ІНСТИТУТ ПЕДАГОГІКИ НАПН УКРАЇНИ

На правах рукопису

ВАШУЛЕНКО Ольга Петрівна

УДК 373. 5. 016 : 514

МЕТОДИЧНІ ЗАСАДИ ПОБУДОВИ СИСТЕМИ ВПРАВ З ГЕОМЕТРІЇ В ОСНОВНІЙ ШКОЛІ

13.00.02 – теорія та методика навчання (математика)

ДИСЕРТАЦІЯ
на здобуття наукового ступеня
кандидата педагогічних наук

Науковий керівник:
БУРДА Михайло Іванович,
доктор педагогічних наук, професор,
член-кореспондент НАПН України

Київ – 2010

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Сучасне суспільство характеризується динамічними змінами в усіх сферах життя. Ці зміни відбуваються завдяки багатьом чинникам, які безпосередньо впливають на розвиток освітнього простору. У Концепції загальної середньої освіти зазначено, що стратегічною метою школи є життєва і соціальна компетентність учнів, яка передбачає їхній розвиток і саморозвиток на основі якомога повнішого використання внутрішнього потенціалу особистості. Завдання навчання і виховання підпорядковані головній меті, виступають як загальні форми, засоби її досягнення. За таких умов відбувається глибоке переосмислення вітчизняного і світового досвіду визначення цілей і змісту освіти, побудови відповідних методичних систем з усіх навчальних предметів, у тому числі й з математики.

Нині функція шкільної математичної освіти полягає у формуванні в учнів математичних знань як необхідної умови їхньої повноцінної життєдіяльності в сучасному суспільстві. Оволодіння учнями системою математичних знань, навичок, умінь є базою для реалізації зазначених цілей, засобом і метою неперервної освіти протягом життя.

Реформування освітньої системи передбачає зміну, з одного боку, вимог до навчальних досягнень учнів, а з іншого, – ставлення їх до знань, їхніх навчальних мотивів. Провідною ідеєю Концепції загальної середньої освіти і Державного стандарту базової і повної середньої освіти в Україні є рівнева диференціація навчання й орієнтація його результатів на навчальні можливості учнів. Пріоритетними є активні й інтерактивні методи, новітні технології навчання. Актуальним є вирішення методичної проблеми забезпечення рівня загальноосвітньої підготовки учнів з математики, зазначеного Державним стандартом базової і повної середньої освіти, а також створення умов для досягнення вищих результатів тими учнями, які цього прагнуть.

Геометрія як навчальний предмет має широкі можливості для інтелектуального розвитку школярів і впливу на їхню особистість. Це обумовлюється генетичними зв'язками геометричної науки з практикою, перетворювальною діяльністю і загальнокультурним розвитком людини. Навчання геометрії передбачає засвоєння учнями системи відповідних знань, умінь і практичних навичок, що сприяє розвитку їхнього логічного мислення, пам'яті, уваги, інтуїції, умінь аналізувати, класифікувати, узагальнювати і т. ін.

Водночас у шкільній практиці спостерігається певне зниження інтересу учнів до вивчення систематичного курсу геометрії, що є причиною погіршення загальної математичної освіти. Про це свідчать результати підсумкової державної атестації випускників загальноосвітніх шкіл, зовнішнього незалежного оцінювання, міжнародних порівняльних досліджень навчальних досягнень школярів з математики (TIMSS – 2007). Зокрема, виявлено невміння застосовувати набуті знання і навички з геометрії на практиці, доводити істинність геометричних тверджень, аргументувати свої міркування, низький рівень сформованості просторових уявлень і т. ін. Однією з причин такого явища є недостатня увага традиційної методики навчання геометрії до виявлення і розвитку особистісних якостей школярів.

Результати психологічних досліджень свідчать про те, що умовою засвоєння учнями певного змісту є презентація його в якості предмета їхньої діяльності, зокрема у вигляді задачі, яка спонукає до активних пізнавальних дій. Учень добре усвідомлює лише те, що виступає як прямий предмет і як мета його діяльності. Тому свідомість учіння передбачає, з одного боку, виконання школярами відповідних дій з навчальним матеріалом (а не просто його спостереження і прослуховування), а з другого – перетворення матеріалу, що засвоюється, на пряму мету цих дій, тобто на розв'язування навчальних задач. Задача, що є засобом засвоєння знань, умінь і навичок, способом мотивації, організації й управління навчальною пізнавальною діяльністю учнів, однією з форм реалізації методів навчання, засобом зв'язку теорії з практикою, називається *вправою*. Вправа є вагомим елементом процесу навчання, тому *основним засобом організації навчальної діяльності учнів з геометрії в основній школі є цілеспрямована система вправ.*

З огляду на зазначене реалізація диференційованого й особистісного підходів до навчання геометрії в основній школі цілком покладається на відповідну систему вправ. Це зумовлено тим, що геометричний зміст для основної школи розрахований на рівневу диференціацію навчання. Програми з геометрії містять перелік умінь на кожному з рівнів, проте вимоги, задані переліком цих умінь, допускають досить широке тлумачення. Важливою методичною проблемою є фіксація рівнів програмних вимог, а засобом їх конкретизації є система вправ, диференційованих за рівнями. Таким чином, кожен учень має змогу вибрати відповідний рівень засвоєння ним геометричного матеріалу, який відповідає його можливостям, і водночас визначати рівень власних навчальних досягнень.

Спостереження за процесом навчання геометрії в основній школі, бесіди з учителями свідчать про відсутність обґрунтованої системи добору навчальних вправ. Геометричні вміння учнів формуються в основному шляхом колективного розв’язування відносно складних геометричних задач. Учителі, з одного боку, не враховують і не завжди адекватно використовують дидактичні функції вправ у певних навчальних ситуаціях, а з іншого – не враховують психологічних особливостей формування в учнів геометричних умінь. Комп’ютер як засіб наочності на уроках геометрії досі майже не використовується.

Аналіз систем вправ у діючих підручниках з геометрії для учнів 7 – 9 класів [2, 3, 4, 12, 13, 26, 27, 28, 29, 70] свідчить про існування різних методичних підходів до їх конструювання. Особливо це стосується реалізації етапів навчальної діяльності учнів, методів навчання, принципів відбору геометричного змісту (диференційованої реалізованості, наступності, прикладної спрямованості і ін.) Укладання збірників задач і вправ з геометрії для учнів, методичних посібників для вчителів має переважно прагматичний характер, часто зумовлений суб’єктивними підходами, недостатнім дидактичним і психолого-педагогічним обґрунтуванням.

З огляду на це **актуальною** є розробка методики побудови системи вправ з урахуванням сучасних вимог до інтелектуального розвитку та результатів навчання учнів геометрії в основній школі. Це зумовило вибір теми дисертаційного дослідження: **„Методичні засади побудови системи вправ з геометрії в основній школі”**.

Проблема добору системи навчальних вправ багатоаспектна. Для її дослідження потрібно з’ясувати зміст, структуру, класифікації компонентів системи вправ, їх функції у процесі навчання геометрії, визначити принципи добору системи вправ з урахуванням дидактичних принципів навчання, сучасних цілей та вимог до результатів навчання геометрії в основній школі, особливостей навчальної пізнавальної діяльності учнів відповідної вікової категорії, аналізу різних методичних підходів до структурування систем математичних вправ.

Питання про роль і функції вправ у навчанні математики досліджувалися психологами, дидактами, методистами протягом багатьох років. О. М. Астряб [6, 7], Г. П. Бевз [14], В. Г. Бевз [11], В. М. Брадіс [19], М. І. Бурда [21, 22, 24, 25], Н. Я. Віленкін [34], Я. Й. Грудьонов [47, 48], П. М. Ерднієв [192 – 196], М. Я. Ігнатенко [68], Д. В. Клименченко [80], Ю. М. Колягін [83 – 87], З. П. Мотова [108], К. І. Нєшков [109], В. О. Онищук [117], Д. Пойя [125 – 127], Г. І. Саранцев [136 – 141], А. Д. Семушин [109], З. І. Слєпкань [146 – 148], А. А. Столяр [153], С. Б. Суворова [154], Н. А. Тарасенкова [160, 161], Т. І. Титова [165], Л. М. Фрідман [169 – 177], І. М. Шапіро [187], В. О. Швець [188, 189], С. І. Шохор-Троцький [191] та ін. уточнювали самі поняття „завдання”, „задача” і „вправа”, пропонували різні їх класифікації, аналізували мислительну діяльність учнів у процесі розв’язування задач, визначали функції вправ та їх роль у формуванні умінь і навичок учнів. Результати досліджень залежностей між психічними і педагогічними процесами, закономірностей розумових процесів, вікових особливостей учнів відображено в працях вітчизняних і зарубіжних психологів Г. О. Балла [9, 10], Д. М. Богоявленського [18], П. Я. Гальперіна [166], В. В. Давидова [52, 53], О. М. Кабанової-Меллер [72 – 74], Г. С. Костюка [90, 91], В. О. Крутецького [92], О. М. Леонтьєва [95, 96], Ю. І. Машбиця [103], Н. О. Менчинської [18, 105], М. Л. Смульсон [151], Л. М. Фрідмана [169 – 177], П. А. Шеварьова [190].

Окремі дослідження стосуються питань побудови системи математичних вправ та дидактико-методичних вимог до них. Зокрема, Г. І. Саранцевим досліджено теоретичну модель системи математичних вправ; виділено її основні компоненти, виявлено закономірності її функціонування в процесі навчання [141]. Я. Й. Грудьонов охарактеризував психологічні основи побудови системи вправ з математики і, спираючись на роботи П. А. Шеварьова, довів, що сам набір вправ, без урахування психологічних закономірностей засвоєння знань, є причиною виникнення в учнів помилкових асоціацій [48]. В. А. Черкасов обґрунтував дидактичні засади побудови системи вправ на основі аналізу змісту понять “процес навчання” і “метод навчання” [185]. В. Ф. Чучуков досліджував різні впливи на ефективність управління навчальним процесом і розробив основні дидактичні вимоги до побудови системи диференційованих завдань [186]. Логічну структуру системи навчальних задач (на матеріалі курсу алгебри середньої школи) побудувала М. І. Денисова [56]. У дослідженні С. Б. Суворової [154] в основу пропонованої системи вправ (на матеріалі алгебри) покладено етапи навчальної діяльності учнів і вимоги до результатів засвоєння ними відповідного змісту. В. А. Жаров обґрунтував деякі методичні принципи побудови системи геометричних задач [61], призначених для засвоєння учнями основних ідей і методів геометрії та вироблення в них необхідних умінь і навичок. В. Г. Бевз розроблено психолого-педагогічні та методичні вимоги до системи стереометричних вправ для загальноосвітньої школи, реалізація якої сприяє досягненню всіма учнями рівня обов’язкової підготовки зі стереометрії і створенню умов для досягнення вищих результатів учнями, які цього прагнуть [11]. Дослідження Н. А. Сяської стосується реалізації функцій задач у навчанні планіметрії [155].

Згадані вище дослідження стосуються формування системи вправ для вирішення окремих дидактичних і методичних питань навчання математики. Більшість із них не відповідають вимогам нового стандарту математичної освіти, або виконано на матеріалі математики, алгебри, стереометрії. Перехід освіти на якісно новий рівень вимагає нових технологій організації навчання, які б забезпечили поряд із високим рівнем теоретичної і практичної підготовки з математики переорієнтацію навчально-виховного процесу на особистість школяра, формування в нього відповідної математичної компетенції. За таких умов актуальним є комплексне дослідження факторів впливу на ефективність результатів навчання геометрії, серед яких ми виокремлюємо: реалізацію і вдосконалення методів навчання; організацію різних видів пізнавальної діяльності учнів; дотримання дидактичних принципів, вимог диференційованого і компетентнісного підходу до навчання; врахування психологічних особливостей школярів відповідної вікової групи.

Зв'язок з науковими програмами, планами, темами.

Обраний напрям дисертаційного дослідження пов'язаний з темою науково-дослідної роботи лабораторії математичної і фізичної освіти Інституту педагогіки НАПН України „Науково-методичні засади відбору і реалізації змісту математичної освіти в основній школі" (номер державної реєстрації 0102U000136). Тему дослідження затверджено вченою радою Інституту педагогіки НАПН України (протокол № 9 від 21.09.2000 р.) й узгоджено в Міжвідомчій раді з координації наукових досліджень з педагогічних і психологічних наук в Україні (протокол № 6 від 26.09.2000 р.)

Мета дослідження – розробити, теоретично обґрунтувати й експериментально перевірити методичні засади побудови системи вправ з геометрії в основній школі.

Об'єктом дослідження є процес навчання геометрії учнів основної школи.

Предмет дослідження: система вправ як засіб організації навчальної діяльності учнів з геометрії в основній школі.

Для досягнення мети дослідження було поставлено такі **завдання**:

1. З'ясувати стан розробки проблеми у науково-методичній літературі і в практиці навчання геометрії учнів основної школи.
2. Визначити і теоретично обґрунтувати принципи добору системи вправ з геометрії в основній школі та методичні вимоги до їх реалізації; розробити систему вправ з геометрії в основній школі, дотримуючись визначених принципів.
3. Розробити методику організації навчальної діяльності учнів засобом побудованої системи вправ.
4. Експериментально перевірити ефективність розробленої методики побудови системи вправ і запропонувати методичні рекомендації щодо побудови підсистем геометричних вправ різного дидактичного призначення.

Для розв'язання поставлених завдань використано такі **методи дослідження**:

- *теоретичні*: системний та порівняльний аналіз психологічної, педагогічної і навчально-методичної літератури з проблеми дослідження (уточнення понятійного апарату, з'ясування змісту, структури, класифікацій геометричних вправ, закономірностей вироблення геометричних умінь) (1.1, 1.2, 1.3 тут і далі – підрозділи дисертації); моделювання навчальних ситуацій (обґрунтування принципів добору системи вправ, їх функцій у навчанні геометрії) (2.1 – 2.4);
- *експериментальні*: констатувальний, пошуковий, формувальний експерименти (1.4, 2.5), методи математичної статистики (підтвердження ефективності розробленої методики побудови системи геометричних вправ) (2.5);
- *емпіричні*: спостереження, анкетування, бесіди з учнями і вчителями, вивчення і узагальнення передового досвіду вчителів (визначення рівнів складності вправ, їх послідовності у системі з урахуванням цілей навчання) (1.4, 2.5); констатувальний і формувальний експерименти (з'ясування підходів і недоліків традиційної методики добору вправ, уточнення принципів їх добору, апробація розробленої системи вправ) (1.4, 2.5).

Методологічною основою дослідження є:

- системний підхід як методологічний принцип моделювання, організації і проведення наукових досліджень;
- теорії: пізнання, розвивального навчання;
- концепції: діяльнісного, особистісно орієнтованого та компетентнісного підходів до навчання;
- основні положення психології, дидактики і методики про закономірності навчального процесу.

Дослідження ґрунтується на основних положеннях Закону України „Про освіту" [206], Державної національної програми „Освіта" („Україна XXI століття") [57], Національної доктрини розвитку освіти України у XXI столітті [207], Концепції загальної середньої освіти (12-річна школа) [208], Концепції шкільної математичної освіти в Україні [89], Державного стандарту базової і повної середньої освіти в Україні [58].

Наукова новизна одержаних результатів дослідження полягає в тому, що:

- *вперше* визначено, теоретично й експериментально обґрунтовано принципи побудови системи вправ з геометрії в основній школі, розроблено методичні вимоги до їх реалізації, які відповідають психолого-дидактичним закономірностям формування геометричних знань, умінь і навичок, змісту, операційному складу і етапам навчальної діяльності учнів, рівням програмних вимог до навчальних досягнень. Уточнено зміст, структуру і класифікації геометричних вправ. Розроблено систему геометричних вправ, яка включає підсистеми різного методичного призначення, з урахуванням цілей навчання і виділених змістово-методичних ліній курсу геометрії;

- *удосконалено* методику організації навчальної діяльності учнів основної школи засобом відповідної системи вправ. Установлено, що: реалізація функцій геометричних вправ у навчальному процесі здійснюється шляхом варіювання видів навчальної діяльності; виконання учнями розроблених практичних робіт з геометрії, вправ з використанням електронних засобів навчального призначення сприяє ефективному засвоєнню понять, способів діяльності, вивченню і дослідженню властивостей геометричних фігур; включення вправ за готовими малюнками до системи геометричних вправ дає змогу раціонально використовувати навчальний час, реалізовувати конкретну мету навчання;

– *подальшого розвитку набули*: обґрунтування психолого-педагогічних передумов засвоєння учнями основної школи геометричних знань з метою їхнього інтелектуального розвитку; застосування системного і комплексного підходів у дослідженні системи вправ як педагогічного явища.

Практичне значення дослідження становлять:

– розробка й апробація методики побудови системи вправ з геометрії в основній школі, що реалізує сучасні вимоги до організації навчальної діяльності учнів і їхньої загальноосвітньої підготовки, враховує психологічні особливості засвоєння геометричних знань підлітками;

– розробка практичних робіт і сценаріїв електронних динамічних моделей з геометрії з метою активізації різних видів навчальної діяльності учнів з урахуванням особливостей їхнього мислення (співвідношення абстрактного і наочно-образного);

– побудова системи вправ для підручників з геометрії [3], [4], навчально-методичних посібників [30], [63], [64], [65], електронних засобів навчального призначення [16], [37], [38], [39].

Результати дослідження можуть бути використані вчителями математики основної школи, викладачами вищих педагогічних навчальних закладів, авторами підручників, навчальних і методичних посібників.

Перевірка і впровадження результатів дослідження здійснювалась у процесі експериментального навчання математики учнів 7 – 9 класів гімназії № 178 Солом'янського району м. Києва (довідка № 11 від 28.01.10), Бучанської загальноосвітньої школи І – ІІІ ступенів (довідка № 187 від 09.12.09), ЗОШ № 2 м. Вишгорода Київської області (довідка № 33 від 27.01.10), Великодимерського НВК (довідка № 218 від 03.02.10), НВК № 2 м. Хмельницького (довідка № 196 від 26.11.09), Новопетрівської загальноосвітньої школи І – ІІІ ступенів № 1 Вишгородського району Київської області (довідка № 07 від 15.01.10). Експериментом будо охоплено 427 учнів загальноосвітніх шкіл.

Особистий внесок здобувача у розробку теми дослідження полягає у: дидактичному і психолого-педагогічному обґрунтуванні принципів добору системи вправ з геометрії в основній школі, визначенні методичних вимог до реалізації цих принципів у навчальному процесі; розробці системи геометричних вправ; плануванні та проведенні педагогічного експерименту, аналізі результатів експериментального дослідження; формулюванні висновків і пропозицій щодо впровадження результатів у шкільну практику.

У роботах, опублікованих у співавторстві, особистий внесок здобувача полягає у доборі різнорівневих планіметричних завдань, розробці сценаріїв динамічних моделей і анімацій, методичних рекомендацій щодо використання електронних засобів навчального призначення.

Апробація основних результатів дослідження відбувалася протягом 2000 – 2008 років. Основні результати дослідження доповідалися і отримали схвалення на міжнародній науково-практичній конференції “Інформаційно-комунікаційні технології навчання” (Умань, 2008); всеукраїнській науково-практичній конференції “Теорія і практика використання сучасних інформаційних технологій в навчальному процесі загальноосвітньої школи (на прикладі природничо-математичних дисциплін)” (Хмельницький, 2009), всеукраїнських науково-методичних конференціях „Проблеми математичної освіти” (Черкаси, 2005), „Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики”, присвяченої 170-й річниці НПУ ім. М.П.Драгоманова, 125-й річниці професора О.М.Астряба, 70-й річниці фізико-метематичного факультету (Київ, 2004); науково-методичних конференціях: “Використання інформаційно-комунікаційних технологій при викладанні фізики та математики” (Вишгород, 2006), “Сучасні технології навчання фізики, математики та астрономії у 12-річній школі” (Вишгород, 2007); науково-практичному семінарі “Комп’ютерна підтримка навчання математики та фізики в загальноосвітній школі” (Вишгород, 2007); звітних наукових конференціях Інституту педагогіки НАПН України “Зміст і технології шкільної освіти” (Київ, 2004 – 2008).

Публікації. Основні положення і результати дослідження знайшли відображення у 21 наукових, навчальних і методичних працях. З них: 10 у виданнях, затверджених ВАК України (9 з яких є одноосібними), 4 у наукових матеріалах і тезах конференцій, 3 навчально-методичних посібники (один з яких є одноосібним), 4 електронних засоби навчального призначення (розробка сценаріїв у співавторстві).

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, двох розділів, висновків до розділів, загальних висновків, списку використаних джерел, 12 додатків на 30 сторінках. Загальний обсяг дисертації становить 241 сторінку, з них основного змісту – 195 сторінок. У роботі вміщено 86 малюнків, 16 таблиць. Список використаних джерел містить 208 найменувань, серед яких 5 – іншомовні.

Розділ 1
ПРЕДМЕТ І ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Зміст, структура, класифікації геометричних вправ

Будь-яка навчальна діяльність спрямована на засвоєння навчального матеріалу. Психологами доведено, що зміст навчання стає предметом діяльності, якщо він постає у вигляді задачі, яка стимулює і спрямовує активність учнів. Тому задачі є одним із основних засобів організації навчальної діяльності.

Розв’язування задач у вивченні математики є як метою, так і засобом навчання. Тому відбір і застосування задач – одна із основних проблем дидактики і окремих методик. Вирішення методичних питань застосування задач у навчанні буде неповним без аналізу змісту, структури і типів тих задач, які використовуються в процесі навчання.

Різні аспекти змісту поняття “задача” взагалі і “математична задача” зокрема досліджувались у роботах психологів, дидактів і методистів: Г. А. Балла [9, 10], В. Г. Бевз [11], Г. П. Бевза [14], М. І. Бурди [21 – 25], Л. Л. Гурової [50], М. А. Данилова [55], П. М. Ерднієва [192 – 196], А. Ф. Єсаулова [197], М. Я. Ігнатенка [68], Ю. М. Колягіна [83 – 87], Л. М. Лоповка [99, 100], В. О. Онищука [117], Д. Пойа [125 – 127], О. І. Скафи [144, 145], З. І. Слєпкань [146 – 148], А. А. Столяра [153], І. Ф. Тесленка [163, 164], Л. М. Фрідмана [169 – 177] та інших.

Якщо термін “задача” у навчанні математики трактувати досить широко (зокрема, віднесення до задач будь-якої вправи на обчислення, засвоєння змісту або доведення теореми, встановлення тих чи інших ознак деякого поняття та відбір серед них тих, що характеризують дане поняття і т. ін.), то стане зрозуміло, що вивчати математику – означає розв’язувати задачі. Вирішуючи питання про те, які завдання і в якій послідовності слід пропонувати учням під час вивчення шкільного курсу математики і, зокрема, геометрії, потрібно уточнити зміст понять “задача” і “вправа”.

У психологічній і методичній літературі не існує єдиного погляду на поняття "*задача.*" Різні автори по-різному підходять до питання про відношення між суб'єктом і задачею. Сучасні підходи до поняття *задача"* можна об'єднати у дві групи в залежності від того, до яких систем застосовують це поняття. З одного боку задача розглядається як ситуація зовнішньої діяльності, яку можна описати незалежно від суб'єкта, що здійснює діяльність (Л. М. Фрідман [170], О. М. Матюшкін [102] і ін.) З іншого боку, задача розглядається як суб'єктивне, психологічне відображення тієї зовнішньої ситуації, в якій відбувається цілеспрямована діяльність суб'єкта (Ю. М. Колягін [83, 84], Г. О. Балл [9, 10], О. М. Леонтьєв [96] і. ін.). Задачі привертають увагу дидактів і психологів тільки тому, що вони є об'єктом мислительної діяльності людини.

У наш час чималого значення надається методам навчання, які забезпечують засвоєння не лише готових знань, а й способів цього засвоєння, створення педагогічних ситуацій, які стимулюють самостійну роботу учнів, їхню пізнавальну діяльність. У 60-х роках минулого століття такий дидактичний підхід отримав назву "проблемне навчання". З'явились дослідження, у яких поняття *задачі* описувалось через поняття *проблемної ситуації*.

Л. М. Фрідман визначає задачу як знакову модель *проблемної ситуації*, яка містить у собі такі компоненти: діючий *суб'єкт*, *об'єкт* його діяльності, *перешкода* на шляху здійснення мети його діяльності. Перешкода може бути різною: це і нестача або невідповідність знань, засобів та способів їх застосування, і необхідність виконати якісь невідомі дії для досягнення мети або зробити вибір між кількома об'єктами і т. ін. Але для того, щоб суб'єкт "увійшов" у проблемну ситуацію потрібно, щоб він усвідомив, помітив цю перешкоду і захотів подолати її. Тільки за таких умов у нього виникає активна мислительна діяльність. Він намагається децентрувати ситуацію, вийти за її межі, що дає можливість детально проаналізувати ситуацію, виявити всі її складові, зв'язки та відношення між ними, характер та особливості перешкоди. У результаті такого аналізу суб'єкт моделює проблемну ситуацію в *задачу* за допомогою знаків деякої природної чи штучної мови [170].

На відміну від проблемної ситуації, яка обов'язково пов'язана із суб'єктом, задача є знаковим об'єктом, який можна передати іншому суб'єкту. Крім цього, задачі можна складати, змінювати, переформульовувати.

Коли суб'єкт отримує задачу, вона стає для нього тим об'єктом, на який спрямовується діяльність суб'єкта. Якщо *суб'єкту* не вдається застосувати знайомий спосіб, то він потрапляє в нову проблемну ситуацію, *об'єктом* якої є задача, а *перешкодою* – невідомий спосіб її розв'язання [170] .

Іншими словами, проблемна ситуація не сама породжує задачу, а за активної участі суб'єкта, який вбачає у даній ситуації проблемну.

Ю. М. Колягін провів детальний аналіз досліджень спеціалістів різних галузей науки (головним чином, психологів, кібернетиків, дидактів), у яких наведено чимала кількість різних означень поняття задачі [83]. Встановлено, що кожне з наявних означень є моделлю поняття задачі, виконаною на різних рівнях чіткості, строгості і явності, але такою, що задовольняє конкретну мету того чи іншого дослідника. Огляд різних характеристик цього поняття свідчить про те, що поняття задачі відображає певну взаємодію суб'єкта з навколишнім світом. "…таким чином, говорячи про будь-яку задачу, по суті, ми маємо справу із системою типу "*суб'єкт - об'єкт"*[83 с. 46].

Свою модель поняття задачі Ю. М. Колягін [83] будує на основі положення про те, що найхарактернішою його ознакою є наявність особливої взаємодії суб'єкта S і об'єкта P (задачна система, множина, що містить взаємопов'язані деякими властивостями і відношеннями елементи), що веде до утворення деякої системи S – P. Автор розрізняє *стаціонарні* ситуації (коли відомі всі елементи множини P, їх властивості і відношення між ними) і *проблемні* (коли невідомий хоча б один елемент множини P, властивість чи відношення) відносно суб'єкта системи S – P. Тільки за наявності потреби і можливості відшукання невідомих даному суб'єкту елементів множини P, їх властивостей і відношень, система S – P перетворюється на задачу для даного суб'єкта. Розв'язати задачу – означає перетворити дану проблемну ситуацію у відповідну їй стаціонарну ситуацію або встановити, що за даних умов (можливо суб'єктивних) таке перетворення є неможливе.

Г. О. Балл вважає, що в психологічній літературі термін "задача" найчастіше вживається для означення об'єктів з категорій таких ситуацій, що містять мету дії суб'єкта та умови, за яких ця мета має бути досягнута.

Аналізуючи різні трактування, Г. О. Балл пропонує таку послідовність означень поняття задача [10]:

1. Задача – це ситуація, що вимагає від суб'єкта певної діяльності.
2. Мислительна задача – ситуація, що вимагає від суб'єкта деякої дії для знаходження невідомого на основі застосування його взаємозв'язків з відомим.
3. Проблемна задача, або проблема – ситуація, що вимагає від суб'єкта деякої дії для знаходження невідомого на основі застосування його взаємозв'язків з відомим, за умови, що суб'єкт не володіє способом (алгоритмом) цієї дії.

Важливим для нашого дослідження є висновок про те, що і проблемна ситуація, і задача можуть існувати тільки по відношенню до суб'єкта. Іншими словами, те що є задачею для одного індивідуума, може не бути задачею для іншого. Це залежить від індивідуальних якостей людини, яка розв'язує задачу (від рівня її знань, здібностей, досвіду і т. ін.), а отже, і від місця задачі в системі.

Проаналізуємо дидактичні означення поняття задачі.

Н. О. Менчинська характеризує задачу за такими ознаками [105]: наявністю в учнів певної мети; урахуванням умов і цілей, необхідних для розв'язування задачі; застосуванням способів і прийомів розв'язування відповідно до цілей і умови задачі.

Г. І. Саранцев під задачею розуміє об'єкт мислительної діяльності, що містить вимогу і деякі умови, за яких потрібно виконати дану вимогу [140].

Л. Л. Гурова дає таке означення цьому поняттю: задача – це об'єкт мислительної діяльності, який містить вимогу деякого практичного перетворення або відповіді на теоретичне запитання шляхом відшукання умов для розкриття зв'язків (співвідношень) між відомими та невідомими елементами [50].

Задача – це вимога чи запитання, на яке потрібно знайти відповідь, спираючись і враховуючи ті умови, що формулюються в задачі [176].

Ці означення вказують на важливу характеристику задачі: необхідність знайти такі умови, які б дали можливість встановити (розкрити) зв'язки між відомими та невідомими елементами. Отже, при застосуванні задач у навчанні необхідно враховувати взаємодію в системі “задача – учень”, тобто можливий характер діяльності учнів для пошуку зв’язків та відношень між відомими та невідомими елементами.

Для *геометричної задачі* елементами множини Р (задачної системи) є геометричні фігури, їх властивості, характеристики, взаєморозміщення (конфігурації).

Розв’язати геометричну задачу означає*: за даними елементами геометричної фігури знайти шукані елементи (точку, відрізок і т. ін.), які знаходяться між собою і з даними елементами у заданих співвідношеннях, або розміри окремих елементів фігури* [134].

У методиці навчання математики задачі традиційно розглядають як найважливішу мету навчання. Тому навіть нормативні вимоги до засвоєння курсу часто супроводжують зразками задач, розв’язування яких є обов’язковим або бажаним результатом навчання. Крім цього, у вивченні математики задачі виконують *функцію засобу*, за допомогою якого досягаються результати *навчання*. У такому аспекті задачі частіше називають *вправами*.

У Словнику української мови [150] є два тлумачення поняття *вправа*:

1) Розвиток певних якостей, навичок постійною, систематичною роботою. Спроба опанувати якусь справу, набути певного вміння.

2) Спеціальне завдання, що виконується для набуття певних навичок або закріплення наявних знань.

Термін “*завдання*” розуміють також як вимогу виконати якусь дію або отримати деякий результат [175]. Завдання можуть бути сформульовані так, що в них самих уже зазначено повністю або частково дії, які потрібно виконати. Якщо ж вони (дії) не зазначені, то таке завдання є *задачею* або *запитанням.*

Зі сказаного вище формулюємо такі означення.

Задача – завдання знайти деякий результат, коли дії для його виконання не вказані, але в умові є основна частина необхідної специфічної інформації.

Запитання – завдання, що має запитальну форму і, на відміну від задачі, не містить специфічної інформації, необхідної для його виконання.

Вправа – завдання, запропоноване в будь-якій формі, але призначене для відпрацювання в учнів необхідних умінь і навичок.

П. М Ерднієв вважає, що *математична вправа* є основним елементом методики навчання математики як науки, оскільки будь-яке дослідження у цій сфері зводиться до вправ: до визначення принципів їх класифікації, різноманітності форм та змісту, до питання про способи і послідовність їх виконання і т. ін. [192]

У підручнику С. А. Смірнова [121] є таке означення: „Вправу розуміють як повторне (багаторазове) виконання розумової чи письмової дії з метою поглиблення своїх знань і вироблення відповідних навчальних умінь і навичок”.

Вправа – свідоме багаторазове виконання дій, що базуються на наявних теоретичних знаннях, на різному матеріалі (але по відношенню до мети вправ – схожому), з метою оволодіння вміннями і навичками [54]

У дослідженні ми дотримуємось формулювання цього поняття, поданого Г. І. Саранцевим: „*вправа* – багатоаспектне явище, яке у навчальному процесі *є засобом організації й управління навчальною діяльністю учнів; носієм дій, адекватних змісту навчання; засобом цілеспрямованого формування знань, умінь і навичок; однією з форм реалізації методів навчання; засобом зв’язку теорії з практикою*” [140 с. 121]. У навчанні математики, вважає автор, функція вправ виступати способом організації пізнавальної діяльності є домінуючою.

У нашому дослідження *геометричними вправами* будемо називати такі *завдання*, що пропонуються учням для *формування геометричних знань, умінь і навичок.*

Методисти вважають, що будь-яка задача є запитанням [19]. Ми не поділяємо такої думки, як і вважаємо, що не будь-яке математичне запитання є задачею. Що стосується понять “задача” і ”вправа”, то одні автори методичних робіт вважають їх рівнозначними [19], інші означають вправи як окремий вид задач (А. В. Ланков [93]), ще інші, навпаки, — задачі, як окремий вид вправ [192].

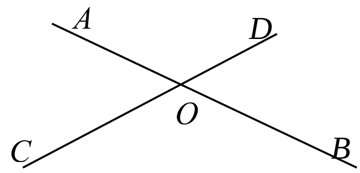
У нашому дослідженні ми поділяємо думку Д. В. Клименченко [80], що згадані вище поняття (“задача”, “вправа”) перетинаються, тобто серед задач і вправ є: задачі-вправи; задачі, що не є вправами; вправи, що не є задачами.

Схематичне зображення такого співвідношення кругами Ейлера подано на мал. 1.1.

Мал. 1.1

Наприклад, складні, громіздкі задачі не є зручними для формування якогось поняття чи вміння, оскільки вимагають виконання багатьох зайвих для даної мети дій чи логічних операцій. До таких задач належать наукові задачі.

Але й не всі вправи доцільно називати задачами. Такі, наприклад, завдання “*Накресліть будь-який трикутник. Позначте його вершини буквами. Назвіть його сторони і кути*.” або “*Назвіть пари суміжних кутів на малюнку*.” (мал. 1.2) не слід називати задачами. Завдання скласти задачу (наприклад, за даним малюнком) також відносимо до вправ.



Мал. 1.2

Для визначення належності задачі до вправ важливі *мета* застосування задачі, її *місце* у засвоєнні змісту, *адекватність* процесу її розв’язування тій діяльності, яка потрібна для вивчення матеріалу.

Таким чином, задача є вправою тоді, коли вона вводиться до навчального процесу у відповідності з її логікою та логікою навчального предмету в якості компонента системи “учень – вчитель”.

Г. І. Саранцев [140] виділяє вправи серед задач за такими ознаками. Вправи мають бути:

– носіями знань і вмінь, а також засобом їх засвоєння;
– способом мотивації навчальної діяльності учня;
– засобом організації й управління пізнавальною діяльністю учня;

– формою застосування певного методу навчання;

– засобом зв'язку теорії з практикою.

У результаті взаємодії суб'єкта і задачної ситуації зазнають змін як сама задачна ситуація, так і суб'єкт. Зміни в задачній ситуації – це перетворення умови й вимоги, зміни зв'язків між об'єктами задачі. Зміни суб'єкта характеризуються виробленими в нього знаннями, уміннями і навичками. *Задача є вправою, якщо її прямим продуктом є набуття людиною, яка її розв'язує, відповідних знань, умінь і навичок.*

Математична задача має певну структуру. Характеризуючи структуру задачі як інваріантний аспект системи S – P (суб'єкт – задачна система), деякі автори (Ю. М. Колягін [83], Г. О. Балл [10]) у своїх дослідженнях виділяють такі основні компоненти структури P:

I. Початковий стан (A) – характеристика проблемності системи P(для математичних задач виступає у формі умови).

II. Кінцевий стан (B) – характеристика стаціонарності системи P (невідомі елементи і зв'язки між ними.

III. Розв'язання задачі (R) – один із можливих способів переходу від початкового стану системи до кінцевого (спосіб перетворення умови для знаходження результату).

IV. Базис розв'язання (C) – множина факторів, що визначають деяке розв'язання R_i (обґрунтування розв'язання).

Символічно сукупність цих компонентів позначають як ACRB [83, 84].

Л. М. Фрідман виділяє в задачі такі її частини: <u>предметна область</u>, яка містить один чи кілька конкретних об'єктів; <u>предикати</u> (співвідношення), які пов'язують між собою об'єкти предметної області; <u>вимога задачі</u> [170]. Елементи предметної області і предикати поділяються на: а) *постійні* та *змінні*; б) *відомі* та *невідомі.* Серед невідомих елементів та предикатів виділяються *шукані; допоміжні* (визначені та невизначені)

Геометрична задача має такі інваріантні компоненти, що визначають її структуру: *умова*; *вимога*; *оператор* [44]. У геометричній задачі, як правило, зазначається не одна умова, а декілька незалежних умов (*елементарні умови*). Вимог також може бути декілька (*елементарні вимоги*).

<u>Наприклад</u>. *У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC проведено медіану BD . Знайти її довжину, якщо периметр трикутника ABC дорівнює 50 см, а трикутника ABD – 40 см.*

Елементарні умови: *"Трикутник рівнобедрений "*, "*Периметр трикутника ABC"*, *"Периметр трикутника ABD."*

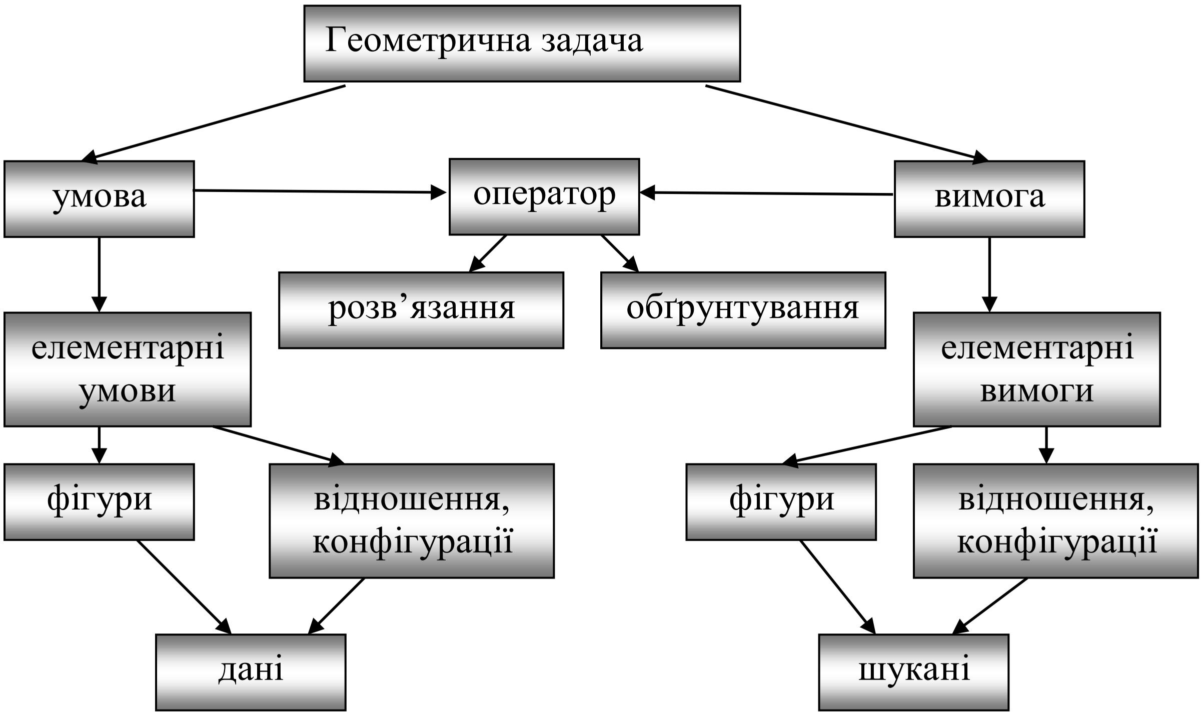
Кожна з елементарних умов містить одну чи дві *геометричні фігури* і деяку їх характеристику (трикутник рівнобедрений).

Якщо в умові одна геометрична фігура, то її характеристикою є певна *властивість* цієї фігури, а якщо дві, то характеристикою є *відношення* між цими фігурами (рівність, подібність і т. ін.) і взаємне розміщення (*конфігурації*).

Геометричні фігури, відношення і конфігурації поділяються на відомі (*дані*) і невідомі (*шукані*). Якщо в задачі геометричні фігури визначені і точно зазначені відношення і конфігурації, то вони вважаються *відомими*. У протилежному випадку фігури, відношення і конфігурації між ними вважаються *невідомими*. Невідомі, що не є шуканими, називають *допоміжними* елементами. *Вимога* задачі – це вказівка на те, **що** необхідно встановити в результаті розв'язування. Вимога формулюється у формі запитання ("Скільки…?", "Чому…?") або завдання ("Довести…", "Побудувати…")

Під *оператором* задачі розуміють сукупність дій (*розв'язання*), які необхідно виконати над умовою задачі щоб задовольнити вимогу, а також *обґрунтування* цих дій. Оператор не зазначається безпосередньо у формулюванні задачі, а задається опосередковано – вимогою задачі ("знайти", "довести", "побудувати" і т. ін.)

Таким чином, структуру геометричної задачі можна представити у вигляді схеми на мал. 1.3.



Мал. 1.3. Схема структури геометричної задачі

Існують різні класифікації геометричних вправ.

Щоб дотриматися системності, розглянемо спочатку класифікації вправ за характером компонентів задачі, у формі яких найчастіше виступають вправи. Сукупність цих компонентів позначають як ACRB.

I. 1. За характером умови (А) розрізняють такі типи: *з повною умовою*; *з неповною умовою*; *з надлишковою умовою*; *із суперечливою умовою.*

2. Якщо за основу класифікації взяти спосіб задання умови, то є вправи зі *словесною умовою* і вправи *за готовими малюнками*.

3. За кількістю елементарних умов задачі поділяють на *прості* і *складені.*

З поняттям задачі тісно пов’язані поняття їх складності і трудності.

У психолого-педагогічних дослідженнях існують різні погляди на цю проблему. О. М. Матюшкін визначає складність задачі такими факторами [102]: кількістю елементарних умов задачі; кількістю існуючих взаємозв’язків між даними і шуканими; кількістю опосередкувань, необхідних для знаходження шуканого; кількістю перетворень, які ведуть до відшукання розв’язку.

Виходячи з такого формулювання, простими можна називати однокрокові геометричні задачі, котрі розв’язуються за допомогою одного обчислення, перетворення. Складною задачу називають у тому разі, коли для її розв’язування необхідно виконати кілька кроків. Тобто розділити на декілька простих підзадач.

Природно казати про простіші й складніші геометричні задачі в залежності від кількості кроків у розв’язанні.

Складність задачі залежить від її структури і є її об’єктивною характеристикою.

4. За наявністю даних в задачі: 1) *закрита проблема* (коли в задачі подано достатню кількість даних); 2) *відкрита проблема* (коли учень повинен сам добирати дані) [115].

5. За характером змісту задачної системи розрізняють: 1) *практичні (реальні*); 2) *математичні* [176].

ІІ. По відношенню до теорії (базису С) Л. М. Фрідман указує на такі основні типи [170]: *задачі-проблеми*, метод розв’язування яких невідомий учням; *задачі-вправи*, тобто задачі, метод розв’язування яких відомий учням. А. А. Столяр розрізняє [153]: *типові задачі* (для яких відомі алгоритми розв’язування); *нетипові задачі* (алгоритми розв’язування яких не відомі).

ІІІ. За характером розв’язання (R) виділяють такі типи геометричних задач [44, 181]:

Алгоритмічні. До цього типу належать задачі, що виконуються за допомогою безпосереднього застосування аксіом, означень, теорем, формул. Існує алгоритм їх розв’язування. Залишається лише застосувати конкретне правило, щоб відшукати конкретний результат.

Наприклад. *Знайти невідомий кут трикутника, якщо в ньому два кути дорівнюють 50^o і 30^o.*

Алгоритм розв’язування :

1. Знайти суму двох відомих кутів трикутника (50º + 30º = 80º).

2. Відняти від відомої суми всіх кутів трикутника (180º) знайдену суму двох відомих кутів трикутника (180º - 80º = 100º).

Напівалгоритмічні. Це задачі, правила розв’язування яких мають узагальнений характер і не являють собою послідовність елементарних дій. Але зв’язки між елементами задачі легко помічаються учнями. Такі вправи виконуються на основі відомої ідеї, але без конкретного способу розв'язування.

Наприклад. *Знайти кути паралелограма, знаючи, що один із них більший від другого на 50°.*

Алгоритмічні задачі входять до напівалгоритмічних у якості підзадач (для даного прикладу – знаходження кутів паралелограма за одним відомим кутом).

Евристичні. До цього типу належать задачі, для розв'язання яких необхідно виявити зв'язки між елементами умови і вимоги або знайти спосіб розв'язування, що не є деяким узагальненим правилом, відомим учневі, або зробити і перше і друге.

IV. У традиційній методиці навчання геометрії прийнято класифікацію відповідно до характеру вимоги і мети задачі. Оскільки вимога задачі може мати форму: обчислити, довести, побудувати, дослідити, то виділяють такі типи геометричних вправ: 1) *на обчислення*; 2) *на доведення*; 3) *на побудову*; 4) *на дослідження*.

Перший тип характеризується тим, що виключно геометричними міркуваннями і за допомогою алгебраїчних й арифметичних співвідношень дані про шуканий елемент доводять до числа.

До другого типу належать вправи, які виконуються шляхом перетворення умови, наближаючи її до висновку або, навпаки, вважаючи висновок правильним, наближають його в результаті послідовних перетворень до умови і стверджують її. При цьому основою для послідовного перетворення умови або висновку задачі є поняття й твердження (означення, аксіоми, теореми), встановлені в тому розділі геометрії, до якої належить задача. Більшість задач на доведення має навчальний характер. Вони пропонуються учням для того, щоб привчити їх правильно міркувати, оволодіти методами доведення.

Вправи на побудову характеризуються тим, що зміст їх не вичерпується переліком значень даних величин і формулюванням того, що треба знайти. Тут істотне значення має вказівка на ті засоби, за допомогою яких вправа буде виконуватись.

Вправи на дослідження відрізняються від вправ на доведення тим, що їх умови не містять готової відповіді. Розв'язуючи такі задачі, учні повинні встановити, чи рівні між собою дані фігури або окремі елементи, чи паралельні між собою дані прямі лінії, який з розглядуваних відрізків більший, і т. ін.

Частину геометричних вправ не можна віднести до жодного із зазначених типів. Це так звані *комбіновані* задачі, у процесі розв'язування яких застосовуються прийоми, характерні для різних типів геометричних вправ. Таке органічне поєднання обчислень, доведень, досліджень і побудов дуже важливе, оскільки воно відповідає життєвим умовам. Тому комбіновані задачі повинні входити в систему вправ з курсу геометрії основної школи.

V. Ю. М. Колягін пропонує типологію задач за кількістю невідомих компонентів у сукупності ACRB. Будемо позначати невідомі компоненти задачної системи буквами X, Y, Z, U. У відповідності до цільового призначення задач у навчальному процесі вводиться така термінологія [83].

1. *Тренувальною вправою* називається стаціонарна ситуація ACRB (відомі всі її компоненти). Прикладом такого роду задач може бути будь-яке відтворення з пам'яті (формулювання доведення відомої учням теореми). Геометричні вправи такого типу застосовуються для вироблення вмінь впізнавати, відрізняти геометричні об'єкти.

2. Проблемна ситуація з одним невідомим компонентом (AC**X**B, ACR**X**) називається *навчальною вправою*. Важливою функцією таких вправ є вироблення вмінь розуміти засвоювану інформацію і застосовувати її у стандартних ситуаціях.

3. Задачі, в яких чітко визначено умову, мету, але не відомі розв'язок і базис (A**XYB**), на якому має ґрунтуватися розв'язання, називаються *пошуковими* (олімпіадні задачі). Такі задачі вчать трансформувати здобуті знання в нові умови.

4. *Проблемними* автор називає такі задачі, в яких визначено тільки мету; необхідні умови, шляхи й засоби для досягнення цієї мети людина встановлює сама (**XYZ**B). Прикладом таких геометричних задач є цільові завдання типу: “Вивчити властивості дотичної до кола” і т. ін. Виконання таких завдань вимагає від учнів уміння самостійно оволодівати знаннями, розв'язувати творчі задачі.

Будь-яка геометрична вправа шкільного курсу належить до першого або до другого згаданих вище типів.

Наприклад. *Знайти периметр квадрата, сторона якого дорівнює 5 см.*

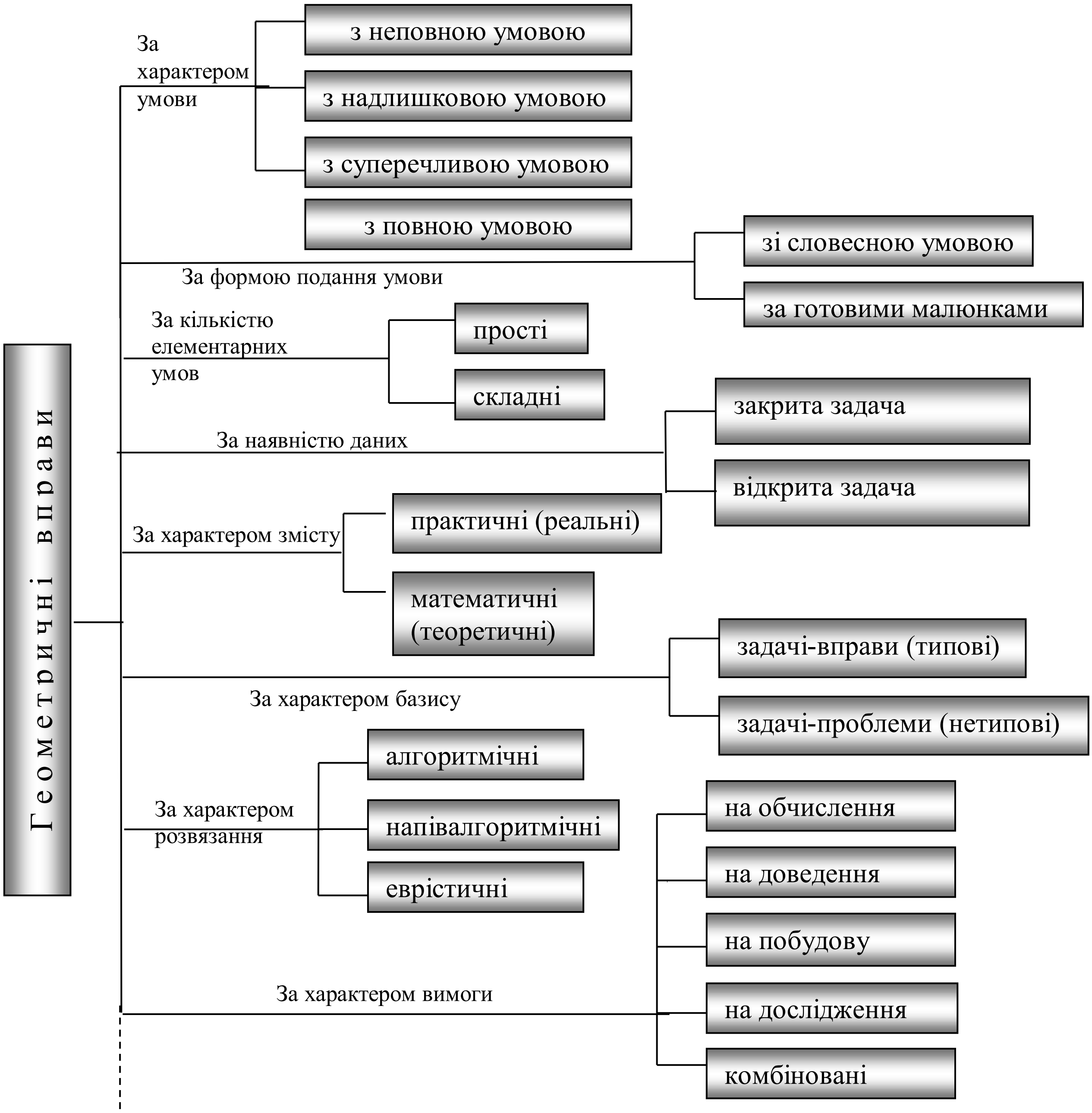
VI. Для нашого дослідження важливою є класифікація вправ за характером їх застосування та методичним призначенням. За цією ознакою вправи поділяють на: *вступні, тренувальні та заключні* [117]. Вступні вправи поділяють на: логічні (ті, що забезпечують розуміння навчального матеріалу і сприяють поглибленню знань); пробні (забезпечують подальше засвоєння знань і їх початкове застосування). Тренувальні: за зразком; за інструкцією. Заключні: творчі; проблемні; за завданням; контрольні.

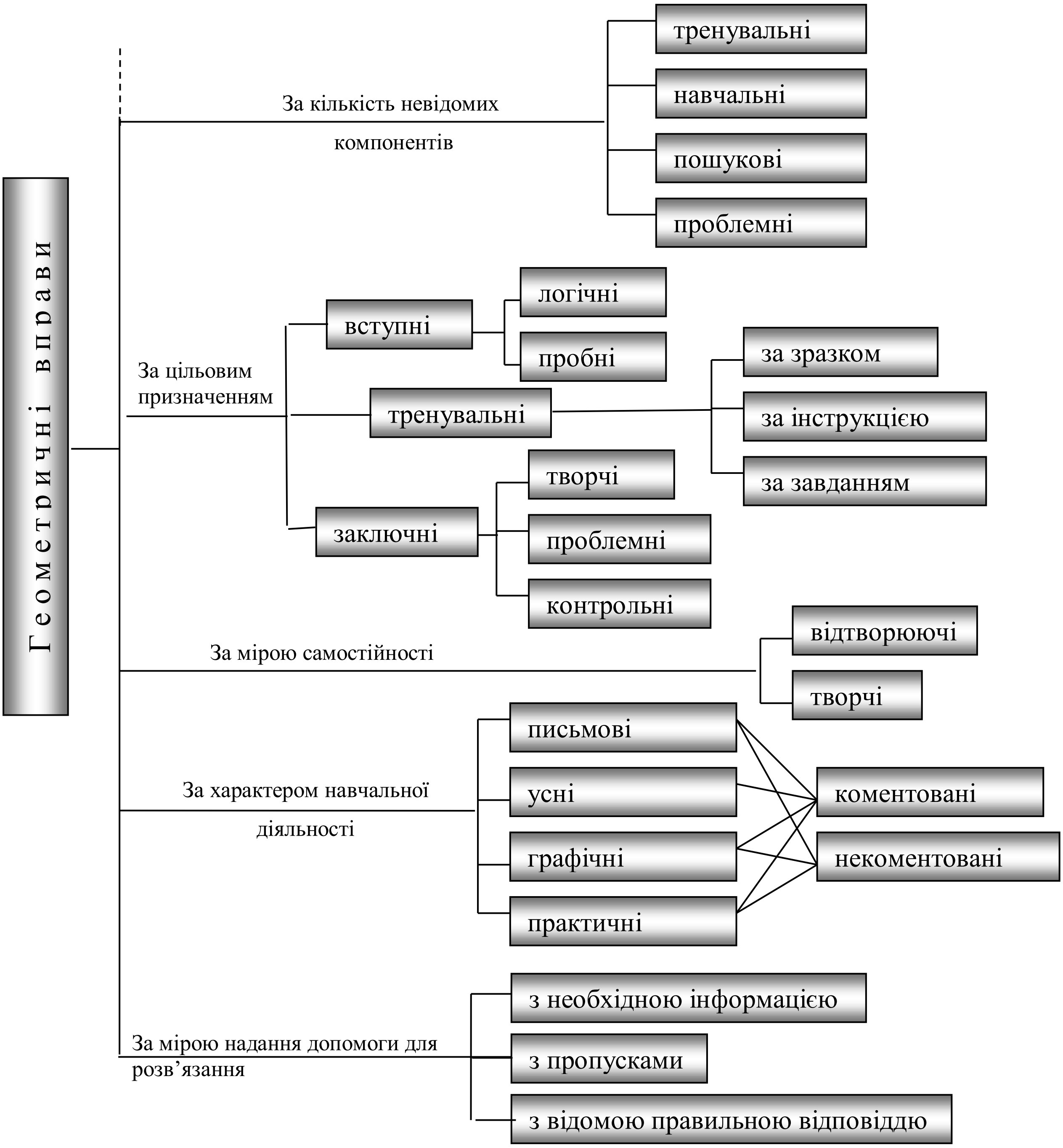
VII. За мірою самостійності учнів під час виконання вправ виділяють: *відтворювальні* вправи (відтворення відомого з метою закріплення); *творчі* (застосування знань у незнайомих ситуаціях) [121].

VIII. За характером навчальної діяльності вправи поділяють на *усні, письмові, графічні* й *практичні* [120]. Усні вправи – сприяють розвитку логічного мислення, пам'яті, усної математичної мови, уваги учнів. Вони відрізняються динамічністю та не потребують витрат часу на ведення записів. Письмові вправи – застосовуються для закріплення знань та вироблення навичок письмового оформлення розв'язання геометричних задач. Застосування їх сприяє розвитку загальної культури письмової математичної мови, самостійності у роботі. Графічні вправи полягають у виконанні малюнків, креслень, геометричних побудов. Такі вправи зазвичай виконуються одночасно з письмовими. Застосування їх допомагає учням краще сприймати, осмислювати і запам'ятовувати навчальний матеріал. Залежно від наявності знань графічні вправи можуть мати відтворювальний і творчий характер. До практичних вправ належать завдання, пов’язані з формуванням умінь користуватись приладами, інструментами, виконувати виміри і т. ін. Мета таких вправ – вироблення вміння застосовувати теоретичні знання учнів у навчальній і трудовій діяльності. Якщо під час виконання дій учень коментує наступні операції, то такі вправи називають *коментованими.*

Класифікація геометричних вправ представлена у вигляді схеми на мал. 1.4.

З’ясування змісту, структури, визначення класифікацій навчальних вправ з геометрії допомагає окреслити межі пошуку елементів досліджуваної системи, встановлювати місце вправ у системі в залежності від конкретних умов навчання, повніше використовувати можливості вправ для реалізації навчальних, розвивальних і виховних цілей геометричної освіти.





Мал. 1.4. Схема класифікацій геометричних вправ

1.2. Функції вправ у навчанні геометрії

Роль і місце задач у навчанні математики історично змінювались. Так у "Арифметиці" Л.Ф.Магницького до задач додавалися їх розв'язання. Способи розв'язування подавались у формі правил, які учні мали заучувати. Задачі були метою навчання, тобто математику вчили для того, щоб засвоїти правила розв’язування типових задач. Здатність віднести задачу до певного типу свідчила про наявність високорозвиненого мислення.

З розвитком суспільства змінювались цілі навчання і роль задач. Ще на початку минулого століття В. О. Латишев сформулював такі методичні рекомендації: “...потрібно, щоб теорія не просто викладалась учням, передуючи практичним вправам, а навпаки, теорія поступово вироблялась учнями і являла собою ряд висновків з практичних вправ на обчислення і на розв’язування задач.” [94, с. 26]

Таку думку підтверджено в роботах С. І. Шохор-Троцького, який вважав, що при розумному навчанні арифметичні задачі мають бути не метою, а тільки засобом навчання арифметики [191].

Вперше порушено теоретичний аспект питання про функції задач в статті К. І. Нєшкова і А. Д. Семушина “Функції задач у навчанні” .”Важливого значення в досягненні цілей навчання математики має навчання розв’язуванню задач, однак для досягнення кожної з цілей потрібні свої задачі, своя система задач і, відповідно, своя методика їх розв’язування. *Задачі у навчанні мають виконувати свої функції (дидактичні, пізнавальні і розвивальні)*” [109 с. 4].

Автори пропонують розрізняти задачі з основними функціями за такими ознаками: задачі з дидактичними функціями — задачі “... на пряме застосування вивченої теорії або розглядуваної залежності, на закріплення всіх основних фактів шкільного курсу математики” [109 с. 5]; задачі з пізнавальними функціями – задачі, в процесі розв’язування яких “учні поглиблюють окремі обов’язкові для засвоєння всіма учнями сторони матеріалу, вивченого в класі, знайомляться з пізнавально важливими теоретичними відомостями, не відомими раніше методами розв’язування задач” [109 с. 5]; задачі з розвивальними функціями – “це задачі, зміст яких може відходити від основного курсу математики, посильно ускладнювати деякі з вивчених раніше питань шкільної програми; запам’ятовування і засвоєння цього матеріалу усіма учнями необов’язкове. У розв’язуванні таких задач учню недостатньо застосовувати вивчені теоретичні відомості або вже відомі методи розв’язування задач, а необхідно проявити вигадку та кмітливість” [109 с. 6].

В основу згаданої вище типології покладено принцип, що задачі, які реалізують усі вимоги до засвоєння програмного матеріалу, – це задачі з дидактичними функціями; задачі, призначені для його поглибленого вивчення, – задачі з пізнавальними функціями; задачі, спрямовані на розширення програмового матеріалу (і вимог до рівня його засвоєння), – задачі з розвивальними функціями.

Ю. М. Колягін вважає позицію авторів нечіткою через неправомірно обрану основу для такої типології [83]. Учений вважає, що правильно говорити про ті чи інші функції задач можна залежно від того, який вид діяльності школярів виявляється в процесі їх розв'язування або залежно від того, яку конкретну мету навчання, виховання чи розвитку слід реалізувати під час постановки задачі в конкретних умовах навчання.

За таких положень автор поділяє всі функції задач на три основні категорії: *навчальні, виховні і розвивальні.* Крім цього, зазначає на ще одну важливу функцію задач – *контролюючу*.

Такої типології традиційно дотримуються психологи, дидакти, методисти (Г. П. Бевз, В. Г. Болтянський, М. І. Бурда, Г. Д. Глейзер, Я. Й. Грудьонов, П. М. Ерднієв, Ю. М. Колягін, Т. В. Крилова, Ю. М. Макаричев, В. М. Монахов, К. І. Нєшков, В. О. Онищук, А. А. Столяр, Н. А. Тарасенкова, Л. М. Фрідмана, Р. С. Черкасов, А. Ф. Єсаулов), висвітлюючи ті чи інші сторони проблеми функціонування задач та їх систем.

У ряді сучасних досліджень (В.Г.Бевз [11], М.Я.Ігнатенко [68], З.І.Слєпкань [146]) розглядають також *коригувальні* функції задач.

Важливо, що:

– будь-яка конкретна задача виконує різні функції, які за даних конкретних умов можуть бути прямими або опосередкованими. Тому варто говорити про ту чи іншу функцію задачі у якості провідної, яка реалізується в той чи інший конкретний момент навчального процесу;

– провідне значення однієї чи кількох функцій задачі носить динамічний характер. Залежно від конкретних умов навчання прихована функція задачі може виступити явно, а її провідна функція залишитися нереалізованою. Тому кожна окрема задача або серія задач мають бути спрямовані на реалізацію конкретної мети навчання.

Таким чином, задачі є засобом, за допомогою якого вчитель навчає, тобто вони виконують цілком визначені *функції* у навчанні математики і в цьому розумінні являють собою *засіб* навчання. У такому аспекті задачі ми називаємо вправами.

Визначаючи основні функції вправ з геометрії в основній школі, доцільно враховувати цілі її вивчення. Очевидно, що ці цілі визначаються також основними цілями і завданнями шкільного курсу математики, які вичерпно викладено в посібнику [146]: розумовий розвиток учнів; забезпечення свідомого і міцного опанування системи математичних знань, навичок і вмінь; формування наукового світогляду, загальнолюдських духовних цінностей, позитивних рис характеру.

Відповідно до цілей шкільної математичної освіти можна виділити такі основні функції геометричних вправ: *навчальні, розвивальні, виховні, контрольно-коригувальні*. Крім цього, ми виділяємо ще й *пропедевтичні та діагностувально-прогностичні* функції.

Розглянемо докладніше кожну з цих функцій.

1. **Навчальні**. Відомо, що в процесі вивчення математики вправи є засобом навчання. За допомогою вправ вводяться нові поняття, формуються вміння і навички, створюються проблемні ситуації, здійснюється контроль набутих знань і т. ін. Під навчальними функціями вправ розуміють функції, спрямовані на формування в учнів основних понять, ідей, принципів, виявлення зв'язків між ними, відпрацювання вмінь і навичок на різних етапах засвоєння знань [83]. У відповідності з основними етапами навчального процесу (підготовка до введення нового змісту, введення нового змісту і закріплення) навчальні вправи поділяють на пізнавальні, усвідомлювальні і тренувальні. [11]

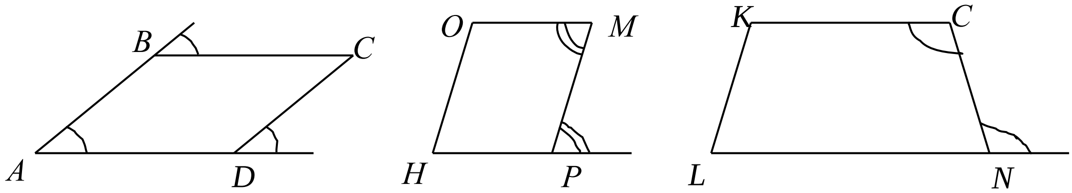
Підготовчі вправи, які пропонуються учням з метою актуалізації опорних знань, створення проблемної ситуації, мотивації введення того чи іншого прийому, формування готовності до сприйняття нового матеріалу, виконують *пізнавальні* функції. Здебільшого це вправи з конкретним змістом. Вони пропонуються учням до вивчення теоретичних положень. Частіше пізнавальні вправи мають вигляд запитань або практичних завдань. У вивченні геометричних понять частіше пропонують такі вправи, де учні мають побудувати відповідну фігуру і виділити ті ознаки нового поняття, які необхідні для формулювання означення. Побудовані фігури використовуються для наступної роботи (доведення теореми, розв'язування задачі та ін.). Іноді учням пропонується, розглядаючи готові малюнки, виділити ознаки нового поняття і дати його означення. Наприклад, під час введення поняття "ромб" учням пропонується вправа: "Побудуйте паралелограм, дві суміжні сторони якого рівні. Такий паралелограм називають ромбом. Дайте означення ромба." Інший приклад. Перед введенням поняття "суміжні кути" вчитель пропонує вправу: "Побудуйте кут. Продовжте одну його сторону за вершину. Ви отримали два кути, які називаються суміжними. Спробуйте дати означення суміжних кутів." Учні швидко розуміють, що для формулювання нового означення досить дещо перефразувати зміст вправи.

Під час введення геометричних теорем також застосовують вправи на побудову відповідних фігур. Наприклад: "На одній стороні кута відкладіть декілька відрізків однакової довжини. Через точки поділу проведіть паралельні прямі до перетину з іншою стороною кута. Вимірюванням порівняйте довжини одержаних відрізків. Зробіть висновок. Чи можна вважати цей висновок достовірним?" Для прискорення роботи довжини відрізків інколи порівнюються не вимірюванням, а "на око". З такою метою у деяких ситуаціях пропонується розглядати готовий малюнок (модель). Наприклад: "У колі проведено дві хорди різної довжини. Визначте "на око", яка з них (більша чи менша) знаходиться ближче до центру. Зробіть висновок. Чи можна вважати цей висновок правильним? У таких вправах важливе останнє запитання. Учні запам'ятовують фразу вчителя і розуміючи, що саме її він чекає, кажуть: "Оскільки вимірювання завжди неточні, а наш висновок ґрунтується на окремих випадках, то його не можна вважати достовірним, потрібно доводити". У результаті в учнів виникає переконання в необхідності доводити гіпотези, одержані на основі неповної індукції.

Такий метод навчання, коли учням пропонуються вправи для підготовки до розуміння нового означення, "відкриття" теореми, розуміння її доведення, самостійного розв’язування задачі, розроблявся відомим методистом С. І. Шохор-Троцьким, хоч сама ідея методу була відома й до нього.

Вправи, які пропонуються учням для усвідомлення теоретичного матеріалу, для першого застосування нової теорії на практиці, для розгляду нового методу розв’язування задач та ін., виконують *усвідомлювальні* функції. Знайомство з новим матеріалом – це лише перший етап його засвоєння. Деякі учні запам’ятовують якусь частину пояснення, не розуміючи основного. Інші розуміють доведення теореми, але не знають, де її можна застосовувати. Тому головна мета цього етапу – правильно спрямувати вивчення нового матеріалу, доповнити його конкретними вправами, зокрема вправами за готовими малюнками. Наприклад, розглянемо одне з означень паралелограма: “Паралелограм – це чотирикутник, у якого протилежні сторони паралельні”. Для засвоєння цього означення можна запропонувати учням таку вправу :

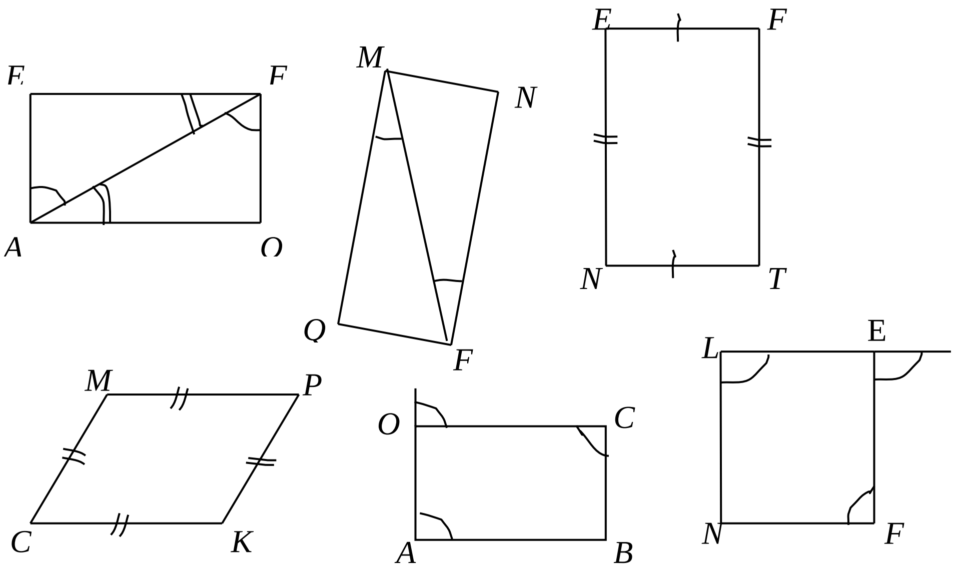
„Які фігури на мал. 1.5 є паралелограмами?”



Мал. 1.5

Характерною особливістю добірок таких вправ є наявність контрприкладів, які провокують учнів на помилку і допомагають виявити й виправити помилкові асоціації. Виконуючи цю вправу, учні, зазвичай, припускаються такої типової помилки: довівши, що *ABCD* – паралелограм, вони за аналогією вважають, що *OMHP* також паралелограм. Але, розглядаючи наступну фігуру, учні роблять висновок, що за однакових даних фігури можуть бути різними. Тільки після цього вони доходять висновку, що *OMHP* може бути, а може і не бути паралелограмом, – даних недостатньо. Виконання подібних вправ запобігає поганій звичці учнів – робити висновки не з даних задачі, а з малюнка.

Для засвоєння понять корисно пропонувати вправи на порівняння. Наприклад, під час вивчення понять “прямокутник”, “ромб”, “квадрат” пропонується така вправа: „Визначте вид чотирикутників, зображених на мал. 1.6.”



