ІНСТИТУТ ПЕДАГОГІКИ АКАДЕМІЇ ПЕДАГОГІЧНИХ НАУК УКРАЇНИ

На правах рукопису

Божко Віра Геннадіївна

УДК 372.851

ФОРМУВАННЯ КОМБІНАТОРНИХ ЗНАНЬ ТА ВМІНЬ У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИКИ В ОСНОВНІЙ ШКОЛІ

13.00.02 - теорія і методика навчання математики

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата педагогічних наук

Науковий керівник
Хмара Тамара Миколаївна
кандидат педагогічних наук,
старший науковий співробітник

Київ – 2006

ЗМІСТ

ВСТУП 3

РОЗДІЛ 1. Досліджувана проблема в педагогічній теорії та практиці

1.1. Вітчизняний та зарубіжний досвід вивчення комбінаторики в основній школі.....13

1.2. Основні комбінаторні знання та вміння 26

1.3. Задачі як засіб формування основних комбінаторних знань та вмінь…..39

1.4. Психолого-педагогічні передумови вивчення комбінаторики в основній школі

1.4.1. Психологічні особливості учнів основної школи.....51

1.4.2. Розвиток комбінаторного мислення.....59

1.4.3. Методи, засоби і організаційні форми 69

Всновки до розділу 1.....81

РОЗДІЛ 2. Методична система вивчення комбінаторики в основній школі

2.1. Пропедевтика вивчення комбінаторики

2.1.1. 1-4 класи.....83

2.1.2. 5-7 класи.....94

2.2. Вивчення комбінаторики в класах з поглибленим навчанням математики

2.2.1. Особливості вивчення теоретичного матеріалу.....117

2.2.2. Розв’язування задач 142

2.3. Комп’ютерна підтримка формування комбінаторних знань та вмінь.....155

2.4. Організація, проведення і результати педагогічного експерименту. 168

Висновки до розділу 2 182

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ.....185

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 189

ДОДАТКИ.....207

ВСТУП

Актуальність дослідження. Навчання математики в середніх закладах освіти України є важливим компонентом загальноосвітньої і професійної підготовки молоді, неперервної освіти, що забезпечує широкі можливості для інтелектуального розвитку особистості, умінь установлювати причинно-наслідкові зв`язки між фактами, подіями та явищами.

У концепції математичної освіти 12-річної школи в Україні актуальним визначено відбір змісту навчання з урахуванням досягнень світового і вітчизняного досвіду, специфіки навчання математики в навчальних закладах, ідей та поглядів видатних математиків і методистів, сучасної психології та педагогіки. Традиційний зміст навчання математики, що складався десятиріччями, забезпечує досить високий рівень математичної підготовки учнів, проте зміни в галузі техніки, виробництва, освіти, комунікацій ставлять нові вимоги до математичної підготовки і спонукають до переосмислення традиційного змісту, з'ясування тенденцій подальшого його розвитку.

Сучасна шкільна реформа здійснюється з урахуванням Державного стандарту базової та повної середньої освіти, у якому визначені цілі розвитку освітньої галузі, що відповідають об'єктивним вимогам сучасного життя. Традиційні змістові лінії доповнено змістовими лініями "Елементи теорії множин. Комбінаторика", "Початки теорії ймовірностей і елементи статистики", визначено необхідний мінімум знань та вмінь для продовження навчання з цих тем та вимоги до його засвоєння. Це є реальним кроком до створення умов для розвитку одного зі спеціальних і соціально важливих типів мислення – комбінаторного, необхідного сучасній людині як у загальнокультурному плані, так і для професійного становлення та нормальної соціалізації особистості в сучасному суспільстві.

Соціально-економічні зміни в нашому суспільстві обумовлюють потребу сформованості гнучкості, варіативності, критичності мислення, здатності висувати гіпотези перебігу подій та реальності їх підтвердження. Саме тому

актуалізується необхідність включення комбінаторних знань і вмінь в інтелектуальний багаж кожної сучасної людини.

Проблеми комбінаторики привертали увагу видатних математиків на різних етапах розвитку цієї науки: Н.Тарталья, Г. Лейбніца, О. Блоха, Н. Віленкіна, Б. Гнєденка, К. Рибнікова, А. Скорохода, О. Халамайзера, О. Хінчіна, М. Ядренка, І. Яглома та інших [18; 43; 62; 63; 98; 121; 207; 219].

Питання комбінаторики активно досліджувалися відомими зарубіжними математиками: М. Айгнером, К. Бержем, О. Оре, Дж. Райзером, Дж. Ріорданом, Дж.-К. Ротом, Р. Стенлі, П. Халмош [1; 15; 148; 167; 168; 205].

В останні десятиріччя інтерес до комбінаторики значно посилився, оскільки виявилось, що багато проблем теорії інформації, складання та декодування шифрів, проблем, пов'язаних з розробкою оптимальних планів, тобто проблем багатьох галузей людської діяльності мають комбінаторний характер. У зв'язку з цим зараз, у період швидкого процесу комп'ютеризації суспільства, розвитку інформаційних мереж різного рівня та призначення, переходу до ринкових відносин в економіці, на виробництві, суспільство зацікавлене в тому, щоб рівень математичної освіти молоді відповідав вимогам часу.

Людина постійно потрапляє до ситуацій планування своєї діяльності, вибору та прийняття оптимального рішення, його зміни в залежності від зовнішніх обставин. Більш успішно це робитиме людина з розвиненим комбінаторним мисленням. Тому елементи комбінаторики включено в зміст освіти як важливу складову математичної культури кожного учня.

Наприкінці XIX – початку XX століть в ряді підручників для школи з'явилися розділи, до яких було включено теми "Теорія сполук", "Біном Ньютона" [16; 35; 66; 118].

Необхідність уведення комбінаторики до програм середньої школи обговорювалась після революції 1917 року. Так, у програму для фізико-технічних груп другого ступеня єдиної трудової школи-комуни, випущеної в 1919 році, було введено тему "Сполуки ".

У 40-50-і роки здійснювався відбір матеріалів і досліджувались методичні шляхи втілення ідеї вивчення комбінаторики в школі.

У 60-і роки почали переглядатися програми загальноосвітньої школи. У програму, діючу з 1968 року, увійшли теми “Комбінаторика”, “Біном Ньютона”. Для старших класів було введено перші навчальні посібники, що містили елементи комбінаторики. Дуже багато для вирішення проблем вивчення комбінаторики в школі зробили Н. Віленкін, Б. Гнєденко, А. Колмогоров, А. Маркушевич, А. Скороход, М. Ядренко та багато інших.

Протягом 1970-80 рр. комбінаториці було присвячено чимало досліджень. Розглядалися різні аспекти цієї проблеми: спільне вивчення комбінаторики та початків теорії ймовірностей, визначення в курсі математики наскрізної комбінаторно-імовірнісної лінії, вивчення елементів комбінаторики за допомогою графів, популяризація ідей комбінаторики, вивчення комбінаторики в початкових класах тощо [13; 14; 52; 78; 93].

У роботі І. Бєляєвої [14] робиться висновок про те, що навички комбінаторного характеру необхідні учням для вивчення багатьох питань програмного матеріалу. Автор ілюструє ефективність комбінаторного підходу на прикладі вивчення тем: “Ознаки рівності трикутників”, “Подільність чисел”, “Квадратні рівняння”. Під комбінаторним підходом автор розуміє методичний прийом, що міститься в визначенні комбінацій, їх переборах та виборах, що відповідають логічному змісту поставленої задачі. Зрозуміло, використання певних комбінаторних операцій у процесі вивчення окремих тем сприяє формуванню комбінаторних навичок учнів. Однак, автор не ставить питання про цілеспрямовану та систематичну роботу по формуванню комбінаторного мислення учнів.

Дослідження А. Дограшвілі [78] присвячено проблемі формування у восьмирічній школі комбінаторних та імовірнісних понять. У роботі експериментальне розв’язування комбінаторних задач спрямовано на отримання теоретичних результатів (7 клас) у вигляді формул числа розміщень та комбінацій, необхідність яких на цьому етапі вивчення автором достатньо не

доведено, не розкрито роль безформульних методів комбінаторики та їх зв'язок з формульними.

У дослідженні В. Волгіної [52] здійснено спробу дати систему навчання комбінаторики на основі графів. Необхідність використання графів як засобу унаочнення та способу розв'язування комбінаторних задач не викликає сумнівів. Але питання систематичного й послідовного формування комбінаторних знань та вмінь автором не досліджувались.

У дисертації Л. Кабехової [93] опрацьовано ідею про підпорядкування вивчення елементів комбінаторики в 9 класі обчисленню ймовірностей.

З проблемою оновлення змісту освіти, що належить до розряду вічних, вже не можуть не рахуватись і безпосередні учасники навчального процесу – учителі і організатори шкільної освіти, суспільство в цілому. Гострота цієї проблеми викликана, як мінімум, такими обставинами:

- гуманізацією та демократизацією освіти, переводом її на культурно-творчу основу;

- рівневою та профільною диференціацією навчання математики;

- змінами, які відбулися в математиці в середині XX ст. і пов'язані з появою ЕОМ;

- поширенням різних типів загальноосвітніх закладів.

Тому відповідно проблема оновлення змісту математичної освіти на сучасному етапі розвитку суспільства набуває якісно нового аспекту.

Від належного розв'язання завдання "чого навчати", насамперед, залежить рівень підготовки вчителя. Проблема вдосконалення професійно-педагогічної підготовки сучасного вчителя математики, зокрема, з комбінаторики розглянута в роботі І. Войналович [45].

Аксіомою, яка перевірена всією історією людства, є твердження: людина – головний цілісний орієнтир і міра всього в житті суспільства. Ця аксіома має безпосереднє відношення до життя будь-якого закладу освіти. Особистість учня – головний ціннісний орієнтир у діяльності школи. Сьогодні, як ніколи, вчитель повинен навчитися бачити в учневі особистість, розуміти всю складність і

багатогранність її структури, враховувати вікові особливості, виявляти в учня спадкові, набуті нахили, здібності й можливості, створювати максимально сприятливі умови для їх розвитку. Тільки за таких умов учитель може по-справжньому ефективно керувати процесом навчання, розвитку й виховання учня як особистості, контролювати цей процес, надавати йому відповідних стимулів й вносити корективи [72].

Як зазначається у Концепції 12-річної школи України [105], гуманістичні цінності освіти зумовлюють зміну авторитарно-дисциплінарної моделі навчання на особистісно орієнтовану.

Спрямованість вектора шкільної освіти у площину цінностей особистісного розвитку, варіативності й відкритості школи зумовлює принципову необхідність переосмислення всіх чинників, від яких залежить якість навчально-виховного процесу: змісту, методів, форм навчання і виховання, управлінських рішень, взаємовідповідальності учасників навчально-виховного процесу, системи контролю й оцінювання.

Сьогодні актуальність включення комбінаторики до змісту шкільного курсу математики визнана математиками, методистами, цей розділ увійшов до навчальних програм. Так, у програму з математики для 5 класу згідно з концепцією математичної освіти 12-річної школи включено розв’язування комбінаторних задач. Програмою для класів з поглибленим вивченням математики передбачено вивчення комбінаторики у 8 та 9 класах, але чинні підручники не містять відповідних розділів. Спостерігаються позитивні зміни для основної школи. Однак вітчизняного досвіду вивчення комбінаторики в основній школі, по суті, не існує. Не розроблено належною мірою методичне забезпечення в умовах рівневої та профільної диференціації. Комбінаторні знання можуть стати знаряддям математичного мислення тільки за умови послідовного й систематичного формування протягом усього часу вивчення математики.

Отже, методичний аспект проблем навчання комбінаторики в основній школі досліджений недостатньо. Саме тому наше дослідження присвячене цій

актуальній проблемі “Формування комбінаторних знань та вмінь у процесі вивчення математики в основній школі”.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження виконано відповідно до тематичного плану наукових досліджень лабораторії фізичної та математичної освіти Інституту педагогіки АПН України з теми “Науково-методичні засади відбору та реалізації змісту математичної освіти в основній і старшій школі” (№ державної реєстрації 0102U000136). Тему дисертаційного дослідження затверджено Вченою радою Інституту педагогіки АПН України (протокол №2 від 14.03.02) та узгоджено Радою з координації наукових досліджень у галузі педагогіки і психології в Україні (протокол №1 від 25.01.05).

Реалізація прогресивних ідей, закладених у Концепції нової 12-річної базової математичної освіти та Державного стандарту шкільної математичної освіти в освітній галузі “Математика”, можна сподіватись, відбудеться на час остаточного переходу школи до моделі нової 12-річної структури.

Об’єкт дослідження – процес навчання математики учнів основної школи.

Предмет дослідження – методика навчання комбінаторики в основній школі.

Мета дослідження – на основі вивчення та узагальнення вітчизняного і зарубіжного досвіду, психолого-педагогічної та методичної літератури, педагогічного експерименту вивчення комбінаторики в школі розробити методичну систему навчання комбінаторики у процесі вивчення математики в основній школі.

Гіпотеза дослідження: якщо систематично й послідовно формувати комбінаторні знання та вміння засобом спеціально дібраної системи теоретичних відомостей і відповідних вправ та задач, то це сприятиме:

- активізації навчальної діяльності учнів;
- розвитку логічного, зокрема комбінаторного мислення;
- підвищенню успішності та якості знань учнів.

Виходячи з предмета, мети і гіпотези, передбачалось вирішення таких **завдань:**

1. З'ясувати стан порушеної проблеми в педагогічній теорії та практиці шляхом аналізу психолого-педагогічної, методичної і навчальної літератури та педагогічної практики.

2. Визначити психолого-педагогічні та методичні передумови формування комбінаторних знань та вмінь в учнів основної школи.

3. Розробити методичну систему навчання комбінаторики в основній школі.

4. Експериментально перевірити ефективність розробленої методичної системи.

Методологічну основу дослідження становлять найважливіші положення теорії пізнання й розвитку мислення, діяльнісної концепції навчання, системного, комплексного та особистісно орієнтованого підходу до навчально-виховного процесу (Л. Виготський, П. Гальперін, В. Давидов, Н. Лернер, С. Рубінштейн та ін.), теорії проблемного та розвиваючого навчання (Д. Ельконін, Л. Занков, З. Калмикова, М. Махмутов, І. Якиманська та ін.), наукові здобутки з методики навчання комбінаторики (Я. Бродський, Н. Віленкін, Б. Гнєденко, А. Колмогоров, О. Маркушевич, З. Слєпкань, А.Столяр, М. Ядренко та ін.), з проблеми розвитку пізнавальної активності та управління процесом навчання (Д. Богоявленська, Є. Кабанова-Меллер, Н. Менчинська, Н.Тализіна та ін.), з методики навчання математики в школі (Г. Бевз, М. Бурда, Я. Грудьонов, Ю. Колягін, З. Слєпкань, М. Шкіль, В. Швець та ін.), сучасні концепції комп'ютерної підтримки навчального процесу (Ю. Горошко, М. Жалдак, Ю. Машбиць, Н. Морзе та інші).

Для з'ясування стану проблеми в педагогічній теорії, визначення психолого-педагогічних і методичних передумов формування комбінаторних знань та вмінь в учнів основної школи, розробки методичної системи навчання комбінаторики в основній школі застосовувались такі **теоретичні методи:** аналіз наукової, психолого-педагогічної, методичної та навчальної літератури з

проблеми дослідження; змісту програм, підручників, що містять тему “Елементи комбінаторики”; порівняння, узагальнення, систематизація теоретичного і практичного матеріалу.

У процесі впровадження розробленої методичної системи та перевірки її ефективності застосовувались такі **емпіричні методи:** бесіди з учителями, учнями; спостереження за процесом навчання; анкетування; систематизація та узагальнення педагогічного досвіду вчителів; аналіз ефективності дидактичних засобів та сучасних інформаційних технологій навчання; педагогічний експеримент; аналіз і опрацьовування отриманих у ході дослідження результатів.

Етапи дослідження.

Перший етап (1999 – 2001 рр.). Аналізувався навчально-виховний процес з метою з’ясування та уточнення його закономірностей, отримання загальної інформації з досліджуваної проблеми. На цьому етапі також вивчалися інтереси та мотиваційна сфера учнів основної школи, виявлялися особливості формування комбінаторних знань та вмінь.

Другий етап (2001-2003рр.). Було відібрано і систематизовано матеріал з комбінаторики для вивчення його в основній школі.

Здійснювалась розробка та експериментальна перевірка методики формування основних комбінаторних знань та вмінь, перевірялась доступність теоретичного і практичного матеріалу для учнів основної школи в контрольних та експериментальних класах. На цьому етапі було включено як дидактичний засіб навчання зошити з друкованою основою.

Третій етап (2003-2004рр.). Здійснювалося впровадження та коригування розробленої методики.

Наукова новизна дослідження:

- уперше розроблено методичну систему, за допомогою якої забезпечується формування основних комбінаторних знань та вмінь протягом усього часу навчання в основній школі;

- доведено педагогічну доцільність, доступність та можливість послідовного формування комбінаторних знань та вмінь в учнів протягом навчання в основній школі.

Теоретичне значення полягає в обґрунтуванні доступності та доцільності послідовної реалізації положення концепції змісту математичної освіти в 12-річній школі та Державного стандарту базової та повної середньої освіти в освітній галузі "Математика" про включення до змісту шкільної освіти наскрізної комбінаторної змістової лінії, у визначенні теоретичних основ формування комбінаторних знань та вмінь в учнів основної школи, у розробці методичних вимог до системи навчальних завдань.

Практичне значення: розроблено та експериментально перевірено ефективність методичної системи, спрямованої на послідовне вивчення комбінаторики в основній школі, зокрема, системи теоретичних знань, вправ і задач комбінаторного характеру та методичних рекомендацій з їх використання. Результати дослідження можуть бути використані вчителями математики, методистами, авторами підручників та навчальних посібників.

Особистий внесок здобувача у роботах, опублікованих у співавторстві, полягає в укладанні системи вправ і задач комбінаторного характеру та методики її використання.

Апробація результатів дослідження. Результати дослідження доповідалися на двох міжнародних конференціях "Ціннісні пріоритети освіти XXI століття" (Луганськ, 2003), "Актуальні проблеми теорії та методики навчання математики" (Київ, 2004), двох Всеукраїнських конференціях "Науково-методичний супровід модернізації початкової освіти" (Луганськ, 2002), "Проблеми математичної освіти" (Черкаси, 2005), Всеукраїнському методичному семінарі з проблем навчання математики (Національний педагогічний університет ім. М.П.Драгоманова, 2004), на семінарах кафедри загальної математики (Луганський національний педагогічний університет імені Тараса Шевченка, 2001-2005).

Публікації. Основні положення і результати дисертації відображені в 13 роботах, серед них 6 – у наукових фахових виданнях, 5 – у тезах та матеріалах конференцій, 2 рекомендовано лабораторією фізичної і математичної освіти Інституту педагогіки АПН України як експериментальні навчальні посібники.

РОЗДІЛ 1
ДОСЛІДЖУВАНА ПРОБЛЕМА В ПЕДАГОГІЧНІЙ ТЕОРІЇ ТА ПРАКТИЦІ

1.1. Вітчизняний та зарубіжний досвід вивчення комбінаторики в основній школі

Комбінаторика – один із традиційних розділів дискретної математики. Як розділ математики комбінаторика вивчає питання про те, скільки сполук, пов'язаних з тими або іншими умовами, можна утворити з даних об'єктів.

Історія розвитку комбінаторики свідчить про її постійно зростаюче наукове та практичне значення в житті людства. Із задачами, що отримали потім назву комбінаторні, люди були знайомі вже декілька тисячоліть тому. У стародавньому Китаї захоплювались складанням магічних квадратів, у яких задані числа розміщувалися так, що їх сума по всіх горизонталях, вертикалях та головних діагоналях була однаковою; у стародавній Греції підраховували число різних комбінацій довгих та коротких складів у віршованих розмірах, вивчали фігури, які можна скласти з частин особливим чином розрізаного квадрату тощо.

У XVI столітті в житті привілейованих людей тодішнього суспільства велике місце посідали азартні ігри. У карти й кості вигравалося і програвалося золото і діаманти, палаци й маєтки, породисті коні і дорогі прикраси. Були поширені всілякі лотереї. Спочатку комбінаторні задачі стосувалися, в основному, азартних ігор, наприклад, питань, скількома способами можна викинути дане число очок, кидаючи дві чи три кості, скількома способами можна одержати двох королів у картковій грі. Ці та інші проблеми азартних ігор були рушійною силою в розвитку комбінаторики і теорії ймовірностей.

Теоретичні дослідження з питань комбінаторики почали в XVII столітті французькі вчені Б. Паскаль (1623-1662) і П. Ферма (1601-1665). Вихідним пунктом їхніх досліджень також були проблеми азартних ігор [40].

Термін "комбінаторика" був уведений у математику німецьким вченим Г. Лейбніцем. У 1666 році Лейбніц опублікував роботу "Міркування про комбінаторне мистецтво". Комбінаторику він розумів дуже широко, як складову будь-якого дослідження, будь-якого творчого акту, що припускає спочатку аналіз (розчленовування цілого на частини), а потім синтез (з'єднання частин у ціле).

У 1713 році опубліковано роботу Я. Бернуллі (1654-1720) "Мистецтво припущень", у якій досить повно були викладені відомі на той час комбінаторні факти. Робота складалася із 4-х частин; комбінаториці була присвячена друга частина, у якій містяться формули: для числа перестановок з *n* елементів, для числа сполучень (названого Я. Бернуллі класовим числом), без повторень і з повторенням, для числа розміщень з повтореннями і без повторень.

Наприкінці XVIII - початку XIX століть математики комбінаторної школи Гіндербурга спробували побудувати загальну комбінаторну теорію. Деякі комбінаторні проблеми набули при цьому настільки розвиненої форми, а їх дослідження породили настільки великий обсяг інформації і дали суттєві результати, що стало можливим розглядати їх як самостійні математичні дисципліни.

У XX столітті завдяки роботам Дж.К. Рота (1964), а потім Р. Стенлі відбувається стрімкий процес алгебраїзації комбінаторики. Вивчення ними частково упорядкованих множин, властивостей функції Мебіуса, абстрактних властивостей лінійної залежності, виявлення їхньої ролі під час розв'язування комбінаторних задач сприяли збагаченню комбінаторних методів дослідження і подальшої інтеграції комбінаторики в сучасну математику.

Прослідкуємо за розвитком та частковою реалізацією ідеї введення комбінаторики до шкільної програми.

Ще наприкінці XIX – початку XX століть підручники для гімназій містили теми: "Теорія сполук. Біном Ньютона" [16; 66; 118].

Єдиних програм для шкіл після революції 1917 року не існувало, вчителі користувалися тимчасовими програмами, що видавались Наркомпросом. Тему

“Сполуки” було введено в програму для фізико-технічних груп другого ступеня єдиної трудової школи-комуни, випущеної в 1919 році.

1925-1926 роки характеризуються масовим введенням програм ГУСа, відповідно до яких вихідним пунктом у навчанні була трудова діяльність. Програма містила багато нового та цікавого, корисного для загального математичного розвитку учнів і підготовки їх до трудової діяльності.

Оскільки програми ГУСа (семирічна школа) не поширювалась на VIII і IX класи з педагогічним, кооперативним, адміністративно-радянським ухилом та на робітничі факультети і мали досить багато інших недоліків, то виникла необхідність уведення з 1927-28 н.р. обов’язкових навчальних планів і програм. Вони містили питання теорії сполук та біному Ньютона (у IX класі). Навчання математики забезпечувалось підручниками і посібниками [54; 111].

У 1931 р. переглядаються шкільні програми. Основною метою було визначити коло знань і вмінь школярів і в цілому зорієнтувати їх на підготовку до вступу до вищого навчального закладу. Нова програма з математики для шкіл, за якою почали працювати з 1935 р., і яка проіснувала майже два десятиріччя, передбачала вивчення елементів комбінаторики та формули бінома Ньютона в курсі алгебри X класу. Ці теми в курсі алгебри вивчалися за підручником А. Кисельова, що містив розділ “Сполуки”. У цьому підручнику не використовувалося поняття множини під час введення різних видів сполук, матеріал було подано в доступній для учнів масової школи формі [96].

У 1940-1950 роках удосконалюються підручники і виходить багато статей з питань навчання математики в школі. Важливі думки про структуру і зміст шкільного курсу алгебри викладені в роботах А. Маркушевича. Ним було представлено нову програму з алгебри для старших класів, за якою в X класі розглядалися питання комбінаторики із застосуванням до підрахунку ймовірностей.

Активне використання математичних методів у різних галузях науки і техніки, в автоматизації праці і процесів управління, в різних сферах практичної діяльності людини, розвиток сучасної математики поставило перед

шкільною математичною освітою нові проблеми. Уже на початку 50-х років в усіх країнах назріла необхідність модернізації змісту курсу математики середньої школи, зближення його з ідеями і методами сучасної математики. Тому в 50-і роки активізує свою діяльність Міжнародна комісія з математичної освіти, яка провела ряд конференцій, сесій, семінарів, симпозіумів. Питання удосконалення шкільної математичної освіти обговорюється на міжнародних математичних конгресах.

На Міжнародному конгресі в Амстердамі в 1954 р. Міжнародна комісія з математичної освіти представила доповідь, у якій пропонувалося радикально перебудувати шкільний курс математики, поклавши в його основу поняття множини, перетворення і структури. На Міжнародному конгресі математиків в Стокгольмі 1962 р. зазначалось, що більшість країн пропонують увести до шкільного курсу елементарну теорію множин, елементи математичної логіки, поняття сучасної алгебри, початкові відомості з теорії ймовірностей і математичної статистики. Формулюючи мету навчання математики в школі, американський математик-педагог угорського походження Д. Пойа, наприклад, підкреслює, що найголовніше – навчити молодь думати [158, с. 287].

У 50-60 роки виявились дві тенденції в напрямку модернізації шкільного курсу математики [99].

1) У першому випадку пропонувалося здійснити побудову шкільного курсу на основі елементарних понять теорії множин із підпорядкуванням конкретних класів функцій (наприклад, числових функцій числової змінної) загальному поняттю відображення, введення поняття границі та впровадження у школу елементів диференціального та інтегрального числення.

2) У другому випадку центр ваги переносився на впровадження в шкільне викладання елементів дискретної математики, які й у самій науці вийшли на передній план у зв’язку із задачами переробки інформації й розвитком обчислювальної техніки (математична логіка в її прикладному аспекті, графи, комбінаторика, дискретна теорія ймовірностей тощо).

