повинні засвоїти на рівні відтворення. В першу чергу, слід формувати вміння застосовувати формули, користуючись відповідною навчальною та довідковою літературою. Розвантаження інформаційної складової змісту забезпечується також за рахунок зменшення технічної складності перетворень виразів, зокрема тригонометричних виразів, при спрощенні, розв'язуванні рівнянь, нерівностей та їх систем.

Однією з ефективних форм організації рівневої диференціації навчання є групова навчальна діяльність, необхідною умовою якої є поділ учнів на типологічні групи (гомогенні та гетерогенні). Відповідно до цього, постають проблеми вивчення індивідуальних особливостей учнів,

організації групової навчальної роботи, її ефективне поєднання з індивідуальною та фронтальною формами навчання. Ці питання досліджуються в працях багатьох науковців, зокрема В. М. Букатова [44], Т. І. Дейніченко [104], Х. Й. Лііметса [182], Т. М. Ніколаєвої [218], К. Ф. Нор [224], О. І. Пометун [238], І. М. Чередова [312], О. Г. Ярошенко [335].

Для розподілу учнів в типологічні групи психологи і педагоги виділяють різні ознаки: здібності, пізнавальні інтереси, навченість, научуваність, темп навчання та інші (додаток Б). Єдиного підходу до визначення основ типологічного групування у вчених-дослідників не виявлено. Його, на наш погляд, і не може бути, зважаючи на різноманітність умов навчання школярів (міська, сільська, однокомплектна школа, класи різних профілів), матеріально-технічну базу навчального закладу, можливості школи щодо здійснення психодіагностики, рівень професіоналізму педагогічних кадрів.

В психолого-педагогічній літературі представлені типології як звичайних загальноосвітніх класів, так і класів, що сформовані з учнів, які мають високі [167, 179, 185] та незначні [71, 209, 249, 270] здібності до навчання. Однак, недостатньо досліджень з проблем типологічного групування учнів профільних класів.

Зауважимо, що не дивлячись на те, що рівнева диференціація навчання в наш час знайшла досить широке застосування в практиці загальноосвітньої школи, відношення педагогів до цього виду диференціації залишається неоднозначним. Цінність рівневої диференціації полягає в тому, що вона створює умови для розв'язання протиріччя між існуючими індивідуально-типологічними відмінностями учнів і орієнтацією процесу навчання на „середнього" учня. З іншого боку, вважається негуманним поділ класу на групи, це призводить до зниження мотивації „слабких" учнів, приниження їх гідності, руйнування класних колективів [264, с.80].

І. М. Осмоловська [226] до проблем профільного навчання відносить, зокрема, те, що диференціація навчання уповільнює розвиток адаптаційних механізмів особистості, оскільки відбувається пристосування навчального процесу до індивідуальних особливостей учня, а не навпаки; створюються нерівні стартові можливості для дітей в житті; в профіль ному класі виникають проблеми виховного характеру, пов'язані із створенням колективу, в якому звичайно зібрані амбіційні сильні особистості, які хворобливо сприймають невдачі і перебувають з іншими дітьми у відносинах суперництва.

Для учнів профільних класів характерне неоднозначне відношення до тригонометрії: одні розглядають її як складний, незрозумілий та нецікавий розділ математики, інші люблять тригонометричний матеріал, із задоволенням досліджують тригонометричні функції та перетворюють громіздкі тригонометричні вирази. Крім того, учні суттєво відрізняються навчальними можливостями, що необхідні для розуміння та засвоєння тригонометрії (математичними здібностями, темпом навчання, особливостями пізнавальних психічних процесів тощо). Тому ефективна організація вивчення тригонометричного матеріалу можлива лише на різних рівнях за умови диференціації усіх ланок навчального процесу та орієнтації на варіативність особистісних пізнавальних характеристик учнів. Диференційоване навчання тригонометричного матеріалу має відбуватись як на рівні профільної школи (зумовлене навчально-пізнавальними відмінностями між учнями профільних класів), так і на рівні профільного класу (зумовлене навчально-пізнавальними відмінностями між учнями в межах профільного класу).

Розглянемо особливості організації диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу на різних рівнях (стандарту, академічному та профільному), знання яких дає змогу встановити відповідність змісту та організації процесу навчання пізнавальним можливостям та потребам учнів, цілеспрямовано керувати їх навчальною діяльністю.

Серед учнів, які вивчають математику на рівні стандарту (суспільно-гуманітарний, філологічний, художньо-естетичний та спортивний напрями), значна частина – це учні з невисокими математичними здібностями. Процес вивчення математики на цьому рівні зорієнтований на загальнокультурний розвиток учнів, розширення та поглиблення їх наукового світогляду, формування логічного, образного мислення. Вивчення тригонометричного матеріалу на рівні стандарту передбачає інтеграцію математичних та гуманітарних знань учнів, їх ознайомлення з гуманітарним потенціалом тригонометрії. Зміст та специфіка навчання математики в класах гуманітарного профілю розглядаються у працях багатьох дослідників, зокрема Г. П. Бевза [24], М. І. Бурди [47], В. В. Малиновського [265], Ю. І. Мальованого [45], Є. Є. Семенова [265], Л. Г. Шестакової [325], в дисертаційних роботах Н. А. Єлізарової [117], Т. С. Жданової [126], С. В. Іванової [142], І. В. Кузьмінової [176], О. Є. Хвостенко [305].

Існує думка, що математика як навчальний предмет учням-гуманітаріям не потрібна [72, 159]. На наш погляд, ця думка глибоко помилкова, зважаючи на роль математики в прогресі суспільства вцілому і функції, які виконує шкільна математична освіта в розвитку індивідуальних якостей особистості. Математика – незамінний засіб розвитку логічного мислення, формування таких властивостей мислення як критичність, узагальненість, здатність до аналізу і синтезу. Для учнів, майбутніх письменників, істориків, соціологів, важливі такі якості мовлення, як лаконічність, чіткість, обґрунтованість, які виховуються саме математикою. Тому включення математики в число базових навчальних предметів відповідає сучасним тенденціям розвитку науки та суспільства і є необхідною умовою загального розвитку особистості учня.

Під час вивчення математики на рівні стандарту доцільне застосування пояснювально-ілюстративних, практичних, наочних методів навчання, а також життєвого досвіду учнів. До провідних методів навчання тригонометричного матеріалу на цьому рівні належать

спонукальні (зацікавлення, заохочення, дискусії), які сприяють формуванню позитивних мотивів навчання, стимулюють учнів до самостійного здобування знань, заохочують до подолання труднощів у навчанні. Функції спонукальних методів навчання реалізуються, зокрема, шляхом використання відомостей з історії тригонометрії, її практичних застосувань, елементів філософських узагальнень у формі епіграфів, висловлень класиків.

Система роботи вчителя математики повинна бути спрямована, в першу чергу, на досягнення учнями базових результатів навчання як передумови для подальшого навчання і розвитку. Цьому сприяє відповідність змісту, обсягу і темпу опрацювання тригонометричного матеріалу навчальним можливостям учнів.

Необхідною умовою засвоєння тригонометричного матеріалу на базовому рівні є оволодіння основними теоретичними відомостями (базові знання) і вміння їх застосовувати в стандартних ситуаціях (базові навички та уміння). Засвоєнню базових знань сприяє застосування прийому багаторазового пояснення, який створює оптимальні умови для сприйняття і запам'ятовування нового матеріалу учнями, що мають різні темп навчання, навченість, научуваність та інші навчальні характеристики. У процесі формування базових навичок та умінь значну увагу слід приділити тренувальним вправам.

Важливою на рівні стандарту є робота по усуненню прогалин в знаннях з метою підготовки учнів до ефективного засвоєння нового матеріалу. Підготовчі вправи належать до основних засобів цієї роботи. Вони дають змогу здійснити актуалізацію базових знань, виявити труднощі в процесі засвоєння, а також активізувати пізнавальну діяльність учнів.

Несформованість загальнонавчальних дій є однією з причин слабкої успішності учнів з математики. Зусилля вчителя мають бути спрямовані на активне формування навичок та умінь учнів організації власної навчальної роботи (як класної, так і домашньої), самостійного виконання завдань, самоконтролю та самооцінки учіння. Крім того, важливо формувати в учнів почуття впевненості, бажання долати труднощі у навчальній роботі.

Важлива особливість організації вивчення тригонометричного матеріалу на рівні стандарту – широке використання геометричних образів, наочних моделей, зображень. Учні повинні навчитися „бачити" геометричну інтерпретацію тригонометричних величин та пояснювати їх властивості з геометричної точки зору.

Якість засвоєння теоретичного матеріалу значно зростає в результаті його змістової та операційної реорганізації, що включає такі дії: акцентування уваги учнів на основних (базових) поняттях, твердженнях, формулах; чітка структуризація теоретичного матеріалу; створення правил-орієнтирів, інструкцій, алгоритмів, які полегшують засвоєння; подрібнення, деталізація теоретичних питань, засвоєння яких викликає

труднощі; наочне відображення теоретичного матеріалу у формі опорних конспектів.

Опорним конспектом будемо називати такий стислий запис навчальної інформації з допомогою символів та малюнків, який допомагає учню розуміти та запам'ятовувати теоретичний матеріал, будувати самостійні міркування. Важливо, що учні, користуючись опорним конспектом, вчаться відокремлювати головне, суттєве, від другорядного. Короткий опорний запис теоретичного матеріалу створює умови для поетапного формування знань на основі поступового перекодування природної словесної мови на математичну.

Опорний конспект варто складати разом з учнями протягом вивчення певного блоку теоретичного матеріалу. Різнорівневість математичної підготовки учнів реалізують два типи опорних конспектів (додаток В). Конспекти першого типу фіксують основні поняття, факти, твердження без будь-якого їх теоретичного обґрунтування. Конспекти другого типу містять елементи доведень і призначені для учнів з підвищеною успішністю з математики.

На рівні стандарту знижується загальний рівень строгості обґрунтувань математичних тверджень у традиційному його розумінні. Частина з них вивчається без строгого доведення на основі використання конкретних прикладів та наочних ілюстрацій. Однак, повністю відмовлятись від доведень не слід, зважаючи на незаперечну педагогічну цінність доведень для усвідомлення методів математики, формування логічного, абстрактного мислення. Тригонометричний матеріал містить достатню кількість тверджень, доведення яких цілком доступне для учнів, що вивчають математику на рівні стандарту. Наприклад, до таких тверджень належать: основні співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу, формули зведення, формули подвійного аргументу. Учнів, які можуть засвоювати тригонометричний матеріал на вищих рівнях, необхідно спонукати до строгих доведень в більш широкому обсязі.

На рівні стандарту важливого значення набуває систематичний аналіз результатів навчальної діяльності учнів шляхом надання всім формам контролю діагностуючого характеру. Вчитель повинен знати „сильні" і „слабкі" сторони в знаннях учня, виявляти домінуючі в даний момент причини його неуспішності. У відповідності з даними діагностики здійснюється коригування діяльності учнів з різною успішністю, надається диференційована допомога, що сприяє усуненню прогалин в знаннях, виробленню навичок саморегуляції дій.

Питання навчання математики на академічному рівні розглядаються в дисертаційних дослідженнях А. В. Буслаєва [51], О. В. Іванової [139] (хіміко-біологічний профіль), Л. О. Мамикіної [190] (технічний профіль), П. І. Самсонова [262] (природничо-науковий профіль), Ю. М. Ткач [292] (економічний профіль) та інших.

В курсі математики академічного рівня, який спрямований на забезпечення гармонійного розвитку образного і логічного мислення учнів, особлива увага приділяється з'ясуванню ролі математики в сферах її застосувань. Насамперед це означає, що учні повинні оволодіти навичками математичного моделювання. Саме такий вид діяльності має бути головним у навчанні майбутніх інженерів, технологів, конструкторів, механіків, природознавців тощо. Досягти цього можна за рахунок раціонального поєднання строгості і доступності викладання тригонометричного матеріалу, а також його прикладної спрямованості.

На академічному рівні увагу слід приділити прикладним задачам як основним засобам реалізації прикладної спрямованості навчання тригонометричного матеріалу. Розв'язування прикладних задач реалізує принцип зв'язку теорії з практикою, демонструє значення тригонометрії для вирішення наукових, виробничих та життєвих проблем. У профільних класах, де математика вивчається на академічному рівні, прикладні задачі доцільно застосовувати на всіх етапах навчального процесу: з метою мотивації вивчення нової теми, концентрації уваги учнів на її практичній значимості, створення проблемної ситуації у процесі засвоєння нових знань , закріплення теоретичного матеріалу на цікавому та доступному для учнів матеріалі, а також на етапі контролю.

На думку Л. А. Липової, важливою специфікою методів навчання у класах природничих профілів є їх розвивально-дослідницька функція, тобто всі методи, які застосовує вчитель, мають бути спрямовані на розвиток дослідницьких умінь учнів [184, с.9]. Математичні лабораторні роботи слід віднести до ефективних методів формування цих умінь, вони є джерелом самостійного з'ясування ознак, закономірностей, формулювання теоретичних висновків. В процесі лабораторної роботи учні виконують такі практичні дії: обчислювальні (табличні, інструментальні та графічні обчислення); вимірювальні (вимірювання елементів моделей, технічних деталей); графічні (побудова графіків функцій, графічне розв'язування рівнянь, нерівностей); виготовлення моделей, таблиць, схем, інших наочних посібників.

Для здійснення диференціації навчання в завданнях лабораторної роботи доцільно виділити основну і додаткову частини. Остання призначена для тих учнів класу, які швидко та якісно виконують практичні дії, активно і з зацікавленням займаються експериментальною та дослідницькою роботою (додаток Д.1).

Особливістю організації вивчення тригонометричного матеріалу на академічному рівні є доцільність та можливість широкого використання міжпредметних зв'язків математики та фізики. Міжпредметні зв'язки тригонометричного матеріалу з фізикою ми розглядаємо як дієвий засіб формування наукового світогляду учнів, систематизації та інтеграції їх знань. До організаційних форм реалізації міжпредметних зв'язків належать інтегровані уроки. Уроки цього типу приваблюють учнів своєю неординарністю та новизною, активізують їх відчуття, сприймання,

практичні дії (додаток Д.2).

Аналіз відповідної психолого-педагогічної літератури, результати нашого педагогічного експерименту свідчать, що переважна більшість учнів, які вивчають математику на профільному рівні, – здібні та обдаровані з математики школярі. Для них характерні порівняно високі розумові здібності, велика працездатність, вміння самостійно працювати, міцність та швидкість запам'ятовування математичної інформації.

Проблеми навчання математики в класах математичних, фізико-математичних профілів, з поглибленим вивченням математики досліджуються в працях багатьох дидактів та методистів, зокрема І. М. Антипова [140], М. Л. Галицького [67], Н. Я. Віленкіна [58], О. С. Івашева-Мусатова [140], А. М. Колмогорова [158], І. Л. Нікольської [198], С. І. Шварцбурда [320], в дисертаційних дослідженнях О. О. Галаніної [66], Г. В . Дідик [111], В. М. Козири [156], П. І. Самовола [259], М. В. Таранової [289]. Як і в кожному класі, учні цих класів відрізняються математичними здібностями та інтересами, тому необхідно, щоб навчальне навантаження кожного учня відповідало його індивідуальним можливостям. Це досягається шляхом рівневої диференціації, варіативності змісту, вимог, допомоги з боку вчителя.

Організація вивчення тригонометричного матеріалу на профільному рівні має враховувати підвищені інтереси учнів до математики, їх високі пізнавальні потреби та математичні здібності. Разом з тим, робота з розвитку математичних здібностей повинна носити диференційований характер відповідно до індивідуально-психологічних особливостей учнів.

До основних засобів розвитку математичних здібностей учнів ми відносимо нестандартні задачі (цікаві, підвищеної складності, олімпіадні). Задачі цього типу сприяють розвитку самостійності та логічності мислення, уяви та уваги, вихованню волі. Розв'язуючи їх, учні набувають навичок творчої діяльності, отримують суб'єктивно нові результати, що підвищує їх зацікавленість математикою. Поряд із розв'язуванням нестандартних задач, найбільш здібним учням у процесі дослідження пропонувалися також завдання на їх конструювання. Складання нестандартних задач – об'єктивно складне завдання, посильне далеко не для всіх учнів навіть класу математичного профілю. Вчитель повинен ви являти та залучати до цієї роботи найбільш здібних учнів з метою подальшого розвитку евристичних прийомів їх мислення, винахідливості та неординарності.

Порівняно з класами інших профілів, у класах математичного та фізико-математичного профілів математичні поняття вводяться на більш високому теоретичному рівні, наголошується на їх логічній структурі, дотримується більш строга логіка викладу. У цих класах доцільне і необхідне широке застосування методів проблемно-розвивального навчання, які диференціюються відповідно до навчальних можливостей учнів.

Процес вивчення математики учнями класів математичних та фізико-математичних профілів характеризується інтенсивною самостійною роботою, що має диференційований характер. Ця робота може здійснюватись на різних рівнях залежно від етапу засвоєння нового матеріалу (сприймання, розуміння, застосування, узагальнення та систематизація), навчальних можливостей учнів та складності завдання. На наш погляд, доцільно виділити три основні рівні самостійної роботи учнів класів математичного та фізико-математичного профілів:

перший рівень (основний): самостійна робота має відтворюючий, репродуктивний характер, що проявляється у самостійному опрацюванні навчального матеріалу за підручником, самостійному розв'язуванні типових завдань; рівень сформованості навичок самопланування та самоконтролю низький;

другий рівень (підвищений): уміння учня самостійно отримувати нові знання проявляється у самостійному доведенні окремих тверджень, складанні алгоритмів, формулюванні та поясненні правил. Але ці дії виконуються під контролем вчителя, який визначає детальний план самостійної роботи учня, умови і засоби її здійснення. В процесі самостійного розв'язування задач новий матеріал застосовується в змінених умовах (порівняно з типовими), які передбачають елементи продуктивної діяльності. Самопланування та самоконтроль навчально-пізнавальної діяльності здійснюються учнем епізодично, іноді без врахування всіх аспектів навчального завдання;

третій рівень (високий): цей рівень характеризується спрямованістю учня на самостійний пошук нових знань, їх відбір, аналіз, структурування та самостійне засвоєння. Частина теоретичних тверджень доводиться учнем самостійно без будь-якої допомоги. Нові знання самостійно застосовуються для розв'язування задач та вправ, що потребують творчого підходу Готовність до самостійного подолання труднощів формується на основі власних цільових установок. Використовуються різноманітні форми самопланування та самоконтролю.

Лекційно-практична система є однією з найбільш ефективних форм організації навчального процесу на профільному рівні вивчення математики. Викладання на лекціях теоретичного матеріалу великими блоками з використанням методу укрупнення дидактичних одиниць дає змогу економити час і більше уваги приділяти формуванню умінь розв'язувати нестандартні задачі.

Однією з форм роботи з найбільш здібними учнями класів математичного та фізико-математичного профілів є їх підготовка до олімпіад, інтелектуальних змагань з математики шкільного, міського та вищих рівнів. Таким учням доцільно доручати підготовку дидактичних матеріалів до уроків, проводити окремі їх етапи, здійснювати поточну перевірку теоретичних знань, практичних навичок та умінь решти учнів класу. Ефективними засобами поглиблення та розширення знань цих учнів є написання ними наукових робіт, захист „власних" способів

розв'язування задач. „Слабкі" учні, які вивчають математику на профільному рівні, із задоволенням беруть участь в підготовці шкільної математичної газети, проведенні класних та шкільних математичних турнірів, допомагають вчителю в оформленні кабінету математики.

Таким чином, організація диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу в курсі алгебри і початків аналізу профільної школи характеризується такими особливостями:

рівень стандарту: тригонометричний матеріал розглядається як необхідний компонент загальної культури сучасної людини; зниження загального рівня строгості теоретичних обґрунтувань; змістова та операційна реорганізація теоретичного матеріалу; застосування пояснювально-ілюстративних, наочних методів навчання; орієнтація учнів на досягнення базових результатів навчання; збільшення частки підготовчих, тренувальних вправ; здійснення роботи по усуненню прогалин в знаннях учнів; врахування труднощів у навчальній роботі учнів; надання всім формам контролю діагностуючого характеру;

академічний рівень: раціональне поєднання строгості та доступності викладу; підвищена увага до формування засобами тригонометрії навичок математичного моделювання; широке застосування міжпредметних зв'язків тригонометрії з шкільними навчальними предметами; проведення математичних лабораторних робіт та інтегрованих уроків; розв'язування прикладних задач із застосуванням тригонометрії;

профільний рівень: врахування підвищеного інтересу учнів до вивчення математики; високий теоретичний рівень викладу; збільшення частки диференційованої самостійної роботи учнів; розв'язування нестандартних задач з тригонометрії як засіб розвитку математичних здібностей учнів; застосування лекційно-практичної системи навчання.

1.3. Психолого-педагогічні передумови диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу

Диференційоване навчання математики ґрунтується на фізіологічних та психологічних особливостях розвитку особистості учня, які проявляються в здібностях, типах вищої нервової діяльності, психічних процесах, в емоційно-вольовій сфері. Психологічні основи диференційованого навчання обґрунтовані у працях Г. О. Балла [17, 232], П. П. Блонського [32], Л. С. Виготського [64], Ю. З. Гільбуха [70, 71], К. М. Гуревича [100], В. С. Мерліна [197], П. С. Перепелиці [17, 232], В. А. Крутецького [172], В. В. Рибалки [255], Б. М. Теплова [291], А. В. Фурмана [304], І. С. Якиманської [333] та інших науковців.

Теоретичною основою нашого дослідження є діяльнісний підхід до процесу навчання, ефективність якого доведена у працях О. М. Леонтьєва [180], С. Л. Рубінштейна [257], Д. Б. Ельконіна [119]. Згідно діяльнісного підходу, формування особистості учня і її розвиток здійснюється не тоді, коли він сприймає готові знання, а в процесі його власної діяльності, що направлена на „відкриття” нових знань. Тому основним механізмом реалізації цілей і завдань диференційованого навчання тригонометричного матеріалу має бути включення учня в активну навчально-пізнавальну діяльність.

Особливості різнорівневої навчальної діяльності учнів розкривають дослідження С. І. Шапіро, які констатують, що учні з високим рівнем математичного розвитку можуть тривалий час займатися математикою без значного зменшення швидкості навчальних дій, в той час як для учнів з обмеженими математичними здібностями характерна підвищена втомлюваність [316, с.96].

На думку М. І. Бурди, у навчальній діяльності учнів профільних класів переважають емпіричні (чуттєво-предметні) або теоретичні (раціональні) узагальнення [49, с.4]. Справді, в учнів математичних, фізико-математичних профілів домінують теоретичні узагальнення, які харак теризуються засвоєнням системи узагальнених знань і способів діяльності, відшуканням у фактах і явищах істотних зв'язків і відношень, їх вираженням у вигляді загальних ідей та понять. У навчальній діяльності учнів класів гуманітарного профілю провідну роль відіграють емпіричні узагальнення: засвоєння матеріалу шляхом аналізу чуттєво-предметних його властивостей, сходження від одиничних фактів до загальних, упорядкування знань на наочно-інтуїтивній основі за їхніми зовнішніми ознаками.

Тригонометричний матеріал – вагомий засіб формування алгоритмічних прийомів навчальної діяльності (за З. І. Калмиковою [147, с .40]), оволодіння якими необхідне для учнів будь-якого профілю навчання. Наприклад, формування за допомогою тригонометрії алгоритмічних обчислювальних навичок складає основу практичних видів діяльності майбутніх інженерів, економістів, соціологів.

Особливе місце в структурі навчально-пізнавальної діяльності займає мотивація, під якою розуміємо „ ... сукупність зовнішніх і внутрішніх умов , що викликають активність суб'єкта і визначають її” [279, с.259]. Тригонометричний матеріал має значний мотиваційний потенціал, який полягає в його широкому застосуванні в математиці та суміжних з нею науках, в орієнтації змісту на різнорівневу діяльність учнів (репродуктивну, пошукову, творчу), а також в естетичному багатстві. Ці характеристики у взаємодії з іншими мотиваційними факторами (майбутня трудова діяльність, пізнавальні інтереси, особистісне самоствердження) здійснюють суттєвий стимулюючий вплив на старшокласників, активізуючи процеси засвоєння знань. Різноманітність інтересів, потреб, особистісних орієнтацій учнів зумовлює необхідність диференційованого підходу до процесу формування мотивації учіння [81].

Основна ідея у формуванні мотивації учіння старшокласників з низькою успішністю з математики полягає в їх переведенні з рівнів негативного і байдужого до свідомих та дієвих форм позитивного відношення до навчання. Серед мотивів навчання здібних учнів важливого значення набувають такі: прагнення розвинути здібності, розширити та поглибити знання, бажання бути першим. Значний мотиваційний ефект у профільному класі, де математика вивчається на рівні стандарту, створює історія тригонометрії, її естетичний потенціал. Для підвищення мотивації учіння на академічному та профільному рівнях важливо наголошувати на професійній, освітній значимості тригонометричного матеріалу, перспективі його застосування в подальшому навчанні. Ці способи мотивації створюють сприятливі умови для руху особистості учня по її індивідуальній навчальній траєкторії в опануванні тригонометричним матеріалом.

Під час вивчення тригонометрії важливу роль відіграють властивості пам’яті старшокласника, адже йому доводиться запам’ятовувати значну кількість тригонометричних формул, табличні значення тригонометричних функцій, способи та прийоми розв’язування тригонометричних рівнянь. Тому вчитель повинен розв’язати важливе педагогічне завдання, яке полягає у встановленні правильного співвідношення пам’яті та логічного мислення учня. На наш погляд, учень має пам’ятати тільки основні тригонометричні формули, а допоміжні формули виводити шляхом логічних міркувань. Справа навіть не в тому, скільки формул пам’ятає учень, а в тому, як він уміє ними користуватися.

Дослідження психологів (М. К. Акімова [1], П. П. Блонський [32], М. П. Задесенець [131], І. С. Кон [160], С. Д. Максименко [188]), наші спостереження свідчать, що старшокласники характеризуються індивідуальними відмінностями пам’яті, які проявляються у швидкості, точності, міцності запам’ятовування, готовності до відтворення, в її типах. Р. Бендлер і Дж. Гріндер [9, с.74] поділяють учнів на кінестетиків, аудіалів та візуалів, залежно від типу ведучої репрезентативної системи, яка визначає різновид пам’яті і забезпечує кодування та збереження інформації . Вони відмічають, що учні з високою успішністю, крім ведучої, володіють ще додатковою репрезентативною системою збереження інформації, в чому і полягає причина їх успіхів у навчанні. Учні, які мають труднощі у навчанні, не використовують додаткових систем внаслідок недостатнього розвитку, тому їм не вистачає часу для перетворення навчальної інформації.

У профільних класах присутні представники всіх вищерозглянутих типів пам’яті, які потребують неоднакових форм та методів роботи з ними. Так, в навчанні учнів з розвиненою наочно-образною пам’яттю (візуали) доцільно більшою мірою використовувати наочні методи, засоби зорової наочності. Учнів, в яких переважає моторна пам’ять, частіше інших слід викликати до дошки для запису нових термінів, символів, в їх навчанні

ефективні практичні методи. Старшокласникам з розвиненим словесно-абстрактним типом пам'яті (аудіали) імпонують словесні методи навчання , таких учнів частіше слід залучати до формулювання правил, коментування ходу розв'язування задач. Водночас, потрібно також розвивати ті типи пам'яті, які не належать до ведучих.

Аналіз психолого-педагогічної літератури, результати педагогічного експерименту свідчать, що здібні до математики учні володіють узагальненою математичною пам'яттю. Вони зберігають інформацію узагальнено, незалежно від конкретних властивостей об'єктів, які вивчаються. Такі учні, не пам'ятаючи теорем та формул, знають їх функціональні образи, які забезпечують ефективне відтворення цих об'єктів [269, с.137]. Особливості пам'яті на математичний зміст учнів з невисокими математичними здібностями полягають в тому, що вони запам'ятовують конкретний зміст навчального матеріалу, а не способи, методи та закономірності, які він містить.

Успішність вивчення математики, зокрема тригонометричного матеріалу, тісно пов'язана з рівнем розумового розвитку учня, сформованістю таких якостей його мислення як самостійність, послідовність, логічність. Тригонометричний матеріал є потужним засобом розвитку специфічно математичних типів мислення – функціонального та графічного, що відіграють важливу роль в життєдіяльності сучасної людини.

Особливостями розумової діяльності старшокласників є самостійність та критичність мислення, уміння не лише глибоко сприймати навчальний матеріал, а й давати оцінку здобутим знанням, переконуватися у їх вирогідності. П. П. Блонський писав, що старші класи – „епоха мислення, що міркує" [32, с.108]. М. П. Задесенець зазначає, що „ ... мислення старшокласника поступово набуває диференційованої спрямованості, стає проблемним". І далі: „Це особливо помітно у вивченні природничих і гуманітарних предметів, коли учень навчається мислити методом даної науки, йде за логікою її побудови і розвитку" [131, с.205]. В учнів проявляються значні індивідуально-типологічні відмінності у процесах мислення, в якості розуму, в характері зв'язку окремих компонентів розумової діяльності. Ці відмінності досліджуються в працях психологів, педагогів, науковців, зокрема Д. М. Богоявленського [33], Є. М. Кабанової-Меллер [145], З. І. Калмикової [146], Н. О. Менчинської [196], Б. М. Теплова [291].

Згідно теорії поетапного формування розумових дій П. Я. Гальперіна і Н. Ф. Тализіної, процес формування розумової дії включає такі основні етапи: ознайомлення учнів з орієнтувальною основою дії (ООД), формування цієї дії в матеріальному, зовнішньомовному, внутрішньомовному вигляді, формування внутрішньої, розумової дії [288, с.105]. Учні з невисокими математичними здібностями потребують максимальної деталізації ООД, процес проходження вказаних етапів відбувається у них повільно. У навчанні таких учнів оптимальний другий

тип орієнтування, який формує алгоритмічний стиль діяльності і є пере думовою розвитку творчого мислення. Саме цей тип орієнтування ефективний для оволодіння предметними навичками та уміннями, усунення прогалин в знаннях. Учні з високими математичними здібностями здатні самі створювати ООД, скорочувати і навіть пропускати проміжні етапи формування дії. Для таких учнів доцільний третій тип орієнтування, який передбачає глибокий аналіз навчальної ситуації, самостійне складання узагальнених орієнтирів у формі алгоритмів, схем тощо. Цей тип орієнтування сприяє розвитку теоретичного мислення і відповідає підвищеним навчальним можливостям і потребам учнів профільних класів.

В. А. Крутецький відмічає, що для здібних з математики учнів характерні мислення згорнутими структурами, гнучкість розумових процесів, здібність до швидкого і вільного переключення з прямого на обернений хід думки. Такі учні на всіх етапах розв’язування задачі здійснюють розумову операцію узагальнення. Учні з середніми здібностями з математики будують свої міркування розгорнуто, строго виконують усі вказівки алгоритму. В них спостерігається дуже слабкий зв’язок між прямою і оберненою діями, взаємно оберненими поняттями, причому з часом він швидко зникає [172].

Але і серед здібних з математики учнів проявляються індивідуальні відмінності в розвитку мисленнєвих операцій, в характеристиках розумової діяльності. Так, П. М. Маланюк [99, с.107] зазначає, що індивідуальність побудови головного мозку призводить до того, що в кожного школяра можуть бути різними варіації компонентів в індивідуальних структурах математичних здібностей. Відповідно до цього, розрізняють різні типи складу математичного мислення: аналітичний (або абстрактно-математичний), геометричний (або образно-математичний) і гармонійний (поєднання абстрактного і образного типів).

Як свідчать наші спостереження, основними недоліками в знаннях учнів тригонометричного матеріалу є формалізм, слабка логічна підготовка, відсутність навичок тотожних перетворень. Окремі учні в процесі розв’язування вправ не звертають увагу на множину значень аргументу, для яких має зміст тригонометрична формула або тотожність. Увага, в основному, звертається на формально-оперативні уміння, часто опускається такий важливий момент, як рівносильність тригонометричних перетворень. Психологічно учням важко усвідомити означення тригонометричних величин, що суттєво відрізняються від звичних для них означень понять, які вивчалися в попередніх класах.

О. Г. Мордкович, досліджуючи методичні проблеми вивчення тригонометричного матеріалу в загальноосвітній школі [205], зазначає, що більшості підручників властивий один і той самий недолік – недооцінювання важливості вивчення моделі „одиничне коло” і дуже швидке введення понять синуса і косинуса за цим колом. Це призводить до накладання двох труднощів: незвична модель (одиничне коло) і незвичний спосіб означення функцій (наприклад, синус як залежність між дійсним числом та абсцисою відповідної точки одиничного кола). Тому в значної частини учнів виникають труднощі з геометричним трактуванням основних компонентів „тригонометричної мови”. На думку автора, і ми її підтримуємо, слід розділити вказані труднощі і виділити одиничне коло в самостійний об’єкт вивчення.

С. А. Владімірцева [60] вважає, що труднощі під час вивчення тригонометричного матеріалу в школі виникають через наявність двох наочних моделей, з допомогою яких розглядаються питання тригонометрії. Наприклад, синус і косинус означаються за допомогою одиничного кола, а тригонометричні рівняння та нерівності розв’язуються із застосуванням графіків тригонометричних функцій. На нашу думку, зазначені труднощі можна попередити, якщо в процесі розв’язування найпростіших тригонометричних рівнянь та нерівностей увагу приділити обом моделям – як одиничному колу, так і графікам тригонометричних функцій.

Вважаємо, що використання наочності під час засвоєння тригонометричного матеріалу особливо важливе, бо геометричні образи лежать в основі означень тригонометричних функцій. Одиничне коло та графіки тригонометричних функцій, як основні наочні моделі тригонометричного матеріалу, слід не протиставляти, а взаємодоповнювати у процесі пізнання.

Широкі можливості для диференціації навчання у профільному класі створює типологічне групування учнів, яке дозволяє більш ефективно організувати процес засвоєння тригонометричного матеріалу на різних рівнях. В ході експериментального дослідження здійснювався поділ учнів профільних класів на гомогенні типологічні групи двох типів: ситуаційні та умовно постійні.

Склад та кількість ситуаційних груп визначалися безпосередньо на уроці в процесі фронтальної роботи класу (під час багаторазового пояснення, фронтального розв’язування задач) і змінювалися залежно від типу уроку, складності теми, змісту та характеру завдань. Наприклад, в процесі фронтального розв’язування типових задач частина учнів, які зрозуміли цей матеріал, утворює першу ситуаційну групу. Цій групі пропонуються завдання для самостійної роботи. З рештою учнів класу продовжується фронтальна робота до утворення наступної ситуаційної групи. Ситуаційні групи особливо ефективні при вивченні математики на рівні стандарту, де підвищена необхідність у фронтальній формі навчання.

Умовно постійні групи формувались за результатами психолого-педагогічної діагностики навчальних характеристик учнів на початку систематичного вивчення тригонометричного матеріалу. В класах, які вивчають математику на профільному рівні, доцільно застосувати два основні критерії диференціації: математичні здібності та навченість. На рівні стандарту та академічному типологічне групування учнів ми здійснюємо на основі критеріїв навченості та загальних розумових здібностей.

Навченість – це фонд наявних знань, навичок і вмінь, які здобуті учнем в процесі навчання. Рівень розвитку навченості старшокласників ми ототожнювали з їх успішністю і визначали на основі аналізу підсумкових оцінок з математики за 9-й клас і результатів діагностичної контрольної роботи. Було виділено чотири рівні навченості: незадовільний „нз” (0-3 балів), задовільний „з” (4-6 балів), достатній „д” (7-9 балів), відмінний „в” (10-12 балів). Слід зауважити, що два перші рівні навченості (незадовільний і задовільний) для учнів, які вивчають математику на профільному рівні, нехарактерні.

Загальні розумові здібності характеризують якість здійснення мисленнєвих операцій, рівень пізнавальних та творчих можливостей учня. До загальних розумових здібностей відносяться здібності узагальнювати, аналізувати навчальний матеріал, виділяти його логічну структуру, творчо мислити. Очевидний взаємозв’язок загальних та математичних здібностей: чим вище розвинені загальні розумові здібності, тим більше передумов ефективної математичної діяльності учня, успішного оволодіння ним математичними знаннями та методами. Наші спостереження свідчать, що в учнів, які вивчають математику на рівні стандарту та академічному, загальні розумові здібності варіюються досить широко, що свідчить про їх різні потенційні можливості щодо вивчення математики. Математичні нахили та здібності цих учнів, що розвинені на певних рівнях (вцілому невисоких), потребують закріплення і подальшого формування. Таким чином, загальні розумові здібності доцільно обрати критерієм типологічного групування на академічному рівні та рівні стандарту.

Для діагностики загальних розумових здібностей застосовувалась тестова психодіагностична методика – шкільний тест розумового розвитку (ШТРР [304, с.196]). На думку авторів цього тесту, він дає змогу визначити рівень вербального інтелекту учня, з’ясувати, як формується в нього повноцінне світосприйняття. Сфера застосування тесту включає систему диференціації та індивідуалізації навчання, розробку загальних та індивідуальних психокорекційних програм розумового розвитку учнів. Тест визначає чотири рівні загальних розумових здібностей: низький (Н), середній (С), високий (В), дуже високий (ДВ).

Серед можливих співвідношень навченості та загальних розумових здібностей виділимо характерні комбінації цих критеріїв і такі, які рідко, але зустрічалися в процесі діагностики (табл. 1.2). За результатами психодіагностики формувалися чотири умовно постійні типологічні групи: Г1, Г2, Г3 і Г4.

Таблиця 1.2

Типологічне групування учнів профільних класів

Співвідношення критеріїв	Типологічні групи			
	Г1-М1	Г2-М2	Г3-М3	Г4-М4
Профільні класи, які вивчають математику на рівні стандарту або академічному				

Характерні	в-ДВ в-В д-ДВ	д-В д-С	з-С з-В	з-Н нз-Н
Нехарактерні	–	в-С	нз-ДВ	нз-С
Профільні класи, які вивчають математику на профільному рівні				
Характерні	в-ВС в-ПВ	д-ВС д-ПВ	д-СР	–
Нехарактерні	–	в-СР	з-СР	з-НЗ

Учні групи Г1 відрізняються дуже високим або високим розумовим розвитком та гарною успішністю з математики (достатня або відмінна), вони потребують реалізації власних пізнавальних здібностей та неординарної цікавої навчальної роботи.

Групу Г2 утворюють, здебільшого, учні, які досягли достатньої успішності. Частина з них має потенційні можливості навчатися краще за рахунок високих розумових здібностей. Ці учні мають сконцентрувати увагу на самомотивації, самоорганізації та самодисципліні. Решта учнів групи Г2, які відрізняються більшою старанністю, потребують тренувань в інтелектуальній сфері.

Учням, яких ми відносимо до групи Г3, притаманні задовільний рівень оволодіння програмним матеріалом та слабко сформовані способи навчальної роботи. Досягненню кращих результатів у навчанні таким учням заважають прогалини в засвоєнні попереднього навчального матеріалу.

Г4 є групою підвищеної педагогічної уваги, яка звичайно об’єднує учнів з незадовільною або задовільною навченістю та слабким розвитком мисленнєвих процесів, що створює серйозні труднощі в учінні. Такі учні найбільшою мірою потребують індивідуального підходу та корекційної роботи.

Для учнів класів математичних, фізико-математичних профілів характерний підвищений інтерес до вивчення математики, що обумовлений різними причинами: природно заданими нахилами до математичної діяльності, необхідністю вступу до вищого навчального закладу, перспективами оволодіння омріяною професією та іншими соціально-економічними, педагогічними та особистісними чинниками. На фоні загальної математичної спрямованості в таких класах наявні значні індивідуальні відмінності в математичних здібностях учнів, які проявляються в здатності узагальнювати математичний матеріал, логічно мислити, в обчислювальних здібностях тощо. Водночас слід зауважити, що загальний рівень математичної підготовки та математичних здібностей учнів таких класів достатньо високий.

Здійснювана нами діагностика рівнів математичних здібностей ґрунтується на психологічних дослідженнях В. А. Крутецького та С. І. Шапіро [172, 317]. Основні методи нашого дослідження – це аналіз процесу та результату розв’язування експериментальних задач учнями різного рівня розвитку математичних здібностей, а також спостереження за різними видами їх навчальної діяльності на уроках математики. Експериментальній оцінці підлягали структурні компоненти математичних здібностей: 1) формалізація математичного матеріалу; 2) здатність до узагальнення; 3) мислення згорнутими структурами; 4) оберненість мисленнєвого процесу; 5) логічність міркувань; 6) гнучкість мислення.

Деякі прийоми для діагностики рівнів розвитку компонент математичних здібностей, які застосовувалися в процесі дослідження, наведені в додатку Е. Рівень розвитку кожної з них оцінюємо за 4-бальною шкалою: низький – 1, середній – 2 , підвищений – 3, високий – 4 бали.

Загальна кількість балів, яку отримав учень, визначає рівень його математичних здібностей: низький (НЗ) – 6-10, середній (СР) – 11-15, підвищений (ПВ) – 16-20, високий (ВС) – 21-24 бали.

Отримані оцінки рівнів розвитку математичних здібностей учнів та їх навченості складають основу для формування умовно постійних типологічних груп (табл. 1.2). При формуванні груп ми брали також до уваги і взаємовідносини учнів: спільна робота може зблизити учнів і покращити їх успішність.

До першої групи М1 відносимо учнів з підвищеними або високими математичними здібностями і відмінною навченістю. Учні цієї групи, володіючи високими рівнями математичної техніки і здібностей, здатні творчо засвоювати навчальний матеріал, успішно розв'язувати олімпіадні завдання, готові самостійно поповнювати свої знання математичними відомостями з різних інформаційних джерел. Координаційна та оцінювальна функції вчителя в цій групі пріоритетні.

Для другої групи М2 характерні підвищені або високі математичні здібності і достатня навченість. Ці учні кмітливі, творчі та здібні до математики особистості, з цікавими та неординарними ідеями. Вони потребують удосконалення практичних навичок та умінь, більшої самодисциплінованості та самоорганізації.

Третя типологічна група М3 звичайно об'єднує учнів з середніми математичними здібностями і достатньою навченістю. Для учня цієї групи характерне переважання навченості над здібностями, що свідчить про такі якості його особистості як старанність, самодисциплінованість, бажання вчитися і покращувати свої результати. Робота вчителя в цьому випадку має бути спрямована, в першу чергу, на розвиток структурних компонентів математичних здібностей.

Четверта група М4, що об'єднує учнів з низькими математичними здібностями, нехарактерна для класів, де математика вивчається на профільному рівні і, як правило, не утворюється.

Зауважимо, що будь-який поділ учнів носить умовний статичний характер і не відображає всієї сукупності індивідуальних особливостей учня. Умовно постійні типологічні групи – нестійкі утворення, в процесі навчання вони змінювалися за рахунок переходу окремих учнів з одних груп в інші відповідно до їх навчальних досягнень.

Робота умовно постійних типологічних груп організовувалась на етапах закріплення, поглиблення та систематизації знань. Групам пропонувались завдання, диференційовані за рівнями складності, об'ємом, мірою допомоги. В процесі їх розв'язування учні отримували можливість дискутувати, обговорювати способи виконання завдань, перевіряти відповіді.

Таким чином, до психолого-педагогічних передумов диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу ми відносимо врахування в навчальному процесі особливостей навчальної діяльності учнів, їх мотиваційної сфери, пізнавальних психічних процесів, використання наочності, діагностику індивідуальних та групових відмінностей за рівнями сформованості важливих для навчання якостей, типологічне групування учнів. Ці чинники, відображаючи різноманітність особистісних психологічних характеристик старшокласників, суттєво впливають на процес та результат учіння.

1.4. Методичні вимоги до організації диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу учнями профільної школи

Диференційоване навчання тригонометричного матеріалу включає дві взаємопов'язані складові: діяльність вчителя, який навчає, та діяльність учня, який навчається. Ефективність процесів учіння значною мірою залежить від педагогічної майстерності вчителя, його математичної та загальної культури. Питання професійної підготовки майбутніх учителів математики, створення та удосконалення методичних систем навчання математики розглядаються у працях багатьох сучасних дослідників та математиків-методистів: Г. П. Бевза [26], М. І. Бурди [48], А. В. Грохольської [98], М. І. Жалдака [121], Г. О. Михаліна [199-201], В. Г. Моторіної [207], М. В. Працьовитого [241], О. І. Скафи [269], О. В. Співаковського [281], Н. А. Тарасенкової [290], Ю. В. Триуса [296], М. І. Шкіля [329], Н. М. Шунди [331], С. Є. Яценко [98] та інших.

Важлива задача вчителя, який здійснює диференційоване навчання, полягає у виділенні рівнів вимог до засвоєння тригонометричного матеріалу відповідно до профілю та орієнтація на безумовне досягнення всіма учнями профільного класу базового рівня математичної підготовки.

Базовий рівень вимог визначається мінімальним обсягом знань та способів діяльності, що необхідні для подальшого вивчення шкільного курсу математики, розуміння та засвоєння основних теоретичних відомостей, виконання найпростіших практичних дій з математичними об'

єктами, а також для більш глибокого засвоєння матеріалу на вищих рівнях. У діючій системі оцінювання за дванадцятибальною шкалою цьому рівню, на наш погляд, має відповідати середній рівень навчальних досягнень (4, 5 або 6 балів).

Базовий і вищі рівні вимог найкраще конкретизувати системами еталонних задач, які презентують вимоги до математичної підготовки учнів на кожному рівні. Ці системи для різних рівнів вивчення математики мають відрізнятися за кількістю, складністю, змістом, характером пропонованих завдань і відображати особливості профільного навчання математики. Важливо, щоб рівні вимог були відкритими для учнів: на початку вивчення теми вони мають отримати перелік завдань до кожного рівня та критерії їх оцінювання. Кожен учень самостійно обирає рівень засвоєння відповідно до своїх навчально-пізнавальних можливостей і потреб, причому йому постійно надається можливість працювати на більш високому рівні. Таким чином, учень може працювати на максимальному рівні, що визначається зоною його найближчого розвитку, або на необхідному мінімумі, який забезпечує можливість подальшого навчання (принцип Мінімаксу) [253, с.16].

Шкільна практика свідчить, що значна частина вчителів недооцінює значення формування опорних навичок та умінь учнів, що представлені в базовому рівні вимог. В результаті відбувається накопичення прогалин в знаннях учнів, які заважають їм повноцінно працювати на вищих рівнях. Відсутність базових елементарних навичок та умінь є перешкодою творчої ініціативи та пізнавальної самостійності учня. Тому уміння розв'язувати задачі базового рівня має бути першочерговою вимогою до учня будь-якого профілю та рівня вивчення математики. Формування зазначених умінь слід проводити на окремому етапі уроку або на окремому уроці з розв'язування задач базового рівня.

Профільна та рівнева диференціація навчання математики передбачає адекватну диференціацію змісту навчального матеріалу, що є одним з головних компонентів методичної системи.

У змісті тригонометричного матеріалу виділимо три складові: теоретичну, прикладну і гуманітарну. Теоретична складова змісту представляє його понятійний апарат, означення, формули, твердження, а також застосування теоретичних знань на практиці. Особливістю цієї складової змісту тригонометричного матеріалу є велика кількість формул, з якими учні повинні оперувати на різних рівнях. Прикладна складова включає застосування тригонометричного матеріалу в професійній діяльності людини, в техніці, до розв'язування прикладних задач та задач міжпредметного змісту. За допомогою тригонометричних функцій виражається залежність шляху від часу в різноманітних коливних процесах, записуються закони оптики, моделюються криволінійні рухи. Знання тригонометричного матеріалу необхідні при вивченні геометрії, географії, астрономії, фізики та інших шкільних предметів. Гуманітарна складова змісту спрямована на формування загальної культури учня, його

естетичний розвиток, виховання відчуття гармонії навколишнього світу. Ця складова включає елементи історії тригонометрії, зв'язки тригонометрії з гуманітарними сферами науки та культурою. Тригонометричні функції яскраво демонструють властивості симетрії-асиметрії об'єктів природи, мистецтва, життя людини. Тригонометрія як наука багата історією свого зародження, розвитку та занепаду, вона становить вагому складову загальнолюдської історії.

В класі будь-якого профілю навчання кожна складова обов'язково має бути присутня, але в різному обсязі. Так, в класі математичного, фізико-математичного профілю пріоритетного значення набуває теоретична складова, фізичного, технологічного профілів – прикладна, філологічного, історичного профілів – гуманітарна складова змісту. На наш погляд, гуманітарні складові змісту тригонометричного матеріалу на профільному та академічному рівнях мають бути приблизно однакові; теоретична складова на рівні стандарту – значно меншого обсягу, ніж на академічному рівні; прикладна складова, що є домінуючою на академічному рівні, повинна переважати на профільному рівні порівняно з рівнем стандарту [129].

У змісті тригонометричного матеріалу, який вивчається в 10-му класі, нами виділені такі змістові модулі (див. п.1.1.): тригонометричні величини, тригонометричні функції, тригонометричні формули, обернені тригонометричні функції, тригонометричні рівняння та нерівності. Розділимо кожен з цих модулів на три змістові блоки за критерієм обов'язковості вивчення: базовий, поглиблений та додатковий. Змістові блоки для різних рівнів вивчення математики відрізняються інформаційним наповненням, обсягом та складністю.

Базовий зміст обов'язковий для засвоєння всіма учнями класу, він складає основу подальшого вивчення математики. В межах базового змісту доцільно виділити змістове „ядро" – основні поняття, факти, твердження, що належить засвоїти учням будь-якого профілю навчання, тобто ядро складає спільну частину базових змістів для усіх профілів. Наприклад, до змістового ядра модуля „Тригонометричні функції" належать такі поняття та твердження: тригонометричні функції числового аргументу ,
, , , їх графіки та основні властивості.