Мал. 1.6

Виконуючи такі вправи, учні привчаються знаходити спільні й відмінні ознаки виучуваних понять. У них є і контрприклади, які провокують на помилки. Так, розглядаючи фігуру *CMPK*, учні інколи відповідають: “Оскільки всі сторони чотирикутника *CMPK* рівні, то він – ромб”. На перший погляд здається, що відповідь правильна, тільки викладена у скороченій формі. Але наступний діалог виявляє повне нерозуміння:

– На основі яких теорем, означень можна стверджувати, що *CMPK* ромб?

– За означенням ромба.

– Сформулюйте його.

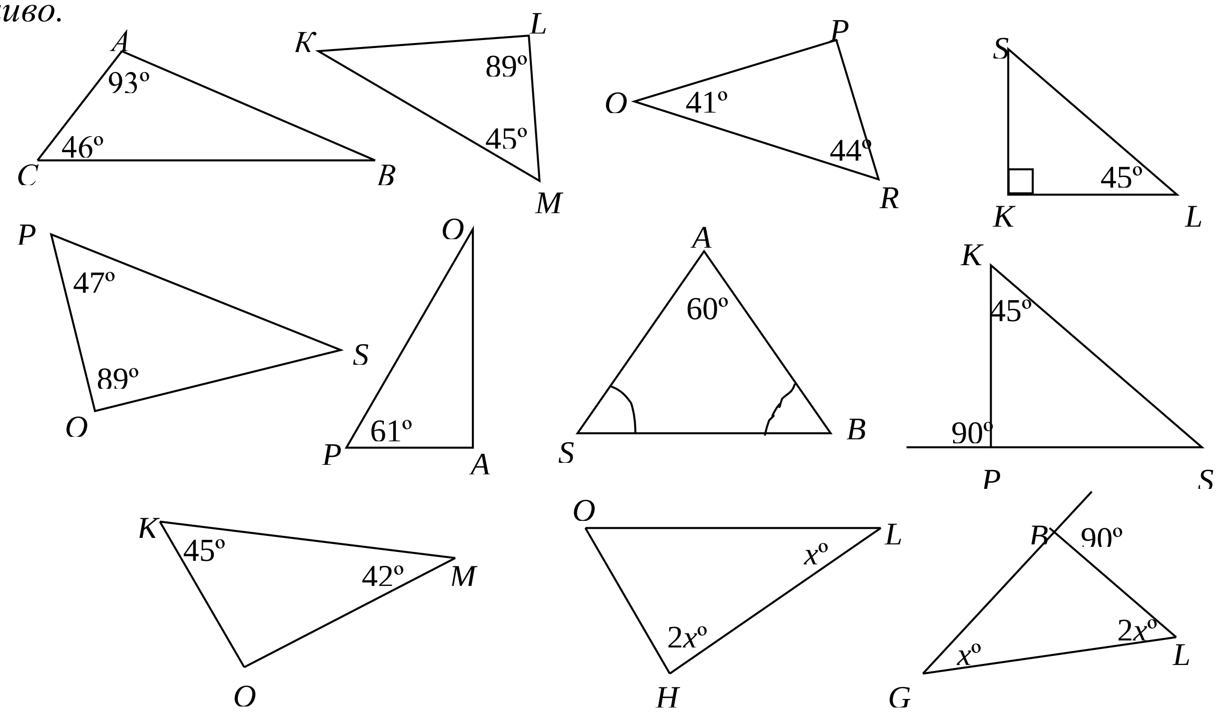
Виявляється, що в означенні ромба за родове поняття взято паралелограм. Отже, спочатку потрібно довести, що *CMPK* – паралелограм, а тоді застосувати означення ромба.

Вправи, які виконують усвідомлювальні функції, пропонуються учням з метою активізації їхньої мислительної діяльності, для свідомого засвоєння, а не лише формального запам’ятовування інформації.

Більшість вправ пропонується учням з метою опрацювання змісту певного поняття або набуття відповідних умінь і навичок. Такі вправи виконують *тренувальні* функції. Я.Й.Грудьонов у своєму дослідженні [48] стверджував, що уміння і навички – це певна система узагальнених асоціацій, які виникають у результаті повторення одних і тих самих дій. Систему вправ, яка містить однотипні задачі одного і того самого типу, називають однотипною. Оскільки для формування узагальнених асоціацій потрібно тим менше вправ, чим кращий розвиток учня, то слабкі учні потребують більшої кількості однотипних вправ, а сильніші – меншої.

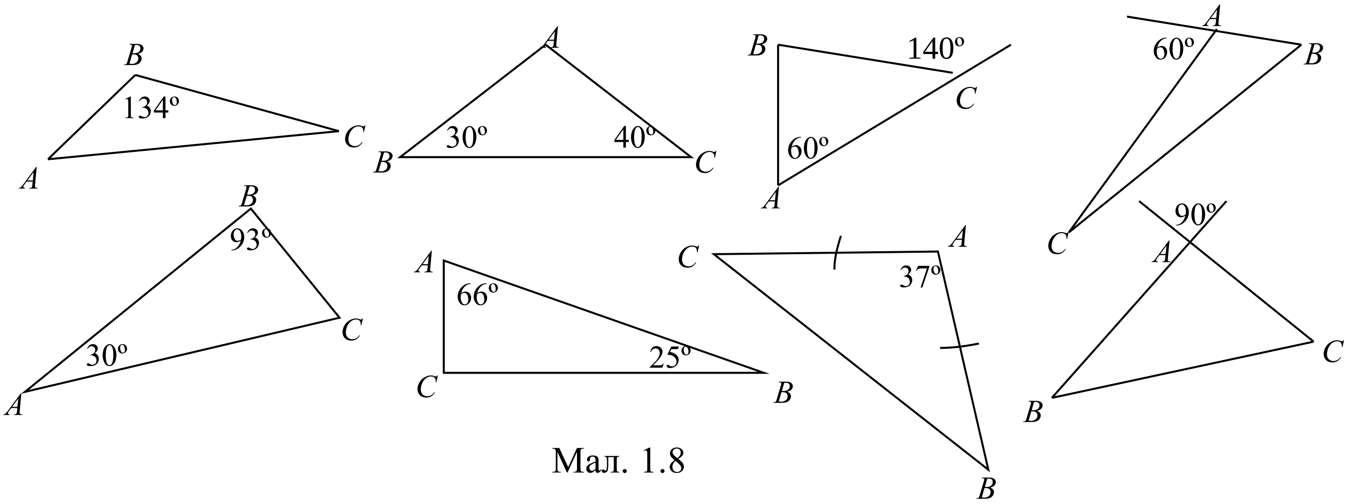
На уроках геометрії, як правило, розв’язують лише одну-дві задачі певного типу. Цього, звичайно, недостатньо для засвоєння способу розв’язування таких задач або вироблення певних геометричних умінь у всіх учнів. Порівняно з уроками алгебри, де є можливість розв’язувати багато однотипних вправ у процесі опрацювання певного поняття, на уроці геометрії з такою самою дидактичною метою, зазвичай, встигають розв’язати не більше двох задач, оскільки геометричні задачі здебільшого є текстові і тому вимагають виконання додаткових етапів (малюнок, короткий запис тощо). Обмеженість навчального часу на уроці добре компенсують вправи за готовими малюнками, вони допомагають застосувати вимогу однотипності для системи геометричних вправ. Наприклад, серед вимог до обов’язкових результатів навчання геометрії в основній школі є: ”Уміти обчислювати градусну міру кута трикутника за градусними мірами двох інших його кутів.” Реалізувати цю вимогу допоможуть вправи такого типу:

1. *Обчислити невідомі кути в зображених на малюнку 1.7 трикутниках, якщо це можливо.*



Мал. 1.7

2. *Якого виду кожен із зображених трикутників ABC на мал. 1.8?*



Мал. 1.8

Слід зауважити, що на етапах засвоєння нового поняття, відпрацювання вмінь і навичок необхідно здійснювати на основі системи вправ, яка містить основні, найхарактерніші типи задач відповідної теми. Так серед задач на застосування ознак рівності трикутників виділяють три основні види, способами розв'язування яких повинні оволодіти всі учні. Це задачі: на доведення рівності трикутників; на доведення рівності деяких елементів у двох даних трикутниках; в яких для доведення рівності трикутників або їх елементів необхідно розглянути кілька пар рівних трикутників. Корисно навіть ознайомити учнів з правилами-орієнтирами щодо розв'язування таких типів задач.

2. **Розвивальні**. Під розвивальними розуміють функції, спрямовані на розвиток мислення учнів, на формування якостей, властивих науковому мисленню, на оволодіння прийомами ефективної розумової діяльності.

Вирішальне значення для системи шкільної освіти має формувальний аспект математики, широкі можливості його для інтелектуального розвитку особистості. Йдеться, насамперед, про розвиток логічного мислення, просторових уявлень та уяви, пам'яті, уваги, алгоритмічної культури, вмінь знаходити причинно-наслідкові зв'язки між окремими фактами, обґрунтовувати твердження, математизувати реальні ситуації. [58]

Враховуючи, що основною метою загальноосвітньої школи є всебічний розвиток особистості, у процесі навчання математики потрібно спиратися як на дидактичні так і на психологічні принципи розвивального навчання.

Дидактичні принципи розвивального навчання висунув у 60 – 70-х роках минулого століття Л. В. Занков. Він обґрунтував, що не будь-яке навчання створює максимально сприятливі умови для розвитку учнів. Потрібний ретельний відбір змісту, методів, організаційних форм і засобів навчання, щоб забезпечити ці умови. При цьому треба враховувати такі важливі дидактичні принципи розвивального навчання: провідна роль теоретичних знань; навчання в швидкому темпі; навчання на високому, але доступному рівні складності; усвідомлення всіма учнями процесу навчання; систематична робота вчителя над загальним розвитком усіх учнів, у тому числі й з початковим рівнем навчальних досягнень [146].

Психологічні принципи розвивального навчання сформульовано у працях З. І. Калмикової [76]. Основні з них такі: систематичний розвиток усіх трьох основних видів мислення: наочно-дійове (або практичне), наочно-образне і абстрактно-теоретичне; проблемність навчання; індивідуалізація і диференціація навчально-виховного процесу; цілеспрямоване формування алгоритмічних і евристичних прийомів розумової діяльності; систематичний розвиток мнемічної діяльності (тобто розвиток пам’яті) для забезпечення фонду дійових знань.

Для реалізації цих принципів засобом системи геометричних вправ необхідно визначити, які із завдань вивчення геометрії в середній школі мають розвивальний характер. Це розвиток в учнів найважливіших типів мислення, пам’яті, інтуїції, формування навичок аналізу, синтезу, узагальнення, порівняння, абстрагування, аналогії, опанування геометричної мови і символіки.

У школярів підліткового віку починає формуватися логічне мислення на основі наочно-образного. Вони набувають здатності усвідомлювати внутрішні зв’язки між реальними явищами у формі абстрактних понять і суджень. Завдання логічного розвитку учнів розподіляється між різними предметами нерівномірно. В усіх науках, особливо в математиці, вони мають справу з логічними міркуваннями. У багатьох науках визначне місце посідають логічні класифікації (наприклад, класифікація рослин і тварин у ботаніці й зоології). Однак жоден шкільний предмет не має таких можливостей для логічного розвитку учнів, як геометрія, де логічні методи різко виступають на перший план. Одним із завдань вивчення геометрії є розвиток логічного мислення, умінь логічно обґрунтовувати твердження [58]. У жодному іншому предметі весь навчальний матеріал так не пов'язаний з логічними міркуваннями. Нарешті, жоден інший предмет не дає стільки прикладів для ілюстрування будь-яких положень логіки. Є деякі положення логіки, для точного ілюстрування яких неможливо навести приклад з якої-небудь іншої галузі, крім геометрії.

Логіка – це наука, яка вивчає форми мислення (поняття, судження, умовиводи). Основні логічні категорії – поняття, означення, твердження, доведення, класифікація. Отже, логічні вміння – це вміння оперувати поняттями і твердженнями (аксіомами і теоремами), правильно означувати і класифікувати поняття, доводити теореми, виводити наслідки і т. ін. Однак, крім уміння логічно мислити, важливим є усвідомлення учнями необхідності робити це у відповідних ситуаціях. Наприклад, учителеві, зазвичай, важко домогтися того, щоб учні з істинності прямої теореми не робили висновок про справедливість оберненої. Зокрема, це стосується теореми Піфагора. Обернена їй теорема є справедлива, але учні у більшості випадків не можуть її сформулювати і користуватися нею під час розв'язування задач.

Розвивати логічне мислення учнів потрібно не лише у процесі вивчення теорії, а й у процесі виконання вправ. Майже кожна геометрична задача сприяє розвитку логічного мислення, однак, на нашу думку, для цього потрібні і спеціальні вправи. Зокрема, В. О. Жаров [61] вважав, що розвиток логічного мислення учнів у процесі вивчення геометрії має здійснюватись шляхом вивчення характеристичних властивостей (критерію належності до певного класу) фігур. На думку дослідника, це сприяє унаочненню логічної структури геометрії. Розвиткові логічного мислення учнів сприяють також геометричні вправи на дослідження, з'ясування родо-видових залежностей між поняттями, їх класифікацій, коректності означень понять тощо.

Важливою метою вивчення геометрії в основній школі є розвиток в учнів просторової уяви (образного мислення). Відповідно до сучасної концепції математичної освіти образне мислення є основою вивчення шкільного курсу геометрії. Конкретно-методичні питання, пов'язані з розробкою методів формування й розвитку просторових уявлень і уяви в процесі вивчення геометрії, розглянуто в роботах Г. Д. Глейзера [43], Ю. М. Колягіна [84], А. А. Столяра [153], Р. А. Хабіба [179], Р. С. Черкасова [185] і ін. Ці питання досліджувались педагогами і методистами Київської школи (І. Є. Шиманський, І. Ф. Тесленко, О. С. Дубинчук, М. Б. Гельфанд, Д. М. Маєргойз, О. П. Сергунова, Л. М. Лоповок, Г. П. Бевз, Н. Д. Мацько).

З погляду психології, уявлення є результат безпосереднього чуттєвого сприйняття реальних предметів зовнішнього світу. Фіксуючись у пам'яті у вигляді первинних чуттєвих образів, вони (уявлення) проходять кілька стадій розвитку – узагальнення, абстрагування, систематизацію. Головне при цьому − *здатність* мислено відтворювати образ предмета, тобто *уявляти* предмет. Отже, уявлення ґрунтуються на мислительних процесах, на мисленнєвому оперуванні просторовими образами. Зважаючи на це, користуються терміном *образне мислення* [200].

Розвиток образного мислення відбувається у декілька етапів: 1) створення цілісного образу на наочній або абстрактно-логічній основі з опорою на раніше сформовані просторові уявлення і засвоєні поняття. Впізнавання, розпізнавання і відтворення образу відбувається в тих умовах, у яких відбувалося його формування; 2) оперування образом у дещо змінених умовах, закріплення його істотних ознак шляхом варіювання неістотних; 3) оперування образом у дуже змінених умовах, логічне встановлення рівності, подібності між елементами образу з повною, неповною наочною опорою або без неї; 4) активне оперування образом в суттєво змінених умовах; розкриття внутрішніх і міжпредметних зв'язків і залежностей; 5) творче конструювання нових образів і відношень на базі сформованих раніше [43].

Зорова система людини є домінантною для образного мислення. Її перевагою є здатність охоплювати різні характеристики моделі-образу, фіксувати їх просторові, структурні, функціональні, часові зв'язки. Тому важливого значення для формування просторових уявлень і уяви має застосування наочності. У своєму дослідженні [43] Г. Д . Глейзер дослідив роль і місце наочності на кожному етапі формування і розвитку просторових уявлень учнів, розробив принципи створення і компонування графічної наочності. На основі цих принципів нами було визначено такі вимоги до геометричних зображень, що застосовуються в якості графічної наочності в процесі виконанні геометричних вправ:

1) геометричні зображення мають містити лише необхідну інформацію, для точного розуміння її учнем; вони не повинні містити зайвих візуальних елементів, які заважають сприйняттю головного;

2) геометричні зображення не слід надто деталізувати, включати елементи, неістотні з погляду відображуваної інформації; символи, якими позначаються одні й ті самі об’єкти мають бути уніфіковані;

3) у геометричних зображеннях мають бути зроблені акценти на основних змістових елементах шляхом виділення кольором, розмірами, формою суттєво важливої з погляду сприйняття спостерігачем інформації;

4) складні геометричні зображення мають розчленовуватись на прості; можливе також чітке обмеження найсуттєвішої для учнів частини зображення від інших його частин;

5) кожний елемент геометричного зображення повинен мати чітку, віддеференційовану від інших частин структуру;

6) послідовність зображення і його склад мають відповідати викладу інформації в геометричній вправі;

7) геометричне зображення має враховувати звичні асоціації і стереотипи учнів і давати можливість спиратися на них для відтворення образів;

8) корисно варіювати зображення геометричних об’єктів за умови збереження їх істотних ознак.

Вимога варіювання неістотних ознак геометричних фігур реалізується за допомогою подачі кількох варіантів їх зображень. Наприклад, процес геометричних побудов демонструється рядом послідовно доповнених зображень [51]. Сучасні засоби навчання дають можливість створювати динамічні зображення геометричних фігур з можливістю керувати варіюванням їх неістотних ознак. Для проведення експериментального навчання використовувались електронні засоби навчального призначення [16], [37], [38], [39], які містять набір статичної і динамічної наочності. Робота з динамічною наочністю дає учням змогу спостерігати безліч варіантів прояву тієї чи іншої властивості геометричної фігури чи її елементів (наприклад, властивість середин сторін будь-якого чотирикутника; властивості висот, бісектрис і медіан трикутника), змінювати неістотні ознаки геометричного поняття за умови збереження істотних. За допомогою електронних динамічних моделей можна унаочнити геометричні факти, які неможливо унаочнити іншими засобами.

Важливо, щоб учень міг охоплювати відразу весь малюнок (спочатку простий, потім складніший), усі потрібні співвідношення між його елементами Для цього корисними будуть такі вправи, для виконання яких учням доводиться робити на малюнку додаткові допоміжні побудови. Щоб здогадатися, якими мають бути ці добудови, учень повинен уявити співвідношення між накресленими елементами малюнка і тими елементами, яких на малюнку немає. Вправи на проведення геометричних міркувань без виконання малюнка на дошці чи на папері, а уявляючи його, сприяють розвитку просторової уяви учнів. Експериментальне навчання засвідчило ефективність розвитку в учнів образного мислення засобом вправ: які стосуються просторових образів і виконуються без малюнка, а лише на основі уяви; на визначення тіл, утворених обертанням плоских фігур; на застосування руху; на розпізнавання планіметричних фігур на моделях просторових фігур; на побудову.

Сучасні цілі і вимоги до результатів геометричної освіти передбачають виховання в учнів *дивергентного* мислення, спрямованого, зокрема, на відшукання різних варіантів розв'язання тієї самої задачі. У дослідженні [51] встановлено, що дивергентне мислення учнів формується в процесі їхньої аналітико-синтетичної діяльності такими прийомами, як аналіз через синтез, виконання додаткових побудов, розв'язування задач різними способами тощо. Практична реалізація формування в учнів 7 – 9 класів таких прийомів мислительної діяльності здійснювалася за допомогою геометричних вправ на зображення і розпізнавання геометричних фігур, їх перетину і об'єднання, встановлення істинності геометричних тверджень (заповнення пропусків у формулюванні означень і властивостей геометричних фігур) тощо. Важливим механізмом формування дивергентного мислення є *інтуїція*. Сучасні психологічні дослідження свідчать про наявність таких етапів дії інтуїції в людини під час розв'язування задачі (проблеми), як: накопичення в пам'яті образів і абстракцій понять; їх несвідоме перетворення і комбінування з метою вирішення задачі; чітке усвідомлення задачі; її несподіване вирішення [51]. Таким чином, інтуїція у дитини може спрацювати, якщо задачу поставлено, а акцент з інтелектуальної перенесено на емоційну, чуттєву сферу. Можливі такі шляхи розвитку інтуїції учнів під час розв'язування задачі: актуалізація знань, потрібних для розв'язування (постановка навідних запитань, переформулювання умови задачі); пошук зв'язків між елементами знань (з'ясування родо-видових відношень, виконання додаткових побудов); пошук шляхів розв'язування задачі; варіативність етапів розв'язування; ігнорування надлишкової інформації. Учителеві слід заохочувати учнів до інтуїтивних міркувань, оскільки в такий спосіб школярі вчаться будувати гіпотези, прогнозувати результати своєї діяльності, приймати рішення.

3. **Виховні** функції геометричних вправ охоплюють виховання математичної мови (усної та письмової), графічної культури, позитивного ставлення школярів до навчальної діяльності, потребу в самостійній пізнавальній діяльності, наполегливості, свідомості і ін.

Графічну культуру учнів розуміємо як уміння і звичку правильно, раціонально й акуратно виконувати, сприймати і застосовувати графічну інтерпретацію інформації.

Виховання графічної культури розпочинається в початкових класах, коли учні вчаться креслити відрізки, кола, найпростіші геометричні фігури. У вивченні планіметрії побудова графічних зображень – важлива частина навчального процесу. Педагогічна практика свідчить про низький рівень графічної культури учнів 7 – 9 класів загальноосвітньої школи. Зображення геометричних фігур виконуються школярами неохайно: учні не вміють обрати зручне розміщення малюнка; не дотримуються в зображенні відношення довжин сторін та величин кутів, паралельності відрізків і прямих (середньої лінії і протилежної сторони трикутника і т. ін.); правил позначення точок, відрізків, прямих, кутів; штрихові лінії проводяться поспіхом, так, що окремі штрихи та відстані між ними не однакові. Виконання малюнка забирає значну частину навчального часу, оскільки учні не володіють технікою зображення фігур „від руки”. Нерідко роботу з виховання графічної культури учнів учителі починають під час вивчення геометричних побудов. Практика навчання переконує в тому, що з перших уроків систематичного курсу геометрії потрібно виробляти в учнів уміння виконувати геометричні зображення.

Основою графічної культури учнів є розвиток їхніх просторових уявлень і уяви. Досвід зображення і „читання” геометричних малюнків набувається школярами в процесі їх виконання, споглядання готових зображень та дій із їх виконання. Виховувати графічну культуру школярів потрібно під час розв’язування кожної геометричної задачі, де передбачено виконання малюнка. Корисно привчати учнів до стандартного розміщення малюнка відносно короткого запису умови задачі. Експериментальне навчання засвідчило, що виховання графічних умінь можна покращити, якщо разом з учнями виконувати вправи на зображення фігур, наприклад, такі (до теми „Найпростіші геометричні фігури та їх властивості”):

1.Позначте в зошиті точки A і B і проведіть пряму AB.

2.Накресліть дві прямі, що перетинаються. Знайдіть і позначте буквою точку перетину цих прямих.

3.Побудуйте промені a і b так, щоб вони : а) перетинались; б) не перетинались; в) були доповняльними.

4.За допомогою транспортира побудуйте кути: $\angle COD = 60^\circ$, $\angle lm = 45^\circ$, $\angle A = 73^\circ$.

5.Накресліть прямокутний трикутник PQR. Проведіть у ньому всі висоти.

6.Накресліть довільний трикутник. За допомогою транспортира і лінійки побудуйте в ньому бісектриси.

Уміння учнів зображати геометричні об’єкти відповідно до умови задачі зумовлюється наявністю в них досвіду споглядання геометричних зображень. Вправи за готовими малюнками виконують, зокрема, функцію зразка виконання малюнка до задачі, зручного розміщення зображення геометричної фігури щодо унаочнення її потрібних елементів. Процес побудови геометричних фігур зручно спостерігати за анімаціями і здійснювати за допомогою електронних засобів навчального призначення [16], [37], [38], [39], GRAN-2D [62].

Важливою метою навчання є виховання потреби у самостійній пізнавальній діяльності школярів. Самостійна пізнавальна діяльність – це така діяльність учнів, яка свідомо спрямовується ними на всебічне самопізнання і розвиток своєї особистості, своїх фізичних та розумових сил та здібностей.

У процесі виконання вправ формуються основні вміння самостійного навчання: уважно сприймати інформацію, логічно усвідомлювати умову і результати, мотивувати кожен крок, актуалізувати опорні знання, здобувати додаткову інформацію, здійснювати самоконтроль і корекцію та ін.

Виховати в учнів потребу до самостійної пізнавальної діяльності неможливо без мотивації і стимулювання цієї діяльності. У педагогіці накопичено чимало способів мотивації і стимулювання навчальної діяльності. Особливо дієвими є: створення ситуації успіху в учнів; роз'яснення суспільної та особистої значущості навчання; заохочення [8].

Дослідження показало, що ситуації успіху під час виконання вправ можна створювати кількома способами. На початковому етапі самостійної навчальної діяльності доцільно пропонувати учням тільки доступні завдання, заохочувати проміжні дії і в такий спосіб створювати мікроклімат упевненості й бажання виконувати аналогічні вправи. Ситуацію успіху створюють шляхом диференційованої допомоги учням у виконанні вправ однакової складності. З цією метою застосовують картки-консультації, картки-інструкції, алгоритмічні приписи і т. ін. в залежності від умінь виконувати такі вправи.

Роз'яснення суспільної й особистої значущості навчання формує в учнів почуття власної відповідальності за результати навчальної праці. Велику допомогу вчителеві в цьому надають задачі з прикладним змістом, розв'язуючи які, учні усвідомлюють зв'язок теорії з практикою, роль математичних знань у різних галузях науки і виробництва, у повсякденному житті.

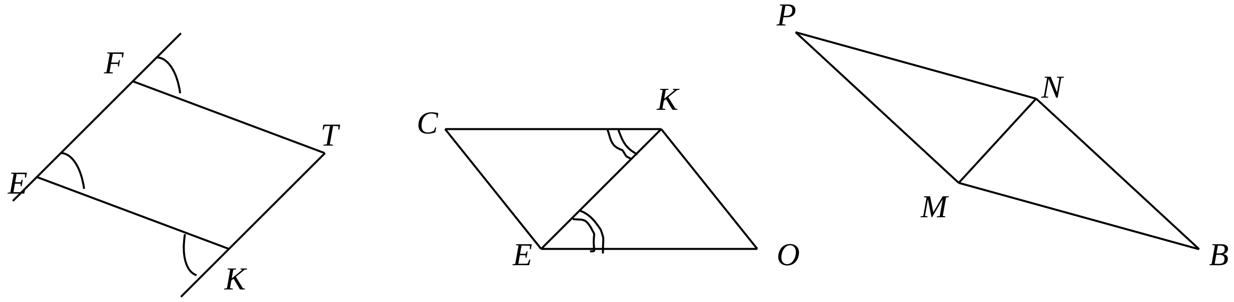
Заохочення є могутнім стимулом у формуванні потреби в самостійній пізнавальній діяльності. Практика підтверджує, що коли самостійна пізнавальна діяльність систематично не супроводжується процесами контролю, допомоги, корекції, заохочення, а здійснюється лише епізодично, то в учнів не виникає в ній потреби.

4. **Контрольно-коригувальні.** У навчанні математики за допомогою вправ зручно контролювати засвоєння учнями знань і сформованість умінь, виявляти недоліки в їхніх знаннях і вміннях та ін. Такий контроль здійснюється на всіх етапах навчального процесу: на початку уроку (контроль наявності опорних знань і вмінь); у процесі вивчення нового матеріалу (контроль сприйняття й усвідомлення нового матеріалу, з метою запобігти можливим помилкам); на етапі закріплення матеріалу (контроль змісту дій, що формуються в учнів); після вивчення теми (тематичний контроль) та ін.

На початку вивчення нового матеріалу перевіряються знання опорних уявлень і понять для їх уточнення і поглиблення з метою підготовки учнів до засвоєння нового матеріалу. Основна функція такого контролю − актуалізація знань і способів виконання дій.

Контроль опорних знань і вмінь здійснюється частіше за допомогою усних вправ та фронтальних опитувань.

Важливо актуалізувати не тільки формулювання теорем і означень необхідних понять, а й належне розуміння учнями відповідного теоретичного матеріалу. Для цього такі запитання, як: “Що називається ...?”, “Як формулюється така-то теорема?” корисно замінити відповідними вправами, виконуючи які, учні і формулюють і водночас застосовують означення, теореми. Наприклад, замість запитання “Яка геометрична фігура називається паралелограмом?” пропонується вправа: “Який із чотирикутників, зображених на мал. 1.9, є паралелограмом за означенням?”[48]



Мал. 1.9

У своїх відповідях учні не тільки відтворюють означення і теореми, а й здійснюють їх вибір, вчаться їх застосовувати.

Контроль за усвідомленням і закріпленням нового матеріалу доцільно організовувати на основі навчальних самостійних робіт. Тоді вчитель має можливість здійснювати індивідуальний підхід до оцінювання знань і вмінь учнів і відповідно спрямовувати діяльність кожного з них. На цьому ж етапі учні оволодівають основними способами самоконтролю, у них виникає потреба в самоконтролі й самокорекції.

Тематичний контроль здійснюють наприкінці вивчення однієї або кількох тем за допомогою контрольних робіт. Його мета – встановити, чи засвоїли учні тему і на якому рівні.

У доборі завдань для тематичних письмових робіт з геометрії в основній школі слід дотримуватись таких вимог :

1) завдання не повинні бути складнішими, ніж ті, які пропонувались у класі для колективної роботи за участю та з допомогою вчителя;

2) для виконання завдань в учнів має вистачати теоретичних знань, здобутих на даному етапі навчання;

3) потрібно уникати завдань, які вимагають словесного викладу тривалих логічних міркувань;

4) завдання слід розміщувати в порядку наростання їх складності;

5) бажано, щоб текст контрольної роботи містив кілька варіантів, кожен з яких має три частини: перша відповідає початковому і середньому рівням навчальних досягнень (рівень обов’язкових результатів навчання), друга − достатньому і третя − високому рівням. Наявність трьох частин дає можливість працювати учням в індивідуальному темпі та відповідно до їхньої математичної підготовки;

6) ефективність контролю залежить від його змісту. Тому в доборі тексту контрольної роботи, необхідно визначити функції кожного завдання і забезпечити їх реалізацію Це особливо стосується завдань середнього рівня навчальних досягнень. З метою перевірки засвоєння окремих понять або формування певних умінь чи навичок зручніше застосовувати завдання за готовими малюнками, оскільки для

розв’язування текстових геометричних задач необхідно звертати увагу на багато другорядних деталей (виконання малюнка, короткого запису умови і т. ін.);

7) потрібно контролювати не тільки результат, але й процес вивчення теми. З цією метою бажано проводити контрольні роботи з невеликих, завершених за змістом порцій матеріалу.

У результаті тематичного оцінювання найголовніше забезпечити можливість учнів показати свої знання на будь-якому рівні навчальних досягнень. Насамперед потрібно сформувати в учнів потребу в контролі й самоконтролі. Учень повинен знати, що він завжди має реальну можливість показати й покращити свої знання і вміння. Правильний контроль спільно із самоконтролем дає можливість кожному учневі бачити власні результати навчання.

Для того, щоб реалізувати потребу учнів в усвідомленні своїх знань і вмінь, контрольна робота повинна містити вправи, кожна з яких виконує певні функції саме в цій контрольній роботі. Тут мають бути вправи на засвоєння опорних знань і вмінь, декілька вправ різної складності з теми, якщо вивчається та одне завдання підвищеної складності. Вправи мають бути різноманітними також за видами діяльності.

Коригувальні функції вправ спрямовані на запобігання і своєчасне виправлення помилок, а також на усунення недоліків у знаннях і вміннях окремих учнів. Застосування вправ з метою корекції дає змогу підвищити їхню свідомість у засвоєнні знань, активізувати пізнавальну діяльність, виховувати звичку до самокорекції.

Корекція тісно пов’язана з контролюючою діяльністю і на певному етапі її можна розглядати як складову цієї діяльності. Але розуміння корекції тільки як виправлення досить обмежене. Діяльність учнів необхідно і можливо коригувати ще до появи їхніх помилок. Робити це доцільно в процесі спеціально підібраних вправ.

Для прикладу, розглянемо той факт, що на початку вивчення геометрії частина учнів зазнає труднощів у засвоєнні геометричних понять. Ці труднощі зумовлені, зокрема, невмінням виділити істотні ознаки геометричних об’єктів, абстрагуватися від неістотних. За таких умов учні здійснюють узагальнення за неістотними ознаками об'єктів. У дослідженнях О. М. Кабанової-Меллер [72], Д. Н. Богоявленського та Н. О. Менчинської [18] наведено приклади такої генералізації неістотних ознак. Учні, наприклад, не впізнають прямокутний трикутник, якщо прямий кут його знаходиться вгорі, рівнобедрений трикутник, якщо його основа не розміщена горизонтально внизу, паралельні прямі, якщо вони не розміщені горизонтально і т. ін.

Досвідчені вчителі, розуміючи корекцію в широкому сенсі, відводять їй значне місце в навчальному процесі. Знаючи наперед, у якому місці навчальної теми учні можуть допускати помилки, вчитель за допомогою відповідних вправ створює проблемні ситуації, розв'язання яких допомагає не просто уникнути помилок, а й акцентувати увагу учнів на можливості їх появи.

Педагогічний досвід свідчить про необхідність вироблення в учнів уміння самокорекції, яке є важливою складовою навчальних умінь учнів і дає можливість здійснювати коригування в процесі засвоєння знань. Виховання стійкої звички і потреби в самокорекції, а також створення для неї відповідних умов виховує в кожного учня почуття відповідальності за власну діяльність, а також запобігає відставанню учнів у навчальному процесі, виникненню недоліків у їхніх знаннях, уміннях і навичках.

5. **Пропедевтичні** функції вправ відіграють роль відправного моменту, залучаючи учнів до мислительного процесу, створюючи основу для осмислення і засвоєння в майбутньому нового змісту. Знання, які закладаються за допомогою пропедевтичних вправ, сприяють чіткому усвідомленню учнями зв'язків між раніше набутими і новими знаннями і забезпечують ефективніше засвоєння нового матеріалу. Відомо, що курс планіметрії основної школи є пропедевтичним щодо курсу стереометрії старшої школи. Розв'язування стереометричних задач здебільшого зводиться до розв'язування їх планіметричної частини, тому зрозуміло, що вправи з геометрії в основній школі виконують пропедевтичні функції. Однак потрібно забезпечити реалізацію цих функцій шляхом використання в навчальному процесі, наприклад, вправ на відшукання плоских фігур у складі відповідних просторових фігур, на встановлення аналогій між плоскими і просторовими

фігурами (круг – куля, коло – сфера і т. ін.). Під час вивчення властивостей плоских фігур корисними будуть вправи, що спонукають до просторового сприйняття фігури, яка вивчається в площині. Наприклад, під час вивчення поняття паралельних прямих доцільно запропонувати учням таку вправу: „Якщо дві прямі не лежать в одній площині і не перетинаються, то чи завжди вони будуть паралельними?”. Виконання такої вправи краще супроводжувати унаочненням.

Навчальною програмою з геометрії для основної школи передбачено вивчення розділу „Початкові відомості зі стереометрії”. Це дає можливість безпосередньо організувати пропедевтику вивчення стереометрії в старшій школі будь-якого профілю.

Добираючи вправи для пропедевтичного вивчення деякого геометричного змісту, доцільно дотримуватись таких вимог: вправи мають бути посильними для учнів; слід уникати в їх виконанні перевантаження обчисленнями та додатковими обґрунтуваннями; завдання мають містити посилання на відповідний теоретичний матеріал; виконання вправи не повинно оцінюватись негативно у випадку неправильної відповіді або її відсутності.

6. **Діагностувально-прогностичні функції**. Новим концептуальним орієнтиром формування змісту сучасної освіти (математичної, зокрема) є компетентнісно орієнтований підхід. Набуття учнями предметних знань, умінь і навичок має спрямовуватись на їхній інтелектуальний і культурний розвиток, формування здатності продовжувати освіту, швидко реагувати на запити часу, приймати рішення і т. ін. Підготовка учнів до практичного застосування здобутих знань з геометрії, формування в них відповідних способів діяльності здійснюється засобом системи вправ. Ідеться про предметні (способи геометричної діяльності: вимірювання, обчислення значень геометричних величин і т. ін.), надпредметні (аналіз, синтез, порівняння, постановка і досягнення цілі, відшукання причинно-наслідкових зв’язків, формулювання і перевірка гіпотез і т. ін.) і рефлексивні (графічні, вербальні, логічні, образні, інтуїтивні і ін.) способи діяльності як складові компетентностей учнів [88]. Дослідження психологів [92], [173] свідчать про те, що саме в процесі розв’язування геометричних задач виявляються математичні і

загальноінтелектуальні здібності учнів, характер їхнього мислення і формується самовизначення щодо профілю навчання в старшій школі та професійної діяльності у майбутньому. Вивчення властивостей геометричних фігур, що є моделями реального світу, сприяє розвитку мислення учнів, формуванню їхнього наукового світогляду. Ознайомлення школярів з різними методами геометрії формує уявлення про даний предмет, як метод пізнання дійсності. Тому вправи, які пропонуються учням під час вивчення геометрії в основній школі, мають насамперед реалізовувати дидактичні принципи навчання, а саме: науковості (відповідність сучасному стану науки) та доступності (відповідність рівню розвитку кожного учня); наступності; системності; перспективності; наочності навчання. До системи вправ з геометрії в основній школі потрібно віднести задачі компетентнісного характеру за такими вимогами: умова задачі має бути доступною для розуміння учнем з мінімальною математичною підготовкою і життєвим досвідом; контекст задачі та спосіб її розв'язування повинен бути цікавим, евристичним, захоплюючим для школярів відповідної вікової категорії; задача має допускати різні підходи до її розв'язання, що відповідає різним типам мислення учнів; процес розв'язування задачі повинен сприяти систематизації і усвідомленню знань учнями. Приклади діагностувально-прогностичних вправ подано в додатку Д дисертаційного дослідження.

Отже, вправи виконують різноманітні функції в процесі навчання геометрії в основній школі і є одним із засобів вирішення трьох взаємопов'язаних освітніх завдань: навчальних, розвивальних і виховних. Ефективність *системи* геометричних *вправ* у навчальному процесі забезпечується її системотвірними факторами: цілями і вимогами до результатів навчання геометрії, дидактичними принципами, методами навчання геометрії, віковими психологічними особливостями учнів 7 – 9 класів.

1.3. Принципи добору системи вправ з геометрії в основній школі

Система (від грецького systema – ціле, складене з частин, об'єднання) передбачає:

– порядок, зумовлений правильним розташуванням частин, стрункий ряд, зв'язане ціле;

– сукупність принципів, покладених в основу певного вчення;

– сукупність частин, пов'язаних спільною функцією. [149]

Будь-яка система характеризується її структурою, складовими та загальним призначенням. Структуру системи визначають її елементний склад, ієрархічність та зв'язаність. Зв'язки між елементами системи характеризуються певним порядком, внутрішніми властивостями, спрямованістю на реалізацію функцій системи. Функціональне призначення системи зумовлюється її системотвірним фактором, завдяки якому в ній з'являється якісно нова властивість, відмінна від властивостей її окремих складових.

Педагогічна система характеризується не лише наявністю зв'язків і відношень між її елементами, а й єдністю із середовищем, у якому ця система набуває цілісності.

У навчанні геометрії важливо не тільки, які типи вправ пропонувати учням, але і в якій послідовності це робити, як пов'язувати окремі типи, в якому порядку розглядати вправи кожного типу.

Під системою навчальних вправ розуміємо сукупність вправ певних типів, спрямованих на формування тих чи інших умінь і навичок. *Система вправ буде ефективним засобом організації навчання геометрії, якщо в основу її добору буде покладено закономірності і цілі навчального процесу.*

Чимало досліджень присвячено проблемі побудови системи математичних вправ та дидактико-методичним вимогам до них. Найбільш універсальний, на наш погляд, є підхід Г. І. Саранцева до побудови системи вправ [141], у якому автор розробив теоретичну модель конкретної системи математичних вправ, виділив її основні компоненти, виявив закономірності її функціювання в процесі навчання. Вимоги до побудови системи вправ формулюються з позицій їх здатності бути: носіями змісту навчання; засобом засвоєння змісту навчання; способом організації навчально-пізнавальної діяльності.

Спираючись на роботи П. О. Шеварьова, Я. Й. Грудьонов [48] довів, що сам набір вправ, без урахування психологічних закономірностей засвоєння знань, є джерелом виникнення в учнів помилкових асоціацій. Нейтралізувати негативний вплив цих закономірностей автор пропонує шляхом урахування в побудові системи вправ таких принципів: неперервне повторення; варіативність вправ і застосування контрприкладів; принцип порівняння у вигляді періодичного протиставлення (чергування вправ на прямі й обернені операції, чергування будь-яких інших задач, коли треба підкреслити їх взаємозв'язок, спільне і відмінне; обмеження кількості розміщених в одному ряду однотипних вправ та ін.)

В. А. Черкасов визначив дидактичні основи побудови системи вправ шляхом аналізу понять "процес навчання" і "метод навчання". Розглянувши функції навчання та модель процесу навчання на матеріалі фізики, він сформулював такі вимоги до системи вправ: система вправ має забезпечити уявлення про об'єкт, що вивчається. (для цього необхідно застосовувати різні моделі, які враховують специфіку матеріалу та вправи на перехід від однієї моделі до іншої); система вправ має забезпечити реалізацію можливостей змісту навчального матеріалу для його теоретичного узагальнення з метою формування в учнів теоретичних понять. Основні теоретичні положення ілюструються прикладами на матеріалі фізики основної школи. Аналізуючи відповідну систему понять, автор вважає, що система вправ має носити блочний характер, де кожному блоку понять відповідає окремий блок задач і вправ. При цьому "...вправи повинні забезпечити не простий перелік усіх можливих зв'язків і відношень, а сприяти розкриттю того загального, що пов'язує групу понять в окремий блок і забезпечує зрощення блоків." [185, с.73-74]

В. Ф. Чучуков досліджував вплив системи диференційованих завдань на ефективність управління навчальним процесом і розробив основні дидактичні вимоги до її побудови [186]. Ці вимоги розглядаються в трьох аспектах – загальнодидактичному, конкретно-методичному і з погляду специфіки диференційованих завдань. До загальнодидактичних належать такі вимоги: відповідність змісту навчального матеріалу; посильність завдань відповідній віковій категорії учнів; сприяння розумовому розвитку учнів, свідомому засвоєнню ними матеріалу. Конкретно-методичні вимоги обумовлюються специфікою навчального предмета. З погляду специфіки диференційованих завдань, автор формулює ряд вимог до системи таких завдань що зводяться до вимоги бути спільними за тематикою та різними за складністю виконання для різних типологічних груп учнів класу, різної кількості завдань для кожної з таких груп на різних етапах навчального процесу (для сильніших учнів − менше завдань на первинне застосування знань і більше тренувального і творчого характеру; для слабших учнів − більше завдань на сприйняття й осмислення та тренувальних і т. ін.)

Логічну структуру навчальної системи задач (на матеріалі курсу алгебри середньої школи) досліджувала М. І. Денисова [56]. Предмет цього дослідження становлять спеціальні системи вправ, спрямовані на підготовку учнів до самостійного розв’язування окремої складної математичної задачі (“навчальні” системи задач). Принципи побудови таких систем ґрунтуються на аналізі змісту і структури розв’язування відповідних складних задач. Враховано, зокрема, компоненти вихідної складної задачі і логічні зв’язки між цими компонентами. Авторка формулює такі принципи забезпечення оптимальної повноти навчальної системи задач: варіювання задач системи (мається на увазі варіювання як зовнішньої форми задачі, так і її змісту); забезпечення оптимальної кількості задач-компонентів системи; взаємна відповідність складності процесу розв’язування вихідної задачі і математичних здібностей учня.

У дослідженні С. Б. Суворової [154] в основу пропонованої системи вправ (на матеріалі алгебри) покладено етапи навчальної діяльності учнів і вимоги до їх навчальних досягнень.

В. А. Жаровим обґрунтовано [61] деякі методичні принципи побудови системи геометричних задач, керуючись якими, на його погляд, можна створити систему задач, яка б сприяла засвоєнню основних ідей і методів геометрії та виробленню необхідних умінь і навичок. В основу вимог до системи вправ з геометрії В. А. Жаров поклав ідею геометричних перетворень. Ці принципи сформульовано так: покладання в основу системи вправ з геометрії ідеї геометричних перетворень; ознайомлення учнів з доступними їм логічними поняттями геометрії в межах навчальної програми засобом вивчення характеристичних властивостей (ознак) деяких найпростіших геометричних фігур; зв'язок теорії з практикою; систематичне усне виконання нескладних геометричних вправ; цілісне вивчення геометричних фактів і поступове узагальнення знань учнів у процесі їх застосування для розв'язування задач (залучення до системи геометричних задач комплексного характеру).

У дисертаційному дослідженні В. Г. Бевз [11] розроблено психолого-педагогічні й методичні вимоги до системи стереометричних вправ для загальноосвітньої школи, реалізація якої сприяє досягненню всіма учнями рівня обов'язкової підготовки зі стереометрії і створенню умов для досягнення вищих результатів учнями, які цього бажають. Вимоги до системи стереометричних вправ відображають дидактичні принципи навчання математики, програмні вимоги до результатів вивчення відповідного навчального предмету, психологічні закономірності мислительної діяльності учнів у процесі розв'язуванні задач.

Системотвірним фактором будь-якої освітньої системи є мета освіти, яка конкретизується в цілях навчання [§ 1.2, с. 29 дисертаційного дослідження]. Цілі навчання характеризуються дидактичними принципами, дотримання яких у шкільній практиці гарантує досягнення цих цілей. Кожен принцип навчання містить у собі певне положення чи ідею, яка має бути реалізована в процесі навчання. Можна говорити, що існують засоби, за допомогою яких вчитель, керуючись певним принципом, реалізує на практиці закладену в ньому ідею. До засобів впровадження таких ідей слід віднести зміст виучуваного матеріалу, форми організації навчальної діяльності учнів, методи і засоби навчання, віко-психологічні особливості учнів тощо. Для розроблення методичних засад добору системи вправ з геометрії в основній школі ми використовували дидактичні принципи, які: орієнтують на добір змісту навчання (науковості, повноти, доступності і послідовності, наочності, зв'язку навчання з життям); регулюють операційно-діяльнісний компонент навчання (наочності, свідомості й активності, поєднання різних методів, засобів і форм організації навчання); забезпечують орієнтацію на особистість дитини (активно-діяльнісний характер навчання, забезпечення успіху в оволодінні знаннями, розкриття здібностей і творчих задатків учнів, урахування їхніх вікових та індивідуальних особливостей).

Враховуючи сучасні цілі та вимоги до результатів навчання геометрії в основній школі, дидактичні принципи навчання, особливості навчальної пізнавальної діяльності учнів підліткового віку, систематизуючи різні підходи до побудови системи навчальних вправ, ми визначили принципи добору системи вправ з геометрії в основній школі – положення, якими керувалися при побудові системи вправ для досягнення відповідних методичних цілей а також розробили психолого-методичні вимоги до їх реалізації. Розглянемо кожний із принципів.

1. Принцип повноти. Система вправ з геометрії в основній школі має бути повною. Це означає насамперед, що система вправ має *відповідати діючій програмі*, підручнику чи навчальному посібнику, тобто містити достатню кількість вправ до всіх розділів, тем, передбачених програмою, і розміщуватися у відповідній послідовності. Термінологія і символіка, вживана у вправах, має відповідати термінології і символіці підручника. Система вправ з геометрії в основній школі має забезпечити реалізацію відповідних програмних вимог.

Основними завданнями реалізації змісту геометрії в основній школі є: вивчення геометричних фігур на площині, розвиток просторових уявлень і уяви; формування уявлень про геометричні величини та навичок і вмінь вимірювання і обчислення їх значень; навчання математичної мови; формування уявлень про математичні поняття і методи як важливі засоби моделювання реальних процесів і явищ. Програма з математики [130] виділяє в курсі такі змістові лінії: геометричні фігури та їх властивості; вимірювання геометричних величин, обчислення їх значень.

Для забезпечення організації засвоєння курсу потрібно виділити основні елементи кожної з ліній, які необхідно засвоїти учням. Предмет та основні елементи змісту, що підлягають засвоєнню, визначаються вимогами до результатів навчання.

У результаті вивчення курсу геометрії в основній школі учні мають володіти таким мінімумом знань і вмінь:

– знати означення геометричних фігур (за програмою), їх ознаки, властивості і відношення, сформульовані в означеннях, аксіомах і теоремах; уміти зображати геометричні фігури, про які йдеться в умовах теорем і задач, виділяти відомі фігури на малюнках і моделях;

– розв’язувати типові задачі на обчислення, доведення і побудову, проводити доказові міркування, спираючись на теоретичні факти (аксіоми, теореми, означення);

– виконувати основні побудови циркулем і лінійкою; розв’язувати нескладні комбіновані задачі, які зводяться до основних побудов; застосовувати апарат алгебри і тригонометрії в процесі розв’язування стандартних геометричних задач;

– використовувати вектори і координати для розв’язування стандартних задач (визначення довжин і міри кутів; додавання векторів і множення вектора на число).

Вимоги до результатів навчання учнів з геометрії в основній школі сформульовані у відповідній навчальній програмі [130] за такими вміннями: *пояснює, описує, зображує, формулює, доводить, розв’язує, застосовує*. Виділивши, наприклад, основні елементи змісту курсу геометрії, які мають бути засвоєні з теми: „Розв’язування трикутників”, отримуємо вимоги до учнів уміти:

– *пояснювати*, що таке синус, косинус і тангенс кутів від 0° до 180°;

– *формулювати,* теореми косинусів і синусів;

– *описувати* основні випадки розв’язування трикутників та алгоритми їх розв’язування;

– *доводити* теореми синусів і косинусів;

– *розв’язувати* трикутники. Застосовувати алгоритми розв’язування трикутників до розв’язування прикладних задач;

– *використовувати* формули для знаходження площі трикутника (Герона, за двома сторонами і кутом між ними, за радіусом вписаного і описаного кола) в розв’язуванні задач.

Аналіз тем курсу геометрії для 7 – 9 класів у контексті вимог до засвоєння змісту показав, що опанування змістом кожної з ліній курсу геометрії основної школи передбачає засвоєння геометричних понять, а також формування таких геометричних умінь, як обчислювати геометричні величини, доводити геометричні твердження та конструктивних умінь.

Отже, система вправ з геометрії в основній школі має створювати умови для такої навчальної діяльності, яка б забезпечила засвоєння геометричних понять і формування геометричних умінь. Для цього вона повинна містити достатню кількість вправ з *реалізації їх функцій* (навчальних, розвивальних, виховних, контрольних, коректувальних та інших). Крім цього мають бути підсистеми вправ для організації систематичного повторення матеріалу, самостійної навчальної діяльності, для її контролю і корекції. Основна функція системи вправ з геометрії в основній школі полягає в організації засвоєння змісту курсу. Реалізація інших функцій вправ системи (особливо розвивальної і виховної) залежить від фахового рівня і досвіду вчителя. Маючи велику кількість дидактичних матеріалів, у яких вправи групуються відповідно до видів діяльності (тренувальні, для самостійних і контрольних робіт тощо), вчитель інколи не чітко ідентифікує функції тієї чи іншої вправи за даних педагогічних умов. Практика свідчить, що за таких умов розвивальні і виховні функції вправ реалізуються неповно. До того ж нерідко вчитель не керує процесом їх реалізації. Часто витрачається час на запис умови задачі, виконання малюнка, а на розв’язування залишається недостатньо уваги. Схеми і готові малюнки, екранні засоби для демонстрації властивостей фігур і залежностей між їх елементами застосовуються не повною мірою. Тому, добираючи вправи до конкретного уроку з геометрії, вчителеві необхідно також продумувати методику розв’язування кожної задачі, оформлення й обговорення результатів розв’язання. Оскільки розв’язування геометричної задачі потребує значного часу, потрібно намагатися забезпечити при цьому реалізацію всіх її функцій. Якщо ж метою навчальної ситуації є вироблення конкретних умінь або з’ясування властивостей чи зв’язків, то краще подавати умову задачі за готовим малюнком, забезпечуючи більш повно реалізацію лише однієї з функцій задачі.

Вправи є однією з форм функціонування методів навчання. Тому наступною вимогою до системи вправ з геометрії в основній школі є *реалізація функції методів навчання геометрії.*

Під методом навчання у дидактиці розуміють способи навчальної роботи вчителя й організації навчально-пізнавальної діяльності учнів з розв’язання різних дидактичних задач, спрямованих на оволодіння виучуваним матеріалом [146]. За характером навчальної пізнавальної діяльності учнів розрізняють такі методи навчання: пояснювально-ілюстративний; репродуктивний; проблемний; частково пошуковий; дослідницький.

Пояснювально-ілюстративним методом у навчанні геометрії користуються для введення понять, вивчення аксіом, теорем, розв'язування задач. Реалізувати цей метод допомагають вправи на виділення істотних ознак поняття і усвідомлення неістотних властивостей. Для цього зручно використовувати вправи за готовими малюнками на розпізнавання об'єктів поняття, що вивчається.

Репродуктивний метод застосовується для закріплення нового матеріалу, перевірки домашнього завдання. Учні відтворюють розв'язання задач, формулювання і доведення теорем, означення математичних понять і т. ін. Цей метод реалізується шляхом виконання вправ за зразком, за алгоритмом. Під час виконання таких вправ в учнів формується фонд дійових знань для продуктивної діяльності.

Одним із проблемних методів, що використовується у навчанні геометрії, є метод доцільних задач. Цей метод запропонував наприкінці XIX ст. С. І. Шохор-Троцький. Суть методу полягає в тому, що для кращого розуміння навчального матеріалу учням пропонуються підготовчі задачі. Вони готують учнів до розуміння означення нового поняття, до "відкриття" теореми, розуміння її доведення, до самостійного розв'язування задачі. Інколи за допомогою доцільних задач викладається вся тема. Наприклад, під час введення поняття "ромб" учням пропонується вправа: "Побудуйте паралелограм, у якого дві суміжні сторони рівні. Такий паралелограм називається ромбом. Сформулюйте означення ромба" [48].

Я. Й. Грудьонов визначив психологічні умови застосування методу доцільних задач: "Для застосування методу доцільних задач бажано добирати мінімальну кількість підготовчих вправ, до того ж одна і та сама вправа може розглядатись кілька разів, допомагаючи відтінити окремі деталі теми" [48, ст. 54]. Наведений вище приклад такої вправи задовольняє цю умову.

Частково пошуковий метод ще інколи називають евристичною бесідою. Евристична бесіда полягає в тому, що вчитель заздалегідь готує систему запитань, відповідаючи на які учні самостійно формулюють означення поняття, “відкривають” доведення теореми, знаходять спосіб розв’язування задачі.

Підготовчі задачі, на основі яких учні самостійно “відкривають” і формулюють нові теореми, викликають у них жвавий інтерес. Під час введення геометричних теорем корисно використовувати вправи на побудову відповідних фігур. Наприклад, “Накресліть довільний чотирикутник і виміряйте транспортиром його кути. Чому дорівнює їх сума?”

Очевидно, що метод доцільних задач є різновидом евристичного методу.

Для ефективнішого застосування методу евристичної бесіди доцільно вправи, які мають проблемний характер, пропонувати учням для домашньої роботи. У домашніх умовах кожен учень має змогу спокійно розглянути достатню кількість окремих випадків, звернутися до літератури і самостійно “прийти до відкриття”. Розв’язування таких задач не є обов’язковим для всіх учнів, і пропонується на високому рівні системи геометричних вправ.

Дослідницький метод передбачає самостійний пошук розв’язування пізнавальних задач. Так, у 9 класі після вивчення формул обчислення площ прямокутника, паралелограма, трикутника для учнів з високим рівнем навчальних досягнень посильним є, наприклад, завдання вивести формулу для обчислення площі трапеції.

У побудові системи вправ з геометрії основної школи важливою є вимога про *поєднання різних типів вправ* як за темами, так і за видами діяльності, а саме: система вправ з геометрії до кожної теми має містити достатню кількість вправ на обчислення, побудову, доведення і дослідження, а також для усного і письмового розв’язування, самостійної і колективної роботи. Така вимога сприяє урізноманітненню навчальної діяльності учнів, підвищенню усвідомленості засвоєння теоретичного матеріалу, виявленню індивідуальних можливостей учнів, розвитку інтересу до навчання.

Навчання, як набуття досвіду людиною, відбувається в результаті її активності й взаємодії з навколишнім світом, які пов'язані між собою. Активність виявляється у певних реакціях, діях, діяльності, вчинках. Учіння вимагає повного „розпредмечування знань" або компактного відтворення тих мисленнєвих і практичних операцій і дій, які колись здійснювалися в процесі пізнання явищ або предметів. Тобто, для того, щоб оволодіти новим геометричним змістом, учневі необхідно здійснити повний цикл навчально-пізнавальних дій: сприймання нового матеріалу, його первинного і наступного осмислення, запам'ятовування, вправляння в застосуванні теорії на практиці, повторення з метою поглиблення і засвоєння знань, умінь і навичок. Тому система вправ з геометрії в основній школі має *відповідати змісту, операційному складу і етапам навчальної пізнавальної діяльності*. У навчальній діяльності розрізняють три компоненти: мотиви і навчальні задачі; навчальні дії; дії контролю й оцінювання знань учнів. Повноцінна навчальна діяльність завжди є єдністю і взаємопроникненням всіх цих трьох компонентів. Знання і вміння учнів з математики свідомо засвоюються лише завдяки активному формуванню навчальної діяльності школярів, усвідомленню ними відповідних способів і орієнтирів. Будь-яка діяльність здійснюється шляхом виконання послідовності дій, кожна з яких складається з набору операцій – способів досягнення поставленої мети в конкретних умовах. Дії й операції утворюють структуру діяльності. Для того, щоб деякий зміст став предметом діяльності учнів, його потрібно, представити у вигляді задачі, яка б стимулювала активність школярів. Наприклад, у зарубіжних підручниках з геометрії [201 – 204], системи вправ містять блоки так званих „методичних задач" (3 – 5 послідовно ускладнених вправ з розв'язаннями (також альтернативними) на вироблення певного вміння). Блок завершується вправою на перевірку засвоєння цього вміння. Пропонуючи учням систему вправ (задач), ми впорядковували її також відповідно до етапів навчальної діяльності школярів. При цьому ми виходили з того, що система вправ з геометрії в основній школі має забезпечувати: усвідомлення учнями мети навчальної діяльності; зацікавленість до навчання; ефективність навчальної діяльності; умови для відшукання і застосування потрібних знань і вмінь для розв'язування задачі; виконання послідовності сенсорних, розумових та практичних дій, прийомів, операцій; можливість предметного контролю, корекції і оцінювання (самоконтроль, самокорекцію і самооцінювання) знань.

Навчальний процес забезпечується різними засобами, зокрема системою вправ, на всіх основних етапах навчального процесу: на етапі підготовки до введення нового змісту, безпосереднього введення нового змісту, його закріплення, етапі контролю і корекції. Тому однією з вимог до системи вправ з геометрії в основній школі є її *відповідність етапам навчального процесу*.

Співвідношення компонентів навчальної діяльності учнів, етапів навчального процесу і основних типів вправ (за В. О. Онищуком [117]), що їх реалізують, представлено у таблиці А.1 додатку А дисертаційного дослідження.

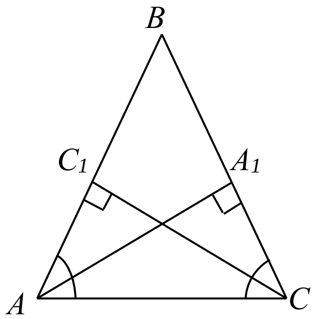
П. М. Ерднієв у своєму дослідженні доводить ефективність у навчальному процесі *матричного підходу до побудови системи вправ*. „Вправа набуває системної якості, якщо вона містить у своєму складі чотири компоненти: вихідну задачу; обернену задачу; складання і розв'язування задачі, аналогічної до вихідної; узагальнену задачу" [196, с. 144]. У роботі над математичною вправою (задачею) чітко виділяються чотири послідовних і взаємопов'язаних етапи: складання математичної вправи; виконання вправи; перевірка правильності результату; перехід до складнішої вправи. В існуючій практиці навчання здебільшого обмежуються другим із зазначених вище етапів. Однак життя вимагає від людини, насамперед, уміння (компетенції) розпізнавати проблеми, які виникають у довкіллі, і для вирішення формулювати їх у вигляді задачі (математичною мовою, зокрема). Тому важливо навчити школярів обох процесів (як розв'язування, так і складання задачі) з їх протилежними якостями і взаємозв'язками. Основою розвитку творчості дітей можуть бути елементарні вправи на складання геометричної задачі, аналогічної до даної, оберненої до даної, за запропонованою життєвою ситуацією (на знаходження площі земельної ділянки, кресленні прямого кута за допомогою звичайної мотузки (застосуванням Єгипетського трикутника) і т. ін.).

У доборі вправ до певної навчальної теми зазвичай варіюють сюжети і числові значення величин, зберігаючи незмінними математичні залежності. Це призводить до утворення однотипної системи вправ. Структурно протилежні задачі часто розглядаються окремо в часі. „Метод обернених задач” відомий у методиці і передбачає одночасне розглядання взаємно обернених задач. Ефективність такої методики в тому, що учні оволодівають як новими зв’язками між відомими фактами, так і складнішими формами міркування. У методиці геометрії „Метод обернених задач” реалізується шляхом вивчення взаємно обернених тверджень.

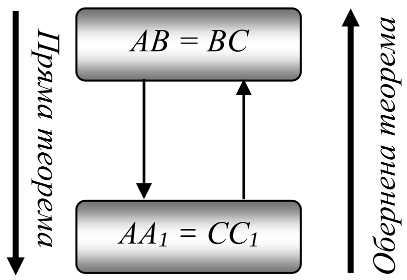
Розглянемо для прикладу два взаємно обернені твердження:

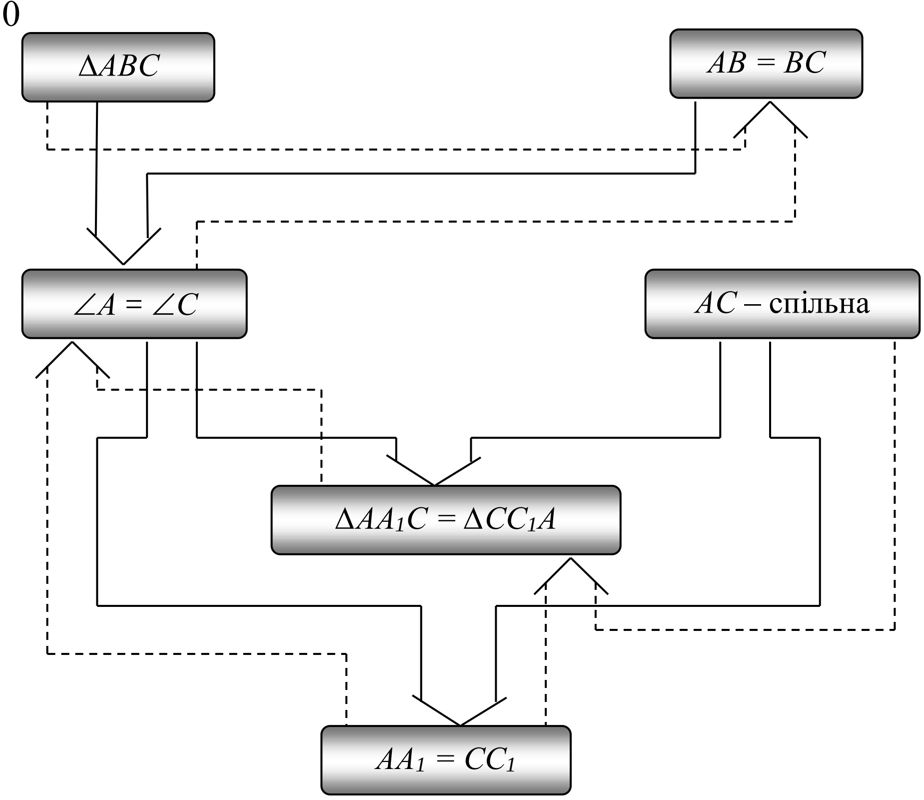
Пряме твердження	Обернене твердження
У рівнобедреному трикутнику висоти, проведені до бічних сторін, рівні (мал. 1.10).	*Якщо в трикутнику дві висоти рівні, то такий трикутник рівнобедрений (мал. 1.10).*

Схема доведення тверджень наведена на мал. 1.11



Мал. 1.10





Мал. 1.11 Граф-схема доведення взаємно обернених тверджень

Кожна стрілка означає логічний крок доведення. У доведеннях взаємно обернених тверджень візуально поєднано, а також наочно зображено відмінності і схожість. А саме: в обох доведеннях застосовується спільна сукупність понять і висловлювань (рівні трикутники, відрізки і кути); висловлювання, що є вихідним для доведення першого твердження, є висновком для оберненого і навпаки. Таким чином, свідоме протиставлення понять у доведенні взаємно обернених теорем про рівнобедрений трикутник спонукає до невимушеного протиставлення інших, простіших тверджень про ознаки рівності прямокутних трикутників. Розуміння переходу одного поняття в інше (пов’язаних одним носієм інформації) сприяє усвідомленню учнями характеристичних властивостей геометричних понять, формуванню нового рівня абстракції і логічного мислення.

Узагальнення означає перехід знання на вищий рівень на основі встановлення для даних об’єктів спільних властивостей чи співвідношень. Узагальнення пов’язане з аналогією. Логічні кроки за аналогією мають такий зміст: 1) предмет А має властивості a, b, c, x; 2) предмет В має властивості a, b, c; 3) висновок: гіпотетично, предмет В має і властивість x. Просте застосування аналогії веде до утворення вправи, однотипної до вихідної, а застосування узагальнення до вихідної задачі дає складнішу задачу. Для свідомого засвоєння нового поняття чи способу розв’язування недостатньо застосовувати однотипні вправи. Корисно дати учням можливість самостійно узагальнити розв’язану задачу для того, щоб розв’язати складнішу, видозмінюючи, за потребою, попередній спосіб розв’язання.

Отже, застосування геометричних вправ у вигляді матриці задач (вихідної, оберненої, аналогічної до вихідної та узагальненої) сприяє свідомому засвоєнню понять і формуванню узагальнених умінь.

Як приклад, пропонуємо таку матрицю задач на засвоєння властивості відстані між серединами послідовно відкладених відрізків (мал. 1.12).

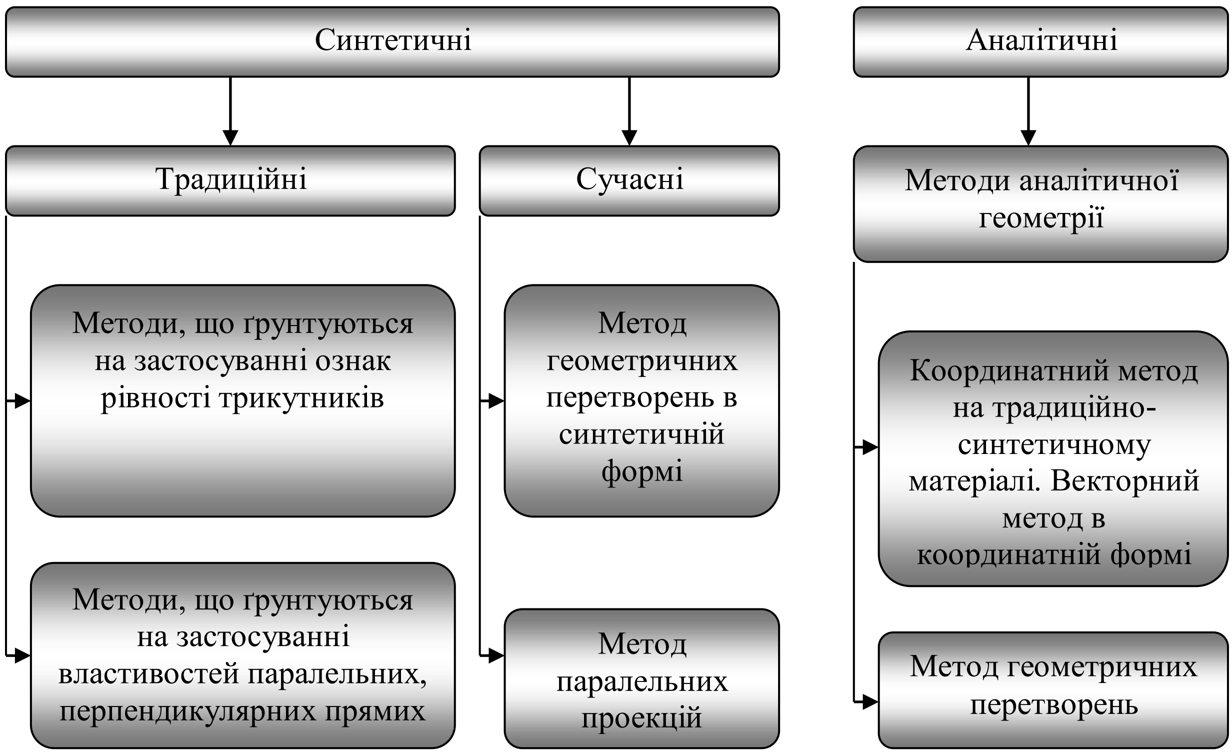
вихідна	обернена
Відрізок довжиною 20 см поділено на дві нерівні частини. Чому дорівнює відстань між серединами цих частин?	Відстань між серединами відрізків, на які точка *O* ділить відрізок *AB*, дорівнює 10 см. Яка довжина відрізка *AB*?
аналогічна до вихідної	**узагальнена**
На промені *AM* відкладено відрізки *AB* = 4 см і *BC* = 6 см. Знайдіть відстань між серединами відрізків *AB* і *BC*.	Відрізок, довжиною m поділено на будь-які два відрізки. Знайдіть відстань між серединами цих відрізків.

Мал. 1.12

2. Принцип науковості у побудові системи вправ з геометрії в основній школі випливає з принципу науковості добору відповідного змісту і полягає в тому, що навчальний матеріал має відповідати рівневі сучасної науки геометрії, подаватися учням у повній (дидактичній) системі, що відбиває наукову систему в певній послідовності, зберігає зв’язки понять, тем, розділів усередині кожного предмета, а також міжпредметні зв’язки; знайомити з історією відкриттів, показувати перспективи розвитку науки.

У побудові системи вправ з геометрії в основній школі цей принцип ми реалізували, зокрема, шляхом *використання сучасної термінології і символіки* у змісті геометричних вправ і в процесі їх розв’язання. Крім того, фабула задачі не повинна містити застарілих чи побутових термінів, щодо геометричних понять. Також обов’язковою була вимога використовувати сучасну математичну символіку до схематичних зображень, письмового та усного обґрунтувань і строгі побудови розв’язань і доведень. Відомо, наприклад, що гіпотенуза прямокутного трикутника у „Началах Евкліда” має назву „сторона, яка прямий кут стягує”, однак уживання такого терміна в умовах шкільних геометричних задач не є доцільним.

Реалізація принципу науковості у навчанні геометрії в школі передбачає *ознайомлення учнів з різними методами геометрії*. У викладанні шкільного курсу геометрії використовують синтетичні й аналітичні методи геометрії (мал. 1.13).