Комісія для визначення змісту освіти розробила новий навчальний план для середньої школи. У 1965 році під керівництвом А. Колмогорова було опрацьовано проект нової програми для IV-VIII і IX-X класів. Цей проект у багатьох положеннях принципово відрізнявся від усіх попередніх програм радянської школи. Його особливістю було посилення уваги до узагальнюючих ідей математики.

Математичні погляди А. Колмогорова знайшли відображення в статті "Введення в теорію ймовірностей і комбінаторику" [98]. У ній пропонувалось вводити основні комбінаторні поняття разом з теорією ймовірностей на прикладах.

У програмі, діючій з 1968 року, в IX класі темі "Принцип математичної індукції. Комбінаторика. Біном Ньютона" приділялося 15 годин. У підручниках [2; 3; 37; 97; 106] ставилося завдання навчити учнів розв'язувати нескладні комбінаторні задачі (визначати вид сполук і застосовувати формули), записувати розкладання натурального степеня бінома для конкретних числових значень n.

Розробляються програми факультативних курсів, один з них – "Початки теорії ймовірностей з елементами комбінаторики". Його мета – вивчення додаткових тем, досить важливих із загальноосвітнього погляду, і ознайомлення із застосуваннями математики.

З 1967 року широко висвітлюється досвід роботи за новими шкільними програмами і підручниками шкіл усіх союзних республік. Із публікацій, що розкривають зміст факультативних занять, значний інтерес для подальшого дослідження становлять статті А. Блоха, Н. Віленкіна, Б. Гнєденка, А. Колмогорова, А. Маркушевича, І. Яглома та інших [18; 63; 98; 121; 218].

У цей же період виникає нова форма диференційованого навчання – почали створюватися класи з математичною спеціалізацією. Головне їх призначення – розвивати інтерес до математики, формувати логічне мислення на більш глибокій основі, забезпечувати більш ґрунтовну математичну освіту. Результати такого навчання повинні забезпечити підготовку до професійної

діяльності, яка вимагає досить високого рівня математичної культури для продовження навчання. У цих класах вивчається більш розширений, у порівнянні із загальноосвітньою школою, курс математики. Перші такі класи були організовані на базі школи №425(444) м. Москви. Досить швидко вони поширились по всій країні. Було створено фізико-математичні школи на базі Сибірського відділення АН СРСР і МДУ імені Ломоносова, при Ленінградському і Київському університетах (1963р.), з 1993р. – Український фізико-математичний ліцей. Комбінаторику тут вивчають не тільки на факультативах, а і в обов'язковому курсі математики [81]. Для таких класів і шкіл почали видаватися спеціальні підручники та навчальні посібники [4; 79; 90; 122; 123; 198].

З'явилось багато цікавих робіт вітчизняних учених, які стосувались питань вивчення комбінаторики на популярному рівні з використанням мінімального математичного апарату, викладено початкові поняття і основні правила з детальними поясненнями на нескладних прикладах [40; 41; 42; 85; 204].

Проблема вивчення комбінаторики в школі активно досліджувалась в період 1970-1980 рр. Розглядалися різні методичні моделі, але напрямок більшості досліджень характеризується тим, що комбінаториці в них відводиться допоміжна роль: вивчення її підпорядковано меті вивчення початків теорії ймовірностей. Однак, оскільки сьогодні комбінаторика має дуже широку сферу застосувань, то цей розділ сучасної математики набуває самостійного значення як необхідний компонент середньої математичної освіти. Отже, існує потреба в подальших дослідженнях та пошуках більш досконалих підходів до вивчення комбінаторики з урахуванням попереднього досвіду, зокрема й досвіду вивчення комбінаторики у вищій школі.

На жаль, у 80-90 роки комбінаторика до програми основного курсу математики не ввійшла і була винесена на факультативні заняття. Але розвиток дискретної математики, її багатогранні зв'язки з іншими галузями науки і безпосередньо з виробництвом вплинули і на нові підходи до відбору змісту

шкільної математичної освіти. Цій проблемі велику увагу приділяють провідні математики та методисти: А. Блох, Н. Віленкін, Б. Гнєденко, О. Дубинчук, А. Колмогоров, А. Маркушевич, З. Слєпкань, О.Хінчін, М. Ядренко та інші. Більш того, як зазначав І.Яглом, "...нова математика, в силу свого скінченого характеру, значно доступніша для початківців, ніж класичний математичний аналіз; вона скоріше може зацікавити тих, хто навчається, викличе менше труднощів і тому більше підходить для викладання навіть на ранніх стадіях навчання" [218]. Ця обставина разом з глибокою переконаністю багатьох математиків і педагогів в життєздатності й важливості нових напрямків математики сприяла широкому міжнародному руху за модернізацію навчання математики в середній і вищій школі.

Сьогодні розділи математики, в яких не використовуються уявлення про нескінченні множини, границі й неперервність, стали тепер більш змістовними і важливими, ніж це думали математики XIX століття або першої половини XX століття. Якщо, починаючи з XVII століття, панівне положення у математиці займало вивчення неперервних функцій, що було основою всіх застосувань математики у фізиці і техніці, то з середини XX століття почалося відродження інтересу до так званої "до-ньютонівської" або скінченної математики, яка оперує лише скінченними множинами і функціями, які визначені на таких множинах.

Здійснений аналіз методичних досліджень та досвіду впровадження в практику їх результатів дав змогу дійти до висновку, що в межах середньої школи ознайомлення з комбінаторикою повинно підпорядкуватися не лише прагненням до професійного навчання, а й до виховання в учнів нового погляду на явища оточуючої дійсності, виховання в них уміння бачити застосування математичного апарату і нових ідей, що розглядаються, для розв'язування різноманітних задач.

Соціально-економічні зміни, що відбуваються в нашому суспільстві, обумовлюють потребу включення комбінаторних знань в інтелектуальний багаж кожної сучасної людини.

Необхідність у навчанні елементам комбінаторики першими відчули вчителі інформатики, оскільки на уроках і олімпіадах з інформатики учні постійно мають справу з комбінаторними задачами, перебором варіантів, зі способами їх скорочення. Часткове розв'язання цієї проблеми містять результати дослідження Т. Чепрасової [209]. Пропонується елементи математичної логіки та теорії графів викладати в курсі інформатики.

Сьогодні в Україні активно ведеться робота з реформування шкільної освіти. Оскільки цілі навчання є провідним компонентом методичної системи, то і всі інші компоненти визначаються цими цілями. Реформування потребує уточнення і доповнення змісту шкільної математичної освіти, що відповідає новій соціальній ситуації. У Державному стандарті базової та повної середньої освіти в Україні, зокрема для освітньої галузі "Математика", визначено цілі розвитку освітньої галузі, що відповідають об'єктивним вимогам сучасного життя і потребам особистості. Змістовими лініями "Елементи теорії множин. Комбінаторика", "Початки теорії ймовірностей та елементи статистики" доповнено традиційні змістові лінії.

Актуальність елементів комбінаторики для шкільного курсу математики визначено математиками, методистами, цей розділ увійшов до навчальних програм, підручників. Значно збільшилась увага до комбінаторики на сторінках методичних видань, відбувається становлення методичного досвіду формування комбінаторних уявлень, починаючи з початкової школи [11; 26; 29; 30; 31; 44; 47; 117; 154; 220]. Відповідно до концепції математичної освіти 12-річної школи в 5 класі передбачено розв'язування комбінаторних задач [104]. У 11 класі за чинною програмою для загальноосвітніх навчальних закладів темі "Комбінаторика" приділяється 8 годин. Учні мають ознайомитись з поняттям множини, поняттями "перестановки", "розміщення", "комбінації", навчитися розрізняти види сполук і розв'язувати нескладні комбінаторні задачі. У класах з поглибленим вивченням математики комбінаторику включено до програм з 8 по 11 клас.

Ці ідеї реалізовані в підручниках та посібниках з математики для 5 класу [8; 12; 124; 125; 136], для 11 класу таких авторів, як М. Шкіль, З. Слєпкань, О. Дубинчук для загальноосвітньої школи та авторів М. Шкіль, Т. Колесник, Т. Хмара для 11 класу шкіл та класів з поглибленим вивченням математики [5; 6], у яких є розділ “Елементи комбінаторики”, Я. Бродського “Комбінаторика без формул” [28]. Посібник О.Істера “Комбінаторика, біном Ньютона та теорія ймовірностей у школі” налічує понад 400 задач, систематизованих за темами та методами розв’язування [89]. Проте, щоб такі необхідні в сучасному житті комбінаторні знання міцно й органічно ввійшли у шкільну освіту, потрібна послідовність протягом усього часу навчання математики і, напевно, під час вивчення інших предметів.

На цей час залишається ряд невирішених проблем:

1. Згідно з програмами з математики для загальноосвітніх закладів [163] вивчення елементів комбінаторики віднесено до 11 класу. Але учні випускних класів не мають відповідних мотивів для вивчення цієї теми, адже вона не входить ані до завдань державної атестації, ані до вступних іспитів.

2. Дуже тісно з цією проблемою пов’язана проблема дефіциту навчального часу. Дослідження помилок учнів у процесі розв’язування комбінаторних задач дозволяє зробити висновок, що учні, які не зустрічалися раніше з комбінаторними задачами, не встигають за такий короткий час засвоїти своєрідні прийоми комбінаторного мислення. Локальне вивчення теми призводить до порушення доцільного співвідношення розвивального та формально-алгоритмічного аспектів вивчення комбінаторики. Учні набувають умінь розв’язувати задачі, що потребують лише обчислень за формулами, однак, будь-які нестандартні, хоча й прості, задачі викликають певні труднощі. Більшість учителів розглядають цю тему формально на рівні опрацювання основних знань.

Працюючи за традиційною методикою, вчителі пропонують учням роботу, спрямовану на використання певного поняття, що вивчається. У процесі вивчення кожного окремого поняття та застосування його до

розв’язування задач створюється позитивне враження про нормальне засвоєння учнями цього матеріалу. Але помилки з’являються пізніше, після введення трьох понять, коли учням пропонуються задачі, пов’язані з різними комбінаторними поняттями. Поняття не перетворюються в знаряддя діяльності та пізнання, оскільки залишаються недостатньо усвідомленими.

Нами було проведено письмову роботу для учнів IX класів з поглибленим вивченням математики після завершення вивчення комбінаторики. Вона містила такі завдання.

1. З десяти цифр треба вибрати п’ять різних так, щоб серед них була цифра 6. Скількома способами це можна зробити?

2. Скількома способами можна розбити на дві групи 14 хлопчиків так, щоб одна містила 8, інша – 6 хлопчиків?

3. Скількома способами можна скласти дві футбольні команди з 22 хлопців по 11 в кожній?

4. Скільки різних неправильних дробів можна утворити з чисел 3, 5, 7, 11, 13, 17 так, щоб у кожний дріб входило два різних числа?

5. У дитячому садку вихователька запропонувала Наталочці на вибір трьох різних ляльок і трьох різнокольорових ведмедиків. Скількома способами Наталочка може вибрати три іграшки, щоб серед них обов’язково було дві ляльки?

Результати цієї письмової роботи представлено графіком функції *f(k)*, де *k* – номер задачі, а значення *f(k)* – відсоток правильного розв’язання задачі.

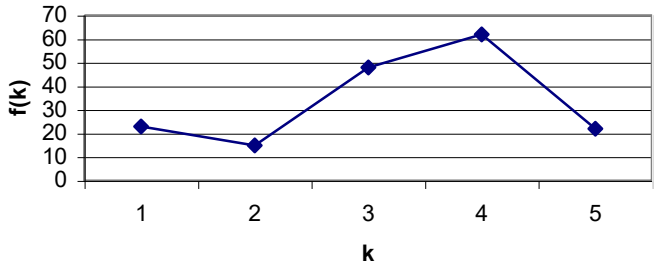


Рис. 1.1. Графік функції f(k)

Відсоток правильно розв’язаних задач невисокий.

У задачі 3 учні розмірковують наступним чином: одну команду з 11 хлопців можна вибрати $C_{22}^{11} = \frac{22!}{11!11!} = 705432$ способами, а дві команди - 705432×2 = 1848 способами. Або розмірковуючи аналогічно, знаходять число розміщень.

Аналогічні помилки учні зробили і під час розв’язування задачі 2. Найбільш поширеними були наступні:

а) $C_{14}^{6} + C_{14}^{8} = 6006$

б) $C_{14}^{8} = C_{14}^{6} = 3003$ $C_{14}^{6} = 3003$ 3003 + 3003 = 6006

в) $A_{14}^{8} + A_{14}^{6}$

Наведені розв’язання говорять про те, що:

а) учні плутають поняття комбінації і розміщення;

б) хоча учні без утруднень дають формальне доведення властивості комбінацій $C_n^k = C_n^{n-k}$ застосувати її в конкретній ситуації вони не можуть.

Причини такого положення полягають в тому, що вивчення комбінаторики в класах з поглибленим вивченням математики в VIII класі починається без достатньої підготовчої роботи. Ілюстрація ознак комбінаторних понять виявляється недостатньою для засвоєння змісту поняття. Через обмеженість навчального часу обмежені можливості підвищення варіативності ілюстративного матеріалу та підкріплення засвоєння поняття експериментальною роботою учнів.

Позитивне розв’язання цієї проблеми може бути досягнуто шляхом включення комбінаторики в систему вправ учнів. Умовно вивчення комбінаторики можна поділити на такі основні етапи:

І етап. Побудова та використання різних комбінаторних моделей відповідно до змісту задачі (1-4 класи).

ІІ етап. Уведення основних понять комбінаторики, вивчення правил додавання та множення (5-9 класи).

ІІІ етап. Вивчення основних формул комбінаторики та використання їх до розв’язування задач різних рівнів складності (11 клас, 8-9 класи з поглибленим вивченням математики).

3. Недостатня підготовленість учителів до викладання комбінаторики. Більшість учителів закінчила педагогічні вузи понад 10 років тому. У той час питання введення комбінаторики до шкільного курсу математики лише дискутувалося, і багато педагогічних вузів не приділяли належної уваги цій темі під час підготовки майбутніх вчителів математики. За браком часу нерідко учителі не розглядають цю тему зовсім.

4. У класах з поглибленим вивченням математики вивчення комбінаторики передбачене програмою [164] у 8, 9 та 11 класах. Але чинні підручники для 8 і 9 класів відповідної теми не мають.

Проте, на наш погляд, головною метою вивчення комбінаторики в основній школі є розвиток комбінаторного мислення, таких його рис, як критичність, варіативність, гнучкість, що можливе тільки за умови послідовного та систематичного вивчення комбінаторики протягом усього терміну навчання в школі.

У школах ряду країн, як-от: Франція, Англія, США, Австрія, Польща, Угорщина, країни Балтії елементи комбінаторики впроваджуються, починаючи з 20-30 років XX століття [59; 152; 210].

В англійських школах керуються думкою, що “малі діти не розуміють абстрактних понять”, тому з ними розглядають конкретні об’єкти. Перехід від початкової школи до середньої супроводжується різким поворотом від конкретної дії до формального математичного апарату, до більш абстрактного навчання. Тепер ставиться завдання дати можливість дітям змінити спосіб мислення від конкретного до абстрактного [224; 228].

Не залишились поза увагою питання комбінаторики і в програмах з математики у США. У V–VIII класах середнього рівня шкіл США ознайомлюються з елементами теорії множин. На вивчення питань комбінаторики відводиться різна кількість годин, але вони є обов’язковими

[222; 223; 227]. Наприклад, програма курсу “Математика для коледжів” на елементи комбінаторики (комбінації, розміщення, перестановки) виділяє 3 години. Розглядається велика кількість простих прикладів.

Про підготовку дітей до сприймання деяких ідей комбінаторики йдеться у програмних вимогах з математики для початкової школи Польщі [226; 229]. Основним засобом ознайомлення з цими ідеями є системи доступних для дітей задач і вправ, розв’язування яких передбачає, насамперед, маніпуляційну діяльність. Матеріалом для цих вправ служать навколишні предмети, самі учні, їхні іграшки тощо. Методичними рекомендаціями для вчителів є науково-методичні настанови та популярні статті А.Плоцьки [157]. У курсі математики класичних, гуманітарних ліцеїв передбачається розгляд таких тем (IV клас) “Задачі комбінаторики. Задачі на обчислення кількості відрізків і вибору пар із скінченних множин. Приклади застосування графів до розв’язування задач комбінаторики. Задачі на утворення слів з букв алфавіту, позиційних систем числення. Вибір шляху між двома пунктами. Трикутник Паскаля.”

У школах Німеччини в 11 класі розглядаються основні поняття комбінаторики, прості задачі та трикутник Паскаля [225].

У підручниках за редакцією Г. Дорофєєва і І. Шаригіна “Математика–5” та “Математика-6” передбачено вивчення таких тем “Перебір можливих варіантів”, “Таблиці і діаграми” (5 клас), “Комбінаторика” (Розв’язування комбінаторних задач. Застосування правила множення в комбінаториці) (6 клас) [126; 127].

Проблема оновлення змісту математичної освіти, яка сьогодні розв’язується в нашій країні, надзвичайно складна, а тому вимагає постійної й пильної уваги як з боку педагогічної громадськості, так і з боку дослідників педагогічних проблем. Зміни в галузі техніки, виробництва, освіти, комунікацій ставлять нові вимоги до математичної підготовки професійних кадрів і спонукають до переосмислення традиційного змісту, з’ясування тенденцій дальшого його розвитку.

Як бачимо, проблема включення елементів комбінаторики до шкільної програми не нова, і хоча вона давно вже є предметом обговорення, до цього часу не отримала задовільного розв'язання. Це, на нашу думку, пояснюється рядом причин: відсутністю підручників, посібників, дидактичних матеріалів, методичних розробок, слабкою матеріальною базою, консерватизмом та формалізмом у навчанні, скороченням навчальних годин, непідготовленістю вчителів. З педагогічного погляду введення елементів комбінаторики до курсу математики є процесом специфічним та складним. Пропедевтичний матеріал з комбінаторики повинен послідовно включатись до змісту навчання математики в основній школі. Саме в такий спосіб реалізується проблема в програмі з математики для 12-річної школи. Комбінаторні задачі включено до теми "Розв'язування текстових задач" у 5 класі. Бажано цей методичний підхід запровадити послідовно і в 6-11 класах масової школи.

1.2. Основні комбінаторні знання та вміння

Теоретичною основою процесу формування знань є психологія засвоєння. У сучасній психолого-педагогічній літературі існує багато означень поняття "засвоєння". У різних підходах педагогів і психологів до означення цього поняття спостерігається єдина основа – прагнення знайти його сутнісну характеристику. Так, на думку В. Онищука, "засвоєння – навчально-пізнавальна діяльність, спрямована на свідоме і міцне оволодіння поняттями, принципами, законами, теоріями та іншими формами знань, способами виконання дій і перетворення їх в особисте надбання кожного учня" [146, с.9]. На думку В. Беспалька, "засвоєння – психолого-педагогічне поняття, яке означає складний пізнавальний процес, що виникає в ході навчальної діяльності, і який представляє собою свідоме оволодіння учнями досвідом попередніх поколінь" [17, с.17].

У наведених означеннях “засвоєння” трактується в процесуальному аспекті. У психолого-педагогічній літературі поняття “засвоєння” означає також і результат навчально-пізнавальної діяльності учня.

Важливе місце у процесі формування понять посідають уміння і навички. У педагогічній літературі зустрічаються різні означення даних понять. В одних випадках уміння визначаються як готовність до практичних дій, які виконуються свідомо на основі здобутих знань, у других – як здатність людини виконувати дію, здобуту на основі знань і досвіду, в третіх – як практичні дії, усвідомленої, навмисної інтелектуальної діяльності.

Причиною такої неоднозначності є, по-перше, складність поняття, багатогранність його властивостей, по-друге, той факт, що корені цих означень сягають в психологію, де також не прийшли до єдиної точки зору.

Одні психологи вважають, що вміннями є здобута досвідом майстерність, готовність чи здатність людини швидко й легко знаходити прийоми розв’язування проблеми, які виникають у ситуації засвоєння нових навичок й знань. Інші, навпаки, вміння вважають лише перехідною ланкою від знань до навичок, неавтоматизованих етапів в розвитку навчальних дій.

Усі три позиції співвідносяться з існуючими в межах теорії діяльності рівнями аналізу психологічних явищ. Вважати яку-небудь одну з названих точок зору єдиною правильною не можна.

Що стосується поняття “навички”, то тут має місце в основному єдиний підхід до його тлумачення. Психологи трактують навички як автоматизовані компоненти свідомої дії людини, які виробляються в процесі їх виконання.

Уміння й навички формуються й проявляються в діях. Способи дій, як практичні, так і інтелектуальні, щоб стати навичками або вміннями, повинні неодноразово повторюватися. При сучасному трактуванні навичок і вмінь, навички відносять до операцій, які складають вміння [146, с. 21]. З цієї точки зору навички первинні, а вміння похідні від них. Для формування навичок необхідно одноманітне повторення відповідної операції, яка часто вже не контролюється свідомістю, а для вміння – характерне виконання дії (як

сукупності операції навичок) у змінених суттєвих для даної дії ситуаціях, які контролюються свідомістю.

Надзвичайно важливими з практичних міркувань є розв'язання питання про формування в людини навичок та вмінь виконувати дію (діяльність). Вагомий внесок у вирішення цієї проблеми зроблений науковою школою П. Гальперіна. Дослідниками цієї школи встановлено, що запорукою успішного формування в людини навичок та вмінь виконувати дію є забезпечення її повною інформацією про об'єкт, засоби, мету дії, умови її успішного виконання, спосіб дії; самостійне виконання цієї дії людиною [191].

Щодо вказаних умов Н.Тализіна зазначає, що відмінність між розумінням, як робити, і можливістю зробити, слід особливо підкреслити, оскільки в практиці навчання нерідко вважається, що якщо учень зрозумів, – значить він навчився, мети досягнуто. Фактично засвоєння дії відбувається тільки через виконання цієї дії самим учнем, а не шляхом лише спостереження за діями інших людей [192].

Визначимо основні комбінаторні знання.

Для позначення мисленого образу деякого класу об'єктів, процесів, відношень навколишнього світу або нашої свідомості застосовується термін "поняття" .

З філософського погляду поняття – основна форма мислення, що відображає предмети та явища навколишнього світу, їх необхідні ознаки [200, с.321]. У роботах філософів та логіків К. Бакрадзе, М. Строговича, Г. Курсанова, Е. Войшвілло та інших розкривається зміст терміна "поняття", виявляється його зв'язок з іншими формами мислення, аналізується логічна структура [46; 109; 186].

У логічному словнику [103] даються такі трактування основних положень щодо понять. Під поняттям розуміють форму мислення про сукупність істотних властивостей певного об'єкта (предмета). Поняття є сукупністю суджень, ядром якої виступають судження, що відображають розпізнавальні істотні властивості предмета, явища.

Властивість – те, що притаманне предметам, що відрізняє їх від інших предметів чи робить їх схожими на інші предмети.

Істотними (суттєвими) є властивості, без яких об’єкт (предмет) не може існувати. Сукупність істотних властивостей об’єкта (предмета) виражає його якісну визначеність.

Неістотними є такі властивості об’єкта (предмета), які можуть належати або за деяких обставин не належать об’єкту (предмету), і відсутність яких не призведе до того, що даний об’єкт (предмет) перестане існувати.

Процес виділення істотних властивостей об’єкта (предмета) та їх відокремлення від неістотних властивостей називають визначенням поняття. Мета визначення поняття полягає в тому, щоб відповісти на запитання, чим саме є даний об’єкт (предмет), що відображається у понятті. Для цього необхідно навести у стверджувальній формі його істотні властивості. Словосполучення “визначення поняття” потрібно розуміти як діяльність з визначення поняття. Результати такої діяльності, як правило, виражають деякою словесною або символічною конструкцією, яку називають означенням поняттям, або дефініцією.

У методиці математики [27; 32; 137; 138; 139; 169; 180] особливу увагу приділяють таким атрибутам поняття, як його зміст і обсяг. Відповідно усі істотні властивості поняття загалом утворюють його зміст, а усі об’єкти, що відносяться до даного поняття, складають його обсяг. В означення поняття включають такі його істотні властивості, кожна з яких є необхідною, а усі разом – достатньою умовою для того, щоб відокремити об’єкти, які належать до даного поняття, від об’єктів, що не належать до нього.

Означеннями основних комбінаторних понять є означення через найближчий рід та видові відмінності (наприклад, розміщення, перестановки, комбінації).

А. Усова зазначає [197, с.12], що поняття є знанням не тільки істотних властивостей (сторін) предметів і явищ оточуючої дійсності, але і знанням суттєвих зв’язків та відношень між ними. За зв’язками та відношеннями між

поняттями можна виділити два великих класи – порівняних і непорівняних понять, а серед порівняних видів понять – класи сумісних і несумісних понять.

Як і будь-яка наукова дисципліна, комбінаторика оперує специфічними для неї поняттями і правилами: сполуки без повторень, сполуки з повтореннями, правила додавання і множення, трикутник Паскаля, біном Ньютона, біноміальні коефіцієнти, дерево логічних можливостей та інші. У сучасній математичній літературі означення основних комбінаторних понять дещо відрізняються за формою. Розглянемо деякі з них.

Сполуки. Основними комбінаторними поняттями є перестановки, розміщення та комбінації.

У науковій літературі з комбінаторного аналізу розглядаються два поняття: перестановки та комбінації за допомогою поняття вибірки.

“Підмножини заданої множини називаються вибірками. *R*-вибіркою називається вибірка, що складається з *r* елементів. *R*-вибірка, що розглядається без урахування порядку елементів в ній, називається *r*-комбінацією. *R*-вибірка, що розглядається в деякому суворо фіксованому порядку, називається *r*-перестановкою” [47; 167; 168; 208].

Також відомий лексико-графічний підхід до вивчення комбінаторики. При цьому підході всі означення спираються на уявлення про алфавіт, слова в алфавіті, на входження букви у слово. При лексико-графічному підході кожна комбінаторна задача інтерпретується як задача про знаходження в деякому алфавіті кількості слів, що мають певні властивості, або як задача знаходження всіх типів таких слів.

Інтерпретація комбінаторних наборів як слів у певному алфавіті утворює в учнів зорові асоціації, поняття, що вводяться, набувають конкретності. Розглядаючи такі поняття, як алфавіт, слово в алфавіті, довжина слова, порожнє слово та інші, що лежать в основі конструктивної математики, учні ознайомлюються з важливими елементами сучасної математичної мови.

Проте вищезгадані поняття нині в інших частинах шкільного курсу математики не використовуються. Тому лексико-графічне трактування

комбінаторних понять утворює певні труднощі в установленні ідейних зв'язків комбінаторики з іншими розділами математики та знову веде до ізоляції [212, с.38].