Питання поглибленого змісту стосуються тих учнів, які мають підвищені навчальні можливості, цікавляться математикою і мають бажання поглиблювати та розширювати свої знання (додаток Ж.1). Слід зауважити, що базовий і поглиблений блоки змісту звичайно визначаються навчальними програмами з математики.

Додатковий зміст тригонометричного матеріалу (додаток Ж.2) відображає інтереси та запити учнів різного рівня математичного розвитку та здібностей. Він вивчається в позаурочний час та на елективних курсах і не є обов'язковим для опрацювання всіма учнями. Додатковий зміст вчитель добирає, керуючись інтересами, потребами та навчальними можливостями учнів.

Учень обирає певну кількість додаткових запитань із пропонованого переліку і опрацьовує їх самостійно в позаурочний час, одержуючи за необхідності консультацію вчителя. Вивчаючи додаткові питання з тригонометрії, не передбачені програмами та підручниками, учень стає справжнім суб'єктом процесу навчання, адже він визначає мету своєї роботи, обирає її форми і методи, темп навчання. Форми опрацювання додаткового змісту різноманітні: математичне дослідження, виконання проекту, написання рефератів, творчих робіт, розв'язування індивідуальних завдань, які перевіряються і оцінюються вчителем на уроках-семінарах, уроках узагальнення і систематизації знань, уроках - проектах. Окремим питанням додаткового змісту присвячені елективні курси.

Зміст тригонометричного матеріалу, який додатково пропонується на профільному рівні, має забезпечувати наступність вивчення математики в школі та вузі, створювати передумови вивчення вищої математики. Ці вимоги реалізують, наприклад, такі питання: означення тригонометричних функцій за допомогою степеневих рядів, системи аксіом [65, 221], тригонометричні функції від комплексного аргументу [221], поліноми Чебишева [10, 221], гіперболічні та обернені гіперболічні функції [282, 324]. Розвитку математичних здібностей учнів сприяють додаткові питання, які звертаються до їх ерудиції, кмітливості та винахідливості.

Проектуючи додатковий зміст для академічного рівня вивчення математики, особливу увагу слід приділити техніці обчислень, формуванню навичок та вмінь здійснювати наближені, графічні, інструментальні обчислення. Формуванню практичної компетентності учнів сприяють задачі фізики, техніки, геодезії, які передбачають моделювання за допомогою тригонометрії явищ та процесів навколишнього світу.

Додатковий зміст тригонометричного матеріалу на рівні стандарту складають питання історії тригонометрії, її світоглядного значення, ролі тригонометричних знань в розвитку наукової думки. Для учнів ці питання доступні, цікаві та корисні, адже вони взаємопов'язані з предметами гуманітарного циклу, наприклад, історією, філософією, мовознавством.

Про велику освітню та виховну роль використання історизмів у навчанні математики говориться у працях багатьох відомих математиків, методистів, науковців: В. Г. Бевз [20, 21], В. М. Брадіса [38], Л. М. Вивальнюка [57], Г. І. Глейзера [73], М. Я. Ігнатенка [57], А. М. Колмогорова [157], К. А. Малигіна [189], Г. О. Михаліна [199], Т. С. Полякової [237], А. Г. Конфоровича [162] та інших. Так, „ … використання матеріалів з історії розвитку математики … формування в учнів погляду на математику як на складову загальнолюдської культури" В. Г. Бевз розглядає як засоби оновлення курсу шкільної математики, її гуманізації [20, с.3].

Таким чином, маємо таку структурну схему змістової диференціації тригонометричного матеріалу (рис. 1.1). Аналіз компонентного складу

Рис.1.1. Структурна схема змістової диференціації тригонометричного матеріалу.

змісту тригонометричного матеріалу дає можливість встановити змістові елементи, домінуючі для даної категорії учнів, виявити особливості змістової диференціації навчання. Складові змісту здійснюють профільний розподіл акцентів, при цьому зміст розглядається як педагогічна модель соціального замовлення, елемент загальнолюдської культури, інструмент професійної діяльності випускника школи, а також як засіб наукового світопізнання. Змістові блоки відображають орієнтацію диференціації навчання на особистісні характеристики учнів, які в міру своїх можливостей та потреб самостійно обирають глибину та обсяг матеріалу для засвоєння.

Диференційоване навчання зумовлює необхідність вибору адекватних профілю форм та методів роботи, які мають відповідати віковим, індивідуальним особливостям учнів, їх навчальним можливостям. У процесі дослідження диференціація форм та методів навчання здійснювалась залежно від профілю (профільна) та на рівні класу (рівнева).

На думку С. П. Бондар, О. А. Глушко, Л. В. Мінко, провідні функції методів навчання у профільній школі – спонукальна, мотиваційна, освітня, пошуково - розвивальна, дослідницько - розвивальна, комунікативна [248, с.48]. А. Сологуб пропонує креативний підхід у профільному навчанні старшокласників, головна особливість якого полягає у створенні умов для формування в учнів творчої самосвідомості як основи самоорганізації і самовдосконалення та стилю активної дослідницької діяльності [247, с.133]. Н. В. Нємова зазначає, що в профільній школі необхідні зміни в технології навчання: перехід до технологій, які більш повно враховують вікові особливості і потреби учнів старшого шкільного віку: особистісно орієнтовний характер навчання, варіативність, надання учням права вибору, збільшення об’єму самостійної роботи [216, с.27].

Слід відмітити, що у старших класах будь-якого профілю зростає роль самостійної роботи учнів, самопланування та самоконтролю учіння, продуктивних методів пізнавальної діяльності. Тригонометричний матеріал містить велику кількість формул, табличних значень тригонометричних функцій та аркфункцій, які учні повинні пам’ятати і вміти обґрунтовувати, тому репродуктивний метод навчання не втрачає свого значення у класі будь-якого профілю навчання. Основною методичною вимогою до цього методу має бути свідоме запам’ятовування і відтворення тригонометричного матеріалу, а не його автоматичне заучування.

Особливості розумової діяльності здібних до математики учнів зумовлюють використання методів проблемного навчання: дослідницького, евристичного, методу проблемного викладу знань. Для учнів, які вивчають математику на рівні стандарту, важливо вміти відшукати матеріал з різних джерел, обробити його та систематизувати, а також висловити власну думку, підтримати дискусію, тобто активізувати комунікативну функцію методів навчання.

Крім загальної орієнтації на методи роботи у профільному класі, вчителю необхідно враховувати навчальні можливості учнів різних типологічних груп класу. З цією метою вчитель повинен диференціювати методи навчання в ме жах класу і прагнути до збільшення кількості учнів, в роботі з якими можна застосовувати пошукові методи і метод самостійної роботи. Ми підтримуємо думку П. І. Сікорського, що „ ... для дітей зі слабкими потенційними розумовими силами найбільш дієвою є така структура методу, яка впливає на оптимальне число чуттєвих аналізаторів і максимально спричинює взаємодію вчителя і учнів (бесіда, метод вправлянь). Для здібних і обдарованих учнів доцільно поєднувати економні пасивні методи (лекція, розповідь) з евристично-дослідними активними (проблемний виклад, евристична бесіда тощо) методами” [267, с.16].

Пропонована нами методика тематичного планування вивчення тригонометричного матеріалу передбачає застосування на профільному рівні елементів лекційно-практичної системи навчання, яка включає такі типи уроків як лекції, практикуми, колоквіуми, заліки тощо. Особливістю системи уроків на академічному рівні є проведення інтегрованих уроків та лабораторних робіт, на рівні стандарту – уроків формування базових навичок та умінь (додаток З).

Диференціація навчально-пізнавальної діяльності учнів необхідна на всіх етапах засвоєння знань: етапі мотивації та актуалізації опорних знань, вивчення нового матеріалу, формування навичок та умінь, на етапі домашнього завдання. В педагогічній літературі [41, 109, 135, 148, 218, 251] розглядаються різні варіанти організації диференційованого навчання на кожному з цих етапів.

Загальновідомо, що учні якісно та швидко опановують нові знання лише тоді, коли вони засвоїли попередній навчальний матеріал. Тому на етапі актуалізації необхідно здійснити ґрунтовну підготовку учнів до сприйняття нового. За допомогою системи діагностичних завдань слід з’ясувати наявний рівень знань учня, на яких будуватимуться нові. Слід зауважити, що діагностичні завдання повинні відповідати базовому рівню вимог з минулих тем, тобто перевіряти засвоєння основних теоретичних відомостей і сформованість базових навичок та умінь. Перевірку діагностичної роботи слід організувати відразу на уроці у формі само- або взаємоперевірки за зразком. Її результати дають змогу виділити ситуаційні групи учнів з різним рівнем підготовки. Результати нашого педагогічного експерименту свідчать, що на цьому етапі доцільно здійснити поділ класу на дві ситуаційні групи: І – ті учні, які припустилися помилок, ІІ – учні, які повністю виконали усі завдання роботи . З першою групою слід організувати роботу, спрямовану на усунення прогалин у знаннях. В цей час учні другої групи розв’язують завдання на повторення вищих рівнів складності, які стимулюють їх навчально-пізнавальну активність та вдосконалюють набуті навички та уміння. Так організована робота створює сприятливі умови для підготовки усіх учнів класу до сприйняття нового і закріплює їх попередні навчальні досягнення.

Необхідність диференціації навчальної роботи учнів на етапі вивчення нового матеріалу значною мірою обумовлена відмінностями в рівнях їх научуваності. Учні по-різному сприймають новий матеріал, здійснюють його співставлення, порівняння, аналіз, у них різний темп навчання, швидкість засвоєння та інші навчальні характеристики. Учні з нижчими математичними здібностями потребують повільнішого темпу пояснення, тривалого розгляду окремих питань, повторень найбільш важливих моментів із застосуванням життєвих прикладів, порівнянь, співставлень. Тому навчальний матеріал необхідно ускладнювати поступово, порівнювати його з вивченим раніше, максимально деталізувати та конкретизувати. Більш підготовлені учні здатні до самостійного опрацювання навчального матеріалу, їм імпонують проблемні методи отримання нових знань. Важливо, щоб учні на етапі вивчення нового матеріалу, в міру своїх можливостей, проявляли пізнавальну самостійність, користувались найбільш раціональними прийомами і способами діяльності.

У процесі вивчення нового матеріалу на рівні стандарту доцільне застосування прийому багаторазового пояснення. Після постановки цілей та завдань уроку, вчитель проводить перше пояснення. Учням, які зрозуміли це пояснення (перша ситуаційна група), пропонуються завдання для самостійної роботи на опрацювання нового матеріалу. Для решти учнів класу пропонується друге пояснення, в ході якого акцентується увага на головних аспектах нового матеріалу і відкидаються його другорядні питання. Потім наступна ситуаційна група учнів, які зрозуміли пояснення, отримують завдання. Після третього пояснення усі учні класу знову включаються у фронтальну роботу. Пояснення нового матеріалу має бути не обов’язково потрійним, кількість повторень носить варіативний характер і залежить від міри складності матеріалу, відмінностей у навчальних можливостях учнів.

На лекціях, уроках вивчення нового матеріалу диференціація навчальної роботи здійснювалась шляхом залучення учнів до різних видів активної пізнавальної діяльності. У процесі вивчення нового матеріалу пропонувались завдання різної складності: підготувати відповіді на контрольні запитання, довести, обґрунтувати чи пояснити твердження, підібрати приклади та ілюстрації, сформулювати висновки.

Етап первинного закріплення знань у класі будь-якого профілю доцільно розпочати з фронтальної роботи: ознайомившись зі зразком виконання завдання (самостійно або під керівництвом вчителя), учні виконують відтворюючі завдання. Тривалість цього етапу в класах різних профілів є різною: найменша в класі, який вивчає математику на профільному рівні і найбільша – на рівні стандарту. На цьому етапі вчитель організовує ситуаційні групи учнів (переважно в класах, які вивчають математику на рівні стандарту).

На етапах формування навичок та умінь, узагальнення і систематизації знань працюють умовно постійні типологічні групи, яким пропонуються диференційовані завдання. Вчитель фронтально працює з однією типологічною групою на фоні самостійно працюючих інших груп. При вивченні тригонометричного матеріалу на профільному рівні необхідність у фронтальній роботі на цих етапах є епізодичною і зумовлена розв’язуванням ускладнених завдань. Учні, які вивчають математику на рівні стандарту, потребують постійної уваги вчителя і фронтальна робота з типологічними групами на цьому рівні проводиться практично безперервно.

Навчальні дидактичні засоби можуть бути вагомими чинниками диференціації та індивідуалізації пізнавальної діяльності учня за умови їх відповідного добору, створення та застосування. За допомогою дидактичних засобів вчитель отримує можливість активізувати у процесі сприймання та розуміння різні чуттєві аналізатори учнів (зоровий, слуховий, дотиковий), надавати перевагу окремим з них, адаптувати навчальну інформацію до індивідуальних особливостей учнів.

В останні роки створені підручники для профільного навчання математики на рівні стандарту [24, 25, 46, 192], академічному [6, 8, 212] та профільному [7, 213]. Проаналізуємо деякі з них з точки зору забезпечення диференціації навчання.

Підручники з алгебри і початків аналізу для 10-го класу Є. П. Неліна [211-213] спрямовані на реалізацію основних положень Концепції профільного навчання в старшій школі та на організацію особистісно орієнтованого навчання математики. Їх суттєвою особливістю є чітка структуризація та систематизація навчального матеріалу, наявність великої кількості орієнтирів, вказівок та коментарів. Ці підручники значною мірою створюють умови для рівневої та профільної диференціації навчання математики.

В інтегрованих підручниках з математики для старших класів гуманітарного профілю [24, 46] особлива увага приділяється ідейній стороні понять, які вивчаються, підкреслюється єдність підходів і методів в різних областях математики. Так, в підручнику „Математика” авторів Г. П. Бевз, В. Г. Бевз [24] виклад тригонометричного матеріалу супроводжується елементами історизму, наводяться відомості про математиків, які внесли вагомий вклад в розвиток тригонометрії.

Підручник з алгебри і початків аналізу авторів О. М. Афанасьєва, Я. С. Бродський, О. Л. Павлов, А. К. Сліпенко [8] орієнтований на профілі природничо-математичного напряму. В підручнику широко впроваджуються ідеї математичного моделювання та формування навичок застосування тригонометричного матеріалу для опису явищ навколишньої дійсності; підвищена увага до основного поняття сучасної математики – поняття функції, зокрема, тригонометричної, висвітлення її ролі в моделюванні явищ природи. Вправи до пунктів підручника диференційовані за рівнями складності, після кожного параграфа дібрано додаткові вправи.

Слід також відмітити підручник „Алгебра і початки аналізу” авторів М. І. Шкіль, З. І. Слєпкань, О. С. Дубинчук [328], який ставить за мету забезпечити диференційоване навчання алгебри і початків аналізу вцілому і тригонометричного матеріалу зокрема. Незважаючи на те, що підручник призначений для 10-11-х класів загальноосвітніх навчальних закладів, його можна використовувати і на профільному рівні.

В диференційованому навчанні тригонометричного матеріалу доцільне використання посібників з тригонометрії [69, 141, 161, 177, 178]. Навчальний посібник І. М. Конета „Тригонометрія: теорія і практика” [161] корисний для учнів, які вивчають тригонометричний матеріал на профільному рівні під час їх підготовки до олімпіад, навчання у вузах, для задоволення власних пізнавальних інтересів. У книзі О. С. Істера „Аркфункція від А до Я” [141] викладено значний об’єм матеріалу з теорії обернених тригонометричних функцій, розглянуто велику кількість прикладів з розв’язаннями. Книгу доцільно використовувати в класній та позакласній роботі учнів, які цікавляться тригонометричним матеріалом.

Система диференційованих завдань є одним із основних засобів реалізації диференційованого навчання. Під диференційованими завданнями в педагогічній та методичній літературі розуміють завдання, орієнтовані на індивідуально-типологічні групи учнів класу (А. В. Буслаєв [51], В. П. Стрезікозін [284], І. Е. Унт [298], О. С. Чашечникова [309], В. Ф. Чучуков [315]). Такі завдання спрямовані на врахування різних рівнів навченості учнів, їх здібностей, працездатності та мотивації. Робота з диференційованими завданнями передбачає вільний вибір варіанту та рівня засвоєння, можливість отримання педагогічної допомоги, створення умов для розвитку математичних здібностей. У процесі дослідження диференціація завдань здійснювалась за різними основами: змістом, складністю, характером пізнавальної самостійності учнів, мірою допомоги вчителя.

Ефективність застосування диференційованих завдань обумовлюється оперативним здійсненням зворотного зв’язку. Диференційовані завдання повинні пропонуватись на основі повної інформації про характер труднощів, про види типових і стійких помилок учнів.

Необхідними наочними засобами вивчення тригонометричного матеріалу є різного типу таблиці та схеми, зокрема, таблиці, які демонструють тригонометричні формули, означення та графіки тригонометричних функцій. Зауважимо, що таблиці і схеми для рівня стандарту мають бути більш деталізовані та спрощені у порівнянні з відповідними наочними засобами для академічного та профільного рівнів. Переважна більшість учнів математичних та фізико-математичних профілів мають високі рівні розвитку абстрактного математичного мислення та просторової уяви. Зважаючи на це, такі учні не потребують значної деталізації навчального матеріалу та багаторазових демонструвань одного і того самого факту, оскільки це може призвести до зниження пізнавального інтересу і зайвої втрати часу.

Тригонометричні таблиці [39], як традиційний обчислювальний засіб, втратили свою роль у зв’язку з широким впровадженням обчислювальної техніки. Однак, зовсім відмовлятись від них не варто, зважаючи на їх широкі демонстративні можливості при вивченні властивостей тригонометричних функцій, формул зведення, наближених обчислень.

Успішність диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу значною мірою залежить від ефективно організованої контролюючої діяльності вчителя. Система контролю має відображати, в першу чергу, досягнення всіма учнями базових результатів навчання. Їх перевірку доцільно організувати у формі письмової залікової роботи, яка оцінюється за бінарною шкалою „зараховано” або „не зараховано”. Якщо учень правильно виконав усі запропоновані в заліковій роботі завдання, він одержує оцінку „зараховано”. У випадку, коли він допустився помилки або не розв’язав хоча б одне із завдань, вчитель рекомендує доопрацювати цей матеріал і скласти залік повторно. Таким чином, оцінка „зараховано” є передумовою і допуском до отримання позитивної тематичної оцінки.

Слід відмітити, що перевірка досягнення базового рівня вимог не потребує значних витрат часу і може бути здійснена впродовж 3-5 хвилин. Завдання цього рівня, як правило, прості, нетрудомісткі, тому їх перевірку можна організувати на уроці у формі самоперевірки за зразком або взаємоперевірки.

Після перевірки досягнення базових результатів навчання здійснюється перевірка вищих рівнів засвоєння знань. Рівень засвоєння навчального матеріалу найкраще діагностувати за допомогою різнорівневої самостійної роботи. Вона складається із диференційованих за складністю завдань: як типових, так і завдань на застосування знань в нових, нестандартних умовах. Кожному завданню відповідає певна кількість балів. Важливо, щоб ця самостійна робота надавала можливість об’єктивно оцінити навчальні досягнення учня та однозначно визначити досягнутий ним рівень засвоєння.

Робота за різнорівневими завданнями вимагає особливого педагогічного такту вчителя. Учні не повинні відчувати комплексу неповноцінності при роботі на нижчих рівнях засвоєння, вони мають відчувати доброзичливе ставлення вчителя, його готовність надати необхідну допомогу. Система контролю має передбачати вільний вибір учнями рівня навчання та звітності. Завдяки цьому учні вчаться зіставляти свої можливості із ступенем складності пропонованих завдань, здійснювати самооцінку власної навчальної діяльності.

На основі вищесказаного сформулюємо методичні вимоги до організації диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу з метою забезпечення його ефективного засвоєння:

- визначення рівнів вимог до засвоєння тригонометричного матеріалу;
- орієнтація на досягнення учнями класу базового рівня підготовки;
- диференціація змісту тригонометричного матеріалу;
- варіативність форм та методів організації навчально-пізнавальної діяльності учнів;
- диференційований добір засобів навчання;
- контроль досягнення базових і підвищених результатів навчання.

1.5. Концептуальна модель диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу в курсі алгебри і початків аналізу профільної школи

Рівнева та профільна диференціація навчання – нерозривні складові єдиної диференціації навчального процесу в старшій школі. Ця єдність є відображенням проблеми співвідношення індивідуального та соціального в розвитку особистості. Профільна диференціація навчання створює умови для підготовки активних членів суспільства, майбутніх творців суспільного життя. Рівнева диференціація спрямована на розвиток індивідуальності особистості школяра, його самореалізацію. Водночас, індивідуальне та соціальне в особистості тісно взаємопов'язані, їх відокремити практично неможливо. Розкрити та розвинути свою індивідуальність людина може лише в суспільстві, вивчаючи суспільні надбання науки, культури, соціального досвіду. Таким чином, навчання в старшій школі має бути орієнтованим як на індивідуальний, так і на суспільний розвиток школяра, тобто повинне поєднувати рівневу та профільну диференціацію.

Концепція єдності рівневої та профільної диференціації навчання (автори Є. Є. Семенов та В. В. Малиновський) утворює теоретичну основу диференційованого навчання математики у профільній школі [265]. Згідно цієї концепції, ефективна організація диференційованого навчання старшокласників можлива лише за умови одночасного застосування обох різновидів диференціації – рівневої та профільної. Їх внутрішня єдність полягає в наступному:

- більш високої якості та успішності навчання у класі будь-якого профілю можна досягнути лише за умови здійснення рівневої диференціації навчання;
- профільний клас більш однорідний у порівнянні із звичайним класом, це збільшує можливості врахування типових індивідуальних відмінностей учнів у процесі рівневої диференціації навчання;
- вибір форм, методів та засобів рівневої диференціації на уроці значною мірою визначається специфікою профілю, змістом навчальних програм, рівнем вивчення математики у профільному класі.

Таким чином, профільна диференціація є важливим засобом здійснення рівневої диференціації навчання, тобто засобом варіювання рівнів навчання в класі будь-якого профілю.

Мета диференційованого навчання тригонометричного матеріалу полягає у створенні сприятливих умов для особистісного розвитку учнів, що включає процеси набуття математичної компетентності, формування мотивації учіння, розвиток дослідницьких здібностей, професійне самовизначення та самоорганізацію особистості. Психолого-педагогічне проектування особистісного розвитку учнів засобами тригонометрії передбачає побудову концептуальної моделі диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу, яка ґрунтується на концепції єдності рівневої та профільної диференціації навчання (рис. 1.2).

До основних компонентів моделі відносимо: мету, принципи, організаційно-педагогічні умови, рівні та етапи вивчення тригонометричного матеріалу у профільній школі, а також диференційовану навчально-пізнавальну діяльність школярів, її предметне забезпечення та результат – особистісний розвиток засобами тригонометрії. У пропонованій моделі учень є активним учасником навчального процесу, він здійснює диференційовану навчально-пізнавальну діяльність по засвоєнню тригонометричного матеріалу на різних рівнях. Ефективність процесу учіння залежить від його основоположних принципів та педагогічних умов організації. Предметне забезпечення цього процесу утворюють ті аспекти тригонометричного матеріалу, що є визначальними для диференціації навчання.

Рис. 1.2. Концептуальна модель диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу в курсі алгебри і початків аналізу профільної школи.

Чітко виражена мета вивчення тригонометричного матеріалу надає діяльності учіння цілеспрямованого характеру та проектує її кінцевий результат . Загальна мета шкільної математичної освіти, місце та роль тригонометричного матеріалу в науці, техніці, навчальній та професійній підготовці сучасного чле на суспільства обумовили доцільність постановки когнітивної, соціалізуючої та особистісно-розвивальної мети вивчення тригонометричного матеріалу у профільній школі (див. п.1.1).

На основі концепції єдності рівневої та профільної диференціації навчання з урахуванням особистісної спрямованості навчального процесу нами визначені принципи диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу у профільній школі:

- *принцип особистісної орієнтації* – передбачає створення у процесі навчання тригонометричного матеріалу сприятливих умов для розвитку особистісних якостей учнів: активності, самостійності, творчості, здатності до вольових зусиль; самопланування, саморегулювання та самоконтролю учінням; виховання емоційно-ціннісного ставлення до знань, працелюбності та відповідальності;

- *принцип комплексності* – полягає в тому, що диференціація має здійснюватись по відношенню до всіх компонентів навчального процесу (цільового, змістового, операційно-дійового, контрольно-регулюючого та інших) на всіх етапах засвоєння знань (сприймання нового матеріалу, його осмислення, запам'ятовування, закріплення, практичного застосування, контролю та оцінювання). Учню надається можливість систематичної та цілеспрямованої реалізації власних інтересів та здібностей не тільки у процесі класної, а й і домашньої навчальної роботи;

- *принцип різнорівневості.* Процес учіння має рівневий характер, що обумовлений різноманітністю навчальних можливостей, здібностей та інтересів старшокласників. Тому в навчальному процесі доцільне застосування рівневих характеристик різних об'єктів, явищ та понять, що з ним пов'язані. Наприклад, варіативність процесу засвоєння знань в різних категорій учнів можна відобразити та врахувати за допомогою виділення рівнів засвоєння знань; відмінності процесів формування навичок та вмінь учнів – за допомогою диференційованих завдань різних рівнів;

- *принцип професійної спрямованості.* Вивчення тригонометричного матеріалу має бути спрямоване на забезпечення суспільства кваліфікованими спеціалістами у різних галузях виробництва. Тому школярі повинні одержати достатню математичну підготовку з тригонометрії, яка необхідна для оволодіння фаховими дисциплінами після закінчення школи. Саме засобами навчальної диференціації здійснюється варіація рівнів математичної освіти відповідно до професійних намірів школярів;

- *принцип вільного вибору.* Диференціація має бути добровільною для учня і передбачати вільний вибір ним профілю та рівня навчання (а також можливість їх зміни), форм і методів вивчення матеріалу, індивідуальний темп навчання. Зміст контрольних робіт повинен надавати учням можливість вибору задач, кожна з яких оцінена певною кількістю балів. Учень обирає відповідно до своїх інтересів та здібностей тематику додаткового навчального матеріалу для написання рефератів, математичних творів, проведення математичних досліджень;

- *принцип поступовості.* В організації диференційованого навчання важливо дотримуватись принципу поступовості, зміст якого полягає в тому, що не можна засвоїти навчальний матеріал на вищому рівні, не засвоївши його на нижчому. Для усвідомлення нового теоретичного матеріалу необхідне його застосування спочатку в типових, найпростіших ситуаціях. Лише після відпрацювання базових прикладів та задач можливий поступовий перехід до більш складних завдань.

Сформульовані принципи утворюють основу для цікавого, корисного та продуктивного учіння, яке адекватне навчальним можливостям та потребам школярів.

Важливими організаційно-педагогічними умовами реалізації моделі є диференціація усіх компонентів методичної системи навчання: цілей, змісту, методів, організаційних форм та засобів. Диференціація здійснюється у двох основних напрямах: профільному та рівневому. Диференціація у напрямі профілю передбачає варіативність навчального процесу відповідно до освітніх потреб, професійного самовизначення, здібностей та інтересів учнів, із урахуванням суспільних запитів до шкільної математичної освіти. Рівневий напрям визначається індивідуально-типологічними відмінностями учнів профільного класу, особливостями процесів засвоєння навчального матеріалу та особистісного розвитку різних категорій школярів. Наприклад, добір навчальних програм, підручників, додаткової навчальної літератури відбувається у профільному напрямі диференціації, а варіація педагогічної допомоги, типологічне групування учнів здійснюються на рівні класу. Водночас, ефективність розглянутих напрямів диференціації досягається в їх єдності та взаємодоповненні.

Математична підготовка старшокласників, зокрема з тригонометрії, здійснюється відповідно до трьох рівнів вивчення змісту, що визначені Концепцією профільного навчання в старшій школі [164]: стандарту С, академічного А та профільного П. З метою здійснення рівневої диференціації у межах профільної кожен з цих рівнів диференціюємо за трьома рівнями вимог до засвоєння навчального матеріалу: базовий ($С_Б$, $А_Б$, $П_Б$), достатній ($С_Д$, $А_Д$, $П_Д$), високий ($С_В$, $А_В$, $П_В$). Так, позначення $С_Б$ означає базовий рівень вимог на рівні стандарту; $А_Д$ – достатній рівень вимог на академічному рівні вивчення математики. Базовим рівнем вимог вважаємо засвоєння навчального матеріалу на 4 бали в системі дванадцятибального оцінювання навчальних досягнень учнів; достатньому рівню ставимо у відповідність 7, високому – 10 балів. Якщо учень має початковий рівень навчальних досягнень (1-3 бали), то це означає, що він не досяг базового рівня вимог. У цьому випадку необхідно проводити додаткову роботу, яка включає діагностику труднощів, профілактику помилок, коректуючі дії з метою досягнення базового рівня вимог. Рівні вимог найкраще конкретизувати наборами еталонних задач, в яких відображені відповідні знання та способи діяльності. Таким чином, рівень вивчення тригонометричного матеріалу (стандарт, академічний, профільний) та рівень вимог до його засвоєння (середній, достатній, високий) визначають „координати" математичної підготовки старшокласника з тригонометрії, які відповідають його навчальним можливостям, потребам та інтересам.

Навчально-пізнавальна діяльність учнів в умовах диференційованого навчання математики є складним системним об'єктом, який відображає варіативність їх загальних та математичних здібностей. Під *диференційованою навчально-пізнавальною діяльністю учнів будемо розуміти їх внутрішню та зовнішню активність, яка спрямована на досягнення особисто значимих навчальних результатів, здійснюється на різних рівнях відповідно до індивідуальних особливостей особистості та формується під впливом організаційно-педагогічних чинників (методика навчання, дидактичне забезпечення тощо).* Ця діяльність передбачає диференціацію способів виконання циклу навчально-пізнавальних дій: сприймання нового матеріалу, його осмислення, запам'ятовування, застосування на практиці, повторення, систематизація та узагальнення.

Врахування базових складових та рівнів навчально-пізнавальної діяльності учнів підвищує ефективність засвоєння тригонометричного матеріалу та математичної підготовки на обраному рівні.

Згідно операційного підходу до аналізу психологічної структури діяльності , будь-яка конкретна діяльність є сукупністю дій. В. В. Давидов та Д. Б. Ельконін у структурі навчальної діяльності розрізняють такі компоненти: мотиви, навчальні задачі, навчальні дії, дії оцінки і контролю [208, с.64]. Тому процес учіння тригонометричного матеріалу як аналітико-синтетична діяльність учня передбачає мотивацію, постановку мети та завдань навчальної роботи, визначення умов та засобів її здійснення, загальні та спеціальні розумові дії, спрямовані на засвоєння понять, формування навичок та умінь, дії регулювання діяльністю. Таким чином, в структурі диференційованої навчально-пізнавальної діяльності старшокласника з вивчення тригонометричного матеріалу виділимо такі базові складові: ціннісно-орієнтаційну, понятійно-логічну, операційно-технічну, інформаційно-комунікативну та контрольно-рефлексивну.

Ціннісно-орієнтаційна складова визначає навчальні дії учня, спрямовані на оцінку значення тригонометричного матеріалу для задоволення його особистих пізнавальних інтересів та можливостей, для майбутньої навчальної та професійної діяльності, формування світогляду. На основі цієї складової визначаються мотиви учіння, здійснюється планування діяльності, формуються орієнтаційні та проективні уміння учнів.

Понятійно-логічна складова передбачає розумові та практичні дії учня, спрямовані на засвоєння системи понять тригонометричного матеріалу, обґрунтування теоретичних тверджень та правил. Наприклад, сюди відносимо засвоєння змісту, обсягу, зв'язків та відношень тригонометричних понять: радіанна міра кута, одиничне коло, тригонометричні функції, обернені тригонометричні функції, тригонометричне рівняння та нерівність.

Системність знань учнів ми розглядаємо як один із найважливіших показників рівня засвоєння тригонометричного матеріалу. За цим критерієм доцільно виділити такі рівні навчально-пізнавальної діяльності: усвідомлення, розуміння, встановлення та реалізація учнем: 1) внутрішньопонятійних (початковий рівень), 2) міжпонятійних (середній рівень), 3) міжпредметних (високий рівень) зв'язків тригонометричного матеріалу. Так, в процесі засвоєння поняття „тригонометрична функція y=sinx" на 1-му рівні виділяються його окремі компоненти (означення, властивості, графік) та встановлюються між ними зв'язки: з означення випливають окремі властивості, на основі властивостей будується графік тощо. На 2-му рівні пізнавальної діяльності встановлюються міжпонятійні зв'язки функції синус з іншими тригонометричними та оберненими тригонометричними функціями. На основі дій зіставлення та протиставлення встановлюються спільні та відмінні ознаки цих понять, відношення між ними. Третій рівень пізнавальної діяльності передбачає розгляд функції синус на міжпредметному рівні, розкриття її наукового значення.

Операційно-технічна складова включає різнорівневі практичні навички та уміння учнів, що формуються на тригонометричному матеріалі. Це навички та уміння: точних і наближених тригонометричних обчислень; тригонометричних перетворень; дослідження тригонометричних функцій та побудови їх графіків; застосування тригонометричного матеріалу до розв'язування прикладних задач та задач міжпредметного змісту; математичного моделювання явищ та процесів за допомогою тригонометрії.

Залежно від міри новизни ситуації, в якій застосовується теоретичний матеріал, виділимо три рівні сформованості практичних навичок та умінь учнів: низький, середній, високий. Низький рівень – виконання практичних дій за зразком, діяльність учня має репродуктивний характер. Середній рівень –здійснення практичних дій в змінених умовах, які подібні до стандартних. Високий рівень – розв'язування практичих завдань в нових умовах, відмінних від стандартних.

Інформаційно-комунікативна складова включає інформаційні, комунікативні, перцептивні навички та уміння учнів: здобувати та опрацьовувати необхідну інформацію; міжособистісного спілкування у процесі групової та фронтальної роботи; толерантного відношення та адаптації до ціннісних орієнтацій, ідеалів, інтересів оточуючих.

Контрольно-рефлексивна складова визначає дії само- та взаємоконтролю, оцінки та корекції у процесі учіння. Сюди відносимо рефлексивні уміння учнів: об'єктивно оцінювати власні рівні навчальних можливостей та математичної підготовки; адекватно реагувати на коректуючі дії з боку вчителя та товаришів; аналізувати причини помилок та труднощів у процесі засвоєння та інші. Контрольно-рефлексивна складова діяльності сприяє формуванню здатності до рефлексії, самокритичності та самоорганізації.

Відповідно до розглянутих складових диференційованої навчально-пізнавальної діяльності учнів, процес диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу здійснюється в такій послідовності:

- визначення мотивів учіння, усвідомлення необхідності вивчення тригонометричного матеріалу;
- планування учіння;
- різнорівневе засвоєння теоретичного матеріалу;
- формування різнорівневих практичних навичок та умінь;
- досягнення базового та вищих рівнів вимог до математичної підготовки з тригонометрії;
- самоконтроль та самокорекція; усунення помилок та виявлення їх причин ; повторні навчальні дії з метою досягнення базового рівня вимог.

До найбільш важливих методів учіння тригонометричного матеріалу на рівні стандарту належать методи наслідування та поступового ускладнення. Отримуючи зразки відповідей на теоретичні запитання та розв'язання задач, учні повторюють дії вчителя та набувають найпростіших навичок та умінь, що створює передумови зростання ступеня самостійності їх дій та включення у продуктивну творчу діяльність. Метод поступового ускладнення дає змогу учневі набути міцних навичок розв'язування типових задач та підготуватись до розв'язування більш складних завдань.

На профільному рівні зростає роль дослідницького методу учіння, за якого учні самостійно „відкривають" тригонометричні формули, властивості тригонометричних функцій, способи розв'язування тригонометричних рівнянь тощо. Під час розв'язування задач та вправ на цьому рівні доцільне застосування методу спроб та помилок, при якому учні формулюють гіпотези розв'язання, здійснюють їх перевірку, відкидають помилкові припущення та отримують правильні відповіді.

На академічному рівні важливого значення набувають навчальні дії учнів, спрямовані на міжпредметне перенесення знань, практичне застосування тригонометричного матеріалу. Практична робота учнів, що передбачає застосування знань у ситуаціях, наближених до життєвих, забезпечує перетворювальний характер їх учіння.

Тригонометричний матеріал має вагомі дидактичні можливості для предметного забезпечення диференційованої навчально-пізнавальної діяльності учнів, які включають такі аспекти:

1) змістовий – дискретна логічна будова змісту тригонометричного матеріалу;

2) прикладний – прикладна спрямованість тригонометричного матеріалу;

3) міжпредметний – різноманітність міжпредметних зв'язків тригонометричного матеріалу.

Для змісту тригонометричного матеріалу характерна особлива логічна будова, основу якої утворюють чотири значущі частини: тригонометричні функції синус, косинус, тангенс і котангенс. На їх основі здійснюється розгортання змісту, встановлення різноманітних внутрішньопредметних та міжпредметних зв’язків. Дискретна логічна будова змісту тригонометричного матеріалу дає змогу ефективно його структурувати з метою досягнення системності знань учнів та підвищення результативності засвоєння.

Кожен змістовий модуль тригонометричного матеріалу (п.1.1) складається із сукупності відносно незалежних елементів (підмодулів), які відповідають конкретним дидактичним цілям у процесі досягнення інтегрованої дидактичної цілі модуля. Так, ціль, яка полягає у засвоєнні змісту модуля „Тригонометричні функції” складається з окремих підцілей, які досягаються у процесі вивчення підмодулів: тригонометричні функції синус, косинус, тангенс і котангенс (табл. 1.3).

Структуризація змісту тригонометричного матеріалу на модулі та підмодулі дає можливість диференціювати навчально-пізнавальну діяльність учнів у таких напрямах:

- перехід від одного підмодуля до іншого (в напрямі стрілок в табл. 1.3) створює умови для збільшення міри самостійності учіння та зменшення обсягу педагогічної допомоги;
- виникає можливість вилучати з розгляду окремі структурні елементи або долучати додаткові, не порушуючи при цьому логіки викладу матеріалу;
- встановлення та використання аналогій із залученням як образних так і логічних структур мислення;
- застосування парних, групових форм організації у процесі опрацювання окремих підмодулів змісту;
- організація різнорівневої дослідницької роботи учнів.

Таблиця 1.3

Модульна структура змісту тригонометричного матеріалу

Модулі змісту		Підмодулі змісту			
		I	II	III	IV
		⇒	⇒	⇒	
I	*Тригонометричні величини*	*синус*	*косинус*	*тангенс*	*котангенс*
II	*Тригонометричні функції*	*y=sinx*	*y=cosx*	*y=tgx*	*y=ctgx*
III	*Тригонометричні формули*	*основні співвідношення*	*формули додавання*	*формули зведення*	...
IV	*Обернені тригонометричні функції*	*y=arcsinx*	*y=arccosx*	*y=arctgx*	*y=arcctgx*
V	*Тригонометричні рівняння та нерівності*	*sinx=a*	*cosx=a*	*tgx=a*	*ctgx=a*

Тригонометрія як розділ наукового знання походить з практичних потреб життєдіяльності людини. Розвиток тригонометрії зумовлений необхідністю точних вимірювань та розрахунків, моделювання явищ та процесів природи. За допомогою прикладного потенціалу тригонометрії стає можливим на доступному та особистісно значимому рівні розкрити суттєві ознаки її абстрактних понять, продемонструвати їх походження з реальності.

Основним засобом реалізації прикладної спрямованості тригонометричного матеріалу є прикладні задачі. Їх роль у диференційованому навчанні особливо велика: різноманітність інтересів, умов життя, особистих пріоритетів школярів відображається у фабулі та реальному змісті прикладної задачі. Її розв’язок набуває особистісно значимого змісту для учня, він в змозі його оцінити і в деяких випадках перевірити в реальній практичній ситуації. До того ж з’являється можливість запобігти формалізму в знаннях, спростити та конкретизувати складні для учнів тригонометричні поняття, підібрати зміст за дачної ситуації та рівень її складності відповідно до загального розвитку учня та його світогляду.

У прикладних задачах доцільно також відображати професійну тематику, інтерес до якої в старшокласників підвищений.

Характерною рисою тригонометричного матеріалу як розділу математики є його численні міжпредметні зв’язки як з шкільними навчальними предметами так і з предметами вищої школи (геометрія, фізика, астрономія, вища математика, економіка, геодезія, технічна механіка, топографія та інші). Міжпредметні зв’язки тригонометричного матеріалу зумовлюють інтеграцію навчальних предметів та відповідного навчального інструментарію, розкривають наукову значущість тригонометрії, її роль та місце в системі наукових знань.

Встановлення міжпредметних зв’язків тригонометричного матеріалу створює можливості для:

- диференційованого здійснення мотивації та активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів;
- профорієнтаційної роботи у різних напрямах;
- поглиблення знань учнів з профільних навчальних предметів;
- організації усвідомленого засвоєння тригонометрії на доступному та цікавому для учнів матеріалі.

Розглянемо деякі з міжпредметних зв’язків тригонометричного матеріалу.

Тригонометрія – фізика. Синус, косинус, тангенс і котангенс кута, а також відповідні тригонометричні функції є математичними засобами дослідження різноманітних фізичних процесів та явищ. Наприклад, рух тіла під кутом до го ризонту, перехід світлового променя з одного середовища в інше, гармонічні коливання, дія на тіло декількох сил та визначення їх рівнодійної. Практично в усіх розділах фізики (кінематика, динаміка, електрика, оптика та інші) застосовуються відомості з тригонометрії.

Тригонометрія – геометрія. Тригонометрія як наука виникла та розвивалась у зв’язку з необхідністю розв’язування трикутників, встановлення залежностей між їх сторонами та кутами. Це відображено і в терміні „тригонометрія”, що в перекладі з грецької мови означає „вимірювання трикутників”. Тригонометричні співвідношення дають можливість обчислювати лінійні розміри та кути геометричних фігур і тіл в задачах планіметрії та стереометрії.

Тригонометрія – геодезія. Тригонометрія широко застосовується при розв'язуванні геодезичних задач, що присвячені вимірюванням на місцевості. Це, зокрема, задачі на визначення відстаней між різними пунктами земної поверхні, обчислення висот різноманітних об'єктів (гір, будівель тощо), складання планів та карт місцевості. Їх розв'язання має велике практичне значення в техніці, будівництві, сільському господарстві, військовій справі.

Тригонометрія – астрономія. Як відомо, на початку свого розвитку тригонометрія вважалась розділом астрономії і застосовувалась, головним чином, в астрономічних обчисленнях. Задачі на визначення розмірів планет, відстаней між ними, радіусів небесних світил розв'язуються за допомогою тригонометрії. Важко уявити сучасну астрономію як науку або шкільний навчальний предмет без застосування тригонометричного матеріалу.

Тригонометрія – електротехніка. Тригонометричні функції – основні математичні моделі, які застосовуються в електротехніці. Функції синус і косинус кількісно описують змінний електричний струм, електромагнітні коливання та хвилі.

До найбільш доцільних форм практичної реалізації міжпредметних зв'язків тригонометрії належать інтегровані уроки та задачі міжпредметного змісту, які розв'язуються за допомогою тригонометричного матеріалу.

Першим та основним етапом вивчення тригонометричного матеріалу у профільній школі є робота учня на уроці, яка здійснюється в межах як профільних, так і непрофільних курсів математики. Її доповнюють на наступних етапах домашня робота та елективні курси. На цих етапах відбувається поступове звуження діапазону навчальних характеристик учнів (інтересів, здібностей, потреб) в напрямі: клас ⇒ група учнів ⇒ учень. Таким чином, здійснюється спрямування навчального процесу в бік індивідуальності особистості, зростання міри її самостійної роботи по засвоєнню тригонометричного матеріалу.

Концепцією профільного навчання в старшій школі визначено, що курси за вибором (елективні курси) – „це навчальні курси, які доповнюють навчальні предмети і входять до складу допрофільної підготовки та профільного навчання [164, с.60] ". Елективні курси поглиблюють диференціацію навчання, адаптуючи навчальний процес до інтересів, можливостей та потреб окремих груп учнів профільного класу. Це створює умови для формування індивідуальної освітньої траєкторії школярів, вибору ними тих аспектів змісту тригонометричного матеріалу, які для них найбільш цікаві та корисні.

В умовах диференційованого навчання домашня робота набуває особливо важливого значення, вона стає дієвим засобом реалізації особистісних інтересів та намірів учнів. Повна самостійність в учінні створює умови для прояву пізнавального новаторства, самореалізації, самоствердження в навчальних та професійних планах учнів.

Організація навчально-пізнавальної діяльності учнів профільної школи у процесі вивчення тригонометричного матеріалу відповідно до запропонованої моделі сприяє активізації учіння, усвідомленому засвоєнню знань та способів діяльності на різних рівнях, особистісному розвитку засобами тригонометрії.

Висновки до першого розділу

Диференційоване навчання є однією з актуальних проблем сучасної школи, її дослідженню присвячена значна кількість науково-методичних та психолого-педагогічних праць. Диференційоване навчання традиційно реалізується у двох напрямах: рівнева та профільна диференціації, які мають місце відповідно у основній та старшій школі. Теоретично обґрунтовано, що для успішного та ефективного вивчення тригонометричного матеріалу в курсі алгебри і початків аналізу профільної школи необхідне поєднання та взаємодоповнення цих видів диференціації.

Характерними рисами змісту навчання математики у профільній школі є його багатокомпонентність, варіативність та рівневість. Пропонована структурна схема змістової диференціації тригонометричного матеріалу включає: рівні засвоєння, модулі, блоки та складові змісту тригонометричного матеріалу. Рівні засвоєння змісту, що визначені Концепцією профільного навчання у старшій школі, вказують на процесуальний аспект навчання і відображають відповідність засвоєння змісту тригонометричного матеріалу вимогам розвитку суспільства, науки, культури та особистості. Змістові блоки тригонометричного матеріалу виконують функцію нормування глибини та обсягу змісту відповідно до вимог стандартів освіти та особистісних запитів та потреб учнів. Складові змісту детермінуються переважаючими видами пізнавальної діяльності учнів профільних класів, особливостями побудови та дослідження математичних моделей, які застосовуються в різних наукових галузях (природничих, економічних, гуманітарних та інших).

Результатом психолого-педагогічного проектування особистісного розвитку учнів засобами тригонометрії є концептуальна модель диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу, побудована на основі концепції єдності рівневої та профільної диференціації навчання. Модель включає мету, принципи, організаційно-педагогічні умови, рівні, етапи, предметне забезпечення вивчення тригонометричного матеріалу та визначає диференційовану навчально-пізнавальну діяльність учнів.

Основні результати першого розділу висвітлені у роботах [80-85, 88, 91-92, 96, 129].

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА ДИФЕРЕНЦІЙОВАНОГО ВИВЧЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНОГО МАТЕРІАЛУ У ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ

2.1. Методичні особливості диференційованого вивчення теоретичного матеріалу

Для математичного та загального розвитку особистості учня важливу роль відіграє вивчення теоретичного матеріалу з математики. Вивчення математичних понять, правил, теорем створює умови для розвитку логіки міркувань, виховання мовної культури, формування умінь обґрунтовувати власні погляди.

Розробляючи методику диференційованого вивчення теоретичного матеріалу з тригонометрії, слід враховувати ряд факторів, до найважливіших з яких віднесемо: специфіку профілів навчання, варіативність пізнавальних та математичних здібностей, відмінності в навченості, научуваності, темпі навчання учнів, рівні розвитку загальних та спеціальних розумових дій (аналіз, синтез, встановлення причинно-наслідкових зв'язків, підведення під поняття, виведення наслідків тощо). Ці фактори утворюють основу для визначення методичних особливостей диференційованого вивчення теоретичного матеріалу з тригонометрії, знання яких дає змогу більш ефективно організувати процес різнорівневого засвоєння знань, раціонально використати час на уроці та активізувати пізнавальну діяльність учнів з різною математичною підготовкою.

У процесі дослідження встановлені такі методичні особливості диференційованого вивчення теоретичного матеріалу з тригонометрії:

- під час вивчення нових понять увага учнів акцентується на відповідній профільно-значимій складовій змісту тригонометричного матеріалу (теоретичній, прикладній, гуманітарній);
- введення понять здійснюється за конкретно-індуктивною або абстрактно-дедуктивною схемою залежно від навчально-пізнавальних можливостей учнів, специфіки понять;
- вивчення тригонометричних формул супроводжується двома етапами: теоретичне обґрунтування формул та їх застосування; у профільній школі провідна роль належить останньому етапу;
- з метою врахування індивідуальних відмінностей пам'яті старшокласників доцільне застосування логічних та образних прийомів запам'ятовування тригонометричних формул;
- вивчення доведень здійснюється на двох основних рівнях: опрацювання і конструювання доведень;
- вивчення властивостей тригонометричних функцій здійснюється відповідно до одного з трьох підходів: геометричного, частково-аналітичного або комбінованого;

- для здійснення рівневої диференціації при організації вивчення теоретичного матеріалу доцільні такі прийоми, як деталізація теоретичного матеріалу, залучення учнів до його пояснення, своєчасна допомога у процесі засвоєння нового та інші. Розглянемо зміст цих особливостей.

І. Акцентування уваги учнів на складових змісту тригонометричного матеріалу (теоретичній, прикладній, гуманітарній).

Вивчення тригонометричного матеріалу в 10-му класі будь-якого профілю розпочинається із узагальнення поняття кута та введення радіанної міри кута (додаток З). З метою усвідомлення учнями прикладної значущості цих понять важливо повідомити про існування різних одиниць вимірювання кутів (прямий кут, кутова година, повний оберт, румб, град та інші). Учні повинні зрозуміти, що вимірювання кутів здійснюється за тим самим принципом, що і вимірювання інших величин, наприклад, довжини, маси, площі, сили. За одиницю вимірювання кожної з цих величин приймається величина того самого типу (однорідна величина).