Мал. 1.13 Методи геометрії

Система вправ, спрямована на засвоєння того чи іншого методу, має реалізувати такі вимоги. По-перше, вона має забезпечувати засвоєння всіх складових певного методу. Так, застосування методу геометричних перетворень передбачає володіння такими вміннями: 1) будувати образи фігур відповідно до заданого перетворення; 2) знаходити відповідні точки фігур; 3) виділяти елементи, що визначають перетворення; 4) будувати відповідні точки відповідно до заданого перетворення; 5) застосовувати специфічні властивості перетворень. Формування кожного з виділених умінь потребує відповідний йому вид вправ: а) вправи на побудову образів фігур; б) вправи на знаходження відповідних точок; в) вправи на знаходження елементів, що задають перетворення; г) вправи на побудову відповідних точок. По-друге, система вправ має містити достатню кількість завдань для формування відповідного рівня володіння прийомом. По-третє, система вправ має формувати вміння визначати можливість застосування того чи іншого прийому в даній ситуації. І, нарешті, система вправ має містити завдання на розпізнавання типу задачі і свідомого вибору прийому її розв’язування.

3. Принцип доступності вимагає, щоб обсяг і зміст навчального матеріалу були посильними для учнів, відповідали рівню їхнього розумового розвитку та запасу знань, умінь і навичок. Цей принцип реалізується вимогою *коректності формулювання умови і вимоги задач* у системі геометричних вправ. Отже, умова і вимога геометричної задачі мають бути сформульовані чітко, коректно і зрозуміло для сприймання. Терміни і символи, які використовуються для формулювання задачі мають бути зрозумілими і знайомими учням. Якщо слова „перетинаються”, „належить”, „перпендикулярний” замінено відповідними символами „$\cap$”, „$\in$”, „$\perp$”, то вони повинні бути раніше вживаними вчителем, учнями або присутніми в тексті теоретичного матеріалу підручника і обов’язково пояснені. Символічна форма запису умови і вимоги задачі має містити лише знайомі дітям графічні символи. Готові малюнки, за якими учні розв’язують задачі, мають виконуватися ретельно й акуратно, потрібно уникати окремих випадків. Наприклад, якщо в задачі йдеться про довільний паралелограм, то малюнок не повинен нагадувати ромб чи прямокутник. Вдалим буде такий малюнок, на якому окремі елементи фігури (скажімо, медіана, бісектриса і висота, проведені з однієї вершини трикутника) виділяються чітко, різко розмежовуються. Аналіз змісту зарубіжних підручників з геометрії [201 – 204], переконує у доцільності ілюстрування умови задачі і процесу її розв’язування кількома послідовно трансформованими малюнками або такими, що ілюструють геометричний об’єкт з різних кутів зору. Таке унаочнення сприяє кращому усвідомленню учнями умови задачі і властивостей абстрактних геометричних понять.

У текстовій формі задача має містити чітко виділені умову і вимогу. Зручніше, коли умова є першою частиною формулювання і починається із вказівки на фігуру, елементи якої потрібно знайти, чи властивості якої – довести. За нашими спостереженнями, задачі, сформульовані таким чином: „Знайдіть кут між бічними сторонами рівнобедреного трикутника, якщо кут при основі дорівнює 40°” сприймається дещо складніше, ніж у такому вигляді: „У рівнобедреному трикутнику кут при основі дорівнює 40°. Знайдіть кут між бічними сторонами цього трикутника”. Особливо це стосується задач нижчого рівня складності і системи вправ для перших уроків систематичного курсу геометрії. Це пояснюється психологічними закономірностями сприймання і переробки інформації.

Принцип доступності у побудові системи вправ з геометрії в основній школі реалізується вимогою *відповідності* елементів системи *рівням навченості учнів.* Така вимога означає наявність достатньої кількості вправ на кожному з рівнів знань умінь і навичок учнів відповідного етапу навчання геометрії, а також для можливості просування їх за цими рівнями у бік підвищення. Система вправ з геометрії поряд із задачами на доведення, де використовується дедукція, має містити задачі алгоритмічного характеру і ті, що розв’язуються методом дедукції. Потрібно забезпечити поступове наростання складності вправ для того, щоб учні з різним рівнем розвитку і характером мислення мали можливість самостійно переходити від нижчого рівня до вищого, не втративши при цьому впевненості у своїх силах і, як наслідок, – інтересу до вивчення предмета. Слід пам’ятати, що відсутність або недостатня кількість вправ вищих рівнів знижує розвивальні і виховні можливості будь-якої системи вправ. Тому рекомендується (за Л. В. Занковим [146]), щоб зміст завдань для учнів знаходився в зоні їх найближчого розвитку.

За принципом доступності у навчанні система геометричних вправ в основній школі має *відповідати віковим особливостям учнів підліткового віку*.

Розумові здібності підлітка, на відміну від молодшого школяра, набувають нової якості, стають опосередкованими. Це відбувається завдяки розвитку понятійного, мовно-логічного, абстрактного мислення. Підліток може оперувати поняттями, міркувати про властивості та якості предметів, висувати гіпотези, планувати дослідницьку діяльність та засвоювати значні обсяги повідомлень. Причини неуважності підлітка полягають у суперечливості самого вікового періоду: підліток здатен придумати спосіб запам'ятовування нової формули, тобто керувати своєю пам’яттю, може висунути гіпотезу, тобто спрямувати, регулювати процес свого мислення тощо, але йому дуже важко керувати своєю особистістю, собою як цілістю. В основному це пов’язано з новими інтересами, переживаннями та хронічною емоційною нестабільністю, яка виявляється в імпульсивності, нестриманості, іноді агресивності. Розумова діяльність підлітка і його поведінка, залежать від стану його мотиваційної сфери. Підліток уважний до того, що якось пов'язано з його актуальними потребами і переживанням. Усі переживання підлітка тією чи іншою мірою пов’язані з пошуком себе, з пізнанням своїх здібностей і можливостей, з прагненням дізнатися, як оцінюють його оточуючі, з постійним перебиранням на себе різних дорослих ролей та гострою необхідністю у формуванні образу власного «Я». Якщо те чи інше навчальне завдання сприяє розвиткові особистості, якщо навчальна ситуація пов'язана з переживаннями, якщо характер і форми спілкування з підлітком допомагають йому здобути дорослої позиції, то увага стає стійкою і концентрованою.

Для вивчення основних періодів психічного розвитку дитини застосовується критерій розвитку діяльності [53], [96], [173]. Так О. М. Леонтьев писав, що кожна стадія психічного розвитку характеризується певним, провідним на даному етапі, ставленням дитини до дійсності, певним провідним типом його діяльності. Ознакою переходу від однієї стадії до іншої є зміна провідного типу діяльності, провідного ставлення дитини до дійсності [96]. Учні підліткового віку прагнуть до такої форми навчальної діяльності, яка стала б для них формою реалізації власних потреб, самореалізації, творчої життєдіяльності [96]. Іншими словами, діти підліткового віку прагнуть до самостійної навчальної діяльності. Цей факт має відображатися в системі вправ з геометрії в основній школі, засобом якої організовується навчальна діяльність учнів.

Таким чином, виходячи з психологічних особливостей учнів основної школи, система геометричних вправ, по-перше, має забезпечувати матеріал для самостійної навчальної діяльності школярів на всіх рівнях навчальних досягнень. По-друге, ця система має містити вправи, які сприяють самореалізації і самовдосконаленню учнів. Йдеться про вправи різного рівня складності. Школярі мають отримати право обирати рівень засвоєння, відповідний до їхніх потреб, інтересів і здібностей. Рівні мають бути відкритими, тобто відомі і зрозумілі для учнів. Такий підхід формує в учнів повагу до себе і оточуючих, виховує відповідальність, самостійність і здатність до прийняття рішень.

4. Принцип прикладної спрямованості. Прикладна спрямованість навчання математики передбачає орієнтацію його змісту і методів на тісний зв’язок з життям, основами інших наук, на підготовку школярів до використання математичних знань у майбутній професії, на широке застосування у процесі навчання сучасної електронно-обчислювальної техніки [187]. Уміння застосовувати математичні знання на практиці є однією з вимог компетентнісного підходу до навчання. Принцип прикладної спрямованості системи геометричних вправ для основної школи вимагає *залучення* до системи геометричних вправ *задач прикладного змісту (практичних задач)*.

Задача прикладного змісту (практична задача) – це математична задача, фабула якої розкриває застосування математики у навколишній дійсності, у суміжних дисциплінах, в організації, технології й економіці сучасного виробництва, у сфері обслуговування і т. ін. [187]. Застосування таких задач у навчальному процесі виховує в учнів потребу в теоретичних знаннях з геометрії і формує навички застосування цих знань в умовах, наближених до практичних, навчає здійснювати перехід від конкретних життєвих ситуацій до узагальнених і навпаки – співвідносити математичні твердження і дійсність. Прикладні задачі поєднують у собі основні типи задач: на обчислення, доведення, побудову і унаочнюють умовність такого поділу.

Добір задач прикладного змісту має відповідати таким вимогам:

1) оскільки розв’язування задач практичного змісту є невід’ємною складовою процесу навчання геометрії, такі задачі мають бути в усіх розділах курсу. Місце кожної практичної задачі має визначатися тим, що її розв’язування підготовлене розв’язаннями попередніх задач і готує до розв’язування наступної задачі. Прикладні задачі можуть реалізовувати різні навчальні цілі: готувати до вивчення або розпочинати вивчення нової теми, сприяти поглибленню знань у процесі вивчення теми або завершувати цей процес, закріплювати і повторювати вивчений матеріал. Слід пам’ятати, що задачі прикладного змісту розв’язуються не тільки тоді, коли теоретичний матеріал уже засвоєний, а й на інших етапах навчання;

2) зміст нематематичного матеріалу в умові прикладної задачі має бути доступним для учнів відповідного віку. Тобто технічна сторона задачі має відповідати досвіду учнів, спиратися на раніше відомі поняття і не виходити за межі

навчальної програми. Поряд із цим практичні задачі мають знайомити учнів з уживаними на практиці способами вимірювання і побудови. Недоцільно пропонувати учням задачі, які не мають актуальності у сучасному житті. Зміст практичної задачі має бути об'єктом вивчення, а не носити ілюстративний характер;

3) з метою формування в учнів уміння знаходити геометричні фігури у навколишніх об'єктах корисно пропонувати їм вправи на аналіз реальних об'єктів і їх вимірювання з певною точністю. Крім цього, доцільно підібрати вправи, які вимагають розпізнавання просторової геометричної фігури за її розгорткою;

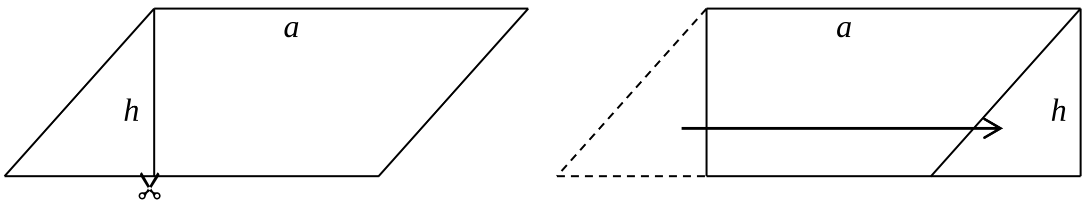
4) систематичний курс геометрії ставить за мету, зокрема, засвоєння учнями основ науки, формування абстрактного мислення і просторової уяви. Недоцільно вимагати, щоб на кожному уроці встановлювався зв'язок геометрії з життям. Тому запозичений з практики задачний матеріал має подаватися на уроках геометрії в строго обмеженому обсязі, необхідному для поглиблення і вдосконалення знань, умінь і навичок учнів, формування відповідних практичних компетенцій. Надмірне захоплення задачами практичного змісту під час вивчення систематичного курсу геометрії може сформувати хибне, примітивне ставлення до математики.

Уміння застосовувати знання з математики на практиці пов'язане з переходом від абстрактних теоретичних знань до практичних дій в умовах практичних ситуацій. Дослідження психологів і наші дослідження свідчать, що вміння міркувати, виконувати розумові і практичні дії під час розв'язування навчальних задач не означає наявність вміння виконувати адекватну систему дій у реальних практичних ситуаціях: завершальним етапом у розвитку мислительних операцій учнів є не утворення розумової дії, а реалізація і втілення розумової дії в практичній діяльності. Тому навчити учнів математизувати життєві ситуації, навчити їх теоретичного аналізу – одне з важливих завдань навчання геометрії в основній школі. У рамках нашого дослідження така вимога реалізується *забезпеченням етапів застосування математичних знань до розв'язування задач, що виникають у практиці* системою геометричних вправ для основної школи.

Досвід показує, що перехід від абстрактного до конкретного для багатьох учнів є не менш складним, ніж перехід від конкретного до абстрактного. Психологічно це пояснюється необхідністю користуватися іншими, незвичними засобами, орієнтуватися у більшому просторі [67]. У процесі сприйняття реальних предметів учні мають виділяти істотні ознаки з-поміж великої кількості неістотних деталей. Психологи, дидакти і методисти одностайні в тому, що учнів потрібно навчати вміння поєднувати теоретичні знання з практичними діями. Однак залучення до навчального процесу вправ і задач практичного змісту є тільки необхідною умовою такого навчання. Крім цього, потрібно навчити школярів спеціальних прийомів розумових дій, необхідних для застосування теоретичних знань, і сформувати практичні уміння і навички, які лежать в основі застосування математики до інших навчальних предметів, практичної діяльності. Проблема застосування знань на практиці вимагає сформувати в учнів уміння аналізувати й узагальнювати ситуації, конкретизувати загальні, абстрактні положення, розпізнавати відомі фігури, відношення, залежності в конкретних ситуаціях, уявно реконструювати фігури, тобто уявляти їх у русі, перебудовувати знання відповідно до вимог задачі, переосмислювати один і той самий об'єкт чи явище під кутом зору різних систем знань, переходити від одного виду діяльності до іншого. У посібнику З. І. Слєпкань [147] запропоновано кілька шляхів вирішення проблеми навчання учнів застосуванню математичних знань на практиці, а саме: 1) залучення до навчального процесу задач практичного змісту; 2) застосування внутріпредметних і міжпредметних зв'язків з такими навчальними предметами, як фізика, хімія, креслення, географія, трудове навчання. Зокрема, проблема підвищення рівня графічної грамотності учнів, формування в них уміння читати і самостійно виконувати зображення є спільною для геометрії, географії, креслення, трудового навчання. У рамках нашого дослідження для вирішення цієї проблеми пропонується залучити такі вправи до системи геометричних вправ для основної школи: 1) за готовими малюнками; 2) на складання задач за готовими малюнками; 3) у вигляді графічних диктантів; 4) на виконання елементарних побудов; 5) на графічне розв'язування задач на обчислення.

Проведення практичних робіт. Такі роботи пов'язані з вимірюваннями й обчисленнями, моделюванням геометричних фігур, побудовою геометричних фігур у геометричних перетвореннях, встановлення відстані до недоступної точки, відстані між двома недоступними точками і т. ін. Практичні роботи забезпечують формування в учнів конструктивних умінь внаслідок багаторазового виконання практичних дій з використанням креслярських інструментів, застосування засвоєного теоретичного матеріалу на практиці, поглиблення знань, умінь, які активізують пізнавальну діяльність. Виконуючи практичні роботи, учні переконуються у справедливості геометричних фактів. Наприклад, після вивчення формули обчислення площі паралелограма корисно запропонувати учням практичну роботу за такою послідовністю дій:

1. Виріжте шаблон паралелограма. Позначте його основу і висоту.
2. Розріжте шаблон по лінії, що є висотою.
3. З утворених фігур складіть прямокутник (мал. 1.14).
4. Порівняйте площі паралелограма і утвореного прямокутника. Зробіть висновок.
5. Запишіть формулу для обчислення площі паралелограма, застосовуючи формулу площі прямокутника.



Мал. 1.14

Рівень виконання практичних робіт значною мірою залежить від сформованості в учнів умінь виконувати основні побудови, вимірювання, обчислення з наближеними даними. Мається на увазі насамперед формування практичних умінь, пов’язаних з креслярськими і вимірювальними інструментами. Дослідження показують, що формування таких умінь є успішним за умови правильного поєднання словесного пояснення з унаочненням дій креслярськими інструментами, що дає повну орієнтовну основу дій. Використання ІКТ у навчальному процесі значно спрощує формування в учнів згаданих вище вмінь. Створені нами електронні засоби навчального призначення [16], [37 – 39] дають можливість унаочнити процес зображення геометричних об’єктів, акцентуючи увагу на істотних моментах цього процесу, пропонується різне їх перетворення (переміщення, зміна форми і розмірів, розташування на площині).

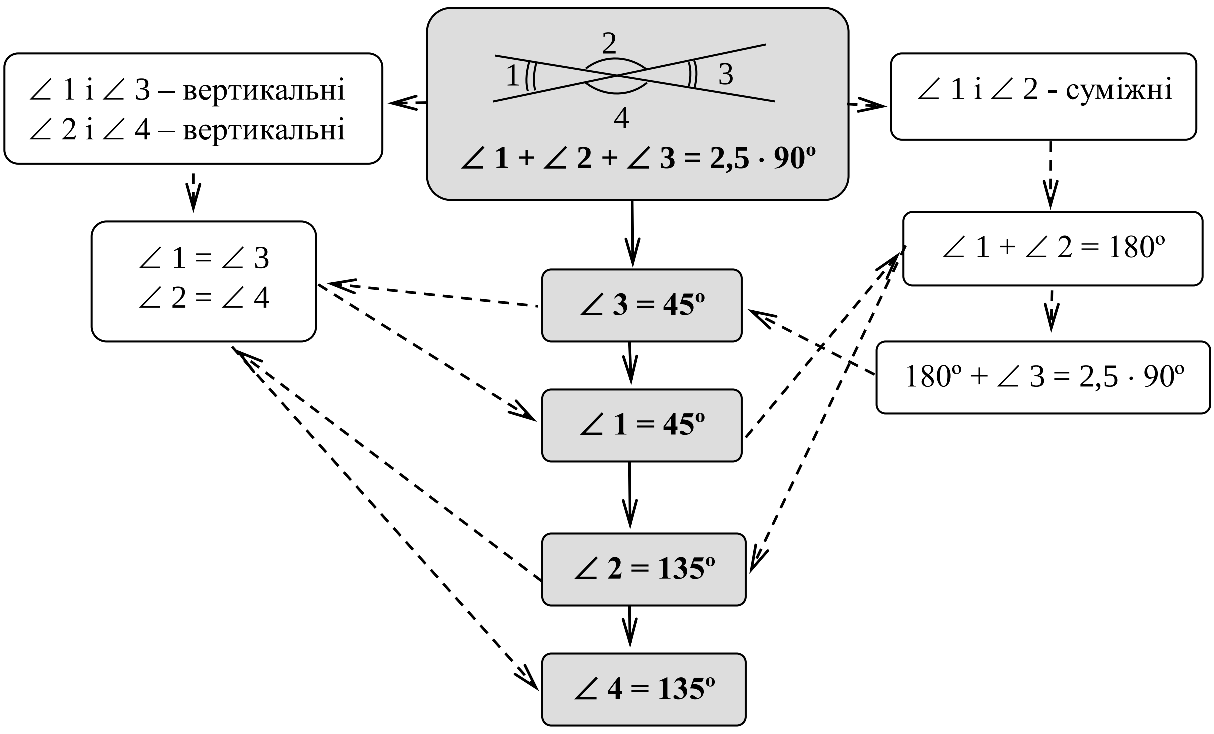
Прикладами втілення принципу прикладної спрямованості у побудові системи вправ є американські підручники з геометрії [201 – 204] за якими вивчення геометричних фігур та їх властивостей відбувається на найхарактерніших, найтиповіших прикладах з довкілля і життя. Система вправ містить задачі, що розкривають міжпредметний, прикладний і практичний зміст геометричних понять.

5. Принцип наочності. Дидактичний принцип наочності у системі геометричних вправ реалізується шляхом візуалізації змісту та процесу виконання її елементів. Оперування візуальними образами пов’язане з візуальним мисленням людини. Воно полягає у сприйнятті змісту, поданого в зоровій модальності, минаючи етап вербалізації, породженні і конструюванні нових візуальних образів і форм, які роблять видимим зміст цих образів та виводять назовні логічні взаємозв’язки між ними [160, 161]. Ефективне формування абстрактних геометричних понять, уміння доводити геометричні твердження можливе лише за умови правильного застосування засобів наочності. Унаочненням змісту геометричної задачі є малюнок (креслення). Це найпростіший і найбільш уживаний вид наочності у вивченні геометрії в основній школі. Найчастіше без малюнка неможливо встановити потрібні співвідношення елементів фігур, даних у задачі і відшукати потрібний шлях розв’язання. Тобто *малюнок* до геометричної задачі є *засобом евристичної діяльності учнів* під час її розв’язування. Учителеві корисно вміти самому чітко зображати геометричні фігури та їх елементи і вимагати від учнів таких умінь. За умови обмеженого навчального часу для засвоєння всіх елементів геометричного змісту зручно пропонувати учням вправи за готовими малюнками. У процесі складання задач і вправ за готовими малюнками пропонуємо дотримуватися таких методичних порад: готові малюнки, за якими учні розв’язують задачі, мають виконуватися ретельно й акуратно, потрібно уникати окремих випадків; недоцільно захоплюватися усними вправами. Це може призвести до того, що підчас контрольних робіт багато учнів будуть неспроможні розв’язати ті задачі, які добре розв’язували усно. Кращих результатів можна досягти тоді, якщо пропонувати учням задачі за готовими малюнками не тільки для усного розв'язування, але й учити їх письмово оформлювати розв'язання; використовуючи задачі, умови яких подано у словесній формі, треба прагнути до формування в учнів умінь правильно аналізувати їх умову та самостійно виконувати малюнки. Цьому не сприяє розв'язування задач за готовими малюнками, а тому слід користуватися ними розумно, творчо, використовувати їх з урахуванням загальних умов і особливостей класу [32].

Порівняно з іншими засобами наочності, комп'ютерна техніка має значно ширші можливості перетворення і візуалізації інформації. Експериментальне навчання показало, що застосування електронної динамічної наочності [16] у процесі виконання учнями основної школи геометричних вправ покращує формування умінь включати об'єкт, що осмислюється, у нові зв'язки і відношення, диференціювати істотні і неістотні ознаки геометричних понять.

Принцип наочності у навчанні геометрії реалізується також шляхом *унаочнення логічних зв'язків задачі* з відповідної системи вправ. Це можливо, якщо умову задачі і процес її розв'язування подати у вигляді граф-схеми. Наприклад:

Задача. *Сума трьох кутів, утворених при перетині двох прямих, у 2,5 рази більша за 90°. Знайдіть усі кути, утворені при перетині цих прямих.*



Мал. 1.15

Унаочнення логічних зв’язків цієї задачі дає учням орієнтовну основу дій щодо її розв’язання, сприяє формуванню вміння вибудовувати логічну послідовність дій розв’язання типових задач. Така форма представлення умови і процесу розв’язання є корисною для учнів на етапі первинного застосування знань і може реалізуватись у формі прикладів розв’язування задач у підручниках, зошитах з друкованою основою [5].

6. Принцип систематичності і послідовності у навчанні вимагає, щоб знання, уміння і навички формувались у певному порядку, в системі, коли наступне спирається на попереднє і готує до засвоєння нового [17]. Основним засобом реалізації цього дидактичного принципу вважається зміст навчання, відображений у програмі і підручнику. Тому однією з вимог до системи вправ з геометрії в основній школі є її *відповідність логічній структурі теоретичного матеріалу*. Курс геометрії основної школи має дедуктивний характер. Це означає, що між елементами змісту існує певна послідовність і логічний зв’язок, які обумовлюють характер і послідовність дій учнів у процесі доведення геометричних фактів і розв’язування задач (так у підручнику [2] теорема Піфагора вивчається на початку курсу, а у підручнику [28] у темі „Розв’язування трикутників”, 8 кл.). Відповідно до цього кожна вправа системи має розв’язуватись на основі вивчених раніше геометричних фактів з *використанням засвоєних способів і методів* і бути корисною для подальшого засвоєння курсу. Розв’язання складних задач має ґрунтуватися на попередньому виконанні простіших вправ, які для них є пропедевтичними або складовими. Отже, для реалізації систематичності і послідовності у побудові системи вправ з геометрії в основній школі необхідно враховувати: 1) характер зв’язку між елементами теоретичних знань курсу; 2) характер навчальних дій, що вимагає засвоєння відповідного змісту; 3) етапність формування вмінь і навичок; 4) роль і місце конкретної задачі в системі.

Принцип систематичності і послідовності у побудові системи вправ з геометрії реалізується також через вимогу *нарощування складності вправ.* Поняття простоти і складності є досить загальними. Тому вони є об’єктом вивчення філософії. З погляду системного підходу складність системи залежить від кількісних і якісних відмінностей складових її елементів, властивостей, зв’язків та відношень.

“Складність задачі визначається процесом і результатом її розв’язання, складом, а трудність вказує на можливість суб’єкта подолати об’єктивну складність задачі. Таким чином, “трудність” є психологічною характеристикою і пов’язана з рівнем підготовки учня до сприйняття і засвоєння у порівнянні з категорією “складність”, що більш пов’язана із змістом навчального матеріалу.” [42, с.3] У практиці шкільного навчання (геометрії зокрема) оцінка складності чи трудності окремої задачі здійснюється, зазвичай, учителями, методистами на основі власних знань і досвіду або суб’єктивної оцінки. “Могли б бути корисними наближені, але в міру об’єктивні критерії оцінки складності і трудності навчальних задач для того, щоб розмістити задачі в підручниках у порядку нарощування їх складності, підбирати рівноцінні варіанти для контрольних робіт...” [90, с. 67]. Такі критерії можуть бути розроблені на основі характеристики понять складності і трудності навчальних задач (вправ). Найбільш повною характеристикою поняття складності задачі Ю. М. Колягін вважає характеристику, дану А. М. Матюшкіним [§ 1.1 с. 22 дисертаційного дослідження].

Розглянемо кілька способів ускладнення геометричних вправ.

1. Збільшення кількості змістових одиниць (розширення тематики вправ). Такий спосіб має два шляхи. З одного боку, розвиток може відбуватися шляхом “нанизування” логічно пов’язаних тем, коли результат попередньої вправи є даним в умові наступної, а з іншого, – шляхом введення паралельних тем, коли результати розв’язування вправ не пов’язані між собою. Цей спосіб призводить до значного підвищення рівня складності, оскільки доводиться розв’язувати кілька ідейно різних вправ. Можливий і змішаний спосіб ускладнення вправ, однак у шкільній практиці його застосування значно обмежене.

2. Ускладнення алгоритму розв’язування вправи. Відмінність наступної і попередньої вправ у системі за такого способу ускладнення полягає у кількості кроків їх виконання та в операційному складі дій.

3. Введення у розв’язання вправ евристик та збільшення їх кількості. Ускладнення вправ на високому рівні може здійснюватись як за двома попередніми методами, так і шляхом збільшення кількості евристик у розв’язанні.

7. Принцип диференційованої реалізованості. Суперечності між домінуванням у навчальному процесі фронтальних форм навчання та індивідуалізованому у засвоєнні і застосуванні знань, неадекватність традиційних прийомів навчальної діяльності та індивідуальних можливостей і здібностей учнів спричинили необхідність запровадження диференційованого навчання. Проблемі диференційованого підходу до навчання присвячено дослідження психологів (П. Я. Гальперіна [166], О. М. Кабанової-Меллер [72 – 74], З. І. Калмикової [76], Г. С. Костюка [90], В. О. Крутецького [92], О. М. Леонтьєва [96], Н. А. Менчинської [105], Н. Ф. Тализіної [158 – 159], І. С. Якиманської [199] та ін.), педагогів та методистів (Ю. К. Бабанського [8], Г. П. Бевза [14], М. І. Бурди [21, 23], І. Я. Віленкіна [34], Г. Д. Глейзера [43], Л. С. Голодюк [45], М. О. Данилова [54], Г. В. Дорофєєва, О. С. Дубинчук, М. І. Жалдака, А. М. Колмогорова, І. Я. Лернера [98], Є. П. Неліна, М. М. Скаткіна [143], З. І. Слєпкань [146], І. Ф. Тесленка [163], В. В. Фірсова [123], Т. М. Хмари, В. О. Швеця [188, 189], М. І. Шкіля, та ін.). Вчені виділяють внутрішню (рівневу), зовнішню (профільну), широку та інші види диференціації. Відповідно до об'єкта і предмета нашого дослідження ми розглядаємо реалізацію рівневої диференціації засобом системи вправ з геометрії в основній школі. З. І. Слєпкань визначає таку диференціацію як „засіб індивідуалізації в умовах класно-урочної системи, коли учні класу розподіляються на динамічні типологічні групи: однорівневі і різнорівневі, і вчитель після пояснення нового навчального матеріалу, під час формування навичок і вмінь, працює на уроці з тією групою, яка найбільше потребує його допомоги" [146, 147]. Такий підхід реалізується, з одного боку, добором диференційованих завдань, з іншого – диференціюючи навчальну математичну діяльність з урахуванням індивідуальних особливостей щодо засвоєння. Тому однією з вимог до системи вправ з геометрії в основній школі є *забезпечення рівнів навчальної діяльності учнів*. Для реалізації такої вимоги здійснюють умовний поділ учнів класу на типологічні групи за рівнями їхньої навчальної діяльності, які, в свою чергу, визначаються за рівнями розвитку її компонентів для кожного учня. Враховується ставлення до навчання, потреби (мотиваційний компонент), рівень наявних знань, умінь і навичок (змістовий компонент), рівень розвитку математичних здібностей, працездатність (процесуальний). Залежно від того, які з факторів кладуться в основу, в педагогічній літературі спостерігаються різні способи поділу учнів класу на навчальні групи. Наприклад, за рівнем розвитку здібностей і працездатності [10], за рівнем знань та ставленням до навчання [134]. У дослідженні В. Ф. Чучукова [186] експериментально доведено доцільність поділу учнів на вісім типологічних груп з урахуванням рівнів знань, умінь і навичок, рівні математичних здібностей і працездатності. На практиці поділ учнів класу на типологічні групи здійснюють за результатами навчання: рівнем знань умінь і навичок, оскільки це – результат впливу на навчання психологічних, фізіологічних та інших факторів. Для цього використовують методику Ю. К. Бабанського, який увів поняття реальних навчальних можливостей учнів. Їх зміст визначають такі критерії: психологічні компоненти (здатність до аналізу, синтезу, порівняння, вміння виділити суттєве, робити узагальнення; раціональність, самостійність, гнучкість, темп мислення, спостережливість, логічність мовлення, пам'ять, увага); навички навчальної праці (самоконтроль, планування, темп обчислень, письма, читання, організованість у навчальній роботі, дотримання розпорядку дня; окремі компоненти вихованості (наполегливість у навчанні, старанність, свідома навчальна дисципліна, громадська активність, ставлення до навчання, до вчителів, однокласників); позашкільний вплив сім'ї, ровесників; біологічні компоненти (фізична працездатність, стан здоров'я, дефекти мовлення, слуху, зору). З урахуванням цих критеріїв можна умовно поділити учнів за їх навчальними можливостями на чотири групи (мал. Б.1 додатку Б дисертаційного дослідження)

Диференційоване навчання реалізується як за допомогою завдань різної складності для різних типологічних груп, так і за мірою допомоги з боку вчителя. Пропонуємо такі форми диференціювання завдань: 1) зміст завдань однаковий для всього класу, але для сильніших учнів можна зменшити час на виконання, збільшити обсяг завдання, ускладнити способи виконання; 2) на даному етапі навчання (переважно під час закріплення) різним групам дітей пропонуються різні за складністю завдання; 3) пропонується спільне завдання для всього класу, а для слабких дітей добираються допоміжні матеріали, які полегшують його виконання (зразок, таблиця, відповідь, схема) .

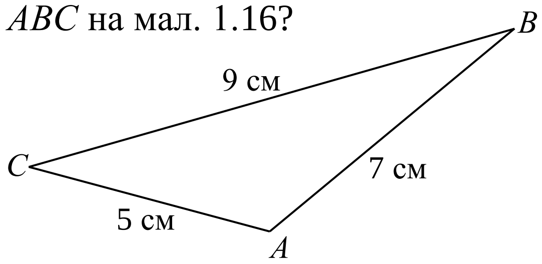
Диференційовану реалізованість системи вправ з геометрії в основній школі визначає також вимога *забезпечення* всіх *рівнів програмних вимог*. Програмні вимоги до результатів навчання учнів з геометрії в основній школі сформульовані за напрямками: пояснює, описує, зображує, формулює, доводить, розв'язує, застосовує. Рівні програмних вимог до кожної теми курсу геометрії в основній школі визначаються за рівнями оволодіння знаннями і способами діяльності. А саме: *початковий рівень* – учень називає математичний об'єкт (вираз, формули, геометричну фігуру, символ), але тільки в тому випадку, коли цей об'єкт (його зображення, опис, характеристика) запропоновано йому безпосередньо; за допомогою вчителя виконує елементарні завдання; *середній рівень* – учень повторює інформацію, операції, дії, засвоєні ним у процесі навчання, здатний розв'язувати завдання за зразком; *достатній рівень* – учень самостійно застосовує знання в стандартних ситуаціях, уміє виконувати математичні операції, загальні методи і послідовність (алгоритм) яких йому відомі, але зміст та умови виконання змінені; *високий рівень* – учень здатний самостійно орієнтуватися в нових для нього ситуаціях, складати план дій і виконувати його; пропонувати нові, невідомі йому раніше розв'язання, тобто його діяльність має дослідницький характер.

Розглянемо вимоги діючої навчальної програми з геометрії для основної школи [130] з теми „Геометричні побудови" і представимо їх у вигляді таблиці Е.1 додатку Е дисертаційного дослідження. Відповідно до загальних рівнів оволодіння знаннями і способами діяльності нами було сформульовано рівневі вимоги до результатів навчання учнів з теми „Геометричні побудови". Вони представлені у вигляді таблиці Е.2 додатку Е дисертаційного дослідження.

Відповідно до сформульованих вимог система диференційованих вправ для досягнення відповідних результатів навчання структурується за чотирма рівнями. При цьому на *початковому* рівні пропонуються вправи на розпізнавання і виконання найпростіших побудов з відповідними вказівками; на *середньому* рівні – вправи на складання плану та виконання основних побудов за алгоритмом, на розпізнавання і виконання основних побудов у простіших задачах на побудову; на *достатньому* рівні – прості задачі на побудову, що зводяться до основних побудов; на *високому* рівні – складніші задачі на побудову, що потребують проведення аналізу і послідовних потрібних основних побудов, доведення відповідності фігури, отриманої в результаті проведених побудов, умови задачі, застосування методу допоміжного трикутника і методу геометричних місць до їх розв’язання.

Диференційоване навчання геометрії в основній школі ефективне за умови відкритості рівнів програмних вимог, яка забезпечується фіксацією рівня вмінь і відповідного набору задач та орієнтацією на них учнів у процесі навчання. „...вимоги, задані переліком умінь, допускають досить широке тлумачення. Засобом їх конкретизації є *набори спеціальних еталонних задач*, які розробляються для кожного рівня навчання. Кількість їх має бути мінімальною, а зміст задач учні повинні знати заздалегідь. Якщо учень після вивчення курсу вміє розв’язувати відповідні еталонні задачі, то це означає, що він досяг певного рівня навчання. Такий підхід дає змогу школяреві вибрати відповідний рівень засвоєння математичного матеріалу і варіювати своє навчальне навантаження.” [89, с. 14]. З огляду на це диференційовану реалізованість системи геометричних вправ забезпечує також вимога *фіксування рівнів програмних вимог в еталонних задачах*. Еталонні задачі – це типові задачі, подібні до яких пропонуються учням для засвоєння певного елемента знань чи вмінь і для контролю за результатом навчання. Такі задачі мають складати підсистему системи вправ з геометрії в основній школі. Наведемо приклад набору еталонних задач для засвоєння вміння будувати трикутник за його сторонами на різних рівнях навчальних досягнень.

Початковий. Якими радіусами потрібно провести три кола, щоб побудувати трикутник, який дорівнює трикутнику *ABC* на мал. 1.16?



Мал. 1.16

Середній. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою *a* і бічною стороною *b*.

Достатній. Побудуйте ромб за його стороною *a* і більшою діагоналлю *d*.

Високий. Побудуйте трикутник за двома сторонами і медіаною, проведеною до однієї з них.

8. Принцип наступності у навчанні передбачає, з одного боку, закріплення, розширення і поглиблення знань, умінь і навичок, набутих на попередніх етапах навчального процесу. З іншого, – навчальна діяльність на кожному попередньому етапі здійснюється з орієнтацією на вимоги наступних етапів. Реалізація цього принципу у навчанні геометрії в основній школі вимагає забезпечення *пропедевтики стереометричних понять* засобом системи вправ. Залучення елементів стереометрії до змісту вправ з геометрії в основній школі має спиратися на застосування аналогії. При цьому необхідно *орієнтуватися на змістово-методичні лінії* курсів планіметрії і стереометрії. Так, під час вивчення тем „Трикутник", „Квадрат" на етапі закріплення понять корисно запропонувати вправи: „Яку відому вам просторову геометричну фігуру можна утворити з трикутників і яка їх кількість потрібна для цього?"; „Розгортка якої відомої вам просторової фігури складається з квадратів?". Для пропедевтики узагальнення поняття паралельних прямих у 7 класі можна запропонувати учням поміркувати: „Чи можуть прямі не перетинатися і не бути паралельними, якщо вони лежать в одній площині? Якщо не лежать в одній площині?"

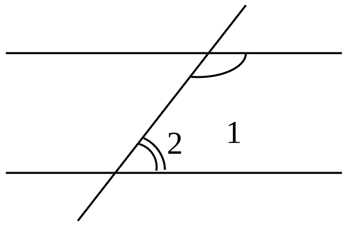
Наступність між вивченням геометричного матеріалу у 5 – 6 класах і систематичним курсом геометрії 7 – 9 класів реалізується, зокрема, вимогою *відповідності раніше вживаній термінології* у системі вправ. Наприклад, якщо у підручнику з математики для 5 класу термін „промінь" має або замінений на термін „півпряма", то вправи курсу геометрії основної школи мають містити обидва терміни.

9. Принцип варіативності. Роль варіювання як ефективного засобу засвоєння навчального матеріалу обґрунтована психологами Н. О. Менчинською, Д. М. Богоявленським, О. М. Кабановою-Меллер, П. А. Шеварьовим та ін.

Важливою умовою формування правильних узагальнень в учнів психологи вважають *варіювання неістотних ознак поняття за умови інваріантності істотних* [105]. Водночас О. М. Кабанова-Меллєр на основі експериментальних даних доводить, що така умова не є достатньою [74]. Варіювання у побудові системи вправ реалізується таким чином: якщо в означенні того чи іншого поняття є істотною певна ознака, необхідно, щоб ця ознака у вправах, пропонованих учням, була інваріантною, інші ж, неістотні ознаки, мають широко варіюватись.

Процес засвоєння геометричних понять вивчався В. І. Зиковою в умовах застосування стандартних зображень геометричних фігур (у яких геометричні фігури мають однакові форму і положення з зображуваними в підручниках і вчителем на дошці: діаметри кола – горизонтальний або вертикальний, прямокутний трикутник – з прямим кутом зліва внизу і т. ін.) і в умовах широкої варіації форми і положення фігур на площині [66]. У дослідженнях О. М. Кабанової-Меллєр доводиться необхідність у процесі формування вмінь доводити теореми, навчати учнів бачити на малюнку істотні і неістотні співвідношення елементів фігур [72]. Про значення варіювання ознак геометричних фігур йдеться також у роботах Г. О. Володимирського [35]. Ним розроблено систему вправ на впізнавання деяких геометричних фігур в умовах варіації їх форми і розміщення. Я. Й. Грудьонов запропонував удосконалити спосіб варіації неістотних ознак математичних понять шляхом введення у систему вправ контрприкладів [48]. Під контрприкладом розуміють будь-яку вправу, яка провокує учнів на помилку і допомагає в такий спосіб виявити в них помилкові асоціації. Будь-яка діяльність поступово набуває звичності, що, відповідно до психологічних закономірностей, призводить до послаблення уваги. Щоб запобігти такому явищу, учня необхідно поставити в такі умови, щоб будь-який його необдуманий крок, неуважність і безпечність призвели до помилки. За такої умови учень мобілізує всі свої внутрішні резерви і намагається бути надалі максимально зосередженим.

Варіювання форми подання умови вправ сприяє фіксації в пам’яті учнів того чи іншого прийому розв’язування задач. При цьому варіювання умови геометричних вправ стосується неістотних її сторін, що безпосередньо не впливають на застосування прийому розв’язування, а саме, числових даних, буквених позначень, розміщення фігур тощо. Такі вправи і саму систему називають однотипними. У психології доведено, що асоціації (зв’язок двох процесів, що відбуваються у свідомості, за якого попередній процес сприяє виникненню наступного) виникають шляхом повторення дій [190], тому однотипні вправи в якості тренувальних мають бути в системі вправ з геометрії. Забезпечити розв'язання потрібної кількості однотипних геометричних вправ можливо завдяки вправам за готовими малюнками. Корисно також пропонувати учням на різних рівнях вправи певного типу, що мають однакову логічну структуру, але різну форму презентації умови, забезпечуючи в такий спосіб допомогу в їх розв'язанні. Наприклад:

Один з кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих, дорівнює 122°. Знайти всі інші кути.	 Дано: $a \parallel b$, c – січна, $\angle 1 = 135^\circ$. Знайти: $\angle 2$.

Форму презентації умови вправ можна варіювати шляхом введення додаткових елементів, збільшення кількості числових даних.

Варіювання видів розумової діяльності реалізується шляхом залучення до системи геометричних вправ задач на прямі й обернені дії. Я. Й. Грудьонов пропонує застосовувати принцип порівняння для того, щоб підкреслити взаємозв'язок, спільне та відмінне в системі задач [48]. Метод одночасного розв'язування (доведення) прямих і обернених задач (теорем) був запропонований П. М. Ерднієвим [193]. На думку автора, такий підхід сприяє швидшому і глибшому засвоєнню навчального матеріалу. Психолог В. А. Крутецький вважає здатність мисленого переходу від прямої дії до оберненої вихідним елементом математичних здібностей [92]. Варіювання прямих і обернених дій у системі геометричних вправ відбувається завдяки їх чергуванню на застосування прямої і оберненої теореми.

Застосування здобутих знань, умінь і навичок традиційно зводиться до розв'язування задач, які вже сформульовані. Однак психологи вважають [196], що корисно ознайомлювати учнів з обома процесами (розв'язування і складання задачі) в їх діалектично протилежних якостях і взаємозв'язках. Адже на практиці, в житті людина повинна вміти самостійно формулювати проблему і, застосовуючи математичні знання, розв'язувати її. Тому до системи вправ з геометрії в основній школі корисно залучити вправи на складання задачі, пропонуючи сюжет і тип задачі (наприклад, скласти задачу за малюнком)

За сучасними психологічними уявленнями математичне мислення складається з п’яти підструктур [78]. Перша, топологічна, допомагає оперувати відношеннями належності і неперервності. Школярі, у мисленні яких переважає така підструктура, надають перевагу копітким аналітичним міркуванням. Учні, у яких домінує алгебраїчна підструктура математичного мислення, навпаки, не бажають докладно пояснювати всі кроки розв’язання, обґрунтовувати власні дії. Ті, у кого переважає проективна підструктура, надають перевагу дослідженню математичних об’єктів з різних точок зору. Перевага порядкової і метричної підструктур зумовлює підвищений інтерес до роботи за алгоритмом, результатом кожного кроку якого є число, а не загальний абстрактний вигляд. Домінантна підструктура математичного мислення учнів пояснює різні їхні уподобання щодо характеру мислительної діяльності у процесі розв’язування геометричних задач. Тому, добираючи систему вправ з геометрії для досягнення певної мети, потрібно передбачати *варіацію видів математичного мислення*, пропонуючи різні типи вправ: на обчислення, доведення, побудову, дослідження.

10.Принцип інтегрованості. Вивчаючи геометрію в основній школі, учні мають не тільки оволодіти відповідною системою знань, умінь і навичок, набути рівня розумового розвитку, просторової уяви і т. ін., а й певною мірою усвідомити логічну структуру змісту курсу, внутрішні взаємозв’язки математичної науки. „У змісті математики мають бути *посилені зв’язки між алгеброю і геометрією, планіметрією і стереометрією*. Йдеться про взаємопроникнення геометричних методів і образів в алгебру і навпаки; про геометричну інтерпретацію алгебраїчних залежностей і аналітичне тлумачення геометричних фактів” [89 с. 16]. Принцип інтегрованості у побудові системи вправ з геометрії в основній школі реалізується *залученням засобів алгебри* до розв’язування геометричних задач. А саме, застосування рівнянь і їх систем, координатного і векторного методів, тригонометрії. Наприклад, задача „Яка градусна міра кута, суміжного з кутом, що дорівнює 135^o?” може зводитись до розв’язування рівняння $x + 135^o = 180^o$; задача „Знайдіть висоту прямокутного трикутника, проведену до гіпотенузи, яка дорівнює 25, якщо катети трикутника відповідно дорівнюють 15 і 20” зводиться до відшукання розв’язку системи рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{20^2}{15^2}; \\ x + y = 25, \end{cases}$$

де x і y – проекції катетів трикутника на гіпотенузу.

Векторний метод ефективний для доведення паралельності та перпендикулярності прямих і відрізків; залежностей між довжинами відрізків; поділу відрізка в заданому відношенні; з’ясування належності трьох точок одній прямій; знаходження величини кута. За допомогою координатного методу алгебраїчні рівняння можна представляти у вигляді геометричних образів (графіків) і, навпаки, шукати розв’язання геометричних задач за допомогою аналітичних формул (рівнянь і їх систем). Геометрична інтерпретація тригонометричних формул допомагає учням усвідомлювати їх зміст. Ознайомлення учнів з алгебраїчними методами дає їм можливість відшукувати раціональний спосіб розв’язування геометричних задач (наприклад, довести перпендикулярність діагоналей ромба простіше із застосуванням векторного методу).

Усвідомленню внутрішньої єдності шкільного курсу геометрії сприятиме реалізація методу *фузіонізму* через систему вправ з геометрії в основній школі [15]. Під час експериментального навчання геометрії учням пропонувалися вправи: на встановлення відповідності між планіметричними і стереометричними фігурами (квадрат – куб, коло – сфера, і т. ін.); на представлення просторової фігури у вигляді комбінації плоских фігур і навпаки (накреслити розгортку просторової фігури, за розгорткою визначити просторову фігуру; знайти площі бічної і повної поверхні просторової фігури); на обчислення елементів плоских фігур, які є частинами просторової фігури або утворюють її обертанням. Просторові об’єкти мають ілюструвати застосування й узагальнення планіметричних фактів. Учні мають усвідомлювати, що розв’язування стереометричної задачі зводиться до розв’язування відповідних планіметричних задач.

Визначені нами принципи добору системи вправ з геометрії в основній школі та розроблені методичні вимоги до їх реалізації представлені у вигляді схеми на малюнку В.1 додатку В дисертаційного дослідження.

1.4. Стан досліджуваної проблеми у практиці навчання геометрії

Констатувальний експеримент з досліджуваної проблеми проводився протягом 1993 – 1997 р. р. автором самостійно, під час роботи в загальноосвітній школі № 18 м. Ірпеня вчителем математики, у період 1999 – 2002 р. р. у школах № 2, 4, 5, 18 м. Ірпеня та Ірпінській українській гімназії за участю вчителів Наконечної Лариси Валеріївни, Зарицької Світлани Анатоліївни, Волги Тетяни Григорівни, Савощенко Любові Яківни; під час перевірки відкритої частини тесту зовнішнього незалежного тестування у 2006 – 2008 роках та перевірки результатів тестування учнів 8-х класів шкіл України в рамках міжнародного порівняльного дослідження навчальних досягнень з математики TIMSS – 2007.

Метою констатувального експерименту було виявити реальний рівень знань і вмінь учнів основної школи з геометрії, встановити недоліки і їх причини, знайти шляхи та засоби їх подолання. Застосовувалися анкетний метод, бесіда, спостереження за процесом навчання геометрії учнів основної школи, аналіз письмових робіт, математичних диктантів, виконання тестових завдань учнів основної і старшої школи.

Аналіз проведеного анкетування 67 вчителів математики, які викладають геометрію в 7 – 9 класах, засвідчив, що досвідчені вчителі для підготовки та проведення уроків користуються підручниками різних авторів (О. В. Погорєлова, М. І. Бурди, Н. А. Тарасенкової, О. Істера, Г. В. Апостолової, Г. П. Бевза та ін.) за наявності в учнів одного, визначеного навчальним закладом, підручника. Крім цього, вони мають достатню кількість навчально-методичної літератури (збірники задач, дидактичні матеріали, готові плани-конспекти уроків, педагогічні програмні засоби). Однак систему вправ у жодному з джерел учителі не вважають досконалою. Серед недоліків вони зазначили невідповідність складності вправ їх визначеному рівню (якщо взагалі такий поділ існує); недостатня кількість зразків, правил-орієнтирів, алгоритмічних приписів та евристичних схем виконання завдань. Вправи початкового і середнього рівнів вважаються надто складними, особливо на початковому етапі вивчення предмета. Вчителі вважають, що у 7 класі (на початку вивчення систематичного курсу геометрії) у системі бракує вправ на виконання графічних і конструктивних дій а також елементарних логічних дій, внаслідок чого учні не отримують достатнього практичного досвіду, відповідних навичок та вмінь, необхідних для подальшого засвоєння геометричного матеріалу. Цей факт вважається основною причиною того, що наприкінці 9 класу лише близько 35% учнів спроможні самостійно розв'язати геометричну задачу достатнього рівня складності. Аналіз системи вправ з підручників „Геометрія" для 7 – 9 класів О. В. Погорєлова свідчить про те, що її добір відповідає логічній структурі відповідного геометричного змісту, принципу науковості. Однак не враховуються психологічні особливості учнів відповідної вікової категорії щодо сприйняття навчального матеріалу, пріоритетів у їхній навчальній діяльності, різнорівневих навчальних можливостей. Тому організація навчальної діяльності засобом такої системи вправ потребує ґрунтовних методичних рекомендації і додаткових дидактичних матеріалів. Аналіз анкетування свідчить про те, що вчителі з більшим стажем роботи та вищою категорією частіше самостійно добирають систему вправ до всіх етапів уроку, особливо для етапу засвоєння та первинного застосування нових знань. Систему вправ для контрольних робіт учителі застосовують з друкованих джерел. Як один із недоліків системи вправ з геометрії в основній школі опитані вважають відсутність зразків завдань для визначення рівня відповідних навчальних досягнень учнів (еталонних задач). Наявність таких зразків, на думку вчителів, може стати дієвим мотивом для вивчення учнями геометрії в основній школі, забезпечити відкритість рівнів навчальних досягнень та усвідомлення учнями етапності свого вдосконалення за наявності такої потреби. Результати анкетування вчителів подано у таблиці Е.4 додатку Е дисертаційного дослідження. Розглянувши таблицю відповідей, бачимо, що з набуттям досвіду вчителі переконуються у недосконалості системи вправ у підручниках, розуміють роль і значення системи вправ у диференційованому та особистісному підході до навчанні геометрії в основній школі.

Нині діючі підручники з геометрії для учнів 7 – 9 класів [2, 3, 4, 12, 13, 26, 27, 28, 29, 70] містять системи вправ, побудовані у відповідності до сучасної концепції математичної освіти. У їх побудові дотримано принципи науковості, повноти, доступності, систематичності і послідовності, наочності, диференційованої реалізованості. У підручниках [26, 27, 28] система вправ містить чотири рівні їх складності, задачі практичного змісту. Корисними є вправи проблемного характеру, які розміщуються у теоретичній частині, а також алгоритмічні приписи, які дають учням знання про способи геометричних дій і можливість самоконтролю і самокорекції. Система вправ з підручників [2, 3, 4] визначається підсистемою практичних робіт (до кожного параграфу одна, дві або три), які сприяють вироблення в учнів графічних умінь і усвідомленню властивостей геометричних фігур. На відміну від попередніх, система вправ у підручниках [12, 13] структурована за рівнями вимог до навчальних досягнень учнів з геометрії і видами їхньої навчальної діяльності. Вправи під рубрикою „Виконаємо разом” знайомлять учнів з різними способами розв’язування задач. Виділяються усні вправи, для повторення вивченого матеріалу (актуалізація), для домашньої роботи, є вправи за готовими малюнками. У підручнику [70] система вправ є недостатньо функціональною: вправи нерівномірно розподілені за рівнями, майже відсутні практичні завчання. Аналіз систем вправ з діючих підручників свідчить про існування різних підходів їх авторів до побудови системи вправ за умови дотримання сучасних вимог до навчальних досягнень учнів, особливостей їхньої навчальної пізнавальної діяльності, віко-психологічних особливостей школярів. Крім цього, для реалізації визначених нами принципів побудови системи геометричних вправ (зокрема наочності, варіативності, інтегрованості) потрібно розробити методику організації відповідної навчальної діяльності учнів із застосуванням електронних засобів навчального призначення.

Одночасно з анкетуванням учителів проводилось опитування учнів 7 – 9 класів. Анкетуванням було охоплено 236 учнів. Результати анкетування:

1. З якого предмета ти виконуєш домашнє завдання в першу чергу?

а) геометрія;	43%
б) фізика;	15%
в) алгебра;	68%
г) інші предмети.	26%

2. Під час виконання завдання з геометрії:

а) дію самостійно;	24%
б) шукаю аналогічні задачі, розв'язані в зошиті;	5%
в) звертаюсь за допомогою.	70%

3. Чи є бажання, розв'язавши задачу, перевірити розв'язок, відшукати інший спосіб розв'язування?

а) так;	3%
б) не завжди;	9%
в) ні.	44%

4. Виконуючи домашнє завдання, розв'язуєш тільки потрібні вправи, чи й додаткові за власним бажанням?

а) так;	4%
б) не завжди;	8%
в) ні.	88%

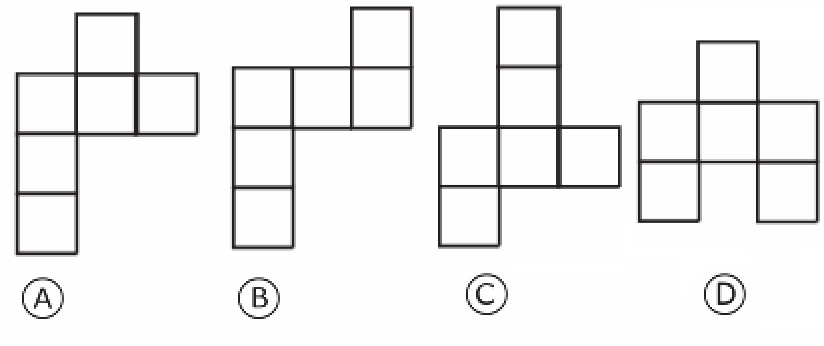
5. Серед запропонованих вправ розв'яжи три за вибором.

Переважно з алгебри	72%
Переважно з геометрії	28%

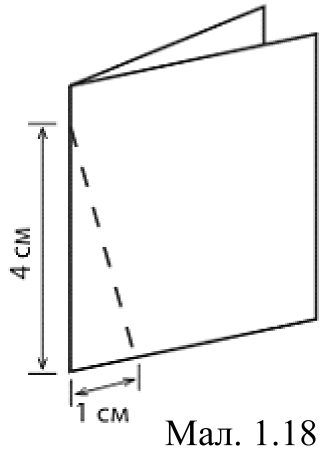
Аналіз результатів анкетування свідчить про те, що учні вважать математику пріоритетним навчальним предметом, надаючи перевагу виконанню домашнього завдання і запропонованих вправ з алгебри. Під час виконання завдання з геометрії більша частина учнів звертається за допомогою (70%). Розв'язавши геометричну задачу, тільки 12% учнів мають бажання повернутися до розв'язання і відшукати інший його спосіб, а також, розв'язати додаткову вправу. Такі результати опитування свідчать про низький інтерес учнів до вивчення геометрії в основній школі та їхню невпевненість у досягненні бажаних результатів.

Власний досвід перевірки відкритої частини тесту з математики зовнішнього незалежного оцінювання з 2006 по 2008 рік свідчить про низький рівень знань і вмінь з геометрії випускників загальноосвітніх шкіл. Найбільші труднощі викликають відтворення логічних кроків доведення геометричних фактів, виконання малюнка, відшукання плоских геометричних фігур, до яких належить потрібний елемент просторової фігури і застосування властивостей плоских фігур. Чітко проявляється несформованість графічних умінь випускників.

Аналіз результатів тестування учнів 8-х класів (автором перевірено понад 1000 виконаних тестів) у рамках міжнародного порівняльного дослідження навчальних досягнень з математики TIMSS – 2007 засвідчив невміння застосовувати набуті знання і навички з геометрії на практиці, низький рівень сформованості просторової уяви. Поряд із задовільними результатами виконання вправ на обчислення розмірів елементів фігур (відрізків і кутів), застосування формул для знаходження площ і об'ємів геометричних фігур, учні виявили недостатню сформованість умінь розпізнавати розгортки просторових фігур, комбінувати, розкладати на складові частини та аналізувати складні геометричні фігури. Наприклад, задача з додатку Ж дисертаційного дослідження виконали лише 19% тестованих учнів. Складність виникала також у розпізнаванні та зображенні результатів поворотів, симетрії відносно прямої і точки, паралельне перенесення та симетрія відносно прямої [203]. Так, завдання „За допомогою якої розгортки, зображеної на мал. 1.17 можна скласти куб?" виконали 23% восьмикласників, які брали участь у тестуванні.



Мал. 1.17



Мал. 1.18

Наступне завдання не виконали або виконали неправильно близько 30% учнів; „Лист паперу, який має форму прямокутника, склали навпіл так, як показано на малюнку 1.18. Потім розрізали його по пунктирній лінії і меншу відрізану частину розгорнули. Яка форма меншої відрізаної частини? а) рівнобедрений трикутник; б) два рівнобедрених трикутника; в) прямокутний трикутник; г) рівносторонній трикутник.”

Такі результати тестування свідчать про те, що на уроках геометрії учні здебільшого виконують вправи на формальне застосування отриманих теоретичних знань, а використанню їх на практиці, візуалізації властивостей геометричних фігур та фактів відводиться обмаль часу. Це підтверджується і результатами анкетувань учнів і вчителів, які одностайно відзначали, що таким видам діяльності приділяється недостатня увага, головним чином через брак технічної можливості і навчального часу.

Для визначення рівня навчальних досягнень 180 учнів основної школи з геометрії нами застосовувались спеціально розроблені діагностичні матеріали. Ці матеріали є різноманітними за формою, передбачають різні види діяльності і розроблялися з урахуванням вимог навчальної програми до результатів навчання з геометрії в основній школі. Наведемо кілька таких завдань і результати їх виконання.

Математичний диктант з теми ”Рівнобедрений трикутник та його властивості”.

1. Трикутник, у якого дві сторони рівні, називається ... (79%)
2. Третя сторона рівнобедреного трикутника, яка не дорівнює двом іншим, називається ... (64%)
3. Якщо основа рівнобедреного трикутника дорівнює 2 см, а бічна сторона 3 см, то його периметр дорівнює ... (62%)
4. Якщо периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 16 см, а бічна сторона – 6 см, то його основа дорівнює ... (43%)
5. Якщо сторона рівностороннього трикутника дорівнює 12 см, то його периметр дорівнює ... (76%)

6. Відрізок, який сполучає вершину трикутника з точкою на протилежній стороні і ділить кут навпіл, називається ... (56%)

7. У кожному трикутнику всього можна провести ... висот (65%)

8. Якщо сума кутів при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 90º, то кожний з цих кутів дорівнює ... (62%)

9. Якщо $\Delta\, ABC = \Delta\, MPN$, то $\angle\, BCA = ...$ (32%)

10. Якщо $\Delta\, ABC = \Delta\, BAC$, то $\Delta\, ABC$ – рівнобедрений з основою ... (17%)

11. Якщо в трикутнику два кути рівні, то він ... (46%)

12. Якщо в трикутнику всі кути рівні, то він ... (42%)

Завдання у тестовій формі з теми „Чотирикутники”

1. Знайдіть тупий кут паралелограма, якщо його гострий кут дорівнює 30º.

а) 60º; б) 120º; в) 150º; г) 180º.

2. За якої з наведених умов чотирикутник є паралелограмом?

а) дві протилежні сторони рівні;

б) одна з діагоналей ділить другу навпіл;

в) дві протилежні сторони паралельні;

г) діагоналі діляться точкою їх перетину навпіл.

3. Діагональ прямокутника дорівнює 10 см і утворює зі стороною кут 30º. Знайдіть меншу сторону прямокутника.

а) 15 см; б) 5 см; в) 20 см; г) 6 см.

4. Знайдіть гострий кут ромба, якщо його периметр дорівнює 24 см, а висота – 3 см.

а) 60º; б) 90º; в) 30º; г) 45º.

5. Бісектриса кута А паралелограма *ABCD* перетинає сторону *BC* у точці *K*. Знайдіть периметр паралелограма, якщо *BK* = 12 см, *KC* = 8 см.

а) 20 см; б) 40 см; в) 44 см; г) 64 см.

Результати виконання тестових завдань подано в таблиці 1.1

Таблиця 1.1.

Результати виконання тестових завдань

завдання / результати	1	2	3	4	5
	пряме застосування властивостей поняття	впізнавання істотних ознак поняття	застосування властивостей поняття у знайомій ситуації	застосування властивостей поняття у знайомій ситуації (умови виконання змінені)	застосування властивостей поняття у незнайомій ситуації
Правильні відповіді	36%	31%	46%	28%	12%
Допущено помилки	47%	43%	48%	51%	23%

Самостійна робота з теми „Ознаки подібності трикутників”

Середній рівень

1. У прямокутному трикутнику ABC з вершини прямого кута C проведено висоту CD.

1) Доведіть, що:

а) $\Delta ACD \sim \Delta ABC$;

б) $\Delta ACD \sim \Delta CBD$.

2) Знайдіть гіпотенузу AB, якщо $AC = 6$ см, $AD = 4$ см.

Достатній рівень

2. У трикутнику ABC зі сторонами $AC = 12$ см, $AB = 15$ см, $BC = 18$ см проведено бісектрису AM. Через точку M проведено прямі MK і MN, які паралельні відповідно сторонам AB і AC трикутника ABC.

1) Знайдіть довжини відрізків CM і BM.

2) Доведіть, що $\Delta KCM \sim \Delta NBM$.

3) Визначте вид чотирикутника $AKMN$ та знайдіть його периметр.

Високий рівень

3. З точок A і B, розміщених по один бік від даної прямої, проведено перпендикуляри AA_1 і BB_1 до цієї прямої. Прямі AB_1 і BA_1 перетинаються в точці O. Відомо, що $AA_1 = a$, $BB_1 = b$.

1) Знайдіть відстань OO_1 від точки O до даної прямої.

2) Доведіть, що $OO_1 = OM$, M – точка перетину прямої OO_1 з прямою AB.

3) За якої умови промінь OO_1 буде бісектрисою кута A_1OB_1? Відповідь обґрунтуйте.

Аналіз результатів самостійної роботи здійснювався відносно знань і вмінь, що проявили учні в результаті виконання та рівнів їх сформованості.

Таблиця 1.2.

Аналіз результатів виконання самостійної роботи

Рівні застосування знань і вмінь / Знання і вміння	пряме (середній)	знайомі ситуації (достатній)	ускладнені ситуації (високий)
Означення подібних трикутників. Властивості сторін і кутів подібних трикутників	67%	42%	18%
Обчислення довжин відрізків, що є елементами подібних трикутників	71%	46%	17%
Обґрунтування подібності трикутників, пропорційності відрізків чи рівності кутів у подібних трикутниках	28%	16%	16%
Виконання малюнка	87%	65%	18%

Аналіз результатів виконання пропонованих завдань а також усних відповідей на уроках свідчить про такі недоліки у засвоєнні та застосуванні учнями основної школи знань з геометрії.

1. Для обґрунтування міркувань під час розв'язування задач учні не вміють використовувати ознаки геометричних понять, не усвідомлюють їх обсяг. Наприклад, у застосуванні ознак паралелограма, властивостей рівних і подібних трикутників і т. ін.

2. За умови правильного формулювання означення нового геометричного поняття через відоме поняття, учні не завжди можуть переносити його властивості на нове поняття.

3. Учні погано розрізняють істотні і неістотні ознаки геометричних понять.

4. У задачах на доведення учні застосовують хибні твердження через неправильно та неохайно виконаний малюнок, надаючи його елементам

властивостей, якими вони не володіють. Як аргумент використовують те, що бачать на малюнку або відчувають інтуїтивно. Часто під час доведення учні спираються на пряму теорему (наприклад, теорему Піфагора) замість оберненої.

5. Учні допускають помилки у знаходженні значень мір кутів та значень їх тригонометричних функцій, довжин сторін прямокутного трикутника. Бракує обчислювальних навичок, зокрема, при розв'язуванні пропорцій. Викликає труднощі знаходження відстані між точками, заданими координатами на площині, середини відрізка в координатах. Дії з векторами ототожнюють з діями над числами.

6. Графічні зображення геометричних фігур виконуються неохайно. Учні не вміють обрати найзручніше розміщення малюнка на площині, не дотримуються при зображенні відповідності довжин сторін та величин кутів, паралельності відрізків і прямих (середньої лінії і протилежної сторони трикутника і т. ін.), правил позначення точок, відрізків, прямих, кутів. Виконання малюнка забирає багато часу. Учні не володіють технікою зображення фігур „від руки".

Власний досвід педагогічної роботи, аналіз відвіданих уроків, бесіди з учителями, результати анкетування засвідчили, що причиною низького рівня навчальних досягнень учнів основної школи з геометрії є недоліки традиційної методики навчання. Зазвичай геометричні уміння і навички формуються засобом колективного розв'язування відносно складної геометричної задачі. В такий спосіб складається враження активної навчальної діяльності всіх учнів класу за рахунок кількох успішних учнів і підказок вчителя. Насправді більшість учнів не засвоюють елементарних знань, умінь і навичок на уроці і тому не здобувають фундаменту для просування за рівнями навчальних досягнень, втрачають впевненість у своїх силах та інтерес до вивчення предмета. За таких умов втрачаються широкі можливості навчального предмета геометрії щодо розвитку і саморозвитку учнів. Різні підходи у доборі вправ у сучасних підручниках і посібниках, наявність електронних засобів навчального призначення потребують визначення загальних положень щодо побудови системи геометричних вправ в основній школі з урахуванням дидактичних принципів навчання, сучасних цілей та вимог до результатів навчання геометрії в основній школі, особливостей навчальної пізнавальної діяльності учнів відповідної вікової категорії, аналізу різних методичних підходів до структурування систем математичних вправ.

ВИСНОВКИ ДО І РОЗДІЛУ

1. Констатувальний експеримент засвідчив зниження інтересу учнів до вивчення систематичного курсу геометрії, погіршення результатів навчання. З'ясовано, що геометричні уміння і навички учнів формуються переважно засобом колективного розв'язування відносно складних геометричних задач. Не враховуються функції вправ за певних дидактичних ситуацій, з одного боку, і психологічні особливості формування геометричних умінь учнів – з іншого. Як наслідок – невміння учнів застосовувати набуті знання і навички з геометрії на практиці, низький рівень сформованості просторової уяви, логічного мислення школярів і т. ін. Аналіз систем навчальних вправ у діючих підручниках з геометрії для учнів 7 – 9 класів свідчить про існування різних методичних підходів до їх конструювання. Особливо це стосується структури, забезпечення етапів навчальної діяльності учнів, реалізації методів навчання, принципів відбору геометричного змісту. Укладання збірників задач і вправ з геометрії для учнів, методичних посібників для вчителів має переважно прагматичний характер, часто зумовлений суб'єктивними підходами, недостатнім дидактичним і психолого-педагогічним обґрунтуванням.

2. Існуючі дослідження проблеми стосуються формування систем вправ для вирішення окремих дидактичних та методичних питань навчання математики. Актуальним є комплексне дослідження факторів впливу на якість навчальних досягнень учнів, серед яких: реалізація методів навчання; організація різних видів навчальної пізнавальної діяльності; дотримання дидактичних принципів, вимог диференційованого і компетентнісного підходу до навчання; врахування психологічних особливостей школярів відповідної вікової категорії. Питання добору системи вправ з геометрії в основній школі потребує з'ясування змісту, аналізу характеристик і типів її компонентів (вправ), їх функціонування; врахування системотвірних факторів, зумовлених особливостями системи.

3. За результатами аналізу різних підходів психологів дидактів, методистів до означення понять „завдання”, „задача”, „вправа” вважаємо, що: геометрична вправа – завдання для формування знань, умінь і навичок учнів з геометрії; геометрична задача є вправою, якщо в результаті її розв’язування учні набувають знань, умінь і навичок з геометрії. Тобто, серед геометричних задач є задачі-вправи; задачі, що не є вправами; вправи, що не є задачами.

4. Системотвірним фактором будь-якої освітньої системи є мета освіти. Відповідно до сучасних цілей шкільної математичної освіти крім, навчальних, розвивальних, виховних, контрольних і коректувальних функцій ми виділяємо також пропедевтичні і діагностувально-прогностичні функції геометричних вправ. Пропедевтичні функції вправ забезпечують реалізацію елементів фузіонізму у вивченні геометрії основної школи і сприяють формуванню в учнів цілісного сприйняття світу, підготовку до вивчення властивостей просторових фігур. Діагностувально-прогностичні функції передбачають формування і виявлення в учнів предметних, надпредметних і рефлексивних способів діяльності як складових компетентностей учнів.

5. Добір і впорядкування системи вправ з геометрії в основній школі має відповідати визначеним принципам: повноти, науковості, доступності, прикладної спрямованості; наочності, систематичності і послідовності, диференційованої реалізованості, наступності, варіативності, інтегрованості. Розроблені методичні вимоги реалізації цих принципів ґрунтуються на сучасних цілях та вимогах до результатів навчання геометрії в основній школі, особливостях навчальної пізнавальної діяльності учнів відповідної вікової категорії, враховують різні підходи до побудови системи навчальних вправ і є ознаками, наявність і врахування яких створює передумови для ефективної організації навчального процесу з геометрії в основній школі засобом розробленої системи вправ.

РОЗДІЛ 2
МЕТОДИКА ПОБУДОВИ СИСТЕМИ ВПРАВ ТА ЇЇ РЕАЛІЗАЦІЯ В ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ ГЕОМЕТРІЇ В ОСНОВНІЙ ШКОЛІ

Метою навчання геометрії в основній школі є опанування учнями системи відповідних знань і вмінь, що є базою для їхнього інтелектуального і культурного розвитку. Свідоме засвоєння школярами навчального матеріалу відбувається у процесі навчальної діяльності, організованої, зокрема, за допомогою системи вправ. За результатами дослідження нами розроблено методику побудови системи вправ з геометрії в основній школі і її реалізації у процесі навчання. У першому розділі представлено психолого-педагогічні обґрунтування цієї методичної системи. Визначено принципи побудови системи геометричних вправ і розроблено методичні вимоги до їх реалізації.

Особливості структури системи вправ з геометрії в основній школі визначаються принципами диференційованої реалізованості, систематичності і послідовності, наступності. Зміст системи вправ забезпечується врахуванням принципів повноти, науковості, доступності, прикладної спрямованості, інтегрованості. Принципами варіативності і наочності враховуються психологічні закономірності засвоєння учнями геометричних знань. Ефективність реалізації принципу наочності у функціонуванні системи вправ обумовлюється застосуванням електронної динамічної наочності і анімацій геометричних побудов з електронних засобів навчального призначення, розроблених за нашим змістовим наповненням. Практичні роботи з геометрії сприяють реалізації принципу прикладної спрямованості добору системи геометричних вправ.