Лексико-графічний підхід не виключає інших способів уведення комбінаторних понять. Елементи його можуть служити доповненням до них, тобто бути наочною ілюстрацією комбінаторних понять.

У математиці розроблені інші підходи. Наприклад, за допомогою функції, відображення [1]. При такому підході комбінаторика розглядається як розділ математики, який вивчає функції зі скінченною областю визначення й областю значень. Тоді розміщення з повтореннями трактуються як довільні відображення скінченної множини у скінченну, розміщення без повторень – як ін'єкції, перестановки – як бієкції, комбінації з повтореннями – як монотонні відображення і, нарешті, комбінації без повторень – як монотонні та ін'єктивні відображення. На нашу думку, такий функціональний підхід може бути реалізований на факультативних заняттях. Зв'язок комбінаторики з функціями сприятиме подальшому розвитку функціонального стилю мислення у школярів.

Автори багатьох робіт та посібників підходять до вивчення комбінаторики з теоретико-множинних позицій. Перестановки, розміщення та комбінації означаються як упорядковані скінченні множини, впорядковані скінченні підмножини та невпорядковані скінченні підмножини відповідно [40; 110; 219].

Для шкільного курсу теж характерні різні підходи.

"Розміщенням з m елементів по n називаються види сполук, з яких кожна містить n елементів, узятих з даних m елементів, і які відрізняються одна від одної самими елементами або їх порядком, або і тим, і іншим. Перестановки – це розміщення з n елементів по n. Комбінаціями з m елементів по n називаються види сполук, з яких кожна містить n елементів, взятих з m елементів, і які відрізняються одна від одної самими елементами" [97; 106; 123].

“Упорядкована вибірка *r* елементів з даних *n* називається *r*-перестановкою з *n* елементів. Невпорядкована вибірка *r* елементів з *n* елементів називається *r*-комбінацією з *n* елементів” [79, с.70-75].

“Установлений у скінченній множині порядок називається перестановкою її елементів. Скінченні впорядковані множини називаються розміщеннями. Скінченні множини називаються комбінаціями” [3, с. 18-23].

“Упорядкована *n*-елементна множина називається перестановкою з *n* елементів. Упорядкована *k*-елементна підмножина *n*-елементної множини *(*$k \le n$, $k>0$*)* називається розміщенням з *n* елементів по *k*. Кожну *k*-елементну підмножину *n*-елементної множини називають комбінацією з *n* елементів по *k* ” [5; 6].

Для позначення кількості сполук у комбінаториці використовується така символіка:

Кількість перестановок – P_n , кількість розміщень - $A_n^k, P_n^k, A(n,k), P(n,k), V_n^k$, кількість комбінацій або сполучень - $C_n^k, C(n,k)$, кількість перестановок з повтореннями - $PP_n(\alpha_1,...,\alpha_n),(n_1,...n_k),P_n(\alpha_1,...,\alpha_n),\bar{P}_n$, кількість розміщень з повтореннями - $AA_n^k, \overline{V_n^k}, \overline{A_n^k}, \overline{P_n^k}$, кількість комбінацій або сполучень з повтореннями - $\overline{C_n^k}, CC_n^k, \bar{C}n,k$.

Ми вважаємо, що теоретико-множинне трактування комбінаторних понять відповідає сучасному науковому підходу і має ряд переваг перед іншими. Теоретико-множинний підхід є однією з основних об’єднуючих ідей шкільного курсу математики, тому такий підхід до викладу комбінаторики сприяє розширенню теоретико-множинних знань учнів, інтегруванню цього навчального матеріалу з іншими розділами програми, дозволить усунути відокремленість комбінаторики від інших тем шкільного курсу математики.

Шкільна математика не ставить завдання вивчення теорії множин, а лише застосовує основні теоретико-множинні поняття і ідеї для послідовної побудови всього курсу математики. На перших порах навчання математики знання формуються на основі життєвого досвіду учнів, оперування з конкретними

множинами знайомих їм предметів. Узагальнення виникають у результаті виявлення загальних властивостей елементів множин і самих множин. Теоретико-множинні поняття поки є вдалою формою виразу думок, що виникають у ході спостережень і експериментів.

На наступному етапі навчання теоретико-множинні поняття послідовно включаються в логічні операції і починають грати роль інструмента дослідження. Тому в дослідженні ми будемо дотримуватись теоретико-множинного підходу до вивчення комбінаторних понять.

Для формування комбінаторних понять зручнішим буде конкретно-індуктивний метод, що складається з таких етапів:

1. Знаходження яскравих практичних прикладів, що показують доцільність вивчення цього поняття.

2. Визначення різних суттєвих і несуттєвих ознак поняття, введення терміна, що позначає дане поняття. Розглядання особливих випадків, якщо вони є. Мотивування терміна, що позначає дане поняття.

3. Відбір суттєвих ознак поняття і формулювання означення поняття; первісне означення; внесення поправок, вторинне означення.

4. Ілюстрування поняття конкретними прикладами; моделі поняття.

5. Інші можливі означення даного поняття [137, с.66-67].

Основними критеріями сформованості поняття вважають повноту засвоєння змісту поняття, рівень засвоєння обсягу поняття, що виступає мірою його узагальненості, повноту засвоєння зв’язків і відношень даного поняття з іншими. Як додаткові критерії засвоєння поняття розглядають уміння: відокремлювати істотні ознаки поняття від неістотних; оперувати поняттями у процесі розв’язування певного класу задач пізнавального та практичного характеру; класифікувати поняття; правильно співвідносити їх одне з одним [197, с.54-55].

Н. Менчинська виділяє чотири рівні сформованості поняття [135].

Перший рівень – “дифузно-розсіяного” уявлення про предмет, явище. При цьому учень може відрізнити один предмет від іншого, однак окремі їх ознаки вказати не може.

Для другого рівня засвоєння поняття характерним є те, що учень уже може вказати ознаки поняття, але не може відокремити істотні властивості від неістотних.

Для третього рівня сформованості понять характерним є те, що учень засвоює всі істотні властивості, але поняття залишається не узагальненим – значний вплив мають одиничні образи, що використовувалися у процесі формування поняття.

Четвертий рівень характеризується тим, що поняття вже узагальнене, не скуте окремими конкретними образами, які раніше слугували опорою; засвоєні істотні зв’язки даного поняття з іншими, завдяки чому учень вільно оперує поняттями у різноманітних задачах.

Наголошуючи на особливому значенні вмінь застосовувати поняття, З. Слєпкань відмічає [180, с.63], що «з погляду застосування поняття важливу роль відіграють такі розумові дії, як «дія підведення під поняття» («дія розпізнавання») та обернена їй дія – відшукання наслідків. Остання означає, що від факту належності об’єкта до поняття приходять до системи властивостей, які має цей об’єкт”. Дія підведення під поняття конкретизується у наведенні прикладів поняття. У процесі застосування комбінаторних понять ці дії мають важливе значення.

Невміння учнів провести підведення об’єкта під поняття (невміння навести приклад, що ілюструє поняття) потрібно вважати одним із показників несформованості поняття. Інший показник відповідно стосується невміння виводити наслідки з факту належності об’єкта до певного поняття.

Спираючись на психологічні дослідження, доходимо висновку, що будь-який образ (сприймання, уявлення, поняття) повинен бути пов’язаним з певною системою дій. Тобто, утворення понять – процес формування не тільки

особливого образу, як картини світу, але й певної операційної системи, що має власну внутрішню структуру.

Дія порівняння, що здійснюється під час введення понять з метою виявлення їх суттєвих ознак, не вичерпує всієї системи дій, що пов'язані з процесом формування понять. Тобто для формування комбінаторних понять необхідна система приписів, що створюють орієнтовну основу дії підведення під поняття.

Правила додавання та множення. *Правило додавання.* У науковій літературі це правило називають методом перехресної класифікації, методом включення й виключення [167; 168; 172; 208].

$n(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = n(A_1) + n(A_2) + ... + n(A_k)$, де $((A_i \cap A_j) = \varnothing$, i≠ j)

$n(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = n(A_1) + n(A_2) + ... + n(A_k) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - ... - n(A_1 \cap A_k)$

- …- $n(A_{k-1} \cap A_k) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + ... + (-1)^{k-1} n(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k)$, де $n(A_i)$ – кількість елементів множини A_i,$n(A_i \cap A_j)$ – кількість елементів множини $A_i \cap A_j$.

Ці формули є узагальненням правила додавання та доводятся методом математичної індукції.

У шкільному курсі зустрічаються такі формулювання:

"Якщо деякий об'єкт *A* можна вибрати *m* способами, а другий об'єкт *B* можна вибрати *n* способами, то вибір "або *A*, або *B*" можна здійснити *m* + *n* способами"[5; 6].

"Нехай *n(A)* – кількість елементів множини *A*, а *n(B)* – кількість елементів множини *B*. Якщо множини не мають спільних елементів, то їх об'єднання $A \cup B$ містить *n(A)* + *n(B)* елементів, тобто $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$. Якщо множини мають спільні елементи, то вони ввійдуть у суму двічі. Тому в загальному випадку формула для обчислення кількості елементів суми множин запишеться так: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$"[5, с.206].

У деяких підручниках ця формула узагальнюється на випадок трьох множин, інколи й на випадок *n* множин. За допомогою правила додавання розв'язується великий клас комбінаторних задач, у яких потрібно із заданої

множини елементів виділити підмножини, які мають задані властивості, імовірнісних задач та задач з інших галузей знань.

Правило множення. “Якщо об’єкт *A* можна вибрати *m* різними способами, і після кожного такого вибору об’єкт *B* можна вибрати *n* способами, то вибір пари *(A; B)* в указаному порядку можна виконати $m \cdot n$ способами” [5; 6].

«Якщо множини *A* і *B* скінченні, то кількість пар в їх декартовому добутку $A \times B$ дорівнює добутку кількості елементів цих множин: $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$” [4, с.224].

“Якщо перший вибір можна виконати *m* способами, та після кожного такого вибору другий вибір можна виконати *n* способами, то два цих вибори можна виконати $m \cdot n$ способами” [5, с.205].

У загальному вигляді це правило звучить так: “Нехай треба виконати одну за одною *k* дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, другу дію – n_2 способами, третю дію – n_3 способами і так до *k-ї* дії, яку можна виконати n_k способами, то всі *k* дій можна виконати $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами”.

Правило множення дозволяє найбільш економно отримати основні формули комбінаторики.

Правила додавання та множення дозволяють вести підрахування комбінаторних об’єктів до введення понять комбінаторики й, таким чином, можуть бути використані на більш ранніх етапах навчання. Ці правила мають важливе прикладне значення. Вони знаходять застосування в процесі вивчення математики (з ними пов’язані операції додавання та множення натуральних чисел, прямокутна система координат, знаходження розв’язків рівнянь та нерівностей, класифікація тощо), знаходять застосування в практичній діяльності людини, в розв’язанні задач поза сферою математики. Досвід вивчення цих комбінаторних правил мають багато закордонних шкіл Франції, Болгарії, Румунії, Угорщини, Швеції, Росії.

Суттєвою особливістю формування основних комбінаторних понять в основній школі є те, що ознайомлення з ними повинно проходити не в явному

вигляді, а здійснюватися індуктивним методом. Учні в певному обсязі ознайомлюються з поняттями, але не застосовують відповідні терміни.

Лише в VIII і IX класах з поглибленим вивченням математики учні ознайомлюються з відповідними термінами та означеннями. Зазначимо, що означення комбінаторних понять є переважно конструктивними, тобто в них встановлюється спосіб отримання відповідних об'єктів, тому формування і засвоєння цих понять краще проводити за допомогою спеціально дібраної системи комбінаторних задач і вправ.

Слід ще зазначити, що автори підручників по-різному підходять до послідовності вивчення сполук без повторень. Більшість підручників пропонують таку послідовність: спочатку вводиться одне комбінаторне поняття, потім здійснюється виведення відповідної формули та далі йде розв'язування задач, що пов'язані з цим поняттям. Аналогічно для всіх трьох понять – перестановки, розміщення, комбінації [3; 5; 6; 106] або розміщення, перестановки, комбінації [2; 4; 123], або перестановки, комбінації, розміщення [97].

Визначимо, в якій послідовності найкраще вводити поняття "перестановки", "розміщення", "комбінації".

З перестановками учні ознайомлюються в VIII класі з поглибленим вивченням математики, з розміщеннями та комбінаціями в IX. Означення комбінацій та розміщень відповідно як підмножин та впорядкованих підмножин деякої скінченної множини дають підставу для висновку: поняття "комбінації" є більш зрозумілим по відношенню до поняття "розміщення", та його слід вводити раніше поняття "розміщення". Виведення формули числа комбінацій потребує використання формули числа розміщень. Виходячи з цих міркувань, розміщення слід вводити раніше поняття "комбінації". Розв'язати це протиріччя можна шляхом одночасного введення обох понять. Створюються сприятливі умови для одночасного введення цих основних комбінаторних понять. Крім того, зазначений підхід дасть змогу використовувати ефективний прийом паралельного зіставлення та протиставлення. Психологи стверджують,

що метод протиставлення веде найбільш економним шляхом до запобігання помилок учнів при формуванні та застосуванні понять на практиці.

У процесі одночасного введення обидва поняття включатимуться в єдину систему знань. Засвоєння ознак одного поняття буде підкріплюватися засвоєнням ознак іншого, створюються умови для постійного порівняння, виявлення подібного та різного в цих поняттях. Зрозуміло, одночасне введення понять не виключає в подальшому їх вивченні використання методу послідовного зіставлення.

Таким чином, існує багато різних підходів до означень основних комбінаторних понять. У нашому дослідженні ми будемо дотримуватись теоретико-множинного підходу, оскільки таке трактування відповідає сучасному науковому підходу і має ряд переваг перед іншими.

Теоретико-множинні поняття зустрічаються практично в усіх розділах сучасної математики та складають її фундамент. Мова теорії множин є засобом, за допомогою якого може бути побудований шкільний курс математики. Теоретико-множинний підхід сприяє розвиткові загальної культури учнів, допомагає бачити зв’язки між явищами, мислити “економно”. Тобто теоретико-множинний підхід у процесі вивчення комбінаторики створює умови для цілеспрямованого вивчення мови математики, сприяє зростанню науковості та чіткості у вивченні матеріалу, виявленню зв’язків між різними розділами математики, допомагає розвитку математичної культури учнів.

Оскільки означення основних комбінаторних понять мають конструктивний характер, то основний метод, що пропонується для їх формування – це навчання через задачі; зокрема метод доцільно дібраних задач. Реалізація цього методу передбачає розробку системи задач і вправ відповідного характеру.

До основних комбінаторних знань відносимо правила множення і додавання, поняття перестановки, розміщення та комбінації.

У процесі вивчення елементів комбінаторики учні оволодівають такими видами математичної діяльності: знаходження кількості варіантів вибору деякої

кількості елементів із заданої сукупності методом перебору варіантів, за допомогою правил; розв'язування комбінаторних задач і вправ; застосування елементів комбінаторики для моделювання реальних процесів і явищ.

1.3. Задачі як засіб формування комбінаторних знань та вмінь

У математичній енциклопедії під класичними комбінаторними задачами розуміють "задачі вибору та розміщення елементів скінченної множини, що мають в якості вихідного деяке формулювання розважального змісту типу головоломок" [128, с.971]. Там наведено приклад класичної комбінаторної задачі – побудова магічного квадрату, – в процесі розв'язування якої використовуються елементи комбінаторики.

Серед множини задач можна виділити багато таких, у процесі пошуку розв'язання яких використовуються елементи комбінаторики. Як математики, так і дидакти, обговорюючи проблему навчання учнів пошуку розв'язання задач, підкреслюють важливість аналізу і синтезу, підводять цю проблему до прогнозування [25]. Для них "прогнозування пов'язане з набуванням досвіду розв'язування задач, інтуїцією, вмінням мислити творчо». Але чекати, коли в учня наступить «інсайт», нереально. Тому бажано навчити учня алгоритмізованим способам дій з організації пошуку розв'язання задач. У таких випадках учневі доводиться робити перебір можливих розумових дій, здійснення яких під час послідовного їх застосування приведе до кінцевого результату. Такими розумовими діями можуть бути і аналіз, і синтез, і порівняння, і абстрагування, і аналогія, і узагальнення тощо. Пошук розв'язання таких задач носить "комбінаторний характер". Отже, з усього класу практичних задач відокремлюється підклас задач, пошук розв'язання яких або спосіб розв'язування яких носить комбінаторний характер. Такі задачі викликають найбільшу складність у процесі пошуку розв'язання.

Специфічними для комбінаторного аналізу є задачі, що умовно можна віднести до чотирьох типів: а) задачі, в яких потрібно підрахувати кількість

розв'язків; б) задачі, в яких вивчається питання про можливості або неможливості комбінаторного розміщення; в) задачі, в яких з усіх можливих варіантів треба обрати той, що задовольняє заданій додатковій умові; г) задачі, в яких потрібно знайти всі її розв'язки.

Особливостями комбінаторних задач, що поєднують їх, є такі:

а) об'єкти, що розглядаються в комбінаторних задачах, складаються з окремих, дискретних елементів, які потрібно занумерувати;

б) у задачах, як правило, використовуються два типи операцій – відбір підмножин та впорядкування множин. Кількість цих операцій, послідовність виконання та повторення визначаються умовами задач.

Незважаючи на невелику кількість первинних положень, комбінаторні задачі дуже різноманітні та часто викликають певні труднощі. Це обумовлюється: а) різноманітністю видів підмножин; б) різноманітністю видів підмножин, які обираються; в) необхідністю враховувати своєрідність елементів множин, для яких поставлена комбінаторна задача. Для кожної з комбінаторних задач можна надати різноманітні інтерпретації, важливі у практичному відношенні.

У методичному плані системі вправ і задач з математики приділяли увагу Б. Ерднієв [216], Г. Бевз [10], Ю. Колягін [100] та інші. За основу дидактичної класифікації В. Онищуком взято ознаку навчальної мети, що передбачає послідовне зростання складності та послідовне посилення самостійності і творчості учнів. За цієї ознакою визначаються такі типи та види вправ (системи та підсистеми): 1) пропедевтичні вправи; 2) вступні; 3) пробні; 4) тренувальні: за зразком, за інструкцією; 6) творчі; 7) контрольні. Ця класифікація покладена в основу нашої системи.

За способом використання задач у навчальному процесі можна виділити такі їх класи:

1) вправи – одно-, двокрокові задачі, що використовуються для формування понять, введення, закріплення й застосування математичних фактів та способів діяльності;

2) задачі для організації математичної діяльності на шкільному рівні у повному її обсязі – від постановки цілей, через організацію пошуку розв'язання (аналіз умови, зіставлення умови й відомих фактів, створення плану розв'язування та його реалізація) до критичного осмислення результатів розв'язування;

3) контрольні завдання.

Функції задач у навчальному процесі були предметом дослідження психологів, педагогів та методистів [9; 80; 101; 145]. Ю.Колягін визначає чотири головні дидактичні функції задач, які відповідають цілям шкільної математичної освіти: навчальна, розвиваюча, виховна, контролююча [100]. Комбінаторні задачі теж виконують ці функції.

Розглянемо кожну з цих функцій.

1. Під *навчальними* функціями задач розуміють такі функції, які спрямовані на формування системи математичних знань, умінь та навичок в учнів на різних етапах їх засвоєння [100, с.103].

Задачі, які пропонуються з метою підведення учнів до вивчення нової теми, актуалізації знань та вмінь, складання проблемних ситуацій тощо, виконують пізнавальні функції. За допомогою задач, які пропонуються учням перед поданням нового матеріалу, систематизують отримані знання та готують учнів до свідомого сприймання нових.

Наприклад, перед тим, як доводити формулу для обчислення кількості розміщень з n елементів по k, учням корисно пропонувати наступну задачу.

Задача. Тридцять перших букв українського алфавіту зображені на тридцяти картках. Скільки різних чотирибуквених слів можна утворити? (Словом будемо називати будь-яку послідовність чотирьох букв).

Розв'язуючи цю задачу, учні перекладають її на мову теорії множин, згадують, що таке впорядкована підмножина з 30 елементів по 4, правило множення, тобто актуалізують матеріал, необхідний для доведення формули. Але не тільки. У процесі виконання цієї конкретної задачі у свідомості більшості учнів виникає спосіб доведення формули. Після розв'язування цієї

задачі доведення формули кількості розміщень з n елементів по k не викличе труднощів. Учні самостійно або під керівництвом вчителя можуть довести її.

Задачі, які пропонуються учням для усвідомлення теоретичного матеріалу, для розгляду нового методу розв'язування задач тощо, виконують усвідомлюючі функції [9, с.29]. Ознайомлення з новим матеріалом – це лише перший етап засвоєння його учнями. Деякі з них у результаті пояснення запам'ятовують лише частину, не розуміючи основного. Інші розуміють формули, але не знають, як і де їх застосувати. У цей момент основна задача вчителя – правильно спрямувати засвоєння нового матеріалу. Конкретними задачами доповнити новий матеріал. Наприклад, після введення означень розміщень, перестановок та комбінацій можна запропонувати таку задачу:

Задача. З елементів {a, b, c} складіть:

а) усі можливі комбінації по 2 елементи;

б) усі можливі розміщення по 2 елементи;

в) усі можливі перестановки.

Більшість задач пропонується учням з метою вироблення навичок та вмінь. Такі задачі виконують тренувальні функції. Перші задачі для тренування повинні бути простими, щоб учні могли розв'язати їх за відомими правилами, алгоритмами. Наприклад, після введення поняття "факторіала" доцільно запропонувати учням навчальну самостійну роботу (див.стор.122).

2. Під *розвиваючими* функціями розуміють такі, що спрямовані на розвиток мислення учнів, на оволодіння прийомами ефективної розумової діяльності [100, с.107].

У процесі розв'язування комбінаторних задач є реальна можливість розвитку в учнів таких компонентів комбінаторного мислення, як гнучкість, варіативність, критичність, послідовність.

3. Говорячи про *виховні* функції задач, маємо на увазі виховання культури мовлення (усного та письмового), графічної культури, виховання позитивного ставлення учнів до навчальної діяльності, розвиток інтересу до навчання тощо. Пильної уваги заслуговує питання про виховання графічної культури.

Під графічною культурою розуміють уміння правильно, раціонально, акуратно виконувати та застосовувати графічне зображення інформації. Під час розв'язування комбінаторних задач використовуються таблиці, схеми, діаграми, графи. Всі вони є засобами структурованого відображення сутності математичних понять, фактів, способів діяльності та зв'язків між ними. Практика показує, що вільне володіння учнями такими засобами розширює можливості школярів у систематизації даних, зчитуванні та оперуванні інформацією, дозволяє витратити менше енергії, зробити цей процес більш результативним [189, с.198].

Спостереження, які проводилися в процесі констатуючого експерименту, впевнили нас у тому, що можна покращити графічну культуру, якщо, крім задач на знаходження тієї чи іншої кількості сполук, пропонувати учням спеціальні задачі на заповнення таблиць, побудову схем, графів та роботу з ними. Наприклад, такі.

Задача. Запишіть всі чотирицифрові числа, які можна утворити з 5 та 7. Знайдіть на малюнку шлях, в якому зашифроване число 5575. Які ще числа зашифровані в цьому "дереві"? Побудуйте своє цифрове «дерево» (Рис 1.2).

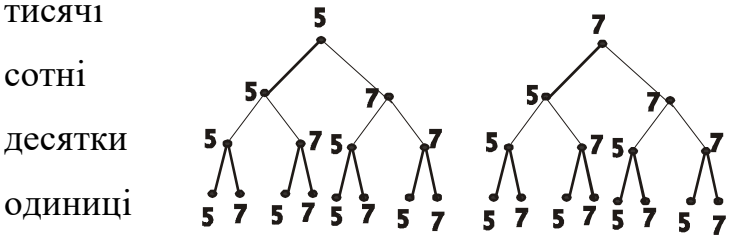


Рис. 1.2. "Цифрове дерево"

4. *Контролюючі* функції. У навчанні математики за допомогою задач зручно контролювати засвоєння знань і сформованість умінь учнів, присутність недоліків в їх знаннях та вміннях, навички самоконтролю тощо. Як зазначає Ю.Колягін, якщо для практики шкільного навчання справедлива вимога: "навчаючи, розвивати і виховувати", то не менш справедливим є і: "контролюючи, навчати, розвивати і виховувати" [100, с.109].

Для цього необхідно, по-перше, сформувати в учнів потребу в контролі. Учень повинен знати, що він завжди має реальні можливості показати свої знання та вміння, і останні будуть оцінюватися (не обов'язково оцінкою) вчителем з необхідними подальшими рекомендаціями. Контроль, що систематично і правильно здійснюється вчителем, разом із самоконтролем дає змогу кожному учню бачити свої результати навчання.

З контролюючими і навчальними функціями пов'язані *корегуючі* функції. Застосування задач з метою корекції дозволить учням підвищити рівень свідомого засвоєння знань, активізувати пізнавальну діяльність учнів, виховувати в учнів звичку до самокорекції.

Зрозуміло, що вся різноманітність комбінаторних задач не може скласти предмета для шкільного вивчення. Розгляд окремих задач не зможе скласти в учнів повного уявлення про цей розділ математики. Проте це і є дидактичною метою включення комбінаторики в зміст шкільної математичної освіти. Бажано ознайомити учнів з комбінаторними способами та засобами розв'язування задач, що знаходять широке застосування у повсякденному житті, науці, виробництві та були доступні учням.

Елементарний комбінаторний спосіб – спосіб безпосереднього перебору об'єктів. Особливістю великого класу комбінаторних задач є вимога утворити, перебрати всі можливі комбінації об'єктів, які задовольняють викладеним умовам або принаймні хоча б одній з них, як це є, наприклад, під час розв'язування комбінаторних задач, де з множини розв'язків обирають оптимальний за деякою ознакою. "Перебір", "спосіб спроб та помилок", "прийом цілеспрямованих спроб", "спосіб підбору та здогад" – підвищує ефективність розв'язання. Всі вони визначають спосіб розв'язування задач, за яким розглядаються можливі ситуації, аналізуються та невідповідні відкидаються.

Якщо мати на увазі комбінаторні задачі, то більш вдалою назвою буде "спосіб перебору", тобто спосіб, за яким потрібно перебрати всі можливі варіанти та показати, що інших бути не може. При цьому важливо, як учень

організував процес перебору. Оскільки, якщо діяти випадково, то не можна бути впевненим, що знайдено всі можливі комбінаторні конфігурації. Для цього треба виконати перебір у певній системі.