З метою встановлення взаємозв’язків між математичними та гуманітарними знаннями та підвищення інтересу до вивчення математики, учням-гуманітаріям доцільно розповісти про походження одиниць вимірювання кутів, наприклад, градуса. Так, ще в глибокій давнині вавілоняни розділяли коло на 360 рівних частин, керуючись тим, що сонце здійснює свій річний шлях , на їх думку, за 360 діб, а за одну добу робить лише один крок на цьому шляху. Цей „крок” і є прообразом градуса в сучасному розумінні. В перекладі з латинської мови слово „gradus” і означає „крок” [34, с.27]. Також слід вказати на птолемеївський поділ кола і пояснити походження назв „мінута” і „секунда” [34, 191].

Увагу учнів, які вивчають тригонометричний матеріал на академічному рівні, доцільно акцентувати на застосуванні радіанної міри кута у фізиці, зокрема, для обчислення кутової швидкості та кутового прискорення точок твердого тіла під час його обертального руху. Наприклад, за одиницю кутової швидкості в Міжнародній системі одиниць СІ прийнято радіан за секунду (рад/с) – кутова швидкість рівномірного обертання, при якому кожної секунди точка здійснює поворот на один радіан.

У класах математичного, фізико-математичного профілів слід наголосити на взаємно однозначній відповідності між множиною дійсних чисел і множи ною значень кутових величин, виміряних у радіанах, а також на схожості та відмінності радіанної міри центрального кута і радіанної міри відповідної йому дуги.

Поняття тригонометричної функції – одне з основних понять під час вивчення тригонометричного матеріалу в 10-му класі. Перед введенням тригонометричних функцій слід актуалізувати поняття „множина”, „відповідність”, „взаємно однозначна відповідність”. На профільному рівні вивчення тригонометричного матеріалу ця термінологія має вживатись у більш широкому обсязі у порівнянні з іншими рівнями, зважаючи на посилення ролі *теоретичної складової змісту*. У зв’язку з цим варто відмітити дисертаційне дослідження В. В. Пікан, в якому виявлені шляхи реалізації теоретико-множинного підходу до вивчення тригонометричних функцій в середній школі [231, с.5].

Бажано, щоб учні самостійно зробили висновок про те, що функції синус і косинус задають відповідність між множиною дійсних чисел R і множиною чисел відрізка **. Для усвідомлення змісту цієї відповідності слід запропонувати наступну вправу.**

Вправа. Дійсним числам числової осі поставити у відповідність значення їх синусів (на рис. 2.1 сполучити стрілками окремі елементи цієї відповідності).

Рис. 2.1. Відповідність **.**

1. Зобразити на рис. 2.1 елементи відповідності , якщо x

дорівнює , , , .

2. Зобразити на числовій осі числа виду , . Які значення синусів цих чисел? Відповідь пояснити.

3. Які пари елементів , , , , належать відповідності ?

4. Записати множину чисел осі Ox, яким відповідає число 1; ; 0.

5. Чи існує точка числової осі, якій відповідають дві різні точки відрізка ?

6. Чи існує точка відрізка , якій відповідають 2; 3; 5; 100 точок числової осі?

7. Чи існує точка відрізка , якій не відповідає жодна точка числової осі?

8. Чи є встановлена відповідність взаємно однозначною; функцією?

На рівні стандарту більше уваги слід приділити питанню походження назв тригонометричних функцій і символів для їх позначення. Для цього доцільно доручити окремим учням підготувати невеликі повідомлення (2-3 хв) на цю тематику. Корисно відмітити, що існували також і інші тригонометричні функції, відмінні від синуса, косинуса, тангенса і котангенса, наприклад, sinus-versus, секанс, косеканс (останні дві функції зустрічаються і в сучасній навчальній та науковій літературі).

Прикладну складову змісту поняття тригонометричної функції підкреслюють відомості про те, що числовий аргумент функцій синус, косинус, тангенс і котангенс є наслідком абстрагування від різних конкретних значень аргументів цих функцій, наприклад, кута, часу, температури, швидкості та інших величин. Так, у формулі

**для визначення сили струму у провіднику аргумент функції синус – час ,
у рівнянні траєкторії руху тіла, кинутого під кутом до горизонту**

, аргументом функцій косинус і тангенс є кут .

Гармонічне коливання – одне з найважливіших понять, що реалізує прикладну спрямованість тригонометричного матеріалу, демонструючи основні ідеї математичного моделювання. Уявлення про гармонічні коливання повинні отримати учні будь-якого профілю, зважаючи на їх важливе значення для дослідження навколишнього світу, що наповнений коливаннями різноманітної природи.

На рівні стандарту повідомлення про коливальні рухи і гармонічні коливання у навколишньому світі та життєдіяльності сучасної людини можна побудувати за наступною схемою (гуманітарна складова змісту).

І. Механічні коливання. У повсякденному житті і техніці ми часто зустрічаємося із механічними коливальними рухами: коливаються мости під дією потягів і машин, які по них рухаються; вібрують на токарних і фрезерних верстатах деталі під час обробки; погойдуються гілки дерев під дією вітру; коливається тягарець, підвішений на пружині або на довгій нитці.

ІІ. Електромагнітні коливання. Коливання електричного заряду, сили струму, напруги в мережі змінного струму належать до електромагнітних коливань. Вони також виникають в коливальному контурі під час розрядки конденсатора через котушку індуктивності. Електромагнітні коливання – важлива складова роботи радіо, телебачення, космічних ракет .

ІІІ. Коливання і біологічні процеси. Коливання супроводжують біологічні процеси, наприклад, передачу збудження по нервовій тканині, роботу серця і мозку. Записуючи коливання, які відбуваються в організмі людини, лікарі отримують електрокардіограми і енцефалограми.

IV. Найпростіші відомості про гармонічні коливання. З усієї множини коливань виділяють коливання найпростішої природи, які графічно зображуються кривими типу синусоїди або косинусоїди (прозентуються графіки гармонічних коливань). Ці коливання називаються гармонічними . До них належать, зокрема, коливання тягарця на пружині або довгій нерозтяжній нитці.

На академічному рівні більше уваги необхідно приділити прикладам фізичних процесів, які супроводжуються гармонічними коливаннями. Відповідні повідомлення доцільно побудувати за наступною схемою.

І. Механічні коливання.

1. Розглянемо власні коливання системи, що складається з невеликого тіла масою m, підвішеного на вертикальній пружині жорсткістю k, другий кінець якої жорстко закріплений (пружинний маятник). Масою пружини і силами опору знехтуємо. Зміщення x маятника від положення рівноваги залежно від часу визначається функцією

, де А – найбільше зміщення тіла від положення рівноваги, Т – період, – початкова фаза коливань маятника. Коливання пружинного маятника належать до гармонічних.

2. Нехай металева кулька масою m підвішена на нитці довжиною l (математичний маятник). Якщо не враховувати опору повітря, розтяжності та маси нитки, то для невеликих кутів відхилень φ маятника від положення рівноваги, його коливання можна вважати гармонічними.

Вони описуються функцією , де А – максимальний кут відхилення маятника від положення рівноваги, Т – період, – початкова фаза коливань маятника.

II. Електромагнітні коливання.

Розглянемо найпростіший коливальний контур, який складається з котушки індуктивністю L та конденсатора ємністю С. Будемо вважати, що опір контура дорівнює нулю. Тоді коливання електричного заряду в контурі описуються функцією , де – амплітуда

коливань заряду конденсатора з циклічною частотою . Сила струму в коливальному контурі та напруга на конденсаторі теж

змінюються за законами гармонічних коливань ,

, де та – амплітуда сили струму та напруги відповідно.

Із зацікавленням сприймають учні спосіб отримання графіка гармонічного коливання за допомогою наступної лабораторної роботи.

Лабораторна робота. До довгої тонкої нитки підвісимо лійку, а край нитки закріпимо до плоскої рамки [79]. Закриємо випускний отвір лійки і наповнимо її піском. Приготуємо паперову стрічку, вкриту шаром клею. Відхилимо маятник так, щоб він здійснював коливання у площині рамки і рівномірно переміщатимемо стрічку в напрямі, перпендикулярному до площини коливання маятника. Падаючий пісок запише на стрічці синусоїду, яка є графіком гармонічних коливань цього маятника. Записана падаючим піском синусоїда дає можливість робити висновки про положення рівноваги, період, початкову фазу гармонічного коливання. Учні переконуються, що гармонічне коливання з його кількісними та графічними характеристиками – це результат теоретичного узагальнення реальних явищ та процесів.

У класах, де фізика належить до профілюючих навчальних предметів, варто продемонструвати зручний фізичний прилад для спостереження і дослідження електромагнітних коливань – електронний осцилограф. За допомогою цього приладу досліджують періодичні зміни заряду, сили

струму і напруги в електричному колі, які часто відбуваються за законами гармонічного коливання. Екран осцилографа відображає часову „розгортку" електромагнітних коливань, аналогічно до тієї, яку креслить лійка з піском на рухомому аркуші паперу, демонструючи механічні коливання.

У процесі вивчення поняття гармонічного коливання на профільному рівні основна увага має приділятись його теоретичній складовій, яка включає: означення, рівняння, математичну модель гармонічного коливання; знаходження періоду Т функції ; геометричний зміст величин А, , ; графічне зображення гармонічних коливань, їх геометричні перетворення; твердження про додавання гармонічних коливань з однаковою частотою; різні випадки додавання гармонічних коливань (якщо їх амплітуди різні, а частоти рівні; амплітуди рівні, а частоти різні; амплітуди і частоти різні); зведення функцій до виду гармонічного коливання.

В класах математичного, фізико-математичного профілів варто продемонструвати можливість альтернативного представлення гармонічних коливань. Виразимо гармонічні коливання в іншій формі, застосувавши, наприклад, до функції формулу синуса суми двох аргументів. Отримаємо: , де , . Можливість представлення гармонічного коливання за допомогою параметрів А і α або С1 і С2 аналогічна можливості задання точки на площині як полярними, так і декартовими координатами. Крім того, кожне гармонічне коливання можна зобразити вектором з початком в точці О(0;0) і кінцем в точці М(С1;С2). Довжина цього вектора дорівнює амплітуді коливання, а кут між цим вектором і віссю абсцис дорівнює початковій фазі коливання.

Важливо, щоб учні усвідомили як геометричний, так і механічний зміст констант, що входять до формули гармонічного коливання (табл. 2.1).

Таблиця 2.1

Інтерпретації кількісних характеристик гармонічного коливання

Характеристика	Геометрична інтерпретація	Механічна інтерпретація
Амплітуда А	Максимальне значення функції _	Найбільше зміщення коливної точки від положення рівноваги
Циклічна частота	Константа, яка показує, скільки разів період коливання міститься в проміжку :	Кількість повних коливань точки за 2π одиниць часу

Початкова фаза	**Визначає ординату точки перетину графіка функції з віссю Oy.**	**Характеризує початкове положення точки на колі**

II. Введення понять за конкретно-індуктивною або абстрактно-дедуктивною схемою.

Розглянемо зміст цієї особливості на прикладі методики означення обернених тригонометричних величин (арксинуса, арккосинуса, арктангенса і арккотангенса) та обернених тригонометричних функцій.

На рівні стандарту обернені тригонометричні величини розглядаються у зв'язку з необхідністю запису формул розв'язків найпростіших тригонометричних рівнянь [24]. Тому на цьому рівні поняття, наприклад арксинуса, доцільно ввести за наступною методичною схемою.

1. Розв'яжемо найпростіше тригонометричне рівняння (пропонуються табличні значення синуса) і запишемо його загальний розв'язок і частковий розв'язок , який належить проміжку EMBED Equation.3 .

2. Визначимо умови, які виконуються для числа **:**

; :

3. Число називається головним розв'язком рівняння .

4. Розв'яжемо найпростіше тригонометричне рівняння (значення функції синус не табличне) і знайдемо значення (учні відмічають, що не знають точних чисел, синус яких дорівнює).

5. Знайдемо число наближено за допомогою одиничного кола (учні транспортирами вимірюють відповідний кут і отримують його наближене значення).

6. Ми отримали наближене значення . Тоді як записати точний загальний розв'язок рівняння як у першому випадку?

7. Позначимо число так: . Наближене значення цього числа дорівнює 0,6 і відповідає куту . Для

виконуються дві умови:

1) ; 2) .

8. Загальний розв’язок рівняння запишемо так:

.

9. Сформулюємо означення арксинуса числа: арксинус а – це число з

проміжку , синус якого дорівнює а.

10. Враховуючи означення арксинуса, запишемо формулу загального розв’язку найпростішого тригонометричного рівняння :

.

Реалізація розглянутої схеми дає можливість здійснити мотивацію вивчення арксинуса на доступному для учнів рівні, розкрити суттєві ознаки цього поняття за допомогою власної навчальної діяльності учня, що має індуктивно-практичний характер.

Вивчення арксинуса, арккосинуса, арктангенса і арккотангенса на академічному та профільному рівнях має функціональний характер. Поняття обернених тригонометричних функцій тут слід ввести, користуючись загальною схемою знаходження функції, оберненої до даної.

Так, для функції маємо:

1. Функція не є оборотною на всій області визначення, але має безліч проміжків зростання і спадання, тому є оборотною на кожному з них

. Виберемо один із цих проміжків, наприклад , на якому функція синус зростає.

2. Розв’яжемо рівняння , відносно х. Отримаємо

. Цю функцію називають арксинусом і позначають .

3. Змінимо позначення незалежної і залежної змінних. Дістанемо

функцію , обернену до на проміжку .

Функціональні відповідності між множинами чисел та зручно продемонструвати за допомогою рисунка 2.2.

Рис. 2.2. Пряме і обернене відображення, що задаються функціями синус і арксинус.

III. Етапи вивчення тригонометричних формул.

Значну частину тригонометричного матеріалу, який вивчається в старшій школі, складають тригонометричні формули. У процесі їх вивчення розглянемо два етапи:

1) теоретичне обґрунтування тригонометричних формул;

2) застосування тригонометричних формул до перетворення виразів, доведення тотожностей, розв'язування рівнянь тощо.

Найбільшу увагу до першого етапу слід приділити на профільному рівні, зважаючи на посилення ролі доведень в математичній підготовці учнів на цьому рівні. У всіх профільних класах має переважати другий етап, оскільки учні, в першу чергу, мають навчитися застосовувати тригонометричні формули на практиці.

Досить часто можна спостерігати формалізм в знаннях учнів тригонометричних формул. Так, добре пам'ятаючи ту чи іншу формулу, учень не вміє її застосувати в незвичній ситуації. Наприклад, він пам'ятає формулу косинуса подвійного аргументу, але не знає, як її можна

застосувати до перетворення виразів типу , , . Основним запобіжним засобом таких ситуацій має бути глибоке і свідоме вивчення тригонометричних формул. Необхідно, щоб учні засвоювали не стільки форму, скільки зміст тригонометричних формул, і вміли їх правильно застосовувати.

У процесі навчання учнів застосовувати тригонометричні формули корисні наступні методичні поради.

1. Учень має усвідомити, що аргументом тригонометричної функції у формулі може бути не лише окрема змінна, а й також вираз із змінними, число, функція тощо. Із цією метою варто створити опорні конспекти, які містять добір типових прикладів на демонстрування узагальненості аргументів тригонометричних функцій. Нижче наведемо приклад такого конспекту для основної тригонометричної тотожності (рис. 2.3).

Рис. 2.3. Опорний конспект „Основна тригонометрична тотожність".

2. Необхідно розмежувати зміст понять „аргумент тригонометричної функції" та „показник степеня тригонометричної функції". Іноді учні допускають помилку типу: показник степеня тригонометричної функції розглядають як множник аргументу. Наприклад, вираз помилково замінюють на вираз . З метою попередження таких помилок

необхідно демонструвати записи степеня тригонометричної функції черед відповідні добутки , а також застосовувати додаткові дужки .

3. Тригонометрична функція та її аргумент – нерозривні складові єдиного поняття „тригонометрична функція”. Вирази „sin”, „cos”, „tg”, „ctg” не мають змісту, якщо не вказати їх аргументів. Для запобігання пропусків аргументів тригонометричних функцій корисні вправи типу: „ Переписуючи формулу, учень загубив змінну. Знайти її місце у його записах: , , ”.

4. У процесі спрощення тригонометричного виразу може відбутися втрата окремих частин аргументу тригонометричної функції в результаті їх помилкового винесення за знак цієї функції.

Наприклад, у виразі знаменник аргументу (число 4) учень іноді помилково розглядає як знаменник виразу . Акцентувати увагу учнів на таких помилках доцільно за допомогою записів типу , , .

IV. Прийоми запам’ятовування тригонометричних формул.

Як показав експеримент, для більш якісного та раціонального запам’ятовування тригонометричних формул корисні спеціальні прийоми запам’ятовування, які умовно розділимо на логічні та образні. Їх використання дає можливість підвищити швидкість, точність та міцність запам’ятовування, врахувати індивідуальні відмінності мнемічної діяльності учнів. Логічні прийоми ґрунтуються на здатності учня логічно міркувати, здійснювати аналіз, порівняння, узагальнення та інші розумові операції. Образні прийоми більшою мірою передбачають звертання до візуальної та слухової культури учня, його наочно-образного мислення. Як свідчать результати нашого педагогічного експерименту, особливо ефективне застосування образних прийомів у навчанні учнів-гуманітаріїв, в той час як для учнів математичних, фізико-математичних профілів більш імпонують логічні прийоми. Пропоновані прийоми запам’ятовування будуються на основі наукових напрямів мнемотехніки та ейдетики [12].

До логічних прийомів запам’ятовування тригонометричних формул віднесемо такі:

1) прийом виведення формули. Для здібних до математики старшокласників це один з кращих прийомів запам’ятовування тригонометричних формул. Наприклад, для запам’ятовування і засвоєння тригонометричних формул подвійного аргументу важливо утворити у свідомості учня міцний зв’язок у вигляді ланцюжка допоміжних фактів:

- група формул подвійного аргументу виводиться з формул додавання;

- у відповідній формулі додавання розглянемо випадок, коли її аргументи рівні ;

- замінимо у формулі додавання аргумент на аргумент ;

- виконавши арифметичні дії та тотожні перетворення виразів, отримаємо відповідну формулу подвійного аргументу;

2) акцентування уваги на незалежності основних тригонометричних формул. Серед співвідношень між тригонометричними функціями одного аргументу три з них незалежні: основна тригонометрична тотожність та аналітичні означення тангенса і котангенса. Тотожними перетвореннями з цих формул можна отримати ряд інших, наприклад, співвідношення між тангенсом і котангенсом, тангенсом і косинусом, котангенсом і синусом. Слід зауважити, що в багатьох підручниках про незалежність основних тригонометричних співвідношень наголошується недостатньо [22, 294] або взагалі не говориться [8, 46, 168], хоч цей факт має першочергове значення з точки зору запам'ятовування формул, їх застосувань та доведень;

3) „правило ряду". Для запам'ятовування співвідношень між тригонометричними функціями корисне „правило ряду": в ряді тригонометричних функцій синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс і косеканс добутки функцій, рівновіддалених від кінців цього ряду, дорівнюють одиниці. Наприклад, ;

4) твердження про взаємно обернені тригонометричні величини: пари тригонометричних величин тангенс і котангенс, синус і косеканс, косинус і секанс взаємно обернені, наприклад: ;

5) порівняння тригонометричної формули з неправильними формулами. Правильна тригонометрична формула порівнюється з формулами, які мають зовнішню схожість, але внутрішні відмінності. Цей прийом акцентує увагу учнів на окремих елементах тригонометричної формули. Наприклад (табл. 2.2):

Таблиця 2.2

Порівняння основної тригонометричної тотожності

Тригонометрична формула	Формули для порівняння

6) виявлення та виправлення помилок у тригонометричній формулі. Наприклад, відшукати помилки у формулах: , . Виконання цієї вправи слід завершити самоперевіркою за допомогою таблиці тригонометричних формул;

7) дописування тригонометричної формули. Наприклад, заповнити пропуски у формулі

;

8) ідентифікація тригонометричної формули. Наприклад, назвати тригонометричну формулу і визначити її належність до однієї з груп формул.

Образні прийоми запам’ятовування тригонометричних формул розвивають уяву, візуальну та слухову пам’ять школяра. В їх основі – яскраві емоційно забарвлені образи. Ці прийоми враховують особливості правопівкулевої асиметрії мозку школярів. Розглянемо їх:

1) прийом „озвучування формули”. У процесі вивчення тригонометричних формул корисно відтворювати їх словесні формулювання. Слід зауважити, що це доцільно робити в процесі виконання вправ, що сприяє мимовільному запам’ятовуванню;

2) прийом завершення сполуки „зміст-форма”. Цей прийом передбачає поєднання змісту і форми, наприклад, формули та її назви чи коментарів до неї. При цьому зовнішня форма формули може асоціюватись з відповідним текстовим супроводом. Наприклад: „завершити твердження: основна тригонометрична тотожність – це $\sin\alpha + \cos\alpha = 1$”;

3) прийом застосування мнемонічних правил. За допомогою мнемонічних правил відбувається процес візуального та слухового аналізу тригонометричних формул, запам’ятовування їх знаково-символічних зображень (додаток И). Мнемонічні правила можуть створювати і самі учні . Їх увагу варто звертати на чередування знаків у формулах та назв функцій і кофункцій у відповідних добутках.

Для досягнення міцного та усвідомленого запам’ятовування тригонометричних формул необхідно, щоб розглянуті логічні та образні прийоми застосовувались в комплексі і взаємодоповнювали один одного.

V. Рівні вивчення доведень теоретичних тверджень.

З метою формування та розвитку вмінь старшокласників доводити математичні твердження виділимо два основні рівні вивчення доведень, що містить тригонометричний матеріал: опрацювання „готових” доведень (їх аналіз, розуміння, відтворення) і конструювання доведень (пошук доведення, відкриття факту, побудова системи міркувань). Вибір способу опрацювання доведення залежить від його складності, новизни для учнів, їх математичної підготовки, часу, що відведений на вивчення твердження. Слід відмітити, що на рівні стандарту пріоритетне значення має перший рівень вивчення доведень, на профільному – другий рівень.

Як свідчить шкільна практика, учні з низькими та середніми математичними здібностями намагаються запам’ятати усі деталі доведення, вони не виділяють головного, суттєвого в доведенні, в результаті чого не можуть його зрозуміти і запам’ятати. Тому для таких учнів особливо важливо чітко структурувати доведення, виділяти послідовність кроків з теоретичним обґрунтуванням кожного з них.

Робота з планом доведення сприяє формуванню умінь аналізувати, виділяти головне, цілісно сприймати обґрунтування. Після ознайомлення з доведенням роботу з його планом доцільно диференціювати: вивчення доведення за готовим планом; складання плану доведення; завершення плану доведення (наприклад, заповнення стовпця обґрунтувань в плані, де вказані етапи доведення). План доведення доцільно також різною мірою деталізувати. Як приклад, наведемо два варіанти плану доведення формули косинуса суми двох аргументів [328, с.68].

План 1.

1) побудувати на одиничному колі точки , , , і визначити їх координати;

2) провести хорди і , обчислити їх довжини;

3) розв'язати рівняння відносно .

План 2.

1) обрати довільні дійсні числа і ;

2) здійснити поворот точки на кути , , і побудувати на одиничному колі точки , , ;

3) визначити координати побудованих точок, використавши означення синуса та косинуса дійсного числа;

4) спростити вирази для координат точки , застосувавши властивість парності функції косинус та непарності функції синус;

5) провести хорди і ;

6) обчислити довжини цих хорд, застосувавши формулу відстані між двома точками площини за їх координатами;

7) обґрунтувати рівність відрізків і ;

8) скласти рівняння ;

9) розв'язати отримане рівняння відносно .

План 1 відтворює лише основні етапи доведення і не відволікає уваги додатковими вказівками та порадами. В плані 2 демонструються проміжні етапи міркувань, наводяться допоміжні відомості. Під час опрацювання доведення учень самостійно або за допомогою вчителя обирає план з необхідною для нього мірою деталізації.

„Власні" доведення розвивають математичну творчість учня, привчають його критично мислити, формують винахідницькі здібності. Самостійне конструювання доведень учнями з високими математичними здібностями може здійснюватись на різних рівнях: самостійний пошук і здійснення доведення за планом, системою вказівок (самостійно довести тригонометричну формулу зниження степеня для косинуса, застосувавши основну тригонометричну тотожність і формулу косинуса подвійного аргументу); самостійний пошук і здійснення доведення вказаним способом

(самостійно довести, що синус спадає на відрізку (аналогічно доведенню зростання синуса на відрізку)); самостійний пошук і здійснення доведення (самостійно довести формулу зниження степеня для косинуса).

Послідовне застосування формул додавання до алгебраїчної суми двох аргументів дає можливість відшукати формули для тригонометричних функцій алгебраїчної суми довільного скінченного числа аргументів. Наприклад: виразити через тригонометричні функції кутів . Диференціацію цієї роботи можна здійснити шляхом варіювання кількості аргументів. Для найбільш здібних учнів слід запропонувати вивести формули додавання для n аргументів відомим для них методом математичної індукції. Наприклад: вивести формули додавання для і . Можна також розглянути інший спосіб виведення цих формул, який ґрунтується на представленні комплексних чисел в тригонометричній формі [221, с.78].

VI. Вивчення властивостей тригонометричних функцій.

З метою врахування особливостей навчально-пізнавальної діяльності учнів профільних класів виділимо три підходи до вивчення властивостей тригонометричних функцій, які побудовані на різному співвідношенні наочно-інтуїтивних та абстрактно-теоретичних міркувань.

1. Геометричний. Властивість функції встановлюється і обґрунтовується на основі наочно-інтуїтивних міркувань за допомогою аналізу її графіка. Цей підхід має переважати на рівні стандарту.

2. Частково-аналітичний. Властивість функції встановлюється і доводиться, виходячи з її означення та аналітичного задання. Потім ця властивість демонструється на графіку функції. Цей підхід набуває пріоритетного значення на профільному рівні вивчення математики.

3. Комбінований. Спочатку на основі аналізу графіка функції встановлюється її властивість, після чого ця властивість строго обґрунтовується. Комбіноване вивчення більшості властивостей тригонометричних функцій доцільне на академічному рівні.

Розглянемо приклад. Вивчення властивостей парності і непарності тригонометричних функцій в класі будь-якого профілю розпочинається з повторення означень парної і непарної функцій, властивостей їх графіків. Особливу увагу учнів слід звернути на істинність як прямих, так і обернених тверджень, що стосуються графіків парних і непарних функцій. Наприклад: „Графік непарної функції симетричний відносно початку координат” (пряме твердження); „Якщо графік функції симетричний відносно початку координат, то функція непарна” (обернене твердження). Саме останнє твердження дає можливість висловити гіпотезу про непарність синуса на основі аналізу його графіка.

Встановлення і обґрунтування непарності функції синус здійснюємо відповідно до одного з трьох підходів.

1. Геометричний підхід. Учням пропонується проаналізувати графік функції і звернути увагу на його розміщення відносно точки О – початку системи координат. На основі твердження про симетричність цього графіка відносно початку координат робиться висновок про непарність функції синус. Однак вчитель повинен зауважити, що цей висновок отриманий лише на основі геометричних міркувань і потребує строгого доведення.

2. Частково-аналітичний підхід. Доведення здійснюється на основі означень понять: непарна функція, синус дійсного числа, функція . Перша суттєва ознака непарної функції виконується – область визначення функції синус симетрична відносно нуля. Це слідує з означення функції , яка кожному дійсному числу х ставить у відповідність число . Обґрунтування рівності для довільних дійсних значень х зводиться до встановлення симетричності точок одиничного кола, які відповідають числам х та –х [328, с.49]. У цих точок абсциси рівні, а ординати – протилежні числа. Зауважимо, що факт симетричності точок одиничного кола, які відповідають числам х та –х не очевидний і потребує доведення, яке можна здійснити, розглянувши відповідні трикутники [328, с.49].

3. Комбінований підхід. Поєднуються два вищерозглянуті підходи: спочатку висловлюється гіпотеза про непарність синуса за допомогою графіка, а потім вона строго обґрунтовується.

Особливо важливу роль у процесі вивчення тригонометричних функцій відіграє аналогія, оскільки тригонометричні величини синус і косинус, а також тангенс і котангенс числа мають „схожі” означення. Міркування за аналогією дають можливість висловити гіпотезу про наявність певної властивості, спосіб її доведення тощо. Наприклад, доведення властивостей функції косинус аналогічні відповідним доведенням для функції синус. Знаючи про це, після вивчення функції синус, учні можуть самостійно здійснити відповідне дослідження функції косинус. Міркування за аналогією дають можливість не тільки порівнювати тригонометричні функції і „переносити” теоретичні відомості, вони корисні також в межах вивчення однієї тригонометричної функції.

Наприклад, після доведення зростання функції синус на відрізку доцільно запропонувати учням аналогічно довести монотонність цієї функції на інших відрізках її області визначення. Для цього клас поділяється на декілька ситуаційних груп учнів, кожній з яких пропонується довести одне з тверджень, наприклад, функція синус спадає

на відрізках , ; зростає на відрізках ,

VII. Прийоми рівневої диференціації під час вивчення теоретичного матеріалу.

В процесі організації вивчення теоретичного матеріалу необхідно враховувати не тільки особливості навчального профілю, а й пізнавальні можливості та математичні здібності учнів в межах класу. З цією метою в процесі експериментального дослідження нами застосовувалися різні прийоми рівневої диференціації. Систематизуємо їх.

1. Деталізація теоретичного матеріалу. Цей прийом передбачає поділ теоретичного матеріалу на частини, його „подрібнення”, акцентування уваги на проміжних ланках математичних перетворень. Міру деталізації визначає вчитель, виходячи з підготовки учнів, складності та специфіки теоретичного матеріалу.

Приклад. Знайти значення синуса числа .

Варіант пояснення № 1. На одиничному колі числу відповідає точка (вчитель демонструє точку на одиничному колі), яка має координати . Ордината цієї точки дорівнює синусу числа , тому .

Варіант пояснення № 2. 1. За означенням, синус числа дорівнює ординаті точки одиничного кола, в яку переходить початкова точка при повороті навколо центра кола на кут радіан. 2. Числу відповідає кут радіан, градусна міра якого дорівнює . 3. Побудуємо на одиничному колі точку , в яку відображається точка при повороті навколо центра кола на кут радіан або (вчитель виконує побудову). 4. Точка має координати , де – її абсциса, а 0 – ордината. 5. Синус числа дорівнює ординаті точки , тому .

Варіант пояснення № 2 більш деталізований, оскільки містить такі елементи, яких немає у варіанті № 1: 1) формулюється означення синуса числа; 2) називається радіанна та градусна міра кута, який відповідає числу ; 3) демонструються практичні дії, необхідні для побудови точки ; 4) вчитель вказує на абсцису та ординату точки .

2. Диференціація допомоги у процесі засвоєння нового матеріалу. На основі аналізу змісту і характеру теоретичного матеріалу, а також знаючи рівні навченості та здібностей учнів класу, вчитель має передбачити можливі труднощі в засвоєнні нового і шляхи надання відповідної допомоги.

Приклад. До завдання „Обчислити ” доцільно підготувати картки з різною мірою допомоги (рис. 2.4.).

Картка № 1 нагадує учню відповідне означення без його конкретизації; в картці № 2 надається зразок виконання аналогічного завдання без

відповідних теоретичних обґрунтувань; картка № 3 містить найбільшу кількість елементів допомоги. Ці картки призначені для учнів, які самостійно не можуть розв'язати завдання або допустились помилок. Вони пропонуються вчителем у послідовності, що передбачає поступове розширення обсягу допомоги: № 1→№ 2→№ 3. Працюючи над завданням, учень може самостійно вирішити, чи потрібна йому підказка і на якому етапі своєї роботи нею скористатися.

Картка № 1	Картка № 2	Картка № 3
arcsin a – це число з проміжка , синус якого дорівнює a.	, бо 1. ; 2. .	1. arcsin a – це число з проміжка , синус якого дорівнює a. 2. Пригадайте табличні значення функції синус. 3. Синус якого числа з проміжка дорівнює ?

Рис. 2.4. Картки диференційованої допомоги.

3. Диференціація запитань у процесі вивчення теоретичного матеріалу. В ході вивчення теоретичного матеріалу вчитель, з метою здійснення зворотного зв'язку, ставить учням диференційовані запитання. Менш підготовлені учні з низькою научуваністю отримують запитання репродуктивного типу, на безпосереднє відтворення знань. Проблемні запитання, які потребують аналітико-синтетичної діяльності, пропонуються більш підготовленим учням.

Приклад. У процесі виведення формул загальних розв'язків найпростіших тригонометричних рівнянь запитання евристичної бесіди мають диференційований характер:

1) які лінії є графіками функцій і ?

2) чи перетинаються ці графіки? Від чого це залежить?

3) яка кількість коренів рівняння залежно від числа a?

Запитання 1 – репродуктивного, 2 і 3 – проблемного характеру.

4. Окремі елементи теоретичного матеріалу пояснюють та обґрунтовують найбільш підготовлені учні, а саме:

а) виконання окремих етапів доведень;

Приклад. Під час виведення формули перетворення синуса кута через тангенс половини цього кута вчитель може виконати лише перші кроки послідовності перетворень:

1) ; 2) ; 3) ,

і запропонувати учням завершити цю послідовність.

б) введення понять, обґрунтування тверджень за аналогією;

Приклад. Вчитель ознайомлює учнів із загальною схемою знаходження функції, оберненої до даної, і за цією схемою вводить функцію . Найбільш здібним учням пропонується таким самим способом ввести інші обернені тригонометричні функції .

в) пояснення правил, тверджень, окремих математичних дій;

Приклад. За допомогою одиничного кола учні пояснюють, чому функція косинус додатна в 1-й і 4-й координатних чвертях і від'ємна в 2-й і 3-й; чому її значення повторюються на кожному з відрізків довжиною ; чому множиною значень функції косинус є відрізок [-1; 1] та ін.

г) учні пропонують власні приклади, формулюють висновки, узагальнюють та систематизують. Наприклад, у процесі вивчення методів розв'язування тригонометричних рівнянь учні пропонують власні тригонометричні рівняння, які розв'язуються відповідними методами, а також систематизують ці методи у формі таблиці.

Систематичне застосування розглянутих прийомів диференціації під час організації вивчення теоретичного матеріалу створює можливість підтримувати і розвивати інтерес учнів до тригонометрії, а також формувати високі рівні їх навчальної активності.

2.2. Вимоги до системи вправ як засобу формування навичок і вмінь учнів під час вивчення тригонометричного матеріалу

Вправи є основним засобом формування навичок та вмінь учнів, організації їх навчальної діяльності, що спрямована на засвоєння знань. Поняття „математична вправа" будемо розуміти в широкому значенні цього слова (за П. М. Ерднієвим [120, с.48]) і вважатимемо задачі та приклади різновидами вправ.

В педагогічній літературі до трактування понять навички і вміння існують два протилежні підходи. Згідно першого, під навичками розуміють автоматизовані уміння (І. А. Каїров). При другому підході вміння виникають на основі набутої системи навичок (І. Я. Лернер). Будемо дотримуватись другого підходу і розуміти ці поняття з позицій діяльнісного підходу, згідно якого: навичка – це операція, спосіб виконання якої доведений до автоматизму і майже не контролюється свідомістю; уміння – це дія, що складається з упорядкованої сукупності операцій (навичок), що мають спільну мету. Формування уміння може здійснюватись з різною мірою досконалості, причому цей процес завжди контролюється свідомістю [277, с.50]. В основі цих визначень лежить різний ступінь усвідомленості способу дії. Таким чином, згідно такого трактування, спочатку утворюються навички, а потім на їх основі формуються уміння як похідні навичок.

У процесі вивчення тригонометричного матеріалу формуються загальнонавчальні та спеціальні (обчислювальні, формально-оперативні, графічні та інші) навички та уміння. Система вправ, як засіб формування цих умінь, в умовах диференційованого навчання має будуватись із урахуванням як індивідуально-типологічних відмінностей учнів в межах класу, так і профілю їх навчання.

У системі вправ з тригонометрії для профільного навчання математики важливе місце займають вправи на формування обчислювальних та графічних навичок та умінь учнів.

Правильно організована обчислювальна робота учнів дозволяє виховувати в них цінні трудові якості: відповідальне ставлення до своєї роботи, уміння виявляти і виправляти допущені помилки, акуратність виконання завдання, творче відношення до праці. Особливість тригонометричних обчислень полягає в тому, що тригонометричні функції складніші за алгебраїчні, їх значення часто виражаються ірраціональними числами. Внаслідок цього, обчислення набувають наближеного характеру навіть тоді, коли вихідні дані задачі точні числа. Крім того, учні повинні уміти розв'язувати задачі з числовими даними, які зустрічаються в практичній діяльності людини. Ці дані, здебільшого, є наближеними. Тому важливо розглянути два типи вправ на тригонометричні обчислення залежно від точності вихідних даних:

1) вправи, в яких вихідні дані точні числа, наприклад: „Записати радіанну міру кута у вигляді десяткового дробу з двома значущими цифрами";

2) вправи з наближеними даними, наприклад: „Визначити косинус, тангенс і котангенс аргументу , якщо ".

В сучасній науці, техніці, виробничій діяльності людини графічне представлення різноманітної інформації досить поширене. Уміння будувати графіки функцій, здійснювати графічну інтерпретацію реальних явищ, геометрично тлумачити аналітичні вирази все частіше відносять до елементів не тільки математичної, але й загальнолюдської культури. Тому у класі будь-якого профілю навчання слід приділити увагу формуванню на тригонометричному матеріалі графічних навичок та умінь учнів.

Важливе місце в системі вправ на формування графічних навичок та умінь займають вправи на побудову графіків гармонічних коливань.

Вправа. Побудувати графік гармонічного коливання .

Розглянемо два способи побудови графіків функцій типу , на основі яких ґрунтується розв'язування цієї вправи.

I. Спосіб геометричних перетворень.

Рівняння запишемо у вигляді .

Графік гармонічного коливання дістанемо з графіка функції послідовним виконанням таких геометричних

перетворень:

1) стиснення (розтяг) графіка відносно осі Oy (залежно від значення);

2) стиснення (розтяг) графіка відносно осі Ox (залежно від значення A);

3) паралельне перенесення графіка вліво (вправо) вздовж осі Ox (

залежно від значення).

Цей спосіб є найбільш поширеним у шкільній практиці. Для його ефективної практичної реалізації необхідно повторити з учнями алгоритми геометричних перетворень та, за необхідності, виконати відповідні допоміжні вправи.

Варто запропонувати учням реалізувати цей спосіб побудови за допомогою ППЗ GRAN1. Комп'ютерна візуалізація геометричних перетворень графіків функцій сприяє запам'ятовуванню алгоритмів побудов, розумінню їх змісту. Прослідкувавши за комп'ютерною демонстрацією, учень отримує можливість самостійно сформулювати алгоритм побудови, запропонувати власні приклади і відразу розв'язати їх графічно.

II. Спосіб побудови за характерними точками.

1. Знайти точки перетину графіка функції з віссю абсцис, розв'язавши рівняння .

2. Знайти точки максимуму і мінімуму функції, розв'язавши рівняння , (в точках максимуму функція набуває значення , а в точках мінімуму – значення).

3. Через знайдені точки провести лінію типу синусоїди, врахувавши,

що період функції дорівнює .

Спосіб побудови графіка функції за характерними точками знайомий учням з попередніх класів. Наприклад, досить часто доводиться схематично будувати параболу, знаючи координати її вершини, точок перетину з віссю абсцис та напрям віток параболи. В процесі побудови графіка гармонічного коливання за характерними точками здійснюється пропедевтика поняття тригонометричного рівняння.

Досить корисні у методичному та дидактичному відношенні побудови графіків гармонічних коливань обома способами, що дає можливість їх зіставлення, з'ясування переваг та недоліків.

На основі аналізу відповідної психолого-педагогічної та науково-методичної літератури, з урахуванням особливостей диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу у профільних класах та результатів педагогічного експерименту, нами були виділені такі вимоги до системи вправ, яка спрямована на формування навичок та вмінь учнів: вимога змістової диференціації, рівневої диференціації, доступності,

реалізації міжпредметних зв'язків, професійної значимості. Розкриємо зміст кожної з вимог.

Вимога змістової диференціації ґрунтується на структурній схемі змістової диференціації тригонометричного матеріалу (п.1.4). Змістове наповнення вправ варіюється відповідно до діючих профільних програм з математики, математичних здібностей та інтересів учнів, профілю навчання.

Рівнева диференціація вправ може бути здійснена за базовим, поглибленим та додатковим блоками змісту. Наприклад, розглянемо вправи для класу математичного профілю з теми „Тригонометричні рівняння", що диференційовані за змістовими блоками.

Вправа. Розв'язати тригонометричні рівняння

1) ; 2) ; 3) .

В рівнянні 1 представлений базовий зміст тригонометричного матеріалу: метод заміни надежить до обов'язкових методів вивчення тригонометричних рівнянь на профільному рівні. Тригонометричні рівняння з модулями (рівняння 2) відносимо до поглибленого, а рівняння з аркфункціями (рівняння 3) – до додаткового змісту тригонометричного матеріалу.

Розглянемо приклад диференціації вправ з теми „Радіанна міра кута" за складовими змісту тригонометричного матеріалу. В задачах, які пропонуються на рівні стандарту, доцільно відображати навколишню дійсність, повсякденний життєвий досвід учнів. Наприклад: „Намет туристів має форму рівнобедреної трапеції, один кут якої . Виразіть у радіанній мірі її більший кут". Вправи, в яких присутні поряд з математичними і гуманітарні об'єкти, допомагають конкретизувати абстрактні математичні поняття, а відтак, зробити їх більш зрозумілими та доступними для учнів. До того ж процес розв'язування задачі здійснюється не тільки на когнітивному, а й на емоційно-ціннісному, чуттєвому рівні. Учня, який навчається в класі фізичного профілю, зацікавить задача з технічним змістом, що відображає виробничу діяльність сучасної людини: „Шків надшвидкісного електродвигуна робить 120000 обертів за хвилину. Визначити кутову швидкість обертання цього шківа в градусах за секунду і в радіанах за секунду". Теоретична складова змісту тригонометричного матеріалу найбільше представлена у вправах для класу математичного профілю: „Записати в радіанній мірі внутрішній кут правильного трикутника, чотирикутника, п'ятикутника та n-кутника".

Вимога рівневої диференціації. Для врахування відмінностей в рівнях знань, навичок та вмінь учнів в межах класу необхідна диференціація вправ за складністю. В науково-педагогічній літературі розрізняють терміни „складність" і „трудність" завдання. Складність є об'єктивною властивістю змісту навчального матеріалу, а трудність завдання – суб'єктивна характеристика, пов'язана з рівнем підготовки учня. З'ясовуючи складність вправи, необхідно враховувати те, що її структуру утворює два компонента: 1) діяльність учня; 2) зміст вправи, на основі якого ця діяльність здійснюється [195, с.83]. Репродуктивна діяльність складається з дій, що виконуються за зразком, тому вона менш складна у порівнянні з продуктивною, яка потребує перенесення знань та умінь із знайомої ситуації в нову. Продуктивна діяльність зумовлює більші труднощі в учнів ніж репродуктивна, але вона більш цікава для учнів, розвиває їх мисленнєві здібності.

Під час оцінювання рівня складності вправи пропонуємо враховувати такі показники:

- міра новизни ситуації, в якій учень застосовує знання;

Це один з найбільш загальних показників, за яким вправи класифікують за складністю. Найчастіше виділяють три рівні складності. Початковий рівень – вправи на безпосереднє застосування теоретичних знань в знайомих для учня ситуаціях. Середній рівень передбачає застосування знань в змінених умовах, виявлення суттєвих ознак понять, причинно-наслідкових зв’язків між ними. Високий рівень складності характеризується застосуванням знань в нових умовах та новизною отриманих результатів.

- число проміжних операцій, логічних ланок, які необхідно виконати;

Наприклад, у процесі спрощення тригонометричних виразів

застосовується різна кількість тригонометричних перетворень: у виразі А – два перетворення (1. ; 2. 1+4=5), у виразі В – чотири, у виразі С – вісім перетворень. Тому маємо три вправи зростаючої складності: від найпростішої А до найскладнішої С. Приклад системи усних вправ, що диференційовані на основі цього показника, розглянемо в додатку К.

- виконання прямої чи оберненої дії у процесі розв’язування;

Виконання оберненої дії, здебільшого, є складнішою операцією, ніж виконання прямої. Наприклад, спрощення виразу передбачає пряме застосування основної тригонометричної тотожності. В результаті, суму перших двох доданків виразу замінюють одиницею: , . У процесі спрощення виразу слід виконати обернену дію – замінити одиницю на суму квадратів синуса і косинуса: . Таким чином, вправу на спрощення виразу В вважаємо складнішою за вправу на спрощення виразу А за показником виконання прямої чи оберненої дії.

- внутрішньопредметні зв’язки навчального матеріалу;

Чим більшу кількість внутрішньопредметних зв’язків необхідно застосувати у процесі виконання вправи, тим більшу міру складності вона має. Наприклад, спрощення тригонометричних виразів і передбачає застосування формул скороченого множення, які вивчаються у 7-му класі. У процесі спрощення виразу В необхідно застосувати дві формули: для суми кубів та квадрату двочлена, тоді як у виразі А необхідне застосування однієї формули – різниці квадратів. Отже, за показником, що розглядається, спрощення виразу В складніше за спрощення виразу А.

- варіативність процесу відшукання розв'язку;

Пошук способу розв'язування належить до основних складових процесу розв'язування завдання. Чим більше варіантів можна застосувати у процесі пошуку, тим складніше відшукати раціональний спосіб. При переході від завдань алгоритмічного типу до творчих відбувається поступове розширення „зони пошуку", що ускладнює процес розв'язування.

- міжпредметні зв'язки навчального матеріалу.

Складність вправи залежить від змісту та обсягу відомостей міжпредметного характеру, які потрібно застосувати у процесі її розв'язування. Дійсно, учень повинен не тільки правильно застосувати необхідні математичні поняття, а й також врахувати відомості, наприклад, фізичного, геометричного змісту, їх адаптувати до конкретної математичної ситуації. Цим пояснюються труднощі, з якими зустрічаються учні при розв'язуванні задач міжпредметного змісту.

Диференціацію вправ за рівнями складності слід розглядати як засіб систематичного і послідовного розвитку продуктивного мислення учня, формування позитивного ставлення до навчання. Кожне наступне завдання пропонується з урахуванням змін в пізнавальних можливостях учня, з орієнтацією на його „зону найближчого розвитку".

Вимога доступності. Вправи системи мають відповідати індивідуальним, віковим особливостям учня, рівню його загального та математичного розвитку. Чим складніший навчальний матеріал, тим простіше і дохідливіше слід його пропонувати учню для засвоєння. Вимога доступності досягається шляхом варіювання складності вправ, послідовності їх розв'язування, а також міри допомоги з боку вчителя.

Як показали результати наших експериментальних досліджень, допомогу слід диференціювати за об'ємом та характером. Об'єм допоміжної інформації в ході розв'язування необхідно дозувати від мінімальної до найбільш повної. Допомога відрізняється також за характером: пред'явлення зразка, розв'язування допоміжних завдань, навідні запитання, наочне підкріплення тощо. Систематизуємо способи допомоги у процесі розв'язування вправ відповідно до ступеня самостійності та усвідомленості навчальних дій учня (табл. 2.3).

Таблиця 2.3

Диференціація допомоги у процесі розв'язування вправ

Способи допомоги

Інструкційні	Перетворюючі
1. Зразок 2. Пам'ятка 3. Теоретична довідка	1. Допоміжні запитання 2. Допоміжні вправи 3. Допоміжні вказівки 4. Виконання частини завдання 5. Додаткова конкретизація

Розглянемо кожен спосіб допомоги детальніше.

Пред'явлення зразка розв'язування – це один з початкових і необхідних етапів у процесі навчання учнів розв'язувати задачі. Зразок демонструє методи та способи розв'язування, операції та прийоми, які необхідно здійснити, послідовність їх виконання. Наприклад, до вправи: „Обчислити ” зразок розв'язання може бути такий:

.

Враховуючи, що мова і мислення тісно пов'язані між собою, зразок способу дії доцільно супроводжувати словесним описом та поясненнями. Цим попереджується механічне копіювання зразка. В подальшій роботі з вправами певного типу зразок способу дії слід пропонувати у більш

згорнутому вигляді: . Таким чином, переходячи від зразка в розгорнутому вигляді до скороченого зразка, учні узагальнюють обчислювальний прийом і самостійно його переносять в аналогічні умови.

Пам'ятки, оформлені у вигляді послідовності команд, містять „готову” програму дій, керуючись якою учень приходить до правильного

результату. Наприклад, до вправи „Дослідити функцію на парність” можна запропонувати таку пам'ятку для дослідження функції на парність-непарність:

1. Визначити область визначення функції.

2. Якщо область визначення не симетрична відносно початку координат, то функція ні парна ні непарна. Дослідження функції закінчено. Якщо область визначення симетрична – перейти до п.3.

3. В аналітичному виразі функції зробити заміну змінної x на –x.

4. Якщо виконується умова , то функція парна. Дослідження функції закінчено.

5. Якщо виконується умова , то функція непарна. Дослідження функції закінчено.

6. Якщо жодна з умов , не виконується, то функція ні парна ні непарна. Дослідження функції закінчено.

Пам’ятки доцільно пропонувати на початковому етапі розв’язування вправ певного типу, коли учні виконують завдання розгорнуто, відпрацьовуючи кожен етап. Слід намагатися, де це можливо, згорнути пам’ятку до мінімуму. Тоді вона набуває вигляд короткого опорного запису, яким зручно та легко користуватися.

У процесі розв’язування вправ важливо правильно обрати необхідну формулу, твердження, правило, на основі яких виконуються подальші практичні дії. Дієвою допомогою учню в цій роботі є теоретичні довідки, що містять основні теоретичні відомості, необхідні для виконання завдань. Наприклад, до вправи „Звести до значення синуса гострого кута” слід запропонувати теоретичну довідку: . Теоретична довідка спрямовує учня на правильний вибір способу дії, формує вміння застосовувати набуті знання в практичній роботі.