Послідовність вправ визначається логічною структурою змісту навчального матеріалу і рівнями програмних вимог до результатів навчання. Передбачається також варіювання видів навчальної діяльності учнів.

Відповідно до цілей навчання і програмних вимог щодо результатів навчання учнів з геометрії в основній школі система вправ містить кілька підсистем, побудованих за визначеними принципами, кожна з яких має свої особливості. Ми виділяємо такі підсистеми:

- вправи для засвоєння геометричних понять;
- вправи для формування вмінь доводити геометричні твердження;
- вправи для вироблення вмінь обчислювати значення геометричних величин;
- вправи для вироблення конструктивних умінь.

Добір вправ для засвоєння геометричних понять

Однією з цілей навчання геометрії є засвоєння учнями понятійного апарату курсу. Оволодіти основами науки – означає оволодіти системою понять даної науки. Термін „поняття”, як правило, вживають для позначення мислительного образу певного класу об’єктів, процесів об’єктивної реальності або нашої свідомості. Кожна наука оперує своїми поняттями. *Геометричні поняття* відображають просторові форми матеріального світу та їх відношення: *точка, відрізок, пряма, площина, трикутник, чотирикутник, многокутник, коло, площа, периметр, паралельність, перпендикулярність* та інші. Вони утворені в результаті ідеалізації різних предметів або явищ й абстрагування від їх конкретних властивостей, другорядних щодо змісту певного поняття. Кожне поняття має свій обсяг і зміст. Обсягом поняття є множина об’єктів, які охоплені цим поняттям. Зміст поняття – це множина спільних істотних властивостей, притаманних усім об’єктам, які належать до поняття. Наприклад, обсягом планіметричного поняття „чотирикутник, вписаний у коло” є всі можливі плоскі чотирикутники, вписані у певне коло, а змістом цього поняття є сукупність двох загальних істотних властивостей (бути плоским чотирикутником, (і) через вершини якого можна провести коло). Зміст поняття розкривається за допомогою означення, а обсяг – за допомогою класифікації. Якщо обсяг поняття А є частиною обсягу поняття В, то перше відносно другого є видовим, а друге до першого – родовим. Наприклад, поняття „квадрат” є видовим відносно поняття „паралелограм”, а „паралелограм” відносно поняття „квадрат” – родовим. Найважливіші геометричні поняття мають назви – терміни, що складаються з одного або кількох слів (трикутник, кут, перпендикулярні прямі і т. ін.) Для деяких понять застосовуються спеціальні символи: Δ , $\angle$, $\perp$, $\parallel$ і ін.

Психологи Л.С. Виготський, О. М. Леонтьєв, які вивчали процес формування наукових понять у школярів, стверджують, що в дитини поняття формуються не за типом утворення чуттєвих генетичних образів, а є результатом її аналітико-синтетичної діяльності [95]. Отже, процес засвоєння учнями геометричних понять зводиться до організації відповідної пізнавальної діяльності. При цьому розумові дії, в процесі виконання яких можливе засвоєння геометричних понять, мають бути не тільки засобом, а й предметом засвоєння. Л. С. Виготський виділив основні параметри зміни мислительної діяльності в процесі засвоєння понять: рівень узагальнення понять, міра їх абстрагування і включення до системи понять. Психологічний механізм засвоєння понять передбачає, по-перше, засвоєння системи специфічних операцій на встановлення необхідних і достатніх ознак понять у конкретних предметах. По-друге, засвоєння системи операцій: на підведення об’єктів під поняття, на виведення наслідків, на класифікацію об’єктів та ін.

У методиці навчання геометрії в основній школі традиційно поняття вводяться конкретно-індуктивним методом, що передбачає такий шлях: предмети та відчуття, пов’язані з ними → сприйняття → уявлення → поняття → слово. Засобом аналізу учень виділяє окремі властивості (ознаки) предметів, шляхом синтезу об’єднує ці предмети за загальними ознаками. Потім загальні істотні ознаки об’єктів абстрагують і закріплюють у термінах. Процес завершується засобом узагальнення – введенням поняття, що застосовується до будь-яких предметів з певними властивостями, формулюванням означення. Прикладом абстрактно-дедуктивного методу введення геометричних понять в основній школі є введення понять *синуса*, *косинуса*, *тангенса* гострого кута. Для цього учням формулюються відповідні означення з опорою на зображення прямокутного трикутника, записуються рівності а потім розглядаються окремі випадки обчислення тригонометричних функцій гострих кутів.

Результати формування геометричних понять відображено в таких програмних вимогах до навчальних досягнень учнів [130]:

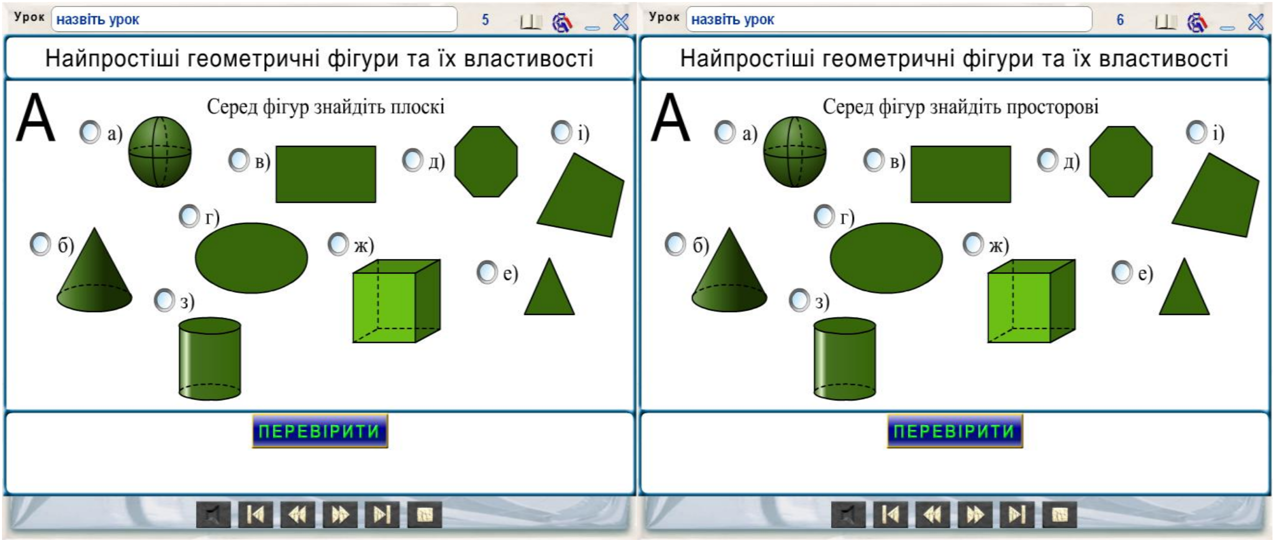
1. Уміти наводити приклади об’єктів поняття (контрприклади).
2. Знати найважливіші властивості поняття, його складові елементи і зв’язки між ними, володіти відповідними термінами і символами (так ми розуміємо вимогу „описувати поняття”).
3. Уміти графічно представляти поняття, якщо вони є геометричними фігурами.
4. Знаходити у навколишньому світі об’єкти, образами яких є абстрактні геометричні фігури.
5. Уміти застосовувати властивості поняття у процесі розв’язування різних типів задач і доведення тверджень.

Результати констатувального експерименту засвідчили незадовільний стан засвоєння учнями основної школи геометричних понять за кожним із згаданих вище пунктів [§ 1.4 дисертаційного дослідження]. Дослідження цієї проблеми переконало нас у потребі вдосконалення наявної системи вправ для засвоєння геометричних понять в основній школі відповідно до визначених нами принципів добору системи вправ та психолого-педагогічних закономірностей засвоєння понять.

Відповідно до закономірностей засвоєння знань у формуванні понять конкретно-індуктивним методом можна виділити таку послідовність етапів: мотивація введення поняття; виявлення його істотних властивостей; формулювання означення; засвоєння істотних властивостей; запам’ятовування означення поняття; застосування поняття; встановлення зв’язків даного поняття з іншими поняттями. Розглянемо можливості реалізації згаданих етапів формування геометричних понять засобом відповідної системи вправ.

Поняття виникають у результаті узагальнення достатньої кількості споглядань і уявлень. Психологічні дослідження доводять необхідність засвоєння формальних понять спочатку на інтуїтивному рівні. Потрібно враховувати, наскільки відомі і зрозумілі учневі певного віку ті істотні властивості, які розкривають зміст нового поняття. Тому мотивація введення нових понять здійснювалася засобом вправ для ознайомлення учнів з предметною областю поняття на основі принципів наочності і прикладної спрямованості добору системи вправ. Наприклад:

1. На початку вивчення систематичного курсу геометрії учні мають навчитися розрізняти плоскі і просторові фігури, оскільки вивчення основних розділів геометрії – планіметрії і стереометрії – виділяються і розмежовуються в часі. З молодших класів та курсу математики 5-6 класів школярам відомі фігури обох видів. Тому перед формулюванням означення плоскої фігури доцільно запропонувати вправу на розпізнавання плоских і просторових фігур за їх готовими зображеннями. У розробленому нами педагогічному програмному засобі „Геометрія, 7 клас” пропонується така вправа: „Серед фігур знайдіть плоскі і просторові. Чим вони відрізняються?” (мал. 2.1)

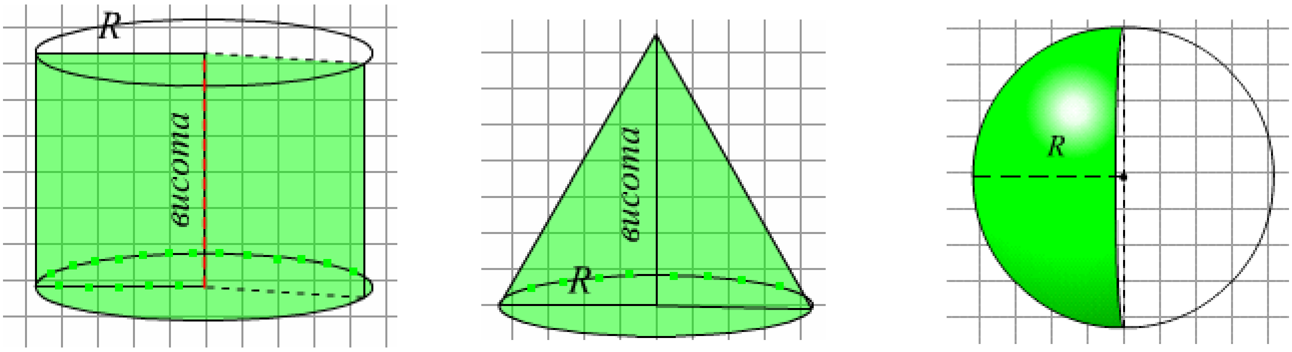


Мал. 2.1

Подібні вправи, з одного боку, сприяють формуванню в учнів достатньої кількості уявлень про геометричні фігури, з іншого, – виробленню умінь відшукувати спільні істотні властивості об’єктів тих чи інших понять та усвідомленню потреби їх окремого вивчення.

2. Вивчаючи початкові відомості зі стереометрії в курсі геометрії 9-го класу основної школи, учні мають усвідомити аналогію у властивостях плоских і просторових фігур, зрозуміти, що просторові фігури містять відповідні плоскі фігури, як їх частини або шляхом деякого геометричного перетворення. При цьому учням стає зрозумілою одна з причин поділу геометрії на окремі розділи для вивчення, їх цілісність і наступність між ними. На етапі мотивації введення поняття *циліндра* принцип інтегрованості побудови системи геометричних вправ

реалізується вправами такого змісту: „Опишіть перетворення, внаслідок якого з прямокутника утворюється циліндр”. Вправа унаочнюється анімацією, де прямокутник обертається навколо однієї з його сторін, утворюючи циліндр [38]. Аналогічні вправи можна запропонувати для ознайомлення учнів з поняттям конуса, кулі (мал. 2.2).

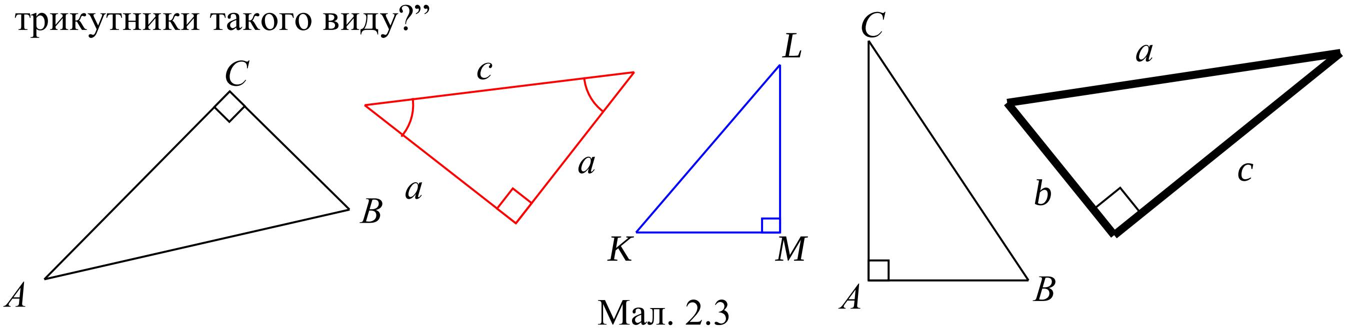


Мал. 2.2

3. Формування поняття *бісектриса кута* корисно починати з практичної роботи [2, с. 14], частиною якої є побудова бісектриси кута, вирізаного з паперу за допомогою перегинання і суміщення сторін кута. Учні мають можливість безпосередньо переконатися у рівності кутів, утворених поділом даного кута його бісектрисою, шляхом накладання. Наочно спостерігати цей процес дає можливість анімація [16].

Перехід від сприйняття об’єктів того чи іншого поняття до уявлення про саме поняття передбачає виявлення істотних і неістотних його ознак, а також введення відповідного терміна.

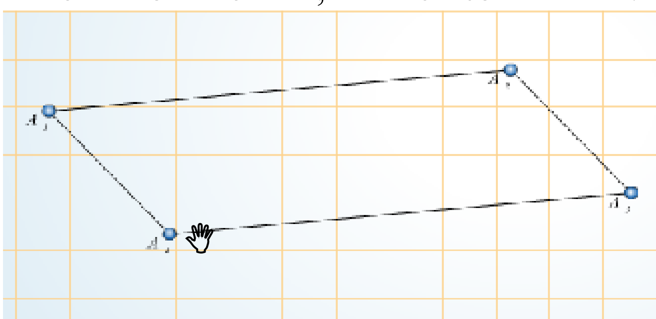
Проблемою у засвоєнні геометричних понять учнями основної школи є невміння виділяти істотні ознаки понять, абстрагуватися від неістотних. За таких умов школярі припускаються хибного узагальнення за неістотними ознаками. З практики навчання відомі приклади генералізації неістотних ознак понять (розміщення прямого кута у прямокутному трикутнику, положення на площині паралелограмів, трапецій, розглядання у якості прикладів переважно гострокутних трикутників і т. ін.). Причиною цього, в основному, є недостатнє варіювання неістотних ознак поняття за умови збереження постійними істотних. Цю проблему допомагають вирішувати вправи за готовими малюнками на розпізнавання. У розробленій нами системі вправ для формування кожного з геометричних понять пропонуються вправи за готовими малюнками з метою організації розумової діяльності учнів, спрямованої на аналіз властивостей окремих об’єктів. Виділяючи спільні, незмінні їх властивості, учні усвідомлюють ці властивості, як властивості поняття, до якого належать зображені об’єкти. Наведемо кілька прикладів. Для усвідомлення учнями істотних ознак поняття „прямокутний трикутник” застосовувались вправи такого змісту: „Порівняйте елементи зображених трикутників (мал. 2.3). Як називаються трикутники такого виду?”



Мал. 2.3

Складаючи такі вправи, потрібно виділяти всі неістотні ознаки у зображенні геометричних об’єктів, які лежать в основі відповідних понять, і варіювати їх, виділяючи істотні. На даному малюнку варіюються довжини сторін трикутників, позначення, положення прямого кута і навіть колір і товщина ліній. Наявність прямого кута позначається однаковою позначкою на всіх трикутниках. Тому учні легко помічають спільні істотні властивості зображених фігур і роблять висновок.

Принцип варіації у побудові і реалізації системи вправ з геометрії в основній школі реалізується за допомогою електронних динамічних моделей [16]. Учні мають можливість самостійно варіювати неістотні ознаки понять, за умови збереження істотних, перетворюючи цей процес на об’єкт власної діяльності. За таких умов значно підвищується ефективність усвідомлення змісту понять. Наприклад, для визначення істотних і неістотних ознак паралелограма у 8-му класі доцільно запропонувати учням таку вправу: „За динамічною наочністю паралелограма з’ясуйте які його ознаки можна змінювати, а які є незмінними.”



Мал. 2.4

Динамічну модель (мал. 2.4) створено таким чином, що користувачі можуть змінювати лише неістотні ознаки поняття. Здійснюючи такі зміни, учні мають можливість спостерігати багато об’єктів, які ілюструють це поняття (включаючи окремі випадки – прямокутники, квадрати, ромби). У результаті відбувається інтенсифікація всіх видів розумових дій, які становлять пізнавальну діяльність щодо засвоєння понять. Дослідження учнями властивостей паралелограма (рівність протилежних сторін, кутів, сума прилеглих кутів) відбувалося за допомогою електронного засобу навчального призначення GRAN-2D (вправа 1 додатку З дисертаційного дослідження).

Спостереження учнів за об’єктами поняття, що вивчається, усвідомлення їх істотних і неістотних ознак узагальнюється у слові-терміні, що асоціюється із загальними істотними ознаками поняття, фіксуючи його в мовній, матеріальній формі. Геометричні поняття також позначаються символами-знаками. Терміни і символи є матеріальними засобами фіксації геометричних понять, зберігання, передачі і переробки інформації про них. У процесі формування в учнів геометричних понять ми домагалися того, щоб нові терміни і символи стали звичними і природно вживалися в потрібних ситуаціях. Діяльність учнів організувалася засобом спеціальної системи вправ на вироблення навичок уживання термінів і символів (вимови, запису, застосування у мовних конструкціях). Така робота була результативною на всіх етапах формування в учнів геометричних понять і здійснювалася у запропонованій нами методиці, зокрема, за допомогою математичних диктантів, фронтальних опитувань та інших форм організації навчання. Наведемо приклади.

На початку вивчення систематичного курсу геометрії у 7-му класі учні ознайомлюються зі значною кількістю геометричних понять, які мають свої терміни і символіку, часто вживані у наступних темах. За підсумками вивчення перших тем („Геометричні фігури”, „Точки, прямі та їх властивості”, „Відрізки. Основні властивості вимірювання відрізків”, „Півплощина, півпряма”, „Кути і їх міри. Основні властивості вимірювання кутів”) пропонуємо вправи з пропусками у формі диктанту. Наприклад.

1. Розділ геометрії, у якому вивчають фігури на площині, називається ... .
2. Малими латинськими літерами позначають ... .
3. За допомогою лінійки проводять ... .
4. Якщо точки A і B лежать на прямій a, то пряма ... через точки A і B.
5. Фігура, яка складається з точки і двох різних променів, які виходять з цієї точки, називається ... .
6. Кожний кут має певну ... .
7. Довжину відрізка можна виміряти за допомогою ... .
8. Два відрізки називаються рівними, якщо їх ... рівні.
9. Довжину відрізка AB називають також ... між точками A і B.

Засвоєнню відповідних символів сприятимуть такі вправи:

1. Запишіть символами, що точки B, M, N лежать на прямій a. ($B \in a$, $M \in a$, $N \in a$).
2. Запишіть символічно, що точки A, C, D не лежать на прямій b. ($A \notin b$, $C \notin b$, $D \notin b$).
3. Запишіть символічно, що прямі a і b перетинаються в точці O. ($a \cap b =$ т. O).
4. Запишіть символічно, що кут ABC має градусну міру 45º. ($\angle ABC = 45^{\circ}$)

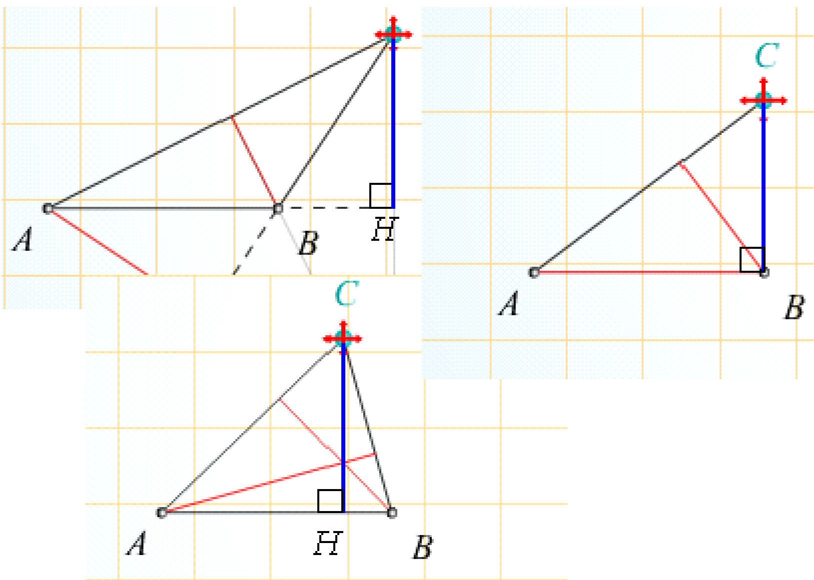
П.Я.Гальперін зазначав, що істотні властивості поняття визначають відповідну діяльність щодо його об’єктів. Так, поняття „трикутник” відображає властивості (нерівність трикутника, сума кутів трикутника та ін.), на основі яких виконуються дії з фігурами цього класу (побудова, встановлення рівності та подібності, обчислення довжин сторін, величин кутів, площ і т. ін.). Відповідно до концепції вченого істотні ознаки поняття використовуються учнями для розв’язування задач, тобто є орієнтиром для виконання дій над об’єктами поняття. Для засвоєння такого орієнтиру учень має усвідомити два етапи діяльності щодо істотних ознак поняття: діяльність, спрямовану на сприймання об’єктів у готовому вигляді на основі предметних дій (перший етап) і діяльність, пов’язану з узагальненням істотних властивостей об’єктів в означенні поняття (другий етап). Означення поняття – це мовленнєве чи символьне речення, що містить необхідні і достатні ознаки поняття. Відомо, що чим абстрактніше поняття, тим складніша логічна структура його означення. Тому для засвоєння учнями основної школи геометричних понять систематичного курсу важливим є засвоєння цих понять на інтуїтивному рівні, усвідомлення окремих ознак, що утворюють означення на конкретних прикладах з використанням достатньої кількості наочних образів. За нашою методикою зазначені етапи засвоєння понять здійснювалися засобом вправ практичного змісту, з використанням різноманітної наочності.

У систематичному курсі геометрії переважна більшість понять означується. За умови введення поняття конкретно-індуктивним методом у результаті спостережень за певною кількістю його об’єктів і виділення істотних властивостей формулюється означення поняття. Наприклад, означення висоти трикутника в експериментальних класах вводилося за допомогою системи вправ за динамічною моделлю з електронного засобу навчального призначення [16]:

Змінюючи положення вершини *C* трикутника *ABC*, з’ясуйте:

1. Якою фігурою є висота трикутника *ABC*, проведеною з вершини *C*? Яка її властивість?
2. Під яким кутом висота *CH* розміщена до сторони *AB*?
3. Для того, щоб *CH* була висотою трикутника *ABC*, потрібно, щоб виконувалась хоча б одна з її властивостей, або обидві одночасно?
4. Скільки висот можна провести у трикутнику *ABC*?

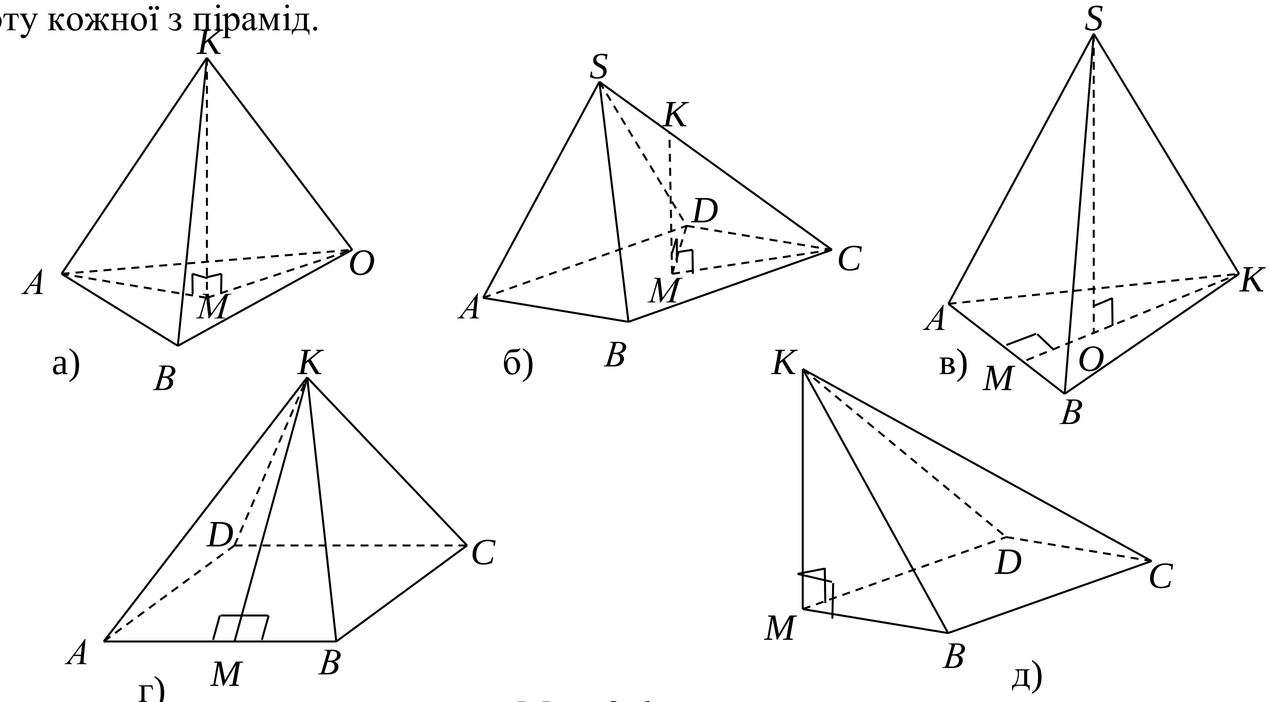
Аналізуючи зображення, учні усвідомлюють різні випадки розміщення основи висоти трикутника залежно від його виду, включаючи окремі випадки висоти, зокрема, прямокутного трикутника, проведеної до одного з катетів.



Мал. 2.5

У процесі засвоєння означень геометричних понять діяльність учнів має спрямовуватись не тільки на їх запам’ятовування. Важливим є усвідомлення школярами логічної структури означень, вироблення вмінь виділяти істотні властивості поняття, які входять в означення, розуміння характеру їх зв’язку (роль сполучників „і” та „або”). Наприклад, для засвоєння означення поняття „висота піраміди” (9 клас) потрібно, щоб учні навчилися розпізнавати це поняття за його характеристичними властивостями. Для цього пропонуємо до системи вправ на засвоєння цього поняття включити вправи за готовими малюнками такого змісту:

На якому з малюнків (мал. 2.6, а – д) відрізок *KM* є висотою піраміди? Назвіть висоту кожної з пірамід.



Мал. 2.6

Виконуючи вправи такого типу, учні щоразу пригадують означення висоти піраміди, перевіряють наявність кожної з ознак, переконуються в необхідності наявності обох ознак, поєднаних в означенні сполучником „і”.

У систематичному курсі є геометричні поняття, які вводяться описово. Це стосується початкових геометричних понять – „точка”, „пряма”, „площина”, „геометрична фігура” та ін. Ознайомлення з істотними ознаками таких понять за нашою методикою відбувалося в процесі побудови об’єктів поняття, а їх засвоєння – засобом виконання вправ на розпізнавання, диктантів, вправ з пропусками. Наприклад, засвоєння учнями властивостей понять „точка” і „пряма” відбувалося за допомогою вправ такого змісту:

1. Проведіть пряму. Позначте точки *A* і *B*, що лежать на цій прямій і точки *C* і *D*, що не лежать на ній. Запишіть позначення цієї прямої.

2. Позначте три точки *A*, *B* і *C*, що не лежать на одній прямій. проведіть прямі *AB*, *BC* і *AC*.

3. Чи завжди можна провести пряму через: 1) три точки; 2) чотири точки. Виконайте малюнки.

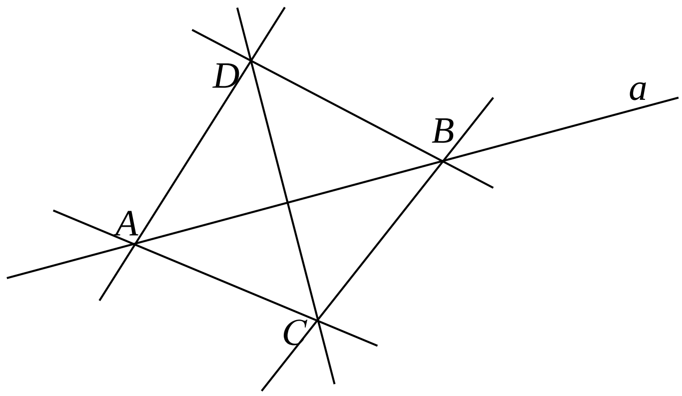
4. Дві точки визначають пряму. Скільки прямих можуть визначати: 1) три точки; 2) чотири точки? Виконайте малюнки.

5. Яке найбільше число точок перетину може бути у п’яти різних прямих? Виконайте малюнок.

Засвоєння властивостей цих понять під час експериментального навчання організувалося, зокрема, за допомогою вправ такого змісту:

Користуючись малюнком 2.7, запишіть:

1) точки, які лежать на прямій *a*;
2) точки, які не лежать на прямій *a*;
3) прямі, які проходять через точку *D*;
4) прямі, які не проходять через точку *A*;
5) прямі, які перетинаються в точці *A*, але не проходять через точку *B*.

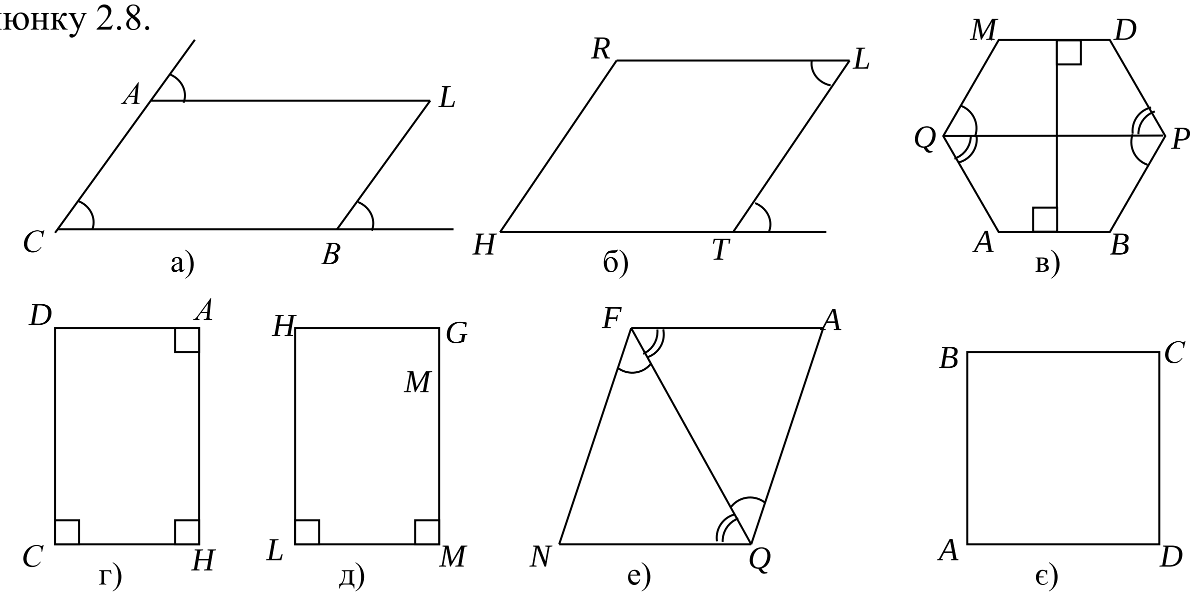


Мал. 2.7

Істотні ознаки неозначуваних геометричних понять відображено в системі аксіом. Тому на початку вивчення систематичного курсу планіметрії особливої уваги потребує процес вироблення в учнів потреби застосування аксіом для обґрунтування тривіальних, на перший погляд, фактів.

Найпоширенішими труднощами учнів у засвоєнні означень геометричних понять є самостійне виділення їх істотних ознак і формулювання означень. При цьому школярі часто не розпізнають деякі істотні ознаки або умови, невдало вибирають або взагалі пропускають родове поняття. Експериментальне навчання довело, що контрприклади допомагають краще усвідомити і запам’ятати істотні ознаки понять. Для складання вправ, що містять контрприклади, ми виділяли з означення поняття всі його ознаки. Кожну ознаку по черзі заміняли її запереченням. Вправа містила приклади, які відповідають означенню, і контрприклади. Наприклад, для засвоєння одного з означень паралелограма („Чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні, називається паралелограмом”) отримали таку вправу:

Які з фігур, зображених на малюнку, є паралелограмами? Усі дані позначено на малюнку 2.8.

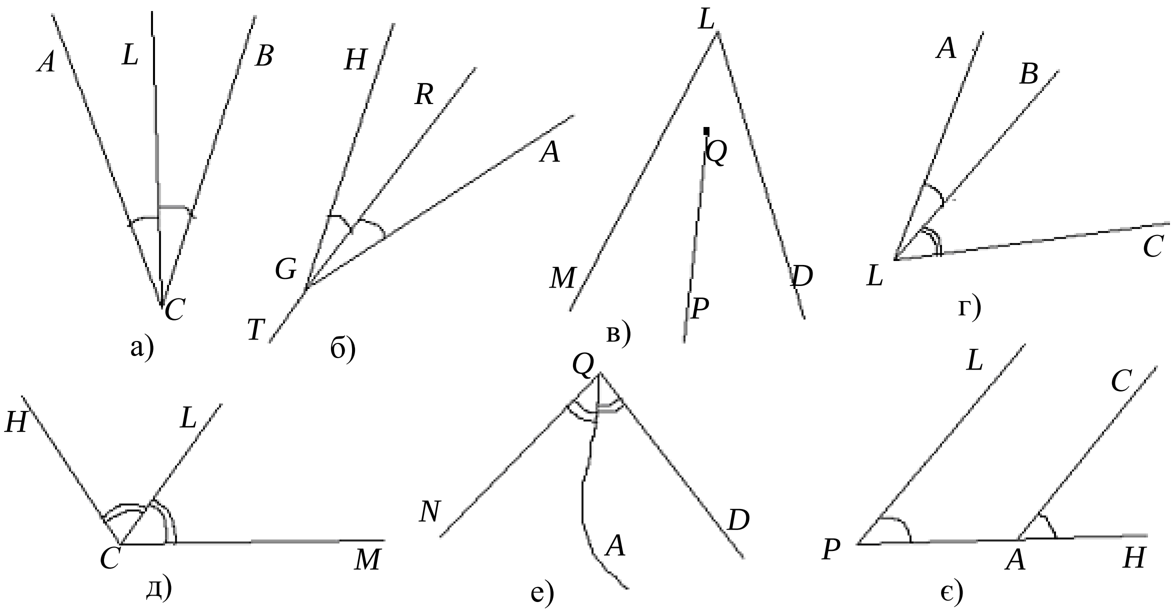


Мал. 2.8

Засвоєння поняття передбачає його застосування. Як показали результати констатувального експерименту, близько 40% учнів, які добре знають означення геометричних понять, не вміють застосовувати їх до розв’язування задач, доведення тверджень. Оперуючи конкретними фактами у видозмінених умовах, школярі неспроможні розпізнати в ньому окремий випадок знайомої їм істотної ознаки, не можуть виділити цю ознаку з-поміж неістотних ознак об’єкта.

Навчитися застосовувати поняття можна лише в процесі активної пізнавальної діяльності. Важливу роль при цьому відіграють такі розумові дії, як підведення під поняття (розпізнавання) та обернена дія – відшукання наслідків. Для встановлення факту належності об’єкта до певного поняття треба перевірити наявність у нього всієї сукупності необхідних і достатніх властивостей. Відсутність хоча б однієї з істотних властивостей у об’єкта означає, що до даного поняття він не належить. Отже, для того, щоб встановити належність (чи неналежність) об’єкта до певного поняття, потрібно виконати такі дії: 1) виділити ознаки поняття; 2) з’ясувати, якими сполучниками пов’язані ці ознаки; 3) якщо сполучником „і”, то об’єкт належить поняттю у випадку наявності у нього всіх властивостей, якщо „або”, то об’єкт належить поняттю за умови наявності у нього хоча б однієї з ознак. Тому система вправ на розпізнавання, наприклад, бісектриси кута (7-й клас) має спонукати учнів до таких дій: пригадати означення бісектриси кута; переконатися, що істотні властивості в ньому пов'язані сполучником „і"; на основі перевірки виконання кожної із властивостей зробити висновок щодо належності (чи неналежності) променя до поняття бісектриси даного кута. Наприклад.

„Які лінії на малюнку є бісектрисами кутів? Рівні кути позначено однаковою кількістю дуг".



Мал. 2.9

Система вправ на підведення під поняття рівностороннього трикутника має містити вправи такого змісту: „Визначте вид трикутника, якщо його сторони дорівнюють 6 см, 6 см, 6 см", „Який вид трикутника, якщо його сторони відносяться як 5 : 5 : 5?" та ін.

Застосування понять передбачає дію, зворотну до дії „підведення під поняття". Це дія „відшукання наслідків", коли від факту належності об'єкта до поняття приходять до системи властивостей, які має цей об'єкт. Вправи на застосування понять найчастіше передбачають дію відшукання наслідків. Так, система вправ на застосування поняття рівнобедреного трикутника має передбачати виведення таких наслідків з цього поняття: 1) дві сторони рівнобедреного трикутника рівні; 2) кути при основі рівні; 3) бісектриса кута при вершині є висотою і медіаною, проведеними до основи; 4) пряма, що містить згадану бісектрису кута при вершині, є віссю симетрії цього трикутника. Наприклад:

1. Назвіть основу і бічні сторони рівнобедреного трикутника *ABC*, якщо $a = 7$ см, $b = 5$ см, $c = 7$ см.

2. Назвіть основу рівнобедреного трикутника *KLM*, якщо $\angle K = \angle L = 35^{\circ}$.

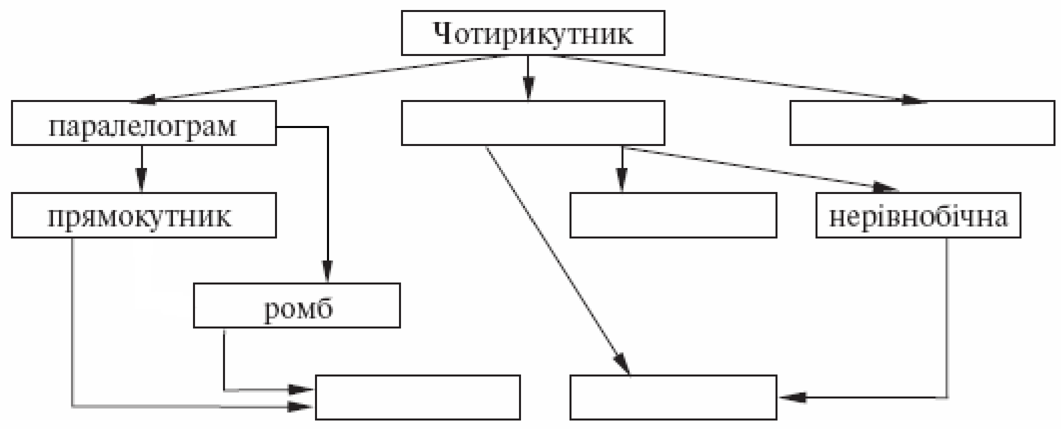
3. У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до основи, вдвічі менша від основи. Обчисліть кути трикутника.

4. У рівнобедреному трикутнику з основою *AC* проведено бісектрису *BK*. Знайдіть точку, симетричну точці *A* відносно прямої *BK*.

Засвоєння геометричних понять покращується, якщо з'ясовувати місце даного поняття в системі інших понять, встановлювати логічні зв'язки між поняттями. Головну роль в утворенні цих зв'язків відіграють двосторонні процеси переходу від родового поняття до видового і навпаки. Встановлення родо-видових відношень є одним із основних способів класифікації понять, що передбачає не тільки відшукання спільних істотних ознак об'єктів поняття, а й уміння ділити їх на класи за обраним критерієм. Діяльність учнів щодо класифікації геометричних понять сприяє узагальненню і поглибленню їхніх знань. У школярів формується уявлення про структуру систематичного курсу геометрії, його ідеї і методи. Психологічні дослідження, присвячені засвоєнню понять, свідчать про те, що істотним недоліком результату цього процесу є вилучення поняття із системи родових понять [66]. Наприклад, учні не бачать другої пари вертикальних кутів, утворених при перетині двох прямих, не пам'ятають, що квадрат є водночас прямокутником, ромбом, паралелограмом і т. ін.

Основою складання вправ на систематизацію понять є логічні схеми, які відображають зв'язки між поняттями. Ефективними є вправи на складання „родоводів" понять. Наприклад:

1. Заповніть пропуски, встановіть родово-видові відношення між поняттями. Для кожної з фігур зазначте родові і видові поняття (мал. 2.10).



Мал. 2.10

2. Доповніть означення:

а) прямокутник – це ..., у якого протилежні кути прямі;

б) прямокутник – це ..., в якого протилежні сторони паралельні і кути прямі.

3. Дайте декілька означень ромба.

4. Доповніть означення:

а) квадрат – це чотирикутник, ...;

б) квадрат – це прямокутник ... .

Експериментальне навчання довело ефективність вправ на встановлення міжпонятійних зв'язків для засвоєння поняття чотирикутника. Застосовувалися вправи такого змісту:

1. Назвіть властивості паралелограма, які має прямокутник.
2. Назвіть властивості паралелограма, які має ромб.
3. Доведіть, що будь-який паралелограм, вписаний у коло, – прямокутник.
4. За якої умови паралелограм є ромбом?
5. Доведіть, що будь-який паралелограм, описаний навколо кола, – ромб.
6. Доведіть, що паралелограм, у якого висоти рівні, є ромбом.
7. Доведіть, що будь-який вписаний у коло ромб – квадрат.

Система вправ, яка містить такі елементи, дає можливість встановлювати внутрішньопонятійні зв'язки без перевантаження теоретичним матеріалом.

У процесі вивчення курсу потрібно звертати увагу учнів на те, що, по-перше, поняття внаслідок зв'язків з іншими поняттями збагачуються новими властивостями (так, трикутник, вписаний або описаний відносно кола, набуває нових ознак) або стають окремими випадками (перпендикулярні прямі відносно суміжних кутів і т. ін.); по-друге, набувають нових способів дій (доведення рівності, паралельності, перпендикулярності відрізків з віднесенням їх до трикутників, паралелограма, прямокутника і т. ін.). Усвідомлення учнями цього факту і застосування властивостей кількох понять відбувається у процесі розв'язування задач комплексного характеру. Наприклад, „У трикутнику ABC точка O – центр вписаного кола. Знайдіть радіус кола, описаного навколо цього трикутника, якщо $BO = 2\sqrt{3}$ см, $CO = 3$ см, $\angle A = 120^{\circ}$." Такі задачі сприяють узагальненню понять і водночас є критерієм визначення рівня оволодіння поняттями. Подібні завдання пропонуються учням для тематичних підсумкових контрольних робіт, державної підсумкової атестації та зовнішнього незалежного оцінювання.

У процесі застосування понять важливим є формування в учнів умінь застосовувати знання у практичних ситуаціях. Психологічні дослідження свідчать про значні труднощі переходу від оперування абстрактними поняттями до конкретних практичних ситуацій. Приклади таких ситуацій наведено в дослідженнях В.І.Зикової [66, 67]. Багатьом учням нелегко одночасно виділити абстрактні співвідношення у конкретних даних і абстрагуватися від наочного сприйняття об'єктів. Для запобігання таким труднощам корисно залучати до системи вправ для формування понять задачі практичного змісту. Наприклад, для застосування поняття подібності трикутників корисною буде така задача: „Триповерховий будинок на світлині має висоту 8 мм. Знаючи, що його справжня висота дорівнює 13 м, а глибина камери фотоапарата – 12 см, визначте, на якій відстані від будинку був розміщений фотоапарат."

Відповідно до обґрунтованих нами принципів побудови, система вправ з геометрії в основній школі має містити вправи для забезпечення кожного з етапів формування геометричних понять. Крім цього, у доборі вправ слід дотримуватись принципу диференційованої реалізованості. Послідовність етапів формування понять певною мірою відповідає зростанню рівнів їх засвоєння. Тому у побудові диференційованої системи вправ для формування понять, крім рівнів навчальної діяльності учнів, рівнів програмних вимог щодо засвоєння понять, потрібно враховувати й етапи їх формування. Наприклад, у доборі системи вправ для формування поняття симетрії відносно прямої потрібно сформулювати рівневі вимоги до результатів засвоєння учнями цього поняття, виділивши відповідні вміння на кожному з етапів засвоєння. Потім треба визначити характер і типи вправ на кожному з рівнів, сформулювати еталонні задачі і доповнити систему однотипними вправами для відпрацювання відповідних умінь. У такий спосіб будувалася система вправ у підручниках [3] і [4], де автор була одним із упорядників завдань.

Формування вмінь доводити геометричні твердження засобом системи вправ

Результатом засвоєння геометричних понять є усвідомлення їх взаємозв'язків. Однією з форм зв'язку понять є *твердження*. У кожному геометричному твердженні встановлюється певне співвідношення між об'єктами, що охоплюються відповідними поняттями. Геометричне твердження може бути істинним або хибним залежно від того, правильно чи ні відображено наявні залежності між об'єктами. Наприклад, твердження „будь-який квадрат є прямокутником" – істинне, твердження „будь-який прямокутник є квадратом" – хибне. Таким чином, *геометричне твердження* – це мислительне відображення наявності або відсутності деяких ознак поняття або їх взаємозв'язків. За допомогою тверджень поняття набувають свого подальшого розвитку. Оскільки поняття відображає певний клас об'єктів, явищ або взаємозв'язків між ними, то будь-яке твердження є включення (чи не включення) одного поняття до класу іншого поняття. Наприклад, „будь-який рівносторонній трикутник є рівнобедреним", „прямі, що перетинаються, не є паралельними".

Систематичний курс геометрії основної школи являє собою систему тверджень, представлених у вигляді речень з геометричними та логічними термінами або відповідними їм символами. Геометричні терміни (або символи) означають поняття, які складають геометричний зміст, логічні терміни (або символи) означають логічні операції, засобом яких з одних геометричних тверджень утворюються інші, сукупність яких й утворює відповідний курс. Є твердження, які приймаються без доведення (аксіоми), і ті, що доводяться (теореми, задачі на доведення).

Задачі на доведення у систематичному курсі геометрії основної школи відіграють важливу роль. По-перше, розв'язування таких задач потребує актуалізації різних геометричних фактів, включення їх у взаємозв'язки і тому задачі на доведення є дієвим засобом поглиблення і закріплення знань, усвідомлення логічної структури курсу. По-друге, процес доведення передбачає застосування різних методів геометрії (методи, які ґрунтуються на застосуванні ознак рівності трикутників, властивостей паралельних, перпендикулярних прямих, векторний метод, координатний, геометричних перетворень та ін.) та методів доведення (синтетичний, аналітичний, аналітико-синтетичний, метод аналогії, від супротивного та ін.). По-третє, розв'язування задач на доведення сприяє розвитку логічного мислення учнів, формуванню евристичних прийомів розумової діяльності, виробленню відповідних умінь, а також, вихованню позитивних якостей особистості (обґрунтованість суджень, стислість, чіткість висловлення думки).

За вимогами навчальної програми [130] учні мають уміти доводити властивості геометричних фігур, виконуючи доказові міркування на основі теоретичних фактів (ознак рівності і подібності трикутників, ознак паралельності прямих, теореми Піфагора та ін.), а також, застосовувати ці вміння у розв'язуванні типових задач на обчислення, доведення і побудову.

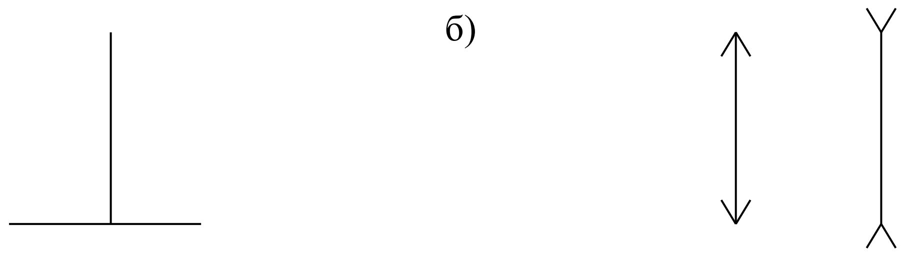
Вироблення вмінь доводити твердження в систематичному курсі геометрії відбувається шляхом навчання учнів готових доведень (теорем) і самостійного пошуку доведень (розв'язування задач на доведення). „Готові доведення мають виступити як моделі, на яких учні навчаються розумових дій і прийомів розумової діяльності, що лежать в основі вміння доводити, методів доведень і їх застосування, вчаться самостійно шукати доведення за аналогією з вивченим" [86, 147]. Отже, вміння відтворювати готові доведення геометричних тверджень посідає найнижчий, але важливий, рівень уміння їх доводити. Складовими такого вміння є:

1) розмежування умови і вимоги твердження; 2) усвідомлення ідеї і системи розгортання доведення; 3) розуміння методу доведення; 4) виділення основних етапів й усвідомлення всіх аргументів доведення. Вміння учнів доводити охоплюють і мотиваційні фактори. Потреба доводити формується у результаті переконання учнів у недосконалості органів відчуттів при обґрунтуванні тверджень, усвідомлення обмеженості дослідно-індуктивного обґрунтування, прагнення робити посилання на раніше встановлені загальні положення, переконання в необхідності розпочинати доведення з ретельного аналізу умови і висновку твердження, до пізнання нових методів і способів логічного обґрунтування та ін.

Для формування в учнів згаданих компонентів дій щодо системи вправ на формування вмінь доводити твердження ми включали вправи таких типів: 1) вправи із суперечливою інформацією; 2) вправи з використанням зорових ілюзій; 3) вправи на протиставлення способів обґрунтування. Наприклад, перед вивченням нерівності трикутника (7 кл.) пропонуємо учням практичну роботу, в якій треба скласти трикутник з трьох олівців різної довжини (18 см, 6 см і 8 см) і зробити висновок. В учнів виникає потреба з'ясувати причину невдачі і довести відповідну властивість.

На початку вивчення систематичного курсу геометрії вчителі часто зустрічаються з проблемою переоцінки школярами зорового сприйняття зображень геометричних фігур. Поширеною помилкою учнів є посилання на очевидність того, що похила, проведена з точки до прямої, більша за перпендикуляр, проведений до прямої з цієї самої точки. Для усвідомлення учнями ілюзорності подібного переконання пропонувалися вправи такого змісту: „Визначте „на око", який з відрізків має більшу довжину (мал. 2.11)? Відповідь перевірте за допомогою вимірювання".

а) б)



Мал. 2.11

Такі вправи застерігають учнів від порівняння відрізків „на око” і спонукають до застосування вимірювань. Тому важливо, щоб учні усвідомили перевагу дедуктивного обґрунтування тверджень над дослідно-індуктивним. Наприклад, у двох вправах пропонується довести рівність двох відрізків, які у першому випадку є сторонами трикутника, а в другому – радіусами одного кола. Застосовуючи вимірювання у першій вправі, не всі учні мали однакові результати. Однак ніхто з них не виявив сумніву у рівності двох радіусів одного кола (за означенням). В такий спосіб учні доходили усвідомлення загальності і точності дедуктивного обґрунтування.

Доведення геометричного твердження починається з аналізу його змісту, розмежування умови і вимоги. Чітке усвідомлення даних і вимоги теореми чи задачі на доведення необхідне для розуміння готового доведення, а особливо для самостійного його пошуку. Мислительний процес відокремлення умови від вимоги у формулюванні твердження передбачає його переформулювання у формі „якщо ..., то...”. Тому на початку вивчення систематичного курсу геометрії доцільно формулювати умови теорем і задач на доведення саме в такій формі. Крім цього, доцільно пропонувати учням вправи на переформулювання твердження. Наприклад: Сформулюйте умову задачі у формі речення типу: „якщо ..., то ...”:

1. Кути, суміжні з рівними кутами, рівні.
2. Дві різні прямі мають не більше як одну спільну точку.
3. Хоча б один з кутів, що утворюються при перетині двох прямих, не перевищує 90°.
4. Два тупих кути не можуть бути суміжними.
5. Бісектриси двох суміжних кутів перпендикулярні.

У результаті виконання таких вправ учні без ускладнень розрізняють умову і вимогу кожної наступної задачі на доведення, відповідаючи на запитання: „Що в задачі дано? Що потрібно довести?”

Доведення геометричного твердження потребує неодноразового повернення до його умови і вимоги, тому корисно вчити учнів фіксувати умову теореми чи задачі на доведення у вигляді короткого запису. Короткий запис виконується у вигляді розмежування умови від вимоги пунктами „дано” і „довести” з використанням прийнятої символіки. Вміння учнів самостійно виконати короткий запис умови теореми чи задачі на доведення означає усвідомлення ними, що дано і що потрібно довести, хоча й не є обов’язковою вимогою оформлення розв’язання. Для вироблення відповідних умінь учням пропонували вправи такого змісту:

1. Запишіть речення символами:

а) кут *AOB* дорівнює куту *KLM* ($\angle AOB = \angle KLM$);

б) сума кутів *AOB* і *BOC* дорівнює 180º ($\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ$);

в) пряма *AB* перпендикулярна до прямої *CD* ($AB \perp CD$).

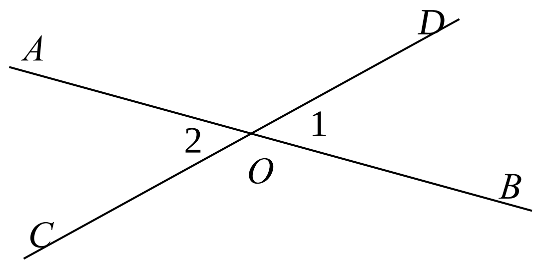
2. Виконайте короткий запис умови задачі, застосовуючи потрібні позначення:

а) доведіть, що трикутник *ABC* рівнобедрений, якщо $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 45^\circ$;

б) доведіть, що коли сторона одного рівностороннього трикутника дорівнює стороні другого рівностороннього трикутника, то такі трикутники рівні;

в) доведіть рівність трикутників за двома сторонами і медіаною, проведеною до однієї з них.

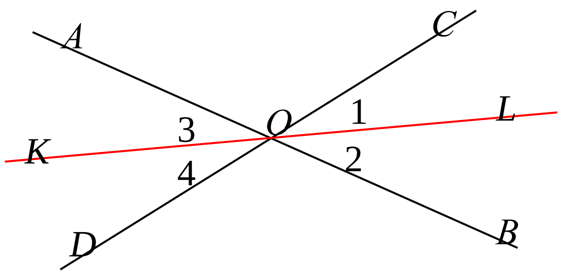
Для усвідомлення змісту твердження, яке потрібно довести, корисно запропонувати учням вправи на обчислення, що є окремими випадками твердження. Наприклад, до того, як учні з’ясують властивість вертикальних кутів, можна розв’язати з ними вправу „Знайдіть градусні міри кутів 1 і 2, утворених перетином прямих *AB* і *CD* (мал. 2.12), якщо кут *AOD* дорівнює: а) 130º; б) 70º; в) 110º; г) 50º.”



Мал. 2.12

Користуючись відомою властивістю суміжних кутів, учні віднімаючи від 180º градусну міру відомого кута, з’ясовують, що вертикальні кути рівні. Хід розв’язування задачі визначає і порядок міркувань у доведенні теореми.

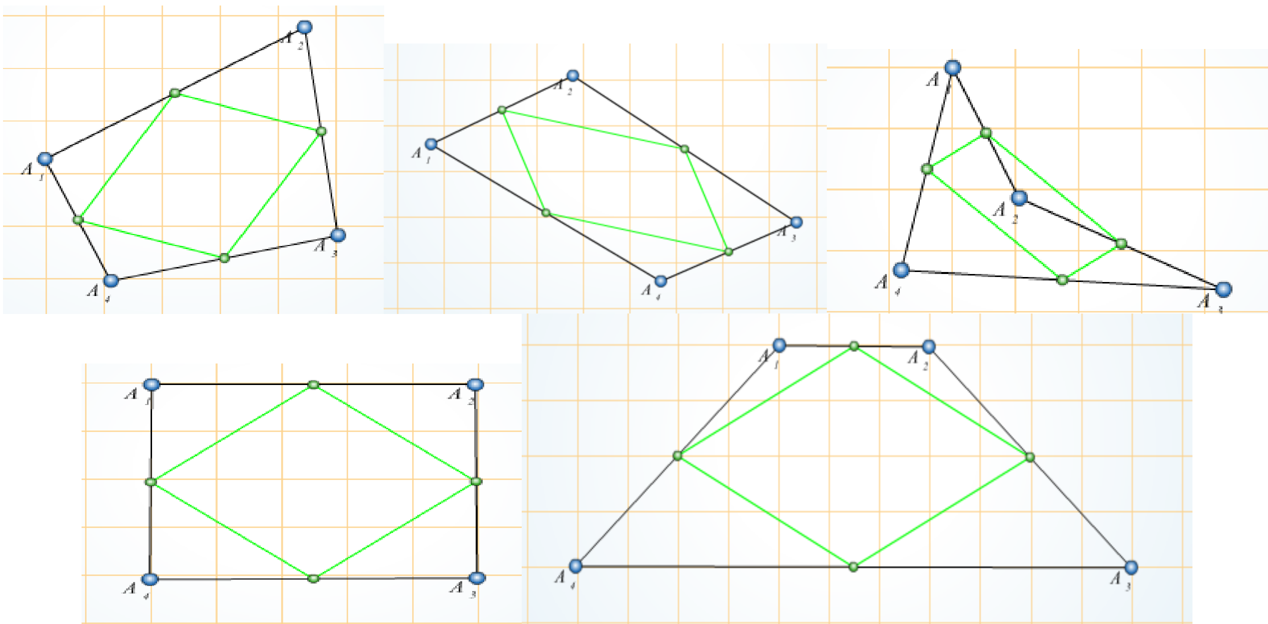
Результати досліджень психологів і методистів проблеми формування вмінь доводити твердження [8], [14], [19], [21], [48], [147], [196] і практика навчання свідчать про те, що учні краще усвідомлюють і запам'ятовують структуру доведення, обґрунтовуючи кожний його крок. Цьому сприяє короткий запис учнями аргументів щодо виконання кожного етапу доведення. На початку вивчення систематичного курсу геометрії корисно разом з учнями записувати доведення у вигляді таблиці з двох колонок, де навпроти кожного кроку доведення записується його обґрунтування. Такі вправи виховують в учнів потребу обґрунтовано і переконливо міркувати, застосовуючи раніше вивчені твердження. Наприклад, на початку ознайомлення учнів з доведеннями пропонується задача „Доведіть, що бісектриси вертикальних кутів утворюють розгорнутий кут". Самостійне її розв'язування не є ефективним на цьому етапі формування в учнів відповідних умінь. Краще запропонувати вправу (мал. 2.13) на обґрунтування кроків доведення, поданого синтетичним методом, а саме: „Обґрунтуйте кожний крок доведення"

	**Дано**: кути AOD і COB вертикальні, KL – бісектриса кутів AOD і COB **Довести**: $\angle KOL = 180^{o}$
Кроки доведення	Обґрунтування
1. $\angle AOD = \angle COB$	1. За теоремою про вертикальні кути.
2. $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$	2. Оскільки KL – бісектриса кутів AOD і COB, що рівні між собою.
3. $\angle KOL = \angle AOC + \angle 3 + \angle 1$	3. За властивістю вимірювання кутів.
4. $\angle KOL = \angle AOC + \angle 2 + \angle 1$	4. Оскільки $\angle 3 = \angle 2$ з п. 2 доведення
5. $\angle KOL = \angle AOC + \angle$ COB	5. За властивістю вимірювання кутів.
6. $\angle KOL = 180^{o}$	6. За означенням розгорнутого кута.

Мал. 2.13

Готові доведення розглядаються учнями на готовому зображенні геометричної фігури та її елементів, що є окремим випадком умови і вимоги твердження.

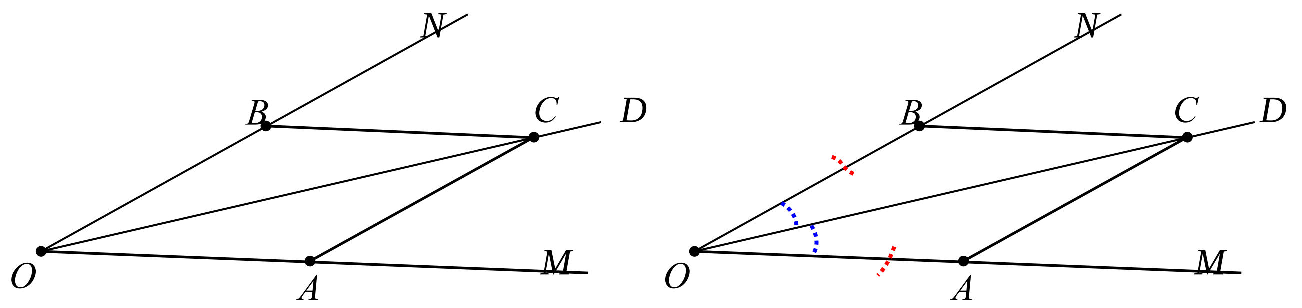
Практика навчання свідчить, що психологічні прийоми абстрагування від неістотних елементів малюнка і узагальнення певного геометричного факту на всі можливі аналогічні випадки є складними для учнів основної школи (особливо на початку вивчення систематичного курсу геометрії). Часто вони не можуть відтворити вивчене доведення не тільки за видозміненим малюнком, а й за таким самим, але з іншими буквеними позначеннями. Для подолання подібних труднощів під час розгляду готових доведень учням пропонувалися вправи на усвідомлення факту, що розглядуване твердження доводиться для всіх випадків зображення геометричних фігур, із застосуванням варіювання їх неістотних ознак. Наприклад, під час вивчення теми „Теорема Фалеса. Середня лінія трикутника” пропонувалася задача на доведення: „Доведіть, що середини сторін чотирикутника є вершинами паралелограма”. За допомогою електронного засобу GRAN-2D учні досліджували цю властивість, обчислюючи довжини протилежних сторін утвореного чотирикутника (вправа 2 додатку З дисертаційного дослідження). Малюнок до задачі є окремим випадком цього факту. Для того, щоб учні усвідомили істинність цього твердження для всіх чотирикутників (і навіть неопуклого), корисно запропонувати їм вправу: „За динамічною моделлю [16] переконайтеся в тому, що середини сторін будь-якого чотирикутника є вершинами паралелограма (мал. 2.14)”



Мал. 2.14

Переконавшись у такій властивості середин сторін будь-якого чотирикутника, учні під час відтворення доведення не прив’язуються до малюнка, розміщеного в підручнику, а зображають такий геометричний факт у довільно вибраному розміщенні на площині. У такий спосіб школярі краще усвідомлюють геометричні факти і співвідношення. Учням експериментальних класів пропонувалося висувати гіпотези щодо властивостей геометричних фігур за електронними динамічними моделями (властивості бісектрис, висот і медіан трикутника, співвідношення величин вписаних і центральних кутів та ін.) Такі вправи сприяли узагальненню учнями істинності геометричних фактів і мотивації їх доведення і реалізували визначені нами принципи наочності й варіативності добору системи вправ.

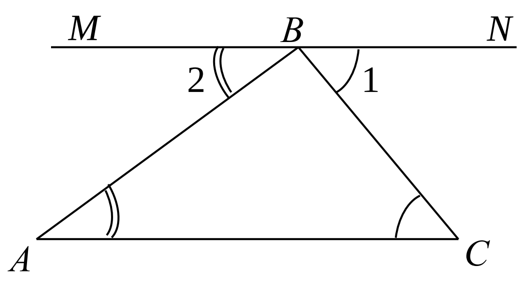
Уміння аналізувати геометричний малюнок є важливою умовою відтворення і самостійного пошуку доведень. У якості експериментальних учням пропонувалися вправи, вимогою яких є виділення на малюнку фігур чи їх елементів, які задовольняють умову твердження, яке доводиться. Наприклад, під час вивчення теми „Перша і друга ознаки рівності трикутників” учні виконували вправи такого змісту: „На сторонах кута *MON* відкладено рівні відрізки *OA* і *OB*. Довільну точку *C* бісектриси *OD* цього кута сполучено з точками *A* і *B*. Доведіть, що $\Delta AOC = \Delta BOC$.” Для засвоєння змісту цієї задачі: „На малюнку 2.15 позначте рівні за умовою відрізки і кути. Які ще рівні елементи мають трикутники *AOC* і *BOC*? Зробіть висновок”



Мал. 2.15

Аналіз умови задачі у поєднанні з практичною діяльністю школярів активізує їхню мислительну діяльність і надає їй евристичного характеру. Учні впізнають ознаку рівності трикутників за двома сторонами і кутом між ними. У такий спосіб вони значно краще усвідомлюють ідею доведення, ніж за умови його формального вивчення.

Доведення, які пропонуються учням у готовому вигляді, реалізують синтетичний метод. Вони представлені у вигляді послідовності умовиводів, що здійснює перехід від даних умови до того, що потрібно довести. Для активного сприйняття готових доведень учні мають усвідомлювати причину вибору саме такого шляху. Ретельний аналіз змісту теореми розкриває значення кожної ланки доведення, пояснює учням походження ідеї доведення, дає можливість узяти участь у пошуку доведення. Вивчаючи доведення теореми про суму кутів трикутника, учні знайомляться зі способами додаткових побудов.



Мал. 2.16

Дано: $\Delta\, ABC$.

Довести: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^{o}$.

Доведення

1. Проведемо через вершину B трикутника пряму MN, паралельну AC. Утворені кути позначимо цифрами: $\angle 1$ і $\angle 2$ (мал. 2.16)

2. $\angle 1 = \angle C$, $\angle 2 = \angle A$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих MN і AC та січних BC і AB відповідно.

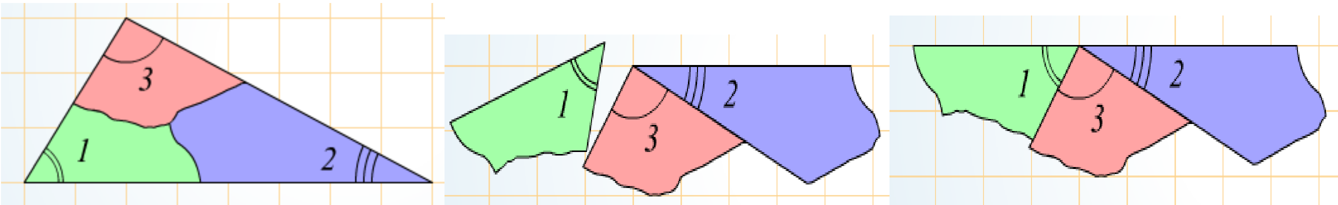
3. Кути 1, 2, B утворюють розгорнутий кут, тому $\angle 1 + \angle B + \angle 2 = 180^{o}$.

4. Замінивши в цій рівності кути 1 і 2 рівними їм кутами C і A, дістанемо: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^{o}$.

З метою усвідомлення учнями експериментальних класів потреби в додаткових побудовах застосовувалися практичні роботи. А саме:

1. На аркуші паперу накресліть будь-який трикутник і виміряйте його кути.
2. Обчисліть суму кутів трикутника, зробіть висновок.

Або вправи за анімаціями з електронних засобів навчального призначення [16] такого змісту: „За анімацією зробіть висновок про суму кутів трикутника” (мал. 2.17)



Мал. 2.17

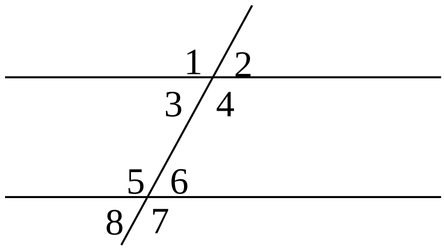
Продовжуючи міркування, вчитель пояснював, що для доведення теореми потрібно побудувати розгорнутий кут, який складається з кутів трикутника (або рівних їм кутів). Рівність кутів можна довести за допомогою відомих раніше тверджень про кути, що утворюються при перетині паралельних прямих січною. Тому й проводиться пряма, паралельна до однієї зі сторін трикутника. Зрозуміти учням доцільність такої додаткової побудови допомагає розглянута анімація.

Учні успішніше відшукують ідеї доведення тверджень, якщо їх ознайомити з достатньою кількістю типових конфігурацій геометричних фігур. Цьому сприяють вправи за готовими малюнками на розпізнавання об’єктів понять, обґрунтування їх властивостей, обчислення значень геометричних величин. Важливо формувати в учнів уміння виділяти спільні ідеї доведення груп тверджень. Так ознайомивши учнів зі змістом третьої ознаки рівності трикутників, доцільно поставити запитання: „З чого починалося доведення першої і другої ознак рівності трикутників?” і запропонувати їм застосувати ідею накладання геометричних фігур для доведення третьої ознаки, а також цю теорему для випадків, коли трикутники прямокутні.

Для оволодіння вміннями самостійно здійснювати пошук доведення геометричних тверджень учням потрібно засвоїти основні складові вміння доводити і методи доведень. Процес доведення більшості теорем і задач на доведення спрямований на те, щоб показати наявність в об’єктів, даних в умові, ознак поняття, про яке йдеться у висновку теореми (задачі). У геометричних доведеннях такими поняттями є фігури, їх властивості, відношення між фігурами, Тому перед вивченням теореми або розв’язуванням задачі на доведення для учнів корисною буде система вправ на актуалізацію тих положень, на які спираються в доведенні.

На перших етапах опанування учнями доведень корисно повторити раніше вивчені твердження та схеми способів доведення у формі усних вправ. Наприклад, перед вивченням ознаки паралельності прямих ми пропонували учням усні вправи такого змісту:

1. Чому дорівнює сума суміжних кутів?
2. На малюнку 2.18 знайдіть пари суміжних кутів, пари вертикальних кутів.



Мал. 2.18

3. Скільки прямих можна провести через дві різні точки площини?
4. Поясніть, як доводити від супротивного.

Надалі учні мають уміти самостійно актуалізувати набуті раніше знання. Для цього потрібно навчати їх загальних положень, зведених у систему за певною ознакою. Так, для вироблення вмінь доводити паралельність прямих (відрізків) доцільними є вправи з пропусками:

Дві прямі паралельні, якщо:

а) кожна з них ... третій прямій;

б) внутрішні ... кути рівні;

в) сума внутрішніх ... кутів дорівнює 180^{o};

г) кожна з них ... до третьої прямої.

Ця вправа пропонується учням після вивчення теми „Ознаки паралельності прямих” у 7 класі, а також під час вивчення теми „Чотирикутники” у 8 класі, де доведення паралельності прямих (відрізків) є складовою багатьох доведень.