Комбінаторні задачі дозволяють застосовувати різні способи здійснення системного перебору, і учень може вибрати той, що є найбільш зручним у певній конкретній задачі та відповідає його індивідуальним особливостям. Тобто кожна дія учня не регламентується, учню дається роль не виконавця, а людини, що самостійно приймає рішення, думає, як краще виконати потрібне.

Ідея комбінування або перебір різноманітних комбінацій зустрічається й в багатьох питаннях шкільного курсу математики:

а) у доведеннях, що проводяться методом повної індукції, де загальний випадок, для якого будується узагальнене твердження, роз'єднується на скінченну кількість окремих випадків, і для кожного з них твердження доводяться окремо;

б) у переборі різних варіантів розв'язань задачі з метою пошуку оптимального за деякими ознаками;

в) у пошуку різних розв'язань рівнянь та нерівностей методом перебору;

г) у переборі різних значень параметрів та закономірностей між ними з метою дослідження розв'язків задачі, рівняння або нерівності з параметрами;

д) у різних інтерпретаціях умови задачі та отримання в залежності від цього різних розв'язків, і т. ін.

Таким чином, процедура перебору, яка за своїм характером є комбінаторною, використовується й у розв'язуванні шкільних задач, які за змістом далекі від тих, що традиційно називають комбінаторними. Застосування цього способу в розв'язуванні комбінаторних та інших задач учнями допомагає реалізувати важливі дидактичні завдання:

а) операція перебору лежить в основі ідеї комбінування та формування комбінаторних понять;

б) перебір усіх логічних можливостей, що відповідають тій чи іншій ситуації, завжди пов'язаний з аналітичною діяльністю мислення.

Недооцінка цього способу призводить до неповноти аналізу, який веде до помилкового синтезу. Цим обумовлені помилки учнів: неповнота дослідження питання; доведення теореми або розв'язування задач лише для окремих випадків, які не охоплюють усіх можливих; помилки у знаходженні простору елементарних подій, які відповідають певному експерименту і т. ін.

Розв'язування комбінаторних задач перебором сприяє засвоєнню учнями математичних прийомів кодування та організації інформації, що стало найактуальнішим сьогодні, в час бурхливого прогресу інформаційних технологій. Так, з перших задач перед учнями постає проблема зображення комбінаторних об'єктів, що утворюються. Спочатку для цього застосовують схематичні малюнки, а потім переходять до використання умовно-символічних позначень (таблиць, графів). Скінченна та невелика кількість елементів у комбінаторних задачах та використання способу перебору дає можливість організувати елементарну дослідницьку діяльність, у процесі якої учні експериментують, спостерігають, зіставляються отримані факти.

Усе це дає нам змогу стверджувати: потрібно прищеплювати учням навички системного перебору об'єктів скінченної множини. Доцільність навчання цьому комбінаторному способу продиктовано пізнавальними та дидактичними особливостями, його ефективністю як з психологічного боку (розвиток мислення), так і з погляду розширення їх пізнавальних можливостей.

Елементарними способами розв'язування комбінаторних задач є правила додавання та множення. Вони являють собою теоретико-множинні правила знаходження числа елементів об'єднання та декартового добутку скінчених множин.

Серед великого розмаїття комбінаторних задач виявляється можливим визначити класи задач, для розв'язування яких з успіхом можна застосовувати геометричні методи комбінаторного аналізу, зокрема теорію графів.

Поняття графа використовується дуже часто не тільки в математиці, але й у фізиці, хімії, біології, техніці, у повсякденному житті під самими різними назвами – схема, діаграма, карта, лабіринт тощо.

Початок теорії графів як математичної дисципліни було покладено Л. Ейлером у 1736 році під час розгляду задачі про Кенігсберзькі мости [64; 148]. Значний інтерес до проблем графів з'явився десь у середині XIX століття під впливом ряду проблем природничих наук – дослідження структур молекул, моделей кришталів, електричних ланцюгів.

У наш час теорія графів набула широкої сфери застосувань. Граф розуміється як множина із заданим на ній бінарним відношенням; елементи множини називаються вершинами, а впорядковані пари елементів – ребрами.

Множина M вершин та множина Q ребер задають граф. Таке розуміння графів є найбільш загальним. З метою практичного застосування в нього вводять додаткові обмеження, які можуть бути різноманітними. Тому є велика кількість різноманітних графів, їх сімейств, класів тощо.

Для вивчення елементів комбінаторики в основній школі інтерес мають так звані "дерева" – різновид графів. Поняття дерева, яке ввів Артур Келі, припускає кілька означень. Наведемо одне з них: "дерево" є скінченний зв'язний граф без циклів, який має не менше двох вершин" [15, с.165].

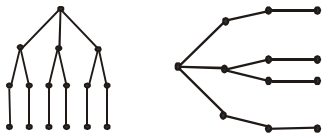


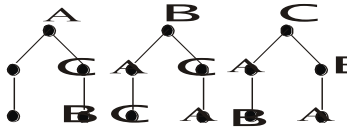
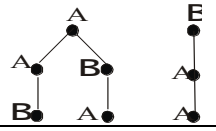
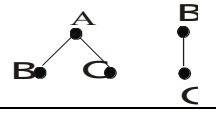
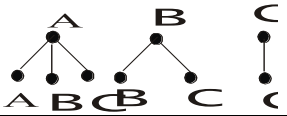
Рис. 1.3. Приклади графів

"Дерева" є гарною наочною ілюстрацією правила множення та застосування його під час розв'язування задач. Графи дозволяють наочно уявити ідею комбінування та процес підрахування комбінаторних об'єктів, тому використання цього способу в процесі вивчення комбінаторики в основній школі виправдано не тільки пізнавальними, але й педагогічними міркуваннями.

У залежності від типу комбінаторної задачі будуть змінюватись види дерев (таблиця 1.1).

Таблиця 1.1

Види графів-дерев

Вид сполук	Характер графа			Приклади
	кількість дерев	кількість ярусів	кількість вершин, що висять	
Перестановки без повторень P_n	n	n	$n!$	n=3 
Перестановки з повтореннями $\bar{P}_n$	$< n$, *де* $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$	n	$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$	$n_1 = 2$, $n_2 = 1$ 
Розміщення без повторень A_n^m	n	m	$\frac{n!}{(n-m)!}$	n = 3, m = 2
Розміщення з повтореннями $\bar{A}_n^m$	n	m	n^m	n = 3, m = 2
Комбінації без повторень C_n^m	$< n$	m	$\frac{n!}{(n-m)!m!}$	n = 3, m = 2 
Комбінації з повтореннями $\bar{C}_n^m$	n	m	$\frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}$	n = 3, m = 2 

Слід визнати, що в математиці комбінаторні задачі розв’язуються шляхом використання відповідних формул, тобто використовується “формальна” методика: визначається вид сполуки, відповідна формула, підставляються числа та обчислюється результат – кількість можливих варіантів. Самі ж варіанти не утворюються. При “неформальному” підході до розв’язування комбінаторних задач на перший план виходить сам процес утворення різних варіантів. Тільки після того, як розглянуті всі можливі варіанти, спостерігається певна залежність між елементами розглянутої множини предметів та їх розміщенням. Особливе значення ми надаємо комбінаторним задачам, розв’язування яких

можна здійснити “неформально” (спосіб перебору, наочні засоби перебору, правила множення та додавання). Включення їх у підручники створить можливість прищепити учням навички системного перебору об’єктів скінченних множин, вибору та впорядкування множини, підрахування комбінаторних об’єктів, тобто підготує учнів до введення комбінаторних понять, до подальшого узагальнення принципів множення і таке інше. Ця категорія задач сприяє здійсненню наскрізної комбінаторної лінії в навчанні математики.

Існуючі підручники для 1-9 класів не навчають учнів орієнтуватись у ситуаціях, коли потрібно розглянути різноманітні можливості та зробити оптимальний вибір залежно від цілей та зовнішніх обставин. Більшість задач має лише одне розв’язання, тому в учнів створюється думка, що так буває завжди. Тобто потрібні задачі, які потребують оцінки та вибору найкращого варіанту розв’язання, задачі з багатоваріантними розв’язаннями та без розв’язків зовсім.

Перед учнями постає питання вибору способу розв’язування задачі винятково. У них не формується прагнення до раціоналізації своєї діяльності у процесі розв’язування задач. Використання під час вивчення в основному тільки одного способу розв’язування задач ставить учня в ситуацію, де він уже не має змоги обрати спосіб розв’язування у відповідності зі своїми схильностями, проявити свою індивідуальність.

Включення в підручники 1–9 класів окремих задач на кмітливість не може вирішити проблему розвитку комбінаторного мислення та успішного формування комбінаторних знань та вмінь. Для цього потрібно створити систему комбінаторних задач і вправ, яка буде доступна учням за змістом і способами розв’язання та природно вписуватись в зміст математики учнів основної школи.

Ми дотримуємося такого розуміння мети розв’язування задач:

- задачі розв’язуються для свідомого засвоєння теорії;

- розв’язування задач сприяє інтелектуальному розвитку учнів, формуванню їх пізнавального інтересу, прийомів ефективної розумової діяльності.

Майже кожна комбінаторна задача створює проблемну ситуацію, на розв'язання якої спрямовані пізнавальні можливості та діяльність учня. Але задачі будуть ефективно сприяти розвиткові комбінаторного мислення учня лише тоді, коли їх включення в систему проводиться з урахуванням деяких вимог. По-перше, комбінаторна задача повинна відповідати загальним вимогам до будь-якої задачі, по-друге, вчитель заздалегідь повинен продумати функції кожної з них і їх місце в системі.

Таким чином, комбінаторні задачі виконують усі функції задач у навчальному процесі. Але існуючий набір комбінаторних задач у підручниках, а також відсутність методичної системи роботи з ними, не дозволяють розвивати в учнів на належному рівні здатності проведення комбінаторних міркувань, не формують мислення, а утворюють стереотипи, не мають спрямування на оптимальне рішення. Проте можливістю реалізації всіх функцій комбінаторних задач визначається ефективність системи комбінаторних задач і вправ. Особливе значення ми надаємо комбінаторним задачам, розв’язування яких можна здійснити “неформально” (спосіб перебору, наочні засоби перебору, правила множення і додавання). Включення їх до підручника створить можливість підготувати учнів до введення комбінаторних понять.

Показ застосувань комбінаторних ідей і способів в математиці та поза неї вважаємо доцільним для успішного оволодіння учнями комбінаторними знаннями, навичками і вміннями їх практичного застосування, розвитку комбінаторного мислення та творчих здібностей учнів.

1.4. Психолого-педагогічні передумови формування комбінаторних знань та вмінь

1.4.1. Психологічні особливості учнів основної школи.

Кожний період розвитку дитини, за Л. Виготським, характеризується певною структурою психічних процесів, у центрі якої знаходиться функція, що найбільш інтенсивно розвивається та впливає на весь розвиток школяра.

Мислення – це процес відображення об'єктивної дійсності в уявленнях, судженнях, поняттях, що відбувається в ході її аналізу і синтезу з чуттєвого пізнання на основі практичної діяльності; це психічний процес самостійного шукання і відкриття істотно нового.

Будь-яке навчання, в яких би формах воно не здійснювалось, завжди являє собою необхідну умову формування і розвитку мислення. Засвоєння і формування знань являє собою продукт мислення.

Мислення як процес виступає особливо виразно передусім у тих випадках, коли людина з інтересом і завзято розв'язує складну для неї розумову задачу або проблему. У кінцевому підсумку своїх наполегливих спроб вона нарешті знаходить розв'язок цієї задачі або навпаки не знаходить його. Таким є продукт або результат усього попереднього психічного, розумового процесу. Адже не лише успішне розв'язання проблеми, але також і її нерозв'язання однаковою мірою складають продукт всього попереднього мислення як процесу [33, с.36-56].

Мислення являє собою активну цілеспрямовану діяльність, у процесі якої здійснюється переробка наявної і нової інформації, відчленування зовнішніх, випадкових, другорядних її елементів від основних, внутрішніх, що відображають сутність досліджуваних ситуацій, розкриваються закономірні зв'язки між ними. Це узагальнене і опосередковане пізнання дійсності, в процесі якого думка людини нескінченно заглиблюється у сутність оточуючої дійсності, відкриваючи її закономірності [94, с.12].

У психології розглядають два основні рівні мислення – емпіричне і теоретичне.

Емпіричне (або наочне) мислення має своєю кінцевою метою пізнання і класифікацію предметів за їх зовнішніми ознаками. Психологічний аналіз цього виду мислення зводиться в основному до виділення деяких розумових процесів (прийомів): абстракції, порівняння, абстрагування, узагальнення, класифікації. Теоретичне мислення це передусім аналіз і синтез, а потім абстракція і узагальнення, що є похідними від них.

У залежності від зв'язку між чуттєвими і абстрактними елементами розрізняють три види мислення: наочно-дійове, наочно-образне, теоретичне (абстрактне, понятійне).

Розрізняють також репродуктивне і продуктивне мислення. Репродуктивне – мислення, яке здійснюється за допомогою актуалізації знань, що є у суб'єкта, його ще ототожнюють з пам'яттю.

Репродуктивне мислення відіграє важливу роль і в пізнавальній, і в практичній діяльності людини. На основі цього виду мислення здійснюється розв'язування задач знайомої суб'єкту структури.

Продуктивне мислення забезпечує самостійне розв'язування учнями нових для них проблем, глибоке засвоєння знань, швидкий темп оволодіння ними, широту їх перенесення у відносно нові умови, тобто успішність виконання навчальної діяльності.

Творче мислення – вища форма продуктивного. Цей вид мислення характеризується створенням суб'єктивно нового продукту і новоутвореннями в самій пізнавальній діяльності щодо його створення. Продукт творчого мислення різниться неповторністю та оригінальністю.

На думку психологів, інтенсивний розвиток мислення може виявлятися:

1) в удосконаленні якостей мислення: гнучкості, критичності, самостійності тощо;

2) в удосконаленні розумових операцій: аналізу, синтезу, абстрагування, узагальнення, класифікації тощо [211, с .17].

До п’яти-шести років діти навчаються робити дії усно. Об’єктами маніпулювання виступають уже не реальні предмети, а їх образи-уявлення. Найчастіше діти уявляють наочний, зоровий образ предмета. Тому мислення дитини-дошкільника здебільшого наочно-дійове.

У дитинстві і в ранньому віці мислення невіддільне від дії. У процесі маніпулювання з предметами дитина розв’язує різні розумові задачі. Граючи з іграшками на зразок пірамідок, конструкторів, головоломок, дитина практично, методом спроб і помилок, шукає принципи їх розбирання і збирання, вчиться враховувати і співвідносити між собою величину й форму різних деталей.

Молодший шкільний вік містить у собі значний потенціал розумового розвитку дитини. За перші три-чотири роки навчання в школі прогрес у розумовому розвитку буває дуже помітним. Від домінування наочно-дійового та образного мислення, від допонятійного рівня розвитку та бідної логіки розмірковування учень піднімається до словесно-логічного мислення на рівень конкретних понять. Початок цього віку пов’язаний, якщо користуватися термінологією Ж. Піаже та Л. Виготського, з домінуванням доопераційного мислення, а кінець – з переважанням операційного мислення в поняттях [143, с.108].

Психологи підтверджують, що в дітей до 7-8 років уже достатньою мірою розвинений план розумових дій, і шляхом навчання за відповідною програмою, у якій властивості математичних структур дано «явно» і дітям даються засоби їх аналізу, можна швидше підвести дітей до рівня «формування» операцій, ніж у той час, протягом якого це здійснюється під час «самостійного» відкриття властивостей [7; 38; 48; 156].

Головна увага спрямовується на розвиток математичного мислення дітей шляхом поступового формування в них математичних понять і оволодіння ними відповідною мовою. У зв’язку з цим ознайомлення учнів у ранній період навчання з основними теоретико-множинними поняттями та елементами комбінаторики відіграє позитивну роль у загальному розвитку школярів. Необхідність формування в учнів первинних понять теорії множин та

комбінаторики на більш ранньому ступені навчання диктується виключно широкою сферою застосування цих понять у різних галузях математики, на що неодноразово вказували Н. Віленкін, В. Успенський, Т. Варга, М. Коман та інші. Дитина приходить у перший клас, маючи достатній запас уявлень про множини, з якими вона зустрічається в повсякденному житті. У неї є певний досвід виділення частини з цілого, їй зрозуміло відношення належності деякого об'єкта даній множині.

«Ряд», або «множина», – це проста сукупність предметів із загальними якостями. Дитина знайомиться з ними, коли починає грати з кубиками. Уже в цьому віці вона добре розуміє, що кожен кубик – це елемент «ряду», і що купка кубиків – це один ряд, а трикутників – інший. Така проста ідея, що предмети можна сортувати в групи за визначеними характеристиками, є головним принципом, який лежить в основі теорії множин. Для дитини природно, що вона розуміє просту й логічну теорію множин легше, ніж складну мудру логіку арифметики. Мозок дитини легко може сприйняти логіку теорії множин, що є початком розуміння основ алгебри. Теоретико-множинні поняття поки є вдалою формою виявлення думок, що виникають у ході спостережень та експериментів. У цей період створюється необхідна чуттєва основа для виконання учнями розумових операцій узагальнення й абстрагування, тобто природна база для формування логіко-математичного мислення.

Вивчення пізнавальної діяльності дітей свідчить, що до кінця початкової школи спостерігається зростання дослідницької активності. До 8-9 років діти під час читання та спостереження за різними явищами життя починають формулювати пошукові запитання, на які намагаються самі знайти відповідь. До 11-12 років практично всі діти спрямовують свою дослідницьку активність на формування пошукових запитань. Це відбувається тому, що школярі намагаються зрозуміти й осмислити причиново-наслідкові зв'язки й закони появи різних подій.

Навчальна діяльність і характер розумового розвитку школярів підліткового віку мають свої особливості. На початку підліткового віку

спостерігається розмаїтість у рівнях розвитку учнів – від найнижчого, при якому відсутні елементарні вміння організовувати самостійну роботу, до найвищого, при якому учні самостійного можуть засвоювати навчальний матеріал [49; 60; 150; 151].

Молодший і середній підлітковий вік є періодом розвитку значних інтелектуальних можливостей і пошуків. У цей період інтенсивно розвиваються всі психічні процеси (увага, сприймання, пам'ять, мислення, уява), відбувається становлення позитивних властивостей особистості (розумова активність, пізнавальна самостійність, саморегуляція) та рис характеру (чесність, правдивість, наполегливість та ін.). Посилюються свідомі мотиви поведінки, підвищується інтерес до моральних проблем (цілі, спосіб життя, обов'язок, вірність та ін.).

Центральним психічним новоутворенням підліткового віку є почуття дорослості, яке нерідко проявляється як "максималізм самостійності". Це суб'єктивно приводить підлітка до відмежування від навколишнього світу, усвідомлення себе, відкриття власного "Я" і як наслідок – до зацікавленості власним внутрішнім життям та внутрішнім світом інших людей (І. Кон, В. Рибалка, Т. Яценко та ін.). Провідною діяльністю у підлітковому віці стає діяльність спілкування з однолітками. Навчальна діяльність відступає на задній план і нерідко здійснюється лише під тиском зовнішніх соціально зумовлених обставин.

Проте розвиток інтелектуальної сфери є ядром психічного розвитку дитини, важливою умовою формування її особистості. У процесі навчальної діяльності школярі оволодівають численними прийомами розумової діяльності, вчаться мислити. У них розвивається спроможність діяти подумки, яка забезпечує їм можливість оперувати з предметами не прямо, а опосередковано, тобто образами (наочними і схематичними), а також знаково-символічними засобами. При цьому інтенсивно розвивається семіотична функція психіки учнів [189, с.22-23].

Основна особливість розумової діяльності підлітка – зростаюча з кожним роком здатність до абстрактного мислення, зміна відношення між конкретно-образним і абстрактним мисленням на користь останнього. В. Крутецький звертає увагу на те, що при цьому конкретно-образні наочні компоненти мислення не регресують, а зберігаються і продовжують відігравати суттєву роль (наприклад, розвивається здатність розкривати зміст понять у конкретних образах і уявленнях) [107, с.265]. Підлітковий вік, як говорять психологи, сензитивний (сприятливий) для розвитку творчого, активного, самостійного мислення.

На думку В.Давидова [73], в основній школі учні повинні оволодіти системою наукових понять, особливою системою математичних знаків, навчитися розмірковувати в теоретичному плані. Усе це зумовлює розвиток інтелекту більш високого рівня – теоретичного, формального, рефлексивного мислення.

Специфічною якістю теоретичного мислення є здатність розмірковувати гіпотетико-дедуктивно, тобто на основі одних загальних посилань шляхом побудови гіпотез та їх перевірки. Нове в розвитку мислення підлітка міститься в його ставленні до інтелектуальних задач, що вимагають попереднього розумового розв’язання. Підліток починає аналіз задачі зі спроб виявити всі можливі зв’язки між даними, складає різні припущення про їх особливості, а потім перевіряє ці гіпотези. Уміння оперувати гіпотезами в процесі розв’язування інтелектуальних задач – важливе надбання підлітка в аналізі дійсності [51, с.137].

У цей період зростає дослідницька активність, розвивається самостійне мислення. Порівняно з молодшими школярами підлітки по-іншому досліджують проблемну ситуацію. У період між 9-11 роками дослідницька активність дітей дуже висока. Діти ставлять багато різноманітних пошукових запитань, що стосуються різних аспектів ситуації. Підлітки відразу концентрують свою увагу на одній чи кількох гіпотезах. Це заощаджує час,

допомагає заглиблено проробити проблемні аспекти, хоча може вести до “застрявання” на неефективній ідеї.

Дослідження показують надзвичайно тісну залежність пізнавальних інтересів підлітків від постановки навчальної роботи. Зв’язок навчального матеріалу з практикою, проблемний, емоційний характер викладу, організація дослідницької діяльності учнів, екскурсії, заняття в гуртках і на факультативах формують стійкі пізнавальні інтереси учнів до математики. У підлітків значно краще, ніж у молодших школярів, розвинуте уміння організовувати розумову роботу із запам’ятовування певного матеріалу. Школярі 12-14 років вже здатні до більш складного аналітико-синтетичного сприйняття предметів і явищ. У той самий час у підлітковому віці, з одного боку, формуються стійка довільна увага, з іншого боку – бурхлива активність призводить підлітка до швидкого відволікання, нестійкості його уваги. З кожним роком збільшується здатність підлітка до абстрактного мислення, проходять зміни співвідношень між конкретно-образним і абстрактним мисленням на користь останнього. Для підліткового віку характерна деяка природна дисгармонія. Зокрема, бажання і прагнення учнів розвиваються раніше, ніж воля і сила характеру. Їх психічний стан досить складний і суперечливий, бо здатність до регуляції своєї поведінки розвинута ще недостатньо [88; 112; 120; 203].

Підлітковий період характеризується інтенсивним розвитком особистості учня, її самосвідомості, рис характеру, що помітно позначається на всій її поведінці та виявляється в активному прагненні до самостійності, дорослості. У підлітковому періоді самоспостереження, самопізнання, ставлення до себе, саморегулювання діяльності й поведінки вперше стають необхідними потребами.

Як зазначають провідні психологи і педагоги [38; 153; 185; 206], підлітковий вік має вирішальне значення для успіху подальшого учіння й розумового розвитку людини. Через це найважливішою є така організація навчання підлітків, яка здійснюється педагогічно грамотно й ефективно.

Згідно з психологічними даними [151, с.8], ефективним процес навчання може вважатися лише тоді, коли у ньому передбачена необхідна єдність навчальних впливів на учня, особистісного засвоєння чи відображення ними цих впливів і самостійної діяльності школяра з оволодіння знаннями, навичками й уміннями.

Особливе значення в організації навчальної роботи підлітків має внутрішнє стимулювання їх пізнавальної діяльності, тобто розвиток у них пізнавальних потреб, інтересів і мотивів учіння [119, с.69-80].

У цей віковий період відбувається оволодіння загальною будовою навчальної діяльності, способами самостійного переходу від одного виду дії до іншого (від орієнтувальних навчальний дій до виконавчих і потім до контрольно-оцінювальних), що є основою самоорганізації навчальної діяльності.

Навчальні дії об’єднуються у прийоми та інші великі блоки діяльності. Окремі дії та операції згортаються, переходять у розумовий план, що дозволяє швидше здійснювати навчальну діяльність.

Істотно розвивається уміння знаходити й зіставляти декілька способів розв’язування однієї задачі, пошук нестандартних способів розв’язування, що дозволяє переводити навчальну діяльність з репродуктивного на продуктивний рівень.

Відбувається становлення прогнозуючих, плануючих форм контрольно-оцінювальних дій. Це надає можливість коректувати навчальну роботу ще до початку її виконання.

У підлітковому віці можливим є усвідомлення власної навчальної діяльності, її мотивів, задач, способів і засобів. Істотно укріплюються пізнавальні мотиви. Мотиви самоосвіти у цьому віці піднімаються на наступний рівень, спостерігається активне прагнення підлітка до самостійних форм навчальної роботи, з’являється інтерес до методів наукового мислення.

1.4.2. Розвиток комбінаторного мислення.

Термін “комбінаторне мислення” широко розповсюджений як у психолого-педагогічній, так і в науково-методичній літературі, застосовується, як правило, без спеціальних дефініцій. “Комбінаторне мислення” визначає вид мислення, а також певні особливості розумової діяльності.

Розвиток комбінаторного мислення являє собою активізацію розумової діяльності учнів у напрямку пошуку перетворення об’єктів дослідження. Основними його характеристиками є: універсальність (незалежність від конкретного математичного матеріалу; гнучкість – зміна внутрішнього плану дій як у процесі пошуку розв’язання задачі, так і в процесі розв’язування); організація цілеспрямованого перебору певним чином обмеженого кола можливостей [132]. Комбінаторне мислення спирається на критерії вибіркового пошуку, дає змогу вирішувати проблемні ситуації.

Комбінаторне мислення дозволяє перебирати різноманітні стратегії та обирати найкращий напрямок розв’язування проблеми. Цей специфічний фактор, що відповідає здатності “мислити в різних напрямках” американський психолог Гілфорд назвав “дивергентним мисленням” (від лат. “дивергере” – виявляти різнобіжність). З дивергентністю в наш час пов’язуються буквально всі прояви творчості [19, с.15].

Визначимо конкретні напрямки розвитку комбінаторного мислення в учнів.

У процесі розв’язування задач є реальна можливість розвитку в учнів таких якостей мислення, як варіативність, критичність, послідовність, які характерні і для комбінаторного.

Задача 1. Як можна розкласти 16 апельсинів на 3 вази?