Спільна ознака інструкційних способів допомоги полягає в тому, що допоміжні елементи розкривають спосіб дії пооператиційно або у готовому вигляді пропонується шлях розв’язування. Інструкційна допомога спрямована на розвиток першого рівня самостійності (наслідування, копіювання, перенесення за аналогією), при цьому створюються умови для переходу до завдань, які вимагають більш високого рівня пізнавальної активності учнів.

Основне призначення другої групи способів допомоги – цілеспрямовано змінювати процес розв’язування завдання, націлювати учня на самостійну роботу вищих рівнів, що передбачає самостійне застосування знань, їх перенесення в змінені умови. В результаті учні не наслідують готовий зразок, їх діяльність поступово набуває перетворюючого характеру.

Дидактичне призначення допоміжних запитань – допомогти учню відтворити знання, що необхідні для розв’язування вправи та створити умови для самоконтролю. Наприклад, до завдання „Порівняти і ”доцільно поставити допоміжні запитання типу: „Яким координатним чвертям належать кути і 6 радіан?”, „Які знаки має котангенс числа в координатних чвертях?”. Відповідаючи на ці запитання, учень самостійно пригадує означення і властивості котангенса числа та застосовує їх в конкретній ситуації.

Наступний спосіб допомоги – застосування допоміжних вправ. Вони допомагають учню з’ясувати структуру основного завдання, виявити його тип, спосіб розв’язування. Допоміжна вправа, звичайно, подібна за способом дії і простіша за числовими даними. Наприклад, до вправи „

Довести тотожність ” допоміжною може

бути така вправа: „Довести тотожність ”. Допоміжна вправа має бути доступною для учнів і підводити їх до розв’язування основного завдання. Добираючи допоміжні вправи, слід передбачити характерні труднощі, з якими можуть зустрітися учні в процесі роботи над основним завданням.

Допоміжні вказівки містять відомості про спосіб діяльності або про певну ланку способу дії. Вказівки доцільно застосовувати у тих випадках, коли нове завдання має деяку подібність з попереднім, а тому є основою для перенесення раніше засвоєних способів роботи. Наприклад, „

Спростити вираз ”. Вказівка: почленно поділити чисельник

виразу на його знаменник і врахувати, що і .

Допомога у формі виконання частини завдання „підштовхує” учня до подальших самостійних дій, спрямовує його міркування на шляху до правильної відповіді. Такий спосіб допомоги можна представити у різних формах, зокрема, у формі завдань „з пропусками”, де самостійна робота учня зводиться до завершення розв’язання за відомими його окремими ланками. Наприклад, „Знайти значення виразу ”. Допомога:

.

Додаткова конкретизація завдання у формі малюнка, графіка, схеми допомагає учню глибше проаналізувати умову задачі, осмислити відношення і залежності між величинами. Додаткова конкретизація сприяє формуванню умінь узагальнювати і конкретизувати, а також розвитку та взаємодії конкретних і абстрактних форм мислення. Наприклад, вправу „Визначити число , якщо відповідна точка на одиничному колі має

координати ” можна конкретизувати зображенням точки , її проекцій на осі системи координат та відповідного кута .

Таким чином, управління навчальною діяльністю учнів шляхом надання їм дозованої допомоги сприяє формуванню в них навичок саморегуляції дій, усвідомленості процесу розв’язування завдання. Допоміжні засоби спрямовують пізнавальну діяльність учня, яка виходить за межі репродуктивного мислення і набуває продуктивного характеру.

Вимога реалізації міжпредметних зв’язків. Відомо, що міжпредметні зв’язки сприяють підвищенню науковості навчання, підсилюють пошукову діяльність учнів, створюють умови для всебічного розвитку особистості. Тому вправи системи мають інтегрувати знання учнів з різних навчальних предметів, в першу чергу, з алгебри і початків аналізу, геометрії, фізики, інформатики. Міжпредметні зв’язки тригонометричного матеріалу з цими навчальними предметами передбачають вивчення одних і тих самих об’єктів різними засобами: засобами фізики, математичного моделювання, комп’ютерної візуалізації тощо.

Задача. Пучок паралельних променів світла, що падає на письмовий стіл під кутом , створює освітленість 50 люкс. Під яким кутом до столу слід спрямувати цей пучок, щоб надати йому освітленість 40 люкс?

Маємо прикладну задачу на формування вмінь математичного моделювання. Розв'яжемо її за схемою, що складається з трьох етапів: 1) переклад фізичної задачі на мову математики; 2) розв'язування математичної задачі; 3) інтерпретація отриманих результатів з фізичної точки зору.

1) З фізики відомо, що освітленість поверхні E, що знаходиться на відстані r від джерела світла із силою I, обчислюється за формулою

, де – кут падіння світлового променя на поверхню. З умови

задачі отримуємо два співвідношення , , звідки

.

2) Розв'яжемо тригонометричне рівняння . Після

спрощення це рівняння набуде вигляду . Його загальний

розв'язок , .

3) Кут падіння світлового променя має лежати в межах . Ці

межі задовольняє розв'язок тригонометричного рівняння

або . Отже, пучок світла слід спрямувати до столу під кутом , щоб надати йому освітленість 40 люкс.

Для розв'язування цієї задачі необхідні як математичні так і фізичні знання та вміння, а саме: знання формули для обчислення освітленості поверхні, на яку падає світловий потік, вміння розв'язувати тригонометричні рівняння, аналізувати їх загальні розв'язки.

Для класів, де фізика належить до профільних навчальних предметів, обов'язковою складовою системи вправ мають бути задачі з технічним змістом, які розв'язуються за допомогою тригонометричного матеріалу.

Задача. Зовнішній діаметр гвинтової різьби D=50 мм, внутрішній діаметр d=42 мм, висота гвинтового ходу (крок гвинта) h=6 мм. Визначити кут підйому гвинта.

Розв'язання. Відомо, що кут підйому гвинта x визначається з формули

. Знайдемо середній діаметр гвинта мм.

Підставимо числові значення у формулу для визначення x і отримаємо

тригонометричне рівняння . Наближений корінь цього рівняння, який задовольняє умову задачі, .

Геометричним задачам, які розв'язуються за допомогою тригонометричного матеріалу, більше уваги слід приділити в класах математичного та фізико-математичного профілів. В курсі геометрії тригонометричні рівняння дають можливість обчислювати кути, залежні від лінійних елементів. Таким чином, тригонометричний матеріал значно розширює коло геометричних задач, які учні можуть розв'язати засобами шкільної математики.

Задача. Площа паралелограма ABCD дорівнює , а його діагоналі AC і BD відповідно рівні і . Визначити кут між діагоналями.

У процесі розв'язування цієї задачі приходимо до тригонометричного

рівняння , з якого визначаємо один з невідомих кутів . Другий кут дорівнює різниці: (і – суміжні кути). В результаті отримаємо числові значення кутів: , .

Вимога професійної значимості. Вправи системи повинні враховувати характер майбутньої професійної діяльності учнів профільного класу. На профільному рівні вивчення математики до професійно значущих віднесемо вправи, які моделюють творчий пошук, інтелектуальне дослідження в галузі математики, формують навички теоретичних обґрунтувань та узагальнень. На академічному рівні важливі за професійною значимістю обчислювальні вправи, які потребують застосування таблиць (табличні обчислення), обчислювальної техніки (інструментальні обчислення), графіків (графічні обчислення).

Професійно важливі якості особистості учня, який цікавиться гуманітарними науками, формують вправи, процес розв'язування яких передбачає раціональне співвідношення логічного та образного, певний відхід від формальної сторони змісту навчання та строгої логіки викладу. Розглянемо приклад.

Вправа. Користуючись графіком функції , що зображений на малюнку, охарактеризуйте її за схемою: 1) область визначення; 2) область значень; 3) парність (непарність); 4) періодичність; 5) нулі; 6) проміжки зростання (спадання); 7) точки максимуму (мінімуму); 8) проміжки, де функція додатна (від'ємна).

Для аналізу запропонованого графіка корисно застосувати прийоми, які ґрунтуються на життєвому досвіді учня, його образно-емоційному сприйнятті навколишнього світу: 1) якщо пофарбувати графік рідкою фарбою, то краплі фарби падають на область визначення функції; 2)

графік – це гориста місцевість, висота гір однакова і вказує на множину значень функції; 3) в точках максимуму дощові краплі скочуються донизу, а точки мінімуму наповнюються водою; 4) порівняємо графік функції з дорогою, по якій рухається лижник у напрямі осі абсцис. На проміжках спадання функції лижник легко спускається з снігової гірки, на проміжках зростання – його підйом утруднений; 5) верхня і нижня координатні півплощини – це два середовища (повітряне і водне), які розділені межею (віссю абсцис). Графік – це деякий предмет, який плаває на поверхні. Проміжкам знакододатності відповідають ті частини предмета, які знаходяться на поверхні, проміжкам знаковід'ємності – занурені у воду частини предмета; нулі – це точки предмета, які розміщені на межі середовищ; 6) для демонстрування симетрії графіка відносно осі ординат складемо аркуш паперу, на якому зображений графік, по осі Оу. Точки графіка, розміщені по обидва боки від лінії перегину, співпадуть. Для кращої візуалізації можна використати напівпрозорий папір.

В результаті застосування розглянутих прийомів тригонометричний матеріал стає більш доступним, цікавим та зрозумілим для учнів. Так організований процес розв'язування вправи розкриває майбутнім письменникам, художникам, дизайнерам особливості їх майбутньої професійної діяльності, що спрямована на образне осмислення навколишнього світу.

Система вправ, побудована з урахуванням розглянутих вимог, забезпечує можливості диференційованого формування навичок та вмінь учнів відповідно до профілю їх навчання, рівня загальної та математичної підготовки. Диференціація вправ відповідно до профілю досягається шляхом врахування професійної значимості, міжпредметних зв'язків, прикладної спрямованості тригонометричного матеріалу, варіації його змісту. Рівнева диференціація вправ системи здійснюється шляхом поступового зростання їх складності, надання педагогічної допомоги в процесі розв'язування, варіації рівня самостійності виконання.

2.3. Диференціація навчання тригонометричного матеріалу на елективних курсах

Різноманітність індивідуальних відмінностей учнів профільної школи більш повно можна врахувати на елективних курсах, які системно поглиблюють диференціацію навчального процесу. Над проблемами розробки та впровадження елективних курсів в системі профільного навчання, в тому числі з математики, працюють як вітчизняні, так і зарубіжні дослідники [55, 56, 118, 149, 308]. Учні з різними рівнями математичних здібностей, навченості, мотивації в межах елективного курсу отримують можливість вивчати ті аспекти навчального матеріалу, які для них найбільш цікаві, доступні та корисні.

Тригонометричний матеріал має потужний прикладний потенціал, знання з тригонометрії необхідні представникам багатьох професій (наприклад, архітекторам, інженерам, будівельникам), у процесі створення різноманітних технічних конструкцій, вимірювань на місцевості, астрономічних обчислень. Тому на елективних курсах необхідно приділити значну увагу прикладній спрямованості тригонометричного матеріалу, формуванню навичок та умінь його застосування.

До основних функцій елективних курсів, які присвячені тригонометричному матеріалу, віднесемо поглиблення і розширення змісту тригонометричного матеріалу, що передбачений діючими профільними програмами з математики, задоволення пізнавальних інтересів школярів, забезпечення прикладної та загальнокультурної спрямованості тригонометричного матеріалу. Але найбільш вагомою, на наш погляд, є функція формування на тригонометричному матеріалі досвіду творчої діяльності, розвиток дослідницьких компетенцій учнів.

Елективні курси створюють умови для реалізації пізнавальних інтересів та запитів учнів, сприяють раціональному поєднанню рівневої та профільної диференціації навчання. Учні одного профільного класу отримують можливість обирати різні елективні курси із запропонованого переліку. Таким чином, в одному профільному класі може вивчатись декілька елективних курсів різними групами учнів. Так утворені групи відрізняються більшою однорідністю навчально-пізнавальних характеристик, інтересів та спільністю професійних планів у порівнянні з усім класом. Це дає вчителю можливість більш варіативно організувати роботу учня, максимально врахувати особливості його пізнавального розвитку.

На заняттях елективних курсів необхідно створити оптимальні умови для урахування індивідуальних пізнавальних можливостей та потреб учнів . З цією метою організація елективних курсів має базуватись на принципах:

- вибірковості (полягає в можливості вибору учнем того напряму навчально-пошукової роботи, який найбільшою мірою відповідає його інтересам та нахилам);

- індивідуалізації (орієнтація на індивідуальний темп школяра, власну базу його знань, навичок та умінь, рівні розвитку його особистісних якостей);

- процесуальності (організація наукової роботи учня має бути спрямована, в першу чергу, на процес пізнання, відкриття, а не на кінцевий продукт цієї діяльності. Саме в ході дослідження, в процесі пошуку істини відбувається інтелектуальний розвиток учня, формування його творчих здібностей);

- модульності (представлення дослідницької роботи учня у формі окремих змістово-процесуальних блоків (модулів), можливість вилучення з розгляду окремих блоків або доповнення додатковими модулями);

- професійно-орієнтуючому (орієнтація на моделювання за допомогою тригонометричного матеріалу професійно-важливих видів діяльності, які найбільш цікавлять учнів. Наприклад, це діяльність фахівця-математика, інженера, соціолога, історика).

Так організований навчальний процес сприяє формуванню стійких спеціальних інтересів до певних видів людської діяльності, які згодом переходять в прагнення професійно займатися цими видами діяльності. Крім того, зацікавленість тією чи іншою навчальною роботою та мотивація займатися нею тісно пов'язані з проявом відповідних здібностей та ініціюють їх розвиток.

У процесі вивчення спецкурсів зростає значення самостійної роботи учнів з довідковою та додатковою літературою математичного змісту. Працюючи з книгою, учень отримує можливість працювати в індивідуальному темпі, він робить власні „маленькі відкриття", самостійно осмислює та засвоює навчальну інформацію за допомогою доступних для нього засобів (власноруч створених плану, рисунка, опорного конспекта).

Роль елективних курсів є визначальною для розвитку самостійності як важливої якості особистості школяра, що є передумовою його творчої активності. Самостійність учіння може мати як характер відтворення, репродукції (відтворююча самостійність), так і творчий, перетворюючий характер (перетворююча самостійність). Ці типи самостійності взаємопов'язані та взаємообумовлені, причому перший тип має тенденцію переходу в другий. Тому одним з головних завдань елективних курсів має бути формування та розвиток перетворюючої самостійності школярів, їх здатності до творчого пізнання та перетворення дійсності.

Особливістю функціонування елективних курсів має бути їх спрямованість на диференційовану дослідницьку діяльність учнів, в процесі якої вони оволодівають методами наукових досліджень та відкривають самостійно або з сторонньою допомогою нові для себе знання. Зрозуміло, що організувати якісну дослідницьку роботу навіть відносно однорідної групи учнів можливо лише на різних рівнях, залежно від їх підготовки та навчальних характеристик. Самостійне виконання учнем дослідницького завдання супроводжується, в разі необхідності, допомогою з боку вчителя, яка нормується у вигляді окремих порцій, які послідовно пропонуються за результатами зворотного зв'язку.

В структурі дослідницької діяльності старшокласника при вивченні тригонометричного матеріалу виділимо три етапи: орієнтуючий етап О (вибір мети діяльності, шляхів та засобів її реалізації); виконавчий етап В (здійснення практичних дій, перевірка гіпотез, виконання алгоритмів, реалізація плану) та контролюючий етап К (рефлексія результатів діяльності, самоконтроль та самооцінювання). Залежно від міри самостійності дій в реалізації цих етапів розглянемо рівні дослідницької діяльності учня:

І – високий рівень: на всіх етапах діяльності має місце самостійна робота учня (ОсВсКс);

ІІ – достатній рівень: два з розглянутих етапів учень виконує самостійно без сторонньої допомоги (ОсВсКд, ОсВдКс, ОдВсКс);

ІІІ – середній рівень: лише один етап реалізується учнем самостійно (ОсВдКд, ОдВсКд, ОдВдКс);

ІV – задовільний рівень: всі етапи дослідницької діяльності здійснюються з допомогою вчителя (ОдВдКд).

Індексами „с” та „д” позначено відповідно самостійну роботу учня та педагогічну допомогу в реалізації дій. Розглянемо приклад.

Дослідницьке завдання. Побудувати в полярних координатах криву , якщо і . Дослідити її форму залежно від даних значень .

І. Орієнтуючий етап О передбачає з'ясування (самостійно або за допомогою вчителя):

1) змісту понять: полярна система координат, полярні координати точки, полярне рівняння лінії та його побудова;

2) загальної схеми розв'язання (дослідження функції ; складання таблиці значень полярного радіуса; побудова за точками в полярній системі координат кривих, які відповідають даним значенням m; порівняння кривих за формою);

3) необхідних засобів для побудови: лінійка, циркуль, транспортир, калькулятор та інші.

ІІ. Виконавчий етап В. На цьому етапі виконуються практичні дії, загальна схема розв'язання деталізується.

1. З'ясувати властивості функції (область визначення, множина значень, парність, періодичність та інші).

2. Рівномірно розбити відрізок з кроком ; заповнити таблицю залежності .

3. Побудувати полярну систему координат, прийнявши за одиницю масштабу відрізок довжиною 50 мм.

4. Провести з центра кола промені, які відповідають кутам і побудувати точки .

5. Сполучити побудовані точки плавною лінією. Для більш точної побудови слід зменшити крок полярного кута.

6. Побудувавши криві для усіх значень .3 , їх порівняти за формою.

Виконуючи дослідження, учень, за потреби, отримує допоміжні пояснення та поради від учителя, наприклад: у випадку, коли полярний радіус набуває від'ємного значення, його модуль слід відкласти у протилежному напрямі, що характеризується кутом **(точки, побудовані таким способом, утворюють уявну частину кривої).**

ІІІ. Котролюючий етап К. Графічний аналіз рисунків дає можливість зробити висновки щодо форми кривих: крива має форму розетки з різною

кількістю пелюсток; загальна кількість різних пелюсток розетки (як дійсних, так і уявних) дорівнює: значенню параметра m, якщо m – непарне ; 2m, якщо m парне.

Відповідь до завдання слід перевірити за допомогою комп'ютерної побудови розеток, обравши, наприклад, програму GRAN1 (додаток Л). В цій програмі доцільно побудувати розетки для значень m, які в умові завдання не вказані (і $m>6$, m – дробове число тощо) і зробити відповідні узагальнення.

Контролюючий етап передбачає також самооцінювання учнем процесу та результату виконання дослідницького завдання, аналіз помилок та їх виправлення.

У процесі виконання цього завдання виникає можливість активізувати естетичний розвиток учнів. Побудова розеток виховує відчуття краси та гармонії навколишнього світу, демонструє естетику тригонометрії.

Зауважимо, що пропонована класифікація рівнів дослідницької діяльності має умовний узагальнюючий характер і дає лише наближене уявлення про міру сформованості навичок творчої роботи учня в процесі пізнання, „перевідкриття” невідомих йому аспектів тригонометричного матеріалу.

На наш погляд, підсумкова оцінка вивчення курсу за вибором має бути безбальною з метою створення комфортних психолого-педагогічних умов для учнів. Варіанти підсумкових оцінок можуть бути такі: зараховано , захищено, розроблено, виконано тощо. У процесі ж поточного контролю бальне оцінювання необхідне: воно є індикатором правильних пізнавальних дій учня і виконує навчальну, контролюючу та корегуючу функції.

Елективні курси, присвячені історії тригонометрії, демонструють внесок тригонометрії в розвиток культурного надбання людської цивілізації, нерозривний зв'язок науки, культури та розвитку суспільства. Екскурси в історію тригонометрії вказують на матеріальне підґрунтя її розвитку, підкреслюють практичне значення тригонометричних знань, розширюють кругозір учнів.

Розроблений нами спецкурс „Історія тригонометрії” (додаток М.1) присвячений розгляду історичних відомостей про виникнення та формування науки тригонометрії, основні етапи її розвитку, наукову діяльність з тригонометрії математиків, астрономів, філософів різних часів та народів. Мета спецкурсу: формування наукового світогляду, загальний розвиток учнів засобами тригонометрії [78]. Для учнів, які планують пов'язати майбутню навчальну та професійну діяльність з гуманітарними науками, вивчення цього спецкурсу доцільне з метою збагачення літературних, історичних, філософських знань.

У процесі вивчення спецкурсу „Історія тригонометрії” особливу увагу слід звернути на питання, які розкривають походження тригонометричної символіки та термінології, роль практичної діяльності людини в

зародженні тригонометрії, порівняльну характеристику етапів розвитку тригонометрії.

Вважаємо, що немає необхідності вимагати від учнів запам'ятовування всіх фактів, імен, дат тощо. Достатньо, щоб в результаті вивчення спецкурсу учні вільно орієнтувалися в періодах розвитку тригонометрії, характеризували основні наукові здобутки та специфіку історичних періодів, називали видатних вчених, які розвивали тригонометрію та їх наукові праці. Водночас, важливо формувати загальнонавчальні навички та уміння самостійної творчої роботи, наукового пошуку та дослідження.

Елективні курси прикладного та міжпредметного характеру мають на меті: 1) ознайомити учнів із шляхами та методами застосування тригонометричного матеріалу в прикладних галузях знань; 2) інтегрувати знання тригонометричного матеріалу з навчальними предметами природничого циклу (фізикою та астрономією). Саме спецкурси цього типу найбільшою мірою дають можливість реалізувати прикладний потенціал тригонометрії та наблизити навчання до життя. Практичні застосування тригонометрії повинні бути в центрі уваги учня – майбутнього науковця, робітника, активного члена суспільства.

В межах годин елективних курсів з'являється можливість більш детально розглянути застосування тригонометричного матеріалу в техніці. Учням, які планують пов'язати майбутню навчальну та трудову діяльність з технічною галуззю знань, доцільно запропонувати елективний курс, що демонструє взаємозв'язок тригонометрії і техніки. Його зміст можуть складати питання, які присвячені вивченню технічних об'єктів та понять (пасова передача, гвинтова лінія, конусність, тертя в механізмах) за допомогою тригонометричного матеріалу, а також задачі виробничо-технічного змісту. Корисний з точки зору практичної та прикладної підготовки учнів елективний курс з вивчення застосувань тригонометрії в електротехніці.

У процесі дослідження нами було розроблено та апробовано спецкурс міжпредметного характеру „Тригонометрія в задачах фізики" (додаток М.2), присвячений розв'язуванню задач з різних розділів фізики (кінематики, динаміки, електрики, оптики) із застосуванням тригонометричного матеріалу. Мета вивчення спецкурсу – формування уявлень про єдину природничо-наукову картину світу, розвиток творчих здібностей учнів [78].

Спецкурс демонструє практичну значущість тригонометричного матеріалу, його застосування у фізиці. Тригонометричні співвідношення дають змогу знаходити проекції швидкостей, прискорень, сил та інших векторних фізичних величин на осі прямокутної системи координат. Таким чином, за допомогою тригонометрії здійснюється перехід від векторної до скалярної форми запису рівнянь, що отримані в процесі розв'язування фізичних задач. Розв'язування задач спецкурсу ґрунтується на знаннях, які отримали учні на уроках фізики. Тому передумовою

ефективної роботи учнів на елективному курсі є актуалізація необхідних теоретичних відомостей з фізики.

У процесі вивчення спецкурсу „Тригонометрія в задачах фізики” формуються уміння математичного моделювання фізичних процесів та явищ за допомогою тригонометрії. Тригонометричний матеріал знаходить практичне застосування в реальних ситуаціях, що відображені у задачах; демонструється той факт, що тригонометрія як галузь наукового знання походить з потреб практичної діяльності людини.

Підвищенню теоретичної підготовки учнів сприяють елективні курси з вивчення методів розв’язування тригонометричних рівнянь та нерівностей, доведення тригонометричних тотожностей. Елективні курси, присвячені розв’язуванню нестандартних задач, розвивають уміння творчого застосування математичних знань. Зміст елективних курсів для учнів, які цікавляться математикою і бажають підвищити свій рівень математичної підготовки, можуть складати питання відбору коренів тригонометричних рівнянь, тригонометричних підстановок та їх застосувань, поглибленого вивчення обернених тригонометричних функцій.

У процесі нашого дисертаційного дослідження була розроблена і експериментально перевірена програма спецкурсу „Обернені тригонометричні функції” (додаток М.3). Питання про прямі і обернені тригонометричні функції тісно взаємозв’язані, їх комплексне вивчення на уроках спецкурсу поглиблює внутрішньопредметні математичні зв’язки, сприяє узагальненню та систематизації знань учнів з тригонометрії. Основна мета вивчення спецкурсу – розвиток математичних здібностей, задоволення пізнавальних інтересів учнів [78].

На матеріалі аркфункцій подальший розвиток отримує функціональна змістова лінія курсу алгебри і початків аналізу, вдосконалюються обчислювальні навички та уміння учнів. Значна увага на уроках спецкурсу приділяється „техніці” тотожних перетворень виразів з аркфункціями. Ці перетворення важливі як з освітньої точки зору (вони необхідні для успішного розв’язування рівнянь, нерівностей з аркфункціями, спрощення громіздких виразів), так і з виховної та розвивальної (розвиток пам’яті, логічного мислення, виховання алгоритмічної культури, акуратності та чіткості записів). Під час розв’язування рівнянь та нерівностей з аркфункціями систематизуються відомі учням методи розв’язування алгебраїчних рівнянь і нерівностей, а також розглядаються нові методи, які визначаються специфікою обернених тригонометричних функцій.

Таким чином, пропоновані елективні курси з тригонометрії якнайповніше враховують різнорівневість математичної підготовки учнів та створюють оптимальні умови для задоволення широкого діапазону їх індивідуальних пізнавальних потреб.

2.4. Комп'ютерна підтримка диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу

У час реформування та розвитку національної системи освіти актуальним є питання впровадження інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) у навчальний процес. Застосування ІКТ інтенсифікує та оптимізує навчання математики, активізує пізнавальну діяльність учня, розвиває його дослідницькі здібності [124, 125, 169, 187, 293]. Проблемі комп'ютерної підтримки навчального процесу присвячені праці Ю. В. Горошка [124], М. І. Жалдака [122], В. І. Клочка [152], Н. В. Морзе [206], С. О. Ракова [252], О. В. Співаковського [281], Ю. В. Триуса [296] та інших науковців.

Раціональне поєднання традиційних і комп'ютерних засобів навчання дозволяє більш ефективно диференціювати та індивідуалізувати процес навчання математики, спрямовувати навчальну діяльність учня на опанування дослідницькими методами та прийомами пізнання. Комп'ютерна підтримка вивчення математики з використанням педагогічних програмних засобів (GRAN1, DERIVE, DG, ТерМ та інші) „ … дає значний педагогічний ефект, полегшуючи, розширюючи і поглиблюючи вивчення і розуміння методів математики на відповідних рівнях в середніх навчальних закладах з найрізноманітнішими ухилами навчання" [122, с.5]. При цьому комп'ютер використовується з різною дидактичною метою, наприклад, під час вивчення нових понять, відпрацювання алгоритмів та розв'язування задач, у процесі самоперевірки учнем засвоєння знань та контролю за його навчанням. Залучення комп'ютерних технологій під час вивчення тригонометричного матеріалу дає змогу активізувати сприймання, підвищити рівні розуміння та засвоєння, а також стимулювати інтерес учнів до тригонометрії.

Сучасні педагогічні програмні засоби дають змогу диференціювати навчальну роботу учнів в різних напрямах:

- різнопланова комп'ютерна візуалізація навчального матеріалу;
- за допомогою комп'ютера учню пропонуються набори завдань різної складності, надається можливість самостійного вибору рівня завдання і перевірки правильності його виконання без участі вчителя;
- можливість отримання „комп'ютерної" допомоги, різної за характером та об'ємом (наприклад, підказка способу розв'язання, теоретична довідка);
- комп'ютерний тестовий контроль здійснюється із урахуванням індивідуальних особливостей учнів (темпу навчальної роботи, властивостей сприймання тощо);
- можливість вказати власний підхід до вирішення проблеми і одразу отримати його комп'ютерну оцінку; можливість здійснити різну кількість спроб розв'язання задачі, виправити помилки, про які не знає ні вчитель, ні учні класу;

- організація роботи учнів з комп'ютером у різних формах (індивідуальна, парна, групова, фронтальна).

Для успішного засвоєння тригонометричного матеріалу необхідний високий рівень розвитку абстрактно-логічного мислення. Проте, як відомо , існують значні індивідуальні відмінності школярів в можливостях наочного представлення інформації, в психічних процесах уяви, уявлення, образного мислення. Учні, в яких переважає лівопівкульне мислення, потребують підвищеної педагогічної допомоги у процесі оперування образами та перекодування інформації з однієї форми в іншу (наприклад, із словесної в графічну). В цій ситуації особливо доречне застосування комп'ютерної візуалізації.

Педагогічні програмні засоби типу GRAN1 створюють можливості швидкого, якісного і, головне, різноваріантного образного подання математичного матеріалу, його графічного представлення за допомогою різних форматів, розмірів, кольорів. Незаперечна цінність ППЗ GRAN1 як засобу побудови графіків функцій методом геометричних перетворень.

Варто запропонувати учням за допомогою GRAN1 дослідити рівняння гармонічного коливання , з'ясувати вплив коефіцієнтів А, , на форму та розміщення цієї кривої, встановити зміст цих коефіцієнтів. Для цього в GRAN1 слід ввести функцію з трьома динамічними параметрами , і . Послідовно змінюючи їх значення, можна прослідкувати закономірності в розміщенні графіка гармонічного коливання залежно від коефіцієнтів А, , .

За допомогою ППЗ GRAN1 учні отримують можливість графічно розв'язувати задачі, не застосовуючи аналітичні перетворення, якщо вони для них непосильні. Використання цього програмного засобу в класах, де математика вивчається на профільному рівні, відіграє, насамперед, допоміжну, супроводжувальну та контролюючу роль і доповнює аналітичні способи розв'язування задач.

Розглянемо приклад. Аналітичний метод розв'язування рівняння передбачає виконання таких логічних дій та міркувань:

1) в лівій частині рівняння розглянемо дві функції і ;

2) перетворимо функцію , виділивши повний квадрат: ;

3) оскільки і , то сума дорівнює нулю, якщо і . Тому маємо систему: ;

4) розв'язавши останню систему, отримаємо значення .

З метою підтвердження та унаочнення цього розв'язку доцільна його комп'ютерна візуалізація засобами GRAN1. Побудувавши графік функції

(використовуючи послугу „Побудувати" пункту „Графік") та скориставшись послугою „Координати", легко визначити абсцису точки перетину цього графіка з віссю Ох (рис. 2.5).

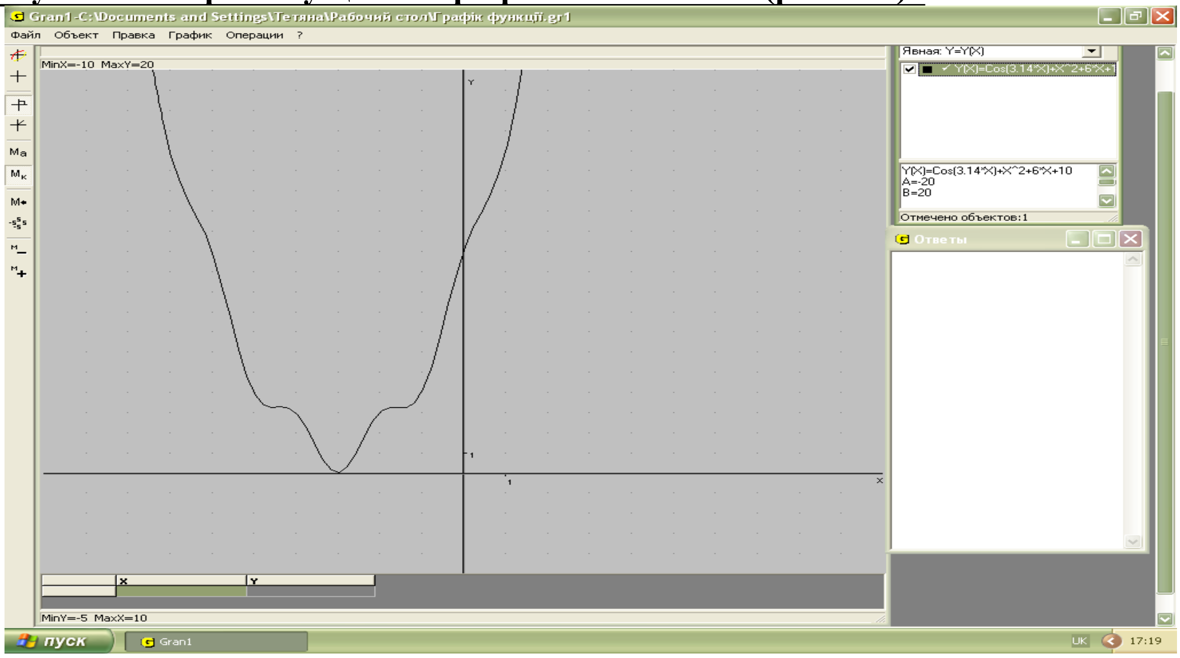


Рис. 2.5. Графік функції , виконаний у GRAN1.

Комп'ютерна підтримка вивчення тригонометричного матеріалу з використанням ППЗ GRAN1 дає можливість вчителю зосередити увагу на профільно-значимих складових змісту тригонометричного матеріалу, виокремити ті аспекти діяльності учня, які важливі для його подальшого навчання і майбутньої професії.

На рівні стандарту акцент зміщено на формування вмінь читати графіки функцій, тобто на графічному аналізі функцій. Його досить ефективно можна здійснити за допомогою програми GRAN1. Демонстраційні можливості цього програмного продукту дають змогу візуалізувати математичні поняття, які важко засвоюються учнями (наприклад, такі властивості функцій як періодичність, парність-непарність, знакосталість).

Формування навичок наближеного та графічного розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем важливе на академічному рівні вивчення тригонометричного матеріалу, де акцент зміщено на формування графічної та обчислювальної культури учнів. Графічний спосіб розв'язування рівнянь в окремих випадках є чи не єдиним способом відшукання коренів, або значно простішим за аналітичний. Завдяки комп'ютерному графічному супроводу учні отримують можливість будувати графіки складних функцій та знаходити корені рівнянь із заданою точністю.

В GRAN1 зручно демонструвати фізичне явище биття, яке доцільно розглянути на академічному рівні. На рис. 2.6 учні отримують наочне

підтвердження, що при додаванні гармонічних коливань з однаковими амплітудами А і початковими фазами , частоти яких близькі за величиною, результуюча амплітуда змінюється від 0 до 2А.

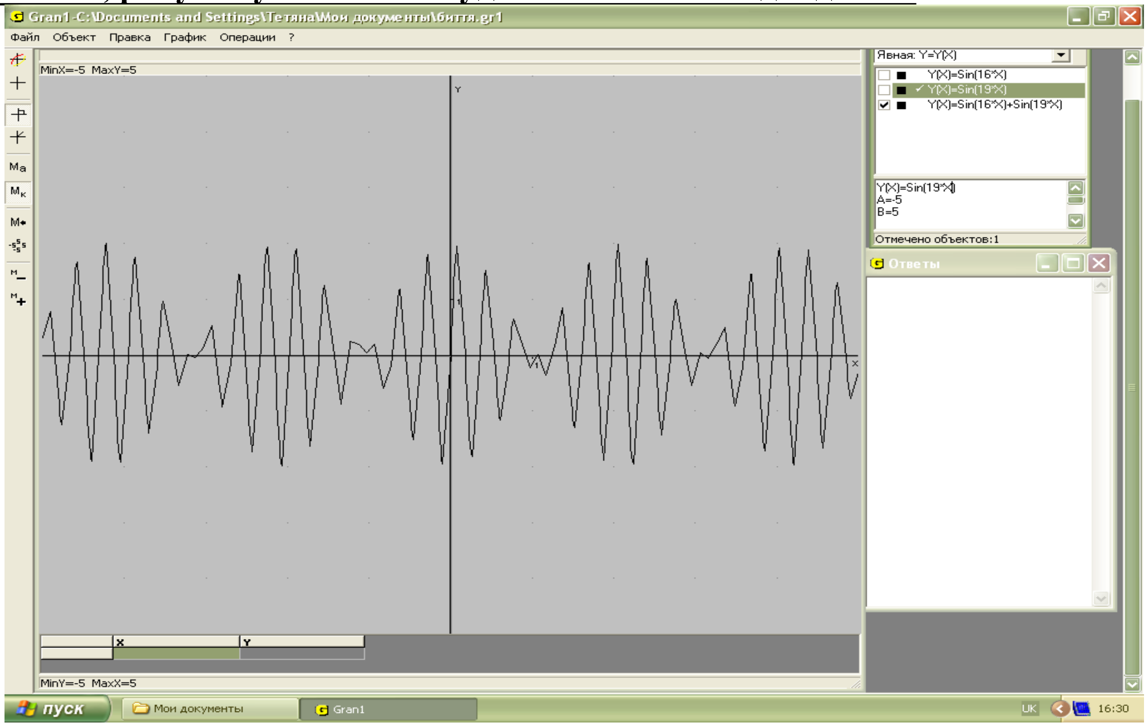


Рис. 2.6. Графік функції , виконаний у GRAN1.

На профільному рівні варто дослідити в GRAN1 суми гармонічних коливань для різних випадків (коли їх періоди, амплітуди та початкові фази однакові та різні). Комп'ютерна побудова дає можливість висловити припущення про властивості суми в кожному випадку. Наприклад, якщо періоди гармонічних коливань, які додаються, однакові, то результуюче коливання має такий самий період, а його амплітуда набуває різних значень залежно від початкових фаз коливань-доданків. В результаті побудови та аналізу графіків учні виокремлюють три випадки додавання гармонічних коливань однакового періоду:

1) початкові фази коливань-доданків рівні або відрізняються на число , ; результуюча амплітуда дорівнює сумі амплітуд коливань-доданків .

Наприклад, при додаванні коливань та

отримаємо коливання з амплітудою (рис. 2.7).

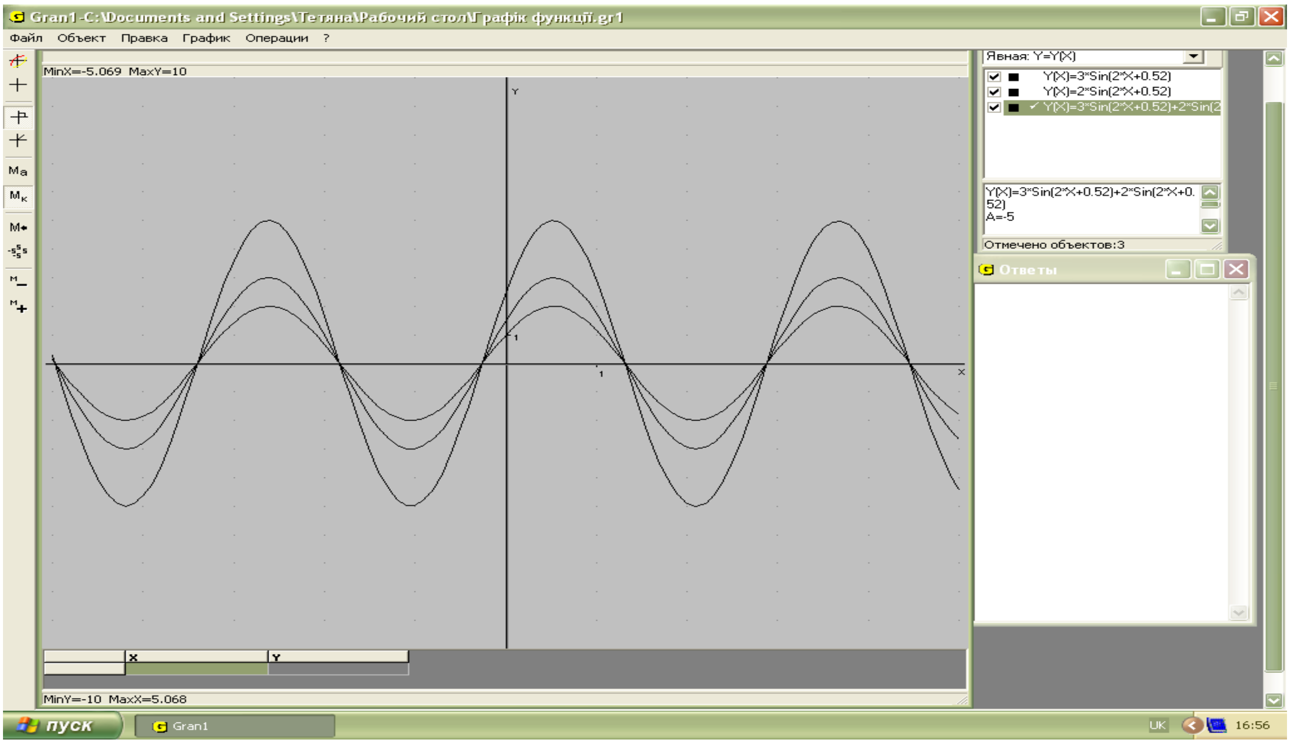


Рис. 2.7. Додавання гармонічних коливань однакового періоду, початкові фази яких рівні або відрізняються на число , .

2) початкові фази коливань-доданків відрізняються на число ,

; результуюча амплітуда дорівнює модулю різниці амплітуд коливань

-доданків .

Наприклад, сумою коливань та є коливання з амплітудою A=1 (рис. 2.8).

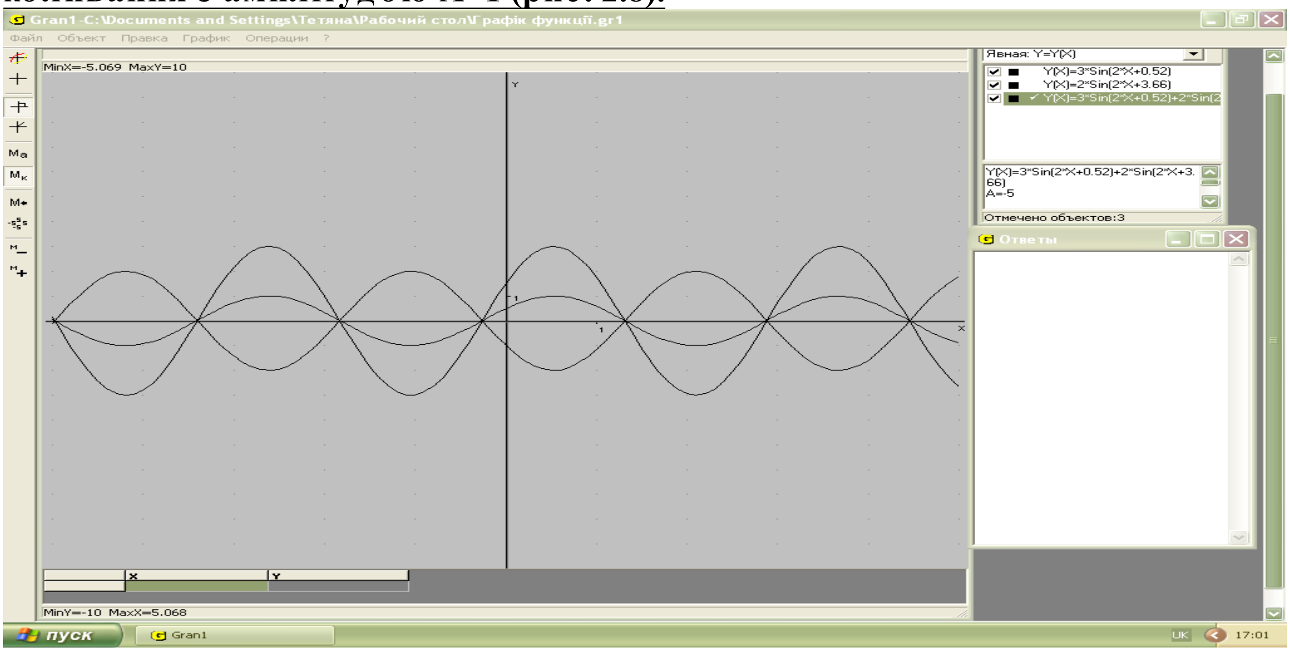


Рис. 2.8. Додавання гармонічних коливань однакового періоду, початкові фази яких відрізняються на число , .

3) початкові фази коливань-доданків не відповідають випадкам 1) або 2); результуюча амплітуда А суми коливань змінюється в межах:

:

Наприклад, амплітуда суми

змінюється в межах: (рис. 2.9).

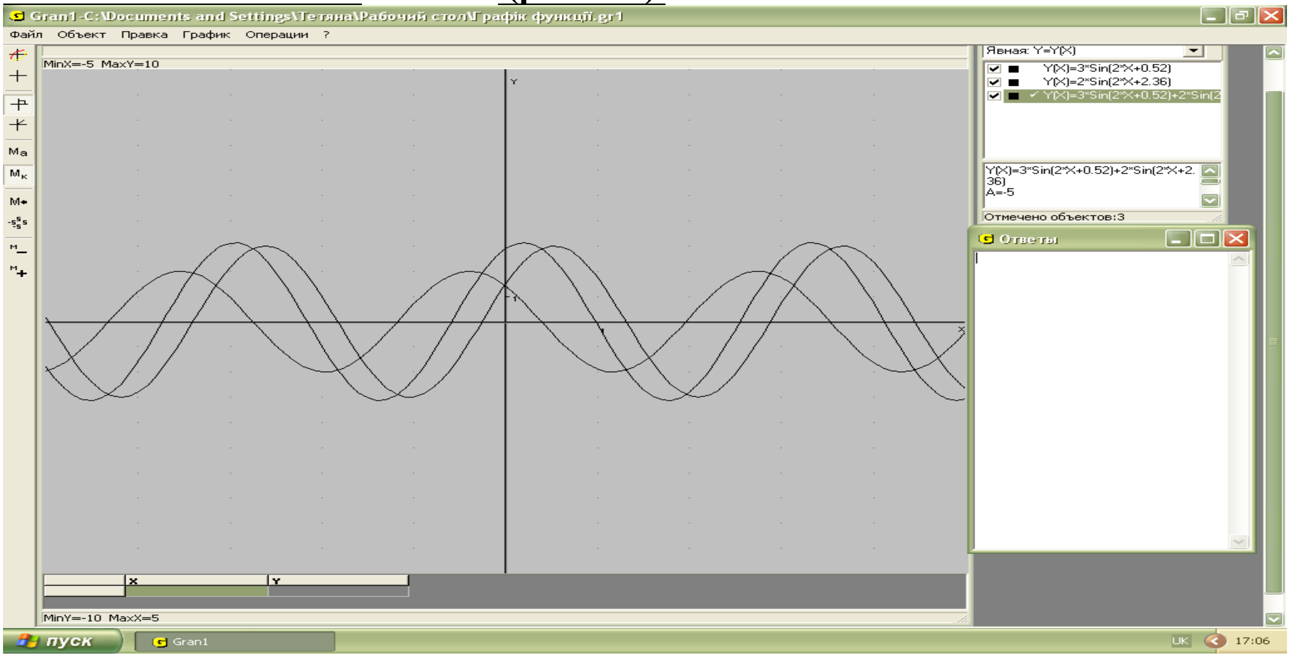


Рис. 2.9. Додавання гармонічних коливань, початкові фази яких не відповідають випадкам 1) або 2).

На профільному рівні під час роботи з програмою GRAN1 доцільно ввести поняття про неявне задання функціональної залежності між

змінними х і у виду . Так, систему в GRAN1 можна розв’язати у такий спосіб: побудувати графіки неявних функцій

, та знайти абсциси їх точок перетину.

Як свідчить шкільна практика, для частини учнів тригонометричний матеріал є складним та незрозумілим, а процес його вивчення трудомістким та нецікавим. Це пояснюється, зокрема, тим, що для розуміння і засвоєння понять синуса, косинуса, тангенса і котангенса дійсного числа необхідні високі рівні розвитку розумових операцій аналізу, синтезу, абстрагування, узагальнення, а також образного мислення та уяви , якими ці учні не володіють. Тому завдання вчителя в цій ситуації – допомогти учню уявити складне для нього поняття, поетапно розглянути спосіб його утворення, акцентувати увагу на суттєвих ознаках поняття, а також продемонструвати його в різному візуальному оформленні. Із цією метою особливо ефективна комп’ютерна підтримка навчання.

Значні презентаційні та графічні можливості при вивченні тригонометричного матеріалу створюють прикладні програми з пакету

„Microsoft Office". Наприклад, за допомогою програми „Power Point" цього пакету можна здійснити покадрову ілюстрацію навчального матеріалу з різноманітним анімаційним супроводом. Це значно активізує емоційно-вольові психічні процеси, а відтак і пізнавальні дії, особливо у школярів з переважаючими функціями правої півкулі головного мозку. При цьому відбувається емоційне сприйняття навчального матеріалу за допомогою вдалого добору кольорів, звуку, руху, тобто естетичного оформлення. Такий спосіб представлення навчальної інформації доречний, зокрема, у випадках, коли потрібно розглянути окремі програмні питання в плані ознайомлення та загального уявлення (наприклад, графіки та властивості обернених тригонометричних функцій на рівні стандарту), а також при систематизації та узагальненні матеріалу у вигляді опорних конспектів. Використання презентацій у вигляді слайдів допомагає учням зрозуміти складні аспекти нового матеріалу, побачити графічні зображення, які важко уявити. Корисно також залучати учнів до підготовки слайд-презентацій, це сприяє розвитку інтересу до вивчення математики, формуванню естетичної культури та художнього смаку.