Для того, щоб вивчені раніше твердження стали для учнів аргументами під час доведення наступних тверджень, корисними є такі вправи:

1. Для доведення подібності трикутників використовують ...
2. Для доведення того, що даний чотирикутник є трапеція, потрібно встановити ...

3.Щоб знайти проекції катетів на гіпотенузу за відомими трьома сторонами даного прямокутного трикутника, потрібно ...

Відшуканню послідовності логічно пов'язаних між собою кроків доведення сприяє вміння переформульовувати умову і вимогу твердження. Переформулювання умови твердження передбачає послідовне виведення з його умови наслідків, що є ознаками шуканого поняття (підведення під поняття). Експеримент підтвердив, що виробленню в учнів таких умінь сприяють вправи на формулювання наслідків.

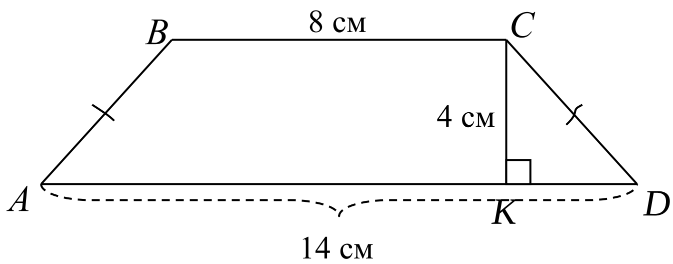
Наприклад.

1. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Запишіть рівності їх елементів.
2. У трикутну ABC висота BH є його бісектрисою. Якого виду трикутник ABC?
3. Радіус кола, описаного навколо трикутника дорівнює половині однієї з його сторін. Що це означає?

Корисними також є вправи на складання задач за відомою умовою. Від учнів вимагається проаналізувати умову задачі, дані геометричні фігури, їх характеристики і сформулювати можливі вимоги задачі.

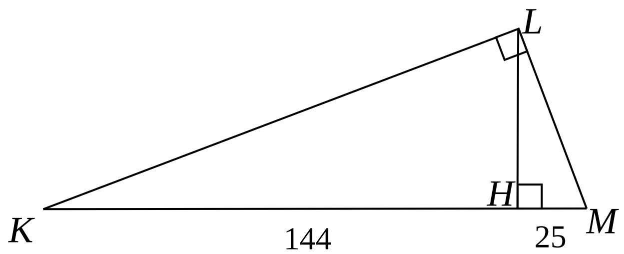
Наприклад:

1. Сформулюйте вимогу задачі, умову якої подано на малюнку 2.19.



Мал. 2.19

2. Які елементи трикутника можна знайти за даними малюнка 2.20?



Мал. 2.20

Успіх пошуку плану доведення залежить також від уміння здобувати інформацію з вимоги твердження. Для формування такого вміння ми застосовували вправи на переформулювання вимоги задачі та вправи на складання задач за відомою вимогою. Вправи на переформулювання вимоги задачі передбачають заміну понять, які містяться у вимозі, їх означеннями та ознаками.

Наприклад.

1. Доведіть, що коли у паралелограма кути, прилеглі до однієї сторони, рівні, то він є *прямокутником*. (Доведіть, що коли у паралелограма *кути*, прилеглі до однієї сторони, рівні, то вони *прямі*).

2. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O, яка є серединою кожного з них. Доведіть, що $\Delta AOC = \Delta BOD$. (Відрізки AB і CD перетинаються в точці O, яка є серединою кожного з них. Доведіть, що *дві сторони і кут між ними трикутника AOC дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними трикутника BOD*).

Під час виконання вправ на складання задач за відомою вимогою учні мають проаналізувати вимогу задачі і встановити можливу умову.

Наприклад.

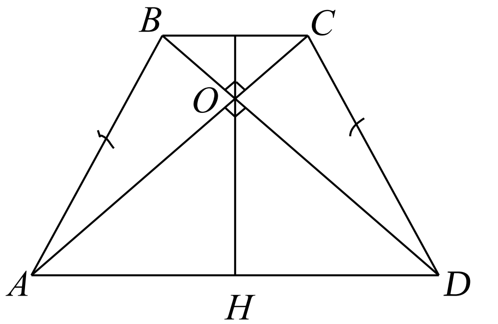
1. Знайти периметр трапеції, позначивши потрібні дані на малюнку 2.21.

Мал. 2.21

2. Складіть задачу на знаходження синуса кута прямокутного трикутника.

Відшукання шляху доведення твердження полегшується, якщо застосовувати допоміжні задачі. Розв’язання допоміжної задачі містить ті кроки доведення твердження, про які учні важко здогадуються. За умови застосування синтетичного методу доведення виконання додаткової побудови, зокрема, викликає труднощі майже у кожного учня. Наприклад, у 8 класі учням було запропоновано задачу: „Доведіть, що коли діагоналі рівнобічної трапеції взаємно перпендикулярні, то середня лінія трапеції дорівнює її висоті”. Для її розв’язування учні виконували малюнок. За умови проведення висоти трапеції у звичайному положенні (з вершини тупого кута), учні не могли встановити план доведення. В експериментальних класах перед розв'язуванням цієї задачі ми пропонували учням таку вправу: „Знайдіть висоту *OH* рівнобедреного трикутника *AOD* і висоту *OK* рівнобедреного трикутника *BOC*, зображених на малюнку 2.22".

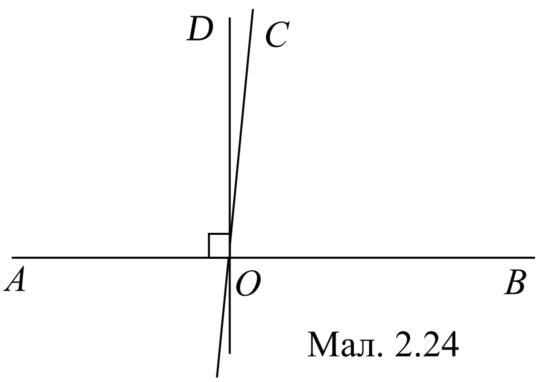
Після виконання такої вправи учні самі пропонували провести висоту трапеції (мал. 2.23) через точку перетину її діагоналей і легко знаходили шлях доведення.



Мал. 2.23

Формування в учнів поняття про методи доведення та вміння їх застосовувати за нашою методикою здійснювалося на прикладі доведення кількох тверджень, коли під керівництвом учителя школярі з'ясовують зміст методу й алгоритм його застосування.

Для засвоєння учнями алгоритму застосування того чи іншого методу краще під час доведення використовувати систему доцільних вправ, які забезпечують його усвідомлений вибір і реалізацію. Так, для доведення твердження „Через будь-яку точку на прямій проходить тільки одна пряма, перпендикулярна до даної прямої"



Мал. 2.24

Дано: пряма AB, $O \in AB$, $OD \perp AB$ (мал. 2.24).

Довести: пряма $OD \perp AB$ тільки одна

методом „від супротивного" застосовуємо таку послідовність вправ:

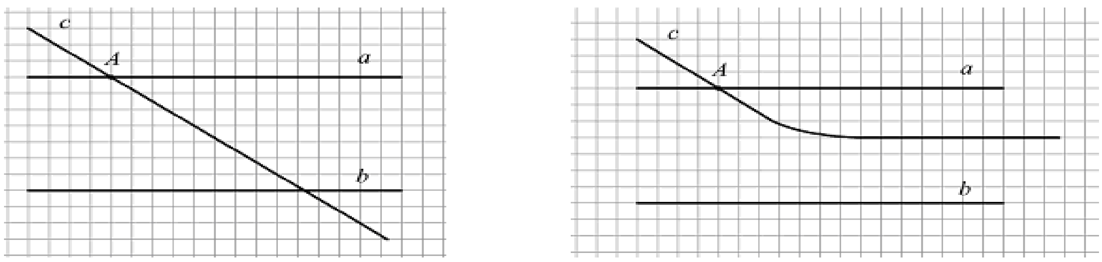
1. Сформулюйте твердження, протилежне до даного.

2. Чому дорівнюють кути, утворені обома прямими, перпендикулярними до даної прямої, що проходять через точку *O*?

3. Скільки прямих кутів можна відкласти від променя *OB* в один бік від нього? За яким відомим твердженням? Зробіть висновок.

Така форма організації засвоєння методу доведення активізує пізнавальну діяльність школярів, сприяє свідомому засвоєнню і запам'ятовуванню алгоритму застосування методу. Важливим є відтворення всіх пунктів доведення. Психологи стверджують, що вилучення окремих етапів доведення призводить до нерозуміння учнями його головної ідеї [147].

З практики навчання геометрії відомо, що метод доведення „від супротивного" є найскладнішим для розуміння. Учням психологічно важко сприймати припущення, особливо якщо воно ілюструється неправильним малюнком. Розроблений нами електронний засіб навчального призначення [37] дає можливість ілюструвати припущення у доведенні твердження за допомогою анімації. Це сприяє перебігу мислительних процесів абстрагування в учнів й унаочнює його неможливість. Одним із прикладів є анімація, яка ілюструє доведення наслідку з аксіоми паралельності прямих (мал. 2.25).



Мал. 2.25

Логічною основою методу доведення від „супротивного" є закон виключення третього: з двох супротивних тверджень одне завжди правильне, друге – неправильне, а третього бути не може. Усвідомленню непрямого доведення, необхідності розгляду всіх можливих припущень, які виключають одне одного, сприяють вправи на формулювання вичерпних тверджень. Наприклад: „У 7-А класі кількість учнів не менша, ніж у 7-Б класі. Яку кількість учнів можна припустити у 7-А класі, якщо у 7-Б класі 30 учнів?"

Засвоєння учнями основних методів доведення вимагає сформованості загальних і специфічних умінь, які є складовими кожного з методів. Так, уміння застосовувати аналітичний і синтетичний (аналітико-синтетичний) методи передбачає знання учнями означень геометричних понять, їх властивостей, змісту аксіом, раніше доведених тверджень та уміння будувати послідовність логічно пов'язаних між собою висновків на основі цих знань. Реалізація методу доведення „від супротивного" потребує від учнів, зокрема, вміння формулювати твердження, протилежні до даних. Методи геометричних перетворень та алгебраїчний потребують наявності специфічних умінь (будувати прообрази фігур, виконувати операції з векторами, в координатах). За нашою методикою, загальна схема навчання учнів застосовувати основні методи при доведенні тверджень має таку структуру:

1.Виділення операційного складу вміння застосовувати метод.

2.Роздільне закріплення кожної операції вправами.

3.Формування способів діяльності у формі вказівок.

Для засвоєння вміння застосовувати певний метод у доведенні відповідна система вправ має містити такі завдання: на засвоєння дій з геометричними об'єктами даним методом; на переклад геометричних фактів мовою методу і навпаки; на геометричну інтерпретацію результатів виконання дій.

Розглянемо, наприклад, систему вправ на вироблення в учнів умінь доводити твердження координатним методом. Спочатку пропонуються вправи на знаходження точки за її координатами і розв'язування оберненої задачі, відстані між двома точками, координати середини відрізка і т ін. Наприклад:

1. Знайдіть відстань між точками $A(1; 5)$ і $B(4; 6)$.

2. Знайдіть координати середини відрізка AB, якщо його кінці мають координати: $A(-1; 2)$, $B(-5; -6)$.

3. Точка C – середина відрізка AB. Знайдіть координати точки B, якщо $A(0; 1)$, $C(-2; 4)$.

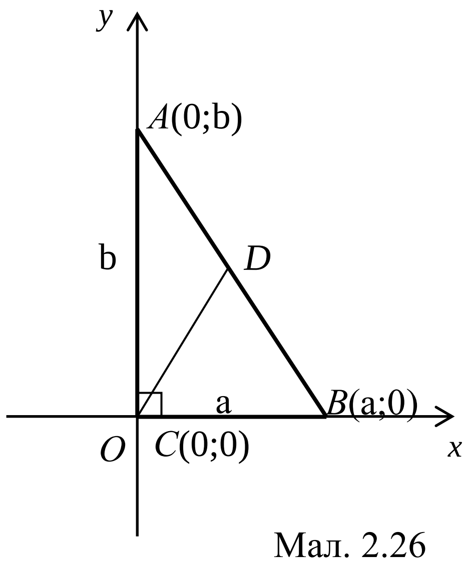
На другому етапі розв'язуються задачі на доведення рівності відрізків, паралельності, перпендикулярності відрізків, відшукання точок, які знаходяться на певній відстані від заданих точок або прямих і т ін., методом координат і геометричну інтерпретацію здобутих результатів. Наприклад:

1. Доведіть, що чотирикутник *ABCD*, вершини якого мають координати *A*(-3; 4), *B*(4; 3), *C*(5; -4),*D*(-2; -3), є ромбом.

2. За координатами середин сторін трикутника (5; 1), (9; 4), (9; -2) знайдіть довжини його сторін.

3. Доведіть, що чотирикутник *ABCD*, вершини якого мають координати *A*(-3; 3), *B*(3; 3), *C*(3; -1), *D*(-3; -1), є прямокутником.

Потім розв’язуються задачі координатним методом, для чого складається план розв’язання і вводиться система координат. Діяльність щодо вибору системи координат носить евристичний характер. Уміння вводити систему координат набувається учнями завдяки досвіду розв’язування однотипних задач. Нами застосовувались системи доцільних вправ, виконання яких забезпечувало діяльність щодо реалізації методу. Наприклад, для розв’язання задачі „Доведіть, що середина гіпотенузи прямокутного трикутника рівновіддалена від усіх його вершин” учні повинні вміти знаходити координати середини відрізка, знаходити відстані між точками. Аналіз умови задачі здійснювався за допомогою вправ, які виконуються за мал. 2.26:



Мал. 2.26

1. Довжини яких відрізків порівнюються?

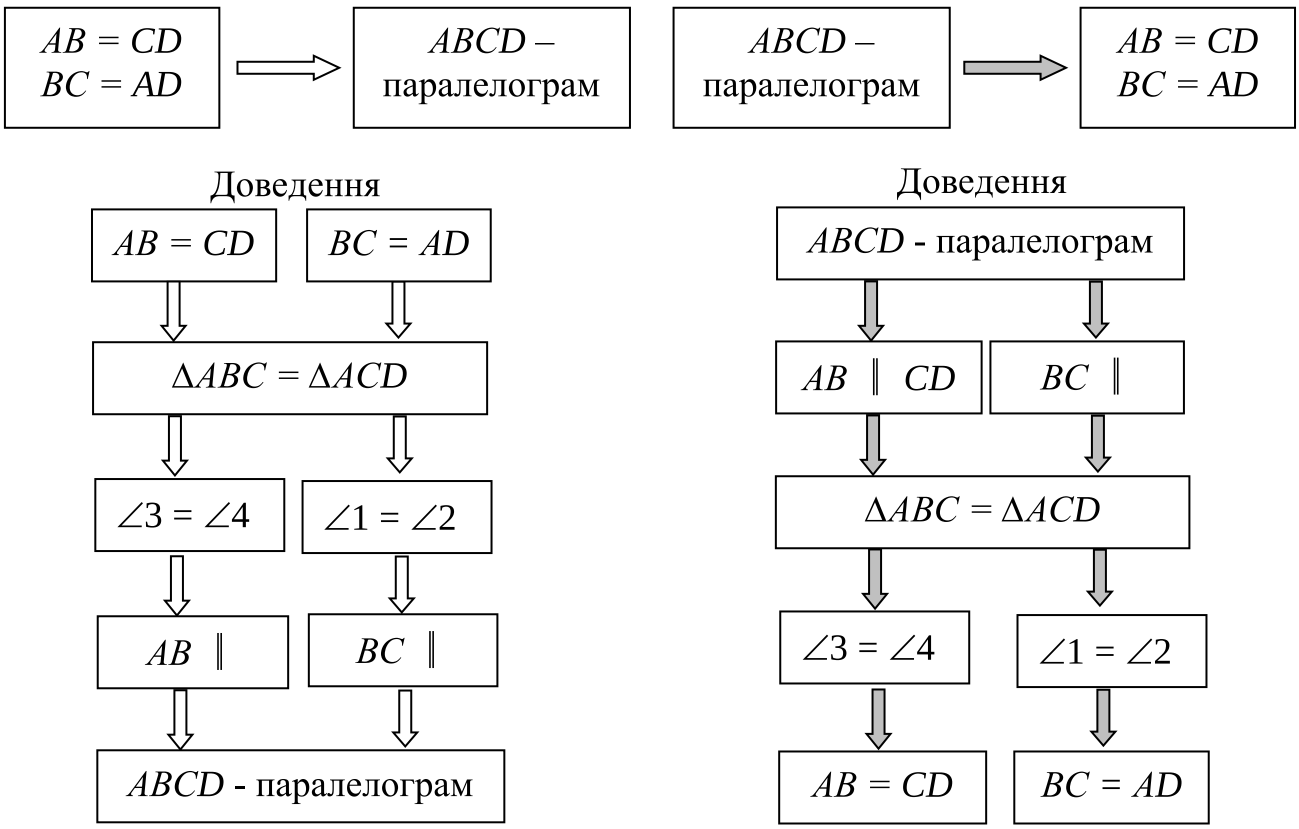
2. Нехай довжини катетів трикутника дорівнюють: $AC = b$, $BC = a$. Чому дорівнює відстань між точками *A* і *C*; *A* і *B*?

3. Як розмістити систему координат, щоб виразити ці відстані в координатах?
4. Запишіть координати точок *A*, *B* і *C*.
5. Чи можна знайти координати точки *D*?
6. Як знайти і порівняти відстані *AD*, *BD* і *CD*?

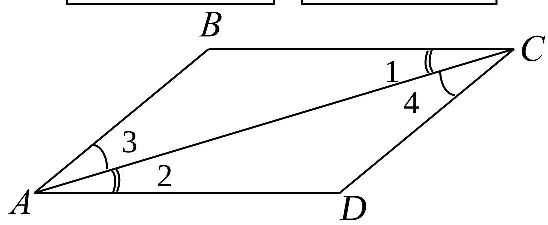
Для засвоєння учнями дедуктивної системи курсу геометрії основної школи необхідно знайомити їх із характеристичними властивостями понять. Усвідомлення відмінностей між прямим (властивістю поняття) і оберненим (ознакою поняття) твердженнями, потреби їх доводити сприяє узагальненню геометричних знань. З практики навчання відомо, що учні часто не розрізняють пряму й обернену теореми під час їх застосування або переконані, що справедливість оберненої теореми слідує з доведення прямої. Для розуміння учнями того, що в прямому й оберненому твердженнях представлено різні залежності, слід запропонувати їм ряд прикладів, у яких перестановка умови і висновку призводить до хибного твердження. Наприклад, твердження, обернене до істинного „Якщо кути суміжні, то їх сума дорівнює 180º, хибне. Корисними є також вправи на формулювання обернених тверджень. Наприклад: „До кожного з тверджень сформулюйте обернене і визначте, істинне воно, чи хибне: якщо центральні кути одного кола рівні, то і відповідні їм дуги рівні; якщо два кути вертикальні, то вони рівні; в) якщо фігури рівні, то і їх площі рівні”.

Зазвичай, доведення оберненого твердження ґрунтується на інших означеннях і теоремах, ніж доведення прямого твердження. Тому одночасне вивчення прямих і обернених тверджень потребує знання відповідного геометричного матеріалу і не завжди є доцільним. Інколи для доведення властивості і ознаки геометричного поняття можна скористатися однією і тією самою схемою. За таких умов є можливість одночасного виконання дій на підведення геометричних фігур під поняття і виведення наслідків з тих самих понять.

Наприклад, після доведення властивості й ознаки паралелограма (мал. 2.27) учням пропонується вправа на побудову граф-схем обох доведень. Граф-схеми доведень властивості і ознаки паралелограма представлено на мал. 2.28.



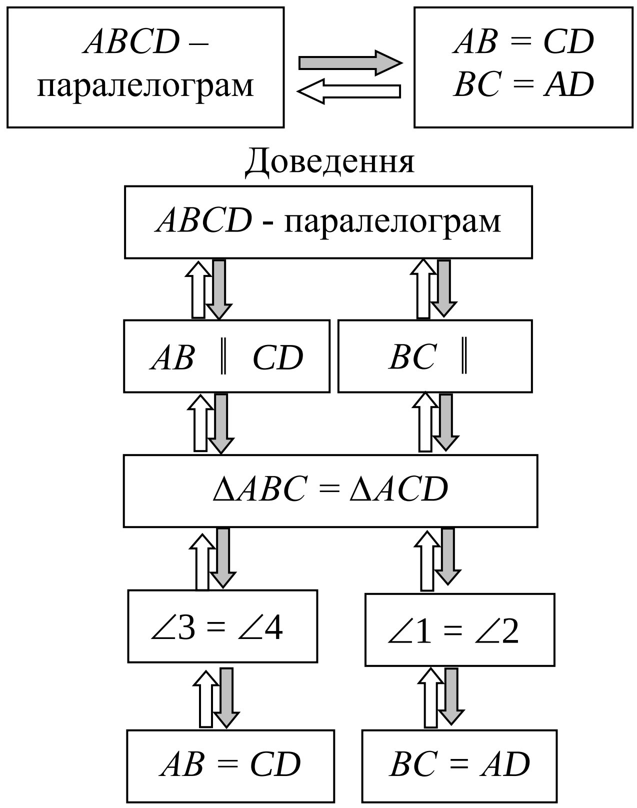
Мал. 2.28



Мал. 2.27

Порівняльний аналіз обох схем свідчить про те, що у доведеннях обох тверджень використовувались одні і ті самі поняття, але міркування мали протилежний характер. Учням пропонується зобразити доведення прямого й оберненого твердження на одній граф-схемі (мал. 2.29) і виконати такі вправи:

1. Яка ознака рівності трикутників застосовується у процесі доведення властивості паралелограма? Ознаки паралелограма?
2. У якому доведенні застосовується властивість внутрішніх різносторонніх кутів при перетині паралельних прямих січною? Ознака паралельності прямих?



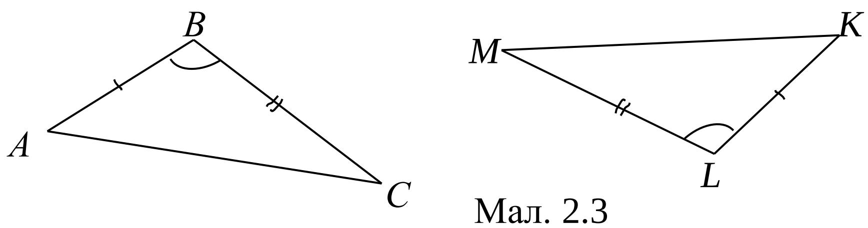
Мал. 2.29

Подібні вправи забезпечують орієнтацію учнів на аналіз структури доведення, навчають учнів виділяти із міркувань аргументи доведення і відношення між ними і, таким чином, сприяють формуванню вмінь доводити геометричні твердження. Дослідження показало, що вправи на доведення взаємно обернених тверджень сприяють засвоєнню геометричних понять на вищому рівні узагальнення, усвідомленню внутрішньої логіки предмета.

Принцип диференційованої реалізованості у побудові системи вправ на формування вмінь доводити геометричні твердження реалізується різнорівневими вправами на застосування згаданих умінь на різних рівнях їх засвоєння. На початковому і середньому рівнях пропонуються вправи на обґрунтування належності об’єктів (заданих безпосередньо чи опосередковано) до поняття та їх властивостей за допомогою застосування вивчених означень, аксіом, теорем. Більшість вправ цих рівнів пропонується учням за готовими малюнками. Достатньому рівню відповідають вправи на доведення, виконання яких передбачає переосмислення даних елементів, включення їх у нові зв’язки а також застосування специфічних для вміння доводити розумових дій (підведення під поняття, відшукання потрібних ознак поняття, формулювання наслідків і т. ін.) Для виконання вправ цього рівня учні користуються засвоєними алгоритмами доведення. На високому рівні учні виконують вправи, які потребують евристичної діяльності щодо відшукання доведення (додаткові побудови, застосування зручних методів доведення і т. ін.)

Прикладом набору еталонних задач на доведення з теми „Ознака рівності трикутників за двома сторонами і кутом між ними” може бути така система вправ:

1. За даними, наведеними на малюнку 2.29, назвіть відповідно рівні елементи трикутників. Чи рівні дані трикутники? За якою ознакою?



Мал. 2.3

2. Відрізки *AB* і *CD* перетинаються в точці *O*, яка є серединою кожного з них. Доведіть, що $\Delta AOC = \Delta BOD$.
3. Доведіть, що рівнобедрені трикутники рівні, якщо бічна сторона і кут, протилежний до основи одного трикутника, дорівнюють бічній стороні і куту, протилежному до основи другого трикутника.
4. Доведіть рівність двох трикутників за стороною, медіаною, проведеною до неї, і кутом між медіаною і цією стороною.

Система вправ як засіб формування вмінь обчислювати значення геометричних величин

Поняття величини є одним із основних у шкільному курсі математики. Геометричні величини, які вивчаються в основній школі, – *довжина відрізка*, *міра кута*, *площа*, *об'єм*. Одним із завдань вивчення систематичного курсу геометрії основної школи є формування в учнів уявлення про те, що величина – це загальна властивість певного класу об'єктів, що з кількісного боку ця загальна властивість може бути індивідуальною для кожного об'єкта. „Поняття величини є ніби містком між математикою та прикладними науками і практикою." [12, с. 340]

У програмних вимогах до результатів навчання учнів основної школи з геометрії передбачається, що учні повинні [130]:

1. Мати уявлення про довжину відрізка та її властивості, градусну міру кута, довжину кола, площу плоскої фігури, поверхню, площу поверхні та об'єм геометричного тіла.
2. Застосовувати формули для обчислення довжини кола та його частин, площ прямокутника, паралелограма, трикутника, трапеції, круга, площ поверхонь і об'ємів просторових фігур, що вивчаються в основній школі.
3. Вміти знаходити довжину відрізка і відстань між двома точками безпосереднім вимірюванням та за відомими значеннями інших величин, відстань від точки до прямої, вимірювати кути транспортиром, обчислювати градусну міру кута трикутника за відомими значеннями інших кутів (кутів трикутника, одним з яких є

даний кут, суміжних кутів, кутів, з яких складається або є їх частиною і т. ін.), центрального і вписаного кутів, обчислювати довжини кіл і дуг, використовуючи наближене значення числа, застосовувати формули для обчислення площ плоских фігур, площ поверхонь і об'ємів просторових фігур.

Отже, значення геометричних величин або вимірюють за допомогою приладів, або обчислюють, застосовуючи значення інших геометричних величин. Наприклад, міру невідомого кута трикутника можна встановити за допомогою транспортира, або обчислити за умови, якщо відомі міри двох інших кутів трикутника.

Система вправ на вироблення вмінь обчислювати значення геометричних величини містить, в основному, задачі на обчислення. Питома вага таких задач у системі вправ з геометрії в основній школі є найбільшою. Задачі на обчислення з геометрії застосовують для засвоєння учнями фактичного матеріалу, глибшого усвідомлення ними геометричних залежностей, реалізації внутріпредметних і міжпредметних зв'язків. Корисною особливістю задач на обчислення є їх числова результативність, що забезпечує інтерес і мотивацію учнів у розв'язуванні геометричних задач і вивченні геометрії взагалі.

Важливою вимогою до фабули задачі на обчислення є правомірне вживання відповідної термінології. Водночас у деяких підручниках і посібниках з геометрії в умовах задач на обчислення використовуються неправомірні вирази „знайдіть кут", „знайдіть сторони трикутника" і т. ін. Наприклад, у підручнику [70 с. 18, 75] умова задачі № 43 містить вимогу „Знайдіть кути PQB і MQP" замість „Знайдіть градусні міри кутів...", умова задачі № 321 – „Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника ..." замість „Знайдіть довжини сторін ..." і т. ін.

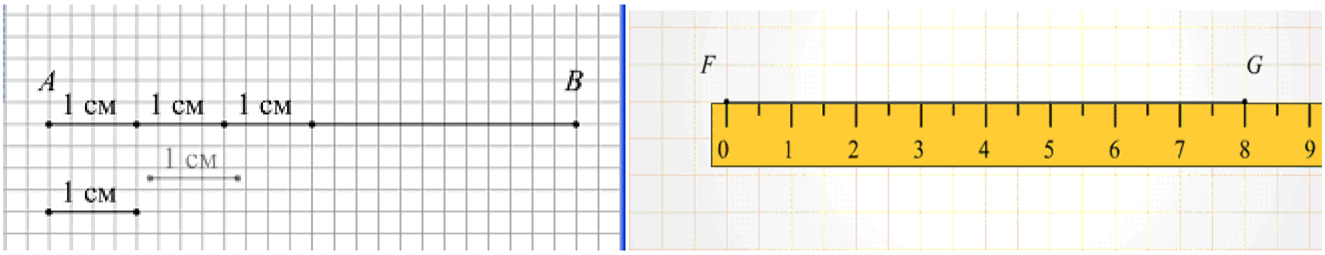
Щодо величин застосовують три терміни: 1) розмір величини (кількісне вміщення властивості певного об'єкта, яке відповідає поняттю величина); 2) значення величини (оцінка величини у вигляді певного числа прийнятих для неї одиниць); 3) числове значення величини (число, яке міститься у значенні величини). Для вимірювання геометричних величин послуговуються термінами „одиниця виміру довжини", „одиниця виміру величини кута", „одиниця виміру площі", „одиниця виміру об'єму". Для скорочення вимови вживають символи, що означають міру, довжину, площу і т. ін. Наприклад, якщо мають на увазі міру кута AOB, то пишуть $\angle AOB$, довжину відрізка з кінцями у точках A і C, позначають AC, значення площі трикутника ABC записують $S_{\Delta ABC}$ і т. ін. Для формування в учнів поняття про геометричні величини і виховання математичної культури необхідно користуватися загальновживаною символікою і термінологією для формулювання фабул задач, зокрема, на обчислення, а також вимагати цього від учнів. Для відпрацювання відповідних умінь ми пропонували учням такі вправи:

1. Заповніть пропуски: а) кожний кут має певну ... ; б) ... відрізка можна виміряти за допомогою ...; в) кут певної ... можна побудувати за допомогою ...; г) два відрізки називаються рівними, якщо ...

2. Прочитайте вирази словами: а) $PQ = 7$ см; б) $KL + LM = 56$ см; в) $\angle ABC = 45^o$; г) $\angle AOC + \angle AOB = 108^o$.

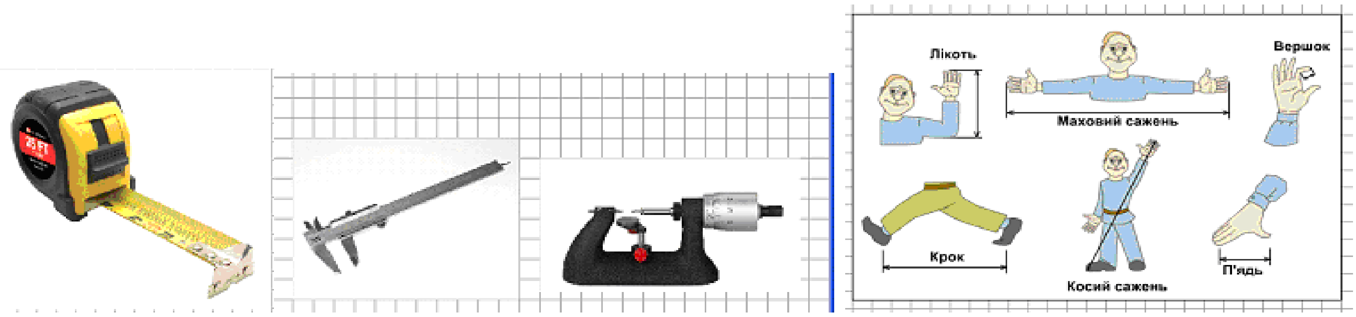
3. Запишіть речення математичною мовою: а) відрізок AB дорівнює 9 см; б) довжина відрізка KL дорівнює сумі довжин відрізків KM і ML; в) градусна міра кута KLM дорівнює 90º; г) градусна міра кута AOC дорівнює різниці градусних мір кутів AOB і COB.

З поняттям одиниці величини (довжини, площі) учні знайомляться ще в початковій школі. Однак результати констатувального експерименту (зокрема, міжнародного порівняльного дослідження навчальних досягнень з математики TIMSS – 2007) свідчать про недостатню сформованість в учнів основної школи вмінь обчислювати геометричні величини за даними їх вимірювань. Спостерігається нерозуміння учнями того, що розмір величини об'єкта існує об'єктивно і не залежить від вибору одиниці виміру, що значення тієї самої величини для певного об'єкта може бути різним залежно від вибору одиниці виміру. Тому під час вивченням теми „відрізки та їх вимірювання" у 7 класі за нашою методикою, щоб актуалізувати опорні знання, пропонуємо учням завдання за електронним засобом навчального призначення [14], де за допомогою анімації одиничний відрізок послідовно вміщується у відрізок, який потрібно виміряти. Демонструється також процес вимірювання відрізка за допомогою лінійки (площі фігури за допомогою палетки) (мал. 2.31).



Мал. 2.31

Учні мають можливість ознайомитися з приладами для вимірювання відрізків і різними одиницями вимірювання (мал. 2.32). Усе це сприяє розширенню й узагальненню знань учнів про відрізки та їх вимірювання, реалізує визначений нами принцип наочності у побудові системи вправ.

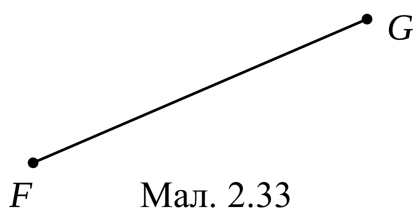


Мал. 2.32

Після такої діяльності учням пропонувалися вправи:

1. Який одиничний відрізок було обрано для вимірювання довжини кожного з відрізків: а) AB = 6 см; б) KL = 67 мм; в) MN = 0,7 дм; г) OP = 120 км?

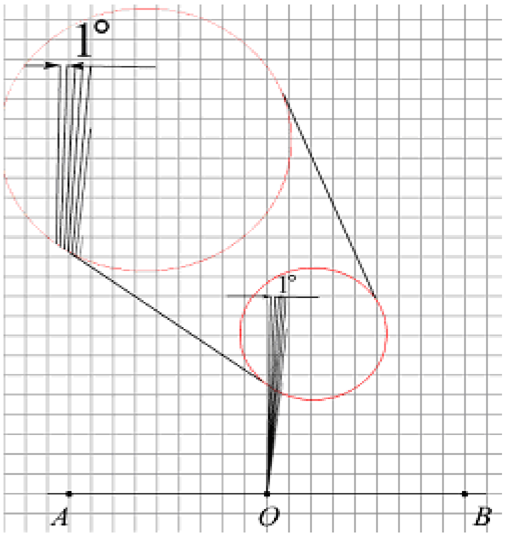
2. Значення довжин даних відрізків переведіть у сантиметри: а) FH = 0,09 км; б) ML = 13 дм; в) RT = 45 см; г) BC = 7 мм.

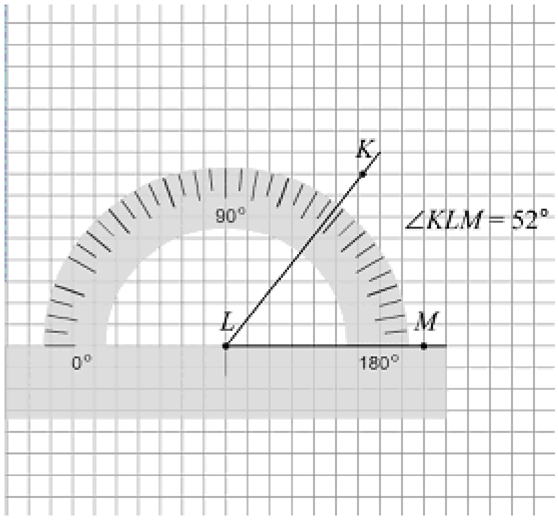


Мал. 2.33

3. За допомогою лінійки з поділками виміряйте довжину відрізка FG, зображеного на малюнку 2.33, і запишіть її значення в дециметрах.

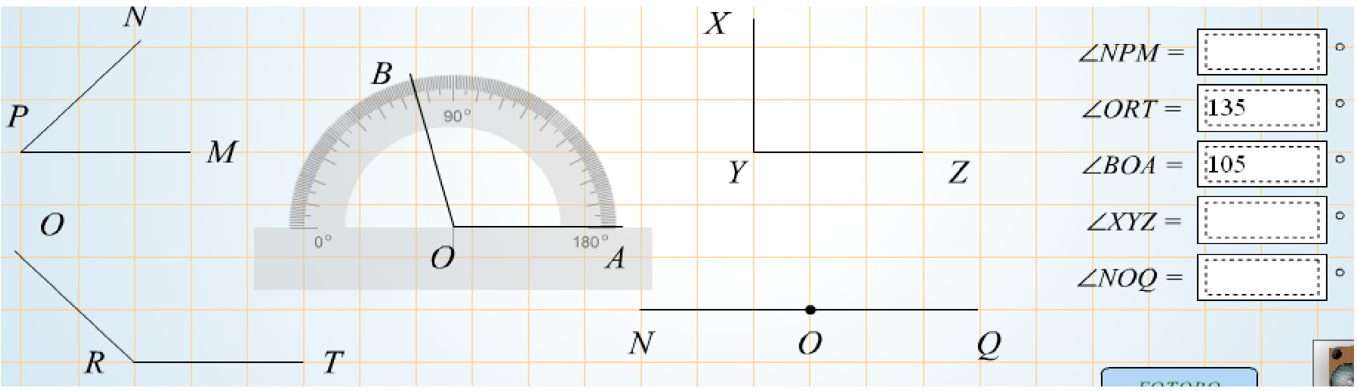
Під час вивчення теми „Кути та їх вимірювання” застосовуємо анімацію електронного засобу навчального призначення [37], в якій демонструються процеси утворення одиничного кута і вимірювання кутів за допомогою транспортира (мал. 2.34).





Мал. 2.34

Для вдосконалення вмінь учнів вимірювати кути пропонуємо вправу з електронного засобу навчального призначення [16] за допомогою динамічної моделі з можливістю пересувати транспортир і записувати градусну міру кутів для перевірки правильності дій (мал. 2.35):



Мал. 2.35

Для вироблення в учнів умінь обчислювати відстані між точками застосовували практичні роботи. Наприклад, спочатку за анімацією з [37] учні пригадують поняття „шлях” і „відстань” між точками, усвідомлюють відмінність між ними і спостерігають за процесом вимірювання відстаней міх точками на мапі за допомогою лінійки. Далі пропонуємо практичну роботу за таким планом:

1. На мапі України знайдіть точки, що позначають розміщення таких міст: Харків, Київ і Львів.
2. Знайдіть відстані на мапі між містами Харків і Київ, Львів і Київ, Харків і Львів.
3. Знайдіть реальні відстані між містами, враховуючи масштаб мапи.

4. Знайдіть суму відстаней між Харковом і Києвом Львовом і Києвом.

Для вироблення в учнів практичних умінь вимірювання відстаней, розвитку окоміру проводилася практична робота такого змісту:

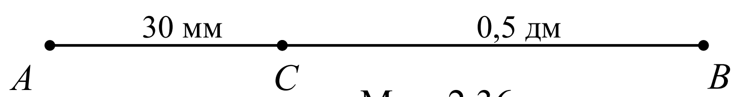
1. Виміряйте рулеткою відстань 10 м.
2. Пройдіть цю відстань звичайним кроком кілька разів, порахувавши кількість кроків.
3. Знайдіть середню кількість власних кроків, що вміщаються у 10 м. Знайдіть довжину свого кроку.
4. Виміряйте у кроках і переведіть у метри: а) довжину власної кімнати; б) довжину класної кімнати; в) від вашого будинку до найближчого магазину.

Під час вивчення теореми косинусів пропонувалася така практична робота [3 с. 49]

1. Накресліть довільний трикутник.
2. Виміряйте довжини сторін трикутника і запишіть їх значення.
3. Виміряйте градусну міру кожного кута трикутника. Знайдіть за допомогою калькулятора значення косинусів цих кутів і запишіть їх.
4. За допомогою відповідних обчислень переконайтеся, що теорема косинусів правильна для вашого трикутника.

Вивчення геометричних величин у 7 – 9 класах відбувається на вищому рівні узагальнення – на дедуктивній основі. Поняття „довжина відрізка”, „градусна міра кута”, „площа фігури” вводяться як первинні. Істотні властивості цих понять формулюються у вигляді аксіом. Властивості геометричних величин часто сприймаються як природні і в учнів не виникає потреби спиратися на них у процесі розв’язування задач. Тому під час виконання вправ на обчислення довжин відрізків (градусних мір кутів, площ фігур), які складаються з кількох або є частинами відрізків (кутів, фігур), потрібно вимагати від учнів обґрунтованого застосування відповідних властивостей. Наприклад:

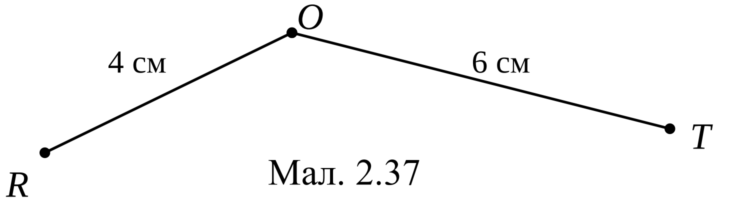
1. Яка довжина відрізка AB на малюнку 2.36. Відповідь поясніть.



Мал. 2.36

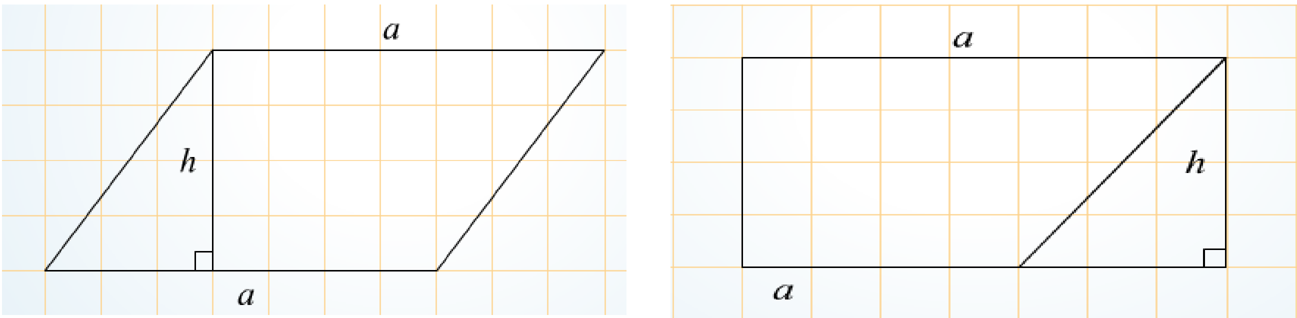
2. Точки A, B, C лежать на одній прямій. Чи лежить точка C між точками A і B, якщо: а) $AB = 5$ см, $AC = 12$ см, $BC = 7$ см; б) $AB = 11$ см, $AC = 2{,}5$ см, $BC = 8{,}5$ см? Відповідь обґрунтуйте.

3. Чи є на малюнку 2.37 дані для обчислення довжини відрізка RT? Чому?



Мал. 2.37

Учні мають розуміти, що саме на основі цих властивостей доводяться формули обчислення площ прямокутника, паралелограма, трикутника, трапеції, а також, можна довести теорему Піфагора. Знання походження цих формул сприятиме усвідомленому їх застосовуванню, усуне потребу формального запам’ятовування. Спостереження за утворенням прямокутника з паралелограма шляхом переміщення частин першого [37] допомагає учням самостійно знайти формулу для обчислення площі паралелограма (мал. 2.38):



Мал. 2.38

Для розуміння учнями походження формули обчислення площі прямокутника пропонуємо учням практичну роботу за таким планом [4]:

1. Накресліть на клітчатому папері паралелограм і виріжте його.
2. Проведіть меншу діагональ і розріжте по ній паралелограм.
3. Порівняйте площі отриманих трикутників накладанням.
4. Зробіть висновок про площу кожного з трикутників порівнюючи її з площею паралелограма.
5. Запишіть формулу обчислення площі трикутника, якщо площа паралелограма обчислюється за формулою $S = ah$ (a – сторона паралелограма, h – висота, проведена

до цієї сторони). Довжини яких відрізків позначаються літерами *a* і *h* у формулі для обчислення площі трикутника?

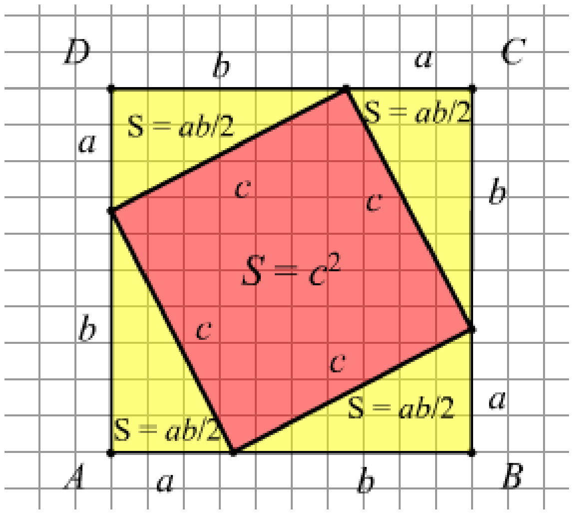
Переконатися у справедливості формули обчислення площі паралелограма учням допомагали вправи з електронним засобом GRAN-2D (вправа 3 додатку З дисертаційного дослідження).

За анімацією з [38] пропонуємо учням розглянути доведення теореми Піфагора шляхом обчислення площ трикутника і квадрата, стороною якого є гіпотенуза прямокутного трикутника (мал. 2.39).

$$(a+b)^2 = c^2 + 4ab/2$$

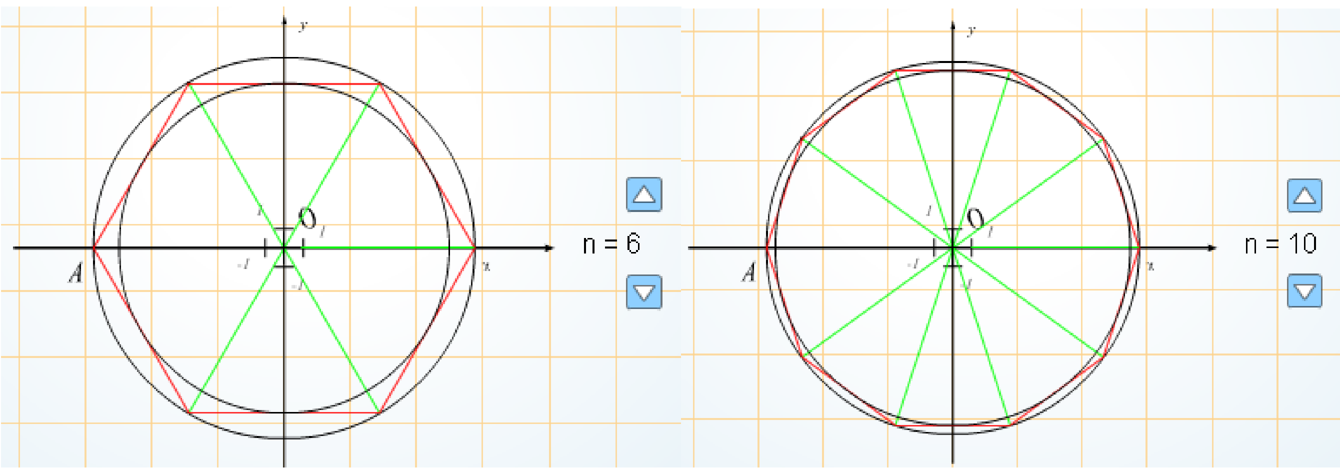
$$c^2 = a^2 + \cancel{2ab} + b^2 - \cancel{4ab/2} = a^2 + b^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Мал. 2.39

Динамічна модель граничного переходу від периметрів вписаного і описаного многокутників до довжини кола [37] унаочнює інтуїтивні міркування учнів під час вивчення формули обчислення довжини кола (площі круга) (мал. 2.40).



Мал. 2.40

Серед вправ на обчислення геометричних величин можна виділити такі групи:

1. Задачі, в яких для обчислення шуканої величини потрібно застосувати відоме учням геометричне твердження. Наприклад:

1) Один із суміжних кутів дорівнює 135º. Знайдіть другий кут.

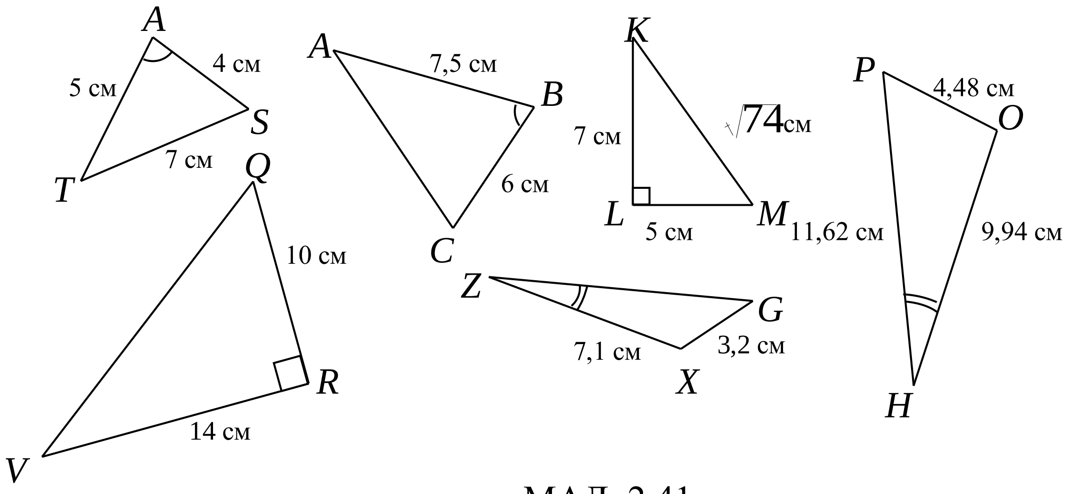
2) Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють 3 см і 4 см.

3) Обчисліть довжину середньої лінії трапеції, якщо її основи дорівнюють 12 см і 8 см.

Такі вправи вводяться до системи вправ з метою застосування встановленої раніше геометричної залежності або перевірки засвоєння учнями фактичного матеріалу. В умовах дефіциту навчального часу широкого застосування у навчанні геометрії набули вправи за готовими малюнками. Такі вправи допомагають реалізувати конкретну ситуативну мету, зокрема вироблення вмінь обчислювати геометричні величини, виявляти залежності між елементами геометричних фігур і т. ін. При цьому графічне зображення і короткий запис умови пропонуються учням у готовому вигляді. Школярі поповнюють набір уявлень про геометричні фігури завдяки реалізації принципу їх варіювання, навчаються виконувати вдалий малюнок до геометричної задачі і короткий запис умови. У розробленій нами системі вправ з геометрії для 7 – 9 класів вправи за готовими малюнками становлять значну її частину і розміщені на різних рівнях програмових вимог. [3, 4, 30, 32].

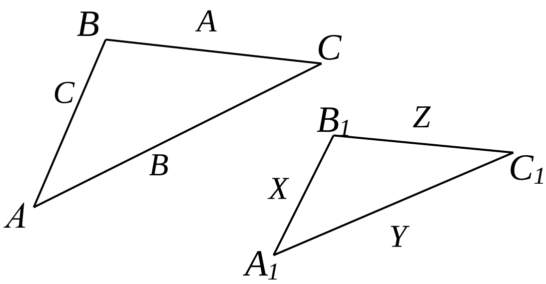
Наприклад, система вправ на обчислення елементів подібних трикутників містить вправи, кожна з яких відповідає різним рівням вимог до навчальних досягнень учнів.

1. На малюнку 2.41 знайдіть подібні трикутники. Обчисліть сторони трикутників.



МАЛ. 2.41

2.

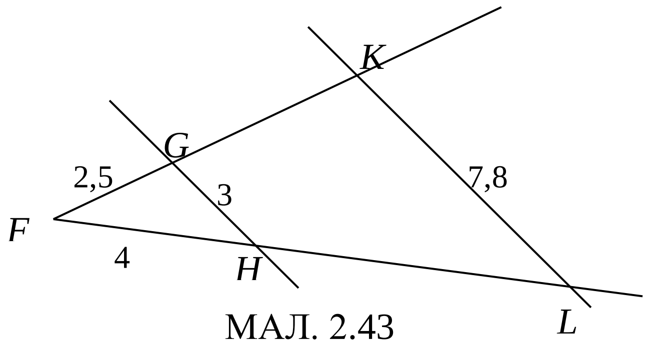


МАЛ. 2.42

Дано: ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ – подібні (мал. 2.42), $c : a : b = 6 : 7 : 8$, $x + y = 70$ м.

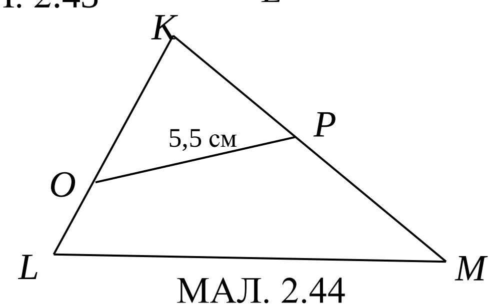
Знайдіть: x, y, z.

3. За малюнком 2.43 знайдіть периметр трикутника FKL.



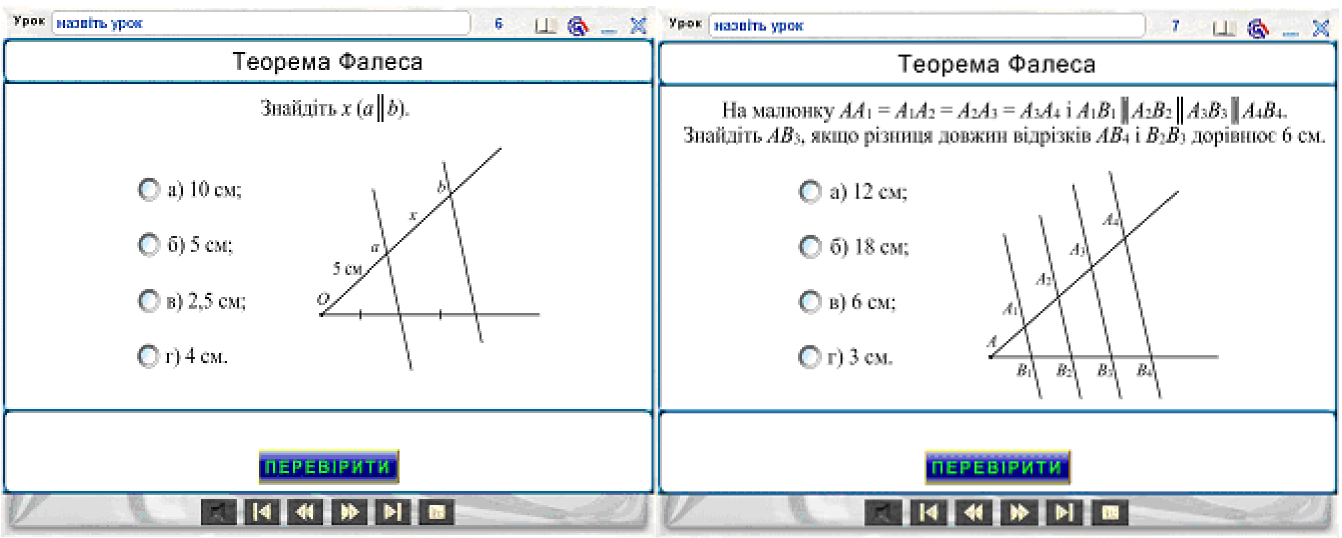
МАЛ. 2.43

4. За малюнком 2.44 знайдіть LM, якщо $\dfrac{KL}{PK} = \dfrac{KM}{OK} = 2$.



МАЛ. 2.44

У розроблених нами електронних засобах навчального призначення [37], [38], [37] вправи на обчислення значень геометричних величин подано у вигляді тестових завдань (здебільшого за готовими малюнками) з вибором відповіді з-поміж запропонованих. Учні мають можливість відразу перевірити правильність розв’язку і, за потребою, отримати підказку і посилання на відповідний теоретичний матеріал. Наприклад, система вправ до теми „Теорема Фалеса” за принципами наочності і варіативності доповнюється такими (мал. 2.45):



Мал. 2.45

Для глибшого усвідомлення учнями геометричних залежностей і розвитку їхньої уяви ми доповнювали деякі вправи на обчислення проблемними запитаннями. наприклад: „Чи зміниться довжина середньої лінії трапеції, якщо її висоту збільшити вдвічі? Зменшити втричі?" Такі запитання допомагають учням усвідомити, що довжина середньої лінії трапеції не залежить від висоти. Залежність площі прямокутника від зміни довжин його сторін краще засвоюється учнями завдяки таким вправам: „Як зміниться площа прямокутника, якщо: а) кожну сторону збільшити у три рази; б) одну пару протилежних сторін зменшити у 5,5 разів; в) одну пару протилежних сторін збільшити у $\sqrt{2}$ разів, а другу зменшити у два рази."

2. Арифметичні й алгебраїчні задачі з геометричним змістом. Для виконання таких вправ використовують уміння розв'язувати арифметичні задачі, складати і розв'язувати рівняння і т. ін. Наприклад: „Площа ромба дорівнює 36 см^2. Знайдіть його діагоналі, якщо вони відносяться як 3 : 4."

Практика навчання геометрії свідчить про невисоку ефективність таких задач для поглиблення геометричних знань учнів, розвитку їх мислення і т. ін. До нашої системи ми залучали невелику кількість таких вправ і намагалися підсилити їхній геометричний зміст. Наприклад: „Визначте вид трикутника, якщо його кути дорівнюють таким частинам розгорнутого кута: $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$."

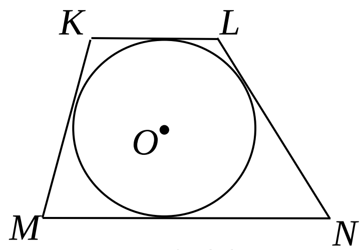
3. Задачі, розв'язування яких потребує застосування багатьох геометричних тверджень, виконання малюнка, встановлення зв'язків між даними і шуканими елементами, доведень геометричних залежностей. Такі геометричні задачі ще називають комплексними. Вони реалізують усі функції (навчальні, виховні, розвивальні, контрольні). Саме такі геометричні задачі пропонуються учням для підсумкового контролю і зовнішнього незалежного оцінювання, оскільки виявляють рівень засвоєння геометричних понять і формування вмінь (доводити, виконувати малюнок, обчислювати геометричні величини та ін.)

Наприклад, розв'язання задачі „Продовження бічних сторін *AB* і *CD* трапеції *ABCD* перетинаються в точці *E*. Більша основа *AD* трапеції дорівнює 12 см, *AE* = 15 см, *BE* = 5 см. Знайдіть меншу основу трапеції" передбачає графічну інтерпретацію умови, визначення належності шуканого відрізка до відповідної конфігурації, відшукання пропорційних відрізків, обґрунтування їх пропорційності за допомогою теореми Фалеса, складання пропорції.

Виховання в учнів потреби й інтересу до розв’язування комплексних геометричних задач є однією з умов підвищення їхнього рівня геометричних знань і загальної математичної культури. Такі задачі не повинні розв’язуватися учнями без належної підготовки. Наші дослідження підтверджують, що потрібно поступово ускладнювати і систематизувати комплексні задачі, попередньо пропонуючи систему вправ, які містять тільки окремі елементи пропонованих задач.

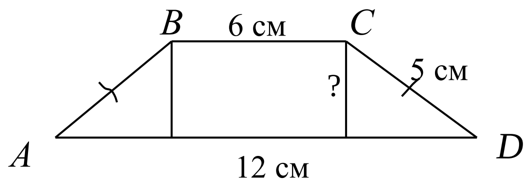
Наприклад, у добірці вправ до задачі „Рівнобічна трапеція описана навколо кола. Знайдіть площу трапеції, якщо її основи дорівнюють 8 см і 18 см.” мають бути такі вправи:

1. Знайдіть суму бічних сторін трапеції, зображеної на малюнку 2.46, якщо її основи дорівнюють 5 см і 12 см.



Мал. 2.46

2. Знайдіть висоту рівнобічної трапеції (мал. 2.47), якщо її основи дорівнюють 6 см і 12 см а бічна сторона – 5 см.



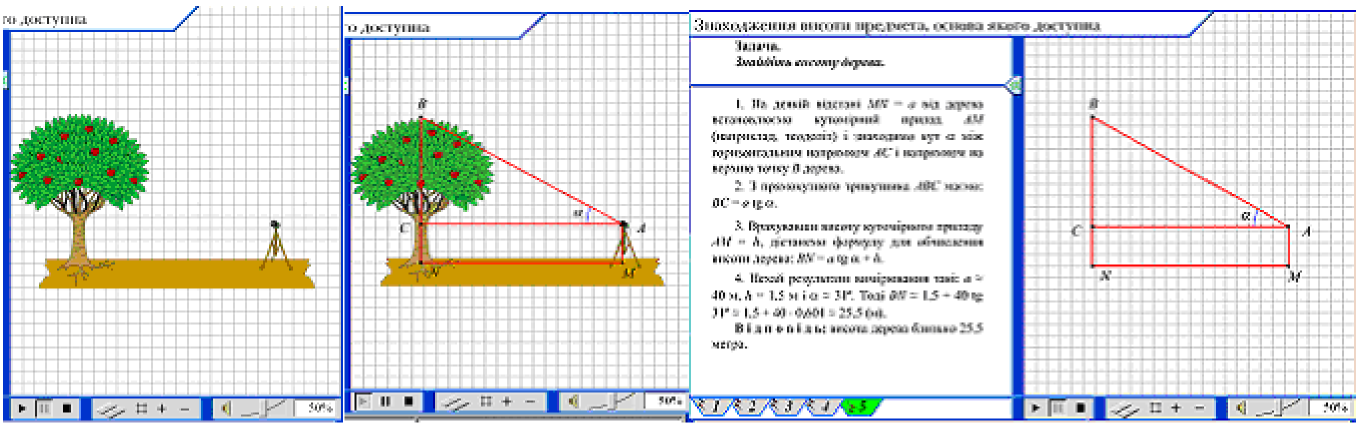
Мал. 2.47

3. Знайдіть площу трапеції, висота якої дорівнює 8 см, а середня лінія – 10 см.

Дії щодо виконання цих вправ є складовими процесу розв’язування даної задачі. Крім цього, графічне зображення умов перших двох вправ допомагає учням виконати малюнок до задачі.

У процесі виконання таких вправ в учнів формується основа для розв’язування комплексних задач, оскільки кожна така задача подається у вигляді ряду простих задач (вправ), а її розв’язання відображає послідовності розв’язування кожної простої.

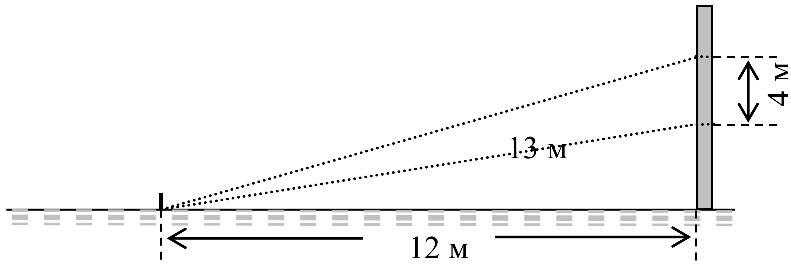
Відповідно до принципу прикладної спрямованості побудови системи вправ з геометрії, окрім геометричних задач на обчислення абстрактного характеру учням основної школи корисно пропонувати і прикладні задачі, побудовані на певних матеріальних об'єктах. Для того, аби школярі навчилися розв'язувати прикладні задачі, потрібно щоб вони вміли розв'язувати відповідні абстрактні задачі. Наприклад, до прикладної задачі „Тінь від стовпа, висота якого 9 м, становить 5 м. Виразіть у градусах висоту Сонця над горизонтом" відповідною абстрактною задачею буде „Знайдіть градусну міру кута прямокутного трикутника, що лежить навпроти катета, довжиною 9 м, якщо довжина другого катета – 5 м." Однак такого вміння недостатньо. Результати міжнародного порівняльного дослідження навчальних досягнень з математики TIMSS – 2007 [205] свідчать про недостатню сформованість умінь учнів основної школи вирішувати практичні ситуації засобами математики поряд з високими результати застосування геометричних знань і вмінь до розв'язування абстрактних задач. Школярам потрібно вміти створювати геометричні моделі відповідних практичних ситуацій і оцінювати відповідність здобутих результатів закономірностям реального світу. Так розв'язування багатьох прикладних задач з теми „Розв'язування трикутників" ґрунтується на розв'язуванні прямокутних трикутників. Для вироблення в учнів умінь будувати геометричні моделі ми пропонували учням розглянути розв'язання кількох прикладних задач за електронним засобом навчального призначення [38]. Завдяки анімаціям школярі спостерігали перетворення прикладного малюнка в абстрактний. Наприклад, розв'язування задачі „Знайдіть висоту дерева" супроводжується трансформацією малюнка (мал. 2.48):



Мал. 2.48

Мислительні дії учнів щодо переходу від прикладної до абстрактної задачі унаочнюються. У процесі дослідження ми спостерігали значно вищі результати формування вмінь розв'язувати прикладні задачі за нашою методикою. До системи вправ ми включали такі практичні задачі, умови яких допомагають учням пов'язувати вивчення геометрії з навколишнім середовищем і повсякденним життям. Наприклад, до теми „Розв'язування трикутників" пропонуємо такі прикладні задачі різного рівнях складності.

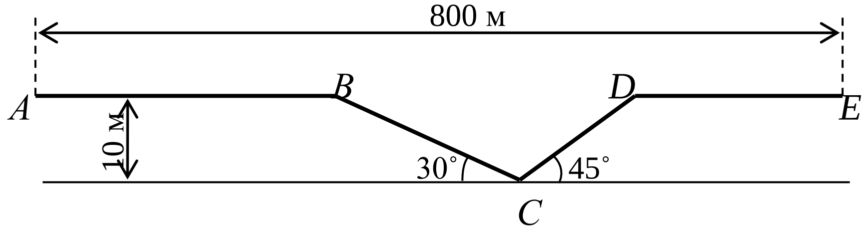
1. З даху будинку, висота якого 12,8 м під кутом нахилу 32° видно дах іншого будинку, висотою 10 м. Знайдіть ширину вулиці, якщо будинки розміщені навпроти по різні боки вулиці.



Мал. 2.49

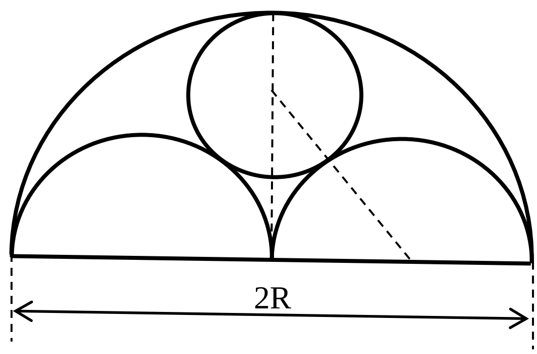
2. До вертикального стовпа прикріплено два троси так, як показано на малюнку 2.49. Знайдіть довжину більшого троса.

3. Знайдіть довжину газопроводу *ABCDE*, схему якого зображено на малюнку 2.50.



Мал. 2.50

4. Обчисліть радіус меншого кола у конструкції рами вікна, зовнішня частина якої має форму півкруга радіуса R (мал. 2.51).



Мал. 2.51

Формування вмінь обчислювати значення геометричних величин здійснювалося за рівнями навчальних досягнень учнів завдяки диференційованій реалізованості відповідної системи вправ. На початковому рівні пропонувалися вправи на обчислення значень геометричних величин за зразком, що передбачають безпосереднє застосування формул або встановлених геометричних залежностей. На середньому рівні у вправах вимагалося обчислити величини, встановивши нескладні залежності на основі відомих геометричних фактів чи властивостей величин за відомим алгоритмом. Вправи на достатньому рівні характеризувалися вимогою встановити залежність шуканої величини з даними величинами через їх відношення і властивості. Підвищений рівень містив вправи на обчислення геометричних величин, до виконання яких неможливо застосувати відомі алгоритми, тому діяльність щодо відшукання способу розв'язування носила евристичний характер. Наприклад, на різних рівнях системи вправ для формування вмінь обчислювати площу прямокутника (елементів прямокутника за відомим значенням площі) пропонувалися вправи, однотипні до таких:

1. Чому дорівнює площа прямокутника зі сторонами 3 см і 5 см?
2. Як зміниться значення площі прямокутника, якщо довжину однієї з його сторін збільшити в три рази?
3. Площа прямокутника дорівнює S. Складіть формули для обчислення сторін прямокутника, якщо вони відносяться як $m : n$.
4. У прямокутнику зі сторонами 4 см і 6 см проведено бісектриси кутів при його більшій стороні. Обчисліть площі утворених частини прямокутника.

Побудова системи вправ для вироблення конструктивних умінь учнів

Провідною ідеєю систематичного курсу геометрії основної школи є конструктивізм: майже всі геометричні поняття означуються конструктивно; доведення всіх теорем спирається на використання фігур, реальне існування яких можна підтвердити побудовою. Одним із засобів формування в учнів конструктивних умінь є система вправ, більшість компонентів якої – задачі на побудову. Однак конструктивні вправи є підзадачами щодо більшості геометричних задач, зокрема на обчислення і доведення. Без побудови або зображення відповідного геометричного об’єкта неможливо розв’язати задачу з курсу геометрії основної школи. Конструктивні геометричні задачі відіграють важливу роль у формуванні і розвитку мислення учнів, його логічної, просторової, інтуїтивної компоненти, у формуванні вмінь виконувати геометричні побудови, вихованні графічної культури. Розв’язування задач на побудову також є ефективним засобом підвищення алгоритмічної культури учнів. Адже їх особливістю є знаходження певного алгоритму, виконання якого веде до розв’язку задачі.

Навчальною програмою з геометрії в основній школі передбачено такі результати формування конструктивних умінь учнів [130]:

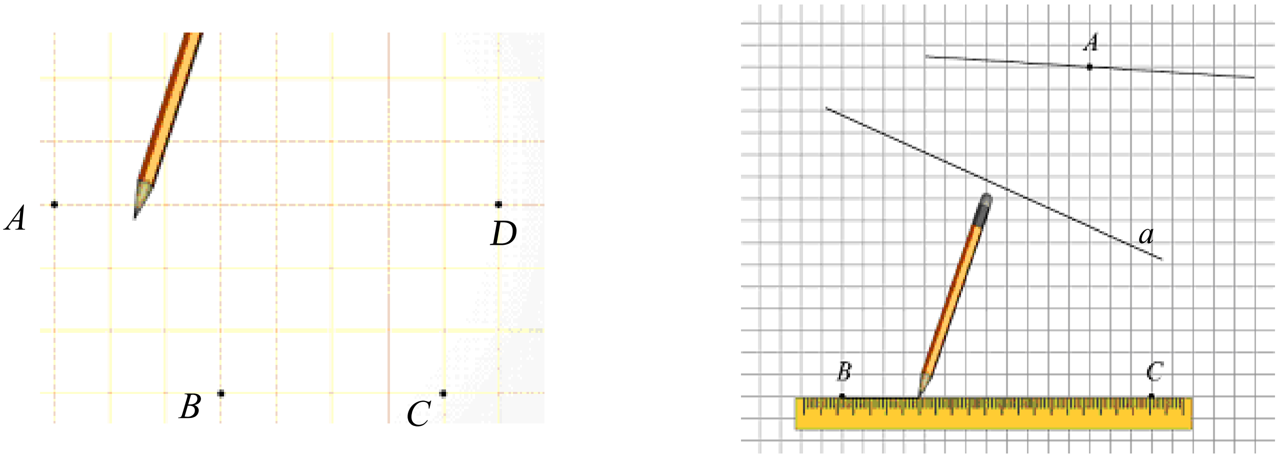
1. Уміти зображати за допомогою креслярських інструментів геометричні фігури, які вивчаються (точки, прямі відрізки, трикутники, кола, чотирикутники (вписані, описані відносно кола), многогранники, тіла обертання та їх елементи і т. ін.)
2. Вміти виконувати основні побудови та нескладні задачі, розв’язання яких зводиться до основних побудов.
3. Будувати фігуру, що є означеним геометричним місцем точок.
4. Будувати образи фігур за поданим геометричним перетворенням.