У відповідях часто можна почути: “Не можна розв’язати задачу, тому що 16 не ділиться на 3”. Такі відповіді свідчать про статичність мислення. Треба звернути увагу учнів, що умова задачі не вимагає обов’язкового ділення порівну.

У цій задачі суттєвим є те, що відповіді не мають бути однозначними, а складаються з вказівки на різні варіанти розв'язання. Задачі такого типу розвивають здатність учнів розв'язувати ту чи іншу проблему по-різному, підходити до неї з різних точок зору. Знаходження всіх варіантів відповіді в залежності від певних умов у таких задачах – процедура, яка сприяє розвитку гнучкості, варіативності мислення учнів.

Гнучкість розуму забезпечує здатність до виділення суттєвих ознак із безлічі випадкових і здатність швидко переходити з однієї ідеї на іншу. Люди з гнучким розумом зазвичай пропонують відразу багато варіантів рішень, комбінуючи й варіюючи окремі елементи проблемної ситуації. На противагу гнучкості поняття ригідність мислення визначає нездатність порушити закріплені у свідомості стандарти, стереотипи розв'язання задачі [194].

Під варіативністю мислення розуміється спрямованість розумової діяльності учня на пошук різних варіантів розв'язання задачі, коли не має ніяких спеціальних вказівок.

У процесі навчання ставиться завдання розвитку не тільки варіативності, але й критичності мислення. Критичність мислення – здібність до оцінних суджень, уміння правильно оцінити процес і результат власної творчої діяльності та діяльності інших, уміння знаходити власні помилки, їх причини і причини невдач. Критерієм оцінки є об'єктивність критеріїв оцінних суджень, а також ефективність виявлення причин своїх помилок і невдач. Критичність мислення пов'язана з рефлексією.

Критичність мислення виявляється:

1) у здатності відчувати протиріччя, логічні помилки; перевіряти розв'язання з погляду їх відповідності дійсності, певним теоріям, законам і т. ін. [115, с.3];

2) у здатності оцінити та з множини шляхів розв'язання проблеми обрати найбільш результативний, раціональний.

Виявлення критичності мислення можливе лише в тій галузі, де в дитини є достатні знання. Також потрібен необхідний рівень розвитку побудови

логічного міркування та звичка піддавати перевірці кожне розв'язання до визнання його правильним [211, с. 173].

Учні основної школи вже досягають певного рівня критичності мислення. У процесі вивчення математики розвиток цієї властивості іде переважно в одному напрямку: перевірки відповідності розв'язання дійсності. Наведемо приклад. "На 5 однакових штанів використовується 12 метрів тканини. А на 6 тих самих штанів повинно використовуватися більше тканини. А у відповіді отримали число менше ніж 12, тобто задачу розв'язано неправильно".

Розвиток в учнів іншого аспекту критичного мислення, пов'язаного з вибором оптимального рішення, обмежується задачами в підручниках, більшість з яких має одне розв'язання.

Дослідницька активність дітей на етапі критичного мислення характеризується двома якостями: зростанням самостійності розумової діяльності і критичності мислення. Завдяки самостійності дитина навчається керувати своїм мисленням: ставити дослідницькі цілі, висувати гіпотези причиново-наслідкових залежностей, розглядати відомі їй факти з позицій висунутих гіпотез. Ці здібності, без сумніву, є основними передумовами творчості на етапі критичного мислення. Критичність мислення виявляється в тому, що діти починають оцінювати свою й чужу діяльність з погляду законів і правил природи й суспільства. Завдяки усвідомленню дітьми правил і законів їхня творчість стає більш осмисленою, логічною, правдоподібною [211, с. 174].

У міру дорослішання діти все частіше стикаються із ситуаціями, коли неможливо виділити причину події. Багато соціальних і природних явищ викликані великою кількістю різноманітних чинників, тому прогнози розвитку цих явищ мають імовірнісний характер.

В усіх таких випадках критичне мислення виявляється недосконалим. Виникає необхідність у попередньому оцінюванні ситуації і вибору серед безлічі варіантів і чинників таких, що мають суттєвий вплив на перебіг подій [194].

У цьому аспекті критичність пов’язана з варіативністю мислення, оскільки для впевненості, що обрав оптимальне розв’язання, треба врахувати всі можливі.

Розглянемо задачу, яка розв’язується методом перебору.

Задача 2. Запишіть усі можливі двоцифрові та трицифрові числа цифрами 1, 3, 5, 9 так, щоб цифри в числі не повторювались.

Не володіючи навичками системного перебору, учні хаотично перераховують потрібні комбінації, пропускаючи деякі з них або перераховуючи неодноразово. Організація перебору привчає учнів до послідовних дій. Щоб отримати всі двоцифрові числа, достатньо до кожної з цифр 1, 3, 5 та 9 приписати послідовно по одній з решти. Для запису всіх трицифрових чисел без пропусків та повторень припишемо до кожного двоцифрового числа кожну із залишених цифр.

13 31 51 91	13 15 19 31 35 39 51 53 59 91 93 95
15 35 53 93	135 153 193 315 351 391 513 531 591 913 931 951
19 39 59 95	139 159 195 319 359 395 519 539 593 915 935 953

Процес розв’язування комбінаторних задач методом перебору організує думки та дії учня, виховує системність і послідовність мислення.

Системність і послідовність дають людям змогу керувати процесом творчості. Без них гнучкість мислення може перетворитися у спонтанність. У цьому випадку людина, що має багато ідей, не може реалізувати жодної. Вона нерішуча й залежна від оточуючих людей. Завдяки системності всі ідеї зводяться у визначену систему й послідовно аналізуються. Дуже часто під час аналізу ідея, на перший погляд абсурдна, перетворюється й відкриває шлях до вирішення проблем.

Варіативність, послідовність і критичність мислення допомагають людині краще орієнтуватись у реальному житті. Навколишня дійсність різноманітна й мінлива. Людина постійно потрапляє до ситуації вибору та прийняття оптимального рішення, його зміни в залежності від змінних зовнішніх

обставин. Більш успішно це робитиме той, хто володіє достатньо високим рівнем розвитку варіативності, критичності й послідовності мислення.

Це не означає, що мислення кожної дитини розвивається в усіх напрямках, що здатність до комбінаторного мислення розвинена в усіх без винятку. Комбінаторне мислення необхідно розвивати, ним потрібно керувати.

Розвиток комбінаторного мислення виявляється також в удосконаленні таких розумових операцій, як аналіз, синтез, порівняння, абстрагування, узагальнення.

Серед аналізу, синтезу, порівняння, абстрагування, узагальнення визначають як основні аналіз та синтез, які знаходяться в основі інших.

Наведемо приклад задачі, у процесі розв'язування якої явно визначено формування аналізу як розумової дії.

Задача 3. Не змінюючи розміщення чисел у кожному з пропонованих рядків, поставити між числами знаки арифметичних дій та дужки так, щоб у результаті дістати 1 у кожному з рядків.

1) 1 2 3 = 1
2) 1 2 3 4 = 1
---
8) 1 2 3 4 ... 9 10 = 1

Якщо учень розв'язує кожну задачу як нову для себе, не виділяючи загального принципу її побудови, то це може говорити про орієнтацію на зовнішні, неістотні її ознаки. Якщо учень відкриває загальний принцип під час розв'язування двох задач, а потім одразу й безпомилково використовує його для розв'язування всіх інших подібних задач – значить він проаналізував перші задачі та у процесі розв'язування решти спирався на відношення, що включено в умову.

У першому випадку розв'язання буде носити емпіричний характер, що здійснюється добором арифметичних дій.

1) (1 +2) : 3 = 1
2) 1·2 + 3 – 4 = 1
3) (1 + 2) · 3 : (4 + 5) = 1 і т. ін.

У другому випадку задачі можуть бути розв’язані на основі аналізу, коли в процесі розумового експериментування й цілеспрямованого пошуку в ситуації однієї–двох задач виділяється деяке відношення, визначається закономірність, що використовується потім у процесі розв’язування іншої задачі.

Наприклад, для 1), 3), 5), 7): для 2), 4), 6), 8)

1) $(1 + 2):3 = 1$ 2) $1 \cdot 2 + 3 – 4 = 1$

3) $((1 +2):3 + 4):5 = 1$ і так далі. 4) $(1 \cdot 2 + 3 – 4 + 5):6 =1$ і так далі

Істотними та вихідними для задач з непарними номерами є $(1 + 2):3$, а для задач з парними – $(1 \cdot 2 + 3 – 4)$. Крім того, всі задачі, починаючи з третьої, мають ще одну особливість розв’язування. Після знаходження вихідного істотного відношення дії учнів складаються з того, що треба додати наступне число й поділити все на число, що іде за ним.

Під час проведення комбінаторних міркувань окремі елементи певним чином складають різні сполуки і тому утворюють нові різні об’єкти. При цьому кожний такий об’єкт повинен сприйматися і як умовно розчленований на частини, і як єдине ціле з урахуванням взаємозв’язку частин. Тобто виникає можливість удосконалення єдиної аналітико-синтетичної діяльності учнів.

Здійснення учнями аналізу й синтезу впливає і на виконання операцій порівняння. Особливістю комбінаторних міркувань є те, що в процесі їх проведення необхідно використовувати узагальнений прийом порівняння. При такому порівнянні виділення й порівняння елементів першого об’єкту з елементами другого проходить при сприйнятті другого в повній цілісності.

Психологи говорять, що учні частіше й успішніше порівнюють, коли треба встановити між предметами і явищами не схожість, а відмінність. У зв'язку з цим порівняння в процесі навчання доцільно починати з находження відмінностей, а потім переходити до встановлення схожого [211, с. 93].

Порівняння об’єктів у комбінаторних задачах має деякі специфічні риси:

- об’єкти, які порівнюються, складаються з окремих елементів;

- порівняння здійснюється на основі складу елементів та взаємного розташування їх в об’єкті;

- одночасно порівнюються між собою кілька об’єктів.

У цьому випадку на успішність виконання порівняння впливають, по-перше, характер елементів, що складають об’єкти, по-друге, розташування об’єктів, що порівнюються, у зручному для їх сприйняття порядку.

Розглянемо ці положення. Окремі елементи, з яких складаються об’єкти в комбінаторних задачах, можуть бути цілком однакові або відрізнятися за однією чи кількома ознаками. Відмінність за однією ознакою найчастіше виявляється в кольорі, формі, розмірі. Також при одночасному порівнянні кількох об’єктів значну роль відіграє порядок їх розташування.

Так, наприклад, можна по-різному записати всі двоцифрові числа, складені з цифр 5, 3, 2.

I спосіб	II спосіб
55 35 22 53 25 33 32 52 23	55 53 52 35 33 32 25 23 22

При цьому другий спосіб розміщення дотримується всіх названих умов. У такому випадку учням найлегше буде порівняти числа й визначити серед них однакові.

Розглянемо можливості вдосконалення операцій абстрагування й узагальнення під час розв’язування комбінаторних задач. Розвиток абстрагування в учнів виявляється у формуванні здатності визначати загальні й суттєві ознаки, зв’язки й відносини, відволікаючись при цьому від несуттєвих.

Задача 4. Скласти з одного кола та двох квадратів різні послідовності. Скільки їх?

І рівень. Учень відривається від деяких несуттєвих в даній ситуації деталей (розмір, кольори), відображає у схематичному кресленні головне – форму.

ІІ рівень. Учень відривається від форми. Використовує умовні позначення.

III рівень. Відбувається абстрагування й від конкретних форм. Суттєвим є те, що вони різні за формою. Для їх позначення обирається вільна символіка (Рис.1.4).

Абстрагування є складовою частиною операції узагальнення.

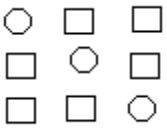
I рівень	II рівень	III рівень
	к кв кв	1 2 2
	кв к кв	2 1 2
	кв кв к	2 2 1

Рис.1.4. Рівні абстрагування

Розвиток узагальнення в учнів відбувається в декількох напрямках:

- від узагальнень за окремими зовнішніми несуттєвими ознаками учні переходять до узагальнень за суттєвими ознаками;

- удосконалюється зв'язок конкретного з загальним та загального з конкретним.

Учні переходять до узагальнення, вивчаючи конкретний матеріал, у якому суттєві ознаки виявляються прихованими зовнішніми та несуттєвими. Це ускладнює виконання правильного узагальнення. Допомогти учню може абстрактна схема, вільна від неістотних деталей, та в той же час наочно відображає знайдені загальні й істотні ознаки, відносини.

У процесі розв'язування комбінаторних задач можливо й необхідно приходити до узагальнення за допомогою графів.

Задача 5. Скласти різні набори (послідовності) з двох кіл та трьох квадратів. Скільки їх?

Учні починають малювати в зошиті різні ланцюжки з геометричних фігур. Можна викликати учнів по черзі до дошки. Спочатку розглядаються всі варіанти послідовностей, коли на першому місці стоїть коло, потім – квадрат. У результаті на дошці та в зошитах учні матимуть малюнок (Рис.1.5).

Далі для спрощення оформлення можна запропонувати замінити коло, наприклад, на букву «О», а квадрат – на «К», та зробити такі записи.

ООККК, ОКОКК, ОККОК, ОКККО
ККККО, ККОКО, КОККО, КООКК, КОКОКО, ККООК

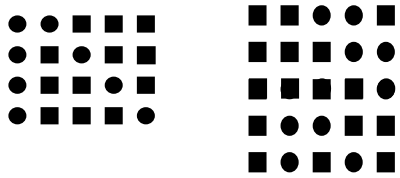


Рис. 1.5. Наочне зображення розв’язання задачі 5

Наступний етап роботи це побудова дерева логічних можливостей (Рис.1.6).

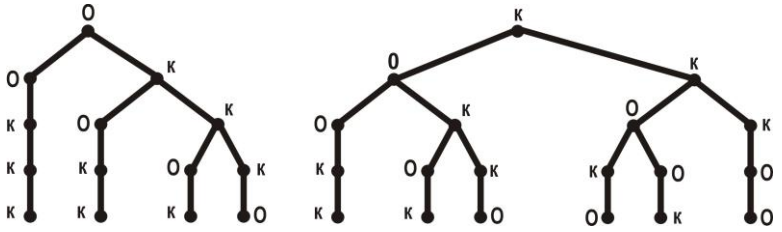


Рис. 1.6 Дерево логічних можливостей до задачі 5

Відриваючись у процесі побудови графів від конкретного сюжету, учні приходять до усвідомлення узагальнення математичного змісту цих задач.

Задача 6. Скільки двоцифрових чисел можна утворити з цифр 4, 6, 8 так, щоб цифри в записі не повторювались?

Учні спочатку виділяють певні частини з множини цифр, складають потрібні комбінації з цифр по дві, отримують двоцифрові числа. При цьому використовується така розумова операція, як аналіз. З іншого боку, у процесі синтезу або поєднання елементів об’єкту в ціле, учні визначають, що спочатку можна скласти комбінацію, що починається з цифри 4 (46 і 48), потім – із цифри 6 (64 і 68), далі – з цифри 8 (84 і 86). На наступному етапі розв’язування здійснюється операція співвідношення: співвідносячи умову з вимогою завдання, учні не складають числа 44, 66, 88. У процесі пошуку відповіді на поставлене запитання не можна обійтися без такої операції, як порівняння. Якщо учні не будуть з певною метою сприймати інформацію, викладену в задачі, то не зможуть розв’язати її. Також доводиться проводити операцію класифікації. Саме на її основі ”будують” комбінації.

46 64 84 48 68 86

У цьому випадку ознакою класифікації є однакова цифра, що означає кількість десятків. У процесі утворення комбінацій з трьох цифр по дві учні знаходять закономірність, і на першому місці та сама цифра може бути

записана тільки двічі, так само – і на другому місці. Тобто виконуються операції узагальнення, а також об’єднання об’єктів на основі цих ознак.

Отже, з наведеного прикладу видно, що під час розв’язування тільки однієї комбінаторної задачі використовується весь комплекс розумових операцій.

З формуванням комбінаторного мислення як перехідного від емпіричного до теоретичного мислення пов’язане планування дій. Воно може здійснюватися учнями на різних рівнях. Перший (низький) характеризується плануванням дії лише за частинами, що не поєднуються в єдину систему, при цьому елементи планування перемежовуються з реалізацією окремих операцій дії. На другому рівні учень передбачає послідовність усіх операцій, необхідних для виконання дії, тобто здійснюється “повне перспективне планування” [166, с. 151]. На більш високий рівень (ІІІ) піднімаються ті учні, які розглядають різні варіанти виконання дії та обирають найбільш прийнятні, вдалі [116].

Планування на І рівні у процесі розв’язування комбінаторних задач веде до хаотичного перебору:

- або, утворивши одну комбінаторну конфігурацію, учень планує та здійснює утворення наступної і т. ін. (наприклад, усі двоцифрові числа з цифр 2, 9, 4, 7 складаються учнем так: 24, 97, 94, 72, 29, 49, 74, 49, 44, 94, 22, 77);
- або планується утворення вже деякої групи об’єктів, але єдиний цілісний план перебору всіх можливих варіантів учнем не складається (наприклад, те саме завдання розв’язується так: 29, 47, 92, 74, 97, 94, 27, 24, 22, 44, 77. 99, 42, 49).

Наслідком такого планування може бути або втрата кількох варіантів, або повторення тих, що вже є (наведені приклади це ілюструють). Здійснення планування на ІІ рівні допомагає запобігти цих помилок (наприклад, розв’язування задачі стає таким: 29, 24, 27, 22, 92, 94, 97, 99, 42, 49, 47, 44, 72, 74, 79, 77).

У процесі розв’язування комбінаторних задач можливе навчання плануванню на ІІІ рівні. Розглянемо на прикладі: “Скільки всього двоцифрових

чисел можна утворити, використовуючи цифри 1, 2, 5, 7, якщо кількість десятків повинно бути менше кількості одиниць?" Можна скласти два різних плани розв'язування:

а) утворимо спочатку всі можливі числа з цих цифр, потім виберемо з них числа, в яких кількість десятків менше кількості одиниць (11, 12, 15, 17, 22, 21, 25, 27, 55, 51, 52, 57, 77, 71, 72, 75);

б) одразу утворюємо з даних цифр тільки ті числа, що відповідають умові задачі (12, 15, 17, 25, 27, 57).

Перевага віддається другому плану, як більш раціональному. При теоретичному типі мислення планування здійснюється на основі рефлексії, пов'язаної з побудовою різних планів дій, з аналізом їх особливостей і способів їх конструювання.

Таким чином, з розгляду властивостей здійснення учнями розумових операцій (аналізу, синтезу, порівняння, абстрагування та узагальнення, планування) випливає необхідність їх удосконалення.

Комбінаторне мислення обумовлює можливість розвитку варіативності, критичності, послідовності мислення та удосконалення розумових операцій.

1.4.3. Методи, засоби і організаційні форми.

Особистісно орієнтований підхід у навчанні розуміється як побудова відкритої особистісної взаємодії у процесі навчання, забезпечення умов для особистісного розвитку, розкриття здібностей, розуміння себе, становлення суб'єктності учня. Це передбачає звертання до суб'єктних проявів особистості та розуміння її внутрішнього світу.

До основних пріоритетів в організації вивчення комбінаторики, спрямованих на розвиток особистості учнів потрібно віднести:

- забезпечення об'єктивної доступності й суб'єктивного розуміння учнями змісту навчального матеріалу;

- цілеспрямований розвиток семіотичної функції психіки учнів як їх загальної здатності до комунікації й основи для реалізації різноманітності;

- активізацію навчально-пізнавальної діяльності учнів в усіх аспектах
- забезпечення мотивації, диференціації навчання [189, с.24].

Успіх навчання значною мірою залежить від того, наскільки швидко учні опановують методи, форми і засоби пізнавальної діяльності, найбільш ефективне озброєння якими відбувається в разі її евристичного спрямування.

Відповідно до концепції, розробленої Н. Лернером та М. Скаткіним, у методі навчання провідними елементами є зміст освіти і способи його засвоєння [77; 114], на підставі чого виділяються п’ять загальнодидактичних методів навчання. До них відносяться пояснювально-ілюстративний (інформаційно-рецептивний), репродуктивний, проблемного викладу, частково-пошуковий (евристичний) і дослідницький методи. Перші два методи пов’язуються з репродуктивною діяльністю учнів, четвертий і п’ятий – із творчою, а проблемний виклад – з однією та другою в однаковій мірі.

Комбінаторна діяльність має евристичний характер. Тому в процесі конструювання занять пріоритет віддається формам, методам і засобам навчання, які дозволяють організувати продуктивну діяльність учнів. Особливої ваги набувають наступні принципи гуманістичної психології:

1. Увага до кожної ідеї учня. Вона передбачає позитивне підкріплення всіх ідей і відповідей учнів, максимальну адаптацію дітей до всіх висловлюваних ідей.

2. Створення клімату взаємної довіри, психологічної безпеки.

3. Забезпечення незалежності і самоконтролю у виборі та прийнятті рішень.

У процесі формування комбінаторних знань та вмінь вибір того чи іншого методу навчання здійснюється вчителем на основі логіко-математичного аналізу навчального матеріалу й тих навчальних завдань, розв’язання яких виступатиме дидактичною метою навчання.

Наше дослідження підтвердило той факт, що евристична орієнтація вивчення комбінаторики учнями змінює суб’єктивну оцінку ймовірності

досягнення успіху, сприяє становленню впевненості у своїх знаннях і способах діяльності.

Доцільним з дидактичного погляду є застосування психологічних механізмів у методичних підходах до формування комбінаторних знань та вмінь через задачі. Більшість комбінаторних задач є творчими, тому доцільно вчити учнів до аналізу комбінаторних задач підходити з різних боків: спочатку перебирати можливі ідеї і фіксувати їх, використовуючи наочні ілюстрації; зіставляти і, не деталізуючи, прогнозувати результати найбільш плідних з них; складати план розв'язання і працювати за ним; порівнювати різні способи розв'язування; визначати найбільш раціональний з них [159]. Постійно переконуючись у тому, наскільки важливо, нехай і інтуїтивно, але передбачати результати, учні поступово виробляють у собі цю здатність, оволодівають не тільки методами і способами розв'язування, а і певною стратегією мислення: для того, щоб розв'язати задачу, вони знаходять декілька ідей, зіставляють їх, інтуїтивно передбачають, прогнозують результати, здійснюють необхідні розумові та практичні дії і, нарешті, порівнюють отримані результати [65].

Щоб розв'язування задачі не перетворювалося в самоціль, а ставало дієвим засобом навчання, засобом розвитку інтелектуальних здібностей учнів, дуже важливо приділяти увагу обговоренню знайденого розв'язання, його аналізу: виявленню недоліків, пошукам кращого розв'язання, встановленню і закріпленню в пам'яті учнів тих прийомів, які були використані в даному розв'язанні, виявленню характерних ознак можливості застосування цих прийомів.

Позитивний результат дає застосування стратегії системи КАРУС (комбінування, аналогізування, реконструювання, універсальна, випадкова підстановки), розроблену В.Моляко, як методику, що розвиває творчі здібності [140, с.59]. Умови творчих задач повинні спрямувати мислення на реалізацію стратегії комбінування, що найбільш відповідають розумовим можливостям дітей. Творчість виявляється в процесі створення чогось нового для даного суб'єкта. Творчість у тій чи іншій формі не є талантом "обраних", вона

доступна кожному. В.Моляко вважає однією з основних якостей творчої особистості прагнення до оригінальності, до нового, заперечення звичного, а також високий рівень знань, умінь аналізувати явища, порівнювати їх, стійкий інтерес до певної роботи, порівняно швидше і легке засвоєння теоретичних і практичних знань у цій галузі, систематичність і системність у роботі [140].

Евристична спрямованість комбінаторної діяльності передбачає посилення в учнів потреби в поглибленні і розширенні своїх знань щодо об'єктів вивчення. Це викликає в них необхідність доповнювати задані цілі навчання новими, що відповідає дійсно творчому рівню активності.

Цей рівень активності передбачає прагнення учнів осягнути сутність явищ, що вивчаються, прагнення застосувати нові прийоми мислення для подолання труднощів, здатність вносити елементи новизни в способи виконання учбових завдань, розв'язування поставлених задач. Творча активність викликає позитивно-емоційний стан піднесення, радість від відкриття нового.

Неабияке значення в активізації комбінаторної діяльності учнів має педагогічний оптимізм учителя. Розвиток ініціативи та творчості в учнів, довіра до їх можливостей, підтримка прагнення до самовдосконалення зміцнює в учнів віру в свої можливості.

Активність учня значною мірою залежить від того, як організована його діяльність на початку заняття. Учні вже з перших хвилин повинні бути організовані на роботу. Це можна робити по-різному: вступне слово вчителя про зв'язок теми із змістом попередніх уроків, про значущість теми уроку, цікаві історичні довідки, постановка задачі, розв'язання якої вимагає знань з теми, що розглядається, тощо [65].

Як показує досвід, важливим фактором спрямування комбінаторної діяльності на досягнення поставленої мети є постановка проблеми, пов'язаної з їх життєвим досвідом. Наприклад, така задача: "Пасажир залишив речі в автоматичній камері на зберігання, а коли прийшов їх забрати, виявилось, що він забув номер. Лише пам'ятає, що номер мав числа 23 і 37. Щоб відкрити

камеру, треба правильно набрати п’ятицифровий номер. Яку найбільшу кількість номерів потрібно перебрати, щоб відкрити камеру?” Учні набувають навичок і вмінь будувати та інтерпретувати математичні моделі різного типу, співвідносити математичні методи з практичними потребами на кожному з етапів навчання. Це переконує їх у необхідності й практичній користі навчального матеріалу; а також у тому, що математичні абстракції виникають із задач, що ставить реальна дійсність .

Важливим прийомом організації комбінаторної діяльності учнів є запитання вчителя. Вони розрізняються за метою, змістом, мовним та інформаційним оформленням. Найбільш ефективними є проблемні запитання, відповідь на які не міститься у відомих учню знаннях. Але не можна їх протиставляти із запитанням, які викликають репродукцію знань. Тому доцільним є їх поєднання.

Ідея співпраці виключає авторитарність, стимулює творче використання пам’яті, сумісний пошук, глибоку віру учня у свою захищеність і право інтелектуальних труднощів – з одного боку, і віру вчителя в духовні сили своїх учнів – з іншого.

Особливістю підходу до організації комбінаторної діяльності є первинність діяльності учня, яка надає йому можливість особистої самореалізації по відношенню до фрагмента системи знань, що належить засвоєнню, входження в культурно-історичний простір з уже надбаним досвідом і результатом. Це дуже важливо, оскільки учень, який просто повторює діяльність вчителя, задану в зразках, може нічому не навчитися: важливо, щоб підключався зворотний зв’язок, рефлексія процесу і продукту особистої діяльності, яка вже відбулася, із зразками, які вводяться пізніше. Така технологія забезпечує мотивоване навчання, розвиток творчих здібностей [65, с.66].