Розглянемо приклад слайд-презентації, яка присвячена геометричному означенню тангенса дійсного числа. На першому слайді (слайд 1) з'являється запитання „Як знайти тангенс дійсного числа ,

наприклад ?" Відповідь на це запитання дає наступна послідовність слайдів. На слайді 2 з'являються система координат Oxy, одиничне коло, точка P0(1; 0). Далі, слайд 3 демонструє побудову дотичної t до одиничного кола у точці P0(1; 0). Після цього з'являється надпис „лінія тангенсів", який виділяється ефектом блимання. На наступному слайді 4 початкова

точка P0 повертається на кут і на одиничному колі з'являється

точка . За наступним кліком (слайд 5) через точки O і проводиться

пряма і будується точка перетину цієї прямої з лінією тангенсів. На

наступному слайді 6 виділяється відрізок і з'являється надпис:

. На останньому слайді 7 розгортається запис: „Тангенс числа

визначається ординатою точки перетину прямої з прямою t". У процесі презентації вчитель коментує появу кожного нового елемента, проводить додаткові пояснення, повертається назад, якщо це необхідно. Аналогічні слайд-презентації доцільно також створити з метою наочної інтерпретації означень інших тригонометричних величин (синуса, косинуса і котангенса дійсного числа).

З метою взаємозв'язку поняття „періодична функція” з життям, встановлення аналогій з об'єктами довкілля, доцільні слайд-презентації, які демонструють зображення на паркетах підлоги, шпалерах, які періодично повторюються, періодичні рухи морських хвиль, струн музичних інструментів, стрілок годинника (гуманітарна складова змісту), планет, частин машин та механізмів (прикладна складова змісту).

Завдяки використанню Power Point учні засвоюють нові знання невимушено та без зайвих зусиль, і процес навчання стає для них більш захоплюючим та яскравим. Розглянутий програмний засіб особливо доречний для навчання учнів з невисокими математичними здібностями, які більше від інших потребують, щоб тригонометричний матеріал одержував підкріплення на доступних наочних моделях.

Істотне місце при вивченні тригонометричного матеріалу займає обчислювальна робота учнів. Тригонометричні обчислення в багатьох випадках досить громіздкі і потребують значних часових затрат та рутинної роботи учнів. До кращих комп'ютерних обчислювальних засобів, який дає змогу швидко та якісно виконати необхідні розрахунки та графічно представити результат, належить програма Excel. Працюючи з цією програмою, учні набувають навичок розв'язування не тільки широкого кола навчальних математичних задач, а й задач повсякденної практичної та професійної діяльності сучасної людини. Крім того, програма Excel доступна і проста у використанні, вона встановлена практично на кожному персональному комп'ютері.

Задача. В резисторі, що має опір 10 Ом, проходить синусоїдний струм, миттєве значення якого . Побудувати графіки залежності миттєвого значення струму, напруги і потужності резистора від часу.

Розглянемо приклад алгоритму розв'язування цієї задачі з допомогою Microsoft Excel. Але спочатку зробимо деякі попередні зауваження.

Для електричного кола з активним опором виконується закон Ома: . Потужність в колі дорівнює добутку струму на напругу: . Графіки функцій , , побудуємо за точками в одній системі координат. Це дасть змогу їх порівняти, виявити закономірності перебігу відповідних фізичних процесів. Графіки достатньо побудувати на одному періоді для всіх трьох функцій, який дорівнює . Для цього слід розділити період на інтервали і знайти значення сили струму, напруги і потужності в точках поділу. Для виконання обчислень та побудов скористаємося Microsoft Excel.

1. В робочу таблицю введемо значення моментів часу. Комірку A1 заповнимо надписом: „t, c”. Виберемо межі та крок зміни часу: tmin=0, tmax=0,02, $\Delta t=0{,}001$. Ці значення введемо в комірки A2:A22 за допомогою засобу автозаповнення „Прогресія”.

2. Комірці В1 надамо назву: „і, А”. В комірку В2 занесемо формулу

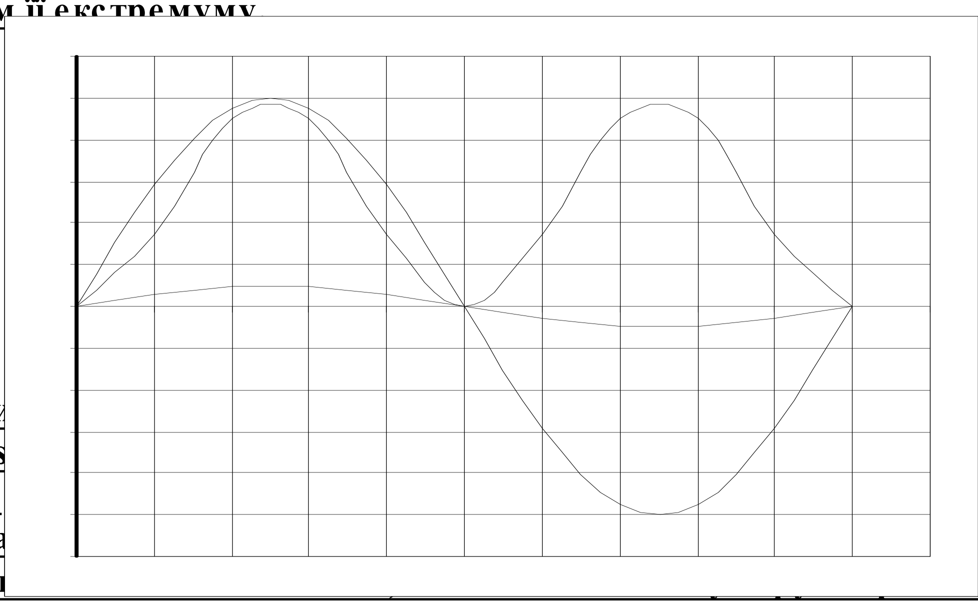
. Перетягнемо маркер заповнення з комірки В2 на діапазон В3:В22. В результаті отримаємо стовпець значень сили струму і.

3. Значення напруги і потужності обчислимо в стовпцях С і D. Спочатку заповнимо комірки назв: „U, В” і „Р, Вт”. Занесемо в комірку С2 формулу =10*В2. Тут вводити вираз немає потреби, бо значення напруги більші у 10 разів за відповідні значення сили струму. Далі копіюємо цю формулу на діапазон С3:С22. Аналогічно обчислимо значення потужності в комірках D2:D22. Для цього значення сили струму слід піднести до квадрату і помножити на 10. Тому формула для комірки D2 має вигляд: 10*СТЕПЕНЬ(В2;2).

За отриманими числовими даними учні мають зробити висновок, що значення сили струму, напруги і потужності достатньо обчислити на чверті періоду, оскільки для інших значень аргументу вони повторюються з відповідними знаками.

4. Після обчислення сили струму, напруги і потужності змінного струму побудуємо їх графіки. Виділимо комірки із значеннями , , і значеннями часу. Далі викличемо „Майстер діаграм” і виберемо тип діаграми: точкову з гладким з’єднанням. Виконаємо оформлення побудованих графіків і розмістимо їх в зручному місці на робочому аркуші (рис. 2.10).

Під час розв’язування задач такого типу увагу слід приділити формуванню навичок дослідження тригонометричних функцій за їх графіками та фізичній інтерпретації результатів дослідження. Корисно надавати фізичного змісту інтервалам монотонності, нулям функції, точкам її екстремуму.



Ри[illegible] і у Micros[illegible] Excel.

На[illegible] і потужн[illegible] орі відсутній; 2) моменти часу, в які сила струму, напруга і потужність набувають максимального, мінімального значення; 3) максимальне і мінімальне значення сили струму, напруги і потужності в резисторі; 4) протягом якого проміжку часу значення сили струму зростає; спадає; 5)

через який проміжок часу величина напруги повторюється; 6) яка сила струму і напруга у початковий момент часу. Слід також звернути увагу учнів на те, що функція також періодична з періодом, удвічі меншим за період функції .

Педагогічний експеримент свідчить, що застосування комп'ютера у процесі навчання позитивно впливає на мотиваційну сферу учня, розвиває його дослідницькі здібності та підвищує інтерес до вивчення тригонометрії. Комп'ютерна підтримка вивчення тригонометричного матеріалу створює умови для диференціації навчально-пізнавальної діяльності учнів шляхом застосування засобів візуалізації, динамізації та обчислень відповідно до їх індивідуальних особливостей (особливостей сприймання, уяви, темпу навчання тощо), залучення до дослідницької діяльності з урахуванням рівня загального та математичного розвитку, стимулювання пізнавальної активності. Використання комп'ютера позбавляє учнів виконання рутинних тригонометричних обчислень. При цьому швидко та якісно можна побудувати графічні образи складних тригонометричних залежностей, що дає змогу їх аналізу та дослідження.

2.5. Контроль навчально-пізнавальної діяльності учнів при вивченні тригонометричного матеріалу на уроках алгебри і початків аналізу

Важливе місце в організації диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу слід відвести побудові диференційованих вимог до математичної підготовки учнів з тригонометрії. Відповідно до Критеріїв оцінювання навчальних досягнень учнів [171], змісту програм з математики для профільного навчання [193, 243, 244], а також враховуючи особливості навчально-пізнавальної діяльності учнів профільних класів, розподілимо вимоги до засвоєння тригонометричного матеріалу на три рівні: базовий, достатній та високий (табл. 2.4).

Таблиця 2.4

Рівні вимог до засвоєння тригонометричного матеріалу

Рівні вимог	Рівні вивчення тригонометричного матеріалу		
	стандарт С	академічний А	профільний П
1. Базовий	СБ	АБ	ПБ
2. Достатній	СД	АД	ПД
3. Високий	СВ	АВ	ПВ

У процесі побудови диференційованих вимог до засвоєння тригонометричного матеріалу визначаємо:

1) мету вивчення теми;

2) об'єкти засвоєння, які мають опанувати учні на різних рівнях (поняття, факти, способи діяльності);

3) системи еталонних задач, які конкретизують рівні вимог.

Розглянемо приклад побудови диференційованих вимог до засвоєння модуля „Тригонометричні рівняння та нерівності”.

1) Відповідно до програм [193, 243, 244], мета вивчення цього матеріалу на профільному рівні полягає в тому, щоб навчити учнів розв’язувати тригонометричні рівняння та нерівності; на академічному рівні – сформувати уміння розв’язувати нескладні тригонометричні рівняння та найпростіші нерівності; на рівні стандарту – сформувати уміння розв’язувати найпростіші тригонометричні рівняння.

2) Об’єкти засвоєння модуля:

- розв’язування найпростіших тригонометричних рівнянь (СБ, АБ, ПБ); тригонометричних рівнянь, які безпосередньо зводяться до найпростіших (СД, АБ, ПБ);

- розв’язування тригонометричних рівнянь різними методами та способами (розкладання на множники (СД, АБ, ПБ), заміни (СВ, АД, ПБ), застосування тригонометричних формул (СВ, АД, ПБ), графічний (, АВ, ПВ), піднесення до квадрату (СВ, АД, ПБ), введення допоміжного аргументу (, АВ, ПД), універсальної підстановки (, АВ, ПД));

- розв’язування однорідних тригонометричних рівнянь (, АД, ПБ);

- розв’язування найпростіших тригонометричних нерівностей (СВ, АБ, ПБ); тригонометричних нерівностей, які безпосередньо зводяться до найпростіших (, АД, ПБ);

- розв’язування тригонометричних нерівностей різними методами та способами (заміни (, АВ, ПД), застосування тригонометричних формул (, АВ, ПД), інтервалів (, , ПД));

- розв’язування тригонометричних рівнянь та нерівностей з модулем, параметром; які містять обернені тригонометричні функції (, , ПВ);

- перевірка розв’язків тригонометричних рівнянь (втрачені і сторонні корені) (, АД, ПБ);

- розв’язування систем рівнянь (системи рівнянь, у яких одне рівняння – алгебраїчне, а друге містить тригонометричні функції (, АВ, ПД); системи рівнянь, у яких обидва рівняння містять тригонометричні функції (, , ПВ)).

3) Конкретизуємо вимоги системами еталонних задач (табл. 2.5-2.7).

Таблиця 2.5

Базовий рівень вимог до засвоєння модуля „Тригонометричні рівняння та нерівності”

СБ	АБ	ПБ
Розв’язати тригонометричні рівняння		
Знайти найменший додатний корінь тригонометричного рівняння		

Розв'язати тригонометричну нерівність		
–		

Таблиця 2.6

Достатній рівень вимог
до засвоєння модуля „Тригонометричні рівняння та нерівності”

СД	**АД**	**ПД**
Розв'язати тригонометричні рівняння		

Продовження табл. 2.6

Розв'язати тригонометричну нерівність		
–		
Розв'язати систему рівнянь		
–	–	

Таблиця 2.7

Високий рівень вимог
до засвоєння модуля „Тригонометричні рівняння та нерівності”

СВ	**АВ**	**ПВ**
Розв'язати тригонометричні рівняння		
Розв'язати тригонометричну нерівність		

Розв’язати систему рівнянь		
–		

Якщо учень розв’язує задачі обраного ним рівня вимог, то це означає, що він досяг цього рівня. Так, правильне розв’язання завдань базового рівня дає можливість одержати оцінку 6, достатнього – 9, високого – 12 балів. Такий спосіб фіксації програмних вимог підвищує об’єктивність контролю та оцінки, дозволяє варіювати навантаження учнів.

Виділимо види контролю за місцем у навчальному процесі: попередній, поточний і тематичний, – та визначимо особливості їх організації під час диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу. У процесі розв’язування цього завдання ми спираємося на дисертаційні дослідження з проблем планування та організації контролю результатів навчання учнів (І. А. Дремова [115], О. І. Іваницький [138], В. О. Швець [321] та ін.).

У профільних класах, де тригонометричний матеріал вивчається на рівнях стандарту та академічному, особливістю попереднього контролю є його завчасність: попередній контроль слід здійснювати на уроках, що передують уроку вивчення нового матеріалу (за два-три уроки). Домінуючими цілями цього виду контролю повинні бути діагностична і корекційна, виявлення прогалин в знаннях учнів. Завдання для попереднього контролю, адресовані учням з невисокою успішністю з математики, повинні бути типовими, не вище базового рівня вимог. Всім іншим учням доцільно пропонувати завдання, які контролюють їх знання, навички та уміння на вищих рівнях. З учнями, в яких виявлені прогалини в знаннях, слід організувати роботу по їх усуненню в індивідуальному або індивідуально-груповому порядку.

Однією з ключових цілей попереднього контролю на профільному рівні має бути виявлення рівня усвідомлення учнями цілей і завдань їх майбутньої навчально-пізнавальної діяльності та орієнтація у рівнях вимог до засвоєння навчального матеріалу. Завдання для попереднього контролю мають перевіряти знання, навички та уміння учнів не тільки на базовому, а й і на вищих рівнях.

Особливістю поточного контролю навчальної діяльності учнів з низькою математичною підготовкою є підвищена увага вчителя до поопераційного виду контролю, який дає можливість контролювати виконання учнем кожної операції, фіксувати припущені ним помилки і відразу їх виправляти. Наприклад, при спрощенні виразу

вчитель поопераційно контролює виконання

учнем кожної дії: застосування формули зведення до виразу ;

властивостей парності та періодичності функції косинус до виразу ; знаходження суми виразів; піднесення отриманого виразу до квадрату. На кінцевих етапах формування понять пооопераційний вид контролю слід змінювати на систематичний.

На рівні стандарту ефективною формою поточного контролю для активізації навчальної діяльності учнів виявився усний поточний контроль. Він дає можливість вчителю відразу на уроці здійснити зворотний зв'язок, сприяє усуненню формалізму в знаннях та розвитку математичної мови учнів. Рівневу диференціацію у процесі усного опитування можна здійснити шляхом застосування дидактичного правила „кожне запитання має свого адресата", врахування психологічних особливостей різних категорій опитуваних учнів. Усні вправи розвивають увагу та ініціативу учнів, дозволяють економити час, а також пробуджують інтерес до вивчення математики.

Методика проведення усних самостійних робіт може бути такою. Класу пропонуються два варіанти самостійної роботи різної складності. Завдання записані на дошці, картках або представлені за допомогою мультимедійного проектора. Учні обирають один із варіантів і готуються до відповіді протягом 3-4 хв. Потім два учні відповідають на запитання своїх варіантів, які зачитуються вголос вчителем або однокласником. Інші учні класу перевіряють свої відповіді, беруть активну участь у цій роботі, доповнюють або виправляють опитуваних. Запитання самостійної роботи добираються таким чином, щоб фронтально перевірити засвоєння фактичного матеріалу (означень, формул, властивостей) та вміння його застосовувати в найпростіших ситуаціях. Приклад самостійної роботи для усного поточного контролю наведемо в додатку Н.

Переважаючими видами поточного контролю на профільному рівні виявились систематичний та епізодичний. Необхідність у поопераційному виді контролю виникала, переважно, під час розв'язування задач високого рівня складності та при доведенні складних тверджень. Однією з особливостей поточного та тематичного контролю на цьому рівні є включення проблемних запитань і завдань в перевірку та оцінювання пізнавальної діяльності учнів.

Поточний контроль і оцінювання на рівні стандарту та академічному мають виконувати, насамперед, заохочувальну, стимулюючу та діагностико-коректуючу функції.

На профільному рівні особливу увагу ми приділяємо розвитку контрольно-оцінної діяльності учнів. Тут посилюється роль методів самоперевірки та взаємоперевірки. Досить корисно практикувати написання учнями взаєморецензій на письмові роботи, складання відгуків на усні відповіді однокласників та заповнення листів самоконтролю. В додатку П наведемо приклад плану учнівської рецензії на письмову самостійну або контрольну роботу однокласника, а також зразок листа самоконтролю.

Поточну перевірку теоретичних знань учнів на профільному рівні ми здійснюємо, зокрема, на уроці-колоквіумі. Під колоквіумом розуміємо навчальне заняття, в процесі якого вчитель з'ясовує ступінь оволодіння теоретичним матеріалом, труднощі в його засвоєнні та типові помилки. Основними функціями колоквіуму є діагностична, стимуляційна, навчаюча та управлінська. Ефективною виявилась така структура колоквіуму:

1. Фронтальне повторення основних теоретичних відомостей (у формі співбесіди, опитування).

2. Математичний диктант, самостійна робота або тести з різнорівневими завданнями для перевірки оволодіння теоретичним матеріалом.

3. Розв'язування диференційованих вправ на безпосереднє застосування теоретичного матеріалу на практиці (у груповій або індивідуальній формі).

4. Індивідуальна консультація та корекція знань.

На початку вивчення нової теми, з якої передбачено проведення цієї форми контролю, учням пропонується програма колоквіуму, в якій зазначені поняття, факти, твердження, що будуть перевірятись (додаток Р).

Контрольні запитання та завдання для перевірки засвоєння теоретичного матеріалу диференціюємо на репродуктивні, реконструктивні та проблемні. За допомогою репродуктивних запитань вчитель перевіряє знання фактичного матеріалу (що називається синусом числа x? Яка область визначення функції косинус? Який основний період функції ?). Реконструктивні запитання допомагають учням глибше проникнути в зміст нового матеріалу, усвідомити взаємозв'язки між поняттями. Запитання цього типу спонукають учня до аналітико-синтетичної діяльності, власного „бачення" понять та фактів (чим відрізня ються області визначення функцій і ? У яких чвертях і мають однакові знаки? Чи може функція мати значення за абсолютною величиною більші за одиницю? Чому?). Проблемні запитання вимагають встановлення нових закономірностей, взаємозв'язків, узагальнень на основі вивченого матеріалу (чи можуть виражатися недодатніми числами тригонометричні функції: половини кута трикутника; півсуми двох кутів трикутника; піврізниці двох кутів? В чому схожість і відмінність радіанної міри центрального кута і радіанної міри відповідної йому дуги? Чи може значення за абсолютною величиною бути меншим, ніж значення ? Чому?).

На профільному рівні перевага надається реконструктивним та проблемним запитанням, частка репродуктивних запитань на відтворення вивченого мінімальна. На рівні стандарту зростає обсяг репродуктивних запитань, що важливі в процесі досягнення базового рівня вимог. Запитання вчителя повинні спонукати учнів до роздумів і пошуків. Важливо, щоб учні розуміли зміст навчального матеріалу, а не давали

відповіді завченими фразами. Тому корисно, щоб відповіді учня супроводжувалися прикладами. З цією метою у формулювання запитань слід включати вимогу навести приклад: „Що таке одиничне коло? Яка відповідність існує між точками одиничного кола і точками числової осі? Наведіть приклади. Які тригонометричні рівняння називаються однорідними відносно функцій і ? Наведіть приклади”.

Метод графічної перевірки знань та вмінь передбачає відповідь учня у вигляді узагальненої наочної моделі, що відображає зв'язки, відношення, властивості об'єктів, що вивчаються. Учні, які вивчають тригонометричний матеріал на академічному або профільному рівні, здатні реалізувати специфіку цього методу перевірки, його розвивальні, навчальні та контролюючі функції. Самостійне складання схем, діаграм, таблиць узагальнює та систематизує знання учнів, розвиває творчість, винахідливість, нестандартність думки, що є одним з основних завдань навчання математики. Розглянемо приклади.

Завдання 1. Складіть порівняльну таблицю властивостей тригонометричних функцій , .

Завдання 2. Накресліть одиничне коло і проведіть лінію тангенсів. Побудуйте і позначте додатні кути в межах першого оберту, тангенс яких дорівнює: 1) -1,5; 2) 1; 3) -0,5; 4) 0.

Завдання для графічного контролю доцільно формулювати в нестандартній, незвичній формі. Наприклад, замість формулювання „Побудувати графік функції ” можна запропонувати такі: „Побудувати геометричний образ залежності ” або „Зобразити геометричне місце точок площини, що задовольняють співвідношення ”.

Метод практичної перевірки посідає особливе місце в системі контролю та оцінювання навчальних досягнень учнів профільної школи. „Практична перевірка проводиться шляхом виконання учнями певних досліджень, лабораторних дослідів, трудових операцій, створення виробів, моделей тощо” [202, с.363]. Вона дає змогу на кожному етапі навчання визначити рівень практичної компетентності учнів, їх готовність до застосування знань на практиці. Цей метод контролю найкраще реалізувати на лабораторних заняттях і здійснювати у груповій формі, причому склад груп доцільно формувати різнорівневий, що забезпечує взаємонавчання та взаємоконтроль учнів. Наприклад, для практичного контролю можна запропонувати наступне завдання.

Практичне завдання. Відстань d від деякої фіксованої точки на ободі махового колеса до площини підлоги залежить від величини кута повороту колеса x. Виразіть цю залежність за допомогою тригонометричних функцій . Необхідні числові дані візьміть з моделі (учням пропонується спеціально виготовлена до цього завдання модель). Обчисліть відстань d експериментально і за допомогою обчислень для кутів x від до з

кроком h. Порівняйте отримані дані. Зробіть висновки.

В-І. , , ; В -ІІ. , , ;

В-ІІІ. , , .

Схема виконання завдання.

1. Зобразити модель на рисунку.

2. На основі аналізу моделі, рисунка, використовуючи означення тригонометричних функцій довільного числового аргументу, записати залежність d=d(x).

3. Обчислити за допомогою мікрокалькулятора, комп'ютера або тригонометричних таблиць значення d для різних значень x (за залежністю d=d(x)).

4. Визначити значення d для цих самих значень аргументу за допомогою моделі (експериментально).

5. Отримані дані занести в табл. 2.8.

Таблиця 2.8

Результати вимірювань та обчислень

Кут	Відстань d см (експерим.)	Відстань d см (обчисл.)	Абсолютна похибка результату	Відносна похибка результату

6. Зробити висновки.

Письмова самостійна робота – це один з найбільш ефективних засобів отримання об'єктивної інформації про рівень навчальних досягнень учня. Письмові самостійні роботи ми поділяємо на три типи.

Самостійна робота 1-го типу (додаток С.1) складається із завдань базового рівня вимог, на безпосереднє застосування теоретичного матеріалу в типових ситуаціях (рівні вимог СБ, АБ або ПБ). Завдання самостійної роботи цього типу включають достатню кількість стандартних ситуацій, які потребують застосування знайомих для учнів методів та прийомів розв'язування. Уміння учня розв'язувати опорні задачі, що представлені в базовому рівні, створює основу, завдяки якій він здатний сприймати, розуміти і засвоювати подальший навчальний матеріал, а також поглиблювати і розвивати свої математичні здібності. Зауважимо, що вибір опорних задач для різних рівнів вивчення тригонометричного матеріалу умовний. Так, задача, опорна для профільного рівня, може не бути такою для академічного рівня або рівня стандарту. Опорні задачі мають відповідати таким найважливішим вимогам: відповідність змісту навчання, забезпечення виконання програмних вимог, можливість подальшого вивчення математики, зокрема, оволодіння базовим рівнем підготовки з наступних тем.

На профільному рівні самостійні роботи 1-го типу теж обов'язкові, оскільки вони утворюють базу для розв'язування завдань вищих рівнів складності, а також поглиблено-творчих. Самостійні роботи цього типу ми

проводимо на уроках-практикумах та уроках формування навичок та умінь. Вони розраховані на 10-15 хвилин і оцінюються за бінарною шкалою: „зараховано” – „не зараховано”. Оцінка за цю роботу в журнал не виставляється, вона необхідна вчителю і учню для того, щоб проконтролювати досягнення базового рівня вимог та провести відповідну корекцію. Крім того, знімається момент страху учня перед негативною оцінкою, створюються комфортні психолого-педагогічні умови для його ефективної навчальної роботи. Перевірку самостійної роботи 1-го типу доцільно організувати у формі самоперевірки. Здійснити самоконтроль учню допомагають картки, на яких записані або лише відповіді або повні розв’язання завдань. У процесі виконання цієї роботи для учнів різних типологічних груп класу диференціюється час виконання роботи та міра допомоги з боку вчителя. Учням, які раніше інших виконали роботу, пропонуються додаткові завдання.

Самостійна робота 2-го типу містить завдання різних рівнів складності відповідно до трьох рівнів вимог до математичної підготовки учнів профільного класу (додаток С.2). Її мета – діагностика, контроль та оцінка засвоєння навчального матеріалу. Будемо вважати, що учень досяг певного рівня навчальних результатів, якщо він вміє розв’язувати задачі вказаного типу, застосовуючи відповідні теоретичні положення. Самостійна робота складається таким чином, щоб кожен учень зміг знайти посильні для себе завдання, які відповідають його навчальним можливостям. Ця робота оцінюється за дванадцятибальною шкалою і оцінки обов’язково виставляються в журнал.

В завданнях самостійної роботи 3-го типу відображені специфіка профілю навчання, особливості проектованої учнями професійної діяльності. Для цих завдань характерна значна змістова диференціація, виражена в гуманітарній, прикладній і теоретичній складових змісту тригонометричного матеріалу. Так, самостійна робота для класу математичного профілю включає завдання творчого характеру, олімпіадні , завдання на кмітливість. В самостійній роботі для класу філологічного профілю домінує гуманітарна складова змісту, значна кількість задач реалізує зв’язок навчального матеріалу з життям, практичною діяльністю людини. Самостійна робота для академічного рівня містить завдання прикладного характеру, на реалізацію міжпредметних зв’язків тригонометричного матеріалу (додаток С.3).

Самостійну роботу 3-го типу доцільно пропонувати на останніх уроках вивчення теми, а саме – на уроках-практикумах з розв’язування ускладнених завдань, на уроках-семінарах, уроках узагальнення і систематизації знань. Ця робота носить навчаючий та діагностичний характер, вона пропонується всім учням класу. Оцінювання здійснюється диференційовано: оцінка виставляється за бажанням учня, який виконав частину або всі завдання.

У системі контролю навчальних досягнень учнів обов’язковим і основним є тематичний контроль, під яким розуміємо „ ... сумісну

діяльність вчителя та учнів, направлену на виявлення та вимірювання результатів навчання учнів по кожній навчальній темі курсу математики” [321, с.43]. Тематичний контроль ми проводимо після вивчення теми або розділу програмного матеріалу.

Розробляючи тематичну контрольну роботу, слід дотримуватись таких основних вимог до її змісту та форми подання: 1) відповідність контрольної роботи рівню вивчення математики, змісту та обсягу навчального матеріалу програми; 2) диференціація завдань контрольної роботи за складністю відповідно до навчально-пізнавальних можливостей учнів; 3) об’єктивність, максимальна відповідність завдань рівням вимог; 4) структура контрольної роботи має забезпечувати можливість навіть найменш підготовленим учням показати власні навчальні досягнення; 5) можливість вибору завдань; 6) рівноцінність різних варіантів контрольної роботи для одного і того ж рівня вимог.

Розглянемо варіант тематичної контрольної роботи з теми „Тригонометричні функції” для рівнів стандарту, академічного та профільного (додаток Т.1). Завдання контрольної роботи диференційовані і відповідають трьом рівням вимог до математичної підготовки учнів. Базовий рівень представляють завдання № 1-6. Правильне розв’язування кожного з них оцінюється в один бал. Повне і правильне розв’язання усіх завдань цього рівня дозволяє учню набрати 6 балів і досягти базового рівня математичної підготовки. Достатньому рівню вимог відповідають завдання № 7-9, розв’язання яких оцінюється у два бали. Зауважимо, що одне із завдань достатнього рівня пропонується на вибір – № 8 або № 9. Завдання високого рівня № 10-11 також пропонуються на вибір і оцінюються у два бали. Якщо учень розв’язав обидва завдання, які пропонуються на вибір, то зараховується тільки одне, з яким учень, на думку вчителя, справився краще. На основі аналізу задач, які учні не обрали, вчитель визначає типові труднощі та напрями корекційної роботи. Таким чином, кількість завдань контрольної роботи перевищує ту їх кількість, яка потрібна, щоб отримати максимальну оцінку. Це сприяє диференціації навчального процесу, врахуванню індивідуальних особливостей учнів.

На профільному рівні ефективною виявилась залікова форма тематичного контролю. У процесі дослідження заліки проводились на спарених уроках. Для виявлення рівня оволодіння теоретичним матеріалом на першому уроці пропонувалась контрольна робота з теорії (додаток Т.2). Вона містила завдання різних рівнів складності (від репродуктивних до проблемних) з метою забезпечення диференціації контролю. На другому уроці проводилась різнорівнева контрольна робота для перевірки практичних навичок та умінь учнів (додаток Т.1). Перелік теоретичних запитань та типові диференційовані задачі контрольних робіт повідомлялися на початку вивчення теми.

Особливе місце в тематичному контролі на профільному рівні ми відводимо математичному дослідженню учня. Це його індивідуальна

творча робота, яка характеризується суб'єктивною новизною отриманих результатів. В ході експерименту учням пропонувалися математичні дослідження різноманітного характеру: виконання творчих завдань, розв'язування задач олімпіадного рівня, написання рефератів проблемної тематики, самостійне складання задач і вправ на дану тему тощо (зразки завдань наводимо в додатку У). Диференціація математичних досліджень здійснювалась за критеріями складності, об'єму, міри допомоги вчителя. Кожен учень мав можливість обрати посильне для себе завдання, що відповідає його інтересам та пізнавальним здібностям.

Математичні дослідження учнів оцінювались в два етапи: перевірка письмового звіту та його усний захист на одному з останніх уроків теми. При оцінюванні враховувались такі характеристики дослідження як міра оригінальності роботи; відносна новизна дослідження для самого учня або його однокласників; об'єм та зміст створеного образу; правильність відповіді. Математичне дослідження, що є власною освітньою продукцією учня, дає можливість вчителю діагностувати рівень розвитку його особистісних якостей: математичної культури, інтуїції, здатності нестандартно мислити.

Запропонована методика контролю у процесі диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу у профільній школі передбачає такі основні вимоги щодо його здійснення:

1) система контролю має відповідати особливостям профілю навчання, пізнавальним можливостям та потребам учнів профільного класу;

2) контроль має носити профільно-рівневий характер, що передбачає диференціацію вимог щодо засвоєння тригонометричного матеріалу відповідно до профілю та навчальних можливостей учнів;

3) орієнтація контролю та оцінювання на перевірку досягнення базових і підвищених результатів навчання;

4) забезпечення об'єктивної та достовірної перевірки знань та умінь учнів;

5) система контролю має стимулювати розвиток учнів, підвищувати їх навчально-пізнавальну активність, відповідати особистісно орієнтованому підходу до процесу навчання;

6) варіативність форм та методів контролю.

2.6. Організація педагогічного експерименту. Уточнення та корекція методичних рекомендацій

Експериментальна перевірка ефективності розробленої методики диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу здійснювалась протягом 2006-2010 рр. в 10-11-х профільних класах природничо-математичного ліцею „Елітар", загальноосвітньої школи № 4, спеціалізованої спортивної школи № 26 м. Рівне, гуманітарної гімназії з

поглибленим вивченням іноземних мов м. Здолбунів, економіко-гуманітарного ліцею м. Березне, Соснівського НВК „гімназія – загальноосвітня школа І ступеня” Рівненської області, Попільнянської гімназії № 1 Житомирської області, Стуфчинецької загальноосвітньої школи Хмельницької області.

Педагогічний експеримент проводився в три етапи, кожен з яких мав свою специфіку, мету і завдання. У процесі дослідження систематично аналізувались отримані результати, вносились необхідні корективи, уточнювались окремі деталі пропонованої методики. Експериментом були охоплені учні 10-11-х профільних класів.

На першому етапі (констатувальний експеримент), який тривав протягом 2006-2007 рр., вивчалась психолого-педагогічна, наукова, навчально-методична література з проблеми дослідження, стан профільної шкільної математичної освіти.

У ході констатувального експерименту нами був проведений аналіз діючих програм для профільного навчання математики, підручників, дидактичних матеріалів, нормативних документів, які регулюють функціонування профільної школи. На цьому етапі проводилась робота з метою з’ясування фактичного рівня засвоєння тригонометричного матеріалу, характеру і причин труднощів, що виникають в учнів профільних класів під час його вивчення. Практичний досвід розв’язання проблеми дослідження вивчався шляхом систематичних спостережень на уроках, аналізу письмових самостійних та контрольних робіт, бесід, анкетування вчителів та учнів.

У ході констатувального експерименту виявлено, що в шкільній практиці вивчення тригонометричного матеріалу здійснюється не достатньо ефективно. Для частини учнів характерні відсутність мотивації та інтересу до вивчення тригонометричного матеріалу. Часто має місце формальне засвоєння змісту тригонометричних понять, нерозуміння їх геометричної інтерпретації. Невисокий рівень сформованості вмінь застосовувати тригонометричний матеріал до розв’язування прикладних задач та задач з міжпредметними зв’язками.

Усвідомлюючи важливість та доцільність диференційованого навчання математики у профільній школі, як способу врахування індивідуальних особливостей учнів, їх навчально-пізнавальних можливостей і потреб, професійних намірів, вчителі відчувають значні труднощі в його практичній реалізації. Це пояснюється різноплановістю навчальних профілів з точки зору навчання математики, недостатньою розробленістю питання методики диференційованого навчання математики у профільній школі і методики його реалізації при навчанні тригонометричного матеріалу.

Аналіз анкетування вчителів (додаток Ф) свідчить, що вони недооцінюють практичне значення тригонометричного матеріалу, не достатньо враховують його можливості для розвитку інтересів та професійних намірів учнів. Більшість вчителів не здійснює диференціації

на етапах мотивації навчання, актуалізації опорних знань, вивчення теоретичного матеріалу. До причин неефективності вивчення тригонометричного матеріалу у профільній школі також віднесемо такі:

- вивчення багатьох питань тригонометричного матеріалу здійснюється ізольовано від інших шкільних предметів, в першу чергу геометрії і фізики;
- недостатньо встановлюються внутрішньопредметні зв'язки між окремими темами тригонометричного матеріалу, а також тригонометричного матеріалу з іншими математичними розділами та курсами;
- неналежна увага приділяється інтерпретації тригонометричних функцій як математичних моделей реальних явищ та процесів;
- значна увага приділяється формально-оперативному характеру вивчення тригонометричного матеріалу.

На основі отриманих результатів була сформульована гіпотеза, визначені завдання дослідження, складено план дослідної роботи.

Другий, пошукувальний етап експерименту, тривав впродовж 2007-2008 рр. На цьому етапі було створено та апробовано методику диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу у профільній школі, а також здійснено її корекцію. Були уточнені цілі вивчення тригонометричного матеріалу у класах різних профілів, відібрано та теоретично обґрунтовано зміст тригонометричного матеріалу для профільного навчання. З'ясовані найбільш ефективні методи, організаційні форми та засоби диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу.

У ході пошукувального експерименту розроблялись методичні рекомендації та дидактичні матеріали, здійснювалась їх корекція. Паралельно досліджувались можливості використання наочних посібників та ІКТ. Розроблялись програми елективних курсів з тригонометрії, тексти самостійних та контрольних робіт для перевірки результатів навчально-пізнавальної діяльності учнів.

Третій етап експерименту, формувальний, проводився протягом 2008-2010 рр. На цьому етапі здійснювалась перевірка ефективності запропонованої методики диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу у профільній школі.

З метою з'ясування впливу запропонованої методики на успішність та якість знань учнів здійснювався аналіз самостійних та тематичних контрольних робіт учнів експериментальних (ЕК) і контрольних класів (КК), а також підсумкової контрольної роботи, якою завершувалось систематичне вивчення тригонометричного матеріалу в 10-му класі. За результатами, що отримані в ході цих дій, здійснювався порівняльний аналіз. Справедливість сформульованої гіпотези перевірялась за допомогою статистичних методів.

В експерименті брало участь 586 учнів, які вивчають математику на рівні стандарту (гуманітарні профілі), академічному (природничі,

універсальний профілі) та профільному (математичний, фізико-математичний профілі) (табл. 2.9). Навчання в ЕК проводилось за пропонованою методикою, в КК – за традиційною.

Таблиця 2.9

Розподіл учнів експериментальних і контрольних класів за рівнями вивчення математики

Класи	Рівні вивчення математики			Усього учнів
	профільний	академічний	стандарт	
ЕК	99	102	96	297
КК	95	100	94	289
Усього учнів	194	202	190	586

Для оцінки рівня сформованості в старшокласників мотивації учіння тригонометричного матеріалу ми виділили чотири рівні:

1) низький рівень – учень негативно ставиться до учіння тригонометричного матеріалу, не цікавиться його застосуваннями на практиці, не бачить його ролі у вивченні інших шкільних предметів, у своєму майбутньому навчанні та професійній діяльності, в збагаченні власного світогляду;

2) середній рівень – учень періодами виявляє ситуативний інтерес до вивчення тригонометричного матеріалу, має загальне уявлення про його застосування в науковій та професійній діяльності людини, але не може їх конкретизувати, пояснити, навести приклади;

3) високий рівень – в учня позитивне ставлення до учіння, він розуміє необхідність вивчення тригонометричного матеріалу для збагачення свого загальнокультурного рівня, продовження навчання, вивчення шкільних предметів. Такі учні намагаються виконувати усі програмні вимоги, але не прагнуть до розширення та поглиблення своїх знань з тригонометрії;

4) найвищий рівень – учень із зацікавленням вивчає тригонометричний матеріал, читає додаткову літературу з математики, де розглядаються відомості з тригонометрії, може чітко відповісти на запитання „для чого вивчати?”. Такі учні виявляють наполегливість у вивченні складних питань, мають стійкі інтелектуально-вольові зусилля для досягнення навчальної мети.

Для виявлення рівня мотивації проводилися спостереження, опитування, бесіди з учнями, вчителями, батьками. Результати цієї роботи представлені в табл. 2.10. Аналіз таблиці 2.10 свідчить про значне підвищення рівня мотивації вивчення тригонометричного матеріалу в учнів ЕК порівняно з КК, що пояснюється позитивним впливом пропонованої методики.

Таблиця 2.10

Розподіл учнів ЕК і КК за рівнями сформованості мотивації учіння тригонометричного матеріалу

Рівні	Рівні вивчення математики		
	профільний	академічний	стандарт

сформованості мотивації	ЕК	КК	ЕК	КК	ЕК	КК
низький, %	2	5	6	20	12	35
середній, %	7	21	15	32	34	45
високий, %	71	63	67	41	46	18
найвищий, %	20	11	12	7	8	2

Наприкінці систематичного вивчення тригонометричного матеріалу в ЕК і КК проводилась підсумкова тематична контрольна робота, результати виконання якої наведені в табл. 2.11. Показники в таблиці представлені у відсотках.

Таблиця 2.11

Результати підсумкової тематичної контрольної роботи в експериментальних і контрольних 10-х класах

Класи	Рівні вимог			Учні, які не досягли базового рівня 0-3 балів	Успішність	Якість
	базовий 4-6 балів	достатній 7-9 балів	високий 10-12 балів			
профільний рівень						
ЕК	11	46	40	3	97	86
КК	30	39	26	5	95	65
академічний рівень						
ЕК	25	50	19	6	94	69
КК	42	34	10	14	86	44
рівень стандарту						
ЕК	45	38	9	8	92	47
КК	57	18	6	19	81	24

За експериментальними даними табл. 2.11 робимо висновок, що в учнів ЕК кількісні показники рівня навчальних досягнень вищі у порівнянні з КК. Цей висновок підтверджують також діаграми (рис. 2.11).

Використаємо ці дані для перевірки нульової та альтернативної гіпотез за критерієм Пірсона. Обидві вибірки випадкові, незалежні, члени вибірок незалежні між собою, шкалою вимірювань є шкала найменувань з 3 категоріями: 0-6 балів – категорія 1; 7-9 балів – категорія 2; 10-12 балів – категорія 3. За нульову гіпотезу прийммемо: на рівень навчальних досягнень учнів ЕК і КК експеримент не вплинув, а відмінність результатів вважаємо випадковою; за альтернативну гіпотезу – експеримент вплинув на результати вивчення тригонометричного матеріалу.

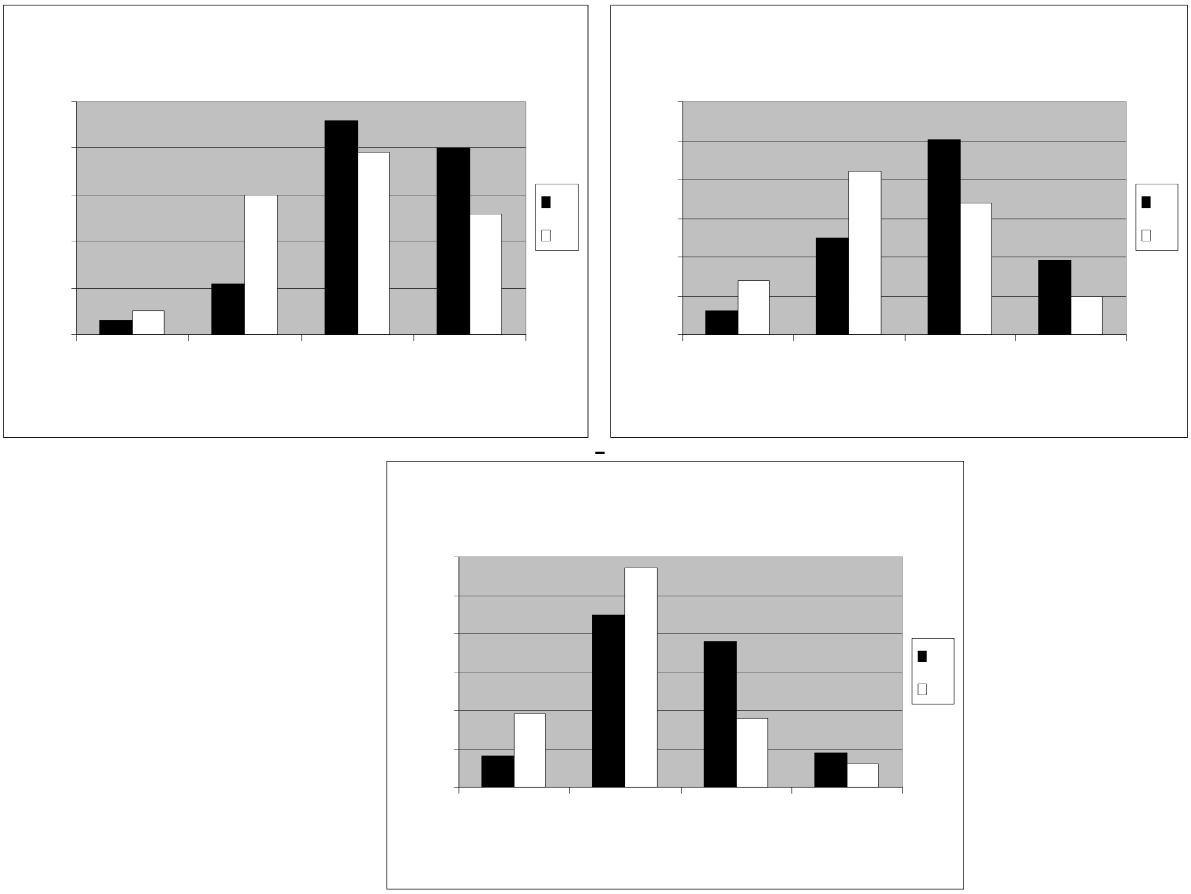


Рис. 2.11. Результати підсумкової тематичної контрольної роботи в експериментальних і контрольних 10-х класах.

Для перевірки нульової гіпотези застосуємо двосторонній критерій Пірсона [75, с.101]:

2

де n1, n2 – кількість учнів експериментальних і контрольних класів відповідно; O1i, O2i (i = 1, 2, 3) – кількість учнів експериментальних та контрольних класів і-ї категорії відповідно.

Для класів, які вивчають математику на профільному рівні Тст≈11,85; академічному рівні – Тст≈12,72; рівні стандарту – Тст≈ 10,67 (додаток Х). За таблицею для χ2критерію [75, с.130], приймаючи рівень значущості

і число ступенів вільності r=3-1=2, знаходимо критичне значення величини Т: Ткр≈5,99. Таким чином, для всіх рівнів маємо Тст>Ткр, тому

нульову гіпотезу відкидаємо і приймаємо гіпотезу про вплив запропонованої методики на результати засвоєння учнями тригонометричного матеріалу.

У ході формувального експерименту учням ЕК і КК була запропонована анкета (додаток Ц) з метою з'ясування їх ставлення до вивчення тригонометричного матеріалу. Результати анкетування свідчать про посилення інтересу та мотивації учнів ЕК до вивчення тригонометрії, усвідомлення її практичної значущості, ролі в майбутній навчальній та професійній діяльності порівняно з КК. Аналіз анкетування показує, що запропонована методика активізує навчально-пізнавальну діяльність учнів, створює умови, за яких вивчення тригонометричного матеріалу стає доступним для кожного учня. При цьому враховуються його навчальні можливості, інтереси та професійні наміри.

Вчителі математики, які брали участь в педагогічному експерименті, позитивно оцінили розроблену методику. Ними було відмічено зростання успішності та якості вивчення тригонометричного матеріалу, посилення його внутрішньопредметних та міжпредметних зв'язків. Здійснення та раціональне поєднання профільної та рівневої диференціації навчально-виховного процесу з урахуванням особистісно орієнтованого підходу до нього позитивно впливає на рівень засвоєння тригонометричного матеріалу, сприяє математичному розвитку учнів.

Отже, аналіз статистичних результатів експерименту, анкетування учнів, бесіди з вчителями свідчать про ефективність пропонованої методики диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу у профільній школі.

Висновки до другого розділу

Вивчення тригонометричного матеріалу в курсі алгебри і початків аналізу профільної школи більш ефективне за умови диференціації навчально-пізнавальної діяльності учнів на усіх етапах процесу засвоєння (сприймання нового матеріалу, його розуміння, запам'ятовування, застосування на практиці, повторення).

З метою організації різнорівневої навчальної діяльності учнів при вивченні теоретичного матеріалу доцільні такі прийоми: деталізація теоретичного матеріалу; диференціація допомоги в процесі засвоєння нового; диференціація запитань та завдань; пояснення та обґрунтування окремих елементів теоретичного матеріалу учнями.

З'ясовано, що процес вивчення тригонометричних формул включає два етапи: теоретичне обґрунтування формул та їх застосування на практиці. Найбільшу увагу до першого етапу слід приділити учням, майбутня навчальна та професійна діяльність яких тісно пов'язана з математикою. На усіх рівнях вивчення тригонометричного матеріалу має переважати другий етап, зважаючи на прикладну спрямованість профільного навчання математики.

Нами виділені два основні рівні вивчення доведень теоретичних тверджень, що містить тригонометричний матеріал: опрацювання „готових" доведень і конструювання доведень. Залежно від профілю, вивчення властивостей тригонометричних функцій передбачається відповідно до одного з трьох підходів: геометричного, частково-аналітичного або комбінованого.

Запропоновані логічні та образні прийоми запам'ятовування тригонометричних формул, які ґрунтуються на наукових напрямах мнемотехніки та ейдетики. Їх застосування сприяє розумінню особливостей структури тригонометричних формул, взаємозв'язків між ними, способів виведення, розвитку пам'яті, уяви, логічного мислення учнів.

Система вправ, як засіб формування навичок та умінь учнів при вивченні тригонометричного матеріалу, повинна відповідати вимогам доступності, змістової диференціації, рівневої диференціації, професійної значимості, реалізації міжпредметних зв'язків, прикладної спрямованості. В системі вправ з тригонометрії важливе місце займають вправи на формування обчислювальних та графічних навичок та умінь учнів, які моделюють професійно-важливі види діяльності.

Важливими засобами диференціації у процесі вивчення тригонометричного матеріалу, які стимулюють дослідницьку діяльність учнів на різних рівнях, є елективні курси. З метою створення оптимальних умов для урахування пізнавальних можливостей та потреб, розвитку дослідницьких здібностей учнів, необхідно, щоб організація елективних курсів базувалась на принципах вибірковості, індивідуалізації, процесуальності, модульності та професійно-орієнтуючому.

Контроль навчально-пізнавальної діяльності учнів передбачає диференціацію вимог до засвоєння тригонометричного матеріалу у двох напрямах: відповідно профілю навчання та пізнавальним можливостям учнів в межах профільного класу. Вимоги до засвоєння тригонометричного матеріалу доцільно розподілити на три рівні (базовий, достатній та високий) і конкретизувати наборами еталонних задач.