На початок вивчення систематичного курсу геометрії основної школи учні вже мають навички виконувати найпростіші геометричні побудови: позначати точки на площині, проводити прямі, кола, відрізки, що дорівнюють заданим, будувати кути заданої градусної міри з використанням транспортира, проводити паралельні та перпендикулярні прямі за допомогою лінійки і косинця, зображати кути, трикутники, чотирикутники, прямокутні паралелепіпеди, циліндри, конуси, призми, піраміди і т. ін. [146]. Для успішного вдосконалення цих умінь і формування графічної культури школярів система геометричних вправ має містити достатню кількість завдань на зображення геометричних фігур і їх елементів. Наприклад:

1. Накресліть два відрізки і порівняйте їх довжини.
2. Побудуйте кут, градусна міра якого дорівнює 65º.
3. Накресліть трикутник ABC. Назвіть сторони і кути трикутника.
4. Побудуйте два дотичні кола з радіусами, що дорівнюють 2 і 3 клітинкам зошита.
5. Накресліть довільний чотирикутник і проведіть його діагоналі.

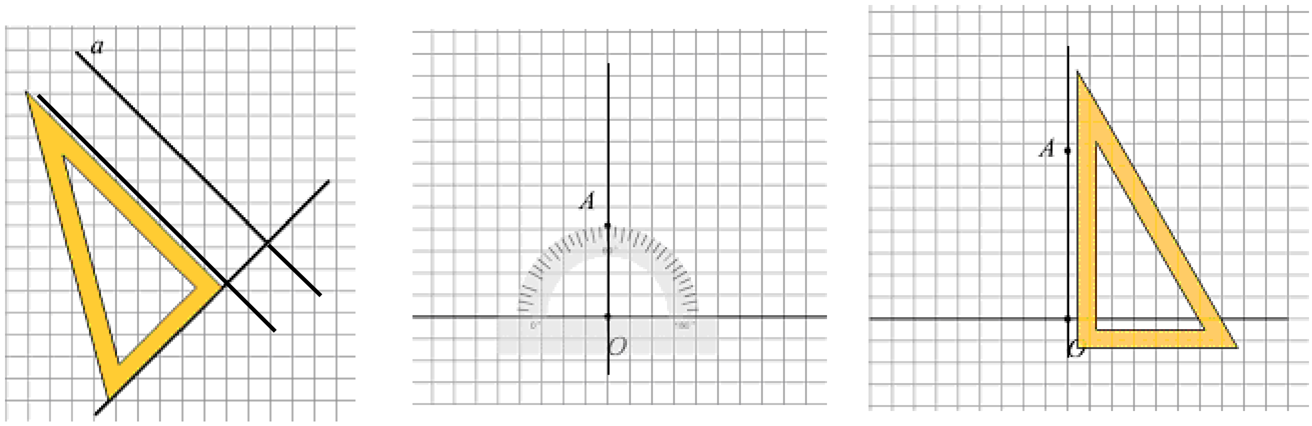
6. Накресліть зображення прямокутного паралелепіпеда. Проведіть діагоналі його основ та ін.

Під час виконання таких вправ потрібно вимагати від учнів не тільки виконання умови, а й якості малюнка. Школярі мають удосконалювати вміння користуватися креслярськими інструментами, обирати зручне розташування зображення на аркуші зошита чи на дошці. Корисно вчити учнів виконувати ескізи зображень геометричних фігур „від руки”. Формування таких умінь відбувається ефективніше, якщо учні мають можливість спостерігати динаміку геометричних зображень. Розроблені нами електронні засоби навчального призначення [37 – 39] містять відповідні анімації. Наприклад, на перших уроках систематичного курсу геометрії вводяться такі неозначувані поняття, як точка і пряма. Розглядаючи анімації зображення цих фігур, учні не тільки набували про них уявлень, а й споглядали спосіб їх зображення (мал. 2.52).



Мал. 2.52

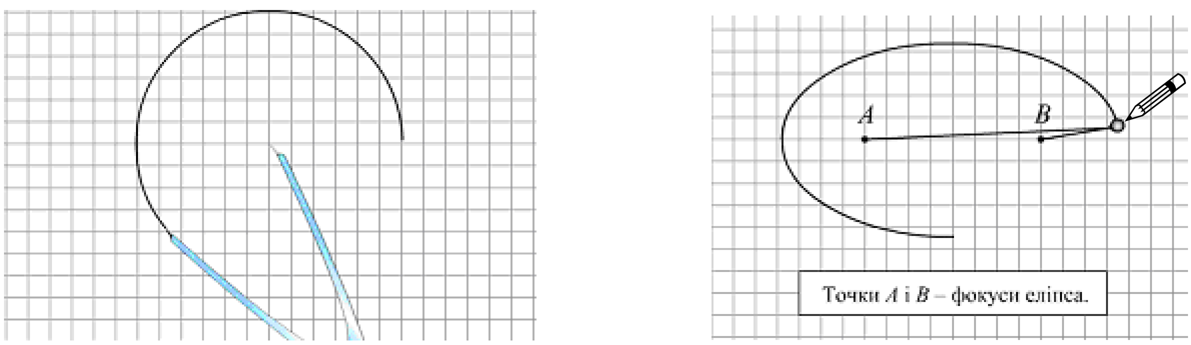
Анімації побудови паралельних і перпендикулярних прямих за допомогою лінійки, косинця і транспортира застосовувались нами для ознайомлення учнів з відповідними способами діяльності (мал. 2.53).



Мал. 2.53

Спостерігаючи за діями учнів під час виконання зображень геометричних фігур, ми переконалися в ефективності роботи з такими анімаціями. Семикласники, котрі мали можливість їх спостерігати, виконували малюнки швидше, впевненіше користувалися креслярськими інструментами.

Корисними для учнів виявились анімації зображення кола за допомогою циркуля й еліпса за допомогою нитки, зафіксованої у його фокусах. Спостереження зацікавили школярів і спонукали до самостійної побудови фігур (особливо еліпса) (мал. 2.54).



Мал. 2.54

Під час виконання вправ на зображення геометричних фігур необхідно вимагати від учнів правильного написання літер на малюнку. Букви, які позначають пряму, мають знаходитися по один бік від прямої, так, щоб вони не перетинали інші лінії. Назви вершин многокутників потрібно розміщувати у їх зовнішній області.

Для формування графічних умінь учнів застосовувались графічні диктанти.

Наприклад.

Диктант. Точки, прямі та їх властивості.

1. Позначте дві точки *M* і *N*. Проведіть через них пряму. Позначте дві точки *C* і *D*, які лежать на прямій *MN*.

2. Позначте дві точки *L* і *K*. Поведіть через них пряму. Позначте дві точки *C* і *D*, які не лежать на прямій *KL*.

3. Позначте в зошиті три точки *A, B, C* так, щоб через них можна було провести пряму. Запишіть всі можливі назви цієї прямої.

4. Позначте в зошиті три точки *A, B, C* так, щоб вони не лежали на одній прямій. Запишіть, які різні прямі можна провести через ці точки.

5. Позначте точки *A*, *B*, *C*, *D* так, щоб точки *B*, *C*, *D* лежали на одній прямій, а точка *A* на ній не лежала. Через кожні дві точки проведіть пряму. Скільки утворилося прямих.

6. Яка найбільша кількість точок перетину може бути у п’яти різних прямих? Відповідь проілюструйте за допомогою малюнка.

7. Яке найбільша кількість прямих може мати п’ять різних точок перетину? Відповідь проілюструйте за допомогою малюнка.

Графічні диктанти виконують розвивальну і виховну функції. Виконання учнями таких вправ на початку вивчення планіметрії сприяє розвитку в них логічного і просторового мислення, виховує графічну культуру й охайність.

Розроблені нами практичні роботи з геометрії [3, 4] призначені, зокрема, для формування і вдосконалення графічних і конструктивних умінь школярів. Діяльність учнів щодо їх виконання забезпечує систематичні вправляння у зображенні геометричних фігур та їх елементів. Наведемо приклади.

Практична робота 6. [4 с. 67]

1. Накресліть систему координат і в ній трикутник, вершини якого мають координати *A*(-5; 5), *B*(-1; 3), *C*(-5; 1).

2. Використовуючи клітинки зошита, побудуйте трикутники $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$, утворені шляхом перетворення симетрії трикутника *ABC* відносно осей *Ox* і *Oy* відповідно.

3. Знайдіть координати вершин трикутників $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ і порівняйте їх з координатами вершин трикутника *ABC*. Зробіть висновок.

Практична робота 23. [4 с. 132]

1. Накресліть опуклий п’ятикутник.
2. Проведіть усі діагоналі, які виходять з однієї вершини п’ятикутника, полічіть їх кількість. Проведіть усі діагоналі п’ятикутника і полічіть їх кількість. У скільки разів кількість усіх діагоналей більша за кількість діагоналей, проведених з однієї вершини?
3. Накресліть опуклі шестикутник, семикутник і восьмикутник. Для кожного з них виконайте завдання, сформульовані для п’ятикутника у п. 2.

Практична робота 25. [4 с. 145]

1. Побудуйте коло. Проведіть хорду *AB,* яка дорівнює його радіусу, *BC* = *AB*, хорду *CB* = *AB* і т. д. Скільки таких хорд можна провести? Чи збігається кінець останньої хорди з точкою А? Виміряйте сторони і внутрішні кути утвореного многокутника. Чи є він правильним?
2. Побудуйте коло і проведіть у ньому два взаємно перпендикулярні діаметри *AC* і *BD*. Поділіть кожну з дуг *AB, BC, CD, AD* навпіл. Середину кожної дуги сполучіть з кінцями діаметра. Виміряйте кути і сторони утвореного многокутника. Чи є він правильним?

У систематичному курсі геометрії спеціально виокремлюють задачі на побудову, які розв’язуються лише за допомогою циркуля і лінійки. Їх дидактична цінність полягає не тільки у виробленні практичних навичок виконання основних побудов, а й у розвитку в учнів логічного мислення, формуванні евристичної діяльності.

Розв’язування задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки зводиться до виконання скінченної послідовності таких *елементарних побудов*:

1. Позначити одну чи кілька точок: на площині; на прямій; на колі.
2. Провести пряму: довільну, яка проходить через дану точку; через дві дані точки.
3. Описати коло: з довільної точки довільним радіусом; з довільної точки даним радіусом; з даної точки довільним радіусом; з даної точки даним радіусом.
4. Знайти точку перетину: двох прямих; прямої і кола; двох кіл.

Формування в учнів умінь виконувати елементарні побудови здійснювалося за допомогою розглянутих вище типів вправ.

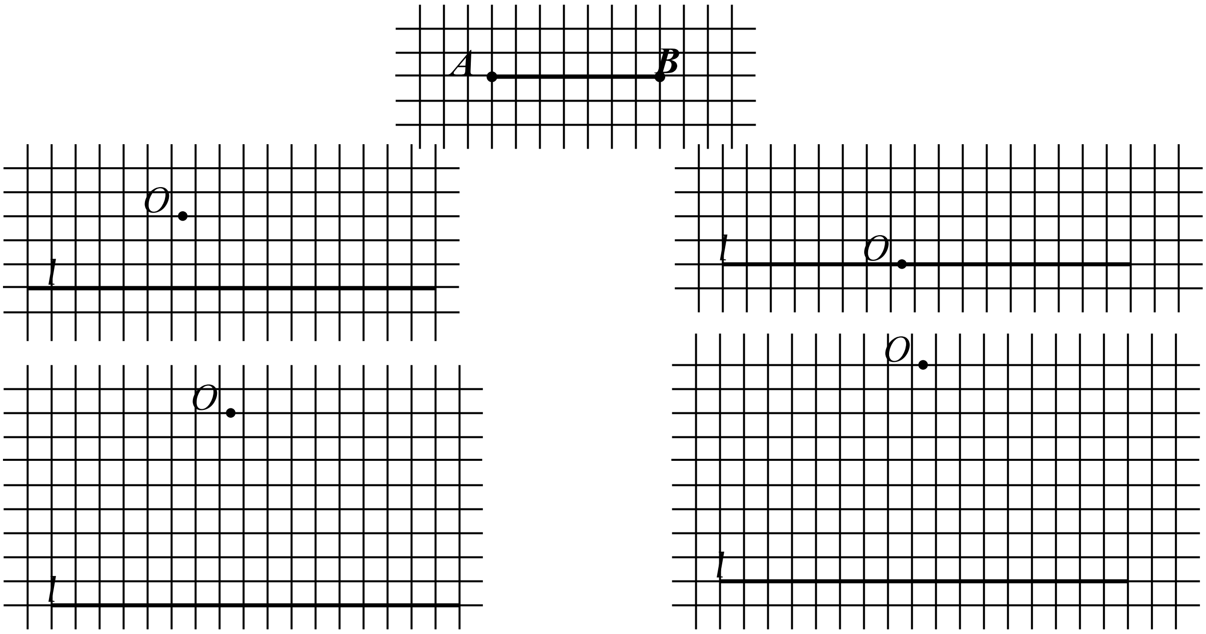
Процес розв'язування задач на побудову складається з чотирьох етапів: 1) пошуку способу побудови (аналіз); 2) побудови шуканої фігури; 3) доведення правильності виконаної побудови; 4) дослідження побудови. Навчання учнів дотримуватись етапів геометричних побудов здійснюється у процесі розв'язування *основних* задач на побудову. А саме:

1. Побудувати трикутник з даними сторонами a, b, c.
2. Відкласти від даної півпрямої в даній півплощині кут, який дорівнює даному куту.
3. Побудувати бісектрису даного кута.
4. Поділити даний відрізок навпіл.
5. Через дану точку провести пряму, перпендикулярну до даної прямої.

У процесі навчання учнів основних геометричних побудов ми мали на меті ознайомити їх з деякими прийомами знаходження способу побудови шуканої фігури, навчити правильно будувати геометричні фігури за допомогою циркуля і лінійки і доводити правильність виконання побудови.

Виконання учнями зазначеної у задачі побудови можливе за умови усвідомлення ними властивостей геометричного місця визначальних точок шуканої фігури. Наприклад, для побудови відрізка досить побудувати його кінці, трикутника – його вершини і т. ін. Для формування в учнів загального підходу до розв'язування основних задач на побудову пропонуємо добірку вправ на відшукання геометричних місць точок.

1. Знайдіть точку, яка лежить на відстані 5 см від даної точки *O*. Яку фігуру утворюють усі точки площини з такою властивістю?
2. На зображеній прямій (мал. 2.55) знайдіть точки, віддалені на відстань *AB* від точки *O*.



Мал. 2.55

На кожному з малюнків точка *O* розміщується на відстані від прямої *l*: а) меншій *AB*; б) рівній *AB*; в) рівній нулю; г) більшій *AB*. Звертаємо увагу учнів на те, що залежно від розміщення прямої *l* і точки *O* шуканих точок може бути дві, одна або не бути жодної.

3. Відстань між точками *K* і *L* 5 см. Знайдіть точку, яка лежить на відстані 7 см від точки *K* і 9 см від точки *L*.

Цю вправу розв’язуємо колективно, запитуючи учнів:

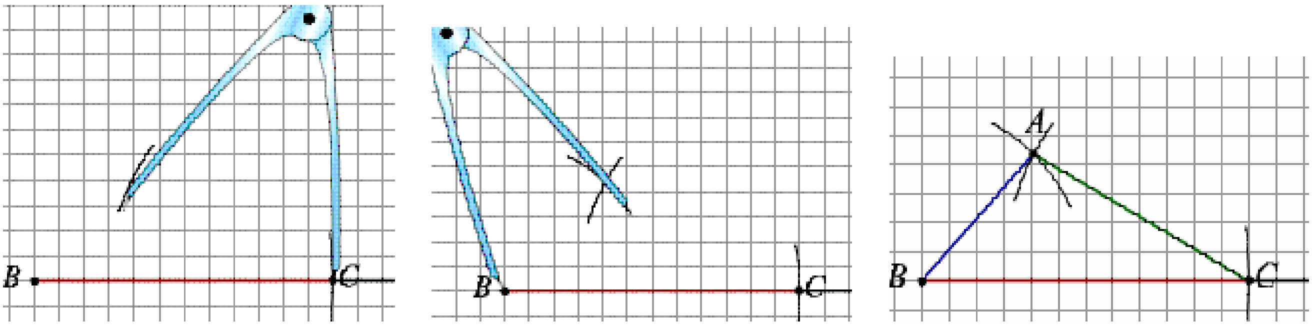
а) Скільки на площині точок, віддалених від точки *K* на 7 см? Яку геометричну фігуру вони утворюють?

б) Скільки на площині точок, віддалених від точки *L* на 9 см? Яку геометричну фігуру вони утворюють?

в) Чому утворені кола не перетинаються? За якої відстані між точками *K* і *L* кола не перетнуться? Будуть дотикатися?

г) Скільки розв’язків має задача?

У результаті виконання таких вправ учні готові до розв’язування задачі на побудову трикутника за даними сторонами. Для складання плану побудови здійснюємо етап аналізу за анімацією з електронного засобу навчального призначення [37] (мал. 2.56).



Мал. 2.56

Звертаємо увагу учнів на те, що дві з трьох вершин можна вважати відомими, а третя вершина *A* – шукана. Для усвідомлення учнями геометричного місця точок, яким є точка *A*, пропонуємо такі вправи:

1. *Яка властивість точки A відносно точки B*? Скільки існує таких точок? *Яку фігуру вони утворюють?*

2. *Яка властивість точки A відносно точки C*? Скільки існує таких точок? *Яку фігуру вони утворюють?*

3. *Яка властивість точки A відносно точок B і C*? *Як знайти точку A*? Скільки існує таких точок?

4. Скільки розв'язків має задача?

Розглянута анімація допомагає семикласникам виконати побудову. Етап доведення пропонуємо їм виконати самостійно.

Для систематизації здобутих знань пропонуємо учням сформулювати відповідний спосіб дій. Наприклад: „Щоб побудувати трикутник, досить побудувати його вершини. Дві вершини можна вважати відомими, якщо на промені від його початку відкласти даний відрізок. Третя вершина – шукана.

Спосіб побудови трикутника за його сторонами застосовуємо для розв'язування інших конструктивних задач:

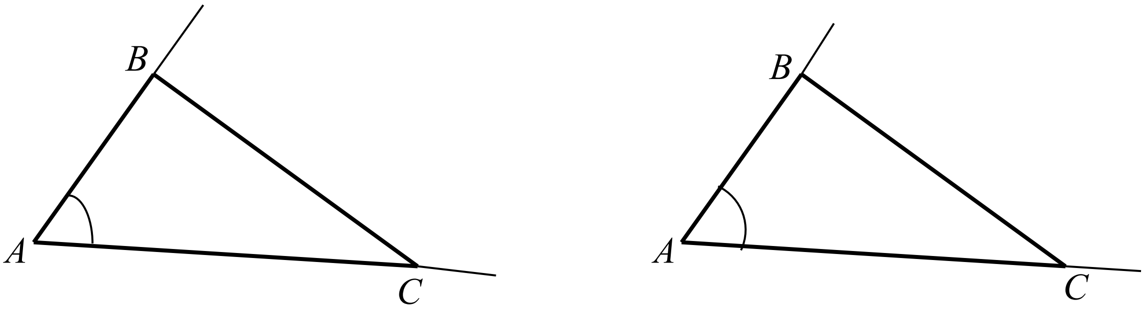
1. Побудуйте рівносторонній трикутник зі стороною *a*.

2. Побудуйте рівнобедрений трикутник з основою *a* і бічною стороною *b*.

Ці задачі учні виконують за аналогією до відповідної основної побудови.

Спосіб розв'язування задачі на побудову кута, який дорівнює даному, ґрунтується на побудові трикутника, рівного даному. Учні самостійно усвідомлюють таку аналогію в результаті виконання вправ:

1. Побудуйте трикутник $A_1B_1C_1$, рівний трикутнику ABC, зображеному на малюнку.
2. У трикутнику $A_1B_1C_1$ позначте кут, рівний куту A трикутника ABC (мал. 2.57).

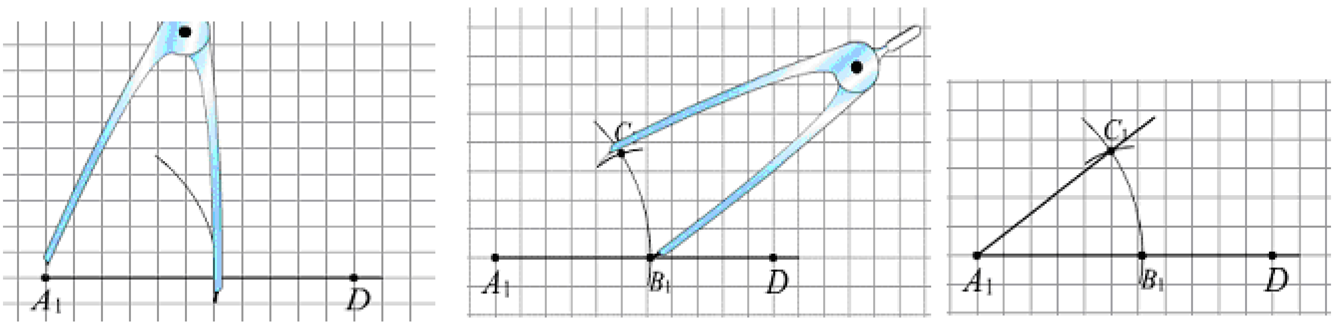


Мал. 2.57

Продовжте сторони AB і AC даного трикутника та відповідні сторони A_1B_1 і A_1C_1 побудованого трикутника.

3. Як можна побудувати кут, рівний даному?

Звертаємо увагу учнів на те, що кути в даному трикутнику ABC дорівнюють відповідним кутам у трикутнику $A_1B_1C_1$, тобто $\angle A = \angle A_1$. Аналізуючи малюнок, школярі встановлюють, що для побудови кута, який дорівнює даному, потрібно на даному куті утворити трикутник, дві сторони і вершина якого збіглися б зі сторонами і вершиною кута, а потім побудувати трикутник, який дорівнює утвореному. Таким чином спосіб побудови знайдено. План побудови учні складають за анімацією з електронного засобу навчального призначення [37] (мал. 2.58).



Мал. 2.58

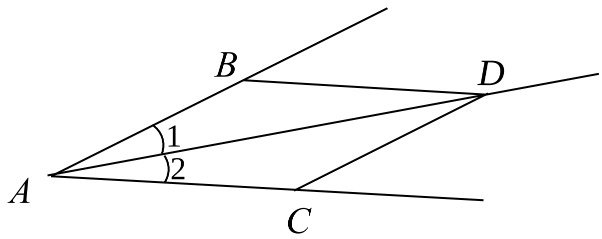
Набуті учнями вміння будувати кут, рівний даному, застосовуються ними для виконання вправ:

1. Побудуйте трикутник за двома сторонами і кутом між ними.
2. Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічними сторонами і кутом між ними.
3. Побудуйте трикутник за стороною і прилеглими до неї кутами.
4. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою і прилеглим кутом.

Доведення правильності побудови кута, рівного даному, ґрунтується на самому процесі побудови. Під час вправляння ми вимагали виконання етапу доведення усно. Таким чином учні повторюють спосіб доведення й усвідомлюють цілісність структури виконання геометричних побудов.

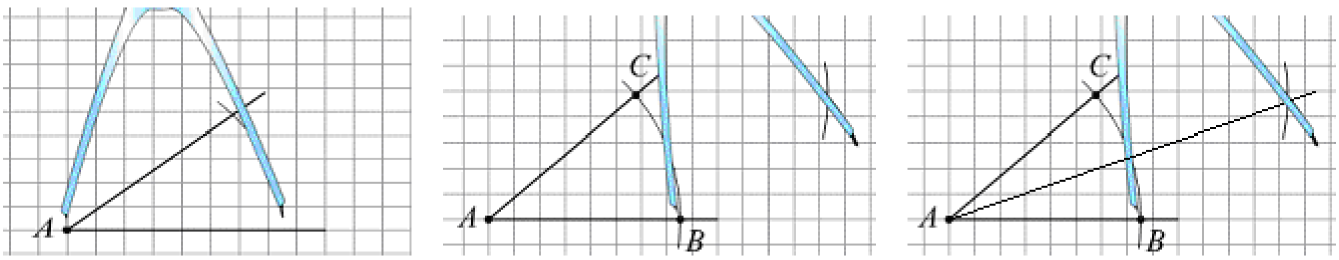
Більшість учнів знайома з процесом побудови бісектриси кута з курсу математики 5 – 6 класів. Задача на побудову такого змісту дає можливість зрозуміти природу відповідних конструктивних дій. Для складання плану побудови бісектриси кута пропонуємо учням виконати такі вправи за готовим малюнком 2.59:

1) Дано: $AB = AC$.
   Доведіть: $BD = DC$.
2) Дано: $AB = BD = DC = AC$.
   Доведіть: $\angle 1 = \angle 2$.



Мал. 2.59

А потім переглядаємо анімацію з електронного засобу навчального призначення [37] (мал. 2.60).



Мал. 2.60

Після цього учні складають план побудови бісектриси кута і виконують вправи:

1. Накресліть довільний трикутник. Побудуйте його бісектриси. Чи зберігається властивість бісектрис трикутника внаслідок вашої побудови?
2. Дано рівнобедрений трикутник. Побудуйте точку перетину бісектриси кута при основі з бічною стороною.
3. Побудуйте кут, який дорівнює $\frac{1}{4}$ даного кута.
4. Побудуйте кут удвічі більший за даний.
5. Побудуйте кут так, щоб дана точка лежала на його бісектрисі.

Задача поділу відрізка навпіл виконується учнями на основі таких вправ:

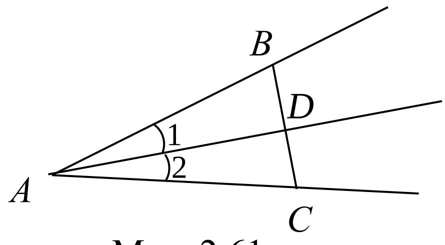
1. За малюнком 2.61 виконайте такі вправи:

а) Дано: $\angle 1 = \angle 2$, $AB = AC$.

Доведіть: $BC \perp AD$.

б) Дано: $AB = AC$, $BC \perp AD$.

Доведіть: $\angle 1 = \angle 2$.



Мал. 2.61

2. Побудуйте рівнобедрений трикутник за даною основою. Дайте відповіді на запитання:

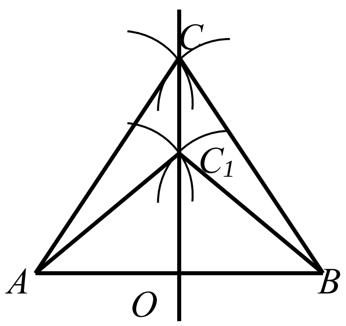
а) Скільки можна побудувати таких трикутників?

б) Сполучіть вершини C і C_1 трикутників прямою (мал. 2.62). Чи рівні трикутники ACC_1 і BCC_1? Які за величиною кути ACO і BCO?

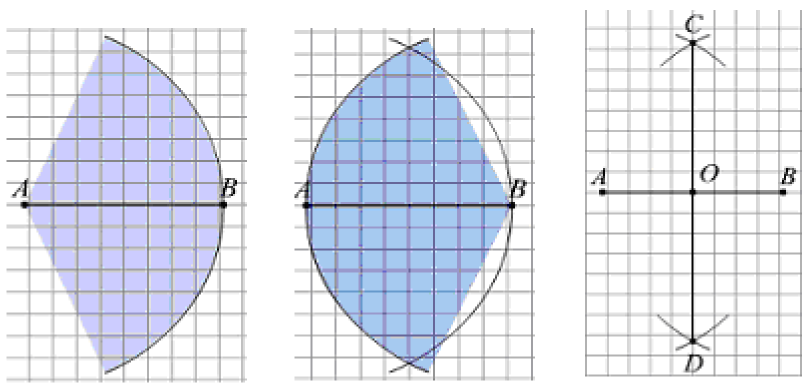
в) Як називається відрізок CO в трикутнику ACB?

г) Які за величиною відрізки AO і BO?

Спостерігаючи анімацію поділу відрізка навпіл [37] (мал. 2.63), учні складають план такої побудови. Уточнюємо, що для зручності побудови розхил циркуля змінювати необов’язково.



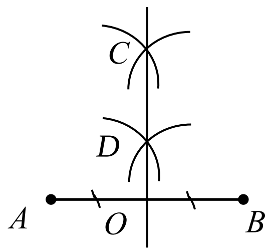
Мал. 2.62



Мал. 2.63

Уміння ділити заданий відрізок навпіл закріплюються виконанням вправ:

1. Накресліть довільний трикутник. Побудуйте одну з його медіан.
2. Поділіть даний відрізок на чотири рівні частини.
3. Побудуйте відрізок, удвічі більший за даний відрізок.
4. Складіть план поділу відрізка навпіл за малюнком 2.64.



Мал. 2.64

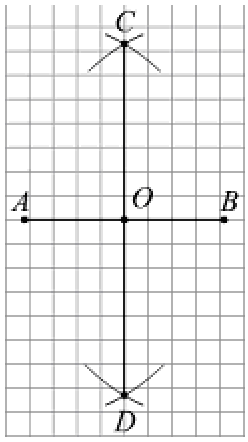
Розв’язання задачі на побудову прямої, що проходить через дану точку O, і перпендикулярна даній прямій a, має два випадки. Пояснюємо учням, що таким чином ми отримуємо два способи такої побудови в залежності від розміщення точки

O. Обидва способи ґрунтуються на побудові відрізка *AB*, що лежить на прямій *a* і кінці якого рівновіддалені від даної точки *O* (у випадку, коли точка *O* лежить на прямій *a*, ця точка буде серединою відрізка *AB*) і зводяться до побудови перпендикуляра до прямої *a*, який проходить через точку *O*. Звертаємо увагу школярів на те, що такі побудови вже виконувалися ними під час побудови середин відрізків. Для цього пропонуємо учням такі вправи:

1. На малюнку 2.65 зображено процес побудови середини відрізка *AB*. Виконавши потрібні добудови, доведіть, що $CD \perp AB$.

2. Побудуйте перпендикуляр до даного відрізка. (Вказівка: розв’яжіть задачу про поділ відрізка навпіл і зазначте відрізок, утворений при побудові, що є шуканим)

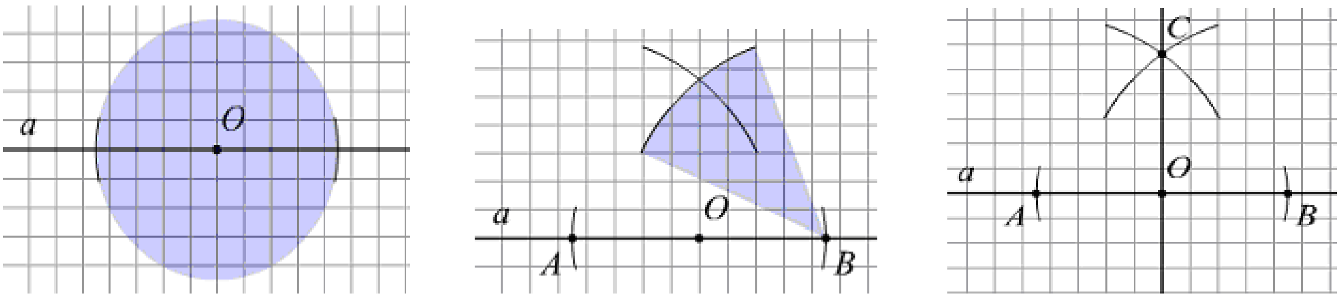
3. Побудуйте перпендикуляр до даної прямої *a*. (Вказівка: позначте на прямій довільний відрізок і побудуйте до нього перпендикуляр, використовуючи розв’язання попередньої задачі).



Мал. 2.65

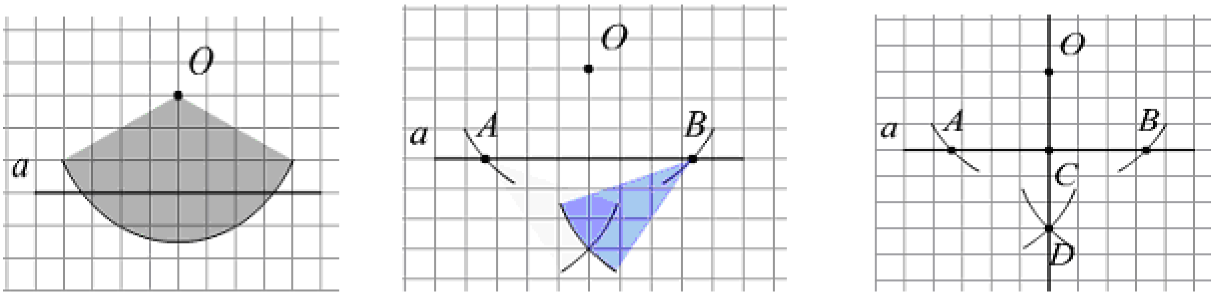
Потім учні переглядають анімацію побудови прямої, що проходить через дану точку і перпендикулярна даній прямій [37], і складають план кожного випадку побудови.

Для випадку, коли точка *O* лежить на прямій *a* (мал. 2.66).



Мал. 2.66

Для випадку, коли точка *O* не лежить на прямій *a* (мал. 2.67).



Мал. 2.67

Здобуті вміння учні закріплюють, розв’язуючи такі задачі:

1. Побудуйте прямий кут.
2. Накресліть довільний трикутник. Побудуйте одну з його висот.
3. Через дану точку A проведіть пряму, що проходить між даними точками B і C, на однаковій відстані від них.
4. Побудуйте прямокутний трикутник за двома катетами.
5. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і прилеглим кутом.

Пропонована методика навчання основних побудов спрямована на усвідомлення учнями конструктивних дій як практичного застосування властивостей геометричного місця точок, рівновіддалених від даної. Щоб учні могли самостійно знаходити способи побудов, пропонуємо для виконання відповідні підготовчі вправи, перегляд анімацій виконання основних побудов для складання плану їх виконання. Навчальну діяльність організовуємо так, щоб у процесі розв’язування кожної основної задачі на побудову учень здобував додаткову інформацію, потрібну для розв’язування наступної задачі. Це сприяє виробленню вміння критично підходити до нової задачі, знаходити в ній відомі елементи.

Вивчення основних побудов спрямоване, з одного боку, на вироблення вмінь виконувати ці побудови, з іншого, – на засвоєння учнями способу дій щодо розв’язування складніших задач на побудову. Школярі усвідомлюють структуру розв’язання, зміст кожного з етапів, набувають уявлень про типові комбінації елементарних побудов, до яких зводиться етап побудови кожної конструктивної задачі.

Дотримання етапів розв’язування задач на побудову робить міркування учнів більш цілеспрямованими і логічно послідовними, привчає їх до повноти розв’язування будь-яких математичних задач. У результаті нашого дослідження встановлено, що для формування в учнів конструктивних умінь слід відпрацьовувати кожний етап розв’язування задач на побудову за допомогою відповідних вправ.

Для знаходження способу побудови (етап аналізу) здійснюється аналіз структури задачі, який передбачає насамперед осмислення даних і властивостей шуканої геометричної фігури. При цьому важливим є встановлення визначеності шуканої фігури – достатності або недостатності даних елементів для її побудови. Основна увага приділяється тому, скільки кутових і лінійних елементів визначають фігуру і якими є ці елементи. Для формування в учнів умінь виділяти елементи, достатні для існування заданих в умові фігур, за нашою методикою застосовуються вправи з неповною вхідною інформацією. Наприклад, вправи, які пропонувались учням 8 класів у вивченні теми „чотирикутники”:

Чому не можна однозначно виконати побудову у таких задачах?

1. Побудуйте трикутник за стороною 5 см і прилеглим до неї кутом 50^{o}.
2. Побудуйте паралелограм за стороною і діагоналлю.
3. Побудуйте трапецію за основою і бічними сторонами.

Вироблення вмінь із сукупності даних в умові величин виділяти ті, які утворюють систему відношень, необхідних і достатніх для розв’язування задачі, а також виділяти зайві дані, формувалися за допомогою таких вправ:

1. Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою і двома катетами.
2. Побудуйте прямокутник за стороною і двома діагоналями.
3. Побудуйте рівнобічну трапецію за основами і бічними сторонами.

Для пошуку способу побудови (складання плану побудови) важливо вміти добувати з даних про фігури максимально корисну інформацію, вибирати потрібний прийом побудови, знайти аналогічну задачу. Цьому сприяє уміння узагальнено сприймати умову задачі, виділяючи ті зв’язки і відношення між даними і шуканими фігурами, які мають основне смислове математичне навантаження. Такі вміння формувалися на основі аналізу даних задач на побудову. Наприклад.

1. „Побудуйте ΔABC, знаючи, що $\angle BAC = \alpha$, висота, опущена на сторону BC, дорівнює h і $AB : AC = m : n$.” Які фігури є даними в задачі? Які фігури є шуканими? Які зв’язки між даними і шуканими задачі?
2. „Побудуйте паралелограм за двома сторонами і діагоналлю.” Які точки потрібно побудувати, щоб дістати шуканий паралелограм? Яку фігуру досить побудувати для знаходження трьох вершин паралелограма? Як побудувати четверту вершину?

Провівши аналіз останньої задачі, учні мали можливість спостерігати процес побудови за анімацією з електронного засобу навчального призначення [36].

Уміння здійснювати побудову шуканої фігури передбачають правильність виконання побудови креслярськими інструментами. Пояснюємо, що всі основні побудови мають бути виразнішими за допоміжні лінії. Під час розв’язування конструктивних задач ми намагалися варіювати розміщення на площині даних фігур, оскільки зазвичай уміння учнів користуватися креслярськими інструментами пристосовані до звичних для них розміщень фігур на площині.

Доведення в задачі на побудову за своїм логічним змістом обернене аналізу. Оскільки аналіз – це знаходження необхідних умов, яким має задовольняти шукана фігура, доведення показує, що ці умови є і достатніми, тобто, що побудована фігура задовольняє всі вимоги задачі. Методика вироблення в учнів умінь доводити твердження розглядалася нами у § 2.2. Для формування конструктивних умінь учнів важливим є з’ясування, за яких умов доведення потрібне, а за яких його можна опустити. Пояснюємо учням, що потреба етапу доведення в задачі на побудову визначається тим, якою мірою дані умови задачі знаходять відображення в плані побудови. Наприклад, у розв’язуванні задачі „Побудувати трикутник за стороною і прилеглими до неї кутами” доведення зводиться до простої перевірки правильності основних побудов, тому може мати усну форму або стислий запис. У задачі „Побудувати прямокутний трикутник за гіпотенузою і медіаною, проведеною до одного з катетів” дані умови не використовуються безпосередньо в самій побудові, тому потрібно доводити, що побудована фігура має задану форму і що розміри її елементів відповідають умові задачі.

Етап дослідження в задачах на побудову передбачає вміння визначати умови існування геометричних фігур. Для вироблення таких умінь застосовувались задачі на дослідження взаємного розміщення фігур і задачі на дослідження виду фігури. Задачі першого виду сприяють виробленню вмінь проводити дослідження в позиційних задачах на побудову, що передбачає варіювання малюнка. Наприклад:

1. Зобразіть на малюнку можливі взаємні розміщення геометричних фігур: а) прямої і точки; б) прямої і двох точок; в) кута і прямої; г) прямої і кола.

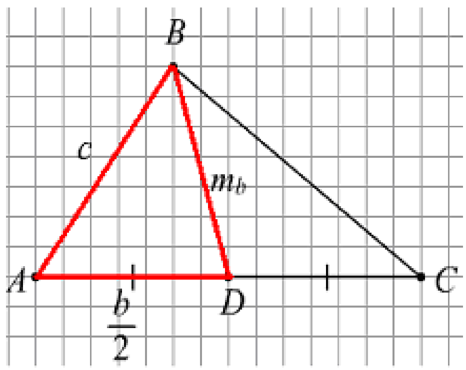
2. Скільки дотичних до кола можна провести через одну точку?
3. Скільки точок перетину можуть мати два кола?
4. Як розміщені кола, якщо відстань між їх центрами 56 см, а радіуси дорівнюють 15 і 40 см?

У задачах на дослідження виду фігури учні мають встановити вид фігури, властивості якої задані опосередковано. Наприклад:

1. Дві сторони чотирикутника паралельні і однаково віддалені від точки перетину його діагоналей. Визначте вид чотирикутника.
2. Бісектриси внутрішніх кутів паралелограма, перетинаючись, утворюють чотирикутник. Якого виду цей чотирикутник?
3. Який чотирикутник утворюють прямі, що послідовно сполучають середини сторін: а) квадрата; б) рівнобічної трапеції; в) довільного чотирикутника.

Дослідження виду фігури в останній задачі супроводжувалися динамічною моделлю з електронного засобу навчального призначення [16], яка дає можливість змінювати вид чотирикутника і спостерігати за зміною фігури, утвореної серединами його сторін, реалізовуючи принцип варіативності у побудові системи вправ.

Відпрацьовуючи вміння учнів основної школи виконувати етапи задач на побудову за допомогою системи вправ, ми враховували дидактичну мету кожної задачі і не прагнули проводити всі етапи в усіх вправах. В одних задачах ми акцентували увагу на аналізі, в інших – нас цікавила сама побудова або доведення. Практика навчання геометрії в основній школі свідчить про те, що в учнів 7 класу ще немає потрібних знань для проведення дослідження. Необхідні теоретичні відомості (співвідношення між сторонами і кутами в прямокутному і косокутному трикутниках, перетин прямої з колом та ін.) вивчаються у 8 – 9 класах. Нашим завданням було виховувати в учнів потребу у дослідженні умов існування геометричної фігури.

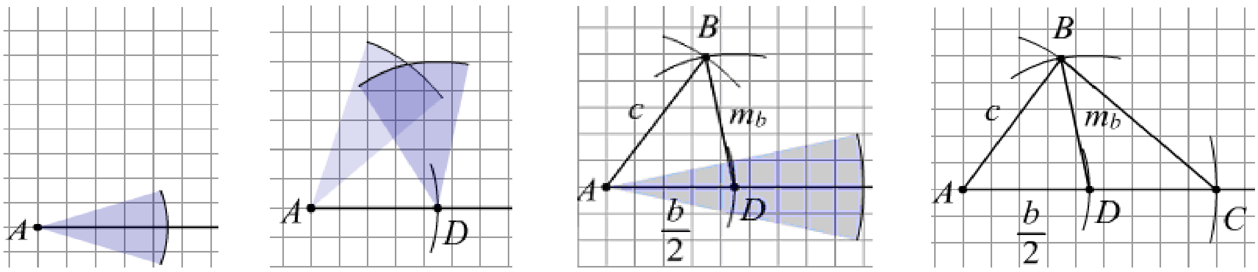


Мал. 2.68

Розв’язування складніших задач на побудову передбачало застосування різних методів. Метод допоміжного трикутника полягає у знаходженні трикутника, який є частиною шуканої фігури і побудова якого відома. Для ознайомлення учнів з цим методом акцентували увагу на етапі аналізу розв’язання задачі: „Побудуйте трикутник за двома сторонами і медіаною, проведеною до однієї з них”. Аналіз проводили за раніше виготовленим малюнком-ескізом [37].

Для засвоєння цього методу слід обмежитися етапами аналізу і складання плану побудови. Результат етапу аналізу корисно зафіксувати, запропонувавши учням сформулювати правило-орієнтир відшукання плану побудови трикутника. Наприклад: „Щоб знайти план побудови трикутника,

потрібно: 1) знайти на ескізі (мал. 2.68) допоміжний трикутник, побудова якого відома; 2) встановити, скільки побудовано вершин шуканого трикутника внаслідок побудови допоміжного; 3) з’ясувати, як побудувати решту вершин шуканого трикутника.” Процес побудови учні мали можливість спостерігати за анімацією [375] (мал. 2.69). Виконували побудову за допомогою електронного засобу GRAN-2D (вправа 3 додатку З дисертаційного дослідження)



Мал. 2.69

Для закріплення вмінь застосовувати метод допоміжного трикутника до розв’язування задач на побудову учням пропонувалися такі вправи:

1. Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною і медіаною, проведеною до бічної сторони.

2. Побудуйте трикутник за стороною і медіанами, проведеними до двох інших сторін.

3. Побудуйте трикутник за стороною, протилежним кутом і висотою, опущеною на одну з двох інших сторін.

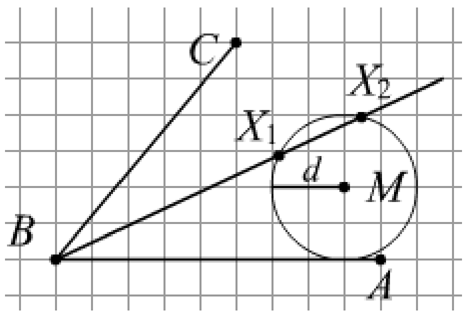
4. Побудуйте трикутник за двома сторонами *a* і *b* та висотою *h*, проведеною до третьої сторони.

5. Побудуйте трикутник за кутом α, висотою h і бісектрисою l, проведеними з вершини цього кута.

Під час вивчення теми: „Чотирикутники” широко застосовували метод допоміжного трикутника для розв’язування задач на побудову чотирикутників. Пропонували таку систему вправ:

1. Побудуйте паралелограм за сторонами a і b та діагоналлю d.
2. Побудуйте паралелограм за стороною a, діагоналлю d і кутом α, який лежить проти діагоналі.
3. Побудуйте прямокутник за діагоналлю d і кутом α між діагоналлю і стороною.
4. Побудуйте трапецію за основами та бічними сторонами.
5. Побудуйте чотирикутник за чотирма його сторонами a, b, c, d і кутом α.

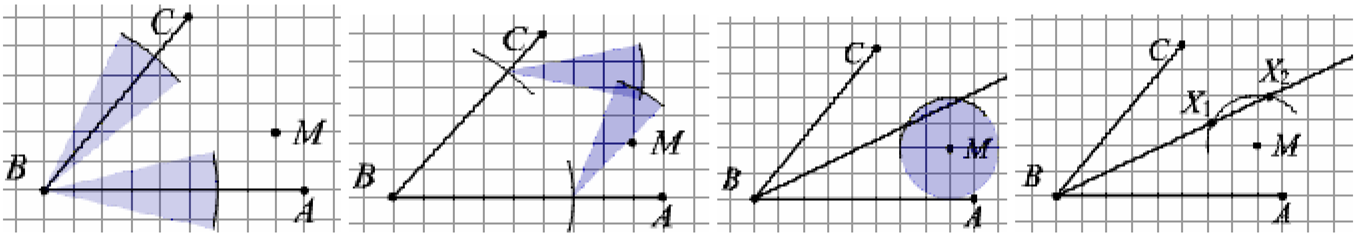
Побудову до кожної із задач учні спостерігали за допомогою електронного засобу навчального призначення [37]. Звертали їхню увагу на те, що всі побудови виконуються методом допоміжного трикутника. Цим методом формулювали правила-орієнтири побудови чотирикутника (паралелограма, прямокутника, трапеції). Наприклад: „Для того, щоб побудувати паралелограм, потрібно спочатку побудувати допоміжний трикутник, а потім добудувати цей трикутник до паралелограма, спираючись на властивості паралелограма.”



Мал. 2.70

Розв’язування задач на побудову методом геометричних місць зводиться до відшукання певної точки, яка задовольняє дві вимоги. Геометричні місця точок (ГМТ), які задовольняють ці вимоги, є певними фігурами. Шукана точка є точкою перетину цих фігур, оскільки належить обом фігурам. Для засвоєння методу геометричних місць складали план побудови точки X, яка рівновіддалена від сторін кута ABC і розміщується на відстані d від точки M (мал. 2.70).

Проводився аналіз за малюнком-ескізом [37]. План побудови учні складали за висновком, сформульованим за результатом виконання етапу аналізу: „Розв’язуючи задачі методом геометричних місць, потрібно: 1) проаналізувати умову задачі та виділити шукану точку; 2) з’ясувати, які дві вимоги вона задовольняє; 3) знайти геометричне місце точок, що задовольняють першу вимогу; другу вимогу; 4) знайти точку перетину знайдених геометричних місць, яка і буде шуканою точкою.” Учні спостерігають етап побудови задачі за анімацією [37] (мал. 2.71).



Мал. 2.71

Звертаємо увагу учнів на те, що задача має два розв’язки.

Система вправ для засвоєння методу геометричних місць має містити задачі, для розв’язування яких застосовуються різні поєднання відомих учням основної школи геометричних місць. Тобто, ГМТ, рівновіддалених від даної точки, ГМТ, рівновіддалених від двох даних точок, ГМТ, кожна з яких лежить у середині даного кута і рівновіддалена від його сторін, ГМТ, рівновіддалених від даної прямої, ГМТ, з яких даний відрізок видно під прямим кутом. А також геометричні місця точок, які зводяться до згаданих ГМТ. Виділяють такі типи задач, які розв’язуються методом геометричних місць [25]: 1) задачі на побудову шуканої точки за даною її властивістю; 2) задачі на побудову шуканої точки за двома даними властивостями; 3) задачі на побудову фігур, які безпосередньо зводяться до побудови точки (точок); 4) задачі на побудову фігур, які безпосередньо не зводяться до побудови шуканої точки. Наведемо приклад добірок вправ, які містять задачі всіх названих типів:

7 клас.

1. На даному колі (даній прямій) побудуйте точку: а) рівновіддалену від сторін даного кута; б) віддалену від даної точки на відстань d.

2. Знайдіть точку, яка лежить на відстані n від прямої a і на відстані m від прямої b.

3. Побудуйте трикутник за основою, висотою, опущеною на основу, і бічною стороною.

8 клас

1. Побудуйте ромб за двома діагоналями.

2. Побудуйте паралелограм за двома діагоналями і висотою.

3. Побудуйте рівнобічну трапецію за різницею основ, бічною стороною і діагоналлю.

9 клас.

1. Побудуйте правильний шестикутник.

2. Побудуйте правильний восьмикутник.

3. Знайдіть геометричне місце центрів кіл, описаних навколо всіх трикутників зі спільною основою.

Під час вивчення теми „Геометричні перетворення” у 9 класі задачі на побудову відіграють важливу роль у засвоєнні учнями методу геометричних перетворень. Залежно від виду перетворень використовуємо методи: симетрії, повороту, паралельного перенесення та подібності. У результаті навчання застосовувати методи геометричних перетворень до розв’язування конструктивних задач в учнів мають бути сформовані такі вміння: 1) будувати фігури при окремих видах перетворень; 2) виділяти елементи, які визначають дане перетворення (вісь симетрії, центр і кут повороту, центр і коефіцієнт гомотетії); 3) будувати при перетворенні на відповідних фігурах відповідні точки; 4) будувати при даному перетворенні відповідні точки на довільних фігурах.

Для вироблення в учнів зазначених умінь використовувались вправи, які ґрунтуються на варіюванні виділених спільних компонентів, що мають місце у застосуванні перетворень у різних конкретних ситуаціях. Спільними компонентами є: геометрична фігура, яку потрібно перетворити; геометричні фігури, відносно яких здійснюється перетворення або які визначають дане перетворення; дія перетворення і кінцевий об’єкт перетворення. Застосовувались задачі: на розпізнавання серед сукупності пар фігур, які можна утворити одну з одної за допомогою певного перетворення; на побудову фігури, що утворилася в результаті перетворення або фігури, що була до перетворення; на побудову фігур, що є початковим і кінцевим об’єктами перетворень. Наведемо приклад системи вправ на формування вмінь застосовувати метод симетрії до розв’язування конструктивних задач:

1. Побудуйте точку A', симетричну $A(3;5)$ відносно точки $O(-1;-1)$.

2. Відновіть пропущені координати пар точок, симетричних відносно осі OX: а) $A(5; ...)$ і $A'(...; -2)$; б) $D(...; 4)$ і $D'(12; ...)$; в) $M(2; ...)$ і $M'(2; ...)$.

3. Відносно якої з координатних осей симетричними є точки: а) $A(7; 2)$ і $A'(-7; 2)$; б) $B(-3; -2)$ і $B'(-3; 2)$?

4. Побудуйте трикутник $A'B'C'$, симетричний трикутнику ABC відносно: а) сторони AB; б) висоти, проведеної з вершини; в) медіани AM.

5. Позначте дві різні точки A і A'. Побудуйте пряму a, щоб дані точки були симетричними відносно цієї прямої.

6. Складіть рівняння прямої, відносно якої симетричні точки: а) $A(1;2)$ і $B(4;-6)$; б) $A(4;0)$ і B(8; 0); в) $A(3;0)$ і B(0;4).

7. Відомо, що відрізок AB симетричний відрізку $A'B'$ відносно прямої а. Побудуйте два симетричних трикутники, не використовуючи осі симетрії.

8. Дано точки A, B і C, які не лежать на одній прямій. Доповніть їх четвертою точкою D так, щоб чотирикутник $ABCD$ мав центр симетрії.

Для вироблення вмінь застосовувати метод симетрії до розв’язування задач застосовувались розроблені нами практичні роботи [4 ст. 67, 68].

Далі формулюємо правило-орієнтир розв’язування конструктивних задач методом симетрії. Наприклад: „Для застосування методу симетрії у розв’язуванні задач на побудову потрібно: 1) на ескізі дану фігуру замінити їй симетричною відносно деякої точки або прямої; 2) задачу переформулювати в допоміжну, переносячи вимоги задачі в умови, які стосуються даної фігури, на симетричну; 3) виконати побудову в допоміжній задачі та з’ясувати, в результаті яких побудов можна розв’язати дану задачу.”

Для розв’язування методом симетрії учням пропонувалися задачі на побудову такого характеру [4 ст. 68]:

1. Побудуйте трикутник за вершиною і прямими, на яких лежать бісектриси двох інших кутів.
2. Побудуйте ромб за гострим кутом і сумою діагоналей.
3. Побудуйте трикутник за точками, які симетричні центру описаного кола відносно його сторін.

Задачі на побудову алгебраїчним методом застосовувалися у ході вивчення теми „Площі фігур” у 9 класі. При цьому реалізувалися принципи наступності і інтегрованості у побудові системи вправ з геометрії в основній школі. Завершальним етапом розв’язування будь-якої геометричної задачі на побудову алгебраїчним методом є побудова виведеної алгебраїчної формули. Тому увага приділялася виробленню в учнів умінь будувати відрізки, задані найпростішими алгебраїчними формулами: $x = a \pm b$, $x = a \cdot b$, $x = \frac{n}{a}$, $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, $x = \sqrt{a \cdot b}$, $x = \frac{a \cdot c}{b}$.

Далі формулювалося правило-орієнтир розв’язування конструктивних задач алгебраїчним методом. Наприклад: „Для застосування алгебраїчного методу в розв’язуванні задач на побудову потрібно: 1) шукані відрізки позначити буквами *x*, *y*, *z*, ..., дані відрізки – *a*, *b*, *c*, ...; 2) скласти рівняння або систему рівнянь, використовуючи відомі геометричні співвідношення між шуканими і даними відрізками; 3) розв’язати складене рівняння або систему рівнянь; 4) дослідити за умовою задачі знайдені формули для невідомих відрізків; 5) побудувати шукані відрізки, виражені знайденими формулами.”

Для розв’язування алгебраїчним методом учням пропонувалися задачі на побудову, подібні до таких:

1. Побудуйте прямокутник, рівновеликий даному трикутнику із заданою основою.
2. Побудуйте квадрат, рівновеликий даному прямокутнику.
3. Дано квадрат. Побудувати квадрат, площа якого втричі більша.

Розроблена нами система вправ для формування конструктивних умінь диференційована відповідно до рівнів відповідних умінь учнів основної школи. На початковому рівні пропонувалися вправи: на розпізнавання і виконання найпростіших побудов з відповідними вказівками; на середньому рівні – вправи на складання плану та виконання основних побудов за алгоритмом, на розпізнавання і виконання основних побудов у найпростіших задачах на побудову; на достатньому рівні – задачі на побудову, які зводяться до основних побудов; на високому рівні – складніші задачі на побудову, які потребують проведення аналізу і послідовності потрібних основних побудов, доведення відповідності фігури, отриманої в результаті проведених побудов, умові задачі, дослідження існування шуканої фігури та кількості розв'язків задачі, застосування різних методів до їх розв'язання.

Задачі на побудову мають багато дидактичних можливостей, які недостатньо реалізуються через брак навчального часу з геометрії в основній школі. Тому в класах з поглибленим вивченням математики конструктивну лінію курсу геометрії основної школи доцільно доповнити курсом за вибором, де розглядати складніші задачі на побудову і різні методи їх розв'язування.

Організація, проведення педагогічного експерименту і аналіз його результатів

Для перевірки гіпотези дослідження, експериментальної апробації розробленої нами системи геометричних вправ для основної школи було організовано і проведено педагогічний експеримент.

Педагогічний експеримент ми розуміємо як процес навчання, який організовано і проведено відповідно до мети дослідження, що дає змогу спостерігати педагогічні явища в контрольованих умовах [20].

Організація, проведення, аналіз та інтерпретація результатів педагогічного експерименту здійснювалися методами педагогічних досліджень та основних положень математичної статистики в педагогіці, висвітлені в працях Ю. К. Бабанського [8], М. Г. Грабара та К. О. Краснянської [46], В. С. Аванесова [1], Д. О. Новікова [111] та ін.

Виходячи з поставленої мети та завдань, педагогічний експеримент проводився в три етапи:

I етап (2000 – 2002) констатувальний експеримент;

II етап (2003 – 2005) пошуковий експеримент;

III етап (2006 – 2009) формувальний експеримент.

Експеримент проводився у гімназії № 178 Солом'янського району м. Києва, Бучанської загальноосвітньої школи I – III ступенів, ЗОШ № 2 м. Вишгорода

Київської області, Великодимерського НВК, НВК № 2 м. Хмельницького, Новопетрівської загальноосвітньої школи I – III ступенів № 1 Вишгородського району Київської області.

У результаті констатувального експерименту нами виявлено ряд недоліків у засвоєнні учнями основної школи знань і вмінь систематичного курсу геометрії. Традиційна методика навчання не забезпечує також належного рівня сформованості логічного мислення, просторової уяви учнів, що є завданнями вивчення курсу. Школярі не набувають відповідних предметних і ключових компетентностей (§ 1.4). Аналіз практики навчання геометрії в основній школі показав, що серйозного удосконалення потребує методика формування системи вправ курсу. Системи вправ, які пропонуються в діючих вітчизняних і зарубіжних підручниках з геометрії, навчальних посібниках, збірниках задач враховують основні ідеї Концепції шкільної математичної освіти та Державного стандарту базової і середньої освіти в Україні, провідною ідеєю яких є рівнева диференціація навчання й орієнтація його результатів на навчальні можливості учнів. Однак існують різні методичні підходи до їх конструювання. Особливо це стосується структури, забезпечення етапів навчальної діяльності учнів, реалізації методів навчання, принципів відбору геометричного змісту. Виявлено нерівномірний розподіл вправ за рівнями, неповною мірою реалізовані принципи прикладної спрямованості, варіативності, інтегрованості. У підручниках [201 – 204] як позитивне слід зазначити, що система вправ спрямована на реалізацію діяльнісного підходу у засвоєнні геометричних понять. Знання від самого початку їх подачі включаються в структуру дій. Завдяки системі вправ учні залучаються до різних видів навчальної діяльності, одночасно засвоюючи розумові і практичні дії. Важливо, що вивчення учнями властивостей геометричних понять відбувається за допомогою задач побутового змісту. Серед визначених нами принципів побудови системи вправ у розглянутих підручниках реалізуються повною мірою принципи науковості, повноти, наочності, прикладної спрямованості, варіативності, інтегрованості, доступності. Диференційований підхід не є визначальним.

Відсутність єдиного підходу до структурування систем вправ у сучасній навчальній і методичній літературі з геометрії в основній школі і виявлені недоліки результатів навчальних досягнень учнів з геометрії зумовили вибір напрямку нашого дослідження – система геометричних вправ, як засіб організації навчання геометрії в основній школі.

На другому етапі проводився пошуковий експеримент. Було визначено вихідні теоретичні положення, сформульовано мету і завдання дослідження, розроблено матеріали для проведення формувального експерименту, серед яких: практичні роботи з геометрії для 7 – 9 класів; електронні засоби навчального призначення та методичні рекомендації щодо їх використання у навчальному процесі (загальні рекомендації та розробки уроків); системи диференційованих вправ з геометрії.

Мета формувального експерименту полягала в перевірці ефективності розробленої методики добору системи вправ з геометрії в основній школи. Для її реалізації було поставлено такі завдання:

1. Розробити експериментальні матеріали, які б дали змогу перевірити гіпотезу дослідження.
2. Вибрати експериментальні і контрольні класи так, щоб рівень успішності був однаковий на час початку проведення експерименту.
3. Провести навчання в експериментальних класах, використовуючи, крім системи вправ з діючого підручника з геометрії, розроблену нами систему вправ.
4. Провести оцінювання навчальних досягнень учнів контрольних й експериментальних класів з тем: „Геометричні побудови”, „Чотирикутники”, „Геометричні перетворення” а також за весь період вивчення систематичного курсу геометрії основної школи.
5. Здійснити якісний і кількісний аналізи результатів педагогічного експерименту.

На етапі формувального експерименту перевірялася ефективність системи вправ з геометрії в основній школі, розробленої на основі визначених принципів її добору. Для проведення експерименту було розроблено методику його проведення і дидактичне забезпечення, вибрано експериментальну і контрольну групи учнів, здійснено кількісну оцінку результатів, корекцію розробленої методики.

Однорідність вибірок контрольних й експериментальних класів визначалася на основі встановлення рівня навчальних досягнень учнів з геометрії на початку вивчення систематичного курсу (набутий у результаті вивчення геометричного матеріалу курсу математики 1 – 6 класів) за результатами виконання ними тесту і письмової роботи. Добір тестових завдань і завдань письмової роботи здійснювався на основі аналізу навчальної програми з математики для 5 – 6 класів загальноосвітньої школи і вимог до навчальних досягнень учнів за цією програмою [130]. Специфікація тесту і контрольної роботи визначалася за таблицею Е.3 додатку Е дисертаційного дослідження.

Тест – це *система тестових завдань*. Кожне тестове завдання є *компонентом* цієї системи і відповідає чітко визначеним вимогам. *Системотвірними факторами* тесту є його мета і *критерії* добору тестових завдань.

До завдань у тестовій формі ставилися такі вимоги [1]:

1) належність до відповідної предметної області;
2) чітко визначена міра складності;
3) коректність і лаконічність змісту;
4) розподільча здатність;
5) мінімальні затрати часу на відповідь (від 1 до 5 хв. на завдання залежно від рівня складності) [1].

Критеріями тестових завдань були: *потенціал трудності*; *дисперсія балів*; *коефіцієнт кореляції балів за виконане завдання з сумарними балами за весь тест*.

Набір тестових завдань можна вважати тестом, якщо він відповідає критеріям *надійності* і *валідності*.

Для створення тесту було розроблено 18 завдань у тестовій формі в трьох варіантах кожне, які б давали змогу визначити за максимально короткий час рівень навчальних досягнень учнів з геометрії на початок вивчення систематичного курсу. Використовувалися завдання закритої форми з вибором відповіді (однієї з чотирьох), які розміщувалися у порядку зростання складності. За змістом завдання охоплювали масив інформації з геометрії, яким мають оволодіти учні в результаті вивчення курсу математики 5 – 6 класу загальноосвітньої школи. Особлива увага зверталася на перевірку якості засвоєння понять і вміння оперувати ними на чотирьох рівнях. Лаконічність завдань забезпечувалася мінімумом слів і чіткою структурою його формулювання. Коректність завдань забезпечувалась однозначністю відповідей на них, коректністю формулювання умови, вживання символів.

Завдання випробовувалися в групі з 30 учнів 6 класу (наприкінці навчального року). Для пробного тестування завдання було надруковано на папері (у вигляді тестових зошитів трьох варіантів) для кожного учня. Оптимальний час тестування встановлювався емпірично. Спостереження показали, що в середньому було достатньо 40 хв., щоб усі учні встигли виконати всі завдання тесту зростаючої складності. Перевірка виконувалася „вручну”. Відповідно до рівня складності завдання оцінювалися в 1, 2, 3 і 4 бали.

Таблиця 2.1.

Розподіл балів, отриманих учнями за набір завдань у тестовій формі

завдання	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
бали	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4

За правильне виконання всіх завдань учень отримував 40 балів.

Обробка результатів тестування починалася з формування матриці тестових результатів у комп’ютерній програмі Microsoft Excel для Windows (додаток П дисертаційного дослідження).

Таблиця містить результати виконання кожного завдання кожним учнем. Потенціал складності завдань визначався за кількістю правильних відповідей учнів на кожне завдання і в такий спосіб уточнювався їх порядок. Мірою складності тестового завдання є величина, обернена до суми балів, отриманих усіма учнями за виконане завдання.

Розподільча здатність завдання характеризувала його можливість диференціювати групу учнів за рівнями навчальних досягнень і забезпечувалася підбором завдань різної складності. Вона визначалася обчисленням дисперсії отриманих балів. Чим більше значення дисперсії, тим кращою була розподільча здатність тестового завдання. Однак завдання з невисоким значенням дисперсії (з урахуванням значення коефіцієнта кореляції з сумарними балами за весь тест) також застосовуються в тесті для виявлення зовсім непідготовлених учнів порівняно з учнями з середнім рівнем навчальних досягнень.

Коефіцієнт кореляції балів за завдання з сумарними балами за весь тест є найважливішим показником тестового завдання. Рекомендувалося включати до тесту завдання з коефіцієнтом кореляції не нижчим за 0,25 – 0,3 [1]. Завдання з великим значенням коефіцієнта (вищим за 0,7) вважалися тестоутворювальними. Для обчислення коефіцієнта кореляції нами було застосовано формулу обчислення коефіцієнта кореляції Пірсона: $r=\frac{n\sum xy-\sum x\sum y}{\sqrt{n\sum x^2-\left(\sum x\right)^2}\sqrt{n\sum y^2-\left(\sum y\right)^2}}$, де n – кількість тестованих, x – бал за виконане завдання, y – сумарний бал за весь виконаний тест у комп’ютерній програмі Microsoft Excel.

Таким чином ми отримали сукупність тестових завдань, розміщених у порядку зростання потенціалу їх складності. Для визначення надійності тесту ми розділили відкоректовану матрицю результатів виконання учнями завдань на дві частини з парними і непарними номерами (таблиці). Обчислюємо коефіцієнт кореляції Пірсона між двома сукупностями сумарних балів результатів ($r_{1/2}$ = 0,88). Це означає, що тест має хорошу надійність. Валідність тесту за змістом вказує на повноту відображення змісту відповідного навчального матеріалу у завданнях тесту. Тому цей критерій перевірявся порівнянням змісту тестових завдань з програмою з математики для 5 – 6 класів середньої загальноосвітньої школи за розробленою специфікацією. Зміст тесту представлено у додатку К дисертаційного дослідження.

Вимірювання рівня навчальних досягнень учнів з геометрії на початку вивчення систематичного курсу здійснювалося за порядковою шкалою. Для зручності інтерпретації результатів вимірювання і відповідності визначеним критеріям рівнів застосовувалась порядкова шкала з чотирма градаціями.

Таблиця 2.2.

Таблиця переходу від тестових балів до рівнів навчальних досягнень

рівні навчальних досягнень	початковий	середній	достатній	високий
бали	1-6	7-19	20-32	33-40

Крім визначення рівнів засвоєння понять і вміння оперувати ними, перевірялися конструктивні й обчислювальні вміння учнів на початку формувального експерименту за допомогою письмової роботи такого змісту:

I варіант

1. Накресліть відрізок AB, довжина якого дорівнює 8 см. Позначте на ньому точку M так, щоб MB = 3 см. Яка довжина відрізка AM?
2. За допомогою транспортира накресліть кут, градусна міра якого дорівнює 57º.
3. За допомогою транспортира і лінійки побудуйте трикутник, якщо довжина однієї його сторона дорівнює 5 см, а величини кутів, що прилягають до цієї сторони, – 30º і 140º.
4. Накресліть коло, діаметр якого дорівнює 8 см. Позначте на колі точку М. Знайдіть на колі точки, віддалені від точки М на 5 см.
5. Периметр трикутника дорівнює 30 см, одна з його сторін – a см, друга – b см. Складіть вираз для обчислення довжини третьої сторони трикутника. Обчисліть довжину третьої сторони, якщо a = 5. b = 12.
6. Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 150 мм, 240 мм і 180 мм. Обчисліть суму довжин усіх його ребер.

II варіант

1. Накресліть відрізок MN, довжина якого дорівнює 11 см. Позначте на ньому точку A так, щоб MA = 5 см. Яка довжина відрізка AN?
2. За допомогою транспортира накресліть кут, градусна міра якого дорівнює 157º.
3. За допомогою транспортира і лінійки побудуйте трикутник, якщо дві сторони його дорівнюють по 2 см, а кут між ними – 45º.
4. Накресліть коло, діаметр якого дорівнює 6 см. Позначте на колі точку М. Знайдіть на колі точки, віддалені від точки М на 3 см.
5. Одна сторона трикутника дорівнює a см, друга – 21 см, а периметр трикутника – p см. Складіть вираз для обчислення третьої сторони трикутника Обчисліть довжину третьої сторони, якщо p = 96, a = 32.

6. Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 15 см, 24 см і 18 см. Обчисліть площу поверхні паралелепіпеда.

Максимальна сума балів, яку можливо отримати за правильне виконання всіх завдань контрольної роботи, 12. Розподіл балів за завданнями наведено у таблиці 2.3.

Таблиця 2.3.

Розподіл балів, отриманих учнями, за завданнями письмової роботи

Завдання	1	2	3	4	5	6
бали	1	1	2	2	3	3

Таблиця 2.4.

Розподіл балів, отриманих учнями, за рівнями навчальних досягнень

Рівні навчальних досягнень	початковий	середній	достатній	високий
бали	1-3	4-6	7-9	10-12

За результатами тестування і письмової роботи було вибрано контрольні й експериментальні класи, які мали статистично однаковий рівень потрібних характеристик і однакову у сумі кількість учнів 7-х класів на початок навчального року – 208 учнів (7 класів) КГ і 215 учнів (7 класів) ЕГ.

Таблиця 2.5.