Важливо надавати процесу формування комбінаторних знань та вмінь проблемного характеру, виробляти в учнів аналітико-синтетичні уміння, здатність до теоретичних узагальнень. Не менш важливим завданням є

розвиток навичок самостійної навчальної роботи, формування умінь працювати з підручником, проявляти творчий підхід під час виконання домашніх завдань.

У процесі розв'язування комбінаторних задач слід прагнути постійно, де це можливо і доречно, враховувати важливе методологічне завдання навчання учнів математичному моделюванню, пізнавальне і світоглядне значення методу математичного моделювання. Теза про те, що математика займається вивченням математичних моделей реальних процесів, знаходить постійне підтвердження.

Моделювання – характерна риса теоретичного мислення. В. Давидов зазначає, що за своєю природою теоретичне мислення має своїм об'єктом різноманітність не безпосередньо заданих речей, а підходить до них, оперує з ними через моделі.

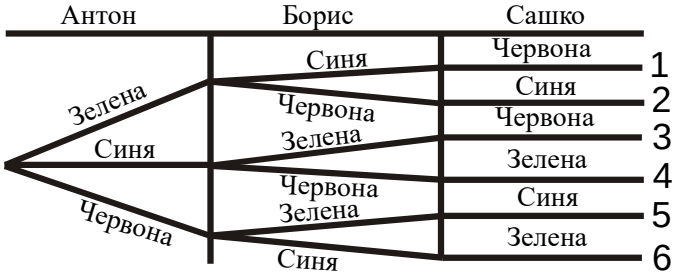
Моделювання використовується в основному під час розв'язування неалгоритмічних задач для подолання труднощів, які виникають у процесі розв'язування [201]. Ці труднощі можуть бути суто психологічного характеру, пов'язані зі складністю задачі, з тим, що для її розв'язання необхідно уявити собі всі умови задачі, всі зв'язки і відношення між даними і невідомими в легкоозглядній формі. Для подолання таких труднощів, використовуються моделі у вигляді схем, креслень і т.п., які називають допоміжними моделями задачі. При цьому пошук розв'язання і саме розв'язування здійснюється при опорі на побудовану допоміжну модель.

Використовуючи математичне моделювання для розв'язування тієї чи іншої задачі, природно показати як працює математика, як формалізувати умову задачі, не враховуючи несуттєві деталі, як вибрати метод розв'язування отриманої математичної моделі та реалізувати його, як інтерпретувати результат.

У викладанні методи не можуть бути відірвані від фактів, які добуваються з їх допомогою. Математичне моделювання є важливою стороною прикладної спрямованості математичної освіти, яка часто добро та природно реалізується засобами дискретної математики, зокрема комбінаторики.

Наведемо кілька моделей, які використовували учні 5-7 класів у процесі розв’язування задач.

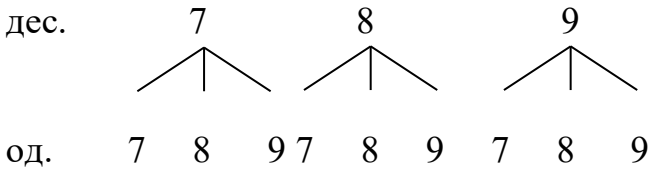
Задача 7. Три брати - Антон, Борис та Сашко на Новий рік вирішили написати листа Діду Морозу з запрошенням на свято. У них є синя, зелена та червона ручки. Скількома способами вони можуть розподілити ручки?



6 способами

Рис. 1.7. Дерево логічних можливостей до задачі 7

Задача 8. Скільки двоцифрових чисел можна скласти з цифр 7, 8, 9?



6 чисел

Рис. 1.8. Дерево логічних можливостей до задачі 8

Задача 9. Коли батькові було 27 років, синові було 3 роки. Зараз синові в 3 рази менше років, ніж батькові. Скільки років кожному з них?

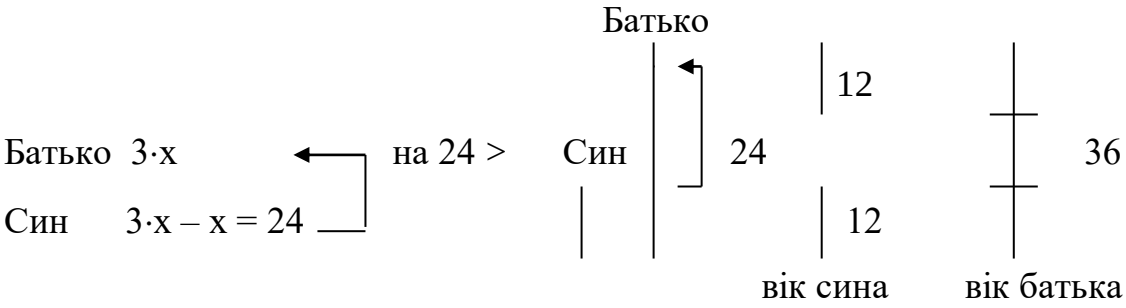


Рис. 1.9. Наочна модель до задачі 9

Графічні знаки, які застосовуються замість буквеної символіки, допомагають учням виділити зв’язки і відношення в узагальненому вигляді. Побудовані учнями наочні моделі є своєрідними опорними сигналами для усвідомлення змісту задачі, допомагають скласти уявлення про всі зв’язки і відношення між даними і невідомим в наочній формі, при цьому пошук

розв’язання і саме розв’язування здійснюється при опорі на побудовані допоміжні моделі.

Наочне моделювання є системоутворюючим фактором психологічного процесу інтеріоризації математичної інформації, особливо на інтуїтивному рівні свідомості. Взаємодія свідомого і несвідомого рівнів надає учням можливість відкривати ще невідомі їм факти і закономірності.

Використання моделювання в навчанні має два аспекти. По-перше, моделювання слугує тим змістом, який має бути засвоєний учнями в процесі навчання, тим методом пізнання, яким вони повинні оволодіти, і, по-друге, моделювання є тією навчальною дією і засобом, без якого неможливо повноцінне навчання [65]. Наочне моделювання є одним із засобів реалізації принципу наочності.

Організаційні форми навчання призначені пробуджувати пізнавальну активність учня, сприяти становленню самостійності в мисленні та діяльності, реалізації прикладної спрямованості курсу, створювати сприятливі умови для усвідомлення учнями вагомості набутих знань, надавати змогу продемонструвати свій інтелект, свою здатність до самостійного аналізу, формування конструктивних ідей та підходів до їх реалізації, приймати обґрунтовані рішення.

У дидактиці організаційну форму навчання визначають як взаємодію вчителя і учнів, яку регулюють певні заздалегідь встановлені порядок і режим [77; 130; 147]. Серед організаційних форм навчання виділяють загальні й конкретні форми.

Оскільки у навчанні відбувається спілкування (комунікативна діяльність) між учителем як суб’єктом викладання і учнями як колективним суб’єктом учіння, то в якості загальних організаційних форм навчання розглядають фронтальну, групову та індивідуальну форми. Саме в цих організаційних формах здійснюється головне дидактичне відношення – зв’язок взаємодії викладання, учіння і змісту освіти.

Серед психолого-педагогічних умов підвищення ефективності навчання комбінаторики в умовах особистісно орієнтованого навчання важлива роль належить диференційованому навчанню. Оскільки учні відрізняються за загальним розвитком, математичними здібностями, навченістю, потрібна індивідуалізація і рівнева диференціація навчання, які спрямовані на врахування індивідуальних особливостей учнів, створення максимально сприятливих умов для їх самореалізації. Шляхи її реалізації можуть бути різними. Найбільш поширений – розбиття учнів на динамічні типологічні групи (гомогенні і гетерогенні), яким пропонуються диференційовані за змістом і за вимогами завдання. Диференціація навчання є провідною ідеєю побудови особистісно орієнтованого навчання.

Управління процесом навчання під час застосування групових форм вимагає від вчителя цілеспрямованої роботи щодо надання вчасної диференційованої допомоги учням, щодо створення атмосфери, яка сприяє ефективному навчанню і, водночас, виключає можливість виникнення інтелектуальної, моральної та емоційної залежності одних учнів від інших.

Як показує досвід, активність учнів підвищується, а якість навчання покращується, якщо залучати учнів до навчальних ігор, під час яких вони ставатимуть членами, наприклад, уявних трудових колективів і будуть мати справу не з готовими математичними моделями прикладних задач, а з реальними життєвими проблемами, розв’язування яких вимагає від учнів створення математичної моделі.

Відомо, що природною основою фантазії є гра, яка передбачає: а) відрив від дійсності; б) вільне комбінування; в) перевтілення; г) ігрове виконання ролі [170].

У ігровій діяльності можуть народжуватись шедеври наукової думки, адже дослідницька робота “рідна сестра” шарад, розгадування головоломок, кросвордів і тому подібне. Як головоломки та кросворди хтось складає, так і чисельні загадки складені природою і поставлені перед людиною. У неї є вибір, але він обмежений варіантами, які підготувала природа. Гра захоплює

перспективою, примушуючи проявляти творчі сили, і несе евристичну функцію, допомагаючи відшукувати істину.

Відомо, що події, які значно просували науку вперед, інколи народжувались під час гри. Захоплення Л. Ейлера ігровою комбінаторною задачею про кенігсберзькі мости спричинило зародження ідей нової науки – топології. В азартних іграх у карти та кості, перетворюючись на дослідників, М. Тарталья, Б. Паскаль почали міркувати про наукові аспекти комбінаторики. Визначними також є моменти, коли наукові відкриття були отримані в дитячому віці внаслідок гри: 15-річний Б. Паскаль, малюючи на підлозі вугіллям, самостійно довів багато теорем геометрії Евкліда і навіть дійшов до її визначальних понять; в 14 років К. Максвел, граючись шпильками та ниткою, встановив, як з їх допомогою можна накреслити овал [187, с.148-157].

Активно враховується той факт, що діти 7-12 років віддають перевагу ігровій діяльності. Пізнавальні ігри сприяють розвитку мислення, пам’яті учнів, формуванню в них умінь розрізняти головне та другорядне, спостерігати, порівнювати, проводити обґрунтовані міркування, здійснювати самоконтроль тощо. Пробуджуючи інтерес до пізнавального процесу, ігрова діяльність створює умови для оволодіння певними розумовими операціями, алгоритмічними та евристичними прийомами розумової діяльності, для розвитку та застосування нової для учнів математичної мови

Крім того, навчальна гра являє собою форму відтворення предметного і соціального змісту майбутньої професійної діяльності учня 5-9 класів, моделювання таких систем відношень, що характерне для цієї діяльності як цілого, є інструментом формування особистості учня [195].

Використання групових форм організації навчальної діяльності залучає до активної роботи навіть таких учнів, на яких різні прийоми індивідуальної форми навчання не надають очікуваного впливу, оскільки, потрапивши в групу однокласників, які колективно виконують певне завдання, учень не може відмовитись виконувати свою частину роботи, бо підпаде під моральне засудження з боку своїх товаришів, а їх думку, повагу він, як правило, цінує,

буває, навіть більше, ніж думку вчителя. Крім того, працюючи в мікроколективі, кожний його член намагається бути не гірше за інших, виникає здорове змагання, яке сприяє інтенсифікації роботи, надає їй емоційну привабливість, що також відіграє роль у становленні відповідної мотивації. Крім того, дидактична гра імітує (а тим самим моделює) реальні ситуації, з якими має справу учень у своєму повсякденному житті.

Особливо зростає роль учителя в процесі індивідуальної роботи учнів, коли вчитель виступає як порадник і помічник у розв'язуванні задач. Індивідуальна робота учнів при цьому розглядається як їх самостійна робота під керівництвом або з допомогою вчителя і організовується в двох варіантах:

1) учні отримують однакове завдання, але різної міри індивідуальну допомогу вчителя на окремих етапах їх діяльності;

2) учні працюють із завданнями різного рівня складності.

Вибір тієї чи іншої форми (колективної, індивідуальної, групової, парної) діяльності залежить від певних дидактичних цілей уроку, змісту навчального матеріалу, особливостей даного класу, від позицій і характеру вчителя.

Ураховуючи, що активізація комбінаторної діяльності учня тісно пов'язана з рівнем інтенсивності емоцій, дуже важливо створити на різних видах занять особливий мікроклімат творчого натхнення та співпраці у спілкуванні вчителя з учнівським колективом, учнів між собою.

Це стане можливим, якщо:

- відмовитись від традиційних стереотипів орієнтування процесу навчання на середнього учня, належну увагу приділяти як здібним учням (саме їх необхідно активно залучати до проведення самостійних досліджень), так і слабковстигаючим, використовуючи в повній мірі диференціацію навчання;

- уникати в учнівському колективі створення стресових ситуацій, аналізуючи індивідуальний рівень соціальної адаптації окремих учнів, їх міру участі, і тим самим попереджаючи неадекватність їх реакції;

- бути об'єктивним у своїх оцінках, щедрим на похвалу, коли для цього є підстави; намагатись розкрити все, що є найкращого в дитині, поважати її

особистість, дуже обережно використовувати критичні зауваження (ніщо так не ображає гідність учня, як привселюдна критика вчителя, приниження його розумових здібностей);

- створити атмосферу довіри та невимушеності шляхом схвалення позитивних дій учнів, адекватністю форми спілкування з аудиторією та кожним учнем з урахуванням їх інтелектуального розвитку [65, с.71-72].

Таким чином, аналіз психолого-педагогічних чинників дав можливість виділити основні фактори, які сприяють розвиткові комбінаторної діяльності:

- орієнтація учнів на самостійну роботу, формування в них потреби в систематичній роботі з науково-популярною і науковою літературою. Для цього використовуються різні педагогічні прийоми, зокрема залучення учнів до розробки творчих проектів, до конкурсів: “Хто придумає найбільше різних способів розв’язання задачі?”, “Хто придумає найекономніший спосіб?”;

- створення сприятливого мікроклімату для творчої співпраці; атмосфери творчого пошуку;

- забезпечення “математичного” спілкування не тільки на уроці, а і в позаурочний час. Це може відбуватися у формі поточних заліків, взаємоконсультацій, математичних боїв між командами учнів, математичних вечорів, КВК;

- забезпечення роботи учнів в гомогенних і гетерогенних групах, парами, індивідуально і колективно. Комунікативна діяльність перебуває в адекватному відношенні з психологічними особливостями учнів основної школи. У всіх цих випадках створюються сприятливі умови для своєрідних соціально-педагогічних вправ у розумовій колективній діяльності і спілкуванні;

- цілеспрямоване формування алгоритмічних і евристичних прийомів розумової діяльності;

- систематичне повернення учнів до аналізу власних дій, що допомогли віднайти ідею розв’язання проблеми, що було перешкодою і як вона була усунена;

- систематичне проведення роботи з вже розв’язаною задачею з метою навчити учнів ставити і вирішувати ряд нових проблем у зв’язку з нею.

Висновки до першого розділу

Основні ідеї концепції математичної освіти для 12-річної школи, Державного освітнього стандарту освітньої галузі “Математика” сприяють реалізації включення комбінаторики як надзвичайно корисної для розвитку мислення учнів змістової лінії в процес навчання математики в основній школі.

Існує реальна можливість забезпечити органічний зв’язок комбінаторної пропедевтики з арифметичним, алгебраїчним і геометричним матеріалом у 1-9 класах. Комбінаторні задачі дають можливість активізувати пізнавальну діяльність учнів, зрозуміти, проілюструвати прикладами з оточуючої дійсності, практики, життя процедуру постановки математичних задач. Доцільно вчити учнів підходити до розв’язування комбінаторних задач з різних боків. Учні поступово оволодівають не тільки способами розв’язування, а і певною стратегією мислення: для того, щоб розв’язати задачу, вони знаходять декілька ідей, зіставляють їх, інтуїтивно передбачають, прогнозують результати, здійснюють необхідні розумові дії і, нарешті, порівнюють отримані результати. Тому задачний матеріал діючих підручників доцільно доповнити комбінаторними задачами. Розв’язування їх не пов’язане з додатковим навчальним часом для викладу теорії.

Основними характеристиками комбінаторного мислення є: універсальність; організація цілеспрямованого перебору певним чином обмеженого кола можливостей. Воно спирається на критерії вибіркового пошуку, дає змогу вирішувати складні, проблемні ситуації.

Розвиткові комбінаторного мислення сприяють: забезпечення інтуїтивної основи вивчення комбінаторики, яка передбачає збагачення досвіду учнів щодо дослідження математичних закономірностей за допомогою залучення їх до спостережень з використанням матеріальних і знакових моделей;

цілеспрямоване формування алгоритмічного і евристичного прийомів розумової діяльності; створення сприятливого мікроклімату для творчої співпраці; орієнтація учнів на самостійну роботу; організація математичної діяльності не тільки на уроці, а і в позаурочний час, фронтальна навчальна робота, групова в гомогенних і гетерогенних групах, парами, індивідуально; систематичне повернення учнів до аналізу власних дій, до того, що допомогло знайти ідею розв'язання проблеми, що було перешкодою і як вона була усунена.

Комбінаторна діяльність має евристичний характер. Тому в процесі конструювання занять пріоритет віддається методам, формам і засобам навчання, які дозволяють організувати продуктивну діяльність учнів. Важливо, щоб підключався зворотній зв'язок, рефлексія процесу і продукту особистої діяльності, яка вже відбулася, із зразками, які вводяться пізніше, оскільки учень, який просто повторює діяльність вчителя, задану в зразках, може нічому не навчитися.

Психологічно обумовленим є поділ процесу вивчення комбінаторики на такі етапи:

I. Побудова та використання різних наочних комбінаторних моделей відповідно до змісту задачі (1- 4 класи).

II. Уведення основних понять комбінаторики, вивчення правил додавання і множення (5-9 класи).

III. Вивчення основних формул комбінаторики та використання їх до розв'язування задач різних рівнів складності (11 клас, 8-9 класи з поглибленим вивченням математики).

Оскільки означення комбінаторних понять носять конструктивний характер, то особливістю відповідної методичної системи є їх формування за допомогою спеціально дібраної системи відповідних задач і вправ, які можна розв'язувати "неформально" (безпосередній перебір, систематичний перебір без застосування наочних засобів перебору та з їх допомогою, графи, комбінаторні правила множення і додавання).

РОЗДІЛ 2
МЕТОДИЧНА СИСТЕМА ВИВЧЕННЯ КОМБІНАТОРИКИ В ОСНОВНІЙ ШКОЛІ

2.1. Пропедевтика формування комбінаторних знань та вмінь

2.1.1. 1-4 класи.

Основним завданням пропедевтики формування комбінаторних знань та вмінь є розвиток відповідних прийомів мислення. У початковій школі рекомендується розглянути ігрові комбінаторні задачі, які розв'язуються безпосереднім перебором.

Система вправ і задач комбінаторного характеру, що пропонується, розроблялася з метою реалізації дидактичних принципів з урахуванням:

- особливостей процесу формування комбінаторних знань та вмінь;
- відповідності комбінаторних задач матеріалу шкільного курсу математики, що вивчається;
- диференційованого підходу в навчанні;
- прикладної спрямованості комбінаторних задач;
- здійснення принципу порівняння та встановлення зв'язків між комбінаторними поняттями і способами діяльності;
- поступового нарощування складності;
- "максимальної" зацікавленості та "максимальної" наочності задач;
- розвитку в учнів самостійності та творчих здібностей.

Визначимо основні методичні орієнтири, у відповідності з якими розроблялася методика навчання учнів комбінаторної діяльності.

1. Провідною метою є не лише розв'язування задач певного типу, а формування комбінаторного мислення.

2. Необхідно постійно варіювати умови здійснення комбінаторних міркувань. Це не дозволить сформувати в учнів установку на дії за готовим алгоритмом.

3. Методика навчання розв'язування комбінаторних задач повинна будуватися з урахуванням того, що дітям притаманна своя, поки ще не досконала логіка міркувань, не можна нехтувати нею, нав'язувати "дорослі" способи розв'язування задач (Ж. Піаже, Н. Метельський). Однак допомога вчителя необхідна. Л. Виготський підкреслював, що те, що сьогодні дитина робить за допомогою дорослого вчителя, завтра вона робитиме самостійно, те, що входило до зони найближчого розвитку, у процесі навчання переходить на рівень актуального розвитку [56, с. 438-457].

4. У процесі навчання розглядаються різні можливості здійснення перебору під час розв'язування комбінаторних задач. В учня є вибір шляхів і засобів розв'язування задачі, він може діяти в даній ситуації згідно із своїми особливостями. При цьому вчитель не регламентує кожний шлях, заохочує самостійність, творчість.

5. У навчанні розв'язуванню комбінаторних задач зберігається етапність. Основний напрямок роботи – це перехід учнів від здійснення випадкового перебору варіантів до проведення системного, спочатку без застосування засобів його організації, потім за їх допомогою.

У початковій школі існує реальна можливість забезпечення комбінаторної пропедевтики шляхом включення в арифметичний, алгебраїчний та геометричний матеріал 1-4 класів задач та вправ відповідного характеру.

У програмі 1 класу чотирирічної початкової школи окремим розділом виділяється дочисловий період. Основні питання такі: властивості і відношення між предметами; орієнтування дітей в основних просторових напрямках; взаємне розміщення предметів у просторі; лічба предметів і порівняння чисельності предметних множин безпосереднім встановленням взаємнооднозначної відповідності; підготовка до написання цифр. У методичному плані завдання підготовчого періоду розглядаються на основі виконання практичних вправ з окремим предметами чи множинами предметів; безпосереднього показу чи інсценування певних ознак, подій, явищ; застосування різних ігрових ситуацій та ігор; моделювання деяких явищ або

зображення їх малюнками. Виконання практичних вправ часто супроводжується вимовлянням відповідних термінів, математичних виразів.

Упродовж вивчення цього матеріалу зручно розглядати з учнями дидактичні ігри на безпосередній перебір.

Наприклад, на одному з перших уроків “Взаємне розміщення предметів у просторі. Розрізнення предметів за розміщенням” після ознайомлення учнів з напрямками руху: зліва направо, справа наліво, зверху вниз, знизу вверх можна в кінці уроку розглянути дидактичну гру “Прапорець” (гра триває приблизно 15 хвилин).

Мета: вчити дітей розрізняти предмети за розташуванням, розміщувати предмети на площині аркуша паперу, вчити учнів організовувати безпосередній перебір, розвивати відповідні якості мислення.

Матеріал до гри: олівці червоного, синього та жовтого кольорів.

Методика проведення: Вчитель читає умову: “Казковій країні потрібен прапорець, на якому було б три (горизонтальні або вертикальні) різнокольорові, однакові за розміром смуги. Рада країни оголосила конкурс прапорців, але виставила умову: використовувати лише три кольори: червоний, синій та жовтий. Намалюйте якомога більше прапорців, які б, на ваш погляд, підійшли до цієї країни. Розташовуйте смуги спочатку зліва направо, а потім зверху вниз”. Учитель малює на дошці зразок прапорця та пропонує учням намалювати спочатку один такий прапорець та розмістити на ньому різнокольорові смуги, потім інший і так далі. Після виконання вчитель запитує в учнів, скільки прапорців вони намалювали, які кольори використовували, в якому порядку, чи є однакові прапорці. Показує варіанти прапорців, які учні не змогли намалювати. Голосуванням вибирається прапорець для казкової країни.

Учні сприймають задачі, що складені у формі гри або мають казковий сюжет, саме як задачі, підходять до їх розв’язування свідомо, але при цьому грають.

У процесі ознайомлення в 1 класі зі складом числа, що проводиться на предметній основі, також можна використовувати задачі на безпосередній

перебір, Наприклад, під час вивчення теми “Склад числа 3. Лічба та написання цифр”.

Бесіда (триває приблизно 10-15 хвилин). Розглянь малюнок 2.1, де зображені великі та маленькі кола. Скільки всього кіл у кожному рядку? (3) На які менші числа можна розкласти число 3? (Число 3 можна розкласти на 2 і 1; 1 і 2; 1, 1 і 1). Намалюй усі візерунки, що можна скласти з трьох кіл, розташовуючи їх у рядок.

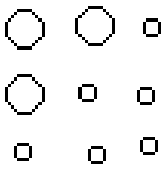


Рис. 2.1. Ілюстративний матеріал до бесіди

У процесі самостійного складання візерунків частина дітей не знаходить усіх можливих варіантів, оскільки діє хаотично, або система перебору, вибрана ними, не охоплює всіх варіантів. Наприклад, учень, складаючи візерунки, розмірковує так: “Великими можуть бути всі три кола, або два, або одне. Виходить три візерунки. У цих візерунках потім можна замінити великі кола на маленькі, а маленькі на великі. Так складаю ще 3 візерунки”.

Завдання вчителя полягає в тому, щоб допомогти учням знайти потрібну систему перебору. Це можна зробити так:

- Знайдіть усі візерунки, у яких два кола великі й одне маленьке. На якому місці в цих візерунках стоїть маленьке коло?

- Чи можна його розмістити на іншому місці?

- Який ще візерунок можна скласти?

Можна викликати учня до дошки, який буде малювати ці три візерунки окремо в перший стовпчик. Потім аналогічна робота проводиться з візерунками, що складаються з двох маленьких і одного великого кола. Вони їх малюють у другий стовпчик. У третьому стовпчику залишаються візерунки з трьома однаковими колами. За зробленими малюнками учні наочно бачать систему перебору (Рис. 2.2).

Хаотичний перебір припускає виконання дій без певного плану. Дії в цьому випадку мають маніпуляційний, спробувальний характер. Для

здійснення системного перебору потрібно розумово уявити послідовність усіх дій, тобто спочатку скласти план, за яким будемо діяти.

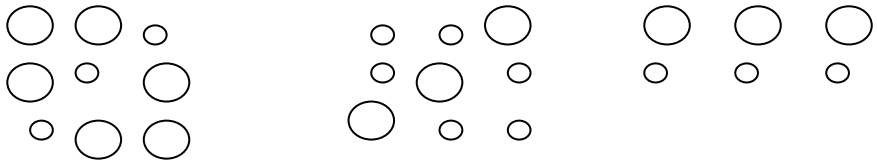


Рис. 2.2.Візерунки, що складають діти під час бесіди

Дидактичні ігри, спрямовані на формування комбінаторних вмінь, можна розглядати не тільки на уроках, але і в позаурочний час.

Гра “В електричці”.

Мета: вчити учнів організовувати перебір у певній системі, виховувати критичність, варіативність, послідовність мислення.

Матеріал до гри: олівець та зошит.