Основні результати другого розділу опубліковані у працях [77-79, 86-87 , 89-90, 93-95].

ВИСНОВКИ

Сучасні освітні пріоритети передбачають особистісну орієнтацію системи освіти, оновлення змісту навчання відповідно до розвитку суспільства та потреб життя. Тригонометричний матеріал в курсі математики профільної школи необхідно розглядати як засіб розвитку загальної культури особистості, збагачення її уявлень про прикладні застосування математики, підготовки до продовження освіти та професійної діяльності. Методична система вивчення тригонометричного матеріалу в сучасній профільній школі потребує оновлення в напрямі формування та розвитку особистісних якостей учнів, врахування їх індивідуальних відмінностей.

Відповідно до поставленої мети і визначених завдань у ході дослідження отримано такі результати: проаналізовано психолого-педагогічну, методичну, навчальну літературу з проблеми дослідження та з'ясовано стан диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу у профільній школі; виявлено та теоретично обґрунтовано психолого-педагогічні передумови диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу у профільній школі; визначено методичні вимоги до організації диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу учнями профільної школи; розроблено концептуальну модель диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу в курсі алгебри і початків аналізу профільної школи; експериментально перевірено ефективність розробленої методики і внесено корективи в методичні рекомендації.

Результати проведеного теоретичного та експериментального дослідження дають можливість зробити такі висновки.

1. Тригонометричний матеріал – важлива складова змісту шкільної математичної освіти, яка сприяє забезпеченню прикладної спрямованості навчання математики, розвитку практичних навичок та вмінь, збагаченню наукового світогляду учнів. Теоретичний аналіз проблеми ефективної математичної підготовки учнів з тригонометрії показав, що ця проблема досліджується багатьма науковцями, які відмічають типові труднощі при вивченні учнями тригонометричного матеріалу: нерозуміння означень тригонометричних величин, невміння застосовувати відомості з тригонометрії до розв'язування прикладних задач, при вивченні інших шкільних предметів (в першу чергу фізики та геометрії), слабкі навички раціональних тригонометричних перетворень. Актуальність цієї проблеми значно зросла в умовах сучасного суспільства, яке потребує кваліфікованих конкурентноспроможних фахівців, що застосовують знання з тригонометрії до розв'язування задач науки, техніки, виробництва та практики.

2. Вивчення тригонометричного матеріалу в умовах профільної школи здійснюється в класах усіх профілів на рівнях стандарту, академічному та профільному. Обґрунтовано, що більш висока якість засвоєння

навчального матеріалу в курсі алгебри і початків аналізу профільної школи може бути досягнута за умови його диференційованого вивчення, що передбачає рівневу навчально-пізнавальну діяльність учнів профільних класів, що спрямована на якісне оволодіння математичними знаннями і яка здійснюється відповідно до їх вікових, психологічних, індивідуально-типологічних особливостей з орієнтацією на освітні та професійні наміри. Рівневу диференціацію у профільному класі слід розглядати як спосіб реалізації особистісно орієнтованого підходу до учнів, що дає можливість покращити результати засвоєння навчального матеріалу. З'ясовано, що диференційоване вивчення математики, зокрема тригонометричного матеріалу, у профільній школі має здійснюватись як за рахунок диференціації змісту навчального матеріалу та вимог до його засвоєння, так і шляхом диференціації методів та прийомів засвоєння нових знань, пропонованих систем задач, форм і методів контролю.

3. До психолого-педагогічних передумов диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу, які позитивно впливають на процес та результат учіння, відносимо: врахування в навчальному процесі особливос тей навчальної діяльності учнів, їх мотиваційної сфери, пізнавальних психічних процесів (пам'ять, мислення та ін.); використання наочності; діагностику індивідуальних та групових відмінностей за рівнями сформованості важливих для навчання якостей, типологічне групування учнів.

4. Для ефективної організації процесу диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу у профільній школі необхідне виконання методичних вимог: визначення рівнів вимог до засвоєння тригонометричного матеріалу; орієнтація на досягнення учнями класу базового рівня підготовки; диференціація змісту тригонометричного матеріалу; варіативність форм та методів організації навчально-пізнавальної діяльності учнів; диференційований добір засобів навчання; контроль досягнення базових і підвищених результатів навчання.

5. Диференціацію змісту тригонометричного матеріалу у профільній школі доцільно здійснювати на основі створеної автором структурної схеми змістової диференціації тригонометричного матеріалу, яка значно розширює можливості особистісно орієнтованого підходу до учнів і дозволяє: встановлювати домінуючі елементи змісту навчання, варіювати навчальне навантаження учнів, підтримувати і розвивати їх пізнавальні інтереси, диференційовано залучати учнів до різних видів навчально-пізнавальної діяльності, моделювати соціальне замовлення шкільній математичній освіті.

6. Створення ситуаційних та умовно постійних типологічних груп дозволяє здійснити рівневу диференціацію в межах профільної диференціації. Типологічне групування учнів на основі рівнів навченості, загальних та математичних здібностей слід розглядати як один із основних механізмів диференціації навчання у профільному класі.

7. Розроблена та теоретично обґрунтована концептуальна модель диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу в курсі алгебри і початків аналізу профільної школи ґрунтується на концепції єдності рівневої та профільної диференціації навчання та спрямована на особистісний розвиток учнів засобами тригонометрії. Модель проектує диференційовану навчально-пізнавальну діяльність учнів та її основні складові: ціннісно-орієнтаційну, понятійно-логічну, операційно-технічну, інформаційно-комунікативну та контрольно-рефлексивну. Структурні компоненти моделі, взаємодіючи між собою, утвоюють цілісну дидактичну систему, що спрямована на особистісний розвиток учнів засобами тригонометрії, який включає: процеси набуття математичної компетентності, формування мотивації учіння, дослідницьких здібностей, професійне самовизначення та самоорганізацію особистості.

8. З метою врахування особливостей навчально-пізнавальної діяльності учнів профільних класів доцільне використання геометричного, частково-аналітичного та комбінованого підходів до вивчення властивостей тригонометричних функцій, які побудовані на різному співвідношенні наочно-інтуїтивних та абстрактно-теоретичних міркувань. Застосування логічних та образних прийомів запам'ятовування тригонометричних формул, які ґрунтуються на наукових напрямах мнемотехніки та ейдетики, дає змогу адаптувати процес навчання до вікових та індивідуальних можливостей учнів, їх природних задатків та здібностей.

9. Елективні курси системно поглиблюють диференціацію навчального процесу та створюють умови для більш повного урахування індивідуальних відмінностей учнів, їх природних нахилів та здібностей. В ході дослідження розроблено і впроваджено програми елективних курсів, які присвячені тригонометричному матеріалу: „Обернені тригонометричні функції", „Тригонометрія в задачах фізики", „Історія тригонометрії". Елективні курси з тригонометрії дають змогу розвинути дослідницькі і практичні навички та уміння учнів, створити умови для їх професійного самовизначення та внутрішньопрофільної диференціації.

10. Проведений педагогічний експеримент у профільних класах, де математика вивчається на рівнях стандарту, академічному та профільному, підтвердив сформульовану гіпотезу та ефективність розробленої методики.

11. Мета дисертаційного дослідження досягнута, поставлені завдання виконані. Дисертацією не вичерпано свіх аспектів проблеми. Подальші дослідження можуть бути пов'язані із удосконаленням навчально-методичного забезпечення вивчення тригонометричного матеріалу в умовах профільної школи, розробкою методик реалізації прикладної спрямованості навчання тригонометричного матеріалу у профільній школі , забезпеченням наступності навчання математики у профільній школі, професійно-технічних та вищих навчальних закладах, підготовкою вчителів математики, студентів педагогічних вузів до диференційованого

навчання у профільній школі.

Матеріали дисертації можуть використовуватися вчителями математики, які працюють у профільних класах, авторами підручників, навчальних посібників, дидактичних матеріалів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Акимова М. К. Индивидуальность учащихся и индивидуальный подход / М. К. Акимова, В. Т. Козлова. – М. : Знание, 1992. – 77 с.
2. Алгебра : [проб. підруч. для 10 класу шкіл, ліцеїв та гімназій фіз.-мат. профілю] / В. Р. Кравчук, В. М. Козира, Я. Ф. Гап'юк, Я. Т. Гринчишин. – Тернопіль : Підручники і посібники, 1997. – 256 с.
3. Алгебра и начала анализа : [учеб. для 10-11 классов общеобразов. учреждений] / [Колмогоров А. Н., Абрамов О. М., Дубницын Ю. П. и др.] ; под. ред. А. Н. Колмогорова. – [12-е изд.]. – М. : Просвещение : АО „Московский учебник", 2002. – 384 с.
4. Алгебра и начала анализа : [учеб. для 10-11 классов общеобразов. учреждений] / [Мордкович А. Г., Денищева Л. О., Корешкова Т. А. и др.] ; под. ред. А. Г. Мордковича. – [5-е изд.]. – М. : Мнемозина, 2004. – 375 с. – (у 2 ч., ч.1).
5. Алгебра и начала анализа : [учеб. для 10-11 классов средней школы] / [Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Сидоров Ю. В. и др.] ; под ред. Ш. А. Алимова. – [2-е изд.]. – М. : Просвещение, 1993. – 254 с.
6. Алгебра і початки аналізу : [підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів : академічний рівень] / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2010. – 352 с.
7. Алгебра і початки аналізу : [підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів : профільний рівень] / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2010. – 416 с.
8. Алгебра і початки аналізу : проб. підруч. 10 клас / [Афанасьєва О. М., Бродський Я. С., Павлов О. Л., Сліпенко А. К.]. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2004. – 456 с.
9. Андронатий В. В. Дифференцированный подход к процессу обучения : психолого-дидактический аспект / Андронатий В. В. – Гатчина : Изд-во Ленинградского обл. ин-та экономики и финансов, 2000. – 251 с.
10. Андронов И. К. Курс тригонометрии, развиваемый на основе реальных задач / И. К. Андронов, А. К. Окунев. – М. : Просвещение, 1967. – 648 с.
11. Аніскіна Н. О. Організація профільного навчання в сучасній школі / Аніскіна Н. О. – Х. : Основа, 2003. – 173 с.
12. Антощук Е. В. Знакомьтесь, ваша память / Антощук Е. В. – К. : Вирій, 2005. – 110 с.
13. Апостолова Г. В. Геометрія 8 клас : [підруч. для загальноосвіт. навч. закладів] / Апостолова Г. В. – К. : Генеза, 2005. – 256 с.
14. Апостолова Г. В. Геометрія 9 клас : [дворівневий підруч. для загальноосвіт. навч. закл.] / Апостолова Г. В. – К. : Генеза, 2009. – 304 с.
15. Бабанский Ю. К. Избранные педагогические труды / Бабанский Ю. К. – М. : Педагогика, 1989. – 560 с.

16. **Бабанский Ю. К. Оптимизация процесса обучения. Общедидактический аспект / Бабанский Ю. К. – М. : Педагогика, 1977. – 256 с.**
17. **Балл Г. О. Психолого-педагогічні засади організації профільної допрофесійної підготовки школярів / Г. О. Балл, П. С. Перепелиця // Педагогіка і психологія професійної освіти. – 1998. – № 5. – С. 148–159.**
18. **Баум И. В. Система изучения тригонометрии на векторной основе в курсе алгебры средней школы : автореф. дисс. на соискание науч. степени канд. пед. наук : спец. 13.00.02 „Теория и методика обучения (математика)” / И. В. Баум. – М., 1965. – 18 с.**
19. **Башмаков М. И. Уровень и профиль математического образования / М. И. Башмаков // Математика в школе. – 1993. – № 2. – С. 7–9.**
20. **Бевз В. Г. Історія математики / Бевз В. Г. – Х. : вид. група „Основа”, 2006. – 176 с. – (Серія «Бібліотека журналу „Математика в школах України”»; Вип. 2 (38)).**
21. **Бевз В. Г. Історія математики у фаховій підготовці майбутніх учителів : монографія / Бевз В. Г. – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2005. – 360 с.**
22. **Бевз Г. П. Алгебра і початки аналізу : [підруч. для 10-11 кл. загальноосвіт. навч. закл.] / Бевз Г. П. – [2-е вид.]. – К. : Освіта, 2006. – 255 с.**
23. **Бевз Г. П. Геометрія. 8 клас : [підруч. для загальноосвіт. навч. закл.] / Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. – К. : Вежа, 2008. – 256 с.**
24. **Бевз Г. П. Математика : [проб. підруч. для учнів 10-11 кл. шкіл, ліцеїв, гімназій гуманіт. профілю] / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – К. : Бліц, 2005. – 256 с.**
25. **Бевз Г. П. Математика 10 : [підруч. для загальноосвіт. навч. закладів : рівень стандарту] / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – К. : Ґенеза, 2010. – 272 с.**
26. **Бевз Г. П. Методика викладання математики : навч. посіб. / Бевз Г. П. – [3є вид.]. – К. : Вища школа, 1989. – 367 с.**
27. **Бермант А. Ф. Тригонометрия / А. Ф. Бермант, Л. А. Люстерник. – [4-е изд.]. – М. : Наука, 1967. – 176 с.**
28. **Бескін М. М. Питання тригонометрії та її викладання / Бескін М. М. – К. : Радянська школа, 1951. – 132 с.**
29. **Беспалько В. П. Слагаемые педагогической технологии / Беспалько В. П. – М. : Педагогика, 1989. – 192 с.**
30. **Бех І. Д. Виховання особистості : сходження до духовності : наук. видання / Бех І. Д. – К. : Либідь, 2006. – 272 с.**
31. **Бібік Н. Проблема профільного навчання в педагогічній теорії і практиці / Надія Бібік // Математика в школі. – 2006. – № 1. – С. 2–6.**
32. **Блонский П. П. Избранные педагогические и психологические сочинения. Т. 2 / П. П. Блонский; под. ред. А. В. Петровского. – М. : Педагогика, 1979. – 399 с.**
33. **Богоявленский Д. Н. Психология усвоения знаний в школе / Д. Н. Богоявленский, Н. А. Менчинская. – М. : Изд-во АПН РСФСР, 1959. –**

347 с.
34. Болгарский Б. В. Основные этапы развития тригонометрии и ознакомление с ними учащихся / Б. В. Болгарский // Математика в школе. – 1956. – № 1. – С. 21–27.
35. Болотова Е. Л. Управление профильным обучением старшеклассников в процессе взаимодействия школы и педвуза : дисс. … кандидата пед. наук : 13.00.01 / Болотова Елена Леонидовна. – М., 1999. – 185 с.
36. Болтянский В. Г. К проблеме дифференциации школьного математического образования / В. Г. Болтянский, Г. Д. Глейзер // Математика в школе. – 1988. – № 3. – С. 9–13.
37. Бондар В. І. Дидактика : [підруч. для студ. вищ. пед. навч. закладів] / Бондар В. І. – К. : Либідь, 2005. – 264 с.
38. Брадіс В. М. Методика викладання математики в середній школі / Брадіс В. М. – К. : Рад. школа, 1954. – 484 с.
39. Брадіс В. М. Чотиризначні математичні таблиці : для середньої школи / Брадіс В. М. – Харків : ФОП Співак Т. К., 2009. – 80 с.
40. Братанич О. Проблема дефініції базових понять у теорії диференційованого навчання / Ольга Братанич // Рідна школа. – 2000. – № 7. – С. 43–45.
41. Братанич О. Г. Педагогічні умови диференційованого навчання учнів загальноосвітньої школи : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : спец. 13.00.09 „Теорія навчання” / О. Г. Братанич. – Кривий Ріг, 2001. – 19 с.
42. Бродський Я. С. Шляхи оновлення змісту шкільної математичної освіти / Я. С. Бродський, О. Л. Павлов // Математика в школі. – 2008. – № 1. –
С. 24–29.
43. Бугайов О. І. Диференціація навчання учнів у загальноосвітній школі / О. І. Бугайов, Д. І. Дейкун. – К. : Освіта, 1992. – 32 с.
44. Букатов В. М. Групповая работа на уроке / Букатов В. М. – М. : Чистые пруды, 2006. – 30 с.
45. Бурда М. Програма з математики для класів гуманітарного напряму : 10-11 класи / М. Бурда, Ю. Мальований // Математика в школі. – 2003. – № 6. – С. 14–6.
46. Бурда М. І. Математика 10-11 : [підруч. для шк., ліцеїв та гімназій гуманіт. профілю] / Бурда М. І., Мальований Ю. І., Дубинчук О. С. – К. : Освіта, 2006. – 287 с.
47. Бурда М. І. Математика в старших класах гуманітарної школи / М. І. Бурда, О. С. Дубинчук, Ю. І. Мальований // Педагогіка і психологія. – 1994. – № 4. – С. 73–79.
48. Бурда М. І. Методичні основи диференційованого формування геометричних умінь учнів основної школи : дис. … доктора пед. наук : 13.00.02 / Бурда Михайло Іванович. – К., 1994. – 347 с.

49. **Бурда М. І. Структура і зміст профільного навчання математики / М. І . Бурда // Математика в школі. – 2007. – № 7. – С. 3–6.**
50. **Буряк В. К. Диференціація навчання на уроці / В. К. Буряк // Радянська школа. – 1990. – № 3. – С. 58–64.**
51. **Буслаев А. В. Методические основы отбора задач по математике для старших классов различного профиля обучения : дисс. ... кандидата пед. наук : 13.00.02 / Буслаев Антон Владимирович. – М., 2002. – 222 с.**
52. **Бутузов И. Д. Диффференцированный подход к обучению учащихся на современном уроке : учебное пособие / Бутузов И. Д. – Новгород, 1972. – 72 с.**
53. **Вайнтрауб М. А. Тематичне оцінювання. Математика. 10-11 класи гуманітарного, природничого, фізико-математичного та економічного профілів : різнорів. дидакт. матеріали / Вайнтрауб М. А., Химерик В. П ., Тарасевич О. М. – К. : Видавець Т. Клочко, 2005. – 104 с.**
54. **Васильева М. В. Методические особенности обучения элементам математического анализа учащихся профильной школы : дисс. ... кандидата пед. наук : 13.00.02 / Васильева Марина Викторовна. – М., 2004. – 215 с.**
55. **Васько О. Функції курсів за вибором / Ольга Васько // Профільне навчання : теорія і практика / за ред. О. Я. Савченко. – К. : Педагогічна преса, 2006. – С. 125–128.**
56. **Вашуленко О. П. Курси за вибором з математики в системі профільної освіти / О. П. Вашуленко, Н. С. Прокопенко // Математична газета. – 2008. – № 11–12. – С. 10–13.**
57. **Вивальнюк Л. М. Елементи історії математики : навч. посіб. / Л. М. Вивальнюк, М. Я. Ігнатенко. – К. : ІЗМН, 1996. – 178 с.**
58. **Виленкин Н. Я. Алгебра и математический анализ. 10 кл. : учеб. пособие для шк. и кл. с углуб. изучением математики / Виленкин Н. Я., Ивашев-Мусатов О. С., Щварцбурд С. И. – [11-е изд.]. – М. : Мнемозина, 2004. – 334 с.**
59. **Виленкин Н. Я. Функции в природе и технике : кн. для внеклассного чтения : IX-X кл. / Виленкин Н. Я. – М. : Просвещение, 1978. – 192 с.**
60. **Владимирцева С. А. Об изучении первых тем тригонометрии / С. А. Владимирцева // Математика в школе. – 2005. – № 3. – С. 16–21.**
61. **Володько В. М. Індивідуалізація й диференціація навчання : понятійно-категорійний аналіз / В. М. Володько // Педагогика и психология. – 1997. – № 4. – С. 8–17.**
62. **Волянська О. Є. Про наступність при вивченні тригонометричного матеріалу в загальноосвітній та професійній школі / О. Є. Волянська // Евристика та дидактика точних наук. – 1996. – № 4. – С. 39–43.**
63. **Вольянська С. Є. Організація профільного навчання в загальноосвітній школі в умовах регіону : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : спец. 13.00.01 „Загальна педагогіка та історія педагогіки” / С. Є. Вольянська. – Х., 2006. – 19 с.**

64. Выготский Л. С. Педагогическая психология / Выготский Л. С. – М. : Педагогика, 1991. – 318 с.
65. Гайдук Ю. М. К вопросу об аналитическом и геометрическом определениях тригонометрических функций / Ю. М. Гайдук // Математика в школе. – 1953. – № 4. – С. 1–7.
66. Галанина Е. А. Методика разработки учебного материала по математике для обучения на профильном уровне в 10-11-х классах общеобразовательных учреждений : дисс. ... кандидата пед. наук : 13. 00.02 / Галанина Елена Александровна. – Орел, 2009. – 177 с.
67. Галицкий М. Л. Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа / Галицкий М. Л., Мошкович М. М., Шварцбурд С. И. – М. : Просвещение, 1986. – 349 с.
68. Генкулова О. В. Методическое обеспечение индивидуальной самостоятельной работы по методике обучения алгебре и началам анализа будущих учителей математики : дисс. ... кандидата пед. наук : 13.00.02 / Генкулова Ольга Васильевна. – М., 2004. – 165 с.
69. Гетьманцев В. Д. Математика : тригонометрія : посібник для слухачів підготовчих відділень, вступників до вищих навчальних закладів, студентів педагогічних інститутів / В. Д. Гетьманцев, О. Ф. Саушкін. – К. : Либідь, 1994. – 144 с.
70. Гильбух Ю. З. Внимание : одаренные дети / Гильбух Ю. З. – М. : Знание, 1991. – 79 с.
71. Гильбух Ю. З. Психолого-педагогические основы индивидуального подхода к слабоподготовленным ученикам : пособие для учителей классов выравнивания / Гильбух Ю. З. – К. : Рад. шк., 1985. – 176 с.
72. Гладкий А. В. Математика в гуманитарной школе / А. В. Гладкий, Г. Е . Крейдлин // Математика в школе. – 1991. – № 6. – С. 6–9.
73. Глейзер Г. И. История математики в школе. IX-X кл. / Глейзер Г. И. – М. : Просвещение, 1983. – 352 с.
74. Голодюк Л. С. Методика вивчення властивостей трикутника в умовах рівневої диференціації в основній школі : дис. ... кандидата пед. наук: 13.00.02 / Голодюк Лариса Степанівна. – Кіровоград, 2004. – 227 с.
75. Грабарь М. И. Применение математической статистики в педагогических исследованиях : непараметрические методы / М. И. Грабарь, К. А. Краснянская. – М. : Просвещение, 1977. – 136 с.
76. Григулич Л. С. Самостійна робота старшокласників з математики в умовах диференційованого навчання : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : спец. 13.00.02 „Теорія та методика навчання (математика) ” / Л. С. Григулич. – К., 2004. – 20 с.
77. Грицик Т. Співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу (розробка уроку для 10 класу) / Тетяна Грицик // Математика в школі. – 2008. – № 1. – С. 19–24.
78. Грицик Т. Тригонометрія. Авторські програми спецкурсів / Тетяна Грицик // Математика. – 2010. – № 30–31. – С. 22–44.

79. **Грицик Т. Формування поняття гармонічного коливання в умовах профільного навчання математики / Тетяна Грицик, Віталій Забранський // Математика в школі. – 2009. – № 6. – С. 36–41.**
80. **Грицик Т. А. Диференційоване навчання математики як психолого-педагогічна проблема / Т. А. Грицик, В. Я. Забранський // Стан та перспективи підготовки вчителя математики в Україні : всеукр. наук.-метод. конф., 10-11 груд. 2009 р. : тези доп. – Вінниця, 2009. – С. 185–187.**
81. **Грицик Т. А. Диференційовані способи мотивації у навчанні математики / Т. А. Грицик // Особистісно орієнтоване навчання математики: сьогодення і перспективи : III всеукр. наук.-практ. конф., 8-9 квіт. 2008 р. : тези доп. – Полтава, 2008. – С. 100–101.**
82. **Грицик Т. А. До питання диференціації домашніх завдань з математики у профільних класах / Т. А. Грицик // Проблеми математичної освіти : міжнарод. наук.-метод. конф., 7-9 квіт. 2009 р. : тези доп. – Черкаси, 2009. – С. 40–42.**
83. **Грицик Т. А. До питання диференціації домашніх завдань з математики у профільних класах / Т. А. Грицик // Профільне навчання : проблеми, перспективи, шляхи реалізації : всеукр. наук.-метод. конф., 29-30 квіт. 2009 р. : тези доп. – Черкаси, 2009. – С. 54–56.**
84. **Грицик Т. А. Елективні курси в процесі диференційованого вивчення тригонометричного матеріалу / Т. А. Грицик // Розвиток інтелектуальних вмінь та творчих здібностей учнів і студентів в процесі навчання математики : всеукр. наук.-метод. конф., 3-4 груд. 2009 р. : тези доп. – Суми, 2009. – С. 29–30.**
85. **Грицик Т. А. Елементи історії тригонометрії в загальнокультурному курсі математики / Т. А. Грицик // Евристика і дидактика математики : міжнарод. наук. - метод. дистанц. конф. молодих учених, аспірантів і студентів : тези доп. – Донецьк, 2009. – С. 194–195.**
86. **Грицик Т. А. Застосування програмного педагогічного засобу GRAN1 при вивченні тригонометричного матеріалу у профільній школі / Т. А. Грицик // Евристичне навчання математики : міжнарод. наук.-метод. конф., 1-3 жовт. 2009 р. : тези доп. – Донецьк, 2009. – С. 138–139.**
87. **Грицик Т. А. Методика диференційованого вивчення теоретичного матеріалу з тригонометрії учнями профільних класів / Т. А. Грицик // Наша школа. – 2009. – № 6. – С. 62–67.**
88. **Грицик Т. А. Особливості профільної диференціації домашніх завдань з математики / Т. А. Грицик // Вісник Черкаського університету. Серія : педагогічні науки. – 2009. – Вип. 143. – С. 29–36.**
89. **Грицик Т. А. Особливості форм та методів контролю навчальних досягнень учнів з математики у профільних фізико-математичних класах / Т. А. Грицик // Оновлення змісту, форм та методів навчання і виховання в закладах освіти : зб. наук. праць. Наукові записки Рівненського держ. гум. ун-ту. – 2008. – Вип. 39. – С. 113–118.**

90. **Грицик Т. А. Періодичність функції у профільному навчанні математики / Т. А. Грицик // Наукові записки : зб. наук. статей. – К. : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2009. – Вип. 81. – С. 68–79.**
91. **Грицик Т. А. Проблема диференційованого навчання математики в умовах профільної школи / Т. А. Грицик // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців : методологія, теорія, досвід, проблеми : зб. наук. праць. – Вінниця, 2009. – С. 76–81.**
92. **Грицик Т. А. Психолого-педагогічні передумови диференційованого навчання тригонометричного матеріалу у профільній школі / Т. А. Грицик // Наукові записки : зб. наук. статей НПУ імені М. П. Драгоманова. – К. : НПУ. – 2009. – Вип. 77. – С. 39–46.**
93. **Грицик Т. А. Розв'язування рівнянь з оберненими тригонометричними функціями / Т. А. Грицик // Математика в школах України. – 2008. – № 33 (225). – С. 19–22.**
94. **Грицик Т. А. Система вправ як засіб формування навичок та умінь учнів в процесі вивчення тригонометричного матеріалу / Т. А. Грицик // Педагогічні науки : теорія, історія, інноваційні технології : науковий журнал. – Суми : СумДПУ імені А. С. Макаренка. – 2010. – № 2 (4). – С. 28–36.**
95. **Грицик Т. А. Система диференційованих завдань у профільному класі (на прикладі тригонометричного матеріалу) / Т. А. Грицик // Наукові записки : зб. наук. статей НПУ імені М. П. Драгоманова. – К. : НПУ. – 2008. – Вип. 71. – С. 55–67.**
96. **Грицик Т. А. Цілі вивчення тригонометричного матеріалу у профільній школі / Т. А. Грицик // Безперервна фізико-математична освіта : проблеми, пошуки, перспективи : всеукр. наук.-метод. конф., 8 -9 верес. 2009 р. : тези доп. – Бердянськ, 2009. – С. 41–43.**
97. **Грохольська А. Про можливості паралельного вивчення трансцендентних рівнянь та нерівностей / Алла Грохольська // Математика в школі. – 2005. – № 4. – С. 30–34.**
98. **Грохольська А. В. Методика навчання математики в старшій та вищій школах : навч.- метод. посіб. для студ. спец. 7.010103; 8.010103 / А. В. Грохольська, С. Є. Яценко. – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2007. – 191 с.**
99. **Гуманістичні орієнтири українських педагогічних доктрин (вплив укр. пед. традицій на формування творчої особистості при вивченні шкільного курсу математики) / [авт. тексту П. М. Маланюк]. – Т. : Підруч. & посіб., 1998. – 244 с.**
100. **Гуревич К. М. Индивидуально-психологические особенности школьников / Гуревич К. М. – М. : Знание, 1988. – 79 с.**
101. **Гусак П. Підготовка учителя : технологічні аспекти / Гусак П. – Луцьк : Вежа, 1999. – 277 с.**
102. **Гусев В. А. Методические основы дифференцированного обучения математике в средней школе : дисс. ... доктора пед. наук : 13.00.02 /**

Гусев Валерий Александрович. – М., 1990. – 364 с.

103. **Давыдов В. В. Проблемы развивающего обучения : опыт теоретического и экспериментального педагогического исследования / Давыдов В. В. – М. : Педагогика, 1986. – 240 с.**
104. **Дейніченко Т. І. Диференціація навчання в процесі групової форми його організації (на прикладі предметів природничо-математичного циклу) : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : спец. 13.00.09 „Теорія навчання" / Т. І. Дейніченко. – Харків, 2006. – 12 с.**
105. **Денчук Є. В. Підготовка майбутніх учителів до диференційованого навчання учнів : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : спец. 13.00.01 „Загальна педагогіка та історія педагогіки" / Є. В. Денчук. – Луганськ, 1996. – 23 с.**
106. **Державна національна програма „Освіта" („Україна XXI століття"). – К. : Райдуга, 1994. – 62 с.**
107. **Державний стандарт базової і повної середньої освіти // Математика в школі. – 2004. – № 2. – С. 2– 6.**
108. **Джаджа В. П. Метод тематического погружения при использовании мультимедийных технологий в обучении математике : на примере тригонометрии : дисс. … кандидата пед. наук : 13.00.02 / Джаджа Виктор Петрович. – Самара, 2005. – 185 с.**
109. **Дидактика средней школы / под ред. М. Н. Скаткина. – [2-е изд.]. – М. : Просвещение, 1982. – 317 с.**
110. **Дидактичні матеріали з алгебри і початків аналізу. 10 клас : навчальний посібник / [Афанасьєва О. М., Бродський Я. С., Павлов О. Л., Сліпенко А. К.]. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2007. – 288 с.**
111. **Дидык Г. В. Содержание и формы углубленного изучения математики в старших классах : автореф. дисс. на соискание науч. степени канд. пед. наук : спец. 13.00.02 „Теория и методика обучения (математика)" / Г. В. Дидык. – К., 1990. – 22 с.**
112. **Диффеpенциация в обучении математике / Г. В. Дорофеев, Л. В. Кузнецова, С. Б. Суворова [и др.] // Математика в школе. – 1990. – № 4. – С. 15–21.**
113. **Дорофеев Г. В. Концепция профильного курса математики / Г. В. Дорофеев, Е. А. Седова, С. Д. Троицкая // Математика в школе. – 2006. – № 7. – С. 14–25.**
114. **Дорофеев Г. В. О принципах отбора содержания школьного математического образования / Г. В. Дорофеев // Математика в школе. – 1990. – № 6. – С. 2–5.**
115. **Дремова І. А. Контроль знань учнів з алгебри в основній школі : дис. … кандидата пед. наук : 13.00.02 / Дремова Ірина Анатоліївна. – К., 2003. – 211 с.**
116. **Дубинчук О. С. Диференційоване навчання : сподівання, реалії, проблеми / О. С. Дубинчук // Початкова школа. – 1994. – № 12. – С. 10–14.**

117. Елизарова Н. А. Методические особенности изучения функций в классах гуманитарного направления профильной школы : дисс. ... кандидата пед. наук : 13.00.02 / Елизарова Наталья Анатольевна. – М., 2004. – 253 с.
118. Ермаков Д. С. Элективные курсы для профильного обучения / Д. С. Ермаков // Педагогика. – 2005. – № 2. – С. 36–41.
119. Эльконин Д. Б. Избранные психологические труды / Эльконин Д. Б. – М. : Педагогика, 1989. – 560 с.
120. Эрдниев П. М. Методика упражнений по математике / Эрдниев П. М. – [2-е изд.]. – М. : Просвещение, 1970. – 319 с.
121. Жалдак М. И. Система подготовки учителя к использованию информационной технологии в учебном процессе : дисс. в форме науч. доклада ... доктора пед. наук : 13.00.02 / Жалдак Мирослав Иванович. – М., 1989. – 48 с.
122. Жалдак М. І. Комп’ютер на уроках математики : посібник для вчителів / Жалдак М. І. – К. : Техніка, 1997. – 303 с.
123. Жалдак М. І. Математика (тригонометрія, геометрія, елементи стохастики) з комп’ютерною підтримкою : навч. посіб. / Жалдак М. І., Грохольська А. В., Жильцов О. Б. – К. : МАУП, 2004. – 456 с.
124. Жалдак М. І. Математика з комп’ютером : посібник для вчителів / Жалдак М. І., Горошко Ю. В., Вінниченко Є. В. – К. : РННЦ „ДІНІТ”. – 2004. – 255 с.
125. Жалдак М. І. Педагогічний потенціал комп’ютерно-орієнтованих систем навчання математики / М. І. Жалдак // Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання : зб. наук. праць. – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2003. – Вип. 7. – С. 3–16.
126. Жданова Т. С. Воспитание самостоятельности учащихся старших классов школ гуманитарного профиля в процессе обучения математике : автореф. дисс. на соискание науч. степени канд. пед. наук : спец. 13.00.02 „Теория и методика обучения (математика)” / Т. С . Жданова. – Алматы, 2002. – 29 с.
127. Жогина Л. И. Построение изложения учения о тригонометрических функциях в курсе математики средней школы : автореф. дисс. на соискание науч. степени канд. пед. наук : спец. 13.00.02 „Теория и методика обучения (математика)” / Л. И. Жогина. – Грозный, 1962. – 13 с.
128. Забранский В. Я. Дифференцированное обучение математики учащихся 5-6 классов основной школы : дисс. ... кандидата пед. наук / Забранский Виталий Ярославович. – К., 1990. – 180 с.
129. Забранський В. Я. Диференціація змісту тригонометричного матеріалу у профільній школі / В. Я. Забранський, Т. А. Грицик // Дидактика математики : проблеми і дослідження : міжнарод. зб. наук. робіт. – 2008. – Вип. 30. – С. 206–212.
130. Загнітко А. П. Великий тлумачний словник. Сучасна українська мова від А до Я / А. П. Загнітко, І. А. Щукіна. – К. : ТОВ ВКФ „БАО”, 2008.

– 704 с.

131. **Задесенець М. П. Вікові особливості розвитку дітей і формування їх особистості : посіб. для студ. пед. ін-тів, учителів, вихователів дошк. установ / Задесенець М. П. – К. : Вища школа, 1978. – 263 с.**
132. **Закон України про загальну середню освіту : прийнято 13 травня 1999 р. // Голос України. – 1999. – № 65. – С. 4–7.**
133. **Закон України про освіту : прийнято 23 березня 1996 р. – К. : Ґенеза, 1996. – 36 с.**
134. **Зарецкий В. И. Изучение тригонометрических функций в средней школе : пособие для учителей / Зарецкий В. И. – [2-е изд.]. – Минск : Народная асвета, 1970. – 159 с.**
135. **Захаров Г. А. Индивидуальный подход как одно из условий успешного обучения учащихся : дидактический аспект / Захаров Г. А. – Курган : Курганский гос. ун-т., 2000. – 132 с.**
136. **Захарова Т. Б. Профильная дифференциация обучения информатике на старшей ступени школы / Захарова Т. Б. – М. : Б. и., 1997. – 212 с.**
137. **Зачеты в системе дифференцированного обучения математике / [Денисова Л. О., Кузнецова Л. В., Лурье И. А. и др.]. – М. : Просвещение , 1993. – 193 с.**
138. **Иваницкий А. И. Тематический контроль и корекция знаний по физике в старших классах средней школы : дисс. ... кандидата пед. наук : 13.00.02 / Иваницкий Александр Иванович. – К., 1991. – 209 с.**
139. **Иванова О. В. Развитие познавательного интереса к математике у учащихся химико-биологических классов : дисс. ... кандидата пед. наук : 13.00.02 / Иванова Ольга Владимировна. – Омск, 2006. – 233 с.**
140. **Избранные вопросы математики : факультативный курс, IX-X кл. / [Антипов И. Н., Виленкин Н. Я., Ивашев-Мусатов О. С., Мордкович А. Г.] ; сост. О. А. Боковнев и др. – Каунас : Швиеса, 1983. – 183 с.**
141. **Истер А. С. Аркфункция от А до Я / Истер А. С. – К. : Факт, 1998. – 160 с.**
142. **Іванова С. В. Формування геометричних умінь старшокласників шкіл (класів) гуманітарного профілю : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : спец. 13.00.02. „Теорія та методика навчання (математика)” / С. В. Іванова. – К., 1999. – 20 с.**
143. **Ігнатенко М. Я. Методологічні та методичні основи активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів старших класів при вивченні математики : дис. ... доктора пед. наук : 13.00.02 / Ігнатенко Микола Якович. – К., 1997. – 335 с.**
144. **Іщенко Г. В. Система роботи з слабковстигаючими учнями основної школи з математики : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : спец. 13.00.02 „Теорія та методика навчання (математика)” / Г. В. Іщенко. – К., 2006. – 20 с.**
145. **Кабанова-Меллер Е. Н. Формирование приемов умственной деятельности и умственное развитие учащихся / Кабанова-Меллер Е. Н. – М. : Просвещение, 1961. – 228 с.**

146. Калмыкова З. И. Продуктивное мышление как основа обучаемости / Калмыкова З. И. – М. : Педагогика, 1981. – 200 с.
147. Калмыкова З. И. Психологические принципы развивающего обучения / Калмыкова З. И. – М. : Знание, 1979. – 48 с.
148. Капіносов А. М. Тематичне поетапне рівневе вивчення математики / Капіносов А. М. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2005. – 112 с.
149. Кизенко В. І. Курси за вибором у структурі профільного навчання / В. І. Кизенко, Л. Л. Орішак, В. Г. Чернега // Профільне навчання : теорія і практика / за ред. Липової Л. А. – К. : ВВП „Компас”, 2007. – С. 52–58.
150. Кирсанов А. А. Индивидуализация учебной деятельности как педагогическая проблема / Кирсанов А. А. – Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1982. – 224 с.
151. Климов Е. А. Путь в профессию : пособие для ст. классов общеобразов. школы / Климов Е. А. – Л. : Лениздат, 1974. – 190 с.
152. Клочко В. І. Нові інформаційні технології навчання математики в технічній вищій школі : дис. ... доктора пед. наук : 13.00.02 / Клочко Віталій Іванович. – В., 1998. – 396 с.
153. Коберник Г. І. Індивідуалізація й диференціація навчання в початкових класах : теорія та методика / Коберник Г. І. – К. : Науковий світ, 2002. – 232 с.
154. Ковчин Н. А. Дидактичні умови диференціації навчання старшокласників : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : спец. 13.00.09 „Теорія навчання” / Н. А. Ковчин. – Кривий Ріг, 2010. – 20 с.
155. Кожеуров П. Я. Курс тригонометрии для техникумов / Кожеуров П. Я. – [4е изд.]. – М. : Гос. изд. физ.-мат. лит., 1958. – 336 с.
156. Козира В. М. Система навчання алгебри в школах, ліцеях і гімназіях фізико-математичного профілю при педагогічних вузах : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : спец. 13.00.02 „Теорія та методика навчання (математика)” / В. М. Козира. – К., 1997. – 18 с.
157. Колмогоров А. Н. Математика в ее историческом развитии / Колмогоров А. Н. – М. : Наука, 1991. – 224 с.
158. Колмогоров А. Н. Физико-математическая школа при МГУ / Колмогоров А. Н. – М., 1981. – 64 с. – (Новое в жизни, науке, технике : серия „Математика, кибернетика”; Вып. 5).
159. Колягин Ю. М. Профильная диффференциация обучения математике / Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова // Математика в школе. – 1990. – № 4. – С. 21–27.
160. Кон И. С. Психология старшеклассников / Кон И. С. – М. : Просвещение, 1982. – 207 с.
161. Конет І. М. Тригонометрія : теорія і практика : посібник / Конет І. М. – Кам’янець-Подільський : Абетка, 2006. – 243 с.
162. Конфорович А. Г. Історія розвитку математики. Методичні вказівки / А. Г. Конфорович, Г. М. Андрієвська. – К. : Вища школа, 1980. – 92 с.

163. Концепция дифференциации обучения в средней общеобразовательной школе / [под ред. В. М. Монахова, В. А. Орлова]. – М., 1990. – 42 с.
164. Концепція профільного навчання в старшій школі // Інформаційний збірник Міністерства освіти і науки України. – 2009. – № 28–29. – С. 57–64.
165. Корсакова О. Технологія диференційованого навчання / Ольга Корсакова // Рідні джерела. – 2001. – № 3. – С. 41.
166. Котельников П. М. О функциональных уравнениях, определяющих тригонометрические функции / П. М. Котельников // Математика в школе. – 1951. – № 2. – С. 1–12.
167. Кошевая В. Г. О некоторых индивидуальных различиях высокоуспевающих выпускников средних школ / В. Г. Кошевая // Советская педагогика. – 1966. – № 7. – С. 92–98.
168. Кравчук В. Р. Алгебра і початки аналізу : [підруч. для 10 кл.] / Кравчук В. Р. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2007. – 320 с.
169. Крамаренко Т. Г. Уроки математики з комп’ютером : [посібник для вчителів та студентів] / Крамаренко Т. Г.; за ред. М. І. Жалдака. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2008. – 272 с.
170. Крилова Т. В. Наукові основи навчання математики студентів нематематичних спеціальностей (на базі металургійних, енергетичних і електромеханічних спеціальностей вищого закладу технічної освіти) : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора пед. наук : спец. 13. 00.02 „Теорія та методика навчання (математика)” / Т. В. Крилова. – К ., 1999. – 36 с.
171. Критерії оцінювання навчальних досягнень учнів у системі загальної освіти / М-во освіти і науки України; ін-т педагогіки АПН України. – К. : Перше вересня, Шкільний світ; Харків : Фоліо, 2000. – 126 с.
172. Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников / Крутецкий В. А. – М. : Просвещение, 1968. – 431 с.
173. Кугай Н. В. Розвиток умінь старшокласників доводити твердження у процесі вивчення алгебри і початків аналізу : дис. ... кандидата пед. наук : 13.00.02 / Кугай Наталія Василівна. – К., 2007. – 240 с.
174. Кузнецова Л. В. Об организации учебного процесса с учетом обязательных результатов обучения / Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева // Математика в школе. – 1986. – № 4. – С. 9–15.
175. Кузьменко О. А. Особенности изучения элементов тригонометрии в курсах геометрии и алгебры 8-9 классов : автореф. дисс. на соискание науч. степени канд. пед. наук : спец. 13.00.02 „Теория и методика обучения (математика)”/ О. А. Кузьменко. – К., 1989. – 23 с.
176. Кузьминова И. В. Методика формирования готовности учащихся к изучению геметрии в старших классах гуманитарного профиля : дисс. ... кандидата пед. наук : 13.00.02 / Кузьминова Ирина Викторовна. – М ., 2005. – 174 с.

177. **Кушнир И. А. Тригонометрия : задачи и решения / Кушнир И. А. – К. : Астарта, 1997. – 390 с.**
178. **Кушнір І. 101 задача з тригонометрії / Кушнір І. – К. : Факт, 2006. – 128 с.**
179. **Лейтес Н. С. Об умственной одаренности. Психологические характеристики некоторых типов школьников / Лейтес Н. С. – М. : АПН РСФСР, 1960. –215 с.**
180. **Леонтьев А. Н. Деятельность. Сознание. Личность / Леонтьев А. Н. – М. : Политиздат, 1977. – 304 с.**
181. **Лернер И. Я. Процесс обучения и его закономерности / Лернер И. Я. – М. : Знание, 1980. – 96 с.**
182. **Лийметс Х. Й. Групповая работа на уроке / Лийметс Х. Й. – М. : Знание, 1975. – 62 с.**
183. **Липова Л. Профільне навчання : проблеми, перспективи, досвід / Л. Липова, В. Малишев, Т. Паламарчук // Освіта і управління. – 2007. – № 1. – С. 49–56.**
184. **Липова Л. А. Методи навчання в класах природничих профілів / Липова Л. А., Перепелиця О. А., Ясинська А. М. – К. : ВВП „Компас”, 1999. – 30 с.**
185. **Лисица Г. Г. Организация учебной деятельности старшеклассников с повышеной обучаемостью : дисс. ... кандидата пед. наук : 13.00.01 / Лисица Григорий Григорьевич. – К., 1990. – 160 с.**
186. **Логачевська С. П. Диференціація у звичайному класі : посібник [для вчителів, методистів, студентів] / Логачевська С. П. – Донецьк : Центр підготовки абітурієнтів, 1998. – 288 с.**
187. **Лук’янова С. М. Деякі аспекти використання інформаційно-комунікаційних технологій навчання під час проведення практичних занять з методики навчання математики / С. М. Лук’янова // Дидактика математики : проблеми і дослідження. – 2008. – № 30. – С. 61–65.**
188. **Максименко С. Д. Загальна психологія : [навч. посіб.] / С. Д. Максименко. – [3-є вид.]. – К. : Центр учбової літератури, 2008. – 272 с.**
189. **Малыгин К. А. Элементы историзма в преподавании математики в средней школе / Малыгин К. А. – М. : Учпедгиз, 1963. – 240 с.**
190. **Мамыкина Л. А. Содержание и методические особенности обучения математике в классах технического профиля : дисс. ... кандидата пед. наук : 13.00.02 / Мамыкина Людмила Алексеевна. – Омск, 2002. – 203 с.**
191. **Матвиевская Г. П. Очерки истории тригонометрии / Матвиевская Г. П. – Ташкент : Фан, 1990. – 160 с.**
192. **Математика. 10 кл. : [підруч. для рівня стандарту] / О. М. Афанасьєва, Я. С. Бродський, О. Л. Павлов, А. К. Сліпенко. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2010. – 480 с.**

193. **Математика. Навчальна програма для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Академічний рівень. – Режим доступу :**
HYPERLINK "http://www.mon.gov.ua/main.php?query=education/average/prog12" http://www.mon.gov.ua/main.php?query=education/average/prog12/mat_ak.doc.
194. Махмутов М. И. Организация проблемного обучения в школе / Махмутов М. И. – М. : Просвещение, 1977. – 239 с.
195. Мендлина С. Л. Показатели трудоемкости домашней работы школьников / С. Л. Мендлина // Новые исследования в педагогических науках. – 1977. – № 1 (29). – С. 81–85.
196. Менчинская Н. А. Проблемы учения и умственного развития школьника / Менчинская Н. А. – М. : Педагогика, 1989. – 219 с.
197. Мерлин В. С. Очерк интегрального исследования индивидуальности / Мерлин В. С. – М. : Педагогика, 1986. – 256 с.
198. Методика факультативных занятий в 9-10 классах : избранные вопросы математики : пособие для учителей / [Антипов И. Н., Березин В. Н., Егоров А. А. и др.] ; сост. И. Л. Никольская, В. В. Фирсов. – М. : Просвещение, 1983. – 176 с.
199. Михалін Г. О. Професійна підготовка вчителя математики у процесі навчання математичного аналізу / Михалін Г. О. – К. : РННЦ „Дініт”, 2003. – 320 с.
200. Михалін Г. О. Формування основ професійної культури вчителя математики у процесі навчання математичного аналізу : дис. … доктора пед. наук : 13.00.04 / Михалін Геннадій Олександрович. – К., 2004. – 480 с.
201. Михалін Г. О. Що повинен знати вчитель математики про елементарні функції / Г. О. Михалін, О. П. Томащук. – К. : УДПУ, 1995. – 101 с.
202. Мойсеюк Н. Є. Педагогіка : навч. посібник / Н. Є. Мойсеюк. – [5-е вид.]. – К., 2007. – 656 с.
203. Монахов В. М. Дифференциация обучения в средней школе / В. М. Монахов, В. А. Орлов, В. В. Фирсов // Советская педагогика. – 1990. – № 8. – С. 42–47.
204. Моргун В. Ф. Інтердифія освіти : психолого-педагогічні основи інтеграції та диференціації (інтердифії) навчання на прикладі шкільного циклу природничих дисциплін : курс лекцій / Моргун В. Ф. – Полтава : Наукова зміна, 1996. – 78 с.
205. Мордкович А. Г. Методические проблемы изучения тригонометрии в общеобразовательной школе / А. Г. Мордкович // Математика в школе. – 2002. – № 6. – С. 32–38.
206. Морзе Н. В. Intel Навчання для майбутнього (адаптація до українського видання) / Н. В. Морзе, Н. П. Дементієвська. – К. : Видавнича група BHV, 2004. – 416 с.
207. Моторіна В. Г. Дидактичні і методичні засади професійної підготовки майбутніх учителів математики у вищих педагогічних навчальних закладах : дис. … доктора пед. наук : 13.00.04 / Моторіна Валентина Григорівна. – Х

., 2005. – 512 с.
208. Моторіна В. Г. Технології навчання математики в сучасній школі : монографія / Моторіна В. Г. – Х., 2001. – 261 с.
209. Мурачковский Н. И. Типы неуспевающих школьников / Н. И. Мурачковский // Советская педагогика. – 1965. – № 7. – С. 59–69.
210. Національна доктрина розвитку освіти України у XXI столітті : проект. – К . : Шкільний світ, 2004. – 36 с.
211. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу : [дворівневий підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів] / Є. П. Нелін. – [4-е вид.]. – Х. : Світ дитинства, 2008. – 448 с.
212. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу : [підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів : академічний рівень] / Є. П. Нелін. – Х. : Гімназія, 2010. – 416 с.
213. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу : [підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів : профільний рівень] / Є. П. Нелін. – Х. : Гімназія, 2010. – 416 с.
214. Нелін Є. П. Сучасні підручники з математики для профільної школи як засіб розвитку творчої особистості учня / Є. П. Нелін // Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання математики : всеукр. наук. - практ. конф., 3-4 груд. 2009 р. : тези доп. – Суми, 2009. – С. 68–69.
215. Неліна О. Є. Систематизація та узагальнення знань і вмінь учнів з алгебри як засіб активізації їх пізнавальної діяльності : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : спец. 13.00.02 „Теорія та методика навчання (математика)” / О. Є. Неліна. – К., 2003. – 20 с.
216. Немова Н. В. Управление системой профильного обучения в школе : метод . пособие / Н. В. Немова; ответ. ред. М. А. Ушакова. – М. : Сентябрь, 2006. – 207 с.
217. Нестерук О. В. Формирование тригонометрических представлений учащихся в курсе геометрии основной школы : дисс. … кандидата пед. наук : 13.00.02 / Нестерук Ольга Валентиновна. – М., 2006. – 271 с.
218. Николаева Т. М. Сочетание общеклассной, груповой и индивидуальной работы учащихся на уроке как одного из средств повышения эффективности учебного процесса : автореф. дисс. на соискание науч. степени канд. пед. наук : спец. 13.00.01 „Общая педагогика и история педагогики” / Т. М. Николаева. – М., 1972. – 17 с.
219. Нічуговська Л. І. Науково-методичні основи математичної освіти студентів економічних спеціальностей вищих навч. закладів : дис. … доктора пед. наук : 13.00.04 / Нічуговська Лілія Іванівна. – К., 2005. – 470 с.
220. Новоселов С. И. Руководство по преподаванию тригонометрии : пособие для учителей / Новоселов С. И. – М. : Учпедгиз, 1958. – 184 с.
221. Новоселов С. И. Специальный курс тригонометрии / Новоселов С. И. – [5-е изд.]. – М. : Высшая школа, 1967. – 536 с.
222. Новоселов С. И. Тригонометрия : [учебник для 9-10 классов средней школы] / Новоселов С. И. – [11-е изд.]. – М. : Просвещение, 1965. – 96 с.

223. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования : учеб. пособие / под ред. Е. С. Полат. – М. : Академия, 1999. – 224 с.
224. Нор К. Ф. Групова навчальна діяльність молодших школярів : історія, теорія, технологія : наук.-метод. посібник / Нор К. Ф. – Миколаїв : Іліон, 2006. – 163 с.
225. Окунев А. К. О преподавании тригонометрии в средней школе : дисс. ... кандидата пед. наук : 13.00.02 / Окунев Александр Кузьмич. – М., 1950. – 438 с.
226. Осмоловская И. М. „За" и „против" дифференцированного обучения / И. М . Осмоловская // Школьные технологии. – 2002. – № 5. – С. 9–14.
227. Паламарчук В. Ф. Школа учит мыслить / Паламарчук В. Ф. – М. : Просвещение, 1987. – 208 с.
228. Песцова Е. А. Дифференциация обучения в педагогической теории и практике общеобразовательных учреждений (период 1917-1994 гг) : автореф. дисс. на соискание науч. степени канд. пед. наук : спец. 13.00.01 „Общая педагогика и история педагогики" / Е. А. Песцова.– М., 1994. – 22 с.
229. Петраков И. С. Решение тригонометрических уравнений в школе / И. С. Петраков // Повышение эффективности обучения математике в школе : из опыта работы / Г. Д. Глейзер. – М., 1989. – С. 143–151.
230. Пикан В. В. Тригонометрические функции числового аргумента в средней школе : пособие для учителя / Пикан В. В. – М. : НИИ школ, 1980. – 71 с.
231. Пикан В. В. Формирование обобщающих понятий современной математики в процессе изучения тригонометрических функций в средней общеобразовательной школе : автореф. дисс. на соискание науч. степени канд. пед. наук : спец. 13.00.02 „Теория и методика обучения (математика) "/ В. В. Пикан. – К., 1974. – 34 с.
232. Підготовка учнів до професійного навчання і праці (психолого-педагогічні основи) : навч.-метод. посібник / за ред. Г. О. Балла, П. С. Перепелиці, В. В . Рибалка. – К. : Наукова думка, 2000. – 188 с.
233. Піщалковська М. К. Система роботи загальноосвітнього навчального закладу з профільного навчання старшокласників : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : спец. 13.00.01 „Загальна педагогіка та історія педагогіки" / М. К. Піщалковська. – К., 2007. – 23 с.
234. Планирование обязательных результатов обучения математике / [Л. О. Денищева и др.]; сост. В. В. Фирсов. – М. : Просвещение, 1989. – 236 с.
235. Погорєлов О. В. Геометрія : планіметрія : [підруч. для 7-9 кл. загальноосвіт . навч. закл.] / Погорєлов О. В. – [9-е вид.]. – К. : Школяр, 2005. – 240 с.
236. Подмазин С. И. Личностно ориентированное образование : социально-философское исследование / Подмазин С. И. – Запорожье : Просвіта, 2000. – 250 с.
237. Полякова Т. С. Историко-методическая подготовка учителя математики : методический аппарат / Полякова Т. С. – Ростов на Дону : изд-во РГПУ, 1997. – 64 с.

238. Пометун О. І. Сучасний урок : інтерактивні технології навчання / О. І. Пометун, Л. В. Пироженко. – К. : А.С.К., 2004. – 192 с.
239. Пономарева Т. Х. Методические особенности обучения математике в старших классах технического направления : автореф. дисс. на соискание науч. степени канд. пед. наук : спец. 13.00.02 „Теория и методика обучения (математика)”/ Т. Х. Пономарева. – М., 1992. – 17 с.
240. Попов В. В. Преподавание тригонометрического материала в средней общеобразовательной трудовой политехнической школе с производственным обучением : автореф. дисс. на соискание науч. степени канд. пед. наук : спец. 13.00.02 „Теория и методика обучения (математика) ” / В. В. Попов. – Баку, 1966. – 14 с.
241. Працьовитий М. В. До концепції розвитку математичної освіти / М. В. Працьовитий // Сучасна математика і математична освіта : здобутки, проблеми, перспективи : місячник Інституту математики НАНУ в НПУ імені М. П. Драгоманова, 1 березня-2квітня 2004 р. : тези доп. – К., 2007. – С. 116–121.
242. Працьовитий М. В. Системні основи формування змісту математичної освіти / М. В. Працьовитий, В. М. Усенко // Эвристическое обучение математике : междунар. науч.-метод. конф., 15-17 ноября 2005 г. : тезисы докл. – Д., 2005. – С. 254–255.
243. Програма з математики для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. – Режим доступу : **HYPERLINK "http://www.mon.gov.ua/main.php?query=education/average/prog12/mat_pr.doc" http://www.mon.gov.ua/main.php?query=education/average/prog12/mat_pr.doc**.
244. Програма з математики для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. – Режим доступу : **HYPERLINK "http://www.mon.gov.ua/main.php?query=education/average/prog12/mat_st.doc" http://www.mon.gov.ua/main.php?query=education/average/prog12/mat_st.doc**.
245. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів, спеціалізованих шкіл, гімназій, ліцеїв природничого профілю. Математика. 10-11-і класи / Я. С. Бродський, О. Л. Павлов, А. К. Сліпенко [та ін.] // Математика. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. – К., 2003. – С. 70–102.
246. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів, спеціалізованих шкіл, гімназій, ліцеїв фізико-математичного профілю. Математика. 10-11-і класи / М. І. Бурда, М. І. Жалдак, Т. В. Колесник [та ін.] // Математика. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. – К., 2003. – С. 131–148.
247. Профільне навчання : теорія і практика : зб. наук. праць за матеріалами метод. семінару АПН України / АПН України, Відділення дидактики, методики та інформаційних технологій в освіті, Інститут педагогіки / ред. О. Я. Савченко. – К. : Педагогічна преса, 2006. – 200 с.
248. Профільне навчання : теорія і практика / [ред. Липова Л. А.]. – К. : ВВП „Компас”, 2007. – 192 с.

249. Психологические проблемы неуспеваемости школьников / под ред. Н. А. Менчинской. – М. : Педагогика, 1971. – 272 с.
250. Психолого-педагогические проблемы дифференцированного обучения / И. С. Якиманская, С. Г. Абрамова, Е. Б. Шиянова [и др.] // Советская педагогика. – 1991. – № 4. – С. 44–52.
251. Рабунский Е. С. Индивидуальный поход в процессе обучения школьников : на основе анализа их самостоятельной учебной деятельности / Рабунский Е. С. – М. : Педагогика, 1975. – 182 с.
252. Раков С. А. Математична освіта : компетентнісний підхід з використанням ІКТ : [монографія] / Раков С. А. – Х. : Факт, 2005. – 360 с.
253. Рафикова Ф. М. Профильная дифференциация обучения математике в средней школе : [монография] / Рафикова Ф. М. – Стерлитамак : Стерлитамак. гос. пед. ин-т, 2000. – 159 с.
254. Рєп'єв В. В. Методика тригонометрії / Рєп'єв В. В. – Київ-Харків : Радянська школа, 1938. – 149 с.
255. Рибалка В. В. Особистісний підхід у профільному навчанні старшокласників : [монографія] / Рибалка В. В.; за ред. Г. О. Балла. – К. : Деміур, 1998. – 160 с.
256. Рональд де Грот. Дифференциация в образовании / Рональд де Грот // Директор школы. – 1994. – № 5, 6.
257. Рубинштейн С. Л. Основы общей психологии / Рубинштейн С. Л. – СПб. : Питер, 2001. – 702 с.
258. Рыбкин Н. А. Прямолинейная тригонометрия : [учебник для 9-го и 10-го классов сред. школы] / Рыбкин Н. А. – [33-е изд.]. – М. : Учпедгиз, 1955. – 116 с.
259. Самовол П. І. Методична система роботи із здібними та обдарованими з математики учнями в середній школі : дисс. … кандидата пед. наук : 13.00. 02 / Самовол Петро Ісаакович. – К., 1995. – 221 с.
260. Самодрин А. П. Вступ до профільного навчання : навч. посіб. [для студ. вищ. навч. закл.] / Самодрин А. П. – [2-е вид.]. – Кременчук, 2006. – 188 с.
261. Самсонов П. И. Алгебра и начала анализа для классов экономического и технического профилей / П. И. Самсонов // Математика в школе. – 2003. – № 5. – С. 31–35.
262. Самсонов П. И. Методика построения учебного курса по алгебре и началам математического анализа для классов различной профильной направленности : на примере естественнонаучного профиля : дисс. … кандидата пед. наук : 13.00.02 / Самсонов Павел Иванович. – М., 2004. – 186 с.
263. Саранцев Г. И. Гуманизация и гуманитаризация школьного математического образования / Г. И. Саранцев // Педагогика. – 1999. – № 4. – С. 39–46.
264. Селевко Г. К. Современные образовательные технологии : учеб. пособие / Селевко Г. К. – М. : Народное образование, 1998. – 256 с.
265. Семенов Е. Е. Дифференцированное обучение математике с позиций гуманизма / Е. Е. Семенов, В. В. Малиновский // Математика в школе. –

1991. – № 6. – С. 3–6.
266. Сериков В. В. Личностно-ориентированное образование : поиск новой парадигмы : монография / Сериков В. В. – М. : Волгоград, 1998. – 222 с.
267. Сікорський П. І. Теорія і методика диференційованого навчання / Сікорський П. І. – Львів : Сполох, 2000. – 422 с.
268. Скаткин М. Н. Проблемы современной дидактики / Скаткин М. Н. – М. : Педагогика, 1984. – 95 с.
269. Скафа Е. И. Эвристическое обучение математике : теория, методика, технология / Скафа Е. И. – Донецк : ДонНУ, 2004. – 439 с.
270. Славина Л. С. Индивидуальный подход к неуспевающим и недисциплинированным ученикам / Славина Л. С. – М. : Изд-во АПН РСФСР, 1958. – 214 с.
271. Слепкань З. И. Культура тригонометрических вычислений в восьмилетней и средней школе : автореф. дисс. на соискание науч. степени канд. пед. наук : спец. 13.00.02 „Теория и методика обучения (математика)" / З. И. Слепкань. – К., 1962. – 18 с.
272. Слєпкань З. На допомогу вчителям, які викладають курс алгебри і початків аналізу / Зінаїда Слєпкань // Математика в школі. – 1998. – № 3. – С. 6–8.
273. Слєпкань З. Ще раз про диференціацію навчання математики і роль в ній освітнього стандарту / Зінаїда Слєпкань // Математика в школі. – 2002. – № 2. – С. 29–30.
274. Слєпкань З. І. Диференційоване навчання у V-VI класах / З. І. Слєпкань, В. Я. Забранський // Радянська школа. – 1990. – № 12. – С. 66–69.
275. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : [підручник] / Слєпкань З. І. – [2-е вид.]. – К. : Вища школа, 2006. – 582 с.
276. Слєпкань З. І. Профільне навчання в зарубіжній і українській школі як вид диференційованої підготовки учнів і ключова проблема реформування сучасної системи освіти / З. І. Слєпкань // Дидактика математики. – 2006. – Вип. 25. – С. 11–20.
277. Слєпкань З. І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики / Слєпкань З. І. – Т. : Підручники і посібники, 2004. – 240 с.
278. Слєпкань З. І. Тригонометричні обчислення в школі / Слєпкань З. І. – К. : Радянська школа, 1962. – 108 с.
279. Слободчиков В. И. Психология человека : учеб. пособие для вузов / В. И. Слободчиков, Е. И. Исаев. – М. : Школа-пресс, 1995. – 374 с.
280. Смирнов И. И. Сборник вопросов и задач по тригонометрии : пособие для учителей / Смирнов И. И. – [2-е изд.]. – М. : Учпедгиз, 1962. – 192 с.
281. Співаковський О. В. Теоретико-методичні основи навчання вищої математики майбутніх вчителів математики з використанням інформаційних технологій : дис. … доктора пед. наук : 13.00.02 / Співаковський Олександр Володимирович. – К., 2004. – 534 с.
282. Стахов А. П. Новая математика для живой природы : гиперболические функции Фибоначчи и Люка / Стахов А. П. – Винница; М. : ТОВ „ІТІ", 2003. – 262 с.

283. Стратілатов П. В. Збірник задач з тригонометрії / Стратілатов П. В. – [9-е вид.]. – К. : Радянська школа, 1966. – 110 с.
284. Стрезикозин В. П. Организация процесса обучения в школе / Стрезикозин В. П. – М. : Просвещение, 1968. – 245 с.
285. Сукач Т. М. Диференційований підхід до навчання математики учнів 7-9 класів (на матеріалі рівнянь та нерівностей) : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : спец. 13.00.02 „Теорія та методика навчання (математика)" / Т. М. Сукач. – К., 1994. – 20 с.
286. Суханова С. Н. Изучение тригонометрии на основе деятельностного подхода и технологии дистантного обучения как способ развития математических способностей : дисс. … кандидата пед. наук : 13.00.02 / Суханова Светлана Николаевна. – Новокузнецк, 2002. – 179 с.
287. Табидзе Г. С. Некоторые вопросы преподавания тригонометрии в школе : автореф. дисс. на соискание науч. степени канд. пед. наук : спец. 13.00.02 „ Теория и методика обучения (математика)" / Г. С. Табидзе. – Тбилиси, 1962. – 35 с.
288. Талызина Н. Ф. Управление процессом усвоения знаний / Талызина Н. Ф. – М. : Изд-во МГУ, 1975. – 343 с.
289. Таранова М. В. Учебно-исследовательская деятельность как фактор повышения эффективности обучения математике учащихся профильных классов : дисс. … кандидата пед. наук : 13.00.02 / Таранова Марина Владимировна. – Новосибирск, 2003. – 190 с.
290. Тарасенкова Н. А. Використання знаково-символічних засобів у навчанні математики : монографія / Тарасенкова Н. А. – Черкаси : Відлуння-Плюс, 2002. – 400 с.
291. Теплов Б. М. Проблемы индивидуальных различий / Теплов Б. М. – М. : Изд. АПН РСФСР, 1961. – 536 с.
292. Ткач Ю. М. Методична система навчання математики в класах економічного профілю : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : спец. 13.00.02 „Теорія та методика навчання (математика)" / Ю. М. Ткач. – Черкаси, 2009. – 21 с.
293. Тополя Л. В. Використання комп'ютерних технологій у процесі підготовки вчителів математики / Л. В. Тополя // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія № 2. Комп'ютерно-орієнтовні системи навчання : зб. наук. праць. – 2009. – № 7 (14). – С. 80–84.
294. Тригонометрия : [учеб. для 10 кл. общеобразов. учреждений] / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова; под ред. С. А. Теляковского. – [3-е изд.]. – М. : Просвещение, 2001. – 61 с.
295. Тригонометрія : вчимося розв'язувати задачі / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, Ю. М. Рабінович, М. С. Якір. – К. : Ґенеза, 2008. – 352 с.
296. Триус Ю. В. Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математики : монографія / Триус Ю. В. – Черкаси : Брама-Україна, 2005. – 400 с.
297. Трунова О. В. Навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики : дис.

… кандидата пед. наук : 13.00.02 / Трунова Олена Василівна. – К., 2007. – 212 с.
298. Унт И. Э. Индивидуализация и дифференциация обучения / Унт И. Э. – М. : Просвещение, 1990. – 173 с.
299. Утеева Р. А. Теоретические основы организации учебной деятельности учащихся при дифференцированном обучении математике в средней школе : автореф. дисс. на соискание науч. степени доктора пед. наук : спец. 13.00.02. „Теория и методика обучения (математика)” / Р. А. Утеева. – М., 1998. – 37 с.
300. Фирсов В. В. Дифференциация обучения на основе обязательных результатов / Фирсов В. В. – М., 1994. – 116 с.
301. Френе С. Избранные педагогические сочинения / Френе С.; под. ред. Б. Л. Вульфсона. – М. : Прогресс, 1990. – 301 с.
302. Фруктова Я. С. До питання організації диференційованого навчання в класах біологічного профілю (теор. аспект) / Я. С. Фруктова // Наукові записки : зб. наук. статей НПУ імені М. П. Драгоманова. – К. : НПУ. – 2001 . – Вип. 42. – С. 141–145.
303. Фурман А. Системна диференціація навчання : концепція, теорія, технологія / А.Фурман // Освіта і управління. – 1997. – № 2. – Т.1. – С. 37–67.
304. Фурман А. В. Психодіагностика інтелекту в системі диференціації навчання / Фурман А. В. – К. : Освіта, 1993. – 224 с.
305. Хвостенко Е. Е. Методика обучения алгебре и началам анализа в 10-11 классах гуманитарного профиля с использованием компьютера : дис. … кандидата пед. наук : 13.00.02 / Хвостенко Елена Евненьевна. – Махачкала, 2000. – 176 с.
306. Хмара Т. М. До питання структури змісту програми для класів математичного профілю / Т. М. Хмара // Проблеми математичної освіти : міжнар. наук. - метод. конф., 7-9 квіт. 2009 р. : тези доп. – Черкаси, 2009. – С. 21–22.
307. Хуторской А. В. Методика личностно-ориентированного обучения / Хуторской А. В. – М. : ВЛАДОС, 2005. – 383 с.
308. Чашечникова О. Програма спецкурсу „Графіки функцій та рівнянь, аналітичний вираз яких містить тригонометричні функції” / О. Чашечникова, Л. Чашечникова, О. Мартиненко // Математика в школі. – 2007. – № 2–5.
309. Чашечникова О. С. Дифференциация обучения математике в гетерогенных классах / О. С. Чашечникова // Дидактика математики. – 2000. – Вып. 3 (13). – С. 48–53.
310. Чашечникова О. С. Проблема якісної математичної підготовки старшокласників в умовах профільної диференціації навчання / О. С. Чашечникова // Педагогічні науки : зб. наук. праць. – Суми, 2003. – С. 320–327.
311. Чередов И. М. О дифференцированном обучении на уроках / И. М. Чередов. – Омск : Зап.-Сиб. кн. изд-во, Омское отделение, 1973. – 155 с.

312. Чередов И. М. Формы учебной работы в средней школе : кн. для учителя / Чередов И. М. – М. : Педагогика, 1988. – 160 с.
313. Чистякова В. А. Организационно-педагогические условия дифференцированного обучения учащихся специализированных классов : дисс. ... кандидата пед. наук : 13.00.01 / Чистякова Валентина Александровна. – Томск, 1996. – 182 с.
314. Чичигин В. Г. Методика преподавания тригонометрии : пособие для учителей средней школы / Чичигин В. Г. – М. : Учпедгиз, 1954. – 338 с.
315. Чучуков В. Ф. Система дифференцированных заданий как средство управления процессом обучения : автореф. дисс. на соискание науч. степени канд. пед. наук : спец. 13.00.01 „Общая педагогика и история педагогики" / В. Ф. Чучуков. – К., 1975. – 30 с.
316. Шапиро С. И. Исследование индивидуальных особенностей учащихся в процессе переработки математической информации / С. И. Шапиро // Вопросы психологии. – 1965. – № 2. – С. 91–99.
317. Шапиро С. И. Психологический анализ структуры математических способностей в старшем школьном возрасте / С. И. Шапиро // Вопросы психологии способностей / под ред. В. А. Крутецкого. – М. : Педагогика, 1973. – С. 90–129.
318. Шаран О. В. Методика вивчення комплексних чисел у профільних класах загальноосвітніх шкіл : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : спец. 13.00.02 „Теорія та методика навчання (математика)" / О. В. Шаран. – К., 2009. – 21 с.
319. Шахмаев Н. М. Дифференциация обучения в средней общеобразовательной школе / Н. М. Шахмаев // Дидактика средней школы / под ред. М. Н. Скаткина. – М., 1982. – Розд. 8. – С. 269–296.
320. Шварцбурд С. И. Обучение в математических школах / Шварцбурд С. И., Монахов В. М., Ашкинузе В. Г. – М. : Просвещение, 1965. – 339 с. – (сборник статей).
321. Швец В. А. Реализация функций тематического контроля результатов обучения учащихся математике в старших классах средней школы : дисс. … кандидата пед. наук : 13.00.02 / Швец Василий Александрович. – К., 1988. – 209 с.
322. Швець В. О. Динамічна диференціація на уроках математики / В. О. Швець // Особистісно орієнтоване навчання математики : сьогодення і перспективи : всеукр. наук. - практ. конф., 8-9 квіт. 2008 р. : тези доп. – Полтава, 2008. – С. 53–54.
323. Швець В. О. Принципи формування змісту математичної освіти / В. О. Швець // Дидактика математики : проблеми і дослідження : міжнар. зб. наук. робіт. – 2001. – Вип. 16. – С. 63–68.
324. Шерватов В. Гиперболические функции / Шерватов В. – М. : Гостехиздат, 1954. – 56 с.
325. Шестакова Л. Г. Математика в гуманитарных класах / Л. Г. Шестакова // Математика в школе. – 1996. – № 1. – С. 10–13.

326. Шиян Н. І. Профільне навчання у школах сільської місцевості : теорія і практика / Шиян Н. І. – Полтава : АСМІ, 2004. – 443 с.
327. Шкіль М. І. Алгебра і початки аналізу : [підруч. для 10 кл. з поглиб. вивч. математики в серед. закладах освіти] / М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, Т. М. Хмара – К. : Освіта, 2004. – 318 с.
328. Шкіль М. І. Алгебра і початки аналізу : [підруч. для 10-11 кл. загальноосвіт. навч. закладів] / М. І. Шкіль, З. І. Слєпкань, О. С. Дубинчук. – [2-ге вид.]. – К. : Зодіак-ЕКО, 2001. – 656 с.
329. Шкіль М. І. Вимоги до підготовки вчителя математики / М. І. Шкіль // Радянська школа. – 1984. – № 2. – С. 69–72.
330. Шоластер Н. Н. Некоторые вопросы преподавания тригонометрии в средней школе / Н. Н. Шоластер // Математика в школе. – 1954. – № 2. – С. 15–27.
331. Шунда Н. М. Формування знань про елементарні функції у професійній підготовці вчителя математики : дис. у формі наук. доповіді … доктора пед. наук : 13.00.04; 13.00.02 / Шунда Никифор Миколайович. – К., 1996. – 56 с.
332. Якиманская И. С. Дифференцированное обучение : „внешние” і „внутренние” формы / И. С. Якиманская // Директор школы. – 1995. – № 3. – С. 39–45.
333. Якиманская И. С. Развивающее обучение / Якиманская И. С. – М. : Педагогика, 1979. – 144 с.
334. Якиманская И. С. Технология личностно-ориентированного обучения / Якиманская И. С. – М. : Сентябрь, 2000. – 176 с.
335. Ярошенко О. Г. Групова навчальна діяльність школярів : теорія і методика / Ярошенко О. Г. – К. : Партнер, 1997. – 193 с.
336. Яценко С. Є. Організація навчально-виховного процесу на уроках математики в класах з поглибленим вивченням предмета основної школи : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : спец. 13.00.02 „Теорія та методика навчання (математика)” / С. Є. Яценко. – К., 1999. – 17 с.
337. Bruner J. The Process of Education / Bruner J. – Cambridge : Harvard Univ. Press, 1973. – 97 p.
338. Conant J. B. The Comprehensive High School. A Second Report to Interested Citizens / Conant J. B. – New York : MoGrow-Hill, 1967. – 94 p.
339. Differentiation and Diversity in the Primary School / ed. by I. Bearne. – London, New York : Routledge, 1996. – 270 p.
340. Differenzierung im Schulunterricht / bearb. von M. Fischer. – Weinheim : Beltz, 1973. – 334 s.
341. Eysenk H. Y. Personality and Individual Differences. A Natural Science Approach / Eysenk H. Y., Eysenk M. W. – New York; London : Plenum, 1985. – 424 p.
342. Herber H. Innere Differenzierung im Unterricht / Herber H. – Stuttgart : Kohlhammer, 1983. – 134 s.

343. Goodlad J. Individual Differences and Common Curriculum / J. Goodlad, G. Tenstermacher. – Chicago : The Univ. of Chicago Press, 1983. – 339 p.
344. Lernen in Profilen / J. Bastian, A. Combe, H. Gudjons [u. a.] // Paedagogik. – 2000. – T. 52. – № 3. – S. 34–37.
345. Meister H. ABC für differenzierenden Unterricht / Meister H. – Saarbrücken : Landesinstitut für Pädagogik und Medien, 1998. – 95 s.
346. Paradies L. Differenzieren im Unterricht / L. Paradies, H. Linser. – Berlin : Cornelsen Scriptor, 2001. – 248 s.
347. Ravitch D. The Schools We Deserve. Reflections on the Educational Crises of our Times / Ravitch D. – New York : Basic Books, 1985. – 337 p.

Додаток А

Дефініції понять теорії диференційованого навчання

Деякі підходи щодо визначення понять теорії диференційованого навчання наведені в таблицях А.1-А.3.

Таблиця А.1

Дефініції поняття „диференційоване навчання”

Автор	Зміст поняття
І. Д. Бутузов	Диференційоване навчання передбачає поділ учнів класу на порівняно однакові за рівнем здатності до навчання групи (сильні, середні і слабкі) для організації навчання на різних рівнях [52, с.7].
В. М. Володько	„ … Під диференційованим навчанням слід розуміти таку спеціально організовану пізнавальну діяльність, яка, враховуючи індивідуальні відмінності, спрямована на оптимальний інтелектуальний розвиток кожного учня (студента) й передбачає структурування змісту навчального матеріалу, добір форм і методів навчання відповідно до типологічних особливостей учнів (студентів) ” [61, с.16].
Г. К. Селевко	„Диференційоване навчання – це: 1) форма організації навчального процесу, при якій вчитель працює з групою учнів , що утворена із урахуванням наявності в них будь-яких значимих для навчального процесу загальних якостей … 2) частина загальної дидактичної системи, яка забезпечує спеціалізацію навчального процесу для різних груп учнів” [264, с.78].
І. М. Чередов	„ … Під диференційованим навчанням на уроках мислиться такий процес навчання, який передбачає глибоке вивчення індивідуальних особливостей учнів, їх класифікацію за типологічними групами і організацію роботи цих груп над виконанням специфічних навчальних завдань, які сприяють їх розумовому і моральному розвитку” [311, с.7].
М. М. Шахмаєв	„Навчально-виховний процес, для якого характерним є врахування індивідуальних відмінностей учнів, прийнято називати диференційованим, а навчання в умовах цього процесу – диференційованим навчанням” [319, с.269].

Продовження табл. А.1

Таблиця А.2

Дефініції поняття „диференціація навчання”

Автор	Зміст поняття
О. І. Бугайов	„Диференціація навчання – це множинність та варіативність індивідуальних і колективних підходів до суспільно узгоджених цілей загальної освіти” [43, с.7].
Г. В. Дорофєєв, Л . В. Кузнєцова, С.	„Під диференціацією розуміють таку систему навчання, при якій кожен учень, оволодіваючи деяким

Б. Суворова, В. В . Фірсов	мінімумом загальноосвітньої підготовки, що є суспільно значимою і забезпечує можливість адаптації до життєвих умов, що постійно змінюються, отримує право і ґарантовану можливість приділяти увагу переважно тим напрямам, які найбільшою мірою відповідають його нахилам” [112, с.15].
В. Я. Забранський	„ … Ми розуміємо диференціацію як дію, задача якої – розподіл у процесі навчання для досягнення головної мети навчання – прийняти до уваги особливості кожного учня, цим самим створюючи максимально сприятливі умови для розумового, морального, емоційного і фізичного розвитку особистості, всебічного розвитку її здібностей” [128, с.21].
Н. Є. Мойсеюк	„Під диференціацією розуміють таку форму індивідуалізації, коли учні, схожі за певними індивідуальними особливостями, об’єднуються в групи для окремого навчання” [202, с.306].

Продовження табл. А.2

І. Е. Унт	„Під диференціацією ми розуміємо врахування індивідуальних особливостей учнів у тій формі, коли учні групуються на основі деяких особливостей для окремого навчання; зазвичай навчання в цьому випадку відбувається за дещо різними навчальними планами і програмами” [298, с.8].

Таблиця А.3

Дефініції поняття „диференційований підхід”

Автор	Зміст поняття
В. В. Андронатій	„ … Під диференційованим підходом ми будемо розуміти таке здійснення навчального процесу, яке дозволяє по-різному організовувати стратегії навчання різних груп учнів на максимумі їх потенційних можливостей адекватно їх типовим особливостям, із урахуванням специфіки змісту і цілей навчання” [9, с.29].
А. О. Кірсанов	„Під диференційованим підходом до учнів в навчальному процесі розуміють особливий підхід вчителя до різних груп учнів або окремих учнів, який полягає в організації навчальної роботи, різної за змістом, об’ємом складності, методами і прийомами” [150, с.35].
П. І. Сікорський	„Диференційований підхід у навчанні – це цілеспрямована діяльність педагога з використанням в умовах довільного навчання можливостей урізноманітнення тих чи інших освітніх компонентів” [267, с.173].

Додаток Б

Деякі підходи до типологічного групування учнів

Для розподілу учнів в типологічні групи необхідно якомога повніше ви вчити їх індивідуальні особливості. Різні автори висловлюють різні точки зору щодо того, які індивідуальні особливості учня вважати найбільш значимими для навчання і якими критеріями диференціації необхідно керуватись в першу чергу під час типологічного групування учнів (табл. Б.1).

Таблиця Б.1

Критерії диференціації для типологічного групування учнів

Автор	Критерії диференціації
Ю. К. Бабанський [16]	Реальні навчальні можливості особистості.
А. О. Кірсанов [150]	1) характер мисленнєвих процесів; 2) рівень знань і вмінь; 3) працездатність; 4) рівень самостійності; 5) активність; 6) темп навчання; 7) відношення до навчання; 8) наявність та характер пізнавальних процесів; 9) рівень вольового розвитку.
Т. М. Ніколаєва [218]	1) рівень знань; 2) індивідуально-психологічні особливості особистості (темперамент, темп навчання та інші); 3) інтереси; 3) взаємовідносини учнів.
Є. С. Рабунський [251]	1) рівень успішності; 2) рівень пізнавальної самостійності; 3) інтерес до навчання.
З. І. Слєпкань, В. Я. Забранський [274]	1) темп навчання; 2) навченість; 3) пізнавальний інтерес.
І. М. Чередов [311]	1) научуваність; 2) навчальна працездатність.
В. Ф. Чучуков [315]	1) рівень знань, умінь і навичок; 2) рівень розвитку здібностей; 3) рівень працездатності.
О. Г. Ярошенко [335]	1) здатність до навчання; 2) навченість; 3) темп навчання; 4) працездатність.

Додаток В

Опорні конспекти з теми „Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу”

Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу	
1. Основна тригонометрична тотожність	
2. Означення тангенса	
3. Означення котангенса	
4. Співвідношення між тангенсом і косинусом	
5. Співвідношення між котангенсом і синусом	
6. Співвідношення між тангенсом і котангенсом	

Рис. В.1. Опорний конспект 1-го типу.

Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу	**Обґрунтування**
1. **2.** **3.**	**Незалежні тригонометричні співвідношення**
4.	
5.	
6.	

Рис. В.2. Опорний конспект 2-го типу.

Додаток Д
Плани-конспекти уроків для профільного навчання тригонометричного матеріалу

Додаток Д.1
Лабораторна робота
(академічний рівень)

Тема роботи: графічне розв'язування тригонометричних рівнянь.

Мета роботи: сформувати уміння розв'язувати тригонометричні рівняння графічним методом.

Обладнання: комп'ютер, ППЗ GRAN1.

Тривалість роботи – 45 хвилин.

Література

Основна. 1. Жалдак М. І. Математика (тригонометрія, геометрія, елементи стохастики) з комп'ютерною підтримкою : навч. посіб. / Жалдак М. І., Грохольська А. В., Жильцов О. Б. – К. : МАУП, 2004. – 456 с.

2. Шкіль М. І. Алгебра і початки аналізу : підруч. [для 10-11 кл. загальноосвіт. навч. закладів] / М. І. Шкіль, З. І. Слєпкань, О. С. Дубинчук . – [2-ге вид.]. – К. : Зодіак-ЕКО, 2001. – 656 с.

Додаткова. 1. Гетьманцев В. Д. Математика: тригонометрія : посіб. для слухачів підготов. відділень вступників до вищ. навч. закладів, студентів педагогічних інститутів / В. Д. Гетьманцев, О. Ф. Саушкін. – К. : Либідь, 1994. – 144 с.

2. Завало С. Т. Рівняння і нерівності / Завало С. Т. – К. : Радянська школа, 1973. – 383 с.

Хід лабораторної роботи

І. Вступне слово вчителя (1-2 хв). Повідомлення теми, мети, плану уроку.

ІІ. Фронтальне розв'язування завдань (20хв).

Завдання № 1. Розв'язати графічно рівняння .

Схема розв'язання

1. Створити об'єкти типу „Явна: ” з аналітичними виразами та .

2. Використовуючи послугу „Побудувати” пункту „Графік” побудувати графіки введених функцій.

3. Скориставшись послугою „Координати” пункту „Графік” визначити абсциси спільних точок обох графіків.

Завдання № 2. Скільки коренів має рівняння на відрізках , , ?

Завдання № 3. Визначити кількість коренів рівняння на відрізку залежно від параметра а.

Схема розв'язання

1. Створити об'єкт типу „Явна: ", аналітичний вираз якого . Задати відрізок зміни x: .

2. Створити об'єкт типу „Явна: " з динамічним параметром на відрізку .

3. Для параметра встановити початкове, мінімальне та максимальне значення, приріст.

4. Побудувати графік функції на відрізку .

5. Для різних значень параметра побудувати графік функції на відрізку .

6. Визначити, при яких значеннях параметра графіки функцій та мають спільні точки на відрузку .

7. Визначити кількість коренів рівняння на відрізку залежно від параметра а.

Завдання № 4. Визначити кількість коренів рівняння на відрізку .

Завдання № 5. Розв'язати рівняння на відрізку за допомогою GRAN1 та аналітично. Порівняти отримані значення коренів .

ІІІ. Самостійна робота учнів (20 хв). У класі працює три типологічні групи учнів, які розв'язують завдання різної складності (їх складність зростає у напрямі від рівня А до рівня С).

Основне завдання.

№ 1. Розв'язати за допомогою GRAN1 рівняння:

Рівень А. а) на відрізку ; б) ; в) на відрізку .

Рівень Б. а) на відрізку ; б) ;

в) на відрізку .

Рівень С. а) ; б) на відрізку ;

в) на відрізку .

№ 2. Розв'язати рівняння на відрізку за допомогою GRAN1 та аналітично. Порівняти отримані значення коренів.

Рівень А. Рівень Б.

Рівень С. .

Додаткове завдання.

№ 3. Визначити кількість коренів рівняння на відрізку залежно від параметра а:

Рівень А. Рівень Б.

Рівень С. .

IV. Підсумки уроку (2-3 хв).

Додаток Д.2

Інтегрований урок

(для класів, де фізика належить до профільних навчальних предметів)

Тема уроку: механічні коливання і тригонометричні функції.

Мета уроку: інтеграція математичних та фізичних понять, розвиток дослідницьких здібностей, формування наукового світогляду учнів.

Завдання уроку: систематизація та узагальнення знань учнів про механічні та гармонічні коливання, удосконалення навичок дослідження тригонометричних функцій, формування умінь математичного моделювання фізичних явищ та процесів.

Обладнання: пружинний та математичний маятники; комп'ютер; мультимедійний проектор.

Тривалість уроку – 90 хвилин.

План уроку

I. Вступне слово вчителя (2-3 хв). Повідомлення теми, мети, завдань, плану уроку.

II. Доповідь учня про механічні коливальні рухи у навколишньому середовищі, житті людини (10 хв). Демонстрування відповідної слайд-презентації. Висновок доповіді полягає в тому, що усі розглянуті коливання мають однакові фізичні закономірності. Їх спільна риса – вони окремі приклади фізичного поняття „механічне коливання".

III. Повідомлення з фізики на тему „Механічні коливання" (20 хв).

1) Вчитель за активної участі учнів нагадує основні означення та поняття з фізики, які характеризують механічні коливання: коливальна система; типи механічних коливань; гармонічне коливання; кількісні характеристики механічного коливання (амплітуда, частота, період та інші .).

2) Група учнів (3-4 учні) демонструє приклади механічних коливань: коливання пружинного та математичного маятника. Учні дають коротку фізичну характеристику цим коливанням та записують їх рівняння.

На цьому етапі уроку учні мають зробити висновок, що ґрунтовне вивчення механічних коливань можливе лише за умови якісного засвоєння математичного поняття „гармонічне коливання”.

IV. Повідомлення з математики на тему „Гармонічні коливання” (15 хв).

Учні повторюють основні теоретичні відомості з цієї теми, відповідаючи на запитання, що диференційовані за складністю:

1. Що називається гармонічним коливанням?

2. Що розуміють під амплітудою, періодом, частотою, фазою гармонічного коливання?

3°. Як будується математична модель гармонічного коливання?

4°. Який геометричний зміст амплітуди, періоду, початкової фази, циклічної частоти гармонічного коливання?

5*. Які Вам відомі способи побудови графіків гармонічних коливань?

V. Розв’язування прикладних задач та задач фізичного змісту на механічні коливання (35 хв).

Типові задачі. Задача 1. Вантаж масою 1 кг, підвішений до пружини з жорсткістю 100 Н/м, коливається з амплітудою 10 см. Написати рівняння руху вантажу . В які моменти часу зміщення вантажу дорівнює нулю?

Задача 2. Амплітуда гармонічних коливань матеріальної точки 10 см, а частота 0,5 Гц. Написати рівняння залежності і побудувати його графік. Визначити (аналітично та графічно) зміщення точки через 1,5; 2; 3; 4,5; 6 с. Через який час зміщення буде 7,1 см?

VI. Підсумки уроку (5-7 хв). Учні дають відповіді на запитання: чи важливі тригонометричні функції для опису та вивчення навколишнього світу? Вчитель, підсумовуючи відповіді учнів, формулює загальний висновок про єдність фізичних та математичних методів, які спрямовані на дослідження різноманітних явищ та процесів природи, техніки, побуту, життя людини.

Додаток Е
Прийоми для діагностики рівнів розвитку компонент математичних здібностей

1. Для дослідження здібності формалізовано сприймати математичний матеріал спрямовані задачі з неповним складом умови. Суть прийому полягає в тому, що точно вказати на відсутні дані в умові задачі можливо лише тоді, коли сприймається формальна структура задачі, комплекс взаємопов'язаних величин, які складають її зміст. Отримавши задачу, учень відразу або через деякий час приходить до висновку про неможливість її розв'язання. Далі експериментатор спонукає до пояснення та обґрунтування цієї відповіді, на основі чого з'ясовує, в якій мірі учень сприйняв формальну структуру задачі.

2. Для оцінювання узагальненості мисленнєвої діяльності учнів пропонувалися завдання на складання задач певного типу. Спочатку досліджуваний ознайомлюється із задачею певного типу, яка містить конкретні числові значення. Далі він отримує завдання самостійно скласти інші задачі а) такого самого типу, б) іншого типу. Це завдання спрямоване на з'ясування того, як учень аналізує структуру задачі (або структуру її розв'язання), як міркує, виділяє суттєві та несуттєві на його погляд ознаки типу, самостійно здійснює узагальнення ряду об'єктів в результаті аналізу лише одного об'єкта цього типу. Найвищий рівень виконання цього завдання – учнем складена задача іншого предметного змісту, яка представлена в загальному вигляді; найнижчий рівень – складено аналогічну задачу з іншими числовими даними і тим самим предметним змістом.

3. Для оцінки здібності до згортання математичних міркувань застосовувався такий прийом: 1) фіксувалась кількість ланок n процесу міркування під час розв'язування учнем задачі; 2) число n порівнювалось із числом ланок m розгорнутого процесу розв'язування задачі. Відповідно до цього аналізувалась кількість пропущених ланок m-n та їх змістове навантаження.

4. Здібність переключення з прямого на обернений хід думки досліджувалась за допомогою парних задач – прямої задачі і оберненої до неї. З'ясовувалося, як учень розв'язує обернені задачі: а) безпосередньо після прямої; б) незалежно від прямої. Обернена задача, яка пред' являється здібному учню відразу після прямої, розв'язується ним швидше у порівнянні з оберненою задачею, яка пропонується як самостійне завдання. В учнів з невисоким рівнем розвитку здібності, яка досліджується, пряма задача виявляє гальмуючий вплив на процес розв'язування оберненої задачі.

5. Рівень розвитку логічності мислення ефективно досліджувати за допомогою задач логічного характеру, які потребують уміння послідовно та зважено будувати ланцюжки міркувань, обґрунтовувати кроки розв' язання задачі, вірно виводити наслідки з правильних тверджень, і разом з тим, потребують лише елементарних математичних знань та умінь. Процес

розв'язування задач такого типу розкриває „лабораторію думки" учня, його здатність нестандартно мислити, бачити з різних сторін проблемну ситуацію. Слід підкреслити, що для експериментатора важливим є не стільки відповідь до задачі, скільки спостереження за процесом її розв'язування.

6. На дослідження гнучкості мислення спрямовані задачі, які мають декілька способів розв'язання. Спочатку учню пропонується задача без вказівки знайти різні способи її розв'язання. Цей прийом дає змогу з'ясувати, чи присутня в учня потреба пошуку способів розв'язання, більш простих та економних. Далі пропонується завдання: відшукати якнайбільшу кількість способів розв'язання задачі, а також визначити найбільш раціональний з них. Якщо учень не розв'язав задачі або не зміг знайти декількох способів її розв'язання, то експериментатор демонструє ці способи та пропонує їх проаналізувати, порівняти і оцінити. Про гнучкість мисленнєвих процесів роблять висновок на основі того, як учень може урізноманітнити способи розв'язання, як вільно та швидко переключається з однієї розумової операції на іншу.

Додаток Ж
Диференціація змісту тригонометричного матеріалу

Додаток Ж.1
Ядро, базовий та поглиблений блоки змісту тригонометричного матеріалу (табл. Ж.1.1-Ж.1.5)

Примітка. Курсив – ядро змісту; "+" – базовий зміст; "[+]" – поглиблений зміст "" – не вивчається; С – рівень стандарту; А – академічний рівень; П – профільний рівень.

Таблиця Ж.1.1

Диференціація змісту модуля „Тригонометричні величини"

№ п/п	Зміст	Рівні засвоєння змісту		
		С	А	П
1.	Поняття кута та його вимірювання.	+	+	+
2.	Різні системи вимірювання кутів і дуг.	[+]	+	+
3.	Радіан. Формули зв'язку градусної і радіанної міри кута.	+	+	+
4.	Формули довжини дуги і площі сектора.	-	-	+
5.	Обертальний рух і його властивості.	-	[+]	[+]
6.	Тригонометричні функції кутового та числового аргументу.	+	+	+
7.	Лінії тангенса і котангенса.	[+]	[+]	+
8.	Наближені формули , .	-	+	+
9.	Значення синуса, косинуса, тангенса і котангенса деяких кутів.	+	+	+
10.	Властивості тригонометричних функцій, які безпосередньо випливають з означень.	+	+	+
11.	Означення тригонометричних функцій секанс і косеканс.	-	[+]	+

Таблиця Ж.1.2

Диференціація змісту модуля „Тригонометричні функції"

№ п/п	Зміст	Рівні засвоєння змісту		
		С	А	П
1.	Графіки тригонометричних функцій синус, косинус , тангенс і котангенс.	+	+	+
2.	Геометричні перетворення графіків тригонометричних функцій.	+	+	+
3.	Властивості функцій синус, косинус, тангенс і котангенс.	+	+	+

4.	Опуклість і вгнутість графіків тригонометричних функцій. Точки перегину.	-	-	[+]
5.	Дослідження функцій секанс і косеканс.	-	-	[+]
6.	Перша важлива границя.	-	[+]	+
7.	Наслідки першої важливої границі.	-	-	+
8.	Періодичність алгебраїчної суми та добутку періодичних функцій.	-	[+]	+
9.	Похідні та первісні тригонометричних функцій.	+	+	+

Таблиця Ж.1.3

Диференціація змісту модуля „Тригонометричні формули”

№ п/п	Зміст	Рівні засвоєння змісту		
		С	А	П
1.	Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного і того ж аргументу.	+	+	+
2.	Формули додавання.	+	+	+
3.	Формули зведення.	+	+	+

Продовження табл. Ж.1.3

4.	Формули подвійних аргументів.	+	+	+
5.	Формули потрійних аргументів.	-	-	[+]
6.	Формули половинних аргументів.	[+]	[+]	+
7.	Формули пониження степеня.	-	[+]	+
8.	Формули універсальної підстановки.	-	[+]	+
9.	Формули суми і різниці однойменних тригонометричних функцій.	+	+	+
10.	Формули перетворення добутку тригонометричних функцій в суму.	[+]	+	+
11.	Формули допоміжного кута.	-	[+]	+
12.	Тригонометричні формули кратних аргументів.	-	-	[+]
13.	Тотожні перетворення тригонометричних виразів з модулями і параметрами.	-	-	[+]
14.	Гармонічні коливання.	+	+	+
15.	Сума гармонічних коливань.	-	+	+

Таблиця Ж.1.4

Диференціація змісту модуля „Обернені тригонометричні функції”

№ п/п	Зміст	Рівні засвоєння змісту		
		С	А	П
1.		+	+	+

	Арксинус, арккосинус, арктангенс і арккотангенс числа.			
2.	Табличні значення арксинуса, арккосинуса, арктангенса і арккотангенса.	+	+	+
3.	Поняття оберненої функції, її основні властивості.	-	+	+
4.	Існування та неперевність оберненої функції.	-	[+]	+
5.	Означення, графіки та властивості аркфункцій.	-	+	+
6.	Дослідження обернених тригонометричних функцій.	-	[+]	+

Таблиця Ж.1.5

Диференціація змісту модуля „Тригонометричні рівняння та нерівності”

№ п/п	Зміст	Рівні засвоєння змісту		
		С	А	П
1.	Найпростіші тригонометричні рівняння і ті, які безпосередньо до них зводяться.	+	+	+
2.	Методи розв’язування тригонометричних рівнянь: - алгебраїчний - заміни - розкладання на множники - графічний - піднесення до квадрату - розв’язування однорідних рівнянь - введення допоміжного аргументу - універсальної підстановки	 + + + + [+] - - -	 + + + + [+] [+] - [+]	 + + + + + + + +
3.	Найпростіші тригонометричні нерівності.	[+]	+	+
4.	Методи розв’язування тригонометричних нерівностей.	-	-	+
5.	Тригонометричні рівняння з модулем, параметром.	-	[+]	[+]
6.	Тригонометричні нерівності з модулем, параметром.	-	-	[+]
7.	Рівняння і нерівності, які містять обернені тригонометричні функції.	-	-	[+]
8.	Системи тригонометричних рівнянь.	-	[+]	+

Додаток Ж.2
Додатковий зміст тригонометричного матеріалу
Профільний рівень

Означення тригонометричних функцій за допомогою степеневих рядів, системи аксіом, диференціальних рівнянь; тригонометричні функції від комплексного аргументу; поліноми Чебишева; гіперболічні та обернені гіперболічні функції; функціональні рівняння з тригонометричними функціями; тригонометричні рівняння з цілою та дробовою частинами; тригонометричні рівняння з прогресіями; рівняння, нерівності та їх системи з аркфункціями; доведення тригонометричних нерівностей; елементи сферичної тригонометрії.