Розподіл учнів експериментальної і контрольної груп за рівнями навчальних досягнень до початку експерименту за результатами тестування

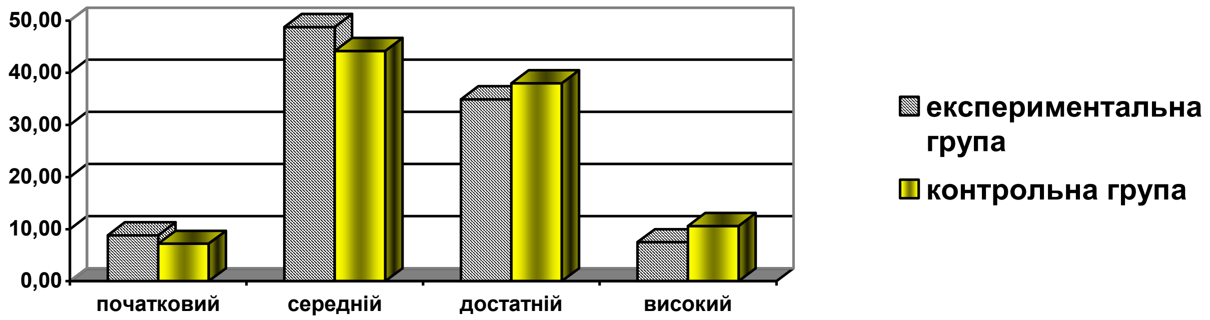
рівні навчальних досягнень	Експериментальна група до початку експерименту		Контрольна група до початку експерименту	
	учнів	(%)	учнів	(%)
початковий	19	8,8	15	7,2
середній	105	48,8	92	44,2
достатній	75	34,9	79	38
високий	16	7,5	22	10,6
всього	215	100	208	100

Таблиця 2.6.

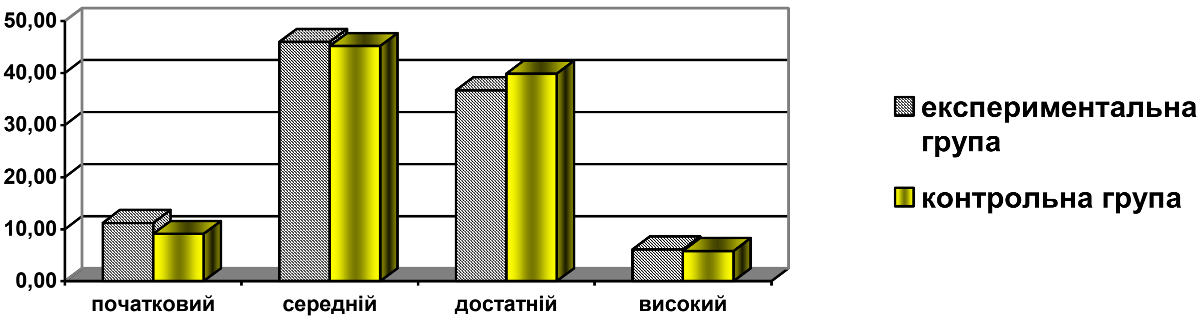
Розподіл учнів експериментальної і контрольної груп за рівнями навчальних досягнень на початку експерименту за результатами виконання письмової роботи

рівні навчальних досягнень	Експериментальна група до початку експерименту		Контрольна група до початку експерименту	
	учнів	(%)	учнів	(%)
початковий	24	11,2	19	9,1
середній	99	46	94	45,2
достатній	79	36,7	83	39,9
високий	13	6,1	12	5,8
всього	215	100	208	100

Для результатів вимірювання за порядковою шкалою за невеликої кількості градацій (у нашому випадку С = 4) єдиним інформативним показником описової статистики є гістограма [109]. Гістограми розподілу учнів експериментальної і контрольної груп за рівнями навчальних досягнень свідчать про наближено однаковий рівень навчальних досягнень учнів контрольної й експериментальної груп до початку експерименту.



Мал. 2.72. Гістограми розподілу учнів експериментальної і контрольної груп за рівнями навчальних досягнень на початку експерименту за результатами тестування



Мал. 2.73. Гістограми розподілу учнів експериментальної і контрольної груп за рівнями навчальних досягнень на початку експерименту за результатами виконання письмової роботи

Вважаючи, що наші вибірки випадкові і незалежні, обґрунтуємо висновок про однаковий рівень навчальних досягнень учнів контрольної і експериментальної груп за допомогою статистичних методів. Для вибору статистичного критерію і відповідної формули скористаємось відомими методиками [109], [44]. Оскільки вимірювання здійснювались за порядковою шкалою з чотирма категоріями (С – рівні навчальних досягнень), доцільно застосовувати критерій χ^2 (хі-квадрат).

Позначимо Q_{1i} – кількість учнів ЕГ, які досягли рівня i (i = 1, 2, 3, 4), Q_{2i} – кількість учнів КГ, які досягли рівня i (i = 1, 2, 3, 4). Нехай P_{1i} – ймовірність досягнення учнями ЕГ рівня і, P_{2i} – ймовірність досягнення учнями КГ рівня i. Перевіряємо нульову гіпотезу H_0: $P_{1i} = P_{2i}$ (ймовірність попадання учнів ЕГ і КГ в одну з чотирьох категорій рівні) для всіх С = 4 категорій за альтернативної гіпотези H_1: $P_{1i} \neq P_{2i}$ хоча б для однієї з С = 4 категорій.

Для обчислення емпіричного значення **Т** критерію χ^2 для статистичних даних, одержаних за результатами тестування і письмової роботи, застосовано комп'ютерну програму „Статистика в педагогіці". Вводимо дані:

1. За результатами тестування: $Q_{11} = 15$, $Q_{12} = 92$, $Q_{13} = 79$, $Q_{14} = 22$;

   $Q_{21} = 19$, $Q_{22} = 105$, $Q_{23} = 75$, $Q_{24} = 16$.

2. За результатами виконання письмової роботи:

   $Q_{11} = 24$, $Q_{12} = 99$, $Q_{13} = 79$, $Q_{14} = 13$;

   $Q_{21} = 19$, $Q_{22} = 24$, $Q_{23} = 83$, $Q_{24} = 12$.

Отримали: $\mathbf{T_1}$ = 2,2645, $\mathbf{T_2}$ = 0,7341. Критичне значення $\mathbf{T_{критич}}$ = 7,815 для числа степенів вільності ν = C – 1 = 3 і α = 0,05. Оскільки емпіричні значення критерію менші за критичне, то можна стверджувати, що *навчальні досягнення з геометрії учнів контрольної й експериментальної груп на початку формувального експерименту збігаються на рівні значущості 0,05 за статистичним критерієм* χ^2.

Для організації навчального процесу в експериментальних класах було розроблено дидактичне і методичне забезпечення, яке охоплювало:

1. Системи диференційованих вправ, серед яких – усні вправи, вправи за готовими малюнками, математичні диктанти, практичні роботи.
2. Електронні засоби навчального призначення (ЕЗНП) [14], [35], [36], [37], GRAN-2D.
3. Методичні рекомендації для вчителів щодо застосування дидактичних матеріалів і ЕЗНП.
4. Розробки уроків із застосуванням вправ з ЕЗНП і вправ із застосуванням ЕЗНП.
5. Письмові роботи для вимірювання рівня навчальних досягнень в експериментальних і контрольних групах.

В експериментальних класах під час пояснення нового матеріалу активно застосовувалася електронна наочність: зображення геометричних фігур, анімації дій з геометричними фігурами (побудова, добудова, трансформація, виділення кольором елементів або частин фігур і т. ін.); динамічні електронні моделі; узагальнювальні схеми, таблиці. В такий спосіб учні експериментальної групи, на відміну від учнів контрольної групи, мали можливість спостерігати властивості геометричних об'єктів завдяки варіації їх неістотних ознак за умови збереження істотних, процеси виконання конструктивних дій. Після вивчення теорії виконувалася практична робота за розробленим алгоритмом. З-поміж тренувальних вправ значну частину становили задачі за готовими малюнками (у тому числі за електронними динамічними моделями). Під час розв'язування задач акцентувалася увага учнів на визначенні типу задачі і відповідному алгоритмі розв'язування. Домашні завдання обов'язково містили вправи на побудову або зображення геометричних фігур.

Одним із недоліків запропонованої нами методики у першому варіанті була недостатня робота над формуванням математичної мови учнів, аргументуванням логічних кроків обґрунтувань. Цей недолік ми усунули шляхом доповнення експериментальної системи усними вправами і вправами на обґрунтування кроків доведення.

Контрольні зрізи знань учнів експериментальних і контрольних класів проводилися після вивчення тем: „Геометричні побудови” у 7 класі, „Подібні трикутники” у 8 класі і „Площі фігур” у 9 класі за допомогою тематичних письмових робіт, тексти яких представлено у додатку Л дисертаційного дослідження.

За всі правильно виконані завдання кожного з варіантів контрольних робіт учень отримував 12 балів. Друге і третє завдання оцінювалися від 1 до 2 балів, четверте – від 1 до 3 балів, а п’яте – від 1 до 4 балів в залежності від стану їх розв’язання (наявність помилок логічного чи обчислювального характеру, наявність логічних кроків обґрунтування, виконання побудов). Розподіл балів за завданнями наведено в таблиці 2.7:

Таблиця 2.7.

Розподіл балів за виконані учнями, завдання контрольної роботи

Завдання	1	2	3	4	5
бали	1	2	2	3	4

Таблиця 2.8.

Розподіл балів, отриманих учнями, за рівнями навчальних досягнень

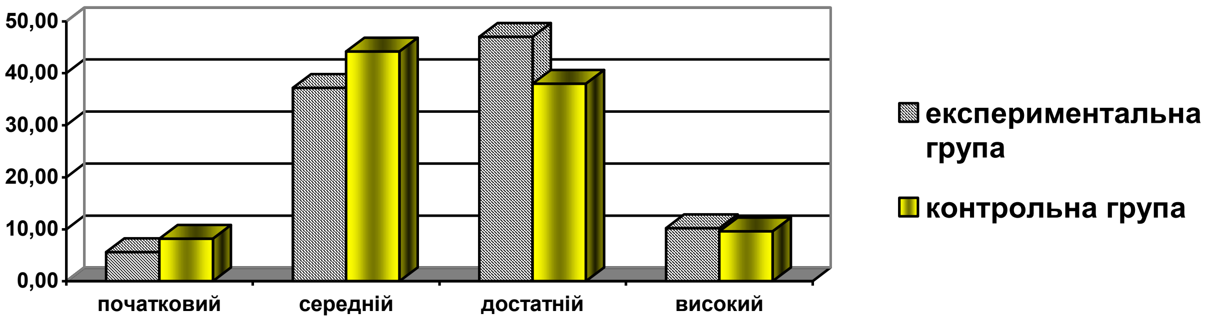
Рівні навчальних досягнень	початковий	середній	достатній	високий
бали	1-3	4-5	6-8	9-12

Результати виконання контрольних робіт учнями контрольних й експериментальних класів визначалися кількісно і у відсотках. Описову статистику представлено у вигляді гістограм.

Таблиця 2.9.

Розподіл учнів експериментальної і контрольної груп за рівнями навчальних досягнень у результаті виконання письмової роботи з теми „Геометричні побудови"

рівні навчальних досягнень	Експериментальна група		Контрольна група	
	учнів	(%)	учнів	(%)
початковий	12	5,6	21	10,1
середній	80	37,2	98	47,1
достатній	101	47	72	34,6
високий	22	10,2	17	8,2
всього	215	100	208	100

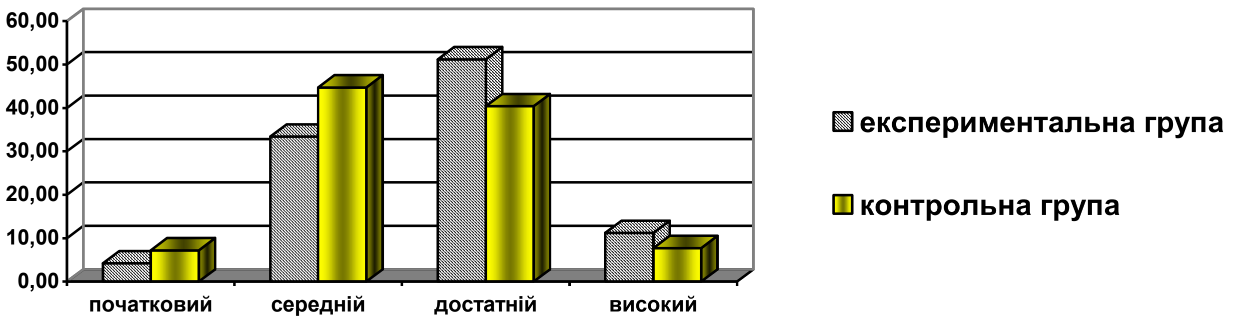


Мал. 2.74. Гістограми розподілу учнів експериментальної і контрольної груп за рівнями навчальних досягнень у результаті виконання письмової роботи з теми „Геометричні побудови" (7 клас)

Таблиця 2.10.

Розподіл учнів експериментальної і контрольної груп за рівнями навчальних досягнень у результаті виконання письмової роботи з теми „Подібні трикутники"

рівні навчальних досягнень	Експериментальна група		Контрольна група	
	учнів	(%)	учнів	(%)
початковий	9	4,2	15	7,2
середній	72	33,4	93	44,7
достатній	110	51,2	84	40,4
високий	24	11,2	16	7,7
всього	215	100	208	100

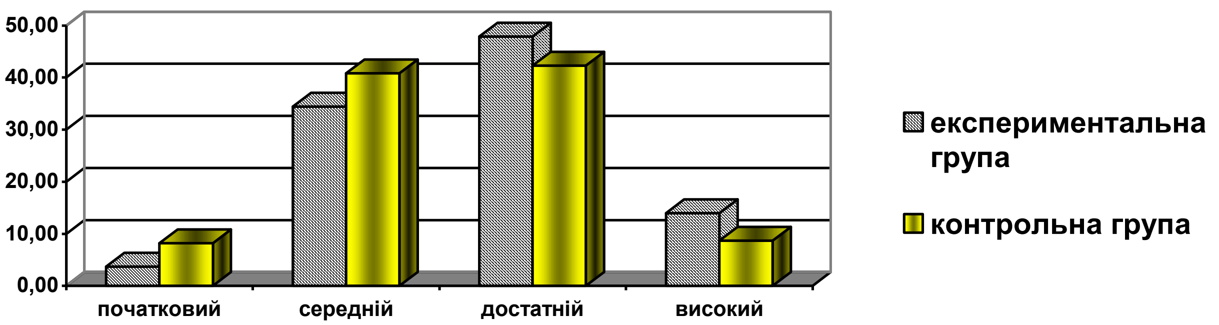


Мал. 2.75. Гістограми розподілу учнів експериментальної і контрольної груп за рівнями навчальних досягнень у результаті виконання письмової роботи з теми „Подібні трикутники” (8 клас)

Таблиця 2.11.

Розподіл учнів експериментальної і контрольної груп за рівнями навчальних досягнень у результаті виконання письмової роботи з теми „Площі фігур”

рівні навчальних досягнень	Експериментальна група		Контрольна група	
	учнів	(%)	учнів	(%)
початковий	8	3,7	17	8,2
середній	74	34,4	85	40,8
достатній	103	47,9	88	42,3
високий	30	14,0	18	8,7
всього	215	100	208	100



Мал. 2.76. Гістограми розподілу учнів експериментальної і контрольної груп за рівнями навчальних досягнень у результаті виконання письмової роботи з теми „Площі фігур” (9 клас)

Аналізуючи результати контрольних робіт, ми порівнювали їх з результатами тестування та письмової роботи учнів на початку експерименту. Зіставлення гістограм навчальних результатів учнів обох груп у процесі експерименту і до його початку засвідчило різницю рівнів навчальних досягнень на користь експериментальної групи.

Обґрунтовуємо наш висновок за допомогою статистичного критерію χ^2. Для обчислення емпіричного значення **Т** критерію χ^2 для статистичних даних, отриманих за результатами письмових робіт, застосовано комп'ютерну програму „Статистика в педагогіці”. Вводимо дані:

1. За результатами письмової роботи з теми „Геометричні побудови” (7 клас):

$$Q_{11} = 21,\ Q_{12} = 98,\ Q_{13} = 72,\ Q_{14} = 17;$$
$$Q_{21} = 12,\ Q_{22} = 80,\ Q_{23} = 101,\ Q_{24} = 22.$$

2. За результатами виконання письмової роботи з теми „Подібні трикутники” (8 клас):

$$Q_{11} = 15,\ Q_{12} = 93,\ Q_{13} = 84,\ Q_{14} = 16;$$
$$Q_{21} = 9,\ Q_{22} = 72,\ Q_{23} = 110,\ Q_{24} = 24.$$

3. За результатами виконання письмової роботи з теми „Площі фігур” (9 клас)

$$Q_{11} = 8,\ Q_{12} = 74,\ Q_{13} = 103,\ Q_{14} = 30;$$
$$Q_{21} = 17,\ Q_{22} = 85,\ Q_{23} = 88,\ Q_{24} = 18.$$

Отримали: $\mathbf{T_1} = 9{,}6639$, $\mathbf{T_2} = 9{,}1439$, $\mathbf{T_3} = 8{,}0654$. Критичне значення $\mathbf{T_{критич}} = 7{,}815$ для числа степенів вільності $\nu = C - 1 = 3$ і $\alpha = 0{,}05$. Оскільки емпіричні значення критерію вищі критичного, то можна стверджувати, що *достовірність відмінностей навчальних досягнень учнів контрольної й експериментальної груп за результатами письмових робіт дорівнює 1 - α = 95 (%).*

Наприкінці вивчення систематичного курсу геометрії основної школи дев'ятикласникам контрольної й експериментальної груп було запропоновано тест, розроблений за згаданою вище методикою [1]. Специфікація тесту визначалася за вимогами програми з геометрії для 7 – 9 класів основної школи [130]. Кожне тестове завдання добиралося за вимогами коректності, лаконічності, розподільчої здатності з урахуванням міри його складності. Для створення тесту було розроблено 18 завдань у двох варіантах, які випробовувалися в групі з 30 учнів 9 класу (наприкінці навчального року). Завдання були надруковані на папері (у вигляді тестових зошитів трьох варіантів) для кожного учня.

Тест формувався на основі визначення потенціалу складності завдань, дисперсії балів, коефіцієнта кореляції балів за завдання з сумарними балами за весь тест. До тесту увійшло 12 завдань у двох варіантах. Надійність тесту визначалася за показником коефіцієнта кореляції Пірсона між двома сукупностями сумарних балів результатів виконання завдань тесту з парними і непарними номерами ($r_{1/2}$ = 0,79). Тест має хорошу надійність. Валідність тесту визначалася шляхом порівняння змісту тестових завдань з програмою з геометрії для 7 – 9 класів середньої загальноосвітньої школи. Зміст тесту подано в додатку М дисертаційного дослідження.

Кожне з перших шести завдань тесту оцінювалося в один бал, 7, 8 і 9 завдання – у 2 бали, 10,11 і 12 завдання – у 3 бали. Максимальна кількість балів, отриманих за виконання тесту – 21.

Таблиця 2.12.

Розподіл балів, отриманих учнями, за рівнями навчальних досягнень

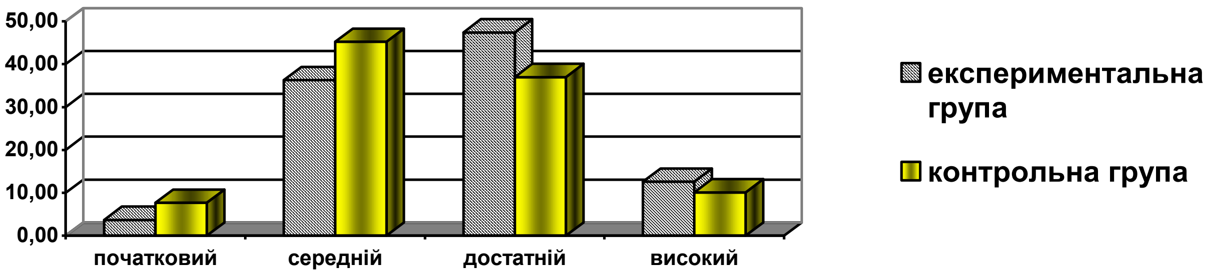
Рівні навч дос.	початковий	середній	достатній	високий
Сумарний бал	1 - 3	4 - 8	9 - 15	16 - 21

Результати тестування учнів контрольних і експериментальних класів подано у вигляді сумарних даних за шкалою в чотири градації і гістограм.

Таблиця 2.13.

Розподіл учнів експериментальної і контрольної груп за рівнями навчальних досягнень у результаті виконання тесту за курс геометрії 7 – 9 класів.

рівні навчальних досягнень	Експериментальна група		Контрольна група	
	учнів	(%)	учнів	(%)
початковий	8	3,7	16	7,7
середній	78	36,3	94	45,2
достатній	102	47,4	77	37,0
високий	27	12,6	21	10,1
всього	215	100	208	100



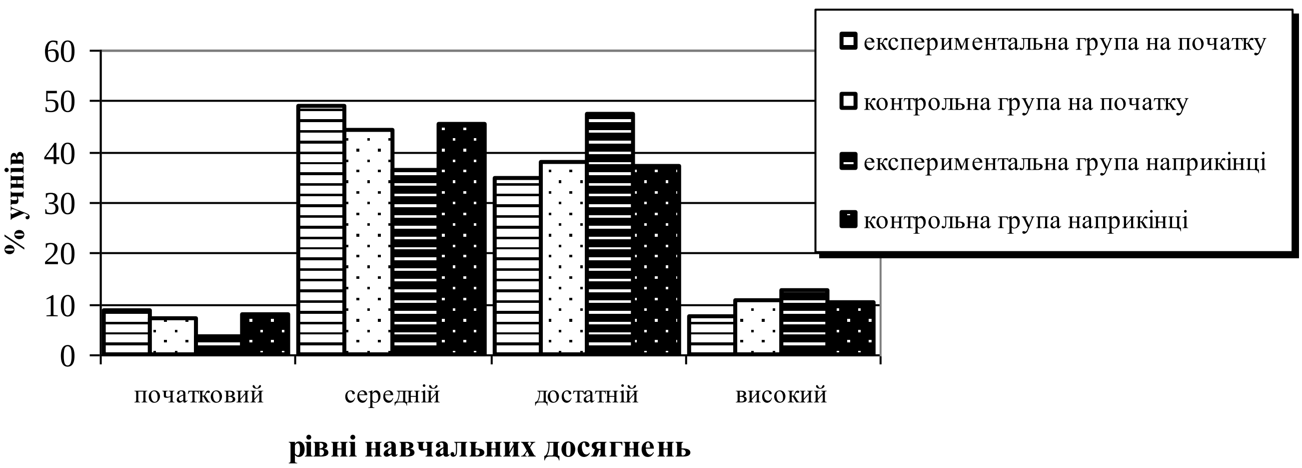
Мал. 2.77. Гістограми розподілу учнів експериментальної і контрольної груп за рівнями навчальних досягнень у результаті виконання тесту за курс геометрії 7 – 9 класів.

Порівняємо рівні навчальних досягнень учнів контрольних і експериментальних класів з геометрії до і після проведення формувального експерименту.

Таблиця 2.14.

Порівняння навчальних досягнень учнів контрольних і експериментальних класів з геометрії до і після проведення експерименту

Рівні навчальних досягнень	Контрольна група до початку експерименту (%)	Експериментальна група до початку експерименту (%)	Контрольна група після проведення експерименту (%)	Експериментальна група після проведення експерименту (%)
початковий	7,2	8,8	7,7	3,7
середній	44,2	48,8	45,2	36,3
достатній	38	34,9	37,0	47,4
високий	10,6	7,5	10,1	12,6
всього	100	100	100	100



Мал. 2.78. Динаміка навчальних досягнень учнів контрольних і експериментальних класів

Графіки рівнів навчальних досягнень учнів контрольних й експериментальних класів до і після початку експерименту свідчать про те, що для учнів контрольних класів така характеристика залишилася практично незмінною, тоді як в експериментальних класах показники навчальних досягнень змінилися на користь достатнього і високого рівнів.

Обґрунтовуємо наш висновок за допомогою статистичного критерію χ^2. До чотирирівневої області сумарних даних комп'ютерної програми „Статистика в педагогіці" вносимо кількісні дані для контрольних й експериментальних класів до і після проведення формувального експерименту. А саме:

1. За результатами тестування до початку експерименту:

$Q_{11} = 15$, $Q_{12} = 92$, $Q_{13} = 79$, $Q_{14} = 22$;

$Q_{21} = 19$, $Q_{22} = 105$, $Q_{23} = 75$, $Q_{24} = 16$.

2. За результатами тестування після проведення експерименту:

$Q_{11} = 16$, $Q_{12} = 94$, $Q_{13} = 77$, $Q_{14} = 21$;

$Q_{21} = 8$, $Q_{22} = 78$, $Q_{23} = 102$, $Q_{24} = 27$.

Здобули такі результати:

1. Для достовірності відмінностей навчальних досягнень учнів контрольних й експериментальних класів після проведення формувального експерименту: $\mathbf{T_{емп}}$ = 8,2831. Критичне значення $\mathbf{T_{критич}}$ = 7,815 для числа степенів вільності $\nu = C - 1 = 3$ і $\alpha = 0,05$. Оскільки емпіричні значення критерію вищі критичного, то можна стверджувати, що *достовірність відмінностей навчальних досягнень учнів контрольної й експериментальної груп після проведення формувального експерименту дорівнює 1 -* α *= 95 (%).*

2. Для достовірності відмінностей навчальних досягнень учнів експериментальних класів до і після проведення формувального експерименту: $\mathbf{T_{емп}}$ = 15,3977. Критичне значення $\mathbf{T_{критич}}$ = 7,815 для числа степенів вільності $\nu = C - 1 = 3$ і $\alpha = 0,05$. Емпіричні значення критерію вищі критичного, тому можна стверджувати, що *достовірність відмінностей навчальних досягнень учнів контрольної й експериментальної груп після проведення формувального експерименту дорівнює 1 -* α *= 95 (%).*

Отже, вихідні значення (до початку формувального експерименту) рівнів навчальних досягнень з геометрії учнів експериментальних і контрольних класів збігаються, а кінцеві (після проведення формувального експерименту) – істотно відрізняються. Це означає, що навчання учнів основної школи геометрії із застосуванням системи вправ, розробленої за нашою методикою, сприяє статистично значущому (на рівні 95% за критерієм χ^2) підвищенню результатів навчальних досягнень (відкидається нульова і приймається альтернативна гіпотеза: $P_{1i} \neq P_{2i}$ хоча б для однієї з С = 4 категорій.). Екранні копії аналізу результатів експерименту за допомогою комп'ютерної програми „Статистика в педагогіці" подано у додатку Н дисертаційного дослідження.

ВИСНОВКИ ДО ІІ РОЗДІЛУ

1. Цілі та програмні вимоги до результатів навчання учнів геометрії в основній школі визначають зміст системи вправ, що складається з кількох підсистем, кожну з яких побудовано за визначеними нами принципами. Виділяються підсистеми вправ для: засвоєння геометричних понять; формування вмінь доводити геометричні твердження; вироблення вмінь обчислювати геометричні величини; засвоєння конструктивних умінь.

2. Структура системи вправ з геометрії в основній школі обумовлюється реалізацією принципу диференційованої реалізованості її добору і є чотирирівневою відповідно до рівнів програмових вимог засвоєння учнями знань і вироблення вмінь.

3. Процедура добору системи вправ з геометрії в основній школі передбачає: визначення рівневих вимог до результатів засвоєння поняття, формування вміння та їх застосування; з'ясування операційного складу вмінь на кожному з етапів засвоєння знань; визначення змісту і типів вправ на різних рівнях кожної із підсистем; добір еталонних задач і доповнення системи однотипними вправами.

4. Система вправ з геометрії в основній школі передбачає реалізацію активних методів навчання. За нашою методикою практичні роботи з геометрії пропонуються учням на етапі актуалізації опорних знань і вмінь, для ілюстрування теоретичних положень, з метою узагальнення, систематизації і застосування знань.

Виконання учнями вправ з використанням розроблених нами педагогічних програмних засобів, дослідження властивостей і побудова геометричних фігур за допомогою GRAN-2D сприяє ефективному засвоєнню понять, способів діяльності та вивченню властивостей геометричних фігур. Корисною є візуалізація граничних наближень у формуванні понять. Завдяки динамічним моделям можливе різне перетворення геометричних фігур (переміщення, зміна форми і розмірів, розташування на площині), варіювання неістотних ознаки понять зі збереженням постійними істотних. Це сприяє розвиткові образного мислення, творчих та евристичних його складових. Динамічна наочність дає змогу складати і розв’язувати геометричні задачі за готовими малюнками, варіювати їх умови і вимоги.

5. Введення вправ за готовими малюнками до системи геометричних вправ основної школи створює можливості раціонально використовувати навчальний час, зосереджуватись на реалізації конкретної мети навчання. Розроблені нами вимоги до складання і використання у навчанні геометрії в основній школі вправ за готовими малюнками дають можливість учителям варіювати функціональне призначення геометричних вправ.

6. Кількісний і якісний аналізи результатів дослідження підтверджують гіпотезу про те, що розроблена методика добору системи вправ з геометрії в основній школі забезпечує вищі результати навчальних досягнень учнів порівняно з традиційною.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

Реалізація цілей сучасної шкільної математичної освіти, спрямованих на формування готовності школярів до життя, їхнього подальшого особистого розвитку шляхом формування відповідних знань, умінь і навичок, потребує вдосконалення методичного забезпечення процесу навчання математики, зокрема геометрії, в основній школі. Значною мірою це стосується удосконалення існуючих систем вправ та методики їх добору.

Відповідно до поставленої мети і визначених завдань у ході дослідження здобуто такі результати: з'ясовано стан розробки проблеми у науково-методичній літературі і в практиці навчання геометрії; визначено і теоретично обґрунтовано принципи добору системи вправ з геометрії в основній школі та методичні вимоги до їх реалізації; розроблено систему вправ на основі визначених принципів, методику організації навчальної діяльності учнів засобом цієї системи; експериментально перевірено ефективність методичних засад побудови системи вправ з геометрії в основній школі і розроблених підсистем геометричних вправ різного дидактичного призначення.

Здобуті результати дослідження дають підстави зробити такі **висновки**:

1. Результати констатувального експерименту засвідчили недостатню сформованість умінь школярів застосовувати набуті знання і навички з геометрії на практиці, логічного мислення, просторової уяви. Однією з причин такого стану є недоліки традиційної методики навчання геометрії, спрямованої здебільшого на засвоєння учнями сукупності знань а не формування і розвитку їхніх особистісних якостей, предметних компетентностей. Аналіз систем вправ у діючих підручниках з геометрії для учнів 7 – 9 класів свідчить про існування різних методичних підходів до їх конструювання щодо реалізації етапів навчальної діяльності учнів, методів навчання, принципів відбору геометричного змісту. Укладання збірників задач і вправ з геометрії для учнів, посібників для вчителів має переважно прагматичний характер, часто зумовлений суб'єктивними підходами, недостатнім психолого-педагогічним обґрунтуванням. Наявні дослідження проблеми побудови системи

навчальних вправ стосуються вирішення окремих дидактичних і методичних питань навчання математики. Більшість із них не відповідають вимогам нового стандарту математичної освіти, або виконано на матеріалі математики, алгебри, стереометрії. Встановлено, що для організації навчальної діяльності учнів 7 – 9 класів з геометрії відповідну систему вправ потрібно будувати з урахуванням сучасних цілей та вимог до навчальних досягнень школярів, дидактичних принципів навчання, особливостей навчальної пізнавальної діяльності учнів підліткового віку, сучасних засобів навчання.

2. Поняття „вправа” і „задача” об’єднуються поняттям „завдання”. Геометричними вправами називаємо завдання, що пропонуються учням для формування геометричних знань, умінь і навичок. З’ясовано, що серед геометричних задач є задачі-вправи; задачі, які не є вправами; вправи, які не є задачами. Уточнення змісту, структури, визначення класифікацій навчальних вправ з геометрії допомагає окреслити межі пошуку елементів досліджуваної системи, встановити місце вправ у системі в залежності від конкретних умов навчання. Характеристикою, що визначає місце геометричної вправи в системі, є також індивідуальний характер діяльності учня для пошуку зв’язків і відношень між відомими і невідомими її елементами.

3. Вправи виконують різноманітні функції в процесі навчання геометрії в основній школі і є одним із засобів вирішення трьох взаємопов’язаних освітніх завдань: навчальних, розвивальних і виховних. Доцільно забезпечити реалізацію пропедевтичних (реалізація елементів фузіонізму, підготовка до вивчення властивостей просторових фігур, нових способів діяльності і ін.) і діагностувально-прогностичних (вироблення предметних, міжпредметних, рефлексивних способів діяльності як складових компетентностей учнів) функцій геометричних вправ. Провідне значення однієї чи кількох функцій вправи має динамічний характер. Тому кожна окрема вправа або добірка вправ має бути спрямована на реалізацію певної мети навчання.

4. Система вправ з геометрії в основній школі є цілісною сукупністю взаємопов’язаних компонентів (вправ), об’єднаних метою досягнення результатів

навчання. У процесі дослідження встановлено, що добір і впорядкування системи вправ з геометрії в основній школі має відповідати визначеним принципам: повноти, науковості, доступності, прикладної спрямованості; наочності, систематичності і послідовності, диференційованої реалізованості, наступності, варіативності, інтегрованості. Розроблені методичні вимоги реалізації цих принципів є ознаками, наявність і врахування яких створює передумови для ефективної організації навчального процесу з геометрії в основній школі засобом побудованої системи вправ.

5. Зміст системи вправ з геометрії в основній школі визначається цілями і програмними вимогами до навчальних досягнень учнів. Доцільно виділяти підсистеми вправ для: засвоєння геометричних понять; формування вмінь доводити геометричні твердження; вироблення вмінь обчислювати геометричні величини; засвоєння конструктивних умінь. Структура системи вправ (за принципом диференційованої реалізованості її добору) має чотири рівні. Процедура добору вправ передбачає: формулювання рівневих вимог до результатів засвоєння понять, формування вмінь та їх застосування; з'ясування операційного складу вмінь на кожному з етапів засвоєння знань; визначення змісту і типів вправ на різних рівнях кожної з підсистем; добір еталонних задач і доповнення системи однотипними вправами.

6. Підлітковий вік характеризується значним розвитком пізнавальних процесів. Система вправ з геометрії в основній школі передбачає організацію навчальної діяльності, у процесі якої формування абстрактного мислення учнів відбувається внаслідок активізації їхнього наочно-образного мислення. Експериментальне навчання показало, що виконання учнями практичних робіт з геометрії, вправ з використанням електронних засобів навчального призначення сприяє ефективному засвоєнню понять, способів діяльності, вивченню і дослідженню властивостей геометричних фігур. Включення вправ за готовими малюнками до системи геометричних вправ сприяє раціональному використанню навчального часу, реалізації конкретної мети навчання. Розроблені методичні рекомендації до складання і використання у навчанні геометрії в основній школі вправ за готовими

малюнками дають можливість учителям варіювати функціональне призначення геометричних вправ.

6. Експериментально здобуті результати дослідження підтверджують достовірність гіпотези про те, що пропонована методика добору системи вправ з геометрії в основній школі є ефективною у забезпеченні навчальних досягнень учнів порівняно з традиційною.

7. Результати проведеного дослідження слугували основою добору автором системи вправ у підручниках, посібниках, електронних засобах навчального призначення. Вони можуть також використовуватись для вдосконалення й оцінки ефективності задачного матеріалу діючих шкільних підручників з геометрії в основній школі, методичних і навчальних посібників для вчителів та учнів.

8. Здобуті наукові результати дають можливість виділити перспективні напрями подальшого розв’язання досліджуваної проблеми, зокрема:

- розроблення інших дидактичних матеріалів на основі експериментально перевіреної методики побудови системи вправ з геометрії в основній школі;
- розроблення принципів добору систем вправ для вивчення інших математичних курсів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Аванесов В.С. Композиция тестовых заданий. Учебная книга / В.С. Аванесов. – [3-е изд., доп]. – М. : Центр тестирования, 2002. – 240 с.
2. Апостолова Г.В. Геометрия: Підручник для 7-го кл. загальноосвіт. навч. закл. – К.: Генеза, 2004. – 216 с.
3. Апостолова Г.В. Геометрия: Підручник для 8-го кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г.В. Апостолова. [Упорядкування завдань: О.П. Вашуленко, О.С.Карликова] – К.: Генеза, 2005. – 256 с.
4. Апостолова Г.В. Геометрия: Підручник для 9-го кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г.В. Апостолова [Упорядкування завдань: О.І.Баришнікова, О.П. Вашуленко, О.С.Карликова] – К.: Генеза, 2006. – 256 с.
5. Апостолова Г. В. Геометрія в опорних схемах і малюнках. Робочий зошит учня 7 класу загальноос. навч. зал. / Г.В. Апостолова – К.: Генеза, 2005. – 48 с.
6. Астряб О.М. Наочна геометрія в IV – V класах: Методичний посібник. – К.: Рад. шк.., 1953. – 120с.
7. Астряб О.М. Викладання геометрії в середній школі. Планіметрія. – К., 1953. – 220 с.
8. Бабанский Ю.К. Оптимизация процесса обучения. – М.: Педагогіка, 1989. – 190 с.
9. Балл Г.А. О Психологическом содержании понятия задача // Вопросы психологии. – 1970. – № 6. – С. 75-85.
10. Балл Г.А. Теория учебных задач: Психолого-педагогический аспект. – М.: Педагогика, 1990. – 184 с.
11. Бевз В.Г. Методические основы построения системы стереометрических упражнений: дис … канд. пед. наук: 13.00.02./ Бевз Валентина Григорівна – Киев, 1989. – 197 с.
12. Бевз Г.П. Геометрія: Підруч. для 7 – 9 кл загальноосвіт. навч. закл. / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова. – Вид 2-ге, змінене і доповнене. – К.: Вежа, 2007. – 309 с.
13. Бевз Г.П. Геометрія: Підруч. для 8 кл загальноосвіт. навч. закл. / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова . – К.: Вежа, 2007. – 255 с.

14. Бевз Г.П. Методика викладання математики: Навч. посіб. - К.: Вища шк., 1989. - 367.

15. Бевз Г.П. Фузіонізм у викладання геометрії / Г.П. Бевз // Математика в школі. – 2000. – № 1. – С. 10 – 13.

16. Бібліотека електронних наочностей „Геометрія 7 – 9 кл”: електронний засіб навчального призначення для 8 класу загальноосвітніх шкіл /Автори предметного наповнення: М.І. Бурда, О.П.Вашуленко – К.: ІПІТ. 2008. – 111МБ.

17. Бондар В.І. Дидактика. – К., Либідь, 2005. – 264 с.

18. Богоявленський Д.Н., Менчинская Н. А. Психология усвоения знаний в школе. – М.: Узд-во АПН РСФСР, 1959. – 347 с.

19. Брадис В.М. Методика преподавания математики в средней школе. – М.: Учпедгиз, 1954. – 504 с.

20. Бугайов О.І. Диференціація навчання у сучасній середній школі / О.І. Бугайов // Рад. шк. – 1991. - № 8. – С. 7 – 16.

21. Бурда М.І. Методичні основи диференційованого формування геометричних умінь учнів основної школи: дис. ... докт. пед. наук:13.00.02. / Бурда Михайло Іванович – К., 1994. – 347 с.

22. Бурда М.И. Формирование умений доказывать геометрические утверждения у учащихся 6-8 классов: дис. … канд. пед. наук 13.00.02. / Бурда Михайло Іванович – К., 1980. – 191 с.

23. Бурда М.І. Принципи відбору змісту шкільної математичної освіти / М.І. Бурда //Педагогіка і психологія. – 1996. - № 1. – С. 14 – 16.

24. Бурда М.І. Вивчення геометрії в 7 класі. – К.: Радянська школа, 1984.

25. Бурда М.І. Розв’язування задач на побудову в 6 – 8 класах: Метод. посібник. – К.: Рад. шк., 1986. – 112 с.

26. Бурда М.І. Геометрія: Навч. посібник для 8-9 кл. шк. з поглиб. вивченням математики./ М.І. Бурда, Л.М. Савченко – К.: Освіта, 1998. – 240 с.

27. Бурда М.І. Геометрія: Підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М.І. Бурда, Н.А. Тарасенкова – К. : Зодіак- ЕКО, 2007. – 208 с.

28. Бурда М.І. Геометрія: Підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М.І. Бурда,

Н.А.Тарасенкова – К. : Зодіак- ЕКО, 2008. – 240 с.

29. Бурда М.І. Геометрія: Підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М. І. Бурда, Н. А.Тарасенкова – К. : Зодіак- ЕКО, 2009. – 249 с.

30. Вашуленко О.П. Геометричні вправи для 7 – 8 класів загальноосвітньої школи. – К.: КІМО, 2003. – 108 с.

31. Вашуленко О.П. Дидактичні функції вправ за готовими малюнками / О.П. Вашуленко // Математика в школі. – 2000. – № 6.- С. 29-33.

32. Вашуленко О.П. Задачі за готовими малюнками на уроках геометрії / О.П. Вашуленко // Математика в школі. – 1999. – № 1. – С. 39 – 41.

33. Выготский Л.С. Педагогическая психология / под ред. В. В. Давыдова. – М.: Педагогика, 1991. – 480 с. – 480 с.

34. Виленкин Н.Я., Абайдулин С.К., Таварткиладзе Р.К. Определения в школьном курсе математики и методика работы над ними. / Н.Я. Виленкин, С.К. Абайдулин, Р.К. Таварткиладзе // Математика в школе. – 1984. - №4. – С. 43 – 47.

35. Владимирский Г.А., Кабанова-Меллер Е.М. О методах использования чертежа в преподавании геометрии / Г.А. Владимирский, Е.М. Кабанова-Меллер // Математика в школе. – 1946. – № 4. – С. 39 – 41.

36. Выготский Л.С. Педагогическая психология / Под ред. В. В. Давыдова. – М.: Педагогика, 1991. – 480 с.

37. Геометрія: електронний засіб навчального призначення для 7 класу загальноосвітніх шкіл / Автори предметного наповнення: М.І. Бурда, О.П.Вашуленко – К.: ІПІТ. 2007. – 103МБ.

38. Геометрія: електронний засіб навчального призначення для 8 класу загальноосвітніх шкіл / Автори предметного наповнення: М.І. Бурда, О.П.Вашуленко – К.: ІПІТ. 2008. – 107МБ.

39. Геометрія: електронний засіб навчального призначення для 9 класу загальноосвітніх шкіл / Автори предметного наповнення: М.І. Бурда, О.П.Вашуленко – К.: ІПІТ. 2009. – 109МБ.

40. Геометрія: Підручник і збірник задач для 8 і 9 класів / Під ред.В. М. Кириченка. – К.: Рад. школа, 1968. – 100 с.

41. Геометрія 7 – 11. Планіметрія. Стереометрія. Збірник задач / Гайштут О. Г. – К.: КІМО, 1999. – 144 с.

42. Гильманов Р.А. Проблемы дидактометрии трудности учебных заданий. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1989. – 180 с.

43. Глейзер Г.Д. Методы формирования и развития пространственных представлений взрослых в процессе обучения геометрии в школе: Автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.02. – М., 1984.- 27 с.

44. Глыва Г.Н. Формирование обобщенных умений решать геометрические задачи у учащихся 6-8 классов: дис. … кандидата пед. наук: 13.00.02. – К., 1988. – 179 с.

45. Голодюк Л.С. Рівнева диференціація на уроках геометрії: Методичні рекомендації для вчителів математики. – Кіровоград, 2003. – 72 с.

46. Грабарь М.И., Краснянская К.А. Применение математической статистики в педагогических исследованиях. Непараметрические методы. / М.И. Грабарь, К.А. Краснянская– М.: Педагогика, 1977. – 136 с.

47. Груденов Я.И. Психолого-дидактические основы методики обучения математики. – М.: Педагогика, 1987. – 100 с.

48. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1990. – 224 с.

49. Грузін О.І. Геометрія. 9 клас: Збірник самостійних робіт для поточного оцінювання навчальних досягнень: Дидактичні матеріали. – Харків: Світ дитинства, 2002. – 44 с.

50. Гурова Л.Л. Психологический анализ решения задач. – Воронеж: изд. Воронежского университета, 1976. – 327 с.

51. Гусев В.А. Психолого-педагогические основы обучения математике. – М.: ООО «Издательство «Вербум-М», ООО «Издательский центр «Академия», 2003 – 432 с.

52. Давыдов В.В. Виды обобщений в обучении. – М.: Педагогика, 1972. – 423 с.

53. Давыдов В.В. Проблемы развивающего обучения. – М.: Педагогика, 1986. – 240 с.

54. Данилов М.А. Процесс обучения в советской школе. – М.: Учпедгиз, 1960. – 299 с.

55. Данилова Е.Ф. Как помочь учащимся находить путь к решению геометрических задач. – М.: Учпедгиз, 1961. – 144 с.

56. Денисова М.И. Логическая структура обучающей системы задач в курсе алгебры средней школы: Автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.02. – М., 1970. –24 с.

57. Державна національна програма "Освіта" ("Україна XXI століття").- К.: Райдуга. –1994. –64 с.

58. Державний стандарт базової і повної середньої освіти: Освіта.ua. – Режим доступу: http://osvita.ua/legislation/Ser_osv/2452.

59. Дрозд В.Л. Обучение учащихся логической организации математического материала в курсе геометрии VI – VII классов: Автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.02. – К., 1980. – 24 с.

60. Дубинчук О.С. Про культуру математичних записів у восьмирічній школі. – К., Рад. шк., 1961. – 114 с.

61. Жаров В.А. Основные принципы построения задачника по геометрии. – Ярославский педагогический институт, 1960. – 188 с.

62. Жалдак М.І., Вітюк О.В. Комп'ютер на уроках геометрії: Посібник для вчителів. – К.: РННЦ „ДІНІТ", 2004. – 168 с.

63. Збірник завдань для державної атестації з математики. 9 клас. / М. І. Бурда, О. П. Вашуленко, Н.С. Прокопенко – Харків: Гімназія, 2010. – 256 с.

64. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики. 11 клас: У 2 кн. Кн. 1 / М.І. Бурда, О.Я. Біляніна, О.П. Вашуленко та ін. – Х.: Гімназія, 2008. – 224 с.

65. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики. 11 клас: У 2 кн. Кн. 2 / М.І. Бурда, О.Я. Біляніна, О. П. Вашуленко та ін.. – Х.: Гімназія, 2008. – 224 с.

66. Зыкова В.И. Очерки психологии усвоения начальных геометрических знаний. – М.: Учпедгиз, 1955. – 164 с.

67. Зыкова В.И. Формирование практических умений на уроках геометрии. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1963. – 200 с.

68. Игнатенко Н.Я. Формирование у учащихся 7-9 классов общих геометрических умений: Автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02. – К., 1992. – 19 с.

69. Иржавцева В.П., Федченко Л.Я. Систематизация и обобщение знаний учащихся

в процессе изучения математики. – К.: Радянська школа, 1988. – 207 с.

70. Істер О. С. Геометрія: Підручник для 7 кл. загалноосвіт. навч. закл. – К.: Освіта, 2007. – 159 с.

71. Іщенко Г. Коректуючі функції навчальних вправ / Г. Іщенко // Математика в школі. – 2001. – № 4. – С. 18-20.

72. Кабанова-Меллер Б.Н. Психология формирования знаний и навыков у школьников. Проблема приемов умственной деятельности. М.: Изд-во АПН РСФСР, 1962. – 376 с.

73. Кабанова-Меллер Е.Н. Учебная деятельность и развивающее обучение. – М.: Знание, 1981. – 96 с.

74. Кабанова-Меллер Е.Н. Формирование приёмов умственной деятельности и умственное развитие учащихся. – М.: Просвещение, 1968. – 288 с.

75. Калитки Н.М. Теория и практика при решении геометрических задач. – М.: Учпедгиз, 1953. – 48. с.

76. Калмыкова З.И. Психологические принципы развивающего обучения. – М.: Знание, 1979. – 48 с.

77. Капіносов А. Посібник для рівневого навчання з геометрії. 7 клас. – Тернопіль: Підручники & Посібники, 2002. – ч.1. Навчальні завдання. – 302 с.

78. Каплунович И.Я., Петухова Т.А. Пять подструктур математического мышления: как их выявить и использовать в преподавании / И.Я. Каплунович, Т.А. Петухова // Математика в школе. – 1998. – № 5. – С. 45 – 48.

79. Карнацевич Л.С., Грузін О.І. Вивчення геометрії в 6 класі / Під ред. проф. І. Ф. Тесленка. – К.: Рад. школа, 1983. – 120 с.

80. Клименченко Д.В. Задачи и упражнения в школьном курсе геометрии как средство активизации мыслительной деятельности учащихся: Автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.02. – К., 1969. – 22 с.

81. Коваленко В.П. Дидактичні матеріали з геометрії для 7 класу: Метод. посіб. – К.: Пед. преса, 1999. – 36 с.

82. Коваленко В.П., та ін. Геометрія. Початкові відомості зі стереометрії: 9 кл. / В.П. Коваленко, Л.В. Мальчевська, В.М. Михайленко – К.: КІМО, 2002. – 48 с.

83. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике. ч.1 – М.: Просвещение, 1977. – 110 с.

84. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике. ч.2 – М.: Просвещение, 1977. – 144 с.

85. Колягин Ю.М. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся средней школы: Автореф. дис. … докт. пед. наук: 13.00.02. – М., 1977. – 55 с.

86. Колягин Ю.М. и др. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика. / Ю.М. Колягин, В.А. Оганесян, В.Я. Саннинский, Г.Н. Луканкин. – М.: Просвещение, 1980. – 368 с.

87. Колягин Ю.М. Методические проблемы применения задач в обучении математике // Преподавание алгебры и геометрии в школе / Из опыта работы. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1982. – С. 116 – 123.

88. Компетентнісний підхід у сучасній освіті: світовий досвід та українські перспективи: Бібліотека з освітньої політики / Під заг. ред. О. В. Овчарук. – К.: „К.І.С.", 2004. – 112 с.

89. Концепція математичної освіти 12-річної школи // Математика в школі. – 2002. - № 2. – С. 12-17.

90. Костюк Г.С. Навчально-виховний процес і психічний розвиток особистості. – К.: Радянська школа, 1989. – 608 с.

91. Костюк Г.С. Избранные психологические труды. – М: Педагогіка, 1988 – 304 с.

92. Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьников. – М.: Просвещение, 1968. – 431 с.

93. Ланков А.В. К истории развития передовых идей в русской методике математики. – М ., 1951. – 151 с.

94. Латышев В.А., Руководство к преподаванию арифметики. – СПБ., 1904. – 168 с.

95. Леонтьев А.Н. Проблемы развития психики. – 4-е изд. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – 584 с.

96. Леонтьев А.Н., Гальперин П.Я. Теория усвоения знаний и программированное обучение / А.Н. Леонтьев, П.Я. Гальперин // Советская педагогика. – 1964. – № 10. –

С. 56 – 65.

97. Леонтьева М.Р., Суворова С.Б. Упражнения в обучении алгебры. – М.: Просвещение, 1985. – 127 с.

98. Лернер И.Я. Дидактические основы методов обучения. – М.: Педагогика, 1981. – 186 с.

99. Лоповок Л.М. Сборник задач по геометрии для 6-8 классов / Под. ред. И.Ф. Тесленко. – К.: Радянська школа, 1983. – 96 с.

100. Лоповок Л.М. З досвіду викладання математики в середній школі. – К.: Рад. школа, 1957. – 204 с.

101. Матюшкин А.М. Основные направления и проблемы исследования мышления и творчества // Методологические проблемы повышения эффективности психолого-педагогических исследований. – М., 1985. – С. 115 – 122.

102. Матюшкин А.М. Проблемные ситуации в мышлении и обучении. – М., 1972. – 208 с.

103. Машбиць Ю.І. Психологічні механізми навчання: теоретико-методологічні аспекти // Розвиток педагогічної і психологічної науки в Україні 1992-2002: Зб. наук. праць до 10-річчя АПН України. – Харків, 2002. – С. 469-481.

104. Махмутов М.И. Проблемное обучение. Основные вопросы теории. – М., 1975. – 368 с.

105. Менчинская Н.А. Проблемы учения и умственного развития школьника. – М.: Педагогика, 1989. – 220 с.

106. Методика обучения геометрии: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. Заведений / В.А. Гусев, В.В. Орлов, В.А. Панчишина и др.: под ред. В.А. Гусєва – М: Издательский центр „академія”, 2004. – 368 с.

107. Методика преподавания математики. / Под ред. С.Е. Ляпина. – М.: Учпедгиз 1955. – 483 с.

108. Мотова З.П. Методика формирования геометрических понятий с помощью системы обучающих задач: Автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.02. – М., 1975 – 23 с.

109. Нєшков К.И., Семушин А.Д. Функции задач в обучении / К.И. Нєшков, А.Д. Семушин // Математика в школе. – 1971. - № 3. – С. 4-7.

110. Новиков А.М. Как работать над диссертацией: Пособие для начинающего педагога-исследователя. – 3-е изд. – М.: Издательство «Эгвес», 1999. – 104 с.

111. Новиков Д.А. Статистические методы в педагогических исследованиях (типовые случаи). М.: МЗ – Пресс, 2004. – 67 с.

112. О совершенствовании методов обучения математике. Пособие для учителей. // Сб. статей. Сост. В. С. Крамор. – М., Просвещение, 1978. – 160 с.

113. Оганесян В.А. Принципы отбора основного содержания обучения математике в средней школе. – Ер.: Луис, 1984. – 215 с.

114. Оконь В. Введение в общую дидактику. – М., 1990. – 348с.

115. Оконь В. Основы проблемного обучения. - М.: Просвещение, 1968. – 208 с.

116. Оконь В. Процесс обучения. – М.: Учпедгиз, 1962. – 171 с.

117. Онищук В.А. Урок в современной школе: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1981. – 191 с.

118. Осинская В.Н. Формирование умственной культуры учащихся в процессе обучения математике. – К.: Радянська школа, 1989. – 120 с.

119. Пардала А. О системе задач для формирования пространственных представлений / А. Пардала // Математика в школе. – 1993. – № 5. – С. 14 – 17.

120. Педагогика: Учебное пособие для студентов пед. институтов / Под ред. Ю.К. Бабанского. – М.: Просвещение, 1983. – 608 с.

121. Педагогика: педагогические теории, системы, технологии. //Под ред. С. А. Смирнова. М , 1999. – 340 с.

122. Підручна М.В., Янченко Г. М. Диференційовані дидактичні матеріали з геометрії для 9 класу./ М.В. Підручна, Г.М. Янченко – Тернопіль: Підручники і посібники, 1996. – 40 с.

123. Планирование обязательных результатов обучения математике / сост. В.В.Фирсов – М: Просвещение, 1989. – 273 с.

124. Погорєлов О.В. Геометрія: Планіметрія: Підручник для 7-9 класів середньої школи. – К.: Освіта, 2000. – 223 с.

125. Пойа Д. Как решать задачу. – М.: Учпедгиз, 1961. – 207 с.

126. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. – М.: Наука, 1975. – 659 с.

127. Пойа Д. Математическое открытие. – М.: Наука, 1970. – 448 с.

128. Преподавание геометрии в 6 – 8 классах. Сб. статей / Сост. В. А. Гусев. – М.: Просвещение, 1979. – 281 с.

129. Проблемы методологии педагогики и методики исследований / Под ред. М.А. Данилова и Н.И. Болдырева. — М.: Педагогика, 1971. — 352 с.

130. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів: Математика: 5−12 кл. – К.: Перун, 2005.– 80 с.

131. Рабінович Ю. М. Геометрія 7 – 9. Задачі і вправи на готових кресленнях. – Харків: Гімназія, 1998. – 64 с.

132. Роганін О.М. Геометрія: 7 клас: Плани-конспекти уроків. – Х.: Світ дитинства, 2004. – 198 с.

133. Роганін О.М. Геометрія: 9 клас: Плани-конспекти уроків. – Х.: Світ дитинства, 2005. – 322 с.

134. Розв’язування геометричних задач у середній школі. / М.Б.Гельфанд, Л.М.Лоповок, Г.М.Скобелев, І.Ф.Тесленко – К.: Рад. шк. 1972. – 261 с.

135. Рупасов К.А., Тульчинський М.С. Сборник геометрических задач по готовым чертежам. / К.А. Рупасов, М.С. Тульчинський – Тамбов, 1963. – 208 с.

136. Саранцев Г.И. Из опыта обучения геометрии в VI-VIII классах // Из опыта преподавания математики в средней школе. – М.: Просвещение, 1979. – С. 83-96.

137. Саранцев Г.И. О методике решения планиметрических задач // Преподавание геометрии в 6-8 классах. – М.: Просвещение, 1979. – С. 84-125.

138. Саранцев Г.И. Система задач на геометрические преобразования: Автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.02. – М., 1971. – 22 с.

139. Саранцев Г.И. Сборник задач на геометрические преобразования. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1975. – 112 с.

140. Саранцев Г.И. Упражнение в обучении математике // Современные проблемы методики преподавания математики / Сост. Антонов Н.С., Гусев В.А. – М.: Просвещение, 1985. – С. 121-132.

141. Саранцев Г.И. Теоретические основы методики упражнений по математике в средней школе: Автореф. дис. … докт. пед. наук: 13.00.02. – Ленинград, 1987. – 36 с.

142. Семенець С. Навчання учнів основної школи методам геометричних перетворень. / С. Семенець // Математика в школі. – 2007. – № 1. – С. 17 – 20.

143. Скаткин М.Н. Дидактика средней школы. – М.: Просвещение, 1982. – 319 с.

144. Скафа О.І. Методичні складові етапів формування понять у еврістичному навчанні. / О.І. Скафа // Математика в школі. – 2004.– № 1. С. 2 – 6.

145. Скафа О.І. Навчання доведенням та евристики. / О.І. Скафа // Математика в школі. – 2004.– № 5. С. 14 – 19.

146. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник. – 2-ге вид., допов. і переробл. – К.: Вища школа., 2006. – 582 с.

147. Слепкань З.И. Психолого-педагогические основы обучения математике. – К.: Радянська школа, 1983. – 192 с.

148. Слєпкань З.І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. – 240 с.

149. Словник іншомовних слів. / За ред. О. С. Мельничука. – К.: Головна редакція УРЕ, 1977. – 776 с.

150. Словник.net: портал української мови та культури [електронний ресурс] / Олег Дмитрієв, Галина Степанко, Олексій Рутковський і ін. – 2009. – режим доступу: http://slovnyk.net/.

151. Смульсон М.Л. Психологія розвитку інтелекту. – К.: Інститут психології ім. Г.С.Костюка АПН України, 2001. – 276 с.

152. Сохор А.М. Логическая структура учебного материала. – М.: Педагогика, 1974. –. 192 с.

153. Столяр А.А. Педагогика математики: Учеб. пособие для физ.-мат. фак. пед. ин-тов. – Мн.: Выш. шк., 1986. – 414 с.

154. Суворова С.Б. Упражнения в обучении алгебре (6-8 классы). Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1977. – 47 с.

155. Сяська Н.А. Методична система реалізації функцій задач в навчанні планіметрії: дис... канд. пед. наук: 13.00.02 / Сяська – Київ, 2005. – 213 с

156. Сяська Н.А. Особливості формування системи планіметричних задач / Н.А. Сяська // Математика в школі. – 2003. – № 4. – С. 38 – 40.

157. Талызина Н.Ф. Умозаключения при решении геометрических задач. — Известия АПН РСФСР, 1957, вып. 80, С. 235—274.

158. Талызина Н.Ф. Управление процессом усвоения знаний. – М.: МГУ, 1975. – 343 с.

159. Талызина Н.Ф. Формирование познавательной деятельности учащихся. – М.: Знание, 1983. – 96 с.

160. Тарасенкова Н.А. Використання знаково-символічних засобів у навчанні математики. – Черкаси: "Відлуння – Плюс", 2002. – 408 с.

161. Тарасенкова Н.А. Теоретико-методичні основи використання знаково-символьних засобів у навчанні математики учнів основної школи: автореф. дис... докт. пед. наук: 13.00.02 – Київ, 2004. – 39 с.

162. Темченко О.В. Геометрія: 8 клас: Плани-конспекти уроків. – Х.: Світ дитинства, 2004. – 256 с.

163. Тесленко И.Ф., Чашечников С.М., Чашечникова Л.И. Методика преподавания планиметрии./ И.Ф. Тесленко, С.М. Чашечников, Л.И. Чашечникова – Киев: Радянська школа, 1986. – 160 с.

164. Тесленко І.Ф. Геометричні побудови. – К.: Рад. шк., 1956. – 140 с.

165. Титова Т.И. Разработка и исследование системы учебных задач для формирования геометрических понятий в 6-8 классах средней школы: автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.02. – К., 1982. – 17 с.

166. Управление познавательной деятельностью учащихся /Под ред. П.Я. Гальперина, Н.Ф. Талызиной. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1972. – 262 с.

167. Фетисова Л.Н. Система упражнений в подготовительном курсе геометрии: Автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.02. – М., 1974. – 20 с.

168. Формирование знаний и умений на основе теории поэтапного усвоения умственных действий / Под ред. П.Я. Гальперина и Н.Ф. Талызиной, Изд-во Мос. Ун-та, 1968. – 134 с.

169. Фридман Л.М. Дидактические основы применения задач в обучении: Автореф. дис. … докт. пед. наук: 13.00.02. – М., 1971. – 54 с.

170. Фридман Л.М. Логико-психологический анализ школьных учебных задач. – М.: Педагогика, 1977. – 208 с.

171. Фридман Л.М. Методы формирования ориентировочной основы умственных действий по решению задач / Л.М. Фридман // Вопросы психологии. – 1975. – № 4. – С. 51-61.
172. Фридман Л. М. Наглядность и моделирование в обучении. – М.: Знание, 1984. – 80 с.
173. Фридман Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе: Учителю математики о педагогической психологии. – М.: Просвещение, 1983. – 160 с.
174. Фридман Л.М. Педагогический опыт глазами психолога.: Кн. для. учителей. – М.: Просвещение, 1987. – 224 с.
175. Фридман Л.М., Джумаев К.К. О некоторых вопросах использования задач в обучении // Сов. педагогика, 1974. – №6. – С. 50-55.
176. Фридман Л.М., Турецкий Е.Н. Как научиться решать задачи: Пособие для учащихся. – М.: Просвещение, 1984. – 175 с.
177. Фридман Л. М. Учитесь учиться математике. – М.: Просвещение, 1985. – 112 с.
178. Хабіб Р.А. Активізація пізнавальної діяльності учнів на уроках математики. – К.: Радянська школа, 1985. – 152 с.
179. Хабиб Р.А. О новых приемах обучения планиметрии. – М.: Просвещение, 1969. – 158 с.
180. Хмара Т.М. Навчання учнів математичної мови: Метод. посібник. – К.: Рад. шк., 1985. – 95 с.
181. Цукарь А.Я. О типологии задач // Современные проблемы методики преподавания математики / Сост. Антонов Н.С., Гусев В.А. – М.: Просвещение, 1985. – С. 132 – 139.
182. Чебыкин А. Я. Возможности формирования начальных геометрических понятий на основе теории эмоциональной регуляции учебной деятельности: Науч.-метод. пособие / Одес. обл. ин-т усовершенствования учителей, Одес. гос. пед. ин-т им. Ушинского. – Одесса, 1992. – 101 с.
183. Чередов И.М. О принципе оптимального сочетания фронтальной, групповой и индивидуальной работы с учащимися на уроках. – Омск: Зап.-Сиб. кн. изд-во, 1973. – 136 с.
184. Чередов И.М. Система форм организации обучения в современной

общеобразовательной школе.-М.: Педагогика, 1987.-152 с.

185. Черкасов В.А. Дидактические основы построения системы упражнений. – Челябинск, 1978. – 91 с.

186. Чучуков В.Ф. Система дифференцированных заданий как средство управления процессом обучения: дис. … кандидата пед. наук: 13.00.02. / Чучуков В.Ф. – К., 1975. – 145 с.

187. Шапиро И.М. Использование задач с практическим применением в преподавании математики. – М.: Просвещение, 1990. – 96 с.

188. Швець В.О. Методика добору завдань для підсумкових контрольних робіт / В.О. Швець // Методика викладання математики і фізики: Зб. – К.: Рад. шк., 1990. – Вип. 6. – С. 8 – 13.

189. Швець В.О. Принципи формування базового змісту математичної освіти / В.О. Швець // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт . – Вип. 16. – Донецьк: Фірма ТЕАН, 2001.- С. 63 – 68.

190. Шеварев П.А. Обобщенные ассоциации в учебной работе школьника. – М.: АПН РСФСР, 1959. – 302 с.

191. Шохор-Троцкий С.И. Арифметический задачник для учеников. Вып. 1. Для начальних школ / С.И. Шохор-Троцкий; Предисл. автора. – 15-е узд. – [сПБ]: Узд. Т-ва „И.Д. Сытин”, 1911. – 200 с.

192. Эрдниев П.М. Методика упражнений по математике. Изд. 2-е, доп. и перераб. – М.: Просвещение, 1970. – 320 с.

193. Эрдниев П.М. О научных основах построения системы упражнений // Советская педагогика. – 1962. - № 7. – С. 27 – 38.

194. Эрдниев П.М. О рациональном изложении материала в учебниках математики // Проблемы школьного учебника. Вып. 3. – М.: Просвещение, 1975. – С. 57 – 72.

195. Эрдниев П.М. Преподавание математики в школе. – М.: Просвещение, 1978. – 303 с.

196. Эрдниев П.М., Эрдниев Б.П. Укрупнение дидактических единиц в обучении математике: Книга для учителя. – М.: Просвещение, 1986. – 255 с.

197. Єсаулов А.Ф. Психология решения задач. – Минск: Вышейшая школа, 1972. –

216 с.

198. Якиманская И.С. Восприятие и понимание учащимися чертежа и условия задачи в процессе ее решения / Применение знаний в учебной практике школьников: Сб. / Под ред. Н. А. Менчинской. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1961. – С. 54 – 137.

199. Якиманская И.С. Развивающее обучение. – М.: Педагогика, 1979. – 144 с.

200. Якиманская И.С. Развитие пространственного мышления школьников. – М.: Педагогика, 1980. – 240 с.

201. Aarts J. M. Plane and Solid Geometry. – New York: Springer Science, 2008. – 357 p.

202. Cindy J. Boyd, Jerry Cummins, Carol E. Malloy, Ph. D., Alfinio Flores, Ph. D. Geometry. – Glencoe: Mc Craw Hill, 2008. – 966 p.

203. Michael Serra. Discovering Geometry: An Investigative Approach. – Emeryville: Key Curriculum Press, 2008. – 831 p.

204. Ron Larson, Laurie Boswell, Timothy D. Kanold, Lee Stiff. Geometry. – Boston: Mc Dougal Little, 2007. – 1011 p.

205. TIMSS 2007 International Mathematics Report. / Ina V. S. Mullis, Michael O. Martin, Pierre Foy. – Boston: TIMSS@PIRLS, 2007. – 473 p.

206. Закон України „Про загальну середню освіту”: Освіта.ua. – Режим доступу: http://osvita.ua/legislation/law/2232.

207. Про Національну доктрину розвитку освіти: Освіта.ua. – Режим доступу: http://osvita.ua/legislation/other/2827.

208. Про Концепцію загальної середньої освіти (12-річна школа): Освіта.ua. – Режим доступу: http://osvita.ua/legislation/Ser_osv/2712.