Умова: Микола, Сашко та Іван їдуть в електричці на дачу. Вони сидять на одній лавці. Хлопцям потрібно було проїхати 8 зупинок. Щоб не нудьгувати, вони вирішили на кожній зупинці мінятися місцями. Чи зможуть вони кожного разу мінятися так, щоб їх нове розташування відрізнялося б від попередніх?

Методика проведення: Учитель викликає трьох хлопчиків до дошки, вони сідають на стільці. Решта учнів записує в зошитах варіанти їх розташування, використовуючи перші букви їх прізвищ: М.С.І. (першим записаний той, хто сидить біля вікна). Далі учні пропонують варіанти, що відрізняються порядком розташування дітей. Ці варіанти програються та записуються. Якщо учні утворюють варіант розташування, який повторює попередній, то вони зможуть помітити свою помилку. Поки перебір здійснюється хаотично, наприклад:

1. М.С.І. 3. І.М.С 5. І.С.М
2. С.М.І. 4. М.І.С 6. С.І.М

Після того, як знайдені ці 6 розташувань, учні намагатимуться скласти новий варіант, оскільки хлопчики проїхали не всі зупинки. Учитель запитує: “Чому не можливо знайти 7 варіант?” - та пропонує знайти та записати пари варіантів, які схожі. Наприклад:

1. М.С.І. 3. С.М.І. 5. І.М.С

2. М.І.С. 4. С.І.М. 6. І.С.М.

Потім розглядається отримана послідовність варіантів та ставляться запитання:

- Хто спочатку сидів біля вікна?
- Коли Микола сидить біля вікна, як по-іншому при цьому можуть сісти Сашко та Іван?
- Чи можна їх ще якось пересадити, коли Микола сидить біля вікна?

Аналогічні запитання, коли Сашко та Іван сидять біля вікна.

- Чи всі хлопчики були біля вікна?
- Отже, скільки всього можливо скласти варіантів розташування хлопчиків?

Таким чином, учні впевнюються, що можна скласти тільки 6 варіантів. Далі вчитель звертає увагу учнів на те, що при другому записі варіантів можна швидко складати варіанти, не повторюючи ті самі. У подальшому хаотичний перебір не забороняється, але учні, які проводять перебір у певній системі, заохочуються.

Перехід до такого планування проходить наступним чином. Спочатку вчитель пропонує учням проводити розгорнуті пояснення вже виконаних практичних дій. Ці дії аналізуються, потім словесні пояснення попереджають дії, планують їх. Причому починають з практичних.

Оволодіння учнями “повним перспективним плануванням” створює умови для досягнення ними більш високого рівня планування, при якому розглядаються різні шляхи організації перебору й вибирається найбільш раціональний.

Предметом гри може бути реальна ситуація, предметне середовище, умовна модель, що відтворюють соціальні взаємовідносини. Завдання дітей полягає в тому, щоб зрозуміти ситуацію і прийняти необхідне рішення в ігровій формі, передбачити наслідки цього рішення, а також по можливості знайти інші варіанти рішення.

Правильне використання дидактичних ігор на уроці математики створює сприятливі умови для переорієнтації дітей на різні види навчальної діяльності, зменшуючи при цьому їх утомлюваність. У дидактичних іграх взагалі не має бути принижених і ображених, а лише переможці й переможені, та створюватися ситуація, за якої кожен учень, який програв сьогодні, може виграти завтра. Учителю, оцінюючи діяльність учня під час дидактичної гри, ні в якому разі не можна порівнювати його з іншими (“ти сьогодні краще (гірше) працював, ніж учора”, а ніяк не “ти працював гірше за...”)[195].

Під час вивчення тем “Нумерація чисел та арифметичні дії в межах 10. Нумерація чисел та арифметичні дії в межах 100” вже від хаотичного перебору можна переходити до перебору в певній системі. Доцільно розглядати задачі на зразок таких.

Задача. Скільки двоцифрових чисел можна утворити з цифр 5 та 8? Прочитайте їх.

- Які числа можна утворити з даних цифр, щоб на першому місці стояла цифра 5? (58, 55)

- Які числа можна утворити з даних цифр, щоб на першому місці стояла цифра 8? (85, 88).

- Скільки всього чисел утворилось? (4)

Задача. Скільки двоцифрових чисел можна утворити з цифр 2, 3, 0 так, щоб цифри в числі не повторювались? Знайдіть їх суму.

Задача. Які два числа при додаванні дають 8?

Задача. З трьох чисел 32, 29, 3, знака “=” та знаків арифметичних дій запишіть різні правильні рівності.

Задача. Переставляючи тільки числа, складіть всі можливі вирази: 9+5-3.

Задача. Розставляючи знаки “+” і “-“ між даними цифрами 8...1...5, запишіть всі можливі вирази.

Уже починаючи з 2 класу, можна переходити до розв’язування задач на безпосередній перебір із застосуванням наочних засобів перебору (таблиці, схеми, графи). Простішим з них є таблиці.

Задача. Скільки двоцифрових чисел можна скласти, щоб на місці десятків були б цифри 5, 8 або 0, а на місці одиниць – 2, 3 або 4? Заповніть таблицю числами (якщо такого числа немає, то в потрібній клітинці поставте хрестик).

д/од	2	3	4
5			
8			
0			

Задача. Складіть усі можливі приклади на додавання одноцифрових чисел з відповіддю 12.

	3	4	5	6	7	8	9
12	9	8	7	6	5	4	3

У цій задачі за допомогою таблиці встановлюється не тільки перебір всіх можливих варіантів, а й функціональна залежність значень другого доданка від значень першого, тобто проводиться ще й пропедевтика функціональних уявлень.

У 3-4 класах можна переходити до задач на перебір, який вже здійснюється за допомогою графів. У темах “Нумерація чисел і арифметичні дії в межах 1000. Нумерація багатоцифрових чисел і арифметичні дії в межах мільйона” можна включати задачі на зразок таких.

Задача. Напишіть усі трицифрові числа цифрами 5, 7 і 4 так, щоб у числі цифри не повторювались. Скільки їх?

- Які числа можна скласти з даних цифр, щоб на першому місці стояла цифра 5? (574, 547)

- Які числа можна скласти з даних цифр, щоб на першому місці стояла цифра 7? (754, 745)

- Які числа можна скласти з даних цифр, щоб на першому місці стояла цифра 4? (457,475)

- Ще є які-небудь числа? (ні)
- Скільки всього? (6)

Можна поставити запитання й так:

- Яке трицифрове число отримаємо, якщо до 57 припишемо 4? (574)
- Яке трицифрове число отримаємо, якщо 4 поставимо між 5 і 7? (547)

- Яке трицифрове число отримаємо, якщо 4 поставимо перед 57? (457)
- Скільки всього чисел? (3)

Аналогічні міркування проводяться відносно числа 75.

Кожен учень сам обирає систему, за якою він буде впорядковувати об’єкти. Методика роботи будується так, щоб учні самостійно “відкривали” можливі засоби перебору. Цей шлях не економний, але він дозволяє учням набути власного досвіду пошукової діяльності.

Задача. В одній маленький казковій країні всього 25 автомобілів. Вирішили давати цим автомобілям трицифрові номери, складені з цифр 1, 2, 3, 4, причому однакових цифр в одному номері не повинно бути. Чи вистачить номерів для всіх автомобілів?

Учні розмірковують із допомогою вчителя так: “Першою цифрою в номері може бути 1, 2, 3 або 4 (помічають чотири точки). Спочатку складемо всі номери з першою цифрою 1. При цьому другою цифрою може бути або 2, або 3, або 4 (проводять лінії, ставлять три точки). Якщо перша цифра 1, друга 2, тоді третьою може бути тільки 3 або 4 (проводять лінії, ставлять дві точки)” і так далі. Аналогічно з цифрами 2, 3 та 4 (Рис.2.3).

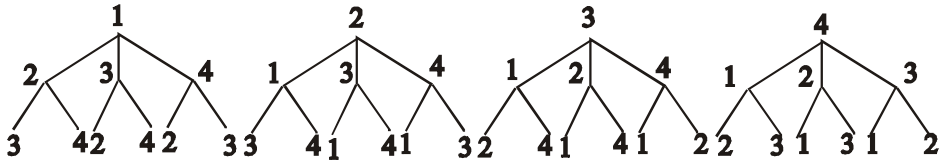


Рис. 2.3. Дерево логічних можливостей

Граф допомагає проводити перебір у певній системі, не пропускаючи жодної можливості. Але в деяких випадках розв’язування комбінаторних задач за допомогою графів не є доцільним. Наприклад, іноді можливе неправильне підрахування кількості варіантів. Це пов’язане з тим, що деякі об’єкти, які на графі задаються різними, є однаковими. Визначити це учні можуть тільки, якщо відтворять кожний конкретний об’єкт. Такі задачі буває корисним розв’язувати без використання графів.

У процесі розв’язування з учнями текстових задач доцільно разом із задачами, які мають одну правильну відповідь, розв’язувати такі, що мають

декілька таких відповідей. В учнів буде формуватись спрямованість на пошук різних варіантів розв'язків задач, тобто варіативність мислення.

Задача. Хлопчик отримав здачу чотирма монетами. Запишіть, що це були за монети, якщо йому дали 40 копійок.

Задача. Дві дівчинки мали по 70 копійок. У кожної було по 4 монети. У першої дівчинки були такі монети: 25к., 25 к., 10 к., 10 к. Які монети були у другої дівчинки?

Задача. Скількома монетами можна дати здачу в 5 копійок?

Задача. Скількома способами можна розкласти 7 яблук у три вази?

У роботі з учнями 1-4 класів процес формування комбінаторних знань та вмінь продовжується й на геометричному матеріалі. Навчальна діяльність, у процесі якої діти оволодівають геометричним матеріалом, включає такі варіанти робіт: організоване вчителем спостереження різних геометричних форм і відношень; практика дітей у вимірюванні, побудові, конструюванні, малюванні; практика розв'язування задач з геометричним змістом. У такі уроки можна включати задачі на вільне конструювання.

Задача. (В учнів є набір з 10 квадратів, 10 трикутників та 10 кружечків). Вибери з фігур, що є у тебе, 1 квадрат, 3 трикутники та 5 кружечків. Скільки всього фігур ти вибрав? Складіть що-небудь з конструктора, до складу якого входять вибрані квадрат, трикутники та кружечки.

Розв'язування цієї задачі, як правило, проходить у два етапи. Перший етап – вивчення властивостей наявних об'єктів у процесі їх переміщення, переорієнтації в просторі, з'єднання і роз'єднання, формування блоків з цих елементів.

Другий етап – створення задумів і втілення їх у конструкціях наявних елементів. Такі завдання задають діяльності комбінаторний характер, дозволяють створити практично необмежену кількість конструкцій. Крім того, вони фіксують прагнення до будь-якої діяльності вносити елементи творчості, раціоналізації. Рівень розвитку такої тенденції характеризується тим, наскільки

швидко дитина переформульовує вихідні дані умови задачі в шукані: “сконструювати що-небудь корисне з наявних об’єктів”.

У процесі розв’язування задач учні частіше вибирають такий шлях до створення розробки конструкції, коли базовим елементом комбінування стає попередня конструкція чи її блок, тобто конструкції створюються за принципом нарощування структурних блоків. Наприклад, дитина змоделювала будиночок із трикутника й квадрата, далі приєднує до кутів основи будиночок із трикутника й квадрата і так далі [196].

Задачі на вільне конструювання використовують природну цікавість дитини, не відривають її від дійсності. В умовах дефіциту навчального часу у початкових класах для формування комбінаторних вмінь можна використати уроки математики, малювання, праці, а також позакласні заходи: математичні ранки, математичні олімпіади, математичні естафети тощо.

Задача. З яких фігур складається перший будинок (Рис.2.4.). Домалюй інший будинок так, щоб порядок розміщення фігур змінився.

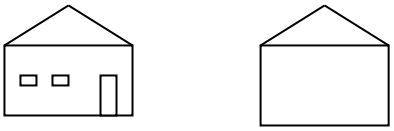


Рис.2.4. Ілюстративний матеріал до задачі

Задача. Накресли який-небудь прямокутник і поділи його двома відрізками на 3 трикутники і один п’ятикутник.

Для навчання учнів комбінаторним діям дуже привабливою вважаємо гру “Пазли” – складання картинки, розрізаної на частини. Почати можна з невеликою кількості частин – 10-12 і переходити до більш складних. Така гра викликає в учнів зацікавленість, з одного боку, з іншого, учні багаторазово здійснюють комбінаторну операцію перебору.

Навіть на уроках української мови можна запропонувати вправи, спрямовані на розвиток уміння дитини використовувати комбінаторну дію перебору.

Комбінаторні дії з лінгвістичним матеріалом – це поєднання окремих мовних одиниць у ціле: складання слів з обмеженої кількості букв, складів;

складання словосполучень, речень з обмеженої кількості слів; конструювання речень різних видів. Наведемо приклад.

Вправа. (В учнів є картки з написаними на них буквами А, М, Й, Р, К, А, Н, О, Г, Л, Ж). Складіть з карток якомога більше слів:

- які починаються з комбінації букв *А* і К;

- комбінуючи склади на *ма* і *на* з іншими складами.

Зрозуміло, що в 1-4 класах недоцільно наповнювати уроки математики великою кількістю комбінаторних задач, але необхідно розглядати їх систематично й послідовно, пов'язувати з темами та розділами чинної програми. Використання комбінаторних вправ і задач на уроках математики, в позаурочний час має робити навчання захоплюючим, підвищувати навчальний і виховний потенціал.

Методика пропедевтичної діяльності учнів будується з урахуванням психологічних особливостей дітей даного віку і спрямована на розвиток їх мислення. Навчання характеризується етапністю: від хаотичного перебору переходять до системного у процесі розв'язування комбінаторних задач, що проводиться спочатку без використання таблиць, схем, графів, а потім з їх допомогою. Велика увага надається самостійному "відкриттю" учнями способів дій. Розглядаються різні шляхи і засоби розв'язування задач, що дає можливість учням проявити індивідуальні особливості і схильності.

2.1.2. 5-7 класи.

В основній масовій школі рекомендується розглянути питання "Розв'язування комбінаторних задач. Правила додавання і множення". Система комбінаторних вправ і задач для 5-7 класів відповідає тим самим умовам, що і в початковій школі, але дістає подальшого розвитку:

- підвищується сюжетна різноманітність задач;
- множини складаються з більшої кількості елементів;
- використовуються наочні засоби організації перебору;
- використовуються комбінаторні правила додавання і множення.

На цьому етапі не ставиться мета введення формул і означень. Шлях до ознайомлення учнів з ідеями комбінаторики відбувається не стільки шляхом розширення теоретичного матеріалу, скільки добором задач таким чином, щоб в них для формування комбінаторних понять і правил використовувався навчальний матеріал поточних тем програми. При цьому задачі, що розв'язуються з метою формування комбінаторних знань та вмінь, з одного боку, допомагають засвоєнню певної теми програми, що вивчається, з іншого боку, ознайомлюють учнів з окремими проявами тих комбінаторних ідей, до систематичного вивчення яких учні прийдуть пізніше.

Програмами з математики для 12-річної школи передбачено розв'язування комбінаторних задач в 5 класі. В експериментальній методиці це питання розглянуто ширше з включенням елементарних відомостей теорії множин. Ознайомлення з основними відомостями теорії множини та комбінаторними задачами проводилося на початку року за таким тематичним плануванням (табл.2.1).

Таблиця 2.1.

Тематичне планування 5 клас (3 год.)

№	Тема	Кількість годин
1	Множина. Елемент множини. Відношення належності елемента множині. Підмножина. Порожня множина. Скінченні та нескінченні множини. Упорядковані та неупорядковані множини. Способи задання множин.	1
2.	Основні операції над множинами.	1
3.	Комбінаторні правила додавання і множення.	1

Орієнтовні результати:

уявлення:

- про основні поняття теорії множин;

- про комбінаторні задачі;

- про наочні засоби перебору;

знання:

- формулювання комбінаторних правил додавання і множення;

вміння:

- читати і записувати теоретико-множинні терміни та символи;
- розв’язувати комбінаторні задачі безпосереднім перебором, за допомогою наочних засобів перебору, за допомогою правил додавання і множення.

Оскільки означення комбінаторних понять пізніше будуть пов’язані з поняттям скінченної множини та операціями над множинами, то доцільно вже на рівні 5-го класу ознайомити учнів з елементарними відомостями з теорії множин. Поняття множини, елементів множини, скінченної та нескінченної множин, порожньої множини, способи задання множин, операції над множинами вводяться із застосуванням методу евристичної бесіди. Наведемо фрагмент такої бесіди.

Учитель: У казковій країні жили сім гномів та Білосніжка. Білосніжка дуже любила квіти, птахів, дерева, розмовляла з ними як з людьми. Одного разу старший гном почув, як Білосніжка розмовляє з ким-то у садочку, та вийшов подивиться. “Красуня, моя! Ластівко, як ти? Не холодно вам?” – говорила Білосніжка, підходячи до різних дерев. Гном здивувався та сказав:

“ У них багато є роботи
Хоча стоять вони весь час.
Від дощу чи від спекоти
Захистять нас.
Не лягають спати ніколи,
На ногах вони одвік.
Не бояться плину рік,
Ні завій, не вітру реву,
Хто ж вони такі?” (Учитель звертається до учнів)

Учні: Дерева.

“Це ж просто дерева, Білосніжко, а ти їх: “Красуня, Ластівко...”, – продовжував гном. – Вони всі однакові, вони ж дерева!” “Ні, ти неправий, братику. Кожне дерево має свій характер, свою душу, свої звички”, – відповіла Білосніжка.

“Вирощу солодких груш,

Хочеш їсти – то чому ж!

Ось черешні, вишні теж,

Абрикосу сам зірвеш.

Червоний колір, кисло-солодкий смак,

Кам’яне серце, у кого це так?” (Учитель звертається до учнів)

Учні: У вишні.

“Кругленьке, червоненьке,

Всередині біленьке,

Соковите і смачне просить:

“Покуштуй мене!” (Учитель звертається до учнів)

Учні: Яблуко.

Гном теж відповів на загадки Білосніжки. Тоді Білосніжка сказала: “Ось бачиш, про кожне можна сказати щось своє, кожне дерево відрізняється одне від іншого”. Гном задумливо промовив: “Так-то воно, так, але все одне їх можна назвати одним словом: дерева!”.

Ось що означає точка зору. Для одного – неповторні індивідуальності. Для іншого – сукупність, що розглядається як єдине ціле.

Взагалі, людині властиво розглядати те або інше зібрання предметів, споріднених за якою-небудь ознакою, як самостійний об’єкт.

Яблуня, груша, вишня, абрикос... Про все це ми говоримо як про фруктові дерева. 1, 2, 3, 4, ... Разом усі ці числа утворюють натуральний ряд чисел. (Учитель просить учнів навести свої приклади).

Подібне об’єднання доцільне, коли треба говорити про сукупність об’єктів як про єдине ціле. Німецький математик Георг Кантор (1845 – 1918) увів поняття множини, відповідно розвинув це поняття і став одним із засновників теорії множин. У сучасній математиці поняття *множини* вважається одним з основних. Універсальність цього поняття полягає в тому, що під нього можна підвести будь-яку сукупність як матеріальних, так і

нематеріальних об’єктів. Тут підійде все: марки, книжки, люди, квіти, дерева, точки тощо.

Отже, множина – це основне математичне поняття, і не означається. А як ви гадаєте, якими словами можна виразити зміст цього поняття в повсякденному житті? Ось, наприклад.

Вправа. Запишіть, як по-іншому назвати:

а) множину птахів; б) множину квітів у вазі; в) множину коней на галявині; г)множину людей у поїзді.

Предмети (об’єкти), з яких складаються множини, називаються *елементами* множини. Для позначення множин використовують великі латинські букви: *A, B, C*..., елементи множини позначають маленькими буквами латинського алфавіту: *a, в, c*...

Якщо елемент a належить множині A, то це записують так: $a \in A$ і читають: елемент a належить множині A. Якщо елемент x не належить множині B, то це записують так: $x \notin B$ і читають: x не належить множині B. Знак $\in$ називається знаком належності.

Вправа. Назвіть елементи множини: а) днів тижня; б) весняних місяців; в) одноцифрових парних чисел.

У пункті б) множина складається з трьох елементів: березень, квітень, травень. Множину можна задати *переліком всіх елементів*. У цьому випадку назви всіх елементів множини записують у рядок, відокремлюють між собою знаком “;” та беруть у фігурні дужки. Наприклад, множина весняних місяців – {березень; квітень; травень}.

Вправа. Запишіть переліком елементів множину одноцифрових натуральних чисел. Чи належить число 0 до цієї множини? ($0 \notin \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$).

Запис можна скоротити, якщо задати переліком декілька перших і декілька останніх елементів, ставлячи між ними знак ”...”. Такий знак в записі означає, що між елементами 2 і 8 є ще інші елементи. Звичайно знак “...” можна

використовувати лише тоді, коли зрозуміло, які елементи він замінює, тобто A = {1; 2; ... 8; 9}.

Вправа. Запишіть переліком елементів множину натуральних чисел: а) менших 5; б) менших 2.

(Викликати до дошки учня. Під час виконання пункту б) учень відкриє фігурну дужку, напише 1 й зупиниться. Поміркувавши, він буде змушений закрити фігурну дужку. Вчителеві залишиться тільки добавити, що це також множина, в якій лише один елемент. Після цього прикладу учням стане зрозумілими, що слово “множина” зовсім не означає “багато”).

Зауваження 1. Елементи у множині можна записувати у будь-якому порядку. Головне не втратити жодного з елементів і не записати зайвого.

Зауваження 2. Один і той самий елемент у множині записують лише один раз.

Множини можна зображати за допомогою *діаграм Ейлера-Вена*. Такою діаграмою може бути довільний замкнений контур (круг, коло, довільний многокутник). Тоді всередині контуру подається або список елементів множини, якщо це можливо, або записується буква, якою позначено множину. Цю букву можна підписувати і зовні контуру. Наприклад, нехай M = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}.

Рис.2.5. Наочне зображення множини M

Вправа. У наступних множинах всі елементи, крім одного, мають деяку властивість. Опишіть цю властивість та знайдіть елемент, що її не має: а){лев; лисиця; гієна; слон; рись}; б){бігти; дивитися; блакитний; малювати}.

Ознаку або властивість, якою володіють усі елементи даної множини, і не володіють ніякі елементи, що не належать до даної множини, називають *характеристичною властивістю* для даної множини.

Вправа. Запишіть множину натуральних чисел, що знаходяться між числами 21 і 22.

(Учні здивовані: таких чисел немає. Ну той що? Який-небудь учень здогадається, що треба відкрити і закрити фігурні дужки, бо в цьому випадку ми вже написали “повний” список натуральних чисел, що знаходяться між числами 21 і 22).

У цій новій множині виявилось 0 елементів. Така множина називається *порожньою* і позначають її $\varnothing$. Отже, знак {} означає ту саму множину, що й знак $\varnothing$.

З множини всіх учнів вашого класу відокремимо множину хлопчиків. Множина хлопчиків складається з елементів, які належать більш загальній множині – множині учнів вашого класу. У цьому випадку кажуть, що множина хлопчиків є *підмножиною* учнів вашого класу.

Якщо кожний елемент множини A входить також і в множину B, то множину A називають частиною або *підмножиною* множини B. Це записують так: $A \subset B$ і читають: A є підмножиною множини B або множина В включає множину A.

Наприклад, множина голосних букв українського алфавіту є підмножиною всіх букв українського алфавіту.

Те, що множина $A \subset B$, показують графічно за допомогою діаграм Ейлера-Венна.

Рис.2.6. Наочне зображення множини В та підмножини А

Для ознайомлення з основними операціями над множинами можна запропонувати учням задачі на зразок таких:

Задача. У школі працює два гуртки: історичний і математичний. В історичному навчаються учні І, С, П, У (учні позначені першою буквою їх прізвища). В математичному Ф, К, І, П, Т (одні і ті самі учні позначаються однією буквою). Вирішили провести спільні збори обох гуртків. Скільки учнів прийде на збори? Скільки учнів відвідують історичний і математичний гуртки?

Дамо відповідь спочатку на перше запитання. Очевидно, щоб дізнатися, скільки учнів прийде на загальні збори, треба до учнів одного з гуртків приєднати учнів другого, але тих, які не відвідують цей перший гурток. Розглядаючи членів кожного з гуртків як множини, ми утворюємо з двох множин третю за певним правилом, що називається *об'єднанням*.

Дамо тепер відповідь на друге запитання. Ясно, що це учні І та П. Отже, з двох множин ми вибрали елементи, які належать як одній, так і другій множині. Створена таким чином третя множина називається *перерізом.*

Задача. Дано А ={1; 2; 3; 4}, В = {5; 6}. Що можна сказати про множину С= {1; 2; 3; 4; 5; 6}?

Вона складається з елементів множини А та В, тобто елементи цих множин об'єднали. Об'єднаємо множини А ={1; 2; 3; 4} та В = {2; 3; 5}. С = {1; 2; 3; ;4 5}. Спільні елементи будуть входити в об'єднання лише один раз.

Об'єднанням множин також буде множина. Позначається об'єднання так: $A \cup B$

Вправа. Що буде спільною частиною множин А і В, якщо:

а) А – множина парних чисел, більших 0, В – множина натуральних непарних чисел, більше 0; б) А – множина прямокутників, В – множина квадратів; в) А – множина хлопчиків 8-А класу, В – множина хлопчиків Вашої школи; г) А – множина цифр числа 3902, В – множина цифр числа 7841.

Вправа. У класі з гуманітарним напрямком є учні, які вивчають англійську мову, учні, які вивчають німецьку мову. Але є два учні, які вивчають і англійську, і німецьку мову. Тобто, якщо А – множина учнів, які вивчають англійську мову, В – множина учнів, які вивчають німецьку мову, то ці два учні належать і множині А, і множині В.

Спільну частину двох або кількох множин називають перерізом. Перерізом множин також буде множина. Позначається переріз так: $A \cap B$

Вправа. Нехай А – множина цифр числа 701263557, а В = {1; 7; 6; 5; 2; 3; 0}. Знайдіть елементи об'єднання і перерізу цих множин.

Систематизувати та узагальнити відомості про теоретико-множинні операції допомагає мова діаграм Ейлера-Венна (Рис. 2.7 - 2.8).