Академічний рівень

Тригонометричні обчислення з наближеними даними; наближені методи розв'язування тригонометричних рівнянь; розв'язування задач фізики із застосуванням тригонометричного матеріалу (застосування тригонометрії в механіці, динаміці, електриці, оптиці); застосування тригонометрії в техніці; електротехніці; гармонічні коливання в електротехніці; розв'язування задач геодезичного змісту із застосуванням тригонометрії; вимірювання на місцевості; застосування тригонометрії в астрономії; навігації.

Рівень стандарту

Роль і вплив практики на зародження і розвиток тригонометрії; причини зародження тригонометрії; етапи розвитку науки тригонометрії; відомості про видатних вчених-математиків, які зробили вагомий внесок в розвиток тригонометрії як науки; Л. Ейлер і тригонометрія; походження тригонометричної термінології, символіки, окремих тригонометричних відомостей; періодичні явища та процеси природи і навколишньої дійсності; періодично повторювані зображення; розв'язування задач практичного змісту із застосуванням тригонометрії.

Додаток З
Тематичне планування вивчення тригонометричного матеріалу на рівні стандарту, академічному та профільному (табл. З.1-З.3)

Примітка. С.1 – самостійна робота 1-го типу (базовий рівень вимог); С. 2 – самостійна робота 2-го типу (різнорівнева); С.3 – самостійна робота 3-го типу (завдання роботи диференційовані за складовими змісту).

Таблиця З.1

Тематичне планування вивчення тригонометричного матеріалу на рівні стандарту. 10-й клас.
(26 годин)

№ уроку	Зміст уроку	Форма проведення
	I. Тригонометричні функції (13 годин)	
1.	Вимірювання кутів. Радіан. Формули зв'язку градусної та радіанної міри кута.	Комбінований урок
2.	Синус, косинус, тангенс і котангенс дійсного числа. С.1.	Урок формування базових навичок та вмінь
3.	Тригонометричні функції числового аргументу.	Комбінований урок
4.	Розв'язування вправ. С.1.	Урок формування базових навичок та вмінь
5.	Побудова графіків тригонометричних функцій.	Комбінований урок
6.	Розв'язування вправ. С.2.	Урок формування навичок та вмінь
7-8.	Властивості тригонометричних функцій.	Комбінований урок
9.	Розв'язування вправ. С.1.	Урок формування базових навичок та вмінь

Продовження табл. З.1

10.	Тригонометричні функції та їх властивості. С .2.	Урок формування навичок та вмінь
11.	Розв'язування вправ. С.3.	Урок формування навичок та вмінь
12.	Контрольна робота 1.	Урок контролю знань
13.	Підсумковий урок.	Урок - консультація

II. Тотожні перетворення тригонометричних виразів (6 годин)		
1.	Співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу. С.1.	Комбінований урок
2.	Формули додавання. С.1.	Комбінований урок
3.	Формули зведення.	Комбінований урок
4.	Формули подвійних аргументів. С.1.	Урок формування базових навичок та умінь
5.	Тотожні перетворення тригонометричних виразів. С.2.	Урок формування навичок та вмінь
6.	Розв'язування вправ. С.3.	Урок формування навичок та вмінь
III. Тригонометричні рівняння (7 годин)		
1-2.	Найпростіші тригонометричні рівняння. С.1 .	Комбінований урок
3.	Методи розв'язування тригонометричних рівнянь. С.1.	Урок формування базових навичок та вмінь
4.	Розв'язування вправ. С.2.	Урок формування навичок та вмінь
5.	Розв'язування вправ. С.3.	Урок формування навичок та вмінь
6.	Контрольна робота 2.	Урок контролю знань
7.	Підсумковий урок.	Урок - консультація

Таблиця 3.2

Тематичне планування вивчення тригонометричного матеріалу на академічному рівні. 10-й клас. (36 годин)

№ уроку	Зміст уроку	Форма проведення
I. Тригонометричні функції (11 годин)		
1.	Вимірювання кутів. Радіан. Формули зв'язку градусної та радіанної міри кута.	Комбінований урок
2.	Синус, косинус, тангенс і котангенс дійсного числа. С.1.	Комбінований урок
3.	Тригонометричні функції числового аргументу. С.2.	Урок формування навичок та вмінь
4.	Періодичність тригонометричних функцій. Побудова графіків тригонометричних	Лабораторна робота

	функцій.	
5-6.	Властивості тригонометричних функцій. С.1.	Комбінований урок
7.	Розв'язування вправ. С.2.	Урок формування навичок та вмінь
8-9.	Тригонометричні функції мовою природи. С.3 .	Інтегрований урок
10.	Контрольна робота 1.	Урок контролю знань
11.	Підсумковий урок.	Урок консультації та корекції знань
	II. Тотожні перетворення тригонометричних виразів (9 годин)	
1.	Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу. С.1.	Комбінований урок
2.	Формули додавання. С.1.	Комбінований урок
3.	Формули зведення. С.1.	Комбінований урок
4.	Формули подвійних аргументів. С.2.	Комбінований урок

Продовження табл. 3.2

5.	Формули суми і різниці однойменних тригонометричних функцій. С.2.	Урок формування навичок та вмінь
6.	Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму. С.3.	Урок формування навичок та вмінь
7.	Гармонічні коливання.	Лабораторна робота
8.	Контрольна робота 2.	Урок контролю знань
9.	Підсумковий урок.	Урок консультації та корекції знань
	III. Тригонометричні рівняння і нерівності (16 годин)	
1-2.	Обернена функція. Обернені тригонометричні функції. С.1.	Комбінований урок
3.	Розв'язування вправ.	Урок формування навичок та вмінь
4-5.	Найпростіші тригонометричні рівняння. С.1.	Комбінований урок
6-7.	Методи розв'язування тригонометричних рівнянь. С.2.	Комбінований урок
8.	Розв'язування тригонометричних рівнянь. С. 3.	Урок формування навичок та вмінь
9.	Графічне розв'язування тригонометричних рівнянь.	Лабораторна робота
10-11.	Механічні коливання і тригонометричні функції.	Інтегрований урок
12.	Найпростіші тригонометричні нерівності. С.1.	Комбінований урок

13-14.	Розв’язування тригонометричних нерівностей. С.2.	Урок формування навичок та вмінь
15.	Контрольна робота 3.	Урок контролю знань
16.	Підсумковий урок.	Урок консультації та корекції знань

Таблиця 3.3

Тематичне планування вивчення тригонометричного матеріалу на профільному рівні. 10-й клас. (65 годин)

№ уроку	Зміст уроку	Форма проведення
I. Тригонометричні функції (15 годин)		
1.	Вимірювання кутів. Радіан. Формули зв’язку градусної та радіанної міри кута.	Комбінований урок
2.	Синус, косинус, тангенс і котангенс дійсного числа. Тригонометричні функції числового аргументу.	Лекція
3.	Розв’язування вправ.	Практикум
4.	Розв’язування вправ. С.1.	Практикум
5.	Тригонометричні функції , , їх властивості та графіки.	Лекція
6.	Тригонометричні функції , , їх властивості та графіки.	Лекція
7.	Тригонометричні функції синус, косинус, тангенс і котангенс та їх властивості.	Колоквіум
8.	Розв’язування задач. С.1.	Практикум
9.	Розв’язування задач. С.2.	Практикум
10.	Перша важлива границя.	Лекція
11.	Розв’язування задач. С.1.	Практикум
12.	Тригонометричні функції. С.3.	Семінар
13-14.	Підсумковий контроль знань.	Залік
15.	Підсумковий урок.	Урок консультації та корекції знань

Продовження табл. 3.3

II. Тотожні перетворення тригонометричних виразів (15 годин)		
1.	Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу.	Комбінований урок
2.	Розв’язування задач. С.1.	Практикум

3.	Формули додавання.	Лекція
4.	Наслідки формул додавання.	Лекція
5.	Формули додавання та їх наслідки.	Колоквіум
6.	Розв'язування задач. С.1.	Практикум
7.	Розв'язування задач.	Практикум
8.	Розв'язування задач. С.2.	Практикум
9.	Тотожні перетворення тригонометричних виразів з модулями і параметрами.	Практикум
10.	Гармонічні коливання. Додавання гармонічних коливань.	Лекція
11.	Розв'язування задач. С.1.	Практикум
12.	Розв'язування задач. С.3.	Практикум
13-14.	Підсумковий контроль знань.	Залік
15.	Підсумковий урок.	Урок консультації та корекції знань
ІІІ. Тригонометричні рівняння (22 години)		
1.	Обернена функція. Існування та неперервність оберненої функції.	Лекція
2.	Обернена функція.	Практикум
3.	Функції , , їх властивості та графіки.	Лекція

Продовження табл. 3.3

4.	Функції , , їх властивості та графіки.	Лекція
5.	Обернені тригонометричні функції та їх властивості.	Колоквіум
6.	Розв'язування вправ. С.1.	Практикум
7.	Розв'язування вправ. С.2.	Практикум
8.	Обернені тригонометричні функції. С.3.	Семінар
9.	Найпростіші тригонометричні рівняння.	Лекція
10.	Розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь. С.1.	Практикум
11.	Методи розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь.	Лекція
12.	Розв'язування тригонометричних рівнянь зведенням до однієї функції.	Практикум
13.	Однорідні тригонометричні рівняння.	Практикум
14.		Практикум

	Розв'язування тригонометричних рівнянь за допомогою розкладання на множники. С.1.	
15.	**Розв'язування вправ. С.2.**	**Практикум**
16.	**Застосування властивостей функцій до розв'язування тригонометричних рівнянь.**	**Практикум**
17.	**Рівняння з оберненими тригонометричними функціями.**	**Практикум**
18.	**Тригонометричні рівняння з модулями, параметрами.**	**Практикум**
19.	**Системи тригонометричних рівнянь. С.3.**	**Практикум**
20-21.	**Підсумковий контроль знань.**	**Залік**
22.	**Підсумковий урок.**	**Урок консультації та корекції знань**

Продовження табл. 3.3

IV. Тригонометричні нерівності (13 годин)		
1.	**Найпростіші тригонометричні нерівності.**	**Лекція**
2.	**Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей. С.1.**	**Практикум**
3.	**Методи розв'язування тригонометричних нерівностей.**	**Лекція**
4.	**Розв'язування тригонометричних нерівностей різними методами. С.1.**	**Практикум**
5.	**Розв'язування вправ. С.2.**	**Практикум**
6.	**Розв'язування тригонометричних нерівностей методом інтервалів. С.1.**	**Практикум**
7.	**Розв'язування вправ.**	**Практикум**
8.	**Розв'язування тригонометричних нерівностей з параметрами.**	**Практикум**
9.	**Розв'язування вправ.**	**Практикум**
10.	**Розв'язування вправ. С.3.**	**Практикум**
11-12.	**Підсумковий контроль знань.**	**Залік**
13.	**Підсумковий урок.**	**Урок консультації та корекції знань**

Додаток И
Мнемонічні правила для запам'ятовування тригонометричних формул

Приклади мнемонічних правил для запам'ятовування формул додавання для синуса і косинуса та формул подвійних аргументів наведені на рис. И.1-И.2.

Формули додавання для косинуса і синуса

_	(α+β)			-	
cos		=	cos α cos β		sin α sin β
_	(α-β)			+	

_	(α+β)			+	
sin		=	sin α cos β		cos α sin β
_	(α-β)			-	

Рис. И.1. Мнемонічне правило 1.

Формули подвійних аргументів

Рис. И.2. Мнемонічне правило 2.

Додаток К

Система усних вправ на відпрацювання базових навичок та умінь застосування основних тригонометричних тотожностей

Таблиця К.1

Диференціація усних вправ за кількістю логічних ланок

1-й рівень однокрокові вправи	2-й рівень двокрокові вправи	3-й рівень три і більше кроки
Спростити вираз		
1) 2) 3) 4) 5)	1) 2) 3) 4) 5)	1) 2) 3) 4) 5)

Додаток Л

Графіки функцій в полярній системі координат

На рис. Л.1-Л.6 представлені графіки функції $r=\cos m\theta$, $1 \le m \le 6$ в узагальнених полярних координатах (зображені як дійсні, так і уявні частини кривих).

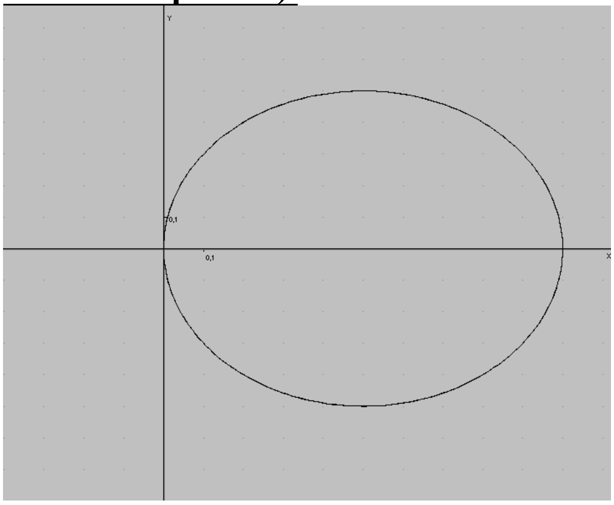


Рис. Л.1. $r=\cos\theta$.

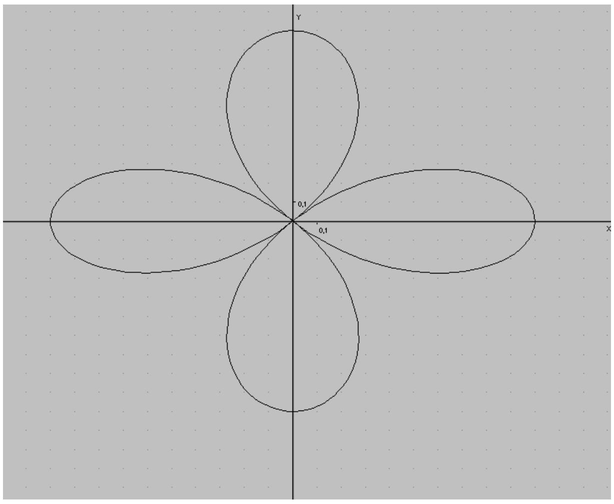


Рис. Л.2. $r=\cos 2\theta$.

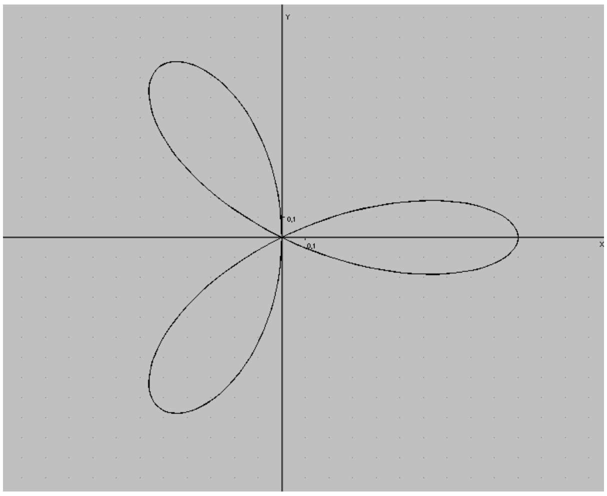


Рис. Л.3. $r=\cos 3\theta$.

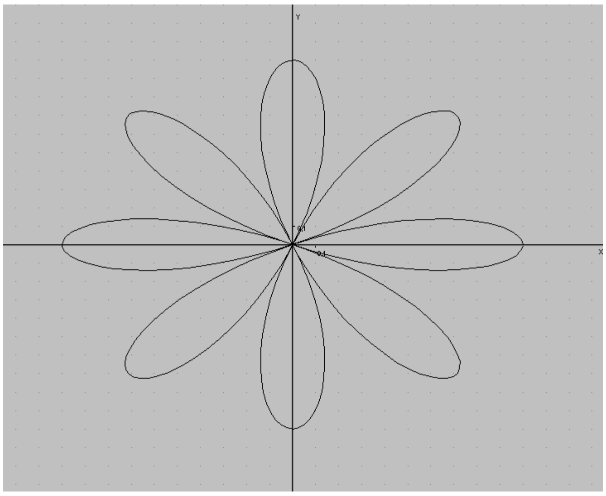


Рис. Л.4. $r=\cos 4\theta$.

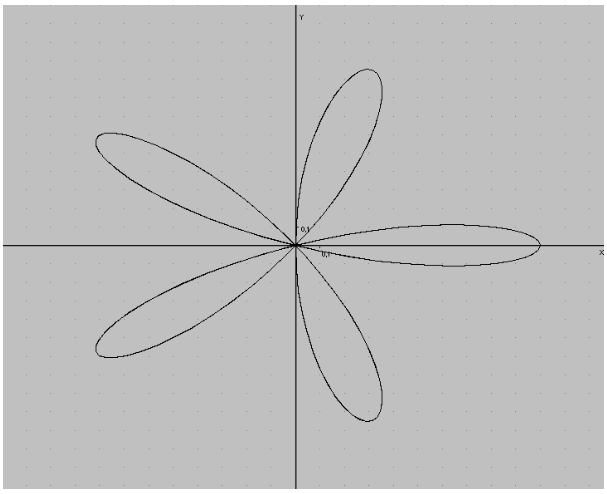


Рис. Л.5. $r=\cos 5\theta$.

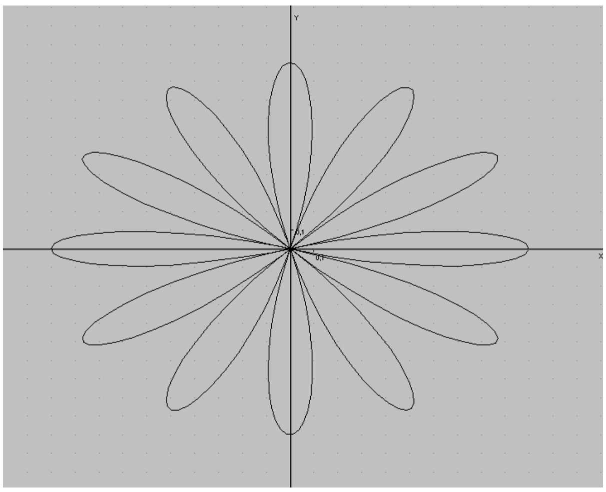


Рис. Л.6. $r=\cos 6\theta$.

Додаток М
Фрагменти програм елективних курсів з тригонометрії

Додаток М.1
Фрагмент програми елективного курсу „Історія тригонометрії”

Мета спецкурсу: формування наукового світогляду, загальний розвиток учнів засобами тригонометрії.

Завдання спецкурсу: розширення та поглиблення уявлень учнів про тригонометрію як складову загальнолюдської культури; демонстрування на прикладі тригонометрії історії розвитку наукової думки; виховання інтересу учнів до вивчення математики; інтеграція математичних та гуманітарних знань.

Програма спецкурсу розрахована на 17 годин (табл. М.1.1). Спецкурс доцільно пропонувати учням 10-х класів, які вивчають математику на рівні стандарту.

Таблиця М.1.1

Розподіл навчального часу в процесі вивчення елективного курсу „Історія тригонометрії”

Тема	Кількість годин
1. Вступ. Ранній період розвитку тригонометрії.	2
2. Грецька тригонометрія.	3
3. Індійська тригонометрія.	3
4. Тригонометрія на Ближньому і Середньому Сході в Середні віки.	3
5. Розвиток тригонометрії в Європі.	4
6. Тригонометрія сучасності.	1
7. Підсумкове заняття.	1

Додаток М.2
Фрагмент програми елективного курсу „Тригонометрія в задачах фізики”

Мета спецкурсу: формування уявлень про єдину природничо-наукову картину світу, розвиток творчих здібностей учнів.

Завдання спецкурсу: встановлення міжпредметних зв’язків тригонометрії та фізики; формування умінь розв’язувати фізичні задачі із застосуванням тригонометрії; формування навичок математичного моделювання фізичних явищ та процесів за допомогою тригонометрії; узагальнення та систематизація знань учнів з тригонометрії.

Спецкурс призначений для профільних класів, де фізика вивчається на рівні профілюючого навчального предмета і розрахований на 17 годин (табл. М.2.1). Місце вивчення спецкурсу – другий семестр 11-го класу.

Таблиця М.2.1

Розподіл навчального часу в процесі вивчення елективного курсу „Тригонометрія в задачах фізики”

Тема	Кількість годин
1. Вступ до спецкурсу. Розв’язування фізичних задач з кінематики.	3
2. Розв’язування фізичних задач з динаміки.	3
3. Розв’язування задач технічного змісту.	3
4. Розв’язування фізичних задач з електрики.	3
5. Розв’язування фізичних задач з геометричної оптики.	2
6. Захист індивідуальних контрольних робіт.	2
7. Підсумкове заняття.	1

Додаток М.3

Фрагмент програми елективного курсу „Обернені тригонометричні функції”

Мета спецкурсу: розвиток математичних здібностей, задоволення пізнавальних інтересів учнів.

Завдання спецкурсу: розширення, поглиблення та систематизація знань учнів про обернені тригонометричні функції; розвиток умінь розв’язувати нестандартні задачі; підготовка учнів до продовження математичної освіти після закінчення школи.

Місце вивчення спецкурсу: спецкурс доцільно пропонувати учням 10-х класів математичних, фізико-математичних профілів після систематичного вивчення тригонометричного матеріалу. Орієнтовна кількість годин на вивчення спецкурсу – 32 години (табл. М.3.1).

Таблиця М.3.1

Розподіл навчального часу в процесі вивчення елективного курсу „Обернені тригонометричні функції”

Тема	Кількість годин
1. Обернені тригонометричні функції, їх графіки та властивості.	2
2. Співвідношення між оберненими тригонометричними функціями.	5
3. Рівняння з оберненими тригонометричними функціями.	6
4. Системи рівнянь з оберненими тригонометричними функціями.	5
5. Нерівності з оберненими тригонометричними функціями.	6
6. Побудова графіків функцій, аналітичні вирази яких містять символи обернених тригонометричних функцій.	6
7. Підсумкові заняття.	2

Додаток Н
Усна самостійна робота з теми „Тригонометричні формули”

Час виконання самостійної роботи – 3-4 хв.

Варіант № 1

1. Чому дорівнює тангенс суми двох аргументів?

2. Обчисліть .

3. Спростіть .

4. Спростіть .

Варіант № 2

1. Обчисліть .

2. Спростіть .

3. Обчисліть , якщо .

4. Спростіть .

Додаток П

Само- та взаємоконтроль у процесі навчання

Для здійснення самоконтролю учіння доцільне написання учнями листів самоконтролю (табл. П.1).

Таблиця П.1

Лист самоконтролю учня

Зміст матеріалу	Зрозуміло, запитань не має	В чому відчуваю труднощі	З'ясувати відповідь на запитання	Що необхідно повторити, на що звернути увагу	Самооцінка (за 12-бальною шкалою)

Рецензія учня на письмову роботу однокласника може бути структурована таким чином:

І. Що сподобалось:

а) раціональність, повнота розв'язання; в) творчий підхід;
б) акуратність, грамотність оформлення; г) інше.

ІІ. Вказати характер помилок та недоліків:

а) в обчисленнях;
б) в тотожних перетвореннях;
в) у виборі та застосуванні методів, правил, формул, алгоритмів;
г) у графічному оформленні;
ґ) типові помилки;
е) інше.

ІІІ. Оцінювання (за 100-відсотковою шкалою):

а) техніка, правила ____; б) творчість, ідеї ____ ;
в) оформлення, пояснення ____.

ІV. Пропозиції та побажання:

а) що повторити; б) на що звернути увагу; в) інше.

Додаток Р
Програма колоквіуму „Обернені тригонометричні функції та їх властивості”

Основні поняття: оборотна функція; обернена функція; взаємно обернені функції; арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс числа; обернені тригонометричні функції , , , .

Основні факти і твердження: теорема про існування оберненої функції ; алгоритм знаходження формули функції, оберненої до даної; властивість графіків взаємно обернених функцій; властивості областей визначення і множин значень взаємно обернених функцій; теорема про неперервність оберненої функції; табличні значення арксинуса, арккосинуса, арктангенса і арккотангенса; властивості обернених тригонометричних функцій; властивості кривих , , , .

Контрольні запитання і завдання
репродуктивні

1. Яка функція називається оборотною?

2. Сформулювати означення функції, оберненої до даної оборотної функції.

3. Що розуміють під взаємно оберненими функціями?

4. Як розташовані графіки двох взаємно обернених функцій?

5. Які властивості мають області визначення і множини значень взаємно обернених функцій?

6. Сформулювати алгоритм знаходження формули функції, оберненої до даної.

7. Яка необхідна і достатня; достатня умова існування оборотної функції?

8. Навести приклади функцій, які мають і які не мають оберненої функції.

9. Сформулювати теорему про неперервність оберненої функції.

10. Що називають арксинусом, арккосинусом, арктангенсом і арккотангенсом числа?

11. Ввести функцію, обернену до , .

12. Обчислити , , , .

13. Назвати властивості обернених тригонометричних функцій.

14. Виразити через .

15. Які властивості кривої ; ; ; ?

реконструктивні

1. На яких проміжках функція , має обернену функцію? На якому проміжку оберненою до неї є функція ?

2. На яких проміжках , крім проміжка , функція , має обернену функцію? Відповідь обґрунтувати.

3. Чи існує значення , , , ?

4. Чи можливі рівності , , , ?

5. Обґрунтувати зростання функції на відрізку .

6. Чому область визначення функції – відрізок , а множина значень – відрізок ?

7. Обґрунтувати неперервність функції на її області визначення.

8. Чи може арксинус і арккосинус того самого аргументу дорівнювати ; ; ?

9. Зобразити кут, який дорівнює ; ; ; .

10. Що більше чи ?

11. Чи вірно, що графіки взаємно обернених функцій можуть перетинатися на прямій ?

12. Довести теорему про існування оберненої функції.

13. Довести, що функції і непарні.

14. Довести твердження про графіки взаємно обернених функцій.

15. Довести рівності , , .

проблемні

1. Чи може періодична функція бути оборотною?

2. Чи може непарна функція бути оборотною?

3. Чи правильно, що будь-яка лінійна функція є оборотною?

4. Довести, що функція не є оборотною.

5. Порівняти властивості функцій і ; і .

6. Порівняти властивості прямої тригонометричної функції і оберненої до неї (наприклад, і).

7. Довести обмеженість функції ; .

8. Довести, що , якщо .

9. Довести тотожність .

10. Довести, що .

Додаток С
Самостійні роботи для профільних класів

Додаток С.1
Самостійна робота 1-го типу на тему „Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу”

Час виконання самостійної роботи – до 15 хв.

Рівень стандарту СБ

1. Чи існує таке значення х, для якого , ?

2. Обчислити , якщо , .

3. Спростити вираз .

4. Довести, що .

Академічний рівень АБ

1. Обчислити значення кожної з тригонометричних функцій, якщо

, :

2. Спростити вираз .

3. Довести тотожність .

4. Обчислити значення виразу , якщо .

Профільний рівень ПБ

1. Дано , . Обчислити значення інших трьох основних тригонометричних функцій.

2. Спростити вираз .

3. Довести тотожність .

4. Відомо, що . Обчислити .

Додаток С.2
Самостійна робота 2-го типу на тему „Тригонометричні функції”

Час виконання самостійної роботи – до 25 хв.

Рівень стандарту
СБ (6 балів)

1. (2 бали). Знайти значення функції , якщо значення її аргументу а) ; б) .

2. (2 бали). Користуючись графіком функції знайти і записати:

а) два проміжки зростання функції;

б) два проміжки, де косинус додатний.

3. (2 бали). Побудувати графік функції .

СД (9 балів)

1. (3 бали). Встановити, парною чи непарною є функція .

2. (3 бали). За графіком функції прочитати її основні властивості.

3. (3 бали). Використовуючи графік функції , побудувати графік функції .

СВ (12 балів)

1. (4 бали). Знайти найбільше і найменше значення виразу .

2. (4 бали). Спростити вираз .

3. (4 бали). Методом геометричних перетворень побудувати графік функції і охарактеризувати її властивості.

Академічний рівень
АБ (6 балів)

1. (2 бали). Записати в порядку зростання , , .

2. (2 бали). Користуючись графіком функції , встановити її основні властивості.

3. (2 бали). Побудувати графік функції .

АД (9 балів)

1. (3 бали). Знайти найменший додатний період функції

.

2. (3 бали). Користуючись графіком функції прочитати її основні властивості.

3. (3 бали). Побудувати графік функції .

АВ (12 балів)

1. (4 бали). Довести, що функція непарна.

2. (4 бали). Знайти область значень функції . Вказати, при яких значеннях аргументу функція набуває найбільшого і найменшого значень (якщо вони існують).

3. (4 бали). Побудувати графік функції і охарактеризувати її властивості.

Профільний рівень

ПБ (6 балів)

1. (2 бали). Знайти проміжки знакосталості та монотонності функції

.

2. (2 бали). Визначити, чи є функція парною.

3. (2 бали). Дослідити функцію та побудувати її графік.

ПД (9 балів)

1. (3 бали). Знайти графічно значення х, яке задовольняє рівняння

.

2. (3 бали). Довести, що функція не є періодичною.

3. (3 бали). Побудувати графік функції .

ПВ (12 балів)

1. (4 бали). Довести, що функція зростає на проміжку

.

2. (4 бали). Дослідити на неперервність функцію .

3. (4 бали). Побудувати графік функції .

Додаток С.3

Самостійна робота 3-го типу на тему „Тригонометричні функції”

Час виконання самостійної роботи – до 40 хв.

Рівень стандарту

1. Новорічна ялинка має форму рівнобедреного трикутника, кут при основі якого . Виразити у радіанній мірі усі кути цього трикутника.

2. На змаганнях з фристайлу траєкторія руху спортсмена описується функцією , а траєкторія руху знімальної камери – рівнянням . Чи перетне оператор траєкторію руху спортсмена? Якщо так, то в якій точці?

3. Дослідник, застосовуючи індивідуальну методику, вибірково вимірював діаметри дерев експериментальної ділянки лісу. Ним записані такі значення діаметрів (в метрах): , , , , . Визначити серед них найбільше і найменше значення діаметра.

4. Курсор комп'ютера креслить на екрані монітора криві таким чином, що один фрагмент лінії повторюється через Т одиниць (рис. С.3.1). За даними фрагментами зобразити шлях курсора на проміжку .

Рис. С.3.1. Фрагменти ліній на моніторі комп'ютера.

5. Гірська дорога проходить повз прірву. Знайти найкоротшу і найдовшу відстань від дороги до краю прірви, якщо межа дороги визначається прямою **, а край прірви – кривою .**

Академічний рівень

1. Стріла будівельного крана рухається, піднімаючи вантаж. При цьому змінюються кути трикутника, вершинами якого є такі точки: А – початок стріли на корпусі крана; В – кінець стріли, до якого кріпиться пересувний трос; С – точка з'єднання троса з вантажем. Значення кутів цього трикутника відносяться так: 2:3:4. Знайти градусні і радіанні міри кутів трикутника АВС.

2. Шестірня рівномірно обертається з кутовою швидкістю . Знайти період обертання шестірні.

3. На одиничному колі побудувати кути , , , . Вимірявши довжини відповідних відрізків, визначити з точністю до 0,1 значення 1) ; 2) ; 3) ; 4) ; 5) .

4. Залежність сили змінного струму від часу в електричному колі виражається рівнянням (i – в амперах; t – в секундах). Визначити найбільшу силу струму в колі; його частоту; силу струму вкінці 1-ї, 5-ї і 12-ї секунд. Побудувати графік цієї залежності.

5. Підвішений на пружині вантаж масою 4 г, відведений донизу на 10 см і потім відпущений, здійснює коливальний рух за законом (без врахування тертя): , де s – відстань вантажу від положення рівноваги.

1. Знайти положення вантажу на траєкторії, швидкість, прискорення, напрям руху і діючу силу в момент часу с.

2. Через який найменший від початку руху проміжок часу і в якій точці траєкторії:

а) швидкість руху найбільша і найменша;

б) прискорення найбільше і найменше?

Профільний рівень

1. При яких значеннях m може виконуватися рівність

, якщо ?

2. При яких значеннях параметра a функція має головний період?

3. Довести, що функція спадає на відрізку .

4. Дано функцію . Знайти найбільше і найменше значення функції .

5. Побудувати графік функції .

Додаток Т
Контрольні роботи з теми „Тригонометричні функції”

Додаток Т.1
Тематична контрольна робота з теми „Тригонометричні функції” (час виконання – до 45 хв.)

Рівень стандарту
Базовий рівень вимог СБ

1. Визначити радіанну міру кута .

2. Обчислити значення виразу .

3. Порівняти числа і .

4. Обчислити .

5. Побудувати кут , синус якого дорівнює 0,5.

6. Побудувати графік функції .

Достатній рівень вимог СД

7. Користуючись графіком функції охарактеризувати її за схемою: 1) область визначення; 2) область значень; 3) парність (непарність); 4) періодичність; 5) нулі; 6) проміжки зростання (спадання); 7) точки максимуму (мінімуму); 8) проміжки, де функція додатна (від’ємна).

8. Визначити знак виразу .

9. Знайти найменше і найбільше значення виразу .

Високий рівень вимог СВ

10. Довести, що функція непарна.

11. Знайти область визначення функції .

Академічний рівень
Базовий рівень вимог АБ

1. Спростити вираз .

2. Обчислити а) ; б) .

3. Порівняти з нулем ; .

4. Знайти найменший додатний період функції .

5. Знайти область визначення функції .

6. Побудувати графік функції .

Достатній рівень вимог АД

7. Побудувати графік функції і прочитати її властивості.

8. Знайти нулі функції .

9. Дослідити функцію на парність і непарність .

Високий рівень вимог АВ

10. Визначити, при яких значеннях х функція набуває найменшого і найбільшого значень; знайти ці значення.

11. Величини кутів трикутника відносяться як 8:17:20. Визначити радіанну міру найбільшого з цих кутів.

Профільний рівень

Базовий рівень вимог ПБ

1. Дано функцію . Знайти , , . Чи існують значення , , ?

2. Розмістити у порядку зростання числа , , , , :

3. Обчислити значення виразу .

4. Знайти проміжки знакосталості функції .

5. Чи періодична функція ?

6. Дослідити функцію та побудувати її графік.

Достатній рівень вимог ПД

7. Довести, що функція парна.

8. Яка область визначення функції ?

9. Дослідити на неперервність функцію .

Високий рівень вимог ПВ

10. Побудувати графік функції .

11. Довести, що функція зростає на проміжку .

Додаток Т.2
Теоретична контрольна робота з теми „Тригонометричні функції”
(для профільного рівня)

Час виконання контрольної роботи – до 45 хвилин, її оцінювання здійснюється відповідно до таблиці Т.2.1.

Варіант І

1. Які знаки мають значення функції у кожній координатній чверті?
2. Назвати властивості кривої .
3. За допомогою яких геометричних перетворень можна побудувати графік функції , де а, ω, – дійсні числа?
4. Обґрунтувати області визначення і множини значень тригонометричних функцій , .
5. Дослідити зміну при зростанні числа від 0 до .
6. Довести, що найменшим додатним періодом функції є число .
7. Довести неперервність функції в її області визначення.

Варіант ІІ

1. Сформулювати означення тригонометричних функцій , .
2. Назвати властивості функції .
3. У чому полягає властивість неперервності функції ?
4. Чи можна, спираючись на рівність стверджувати, що є періодом функції ? Відповідь обґрунтувати.
5. Яка кількість точок розриву функції на відрізку ? Точки розриву продемонструвати на графіку функції.
6. Довести властивість парності функції .
7. Довести, що функція зростає на відрізках , .

Таблиця Т.2.1

Шкала оцінювання контрольної роботи

№ завдання	1	2	3	4	5	6	7	Разом

Кількість балів	**1**	**1**	**1**	**1,5**	**1,5**	**3**	**3**	**12**

Додаток У
Математичне дослідження учня на тему „Періодичні функції та їх властивості”

Завдання на математичне дослідження учня на тему „Періодичні функції та їх властивості”.

Дослідження провести за нижченаведеним планом. Підготувати письмовий звіт.

План

1. Означення періодичної функції. Рівносильні означення періодичної функції.

2. Головний період функції.

3. Властивості періодичних функцій.

4. Приклади періодичних функцій.

5. Період складеної функції.

6. Знаходження періоду і головного періоду суми декількох періодичних функцій.

7. Доведення неперіодичності функції.

8. Періодичність тригонометричних функцій.

Фрагмент письмового звіту учня

1. Означення періодичної функції. Рівносильні означення періодичної функції.

Означення 1. Функція f називається періодичною з періодом ______ , якщо для кожного x з її області визначення виконуються дві умови:

а) числа ______ і ______ також належать цій області; б) ______ .

Приклади означень, які рівносильні означенню 1.

Означення 2. Функція f називається періодичною з періодом ______ , якщо для кожного x з її області визначення ______ .

Означення 3. Функція f називається періодичною з періодом ______ , якщо для кожного x з її області визначення числа ______ і ______ також належать цій області, причому ______ .

Означення 4. Функція f називається періодичною з періодом ______ , якщо для кожного x з її області визначення число ______ також належить цій області, причому ______ .

Означення 5. Функція f називається періодичною з періодом ______ , якщо для кожного x з її області визначення число ______ також належить цій області, причому ______ .

Доведемо, наприклад, що означення 2 рівносильне означенню 1.

Доведення. Нехай функція f періодична за означенням 2. Оберемо довільне x з її області визначення ______ . Нехай ______ . Тоді з означення 2 слідує, що ______ і ______ , тобто функція f

визначена в точках і при довільному .

Нехай для функції f виконуються всі вимоги означення 1. Маємо:

. Оскільки аргумент належить , то додавання до цього аргументу періоду функції не змінить її значення, тобто

. Отже, має місце рівність .

2. Головний період функції.

Означення. Найменший додатний період періодичної функції називають головним періодом цієї функції.

Для періодичної функції справедливі наступні твердження.

1. Якщо функція періодична та відомо, що вона не має додатного періоду, який менший деякого числа , то вона має головний період.

2. Нехай неперервна періодична функція задана на множині і не є сталою. Тоді вона має головний період.

3. Якщо періодична функція має головний період, то всі її періоди кратні головному періоду.

4. Якщо функція періодична з головним періодом T0, то кожна з функцій , , , де , , , , також періодична з головним періодом T0.

5. Якщо функція періодична з головним періодом T0, то

функція , де , , періодична з головним періодом .

6. Якщо функція періодична з головним періодом T0, то функція , де , , , також періодична з

головним періодом .

Приклади. 1. , . 2. Для сталої функції ,

, функції Діріхле головного періоду не існує.

3. Властивості періодичних функцій.

1. Якщо точка x0 належить області визначення періодичної функції з періодом T, то її області визначення належать і всі точки , .

2. Періодична функція набуває кожного свого значення в нескінченній кількості значень аргументу, серед яких є як завгодно великі за абсолютною величиною додатні та від'ємні числа. Зокрема, періодична

функція не може зростати або спадати на всій області визначення.

3. Для періодичної функції , визначеної та неперервної на всій числовій прямій, існує таке число M>0, що нерівність .З

виконується для всіх **.**

4. Якщо T1 і T2 – періоди функції , причому , то

– період функції .

Додаток Ф

Анкета для вчителів

Вкажіть: категорію, стаж роботи, профіль класу, в якому працюєте.

1. Який організаційно-методичний інструментарій (методи, організаційні форми, засоби) використовуєте з метою диференціації навчання на уроках
алгебри і початків аналізу?

2. Чи здійснюєте диференціацію навчання на етапі: мотивації навчальної діяльності, актуалізації опорних знань, вивчення теоретичного матеріалу, формування навичок та умінь, контролю результатів навчальної діяльності учнів?

3. З якими труднощами організаційного, методичного характеру зустрічаєтесь у процесі диференційованого навчання тригонометричного матеріалу?

4. Назвіть основні причини низького рівня знань учнів з тригонометрії .

5. Як часто пропонуєте учням задачі міжпредметного, прикладного характеру, які розв'язуються із застосуванням тригонометрії?

Варіанти відповіді: пропоную регулярно; пропоную інколи; пропоную рідко; не пропоную.

6. Чи використовуєте, і як часто, засоби ІКТ у процесі навчання тригонометричного матеріалу?

7. Чи в достатній мірі наповнені шкільні підручники з алгебри і початків аналізу прикладними задачами на застосування тригонометричного матеріалу?

8. Як часто використовуєте в навчанні тригонометричного матеріалу науково-популярну, спеціальну літературу?

Варіанти відповіді: регулярно; інколи; дуже рідко; не використовую.

9. Як часто використовуєте в якості засобу мотивації вивчення тригонометричного матеріалу його зв'язок з життям, професійною діяльністю сучасної людини?

Варіанти відповіді: регулярно; інколи; дуже рідко; не використовую.

10. Чи є доцільним посилення ролі тригонометричного матеріалу в математичній освіті сучасного учня?

Результати анкетування вчителів

1. Вчителі назвали такий організаційно-методичний інструментарій, який вони використовують з метою диференціації навчання на уроках алгебри і початків аналізу:

- диференційовані завдання – 76%;

- диференційоване опитування – 44%;

- диференційована допомога – 17%;

- групова робота учнів – 12% вчителів.

2. Вчителі здійснюють диференціацію навчання на етапах:

- мотивації навчальної діяльності – 5%;

- актуалізації опорних знань – 11%;

- вивчення теоретичного матеріалу – 21%;

- формування навичок та умінь – 86%;

- контролю результатів навчальної діяльності учнів – 91% вчителів.

3. У процесі диференційованого навчання тригонометричного матеріалу вчителі зустрічаються з такими труднощами організаційного та методичного характеру:

- обмаль методичної літератури з питань диференціації навчання тригонометричного матеріалу – 92%;

- не вистачає дидактичних матеріалів – 81%;

- не вистачає часу на уроці для здійснення диференціації навчання – 23% вчителів.

4. До основних причин низького рівня знань учнів з тригонометрії вчителі віднесли:

- формалізацію знань – 82%;

- слабку попередню математичну підготовку – 73%;

- низький рівень розвитку навичок та умінь тотожних перетворень – 56%;

- складність тригонометричного матеріалу – 46% вчителів.

5. Задачі міжпредметного, прикладного характеру, які розв'язуються із застосуванням тригонометрії, вчителі пропонують:

регулярно – 5%; рідко – 64%;

інколи – 21% ; не пропонують – 10% вчителів.

6. У процесі навчання тригонометричного матеріалу лише 37% вчителів систематично використовують засоби ІКТ; 63% вчителів рідко або взагалі не використовують ці засоби.

7. Відповідаючи на це запитання, вчителі вважають, що шкільні підручники з алгебри і початків аналізу

- достатньо – 14%;

- не достатньо – 86%

наповнені прикладними задачами на застосування тригонометрії.

8. Науково-популярну, спеціальну літературу в навчанні тригонометричного матеріалу вчителі використовують:

регулярно – 13%; дуже рідко – 47%;

інколи – 22%; не використовують – 18% вчителів.

9. Зв'язок тригонометричного матеріалу з життям, професійною діяльністю сучасної людини як засіб мотивації навчання вчителі використовують:

регулярно – 7%; дуже рідко – 45%;

інколи – 36%; не використовують – 12% вчителів.

10. На поставлене запитання вчителі відповіли так:

- посилення ролі тригонометричного матеріалу доцільне – 15%;

- посилення ролі тригонометричного матеріалу доцільне на академічному та профільному рівнях вивчення математики – 74%;

- посилення ролі тригонометричного матеріалу в математичній освіті сучасного учня не доцільне – 6%;

- не визначились із відповіддю 5% опитаних.

Додаток Х
Статистичне опрацювання експериментальних даних за допомогою критерію Пірсона

	профільний рівень										
	99	95	9405	14	33	3267	1330	1937	3751969	47	79829,12766
	99	95	9405	45	37	3663	4275	-612	374544	82	4567,609756
	99	95	9405	40	25	2475	3800	-1325	1755625	65	27009,61538
∑											111406,35
Тст											11,85
	академічний рівень										
	102	100	10200	32	56	5712	3200	2512	6310144	88	71706,18182
	102	100	10200	51	34	3468	5100	-1632	2663424	85	31334,4
	102	100	10200	19	10	1020	1900	-880	774400	29	26703,44828
∑											129744,03
Тст											12,72
	рівень стандарту										
	96	94	9024	51	71	6816	4794	2022	4088484	122	33512,16393
	96	94	9024	36	17	1632	3384	-1752	3069504	53	57915,16981
	96	94	9024	9	6	576	846	-270	72900	15	4860
∑											96287,33
Тст											10,67

Додаток Ц

Анкета для учнів

1. Чи цікаво Вам вивчати тригонометричний матеріал?

2. Чи необхідне вивчення тригонометричного матеріалу для:

а) успішного вивчення фізики, геометрії?

б) опанування Вашою майбутньою професійною діяльністю?

в) збагачення загальної культури людини?

Варіанти відповіді: так, ні, не знаю.

3. Як часто на уроках приділялась увага практичному значенню тригонометричного матеріалу?

Варіанти відповіді: часто, інколи, рідко, увага не приділялась.

4. Наведіть якомога більшу кількість прикладів реальних явищ і процесів, які моделюються за допомогою тригонометричних функцій.

5. Чи відчутним був зв'язок вивчення тригонометричного матеріалу з фізикою та геометрією?

6. Чи відчутним був зв'язок вивчення тригонометричного матеріалу з профільними навчальними предметами (які Ви вивчаєте на рівні профільної підготовки)? Якщо так, то назвіть ці предмети.

7. Чи здійснювався на окремих етапах вивчення теми поділ класу на групи?

8. Чи вивчався додатковий матеріал з тригонометрії, не передбачений підручником?

Варіанти відповіді: так, ні, не знаю.

9. В якій мірі вчитель на уроках здійснював урахування Вашого темпу навчання, попередньої математичної підготовки, здібностей до математики ?

Варіанти відповіді: достатньо, частково, не враховував.

10. Чи хотіли б Ви продовжити вивчення тригонометричного матеріалу?

Варіанти відповіді: так, ні.

Результати анкетування учнів наведені в таблиці Ц.1, де „Г"– класи гуманітарних; „П" –природничих та універсального профілів; „М"–математичного та фізико-математичного профілів.

Таблиця Ц.1

Результати анкетування учнів

№ запитання	Експериментальні класи	Контрольні класи

1.	Так: 82% (Г); 95% (П); 96% (М). Ні: 10% (Г); 2% (П); 0% (М). Не визначились з відповіддю: 8% (Г); 3% (П); 4% (М).	Так: 17% (Г); 21% (П); 33% (М). Ні: 64% (Г); 51% (П); 17% (М). Не визначились з відповіддю: 19% (Г); 28% (П); 50% (М).
2.	А) так: 100% (Г); 100% (П); 100% (М).	Так: 55% (Г); 80% (П); 86% (М). Ні: 4% (Г); 2% (П); 0% (М). Не знаю: 41% (Г); 18% (П); 14% (М).
	Б) так: 36% (Г); 61% (П); 83% (М). Ні: 61% (Г); 37% (П); 17% (М). Не знаю: 3% (Г); 2% (П); 0% (М).	Так: 3% (Г); 32% (П); 57% (М). Ні: 80% (Г); 46% (П); 17% (М). Не знаю: 17% (Г); 22% (П); 26% (М).
	В) так: 100% (Г); 100% (П); 100% (М).	Так: 52% (Г); 63% (П); 48% (М). Ні: 12% (Г); 15% (П); 7% (М). Не знаю: 36% (Г); 22% (П); 45% (М).

Продовження табл. Ц.1

3.	Часто: 95% (Г); 98% (П); 100% (М). Інколи: 5% (Г); 2% (П); 0% (М).	Часто: 0% (Г); 8% (П); 7% (М). Інколи: 44% (Г); 57% (П); 64% (М). Рідко: 54% (Г); 35% (П); 29% (М). Увага не приділялась: 2% (Г); 0% (П); 0% (М)
4.	Учні запропонували: 1 приклад: 11% (Г); 2% (П); 0% (М). 2 приклади: 25% (Г); 7% (П); 18% (М). 3 і більше прикладів: 64% (Г); 91% (П); 82% (М). не змогли навести приклад: 0% (Г); 0% (П); 0% (М).	Учні запропонували: 1 приклад: 32% (Г); 26% (П); 40% (М). 2 приклади: 15% (Г); 36% (П); 20% (М). 3 і більше прикладів: 5% (Г); 25% (П); 32% (М). не змогли навести приклад: 48% (Г); 13% (П); 8% (М).
5.	Так: 89% (Г); 100% (П); 100% (М).	Так: 37% (Г); 46% (П); 51% (М). Ні:

	Ні: 11% (Г); 0% (П); 0% (М).	63% (Г); 54% (П); 49% (М).
6.	Відчутним був зв'язок тригонометричного матеріалу з історією – 100% (Г); фізикою – 100% (П), 100% (М).	Відчутним був зв'язок тригонометричного матеріалу з історією – 16% (Г); фізикою – 45% (П), 56% (М). Зв'язок тригонометричного матеріалу з профільними предметами не відчувався: 84% (Г); 55% (П); 44% (М).

Продовження табл. Ц.1

7.	Так: 100% (Г); 100% (П); 100% (М).	Так: 10% (Г); 12% (П); 17% (М). Ні: 90% (Г); 88% (П); 83% (М).
8.	Так: 97% (Г); 98% (П); 100% (М). Не знаю: 3% (Г); 2% (П); 0% (М).	Так: 31% (Г); 31% (П); 37% (М). Ні: 55% (Г); 63% (П); 56% (М). Не знаю: 14% (Г); 6% (П); 7% (М).
9.	Достатньо: 78% (Г); 76% (П); 82% (М). Частково: 22% (Г); 24% (П); 18% (М).	Достатньо: 6% (Г); 7% (П); 11% (М). Частково: 56% (Г); 54% (П); 46% (М). Не враховував: 38% (Г); 39% (П); 43% (М).
10.	Так: 73% (Г); 84% (П); 94% (М). Ні: 27% (Г); 16% (П); 6% (М).	Так: 16% (Г); 19% (П); 51% (М). Ні: 84% (Г); 81% (П); 49% (М).