ДОДАТКИ

Додаток А

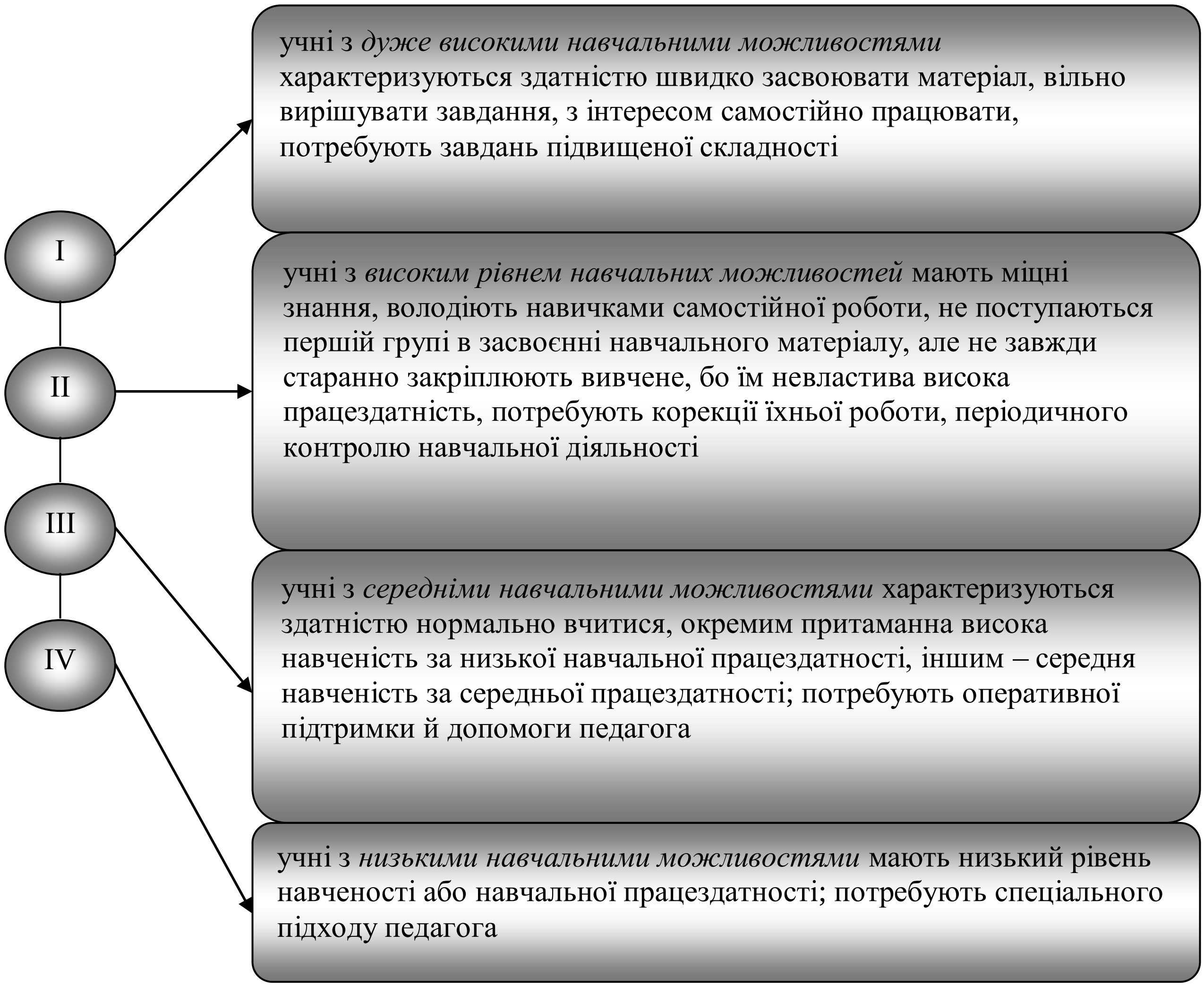
Таблиця А.1

Співвідношення етапів навчальної діяльності, етапів навчального процесу і основних типів вправ

Етапи навчальної діяльності	Етапи навчального процесу	Основні типи вправ
Актуалізація опорних знань і способів навчальної діяльності	Підготовка до вивчення нового матеріалу	Підготовчі (на спостереження ознак і властивостей фігур; на порівняння емпіричних даних та ін.)
Сприйняття, осмислення, первинне запам'ятовування	Вивчення, осмислення і первинне закріплення нового матеріалу	Вступні (на підведення під поняття; зображення геометричних фігур; визначення співвідношення між елементами фігури; формулювання наслідків та ін.)
Запам'ятовування нового матеріалу. Застосування нового в стандартних ситуаціях	Вторинне закріплення нового матеріалу, первинне застосування	Пробні (на безпосереднє застосування щойно виведених формул, геометричних фактів), тренувальні
Первинне узагальнення і застосування в нових (нестандартних) ситуаціях	Комплексне застосування вивченого, первинне узагальнення в новій ситуації	Тренувальні, творчі (вправи з кількома розв'язками; із суперечливими даними; з неповною умовою; з недоступними елементами; на відновлення фігур та ін.)
Узагальнення і систематизація вивченого	Узагальнення і систематизація вивченого	Тренувальні, творчі
Контроль, оцінювання і корекція засвоєного	Підсумковий контроль і оцінка засвоєного	Контрольні

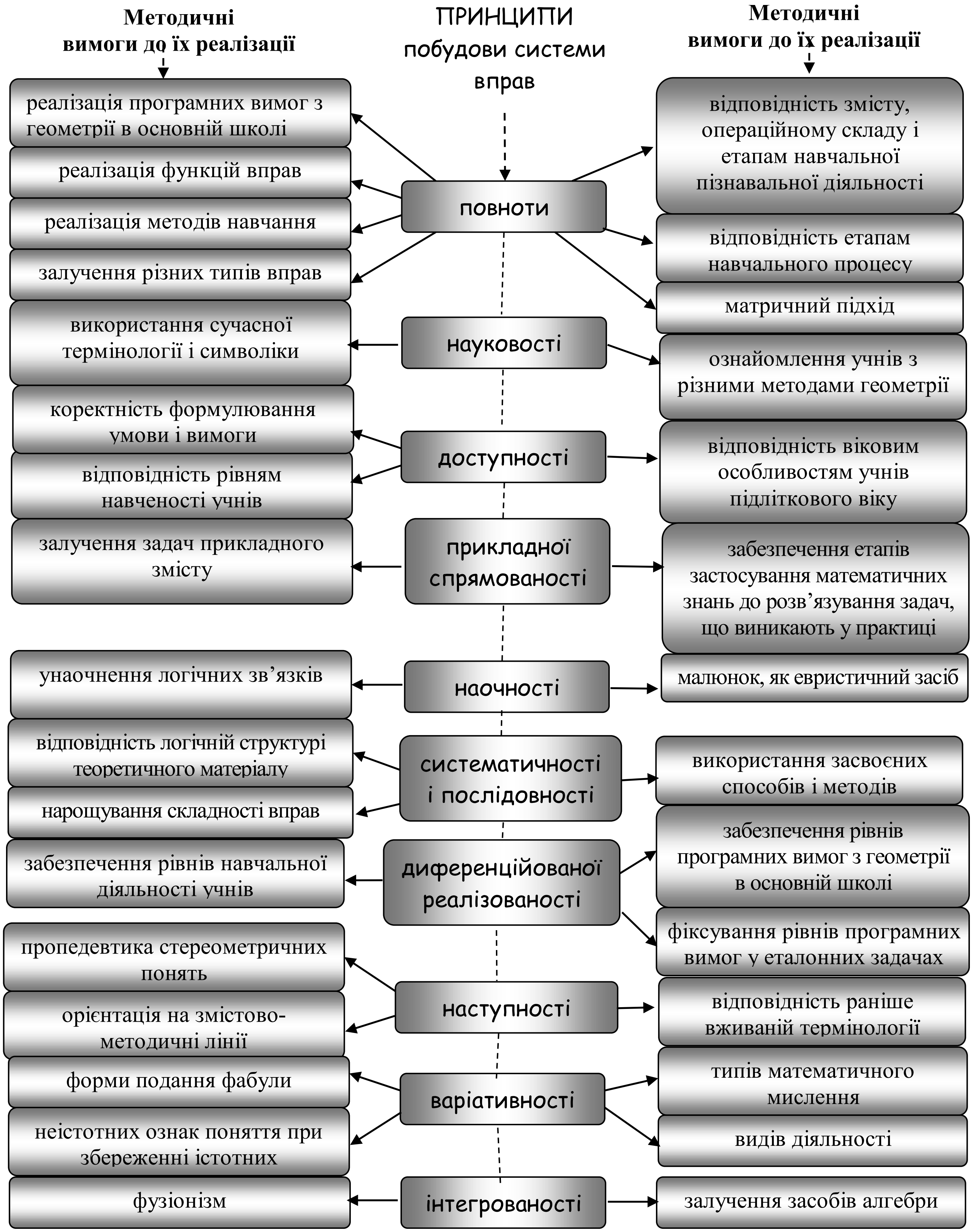
Додаток Б

Поділ учнів класу на групи за їх навчальними можливостями



Мал. Б.1 Поділ учнів класу на групи за їх навчальними можливостями

Додаток В
Принципи добору системи вправ з геометрії та методичні вимоги їх реалізації

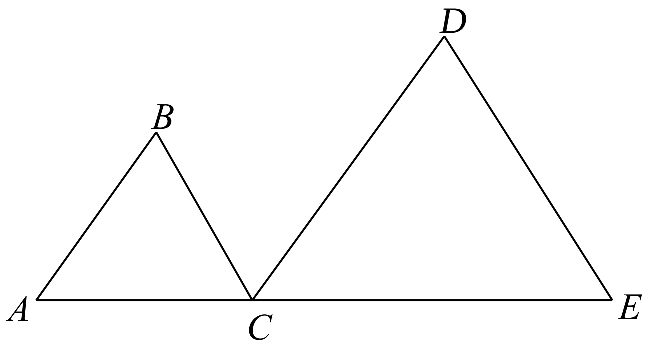


Мал. В.1 Принципи добору системи вправ з геометрії та методичні вимоги до їх реалізації

Додаток Д

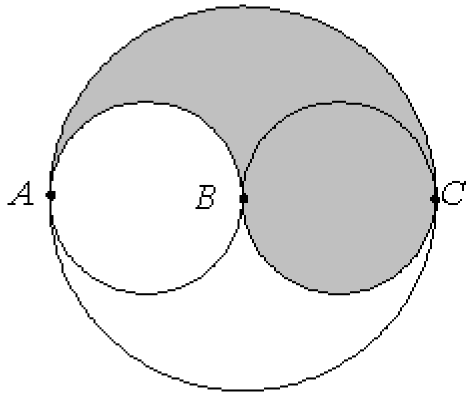
Вправи для реалізації діагностувальноо-прогностичних функцій

1. На зображеній фігурі трикутники *ABC* і *CDE* правильні і відрізок *AE* має довжину 25. Чому дорівнює сума периметрів двох трикутників?



Мал. А.1

2. На малюнку радіус кожного з менших кіл дорівнює 3. Вони дотикаються більшого кола в точках *A* і *C* та дотикаються одне одного в точці *B*, яка є центром більшого кола. Чому дорівнює периметр зафарбованої фігури?

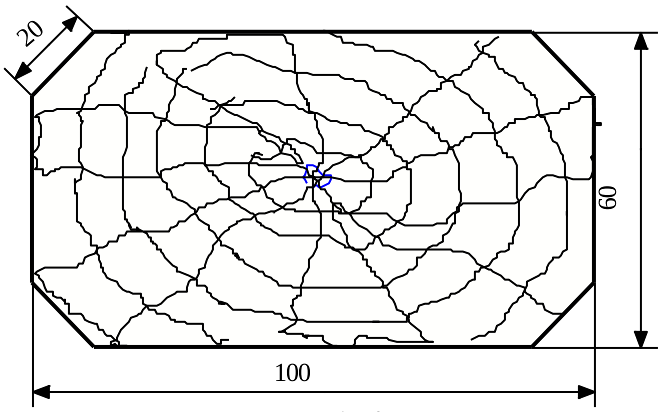


Мал. А.2

3. Годинник показує 14 год. 55 хв. Який кут утворюють стрілки годинника?

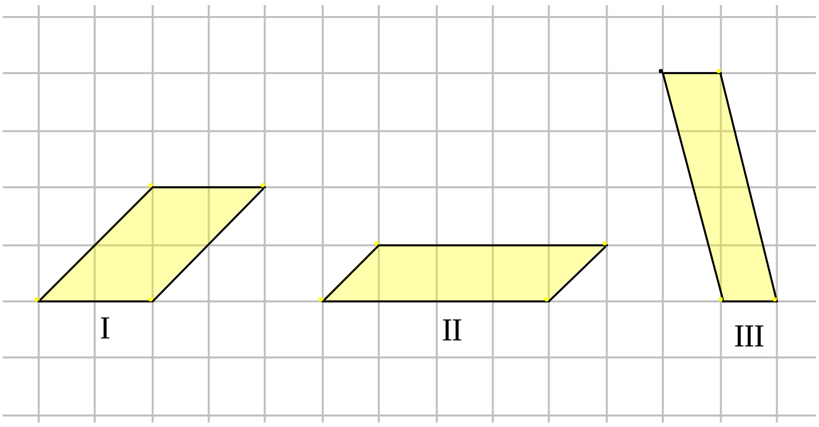
Мал. А.3

4. На малюнку зображено поперечний переріз бруса. Він має форму прямокутника без чотирьох відрізаних від нього рівних рівнобедрених трикутників. Знайдіть площу перерізу (розміри дано в міліметрах).



Мал. А.4

5. Два паралелограми називаються рівновеликими, якщо їх площі рівні. Які із зображених паралелограмів рівновеликі?



Мал. А.5

Додаток Е

Таблиця Е.1.

Програмні вимоги з геометрії для основної школи
з теми „Геометричні побудови”

Тема, зміст навчального матеріалу	***Вимоги до загальноосвітньої підготовки учнів***
Геометричні побудови Задача на побудову та її розв’язування. Основні задачі на побудову: - побудова трикутника за трьома сторонами; - побудова кута, що дорівнює даному; - побудова бісектриси даного кута; - поділ даного відрізка навпіл; - побудова прямої, яка перпендикулярна до даної прямої.	***Пояснює***, що таке “задача на побудову”. ***Розв’язує*** основні задачі на побудову та нескладні задачі, розв’язання яких зводиться до основних побудов. ***Доводить*** правильність виконаних побудов для основних задач.

Таблиця Е.2.

Рівневі вимоги до результатів навчання учнів з теми „Геометричні побудови”

Загальні вимоги до оволодіння знаннями і способами діяльності	***Рівні***	***Вимоги до результатів навчання з теми „Геометричні побудови”***
Учень називає математичний об’єкт (вираз, формули, геометричну фігуру, символ), але тільки в тому випадку, якщо цей об’єкт (його зображення, опис, характеристика) запропоновано йому безпосередньо; з допомогою вчителя виконує елементарні завдання.	**початковий**	Учень визначає, за допомогою якого креслярського інструмента виконано названу елементарну побудову, виконує потрібну елементарну побудову за допомогою зазначених креслярських інструментів. Учень пояснює, як за допомогою циркуля і лінійки виконати побудову зображеної геометричної фігури, якщо ця побудова належить до основних. Учень виконує зазначену побудову, якщо вона належить до основних, за допомогою зазначених креслярських інструментів.
Учень повторює інформацію, операції, дії, засвоєні ним у процесі навчання, здатний розв’язувати завдання за зразком.	**середній**	Учень пояснює, що таке задача на побудову, називає етапи її розв’язання. Учень складає план побудови зображеної фігури за допомогою циркуля і лінійки, якщо ця побудова належить до основних. З допомогою вчителя учень розпізнає основну геометричну побудову, яку потрібно виконати за вимогою задачі і самостійно її виконує за відомим алгоритмом..
Учень самостійно застосовує знання в стандартних ситуаціях, уміє виконувати математичні операції, застосовувати загальні методи, послідовність (алгоритм) яких йому відомі, але зміст та умови виконання змінені.	**достатній**	Учень самостійно виконує основні побудови і розв’язує простіші задачі на побудову, які зводяться до них.
Учень здатний самостійно орієнтуватися в нових для нього ситуаціях, складати план дій і виконувати його; пропонувати нові, невідомі йому раніше розв’язання, тобто його діяльність має дослідницький характер.	**високий**	Розв’язуючи складніші задачі на побудову, учень самостійно знаходить план побудови на основі проведеного аналізу, виконує доведення відповідності фігури, отриманої в результаті проведених побудов, умові задачі. Учень застосовує додаткові методи до розв’язування складніших задач на побудову.

Таблиця Е.3

Специфікація тесту і контрольної роботи для визначення однорідності вибірок контрольних і експериментальних класів

Тематичний розподіл змісту геометричної лінії курсу математики для 5 – 6 класів загальноосвітньої школи	**Програмові вимоги до результатів навчання**	**Вимоги до рівнів навчальних досягнень**
Відрізок. Довжина відрізка. Пряма. Промінь. Шкала. Координатний промінь. Кут. Позначення кутів. Види кутів. Вимірювання кутів. Прямокутник. Трикутник, його види. Периметр. Рівність фігур. Величина. Площа прямокутника. Площа квадрата Прямокутний паралелепіпед, його виміри. Куб. Формули об’ємів прямокутного паралелепіпеда і куба. Коло. Довжина кола. Круг. Площа круга. Круговий сектор. Перпендикулярні і паралельні прямі, їх побудова. Координатна площина.	**Пояснювати що таке:** відрізок, пряму, промінь, кут, прямокутник, трикутник, рівні фігури, прямокутний паралелепіпед, куб, коло, круг, круговий сектор, перпендикулярні і паралельні прямі, координатну площину і ін. **Знати:** означення виучуваних геометричних понять та їх властивості, формули для обчислення геометричних величин (периметрів, довжини кола, площ, об’ємів і ін.), одиниці вимірювання геометричних величин та їх співвідношення. **Уміти:** зображати геометричні фігури за допомогою лінійки, косинця, транспортира, циркуля; знаходити координати точки на координатній прямій та будувати точки за їх координатами; знаходити координати точок на координатній площині та будувати точки за їх координатами; застосовувати відомі формули для обчислення геометричних величин і ін.	**I (початковий)**. Називати математичний об’єкт (вираз, формули, геометричну фігуру, символ), але тільки в тому випадку, коли цей об’єкт (його зображення, опис, характеристика) запропоновано учневі безпосередньо; виконувати елементарні завдання. **II (середній).** Повторювати інформацію, операції, дії, засвоєні учнем у процесі навчання; розв’язувати завдання за відомим алгоритмом у стандартних умовах. **III (достатній).** Застосовувати знання в стандартних ситуаціях, виконувати математичні операції, алгоритм яких відомий але зміст та умови виконання змінені. **IV (високий).** самостійно орієнтуватися в нових ситуаціях, самостійно складати алгоритм виконання дій і виконувати його; пропонувати нові, невідомі йому раніше розв’язання.

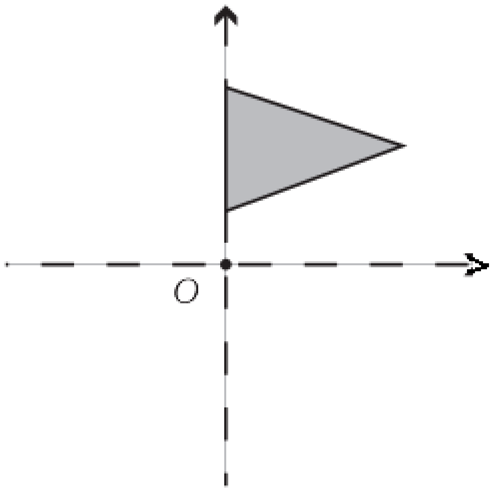
Таблиця Е.4

Результати анкетування вчителів.

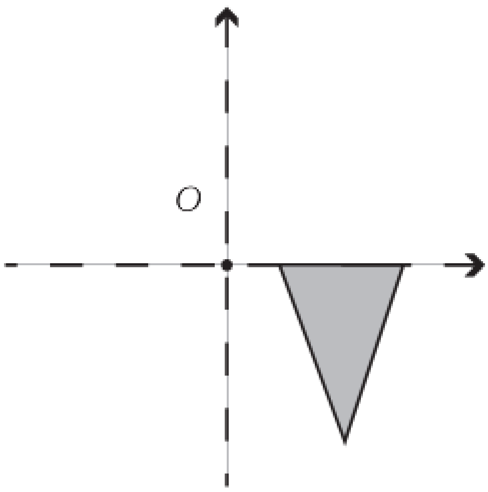
Вчителі / Запитання	Педагогічний стаж				Всього
	до 5 років	від 5 до 10 років	від 10 до 20 років	більше 20 років	
Кількість	7	14	20	26	67
У процесі вивчення курсу: – користуюся системою вправ тільки з підручника – інколи користуюсь іншими джерелами – майже завжди добираю систему вправ самостійно	5 2 0	2 12 0	1 10 9	0 12 14	8 (12%) 36 (54%) 23 (34%)
До якого етапу уроку частіше добираєте вправи самостійно: – підготовчий – засвоєння знань – застосування знань у стандартних умовах застосування знань у нестандартних умовах – етап контролю	1 0 0 1 0	10 2 0 0 0	13 0 1 5 0	15 9 0 2 0	39 (58%) 11 (16,4%) 1 (1,5%) 8 (12%) 0
Якщо систему вправ з підручника диференціювати за рівнями, то який із рівнів, на Вашу думку, найбільше потребуватиме доповнення: – початковий – середній – достатній – високий	5 7 3 0	12 14 0 5	16 8 0 4	25 13 0 3	58 (86%) 42 (73%) 3 (4%) 12 (18%)
Що викликає найбільші труднощі у розв’язуванні геометричних задач на початковому етапі вивчення курсу геометрії: – виконання малюнка – короткий запис умови – процес розв’язування	7 6 7	8 5 12	7 3 14	6 2 10	28 (35%) 16 (24%) 43 (64%)

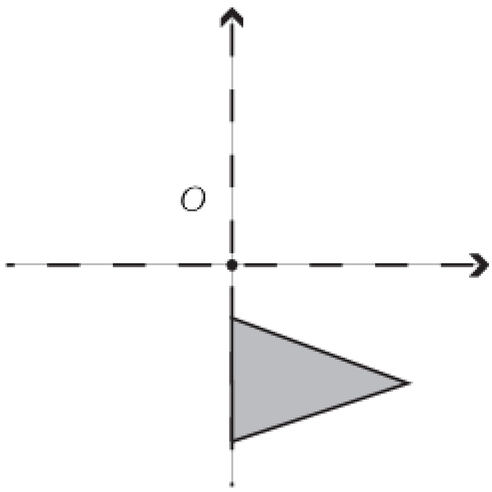
Додаток Ж

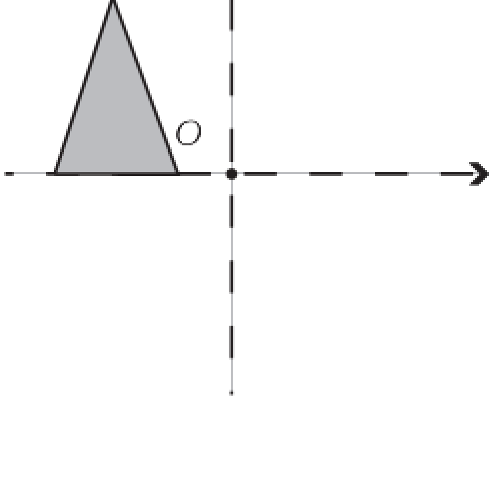
Задача (TIMSS – 2007).

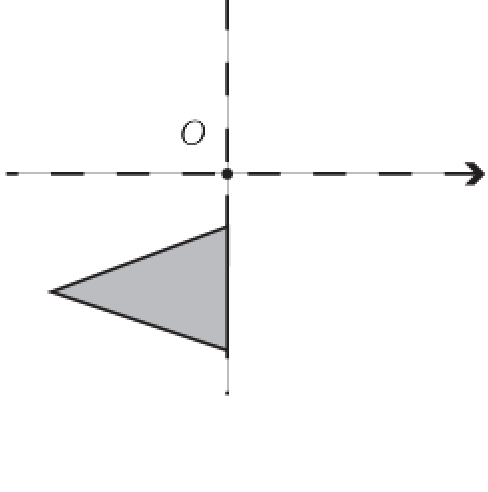


На якому з малюнків зображено поворот даної на малюнку вище фігури на половину повного оберту за годинниковою стрілкою навколо точки O?

A


B


C


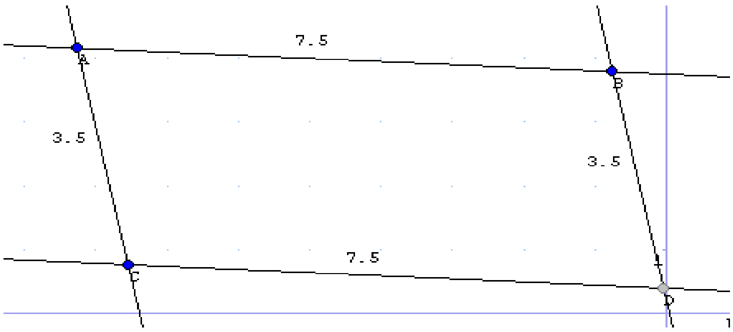
D


Додаток З
Вправи на дослідження властивостей геометричних фігур за ЕЗНП GRAN-2D.

ВПРАВА 1. Побудуйте довільний паралелограм і обчисліть довжини його протилежних сторін. Зробіть висновок.

Розв’язання.

1. *Проводимо пряму через дві точки.*
2. *Проводимо пряму через дві точки, яка перетинає побудовану пряму.*
3. *Через точку на одній з прямих будуємо пряму, паралельну до другої прямої.*
4. *Через точку на іншій прямій будуємо пряму, паралельну до попередньої.*
5. *Отримали точки перетину прямих A, B, D, C – вершини паралелограма за означенням* (мал. З.1).
6. *Обчислюємо довжини протилежних сторін, як відрізків з кінцями у позначених точках.*
7. *Висновок: протилежні сторони паралелограма рівні.*

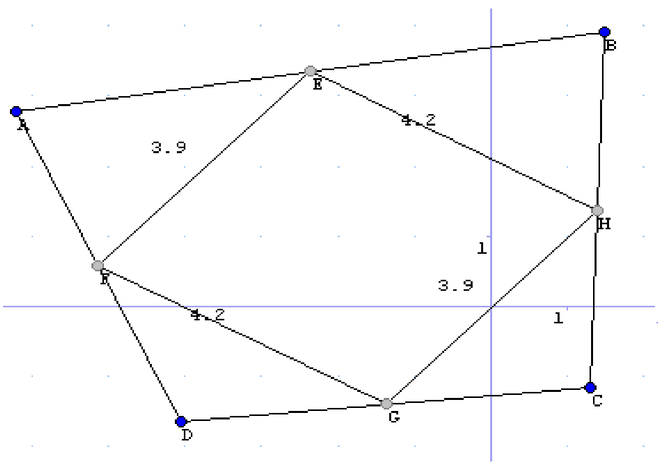


Мал. З.1

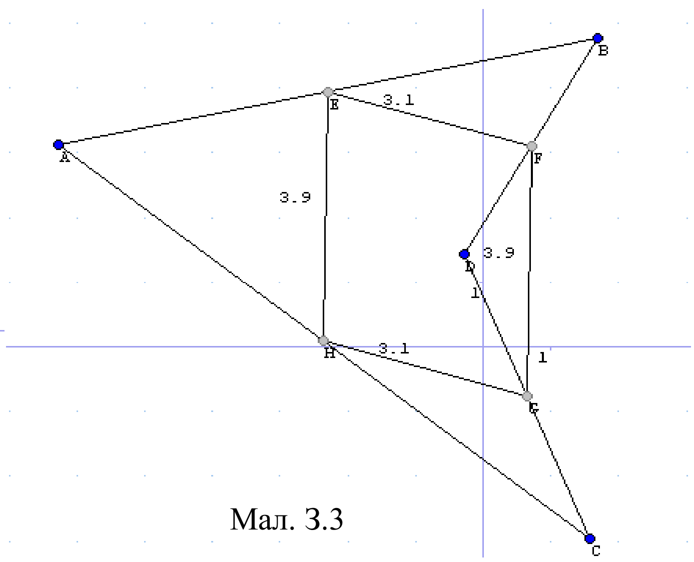
ВПРАВА 2. Побудуйте довільні чотирикутники (опуклий й неопуклий), позначте середини їх сторін, обчисліть довжини сторін утвореного чотирикутника. Зробіть висновок.

Розв’язання.

1. *Будуємо довільний чотирикутник (опуклий), як замкнену ламану з чотирьох відрізків.*
2. *Знаходимо точки, які є серединами сторін чотирикутника, сполучаємо їх відрізками.*
3. *Обчислюємо довжини протилежних сторін утвореного чотирикутника, як відрізків з кінцями у позначених точках* (мал. З.2).
4. *Здійснивши відповідну побудову з неопуклим чотирикутником* (мал. З.2)*, робимо висновок: середини сторін будь-якого чотирикутника є вершинами паралелограма.*



Мал. З.2

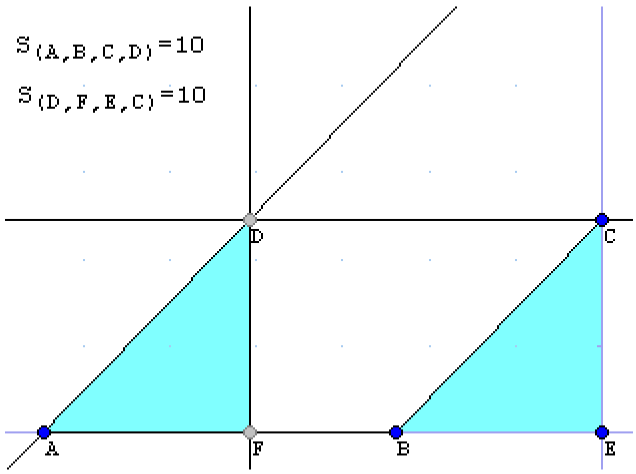


Мал. З.3

ВПРАВА 3. Порівняйте площі паралелограма і прямокутника, вершинами якого є дві вершини паралелограма і основи його висот, проведених з цих вершин. Зробіть висновок.

Розв'язання.

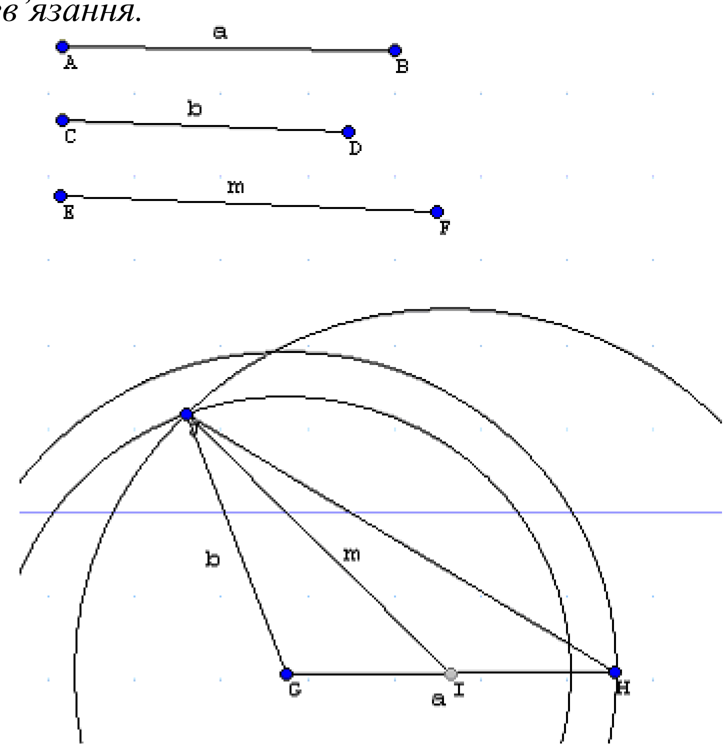
1. *Будуємо паралелограм (вправа 1) ABCD.*
2. *З двох сусідніх вершин опускаємо висоти DF і CE.*
3. *Обчислюємо і порівнюємо площі паралелограма ABCD і прямокутника (за побудовою) DFEC.*
4. *Оскільки S_{DFEC} = DC · DC, висновок: площа паралелограма обчислюється як добуток однієї з його сторін на висоту, проведену до цієї сторони.*



ВПРАВА 4. Побудуйте трикутник за двома сторонами і медіаною, проведеною до однієї з них.

Розв'язання.

1. *Будуємо відрізок GH = a.*
2. *Знаходимо середину GH – точку I.*
3. *Будуємо коло з центром у* т. *I і радіусом m.*
4. *Будуємо коло з центром у* т. *G і радіусом b.*
5. *Точка перетину побудованих кіл є третьою вершиною трикутника.*

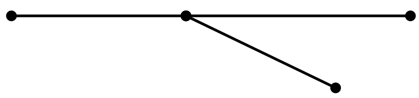


Додаток К

Тест для визначення рівня навчальних досягнень учнів з геометрії на початку вивчення систематичного курсу

І варіант

1. Скільки відрізків зображено на малюнку?



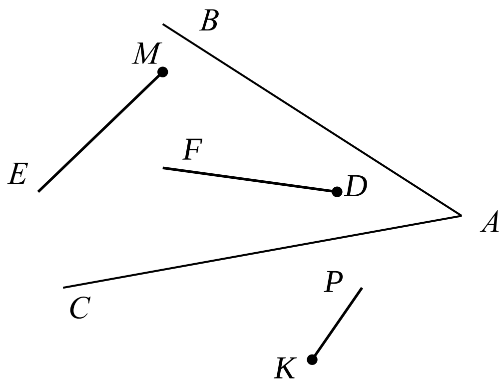
а) три;

<u>б) чотири</u>;

в) два;

г) п’ять

2. Які з променів, зображених на малюнку, перетинають сторону кута *BAC*?



а) *KP*;

<u>б) *KP* і *ME*</u>;

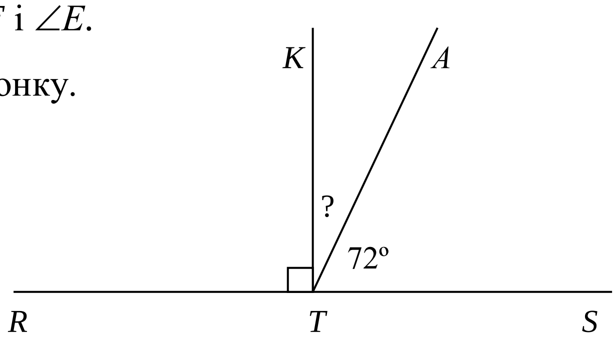
в) *KP* і *FD*;

г) жодний.

3. Серед даних кутів назвіть всі гострі: $\angle C = 47^o$, $\angle A = 137^o$, $\angle B = 90^o$, $\angle D = 180^o$, $\angle E = 89^o$, $\angle F = 92^o$?

а) $\angle A$ і $\angle E$; б) $\angle B$ і $\angle F$; <u>в) $\angle C$ і $\angle E$</u>; г) $\angle F$ і $\angle E$.

4. Обчисліть величину кута *ATK* на малюнку.



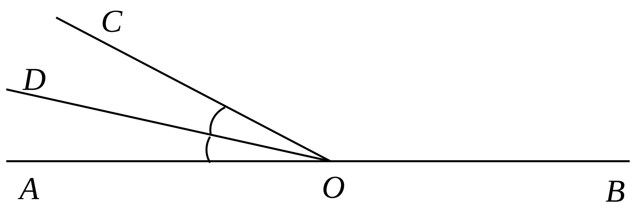
а) 28º;

<u>б) 18º</u>;

в) 108º;

г) 162º

5. Промінь *OD* є бісектрисою кута *AOC*, $\angle AOC = 48^o$. Обчисліть градусну міру кута *BOD*.



а) 142º;

б) 138º;

в) 114º;

г) 156^{o}.

6. Довжина однієї із сторін прямокутника дорівнює 39 см, що на 12 см менше від довжини другої сторони. Обчисліть периметр прямокутника.

а) 90 см; б) 180 см; в) 66см; г)132 см.

7. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 70 см, а його бічна сторона – 27 см. Обчисліть основу трикутника.

а) 27 см; б) 43 см; в) 16 см; г) 21,5 см.

8. Одна сторона прямокутника дорівнює 45 см, а друга – в 9 разів менша за неї. Обчисліть площу цього прямокутника.

а) 100 $см^2$; б) 50 $см^2$; в) 225 $см^2$; г) 500 $см^2$.

9. Знайдіть значення площі квадрата, периметр якого дорівнює 188 см.

а) 35344 $см^2$; б) 2209 $см^2$; в) 376 $см^2$; г) 752 см

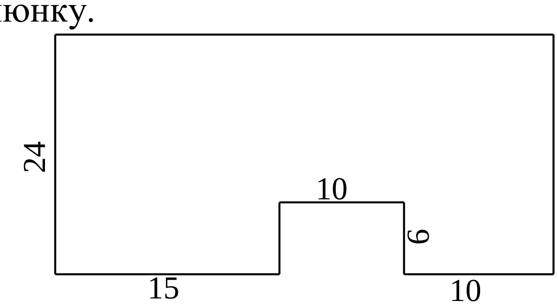
10. Обчисліть площу фігури, зображеної на малюнку.

а) 600;

б) 540;

в) 480;

г) 450.



11. Ділянка прямокутної форми має площу 56 га, а довжину 400 м. Обчисліть периметр ділянки.

а) 1400 м; б) 1800 м; в) 3600 м; г) 4800 м.

12. Ширина прямокутного паралелепіпеда дорівнює 8 дм, довжина – на 4 дм більша, ніж ширина, а висота – у 3 рази менша, ніж довжина. Обчисліть об’єм даного паралелепіпеда.

а) 3840$м^3$; б) 320 $м^3$; в) 96 $м^3$; г) 384 $м^3$.

13. Знайдіть значення об’єму куба, ребро якого дорівнює 4 см.

а) 64$м^3$; б) 32 $м^3$; в) 12 $м^3$; г) 16 $м^3$.

14. Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 15 см, 24 см і 18 см. Обчисліть площу поверхні паралелепіпеда.

а) 2592 $см^2$; б) 2124 $см^2$; в) 2160 $см^2$; г) 1620 $см^2$.

15. Обчисліть довжину кола, діаметр якого дорівнює 4,6 см.

а) 28,8 см; <u>б) 14,4 см</u>; в) 9,2 см; г) 21,16см.

16. Обчисліть радіус кола, довжина якого дорівнює 7,85 м.

<u>а) 1,2 м</u>; б) 2,4 м; в) 3,9 м; г) 15,7м

17. Обчисліть площу круга, радіус якого дорівнює 16 см.

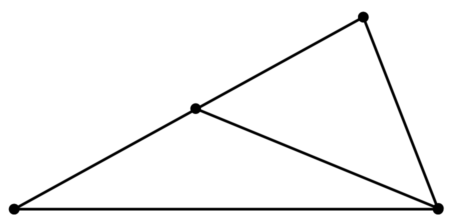
а) 12,56 см^2; б<u>) 803,84 см^2</u>; в) 43,12 см^2; г) 1607,68 см^2

18. Дано координати трьох вершин прямокутника *ABCD*: *A*(-1;-1), *B*(2;-1), *C*(2;4). Обчисліть площу прямокутника, вважаючи, що довжина одного відрізка координатних осей дорівнює 1 см.

а) 12 см^2; б<u>) 15см^2</u>; в) 38 см^2; г) 18 см^2

II варіант

1. Скільки відрізків зображено на малюнку?



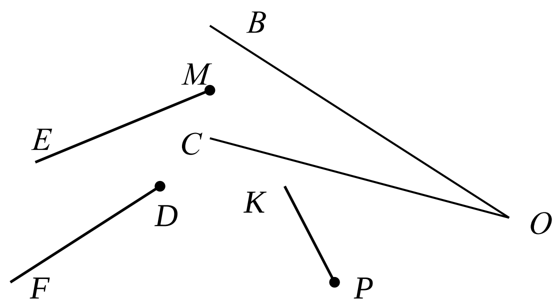
а) три;

б) чотири;

в) два;

<u>г) шість</u>

2. Які з променів, зображених на малюнку, перетинають сторону кута *BOC*?



а) *PK*;

<u>б) *PK* і *ME*</u>;

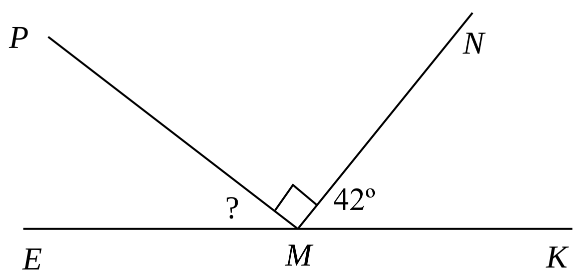
в) *PK* і *FD*;

г) жодний.

3. Серед даних кутів назвіть всі тупі: $\angle C$ = 47º, $\angle A$ = 137º, $\angle B$ = 90º, $\angle D$ = 180º, $\angle E$ = 89º, $\angle F$ = 92º?

<u>а) $\angle A$ і $\angle F$</u>; б) $\angle B$ і $\angle F$; в) $\angle C$ і $\angle E$; г) $\angle F$ і $\angle E$.

4. Знайдіть величину кута *PME* на малюнку.



а) 42º;

<u>б) 48º</u>;

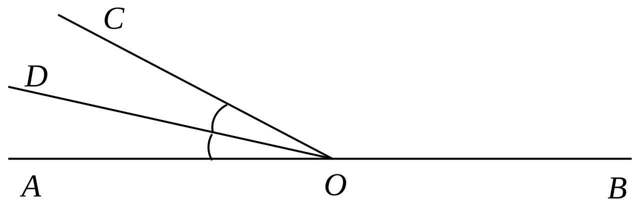
в) 132º;

г) 58º.

5. Промінь *OD* є бісектрисою кута *AOC*, $\angle BOD = 168^o$. Обчисліть градусну міру кута *AOC*.

а) 24º; в) 12º;

б) 48º; г) 78º.



6. Довжина однієї із сторін прямокутника дорівнює 42 см, що на 14 см більше, ніж довжина другої сторони. Обчисліть периметр прямокутника.

а) 98 см; б) 196 см; в) 140 см; 70 см.

7. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 60 см, а його бічна сторона – 18 см. Обчисліть основу трикутника.

а) 24 см; б) 12 см; в) 48 см; 24 см.

8. Одна сторона прямокутника дорівнює 21 см, а друга – на 8 більша за неї. Обчисліть площу цього прямокутника.

а) 100 см^2; б) 50 см^2; в) 609 см^2; г) 1218 см^2

9. Знайдіть значення площі квадрата, периметр якого дорівнює 212 см.

а) 44944 см^2; б) 2809 см^2; в) 848 см^2; г) 11236 см^2.

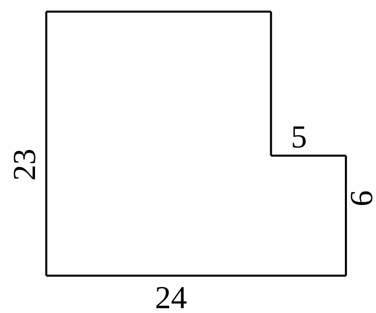
10. Обчисліть площу фігури, зображеної на малюнку.

а) 552;

б) 144;

в) 229;

г) 85



11. Поле прямокутної форми має площу 63 га, а його довжина – 700 м. Обчисліть периметр поля.

а) 3200 м; б) 1600 м; в) 900 м; г) 6300 м

12. Висота прямокутного паралелепіпеда дорівнює 7 см, ширина – на 1 см менша, ніж висота, а довжина – в 2 рази більша, ніж ширина. Знайдіть значення об’єму даного паралелепіпеда.

а) 98м^3; б) 672 м^3; в) 504 м^3; г) 252 м^3

13. Обчисліть об’єм куба, ребро якого дорівнює 6 см.

а) 18м^3; б) 36 м^3; в) 216 м^3; г) 108 м^3

14. Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 63 см, 25 см і 32 см. Обчисліть площу поверхні паралелепіпеда.

<u>а) 8782 см^2</u>; б) 3150 см^2; в) 4032 см^2; г) 50400 см^2.

15. Обчисліть довжину кола, діаметр якого дорівнює 5,4 см.

<u>а) 16,96 см</u>; б) 8,48 см; в) 10,8 см; г) 16,2 см.

16. Обчисліть радіус кола, довжина якого дорівнює 11,47 дм.

а) 3,66 дм; <u>б) 1,83 дм</u>; в) 22,94 дм; г) 131,56дм.

17. Обчисліть площу круга, діаметр якого дорівнює 16 см.

а) 803,84 см^2; б) 50,24 см^2; <u>в) 200,96 см^2</u>; г) 100,48 см^2

18. Дано координати трьох вершин прямокутника *ABCD*: *B*(2;2), *C*(2;-2), *D*(-4;-2). Обчисліть площу прямокутника, вважаючи, що довжина одного відрізка координатних осей дорівнює 1 см.

а) 12 см^2; б<u>) 24см^2</u>; в) 20 см^2; г) 48 см^2

III варіант

1. Скільки відрізків зображено на малюнку?

а) три;

б) чотири;

<u>в) шість</u>;

г) п’ять

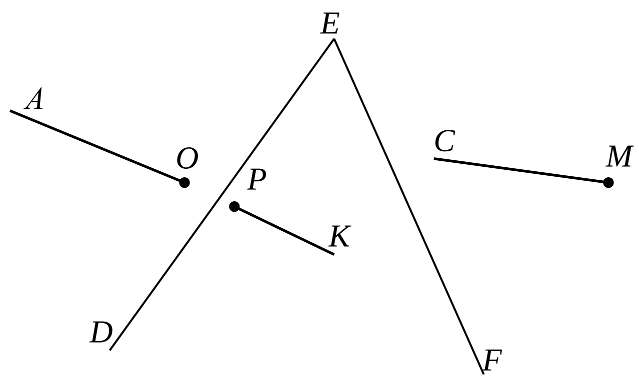
2. Які з променів, зображених на малюнку, перетинають сторону кута *BOC*?

а) *MC*;

<u>б) *PK* і *MC*</u>;

в) *PK* і *AO*;

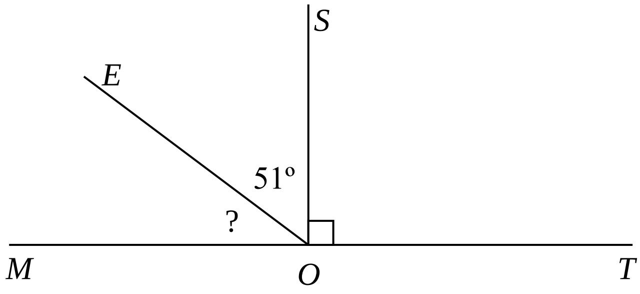
г) жодний



3. Серед даних кутів назвіть всі прямі: $\angle C = 47^o$, $\angle A = 137^o$, $\angle B = 90^o$, $\angle D = 180^o$, $\angle E = 89^o$, $\angle F = 92^o$?

а) $\angle$ D; б) $\angle$ F; в) $\angle$ B; г) $\angle$ E.

4. Знайдіть величину кута *FOE* на малюнку.

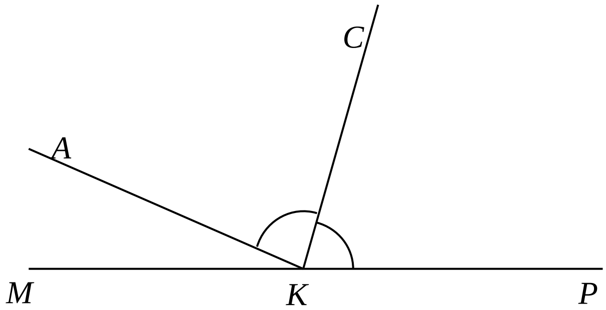


а) 59º;

б) 49º;

в) 39º; г) 141º

5. Промінь *KC* є бісектрисою кута *AKP*, ∠ *AKP* = 156º. Знайдіть градусну міру кута *MKC*.



а) 78º; б) 112º; в) 34º; г) 124º

6. Довжина однієї із сторін прямокутника дорівнює 36 см, що на 12 см більше за довжину другої сторони. Знайдіть значення периметра прямокутника.

а) 60 см; б) 120 см; в) 84 см; г) 168 см.

7. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 40 см, а його основа – 14 см. Знайдіть довжину бічної сторони трикутника.

а) 26 см; б) 13 см; в) 40 см; 54 см.

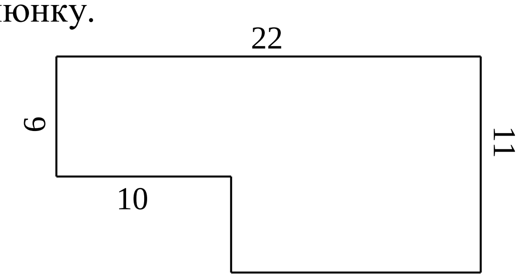
8. Одна сторона прямокутника дорівнює 12 см, а друга – в 3 рази більша за неї. Обчисліть площу цього прямокутника.

а) 96 см^2; б) 48 см^2; в) 432 см^2; г) 864 см^2.

9. Знайдіть значення площі квадрата, периметр якого дорівнює 124 см.

а) 15376 см^2; б) 961 см^2; в) 248 см^2; г) 3844 см^2

10. Обчисліть площу фігури, зображеної на малюнку.



а) 242;

б) 192;

в) 72;

г) 220.

11. Поле прямокутної форми має площу 32 га, а його довжина – 800 м. Обчисліть периметр поля.

а) 400 м; б) 3200 м; в) 2400 м; г) 1200 м

12. Довжина прямокутного паралелепіпеда дорівнює 14 дм, ширина – в 2 рази менша від довжини, а висота на 3 дм більша за ширину. Обчисліть об’єм паралелепіпеда.

а) 980м^3; б) 98 м^3; в) 490 м^3; г) 280 м^3

13. Обчисліть об’єм куба, ребро якого дорівнює 7 см

а) 171,5м^3; б) 343 м^3; в) 49 м^3; г) 21 м^3.

14. Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 29 см, 46 см і 34 см. Знайдіть значення площі поверхні паралелепіпеда.

а) 2668 см^2; б) 5796 см^2; в) 3128 см^2; г) 7768 см^2.

15. Обчисліть довжину кола, діаметр якого дорівнює 5,8 дм.

а) 11,6 дм; б) 9,1 дм; в) 18,21 дм; г) 36,42 дм.

16. Обчисліть радіус кола, довжина якого дорівнює 204,1 см.

а) 102 см; б) 16,25 см; в) 63 см; г) 32,5 см.

17. Обчисліть площу круга, діаметр якого дорівнює 24 см.

а) 452,16 см^2; б) 74,4см^2; в) 37,68 см^2; г) 32,5 см^2

18. Дано координати трьох вершин прямокутника *ABCD*: *A*(-2;4), *B*(-2;-2), *C*(4;-2). Обчисліть площу прямокутника, вважаючи, що довжина одного відрізка координатних осей дорівнює 1 см.

а) 12 см^2; б) 24см^2; в) 36 см^2; г) 72 см^2

Додаток Л

Л.1

Тематична письмова робота з теми „Геометричні побудови”

I варіант

1. Кола з радіусами 6 см і 9 см мають внутрішній дотик. Обчисліть відстань між центрами цих кіл.
2. Дано тупокутний трикутник. Побудуйте бісектрису зовнішнього гострого кута.
3. Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою і меншим із гострих кутів.
4. Побудуйте трикутник ABC, якщо AB = 4 см, BC = 3 см, AC = 5 см. Побудуйте коло, описане навколо цього трикутника.
5. Побудуйте рівнобедрений трикутник за висотою h, проведеною до основи, і бічною стороною b.

II варіант

1. Кола з радіусами 6 см і 9 см мають зовнішній дотик. Обчисліть відстань між центрами цих кіл.
2. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і гострим кутом, прилеглим до цього катета.
3. Побудуйте точку перетину двох бісектрис трикутника ABC.
4. Побудуйте трикутник ABC, якщо AB = 4 см, BC = 3 см, AC = 6 см. Побудуйте коло, описане навколо цього трикутника.
5. Побудуйте рівнобедрений трикутник за висотою h, проведеною до основи, і основою a.

Л.2

Тематична письмова робота з теми „Подібні трикутники”

I варіант

1. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні, AB = 1 см, AC = 1,5 см, BC = 2 см, A_1B_1 = 10 см. Знайдіть довжини відрізків B_1C_1, A_1C_1.
2. У трикутнику ABC AC = 12 см, відрізок MN паралельний AC ($M \in AB$, $N \in BC$), MB = 5 см, MN = 4 см. Знайдіть довжину відрізка AB.

3. Знайдіть градусну міру кута між дотичною і хордою з кінцем у точці дотику, якщо кутова велична дуги, що належить цьому куту, дорівнює 120º.

4. У трикутнику із сторонами 15 см і 10 см проведено бісектрису кута між ними. Вона ділить третю сторону на відрізки, менший з яких дорівнює 8 см. Обчисліть периметр трикутника.

5. Доведіть, що величина кута з вершиною всередині кола дорівнює півсумі кутових величин дуг, які належать вертикальним кутам, один із яких – даний кут.

II варіант

1. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні, $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $AC = 5$ см, $A_1B_1 : AB = 3$. Знайдіть довжини відрізків A_1B_1, B_1C_1, A_1C_1.

2. У трикутнику ABC $AB = 12$ см, $AC = 15$ см, відрізок MN паралельний AC ($M \in AB$, $N \in BC$), $BM = 4$ см. Знайдіть довжину відрізка MN.

3. Знайдіть кутову величину дуги, що міститься між дотичною і хордою з кінцем у точці дотику, якщо кут між ними дорівнює 65º.

4. У трикутнику із сторонами 8 см і 12 см проведено бісектрису кута між ними. Вона ділить третю сторону на відрізки, більший з яких дорівнює 3 см. Обчисліть периметр трикутника.

5. Доведіть, що величина кута, утвореного дотичною і хордою, які мають спільну точку на колі, дорівнює половині кутової величини дуги, що лежить в середині кута.

Л.3

Тематична письмова з теми „Площі фігур”

I варіант

1. Сторони паралелограма дорівнюють 20 см і 25 см, а висота, проведена до більшої сторони, дорівнює 16 см. Знайдіть довжину другої висоти паралелограма.

2. Менша основа рівнобічної трапеції дорівнює 5 см, висота – 4 см, а гострий кут – 45º. Знайдіть значення площі трапеції.

3. Обчисліть площу круга, описаного навколо трикутника із сторонами 16 см, 30 см, 34 см.

4. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює $2a$, а кут при вершині дорівнює 2β. Знайдіть значення площі трикутника.

5. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою її гострого кута і перпендикулярна до бічної сторони. Обчисліть площу трапеції, якщо її менша основа дорівнює а.

II варіант

1. Обчисліть площу ромба, периметр якого дорівнює 120 см, а одна із діагоналей – 36 см.

2. Дві менші сторони прямокутної трапеції дорівнюють по 4 см, а один із кутів – 45^{o}. Знайдіть значення площі трапеції.

3. Сторони трикутника дорівнюють 15 см, 26 см, 37 см. Обчисліть площу круга, вписаного в трикутник.

4. У прямокутнику діагональ дорівнює d і утворює з однією із сторін кут α. Обчисліть площу прямокутника.

5. Бісектриса тупого кута паралелограма ділить його сторону на відрізки завдовжки 3 см і 5 см, рахуючи від вершини гострого кута. Обчисліть площу паралелограма, якщо його гострий кут дорівнює 60^{o}.

Додаток М

Тест для визначення рівнів навчальних досягнень учнів з геометрії за курс 7 – 9 класів.

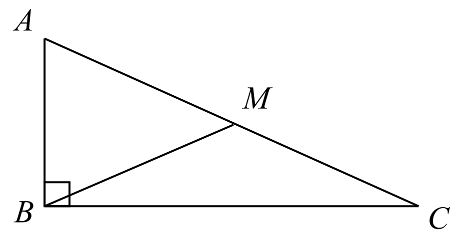
І варіант

1. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle B = 90^{o}$) проведено медіану BM. Яке з тверджень правильне?

а) $\angle A + \angle C = 90^{o}$;

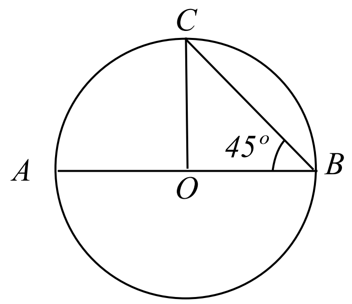
б) M – центр кола, вписаного в трикутник ABC;

в) $AM > BM$.



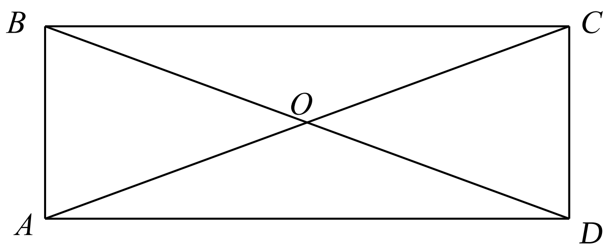
2. Якщо діаметр кола з центром у точці O утворює з хордою BC кут 45º, то градусна міра кута AOC дорівнює:

а) 45º; б) 60º; в) 90º.



3. Якщо $ABCD$ – прямокутник, то:

а) $AC \perp BD$; б) $AC^2 > AB^2 + BC^2$; в) $\angle ACB \neq \angle ACD$.

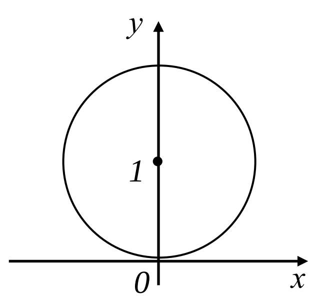


4. Запишіть рівняння кола, зображеного на малюнку.

а) $(x – 1)^2 + y^2 = 1$;

б) $x^2 + (y – 1)^2 = 1$;

в) $(x + 1)^2 + y^2 = 1$.



5. Якщо квадрат описаний навколо кола радіуса r, то площа квадрата дорівнює:

а) r^2; б) $2r^2$; в) $4r^2$

6. Якщо круг, вписаний у квадрат, сторона якого дорівнює $2a$, то площа круга дорівнює:

а) $\frac{\pi a^2}{2}$; б) πa^2; в) $2\pi a^2$.

7. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 10 см, а один із катетів дорівнює 6 см. Обчисліть площу трикутника.

а) 24 см^2; б) 48 см^2; в) 60 см^2.

8. Проекції катетів прямокутного трикутника на гіпотенузу відповідно дорівнюють 9 см і 16 см. Знайдіть довжину меншого катета трикутника.

а) 12 см; б) 15 см; в) 20 см.

9. Обчисліть площу ромба, сторона якого дорівнює 13 см, а різниця діагоналей – 14 см.

а) 60 см^2; б) 120 см^2; в) 240 см^2.

10. У трикутнику два кути дорівнюють 120º і 30º, а прилегла до них сторона дорівнює 10 см. Знайдіть довжину висоти трикутника, проведеної до сторони 10 см.

а) 5 см; б) $5\sqrt{2}$ см; в) $5\sqrt{3}$ см.

11. У ромб вписано коло. Сторона ромба точкою дотику ділиться на відрізки, довжини яких a і b. Обчисліть площу ромба.

а) $\sqrt{ab}$; б) $2\sqrt{a(a+b)}$; в) $2\sqrt{ab}(a + b)$.

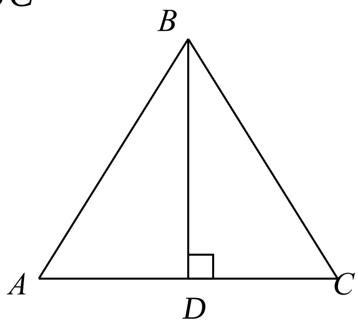
12. Дано точки $A(-2; 0)$, $B(2; 4)$, $C(4; 2)$, $D(0; -2)$. Знайдіть координати центра кола, описаного навколо чотирикутника $ABCD$.

а) (2; 0); б) (1; 0); в) (1; 1).

II варіант

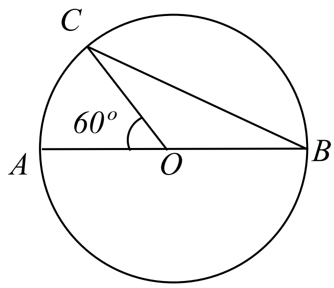
1. У рівнобедреному трикутнику *ABC* з основою *AC* проведено висоту *BD*, $\angle ABD$ = 15º. Яке з тверджень правильне:

а) $\angle ABC$= 45º; б) $\sin \angle C = \dfrac{DC}{BC}$; в) площі трикутників *ABD* і *BCD* рівні?



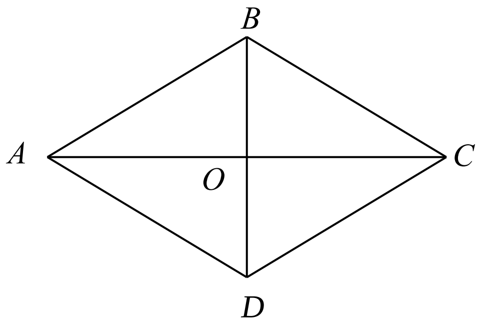
2. Якщо радіуси *OA* і *OC* кола з центром у точці *O* утворюють кут 60º, то градусна міра кута між діаметром *AB* і хордою *BC* дорівнює:

а) 30º; б) 60º; 120º.



3. Якщо *ABCD* – ромб, то:

а)$\angle$ ABC = 90º; б) AC $\perp$ BD; в) AC $\perp$ BC.

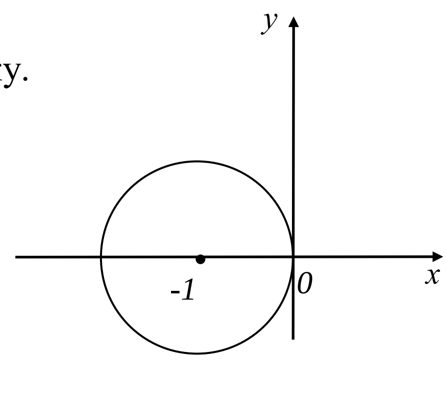


4. Запишіть рівняння кола, зображеного на малюнку.

а) $(x-1)^2 + y^2 = 1$;

б) $x^2 + (y-1)^2 = 1$;

в) $(x+1)^2 + y^2 = 1$.



5. Якщо квадрат вписаний в коло радіуса R, то площа квадрата дорівнює:

а) R^2; б) $2R^2$; в) $4R^2$.

6. Якщо круг описано навколо квадрата, сторона якого дорівнює а, то площа круга дорівнює:

а) $\frac{\pi a^2}{2}$; б) πa^2; в) $2\pi a^2$.

7. Висота рівностороннього трикутника дорівнює $2\sqrt{3}$ см. Обчисліть площу трикутника.

а) $2\sqrt{3}$ см^2; б) $2\sqrt{3}$ см^2; в) $8\sqrt{3}$ см^2.

8. Проекції катетів прямокутного трикутника на гіпотенузу дорівнюють 9 см і 16 см. Знайдіть довжину висоти трикутника, проведеної до гіпотенузи.

а) 12 см; б) 15 см; в) 20 см.

9. Обчисліть площу ромба, сторона якого дорівнює 25 см, а різниця діагоналей – 10 см.

а) 300 см^2; б) 600 см^2; в) 1200 см^2.

10. Дві сторони трикутника дорівнюють $4\sqrt{2}$ см і 7 см, а кут між ними дорівнює 45^o. Знайдіть довжину висоти трикутника, проведеної до сторони 7см.

а) 2,5 см; б) 3 см; в) 4 см.

11. У рівнобічній трапеції, основи якої дорівнюють a і b, діагоналі взаємно перпендикулярні. Обчисліть площу трапеції.

а) $\frac{(a-b)^2}{4}$; б) $\frac{a^2+b^2}{4}$; в) $\frac{(a+b)^2}{4}$

12. Дано точки $A(-1; 0)$, $B(1; 2)$, $C(3; 0)$, $D(1; -2)$. Знайдіть координати центра кола, описаного навколо чотирикутника $ABCD$.

а) (2; 0); б) (1; 0); в) (1; 1)

Додаток Н

Н.1 Статистичний аналіз сумарних результатів тестування учнів експериментальної і контрольної груп на початок експерименту

	Контрольная группа до начала эксперимента	Контрольная группа после окончания эксперимента	Экспериментальная группа до начала эксперимента	Экспериментальная группа после окончания эксперимента
Контрольная группа до начала эксперимента	-	-	Эмпирическое значение критерия Хи-квадрат 2,2645, критическое 7,815. Характеристики сравниваемых выборок совпадают на уровне значимости 0.05	-
Контрольная группа после окончания эксперимента	-	-	-	-
Экспериментальная группа до начала эксперимента	Эмпирическое значение критерия Хи-квадрат 2,2645, критическое 7,815. Характеристики сравниваемых выборок совпадают на уровне значимости 0.05	-	-	-
Экспериментальная группа после окончания эксперимента	-	-	-	-

Н.2 Статистичний аналіз сумарних результатів тестування учнів експериментальної і контрольної груп на початок експерименту

	Контрольная группа до начала эксперимента	Контрольная группа после окончания эксперимента	Экспериментальная группа до начала эксперимента	Экспериментальная группа после окончания эксперимента
Контрольная группа до начала эксперимента	-	-	Эмпирическое значение критерия Хи-квадрат 0,7341, критическое 7,815. Характеристики сравниваемых выборок совпадают на уровне значимости 0.05	-
Контрольная группа после окончания эксперимента	-	-	-	-
Экспериментальная группа до начала эксперимента	Эмпирическое значение критерия Хи-квадрат 0,7341, критическое 7,815. Характеристики сравниваемых выборок совпадают на уровне значимости 0.05	-	-	-
Экспериментальная группа после окончания эксперимента	-	-	-	-

Н.3 Статистичний аналіз сумарних результатів письмової роботи з теми „Геометричні побудови” (7 клас) учнів експериментальної і контрольної груп.

	Контрольная группа до начала эксперимента	Контрольная группа после окончания эксперимента	Экспериментальная группа до начала эксперимента	Экспериментальная группа после окончания эксперимента
Контрольная группа до начала эксперимента	-	-	-	-
Контрольная группа после окончания эксперимента	-	-	-	Эмпирическое значение критерия Хи-квадрат 9,6639, критическое 7,815. Достоверность различий характеристик сравниваемых выборок составляет 95%
Экспериментальная группа до начала эксперимента	-	-	-	-
Экспериментальная группа после окончания эксперимента	-	Эмпирическое значение критерия Хи-квадрат 9,6639, критическое 7,815. Достоверность различий характеристик сравниваемых выборок составляет 95%	-	-

Н.4 Статистичний аналіз сумарних результатів письмової роботи з теми „Подібні трикутники” (8 клас) учнів експериментальної і контрольної груп.

	Контрольная группа до начала эксперимента	Контрольная группа после окончания эксперимента	Экспериментальная группа до начала эксперимента	Экспериментальная группа после окончания эксперимента
Контрольная группа до начала эксперимента	-	-	-	-
Контрольная группа после окончания эксперимента	-	-	-	Эмпирическое значение критерия Хи-квадрат 9,1439, критическое 7,815. Достоверность различий характеристик сравниваемых выборок составляет 95%
Экспериментальная группа до начала эксперимента	-	-	-	-
Экспериментальная группа после окончания эксперимента	-	Эмпирическое значение критерия Хи-квадрат 9,1439, критическое 7,815. Достоверность различий характеристик сравниваемых выборок составляет 95%	-	-

Н.5 Статистичний аналіз сумарних результатів письмової роботи з теми „Площі фігур” (9 клас) учнів експериментальної і контрольної груп.

	Контрольная группа до начала эксперимента	Контрольная группа после окончания эксперимента	Экспериментальная группа до начала эксперимента	Экспериментальная группа после окончания эксперимента
Контрольная группа до начала эксперимента	-	-	-	-
Контрольная группа после окончания эксперимента	-	-	-	Эмпирическое значение критерия Хи-квадрат 8,0654, критическое 7,815. Достоверность различий характеристик сравниваемых выборок составляет 95%
Экспериментальная группа до начала эксперимента	-	-	-	-
Экспериментальная группа после окончания эксперимента	-	Эмпирическое значение критерия Хи-квадрат 8,0654, критическое 7,815. Достоверность различий характеристик сравниваемых выборок составляет 95%	-	-

Н.6 Порівняльний аналіз сумарних результатів виконання тестів учнями контрольної і експериментальної груп до і після проведення експерименту

	Контрольная группа до начала эксперимента	Контрольная группа после окончания эксперимента	Экспериментальная группа до начала эксперимента	Экспериментальная группа после окончания эксперимента
Контрольная группа до начала эксперимента	-	Эмпирическое значение критерия Хи-квадрат 0,1027, критическое 7,815. Характеристики сравниваемых выборок совпадают на уровне	Эмпирическое значение критерия Хи-квадрат 2,2645, критическое 7,815. Характеристики сравниваемых выборок совпадают на уровне	Эмпирическое значение критерия Хи-квадрат 6,6022, критическое 7,815. Характеристики сравниваемых выборок совпадают на уровне
Контрольная группа после окончания эксперимента	Эмпирическое значение критерия Хи-квадрат 0,1027, критическое 7,815. Характеристики сравниваемых выборок совпадают на уровне	-	Эмпирическое значение критерия Хи-квадрат 1,4517, критическое 7,815. Характеристики сравниваемых выборок совпадают на уровне	Эмпирическое значение критерия Хи-квадрат 8,2831, критическое 7,815. Достоверность различий характеристик
Экспериментальная группа до начала эксперимента	Эмпирическое значение критерия Хи-квадрат 2,2645, критическое 7,815. Характеристики сравниваемых выборок совпадают на уровне	Эмпирическое значение критерия Хи-квадрат 1,4517, критическое 7,815. Характеристики сравниваемых выборок совпадают на уровне	-	Эмпирическое значение критерия Хи-квадрат 15,3977, критическое 7,815. Достоверность различий характеристик
Экспериментальная группа после окончания эксперимента	Эмпирическое значение критерия Хи-квадрат 6,6022, критическое 7,815. Характеристики сравниваемых выборок совпадают на уровне	Эмпирическое значение критерия Хи-квадрат 8,2831, критическое 7,815. Достоверность различий характеристик	Эмпирическое значение критерия Хи-квадрат 15,3977, критическое 7,815. Достоверность различий характеристик	-

Додаток П

Таблиця П. 1. **Аналіз результатів тестування**

Показники	Вар-нт	Номер завдання																	
		1 1	2 1	3 1	4 1	5 1	6 1	7 2	8 2	9 2	10 2	11 2	12 3	13 3	14 3	15 3	16 4	17 4	18 4
Кіл-ть правильних відповідей	I	7	7	6	6	6	7	6	6	6	6	5	6	5	6	6	4	3	3
	II	7	6	7	7	6	6	6	7	6	5	6	6	6	6	5	5	4	3
	III	7	8	7	7	7	6	6	5	6	7	7	6	6	5	4	6	4	3
Кіл-ть неправильних відповідей	I	3	3	4	4	4	3	4	4	4	4	5	4	5	4	4	6	7	7
	II	3	4	3	3	4	4	4	3	4	5	4	4	4	4	5	5	6	7
	III	3	2	3	3	3	4	4	5	4	3	3	4	4	5	6	4	6	7
Частка правильних відповідей, pj	I	0,7	0,7	0,6	0,6	0,6	0,7	0,6	0,6	0,6	0,6	0,5	0,6	0,5	0,6	0,6	0,4	0,3	0,3
	II	0,7	0,6	0,7	0,7	0,6	0,6	0,6	0,7	0,6	0,5	0,6	0,6	0,6	0,6	0,5	0,5	0,4	0,3
	III	0,7	0,8	0,7	0,7	0,7	0,6	0,6	0,5	0,6	0,7	0,7	0,6	0,6	0,5	0,4	0,6	0,4	0,3
Частка неправильних відповідей, qj	I	0,3	0,3	0,4	0,4	0,4	0,3	0,4	0,4	0,4	0,4	0,5	0,4	0,5	0,4	0,4	0,6	0,7	0,7
	II	0,3	0,4	0,3	0,3	0,4	0,4	0,4	0,3	0,4	0,5	0,4	0,4	0,4	0,4	0,5	0,5	0,6	0,7
	III	0,3	0,2	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	0,5	0,4	0,3	0,3	0,4	0,4	0,5	0,6	0,4	0,6	0,7
Потенціал складності, qj/pi	I	0,43	0,43	0,67	0,67	0,67	0,43	0,67	0,67	0,67	0,67	1	0,67	1	0,67	0,67	1,5	2,3	2,3
	II	0,43	0,67	0,43	0,43	0,67	0,67	0,67	0,43	0,67	1	0,67	0,67	0,67	0,67	1	1	1,5	2,3
	III	0,43	0,25	0,43	0,43	0,43	0,67	0,67	1	0,67	0,43	0,43	0,67	0,67	1	1,5	0,67	1,5	2,3
Дисперсія балів, qj · pi	I	0,21	0,21	0,24	0,24	0,24	0,21	0,24	0,24	0,24	0,24	0,25	0,24	0,25	0,24	0,24	0,24	0,21	0,25
	II	0,21	0,24	0,21	0,21	0,24	0,24	0,24	0,21	0,24	0,25	0,24	0,24	0,24	0,24	0,25	0,25	0,24	0,24
	III	0,21	0,16	0,21	0,21	0,21	0,24	0,24	0,25	0,24	0,21	0,21	0,24	0,24	0,25	0,24	0,24	0,24	0,25
Коефіцієнт кореляції балів по завданню з сумарними балами по всьому тесту	I	0,71	0,71	0,73	0,73	0,71	0,70	0,71	0,71	0,71	0,73	0,72	0,72	0,72	0,70	0,71	0,71	0,70	0,71
	II	0,70	0,71	0,72	0,70	0,72	0,71	0,70	0,70	0,71	0,70	0,73	0,71	0,71	0,70	0,70	0,70	0,71	0,70
	III	0,71	0,70	0,71	0,71	0,70	0,70	0,70	0,70	0,70	0,72	0,72	0,72	0,7	0,72	0,71	0,71	0,70	0,71

Таблиця П.2.

Матиця результатів виконання тестових завдань у групі з 30 учнів

№ тестових зошитів	Отримані бали за тестові завдання																		Сум бал
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
22	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	40
27	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	40
30	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	40
19	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	40
16	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	0	4	4	36
7	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	0	36
15	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	0	36
10	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	0	4	4	36
23	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	0	4	4	36
18	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4	0	0	32
5	1	1	1	1	1	1	0	2	2	2	2	3	3	0	3	4	0	4	31
13	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	0	4	0	0	29
29	1	1	1	1	1	1	2	2	0	2	0	3	3	3	0	4	0	0	25
11	1	1	1	1	1	1	2	0	2	0	2	3	0	0	0	4	0	4	23
3	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	0	3	0	0	0	0	22
25	1	1	1	1	1	0	2	0	2	0	2	0	3	0	3	4	0	0	21
20	1	1	1	1	0	0	0	2	0	2	0	0	0	3	3	0	4	0	18
12	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2	2	0	0	3	0	0	4	0	12
24	1	0	0	0	1	1	2	0	2	0	0	0	0	3	0	0	0	0	10
9	1	0	0	0	0	1	2	0	0	0	0	0	3	0	3	0	0	0	10
28	0	1	1	0	0	0	2	0	0	2	0	3	0	0	0	0	0	0	9
17	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	3	0	0	0	8
2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	0	3	0	0	0	0	0	0	7
4	0	0	1	1	0	0	0	2	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	7
26	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	2	0	3	0	0	0	0	0	7
6	0	1	0	0	0	0	0	2	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	5
1	1	0	0	1	1	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
8	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	4
21	0	0	1	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
22	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
складність ТЗ	0,047	0,047	0,05	0,05	0,052	0,052	0,055	0,055	0,055	0,055	0,055	0,055	0,058	0,058	0,066	0,083	0,09	0,1	