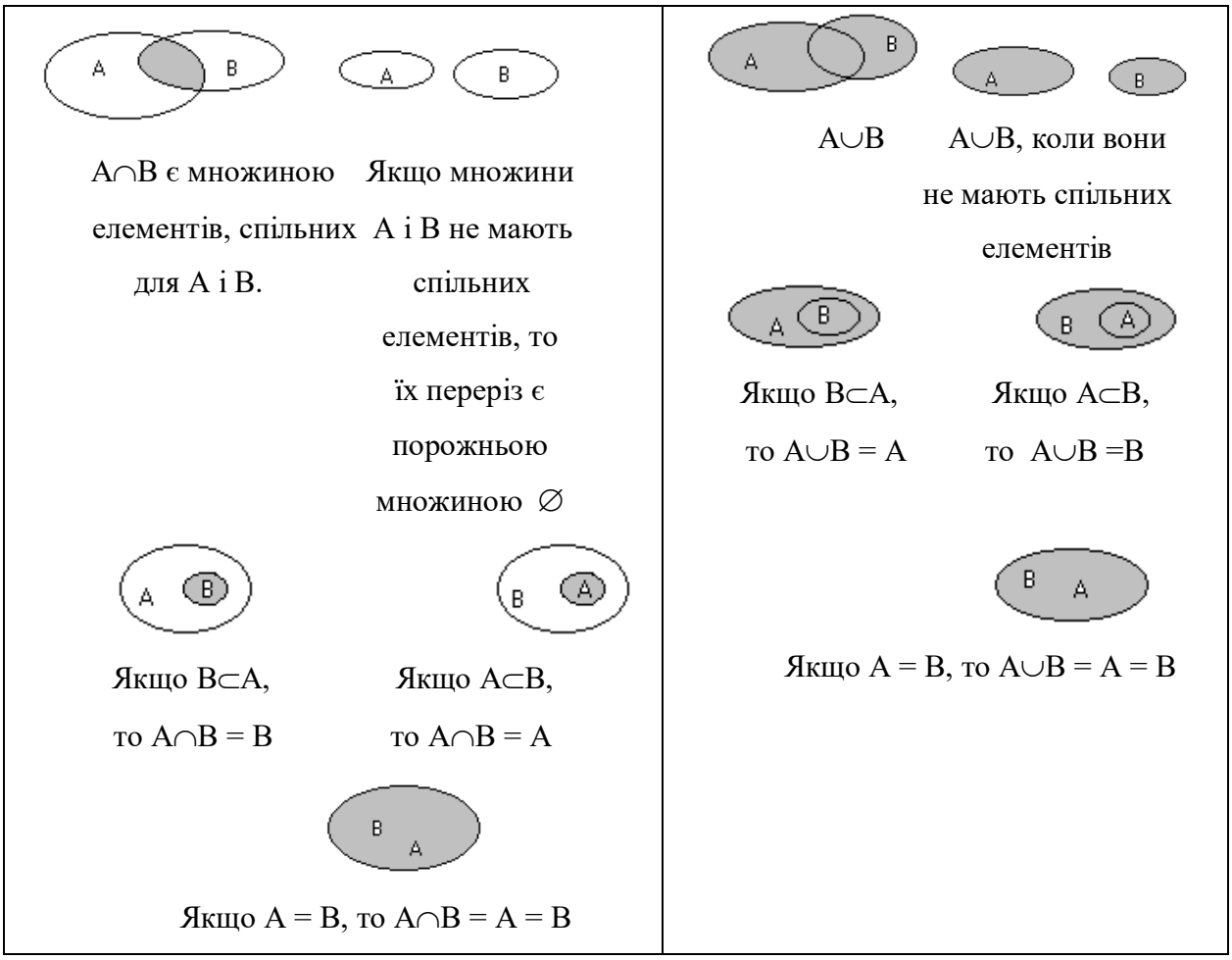


Рис.2.7. Операції перерізу і об'єднання множин

Перерізом двох множин A і B називається множина, яка складається з тих і тільки тих елементів, що належать і множині A, і множині B. Позначається A∩B.	Об'єднанням двох множин A і B називається множина, яка складається з тих і тільки тих елементів, що належать принаймні до однієї з множин A або B (або A, або B, або обом множинам). Позначається A∪B.

Рис.2.8. Основні операції над множинами

З опорою на рисунки 2.2 і 2.3 розв'язуються вправи на зразок такої:

Вправа. Що буде множиною C, якщо C = A∪B, де:

а) А – множина дівчинок вашого класу, В – множина хлопчиків вашого класу; б) А – множина натуральних парних чисел, В – множина натуральних непарних чисел; в) А – множина цифр числа 2001, В – множина цифр числа 3002.

Наступним етапом роботи є розв'язування комбінаторних задач на перестановки, розміщення і комбінації та обчислення їх кількості без використання відповідних термінів і формул. Розв'язуючи такі задачі, необхідно звертати увагу учнів на утворення різних перестановок, розміщень і комбінацій з даної кількості елементів, учити підраховувати їх кількість без використання готових формул.

Під час розв'язування таких задач зручно застосовувати наочні засоби перебору, тобто схеми та графи.

Задача. Скількома способами можна пройти з пункту А до пункту Е? Який шлях є найбільш раціональним? (АВЕ)

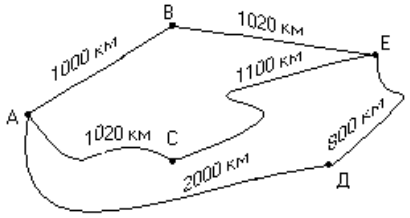


Рис. 2.9. Схема шляхів з пункту А до пункту Е

Задача. П'ятачок надув 3 сині та 2 червоні кульки. Дві кульки він подарував вислюку Іа. Чи обов'язково серед них буде синя кулька?

Дерево показує, що є варіант, в якому немає синьої кульки, тому стверджувальну відповідь дати не можна (Рис. 2.10).

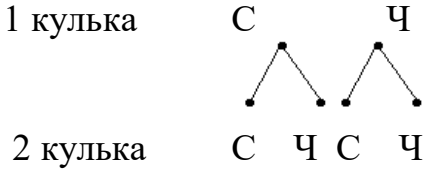


Рис. 2.10. Дерево логічних можливостей

Формування комбінаторного правила додавання на операційному рівні доцільно проводити за допомогою вправ, що передбачають визначення кількості способів обрання об'єктів.

Правило додавання пов’язане з поняттям об’єднання двох множин, для яких можливі два випадки:

а) переріз множин, що розглядаються, – порожня множина;

б) переріз множин, що розглядаються, – не порожня множина.

Щоб запобігти формальному засвоєнню правила додавання, корисно варіювати постановку запитань у навчальних завданнях:

а) про кількість елементів у об’єднанні двох множин;

б) про кількість способів вибору елементів з об’єднання двох множин;

в) про кількість способів вибору елемента з однієї або іншої множини;

г) про кількість способів вибору елемента хоча б з однієї множини. (множини не перетинаються).

Вправа. А = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7}, В = {5; 6; 7; 8; 9}. Скількома способами можна обрати одну цифру з цих множин?

Розв’язання. Один елемент множини А можна обрати 7 способами, а елемент В – 5, але цифри 5, 6, 7 є і в множині А, і в множині В, тобто ми можемо вибрати елемент з В, який відрізняється від елемента А, тільки двома способами. Таким чином, отримуємо 7+2 = 9, тобто 7+5-3 = 9.

Вправа. У магазині є 5 різних ляльок та 6 різнокольорових м’ячів Скількома способами можна обрати одну з іграшок?

- Скількома способами можна обрати ляльку? м’яч? (5; 6)

- Скількома способами можна обрати або ляльку, або м’яч? (11 = 5 + 6)

Зазначимо, що вибір м’яча не впливає на вибір ляльки, так саме і вибір ляльки не впливає на вибір м’яча.

Вправа. У вазі є 5 троянд та 3 гвоздики різних кольорів. Скількома способами можна вибрати одну квітку?

- Скільки квітів у вазі? (8)

- Скількома способами можна вибрати троянду? (5)

- Скількома способами можна вибрати гвоздику? (3)

- Скількома способами можна вибрати або троянду, або гвоздику? (8=5+3)

Зазначимо, що вибір троянди не впливає на вибір гвоздики, так саме і вибір гвоздики не впливає на вибір троянди.

Вибори елементів, що не впливають на вибори інших елементів, називаються незалежними.

Вправа. У класі треба обрати одного чергового (або хлопчика, або дівчинку). Скільки існує способів для вибору чергового, якщо в класі 22 дівчинки та 18 хлопчиків?

Розв'язання: Хлопчика або дівчинку можна вибрати 22 + 18 = 40 способами.

Після такої попередньої роботи можна переходити до формулювання правила.

Правило додавання: Якщо об'єкт A можна вибрати m способами, а об'єкт B, який не залежить від вибору A, – n способами, то вибрати A або B можна $m + n$ способами.

Підготовча робота, яка проводиться в цілях пропедевтики правила множення, пов'язана з різними видами діяльності, але всі вони формують уміння проводити узагальнення. Доброю наочною ілюстрацією правила множення є графи, таблиці та схеми. Наведемо фрагмент уроку.

Тема: Комбінаторні правила додавання і множення.

Мета: Ознайомити учнів з комбінаторними правилами додавання і множення, навчати розв'язувати нескладні задачі на застосування цих правил.

Тип: Комбінований.

Хід уроку.

I. Організаційний момент

II. Перевірка домашнього завдання.

III. Зміст нового матеріалу.

1) Правило додавання
2) Правило множення.

Вправа 1. З міста A до B ведуть п'ять доріг, з міста B до C – три. Скільки доріг, які проходять через B, ведуть з A до C?

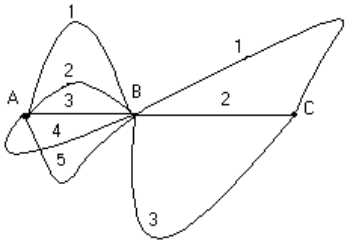


Рис. 2.11. Схема доріг, що пов’язують міста *A, B* і *C*

Як видно з рисунку, з *A* до *B* можна обрати будь-яку з 5 доріг, тобто є п’ять можливих способів, а з *B* до *C* можна обрати дорогу трьома способами. Випишемо всі маршрути: 1-1, 1-2, 1-3, ..., 5-1, 5-2, 5-3. Всього 15 маршрутів. Таким чином, всього доріг: $5 \cdot 3 = 15$.

Вправа 2. Скільки двоцифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3 так, щоб:

а) цифри в числі не повторювались; б) цифри в числі можуть повторюватись.

Учитель розв’язує на дошці та коментує пункт а) за допомогою дерева логічних можливостей. Для розв’язування пункту б) можна викликати учня.

Розв’язання: а) На перше місце можна поставити будь-яку з трьох цифр, а на друге вже з двох цифр, що залишаться. Будуємо дерево логічних можливостей. З нього видно, що таких чисел буде $6 = 3 \cdot 2$ (Рис.2.13).

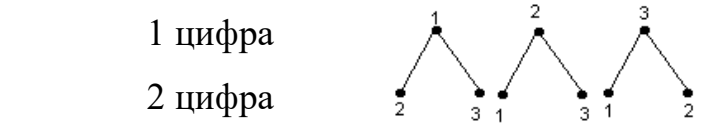


Рис. 2.12. Дерево логічних можливостей

б) Розв’язується аналогічно.

Вправа 3. У класі з 28 учнів треба обрати старосту та заступника старости. Скількома способами це можна зробити?

Учні розв’язують усно за допомогою запитань учителя:

1) Скількома способами можна обрати старосту?

2) Після вибору старости скільки учнів залишились для вибору заступника?

3) Скількома способами можна обрати заступника старости?

4)Скількома способами можна обрати і старосту, і її заступника**?**

Розв'язання. Старостою можна обрати будь-якого учня класу, тобто є 28 способів. Заступника старости можна обрати 27 способами. Старосту та заступника разом можна обрати 28·27 = 756 способами.

Задача. Скільки трицифрових (чотирицифрових) чисел можна записати за допомогою цифр 3, 4, 5 (6), не повторюючи цифри в запису числа? Дати відповідь, не виписуючи всі числа.

Розв'язання. На першому місці можна записати будь-яку з даних цифр, тобто є 3 (4) різні можливості. На другому місці можна записати вже будь-яку з цифр, що залишилися, тобто є 2 (3) можливості. Кожна перша цифра може поєднуватися з будь-якою цифрою, що стоїть на другому місці. Тому загальна кількість різних способів запису двох цифр $3 \cdot 2 = 6$ ($4 \cdot 3 = 12$). Далі зрозуміло, що на третьому місці можна записати вже тільки одну цифру (одну з двох цифр), що залишилися, тому для трьох цифр кількість способів $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ ($4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$). Аналогічно, для останньої, четвертої, цифри є тільки один спосіб зайняти місце в запису числа і загальна кількість таких чисел буде ($4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$).

Задача. Як зміниться відповідь до попередньої задачі, якщо цифру 3 замінити на цифру 0? Відповідь пояснити.

Розв'язання. Оскільки число не може починатися з цифри 0, то загальна кількість утворених чисел буде $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$, ($3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$).

Після розв'язування цих або подібних задач можна зробити деякі узагальнення і ознайомити учнів з комбінаторним правилом множення: Учитель показує на кодоплівці формулювання цього правила, читає його, учні записують у зошитах.

Правило множення: Якщо деякий об'єкт A можна вибрати m способами, і після кожного такого вибору інший об'єкт B можна вибрати (незалежно від вибору об'єкта А) n способами, то пару об'єктів A *і* B можна вибрати $m \cdot n$ способами.

Інсценізована задача. А зараз уявіть, що ми з вами попали у XIX століття.

Пасажир ходить, очікуючи візника. З'являється візник, і пасажир запитує:

- Може, час запрягати?

- Що Ви? – відповів візник. – Ще півгодини до від'їзду. За цей час я встигну 20 разів й запрягти, й відпрягти, й знов запрягти. Нам не вперше...

- А скільки в карету впрягається коней?

- П'ятеро.

- Скільки часу потрібно, щоб запрягти коней?

- Та хвилини дві, не більш.

- Еге ж?- Засумнівався пасажир. – П'ять коней запрягти за дві хвилини... Щось дуже швидко!

- Дуже просто, – відповідав візник. – Виведуть коней в збруї, постромках з вальками, у вожах. Залишиться тільки накинути кільця вальків на крюки, приструнити двох середніх коней до дишла, взяти вожі в руки, сісти на козли й гаразд...

- Ну гаразд! – сказав пасажир. – Припустимо, що таким чином можна запрягти та відпрягти коней хоч 20 разів за півгодини. Але якщо їх треба перепрягати одну замість іншої, та ще всіх, то цього вже не зробити не тільки в півгодини, але й за дві.

- Теж просте діло! – вихвалявся візник. – Авжеж, нам не доводиться перепрягати! Якими завгодно способами я їх всіх перепряжу за годину, а то й менше, одного коня на місце іншого поставив і гаразд! Діло на хвилину.

- Ні, ти їх перепряжи не тими способами, якими мені хочеться, – сказав пасажир, – а всілякими способами, якими тільки можна перепрягти 5 коней, враховуючи, що на перепрягання одного коня йде одна хвилина, як ти хвалишся.

Гордість візника була зачеплена.

- Зрозуміло, всіх коней і всілякими способами я зможу перепрягти не більш, як за годину.

- Я дав би 100 рублів, щоб глянути, як ти зробиш це за годину! – сказав пасажир.

- А я, хоч бідняк, заплачу за Ваш проїзд в кареті, якщо я цього не зроблю, – відповів візник.

Так і вмовились.

Що ж, візник з пасажиром задали нам задачу: “Скількома способами можна перепрягти коней і скільки часу на це потрібно ?”

Учні вже можуть самостійно розв’язати цю задачу, розмірковуючи аналогічно попереднім задачам.

Розв’язання. $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ способів. Значить за годину візник не встигне перепрягти коней. Він програв парі.

Щоб набуті знання та вміння збереглися на операційному рівні доцільно продовжувати розв’язувати комбінаторні задачі протягом усього часу навчання, пов’язуючи їх з темами чинної програми.

Наприклад, під час вивчення теми “Натуральні числа” можна запропонувати учням для розв’язування деякі комбінаторні задачі на зразок таких.

Задача. Скільки двоцифрових чисел можна скласти з цифр 7, 8, 9?

- Яку цифру можна поставити на перше місце?
- Якщо на перше місце поставили 7 (8, 9), то які числа можна отримати?

77 78 79 87 88 89 97 98 99

- Скількома способами можна вибрати цифру на перше місце?
- Після того, як першу цифру вибрано, скількома способами можна вибрати другу цифру?
- Скільки всього чисел утворилось?

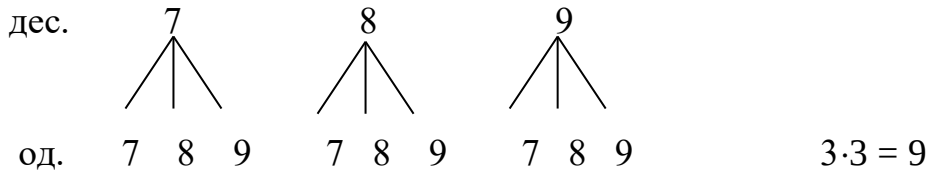


Рис. 2.13. Дерево логічних можливостей

Задача. Напишіть всі трицифрові числа цифрами 5, 7 та 4 так, щоб у числі цифри не повторювались. Скільки їх?

На перше місце можна поставити 5 або 7, або 4. На друге місце можна вибрати вже одну з двох цифр, що залишаться. На третє місце залишиться одна цифра. Всього шість чисел.

$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

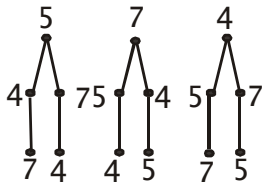


Рис. 2.14. Дерево логічних можливостей

Задача. Скільки двоцифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, не повторюючи їх у запису числа?

Розв'язання. 1 спосіб. Знову використаємо граф. Побудову графа супроводжуємо поясненнями, аналогічними до пояснень у попередній задачі (Рис. 2.15).

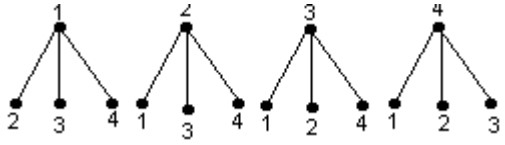


Рис. 2.15. Граф до задачі

2 спосіб. Підрахунок кількості чисел можна виконати так. На першому місці можна записати будь-яку з чотирьох цифр – усього 4 можливості. На другому місці – будь-яку з трьох цифр, що залишилися, – 3 можливості. Будь-яка цифра, що стоїть на першому місці, може комбінуватися з будь-якою цифрою на другому місці. Тому загальна кількість різних способів є $4 \cdot 3 = 12$.

Задача. Скільки трицифрових чисел можна утворити з цифр 2, 3, 4, 7, не повторюючи цифри в запису числа? Як зміниться відповідь, якщо замість цифри 7 взяти цифру 0?

Розв'язання. 1) Міркуючи так, як міркували, розв'язуючи попередню задачу, отримаємо, що загальна кількість чисел $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. 2) Якщо одна з цифр 0, то на першому місці можна записати тільки одну з трьох цифр, і тоді загальна кількість чисел $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$.

Після розв'язування таких та подібних задач знову можна зробити деякі узагальнення. Звертаємо увагу учнів на те, що у запису цифр було менше, ніж пропонувалося в умові задачі, але в усіх задачах суттєву роль грав порядок запису цифр.

Щоб в учнів не склалось уявлення, що подібні задачі можна розглядати тільки з числами, необхідно запропонувати їм ще такі задачі.

Задача. Вінні-Пух, П'яточок і Сова збиралися на день народження до Вислюка Іа і почали думати, в якому порядку вони будуть вручати подарунки. Скільки можливих варіантів у них є?

Задача. Мама Коза пішла по молоко, а семеро козенят почали гратися в "потяг". Але засперечалися, в якому порядку їм "їхати". Тоді вони вирішили перепробувати всі можливі випадки. Скільки часу вони витратять, якщо кожний новий "потяг" буде "їхати" рівно одну хвилину?

Задача. Тітонька Поллі наказала Тому Соєру пофарбувати паркан біля будинку, який складається з чотирьох секцій. Він вирішив пофарбувати кожну секцію у свій колір і замислився, в які кольори і в якому порядку це зробити. Скільки варіантів фарбування є, якщо у Тома шість різних кольорів? [182]

Задача. Рома та Ганна збираються до бабусі в село. Рома бере із собою одні брюки та червону, жовту й зелену сорочки, а Ганна – довгу та коротку спідниці та кофти – рожеву й білу. Ганна вважає, що зі своїх речей вона зможе скласти більше костюмів, ніж Рома. Чи права вона? Доведіть.

Задача. Сніданок містить два блюда. Перше вибирається з множини – {пельмені; риба; котлети}, друге – {чай; кава; молоко}. Скільки сніданків можна скласти з цих блюд?

Подальше засвоєння комбінаторних знань та вмінь проходить у процесі розв'язування задач в 6 - 7 класах. Основною особливістю цього процесу є те, що задачі розв'язуються "неформально", тобто відповідні формули не застосовуються. При цьому розвивається критичність, варіативність, послідовність мислення, уміння підходити до розв'язування з різних боків, не зупинятися на одній знайденій відповіді, обирати найбільш економний та раціональний шлях розв'язування.

Задача. Скількома способами можна обчислити $(4\frac{2}{3}+5\frac{1}{2})\cdot 3^2$?

Задача. Скільки неправильних дробів можна утворити з цифр 4, 7, 5, 9, 1?

Задача. Марійка зайшла в ліфт дев'ятиповерхового будинку на п'ятому поверсі, проїхала 3 поверхи та вийшла. На якому поверсі вона вийшла?

Задача. Скількома способами можна скласти різні одночлени стандартного вигляду з коефіцієнтами 5, які містять x і y, так, щоб степінь кожного одночлена дорівнювала б 5. Запишіть їх.

У ІІ семестрі 6 класу є можливість виділити кілька годин на повторення основних відомостей теорії множин та комбінаторних правил додавання і множення, з якими учні ознайомились на початку 5-го класу.

Таблиця 2.2

Тематичне планування 6 клас (3 год)

№	Тема	Кількість годин
1	Основні поняття теорії множин.	1
2.	Комбінаторні правило додавання та множення.	1
3.	Розв'язування комбінаторних задач. Бесіда про виникнення комбінаторики	1

Орієнтовні результати:

уявлення:

- про основні поняття теорії множин;

- про комбінаторні задачі;

знання:

- формулювання комбінаторних правил додавання і множення;

вміння:

- розв'язувати комбінаторні задачі безпосереднім перебором, за допомогою наочних засобів перебору, за допомогою правил додавання і множення.

Виклад матеріалу слід почати з актуалізації основних відомостей з теорії множин та правил додавання і множення. Учнів можна ознайомити з історією виникнення комбінаторики, організувавши бесіду, до якої вони заздалегідь підготують доповіді про цікаві моменти з історії виникнення комбінаторики, з життя її засновників.

У роботі з учнями 5-7 класів процес формування комбінаторних знань та вмінь і засвоєння основних понять теорії множин продовжується й на геометричному матеріалі. Ми виділяємо такі два етапи:

- робота з готовим малюнком, за яким з даної множини геометричних об’єктів треба обрати підмножини, які відповідають визначеним умовам;

- робота з малюнком з наступним записом обраних підмножин та підрахуванням їх кількості.

Для виконання вправ геометричного характеру слід підготувати креслення заздалегідь (плакат, кодопозитив, переносна дошка або скористатись дидактичним матеріалом для індивідуальної роботи). Їх можна використовувати неодноразово. Наведемо приклади геометричних задач на застосування комбінаторної дії перебору.

Задача. Знайти на рисунку 2.16 хоча б три відрізки.

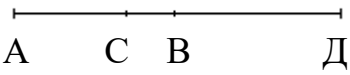


Рис. 2.16. Ілюстративний матеріал до задачі

Задача. На рисунку 2.17 зображено різні фігури. Покажіть на малюнку А один трикутник, два чотирикутники; на малюнку Б три трикутники, три чотирикутники; на малюнку В три чотирикутники та на малюнку Г – п’ять прямокутників.

Рис. 2.17. Геометричні фігури до задачі

Задача. Скільки трикутників у кожній з фігур, зображених на рисунку 2.18?

Рис. 2.18. Геометричні фігури до задачі

Задача. Запишіть усі трикутники кожної з фігур, зображених на рисунку 2.19. Підрахуйте їх окремо для кожної з фігур.

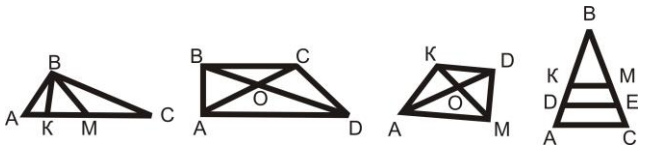


Рис. 2.19. Геометричні фігури до задачі

Задача. Покажіть усі шляхи, якими можна пройти з точки А в точку Б, якщо рухатися зліва направо та знизу вгору. За допомогою цифр запишіть усі шляхи з А до Б. Скільки шляхів ведуть з А до В [212, с.68-69]?

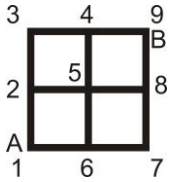


Рис.2.20. Схема шляхів з А до Б

Задача. Чи можна розмістити на площині три промені так, щоб при перетині утворилось: а) 3 відрізки (5 відрізків); б) 4 відрізки; в) 6 відрізків?

Задача. Як треба розмістити три відрізки, щоб при їх перетині утворилось найменше (найбільше) число відрізків. Показати графічно.

Задача. Якими можуть бути сторони прямокутника, якщо його а)периметр дорівнює 36 см; б) площа дорівнює 24 см^2?

У процесі розв’язування геометричних вправ створюються умови для повнішого забезпечення розумового розвитку учнів в умовах органічного зв’язку між логічним оперуванням поняттями і наочно-образним осмисленням об’єкта дослідження.

Оскільки чинні підручники не містять певного набору комбінаторних задач, тому, враховуючи ергономічні особливості таких, здебільшого сюжетних, задач, для експериментальних класів нами було розроблено зошити з друкованою основою [23; 24].

Перший зошит призначений для учнів 5-7 класів загальноосвітніх закладів освіти. Опрацьовуючи завдання цього робочого зошиту, можна засвоїти математичну мову, її символічний і схематичний записи, розвинути комбінаторне мислення, ознайомитися з основними поняттями теорії множин і комбінаторики.

Зошит має такий зміст:

Передмова

Екскурс в історію

1. Основні поняття теорії множин
2. Основні операції над множинами
3. Таблиці, схеми, графи
4. Правила додавання та множення
5. Задачі

Відповіді і вказівки

Список використаної літератури

Необхідний матеріал з теорії у вигляді схем включено в кожний з параграфів. Задачі кожного типу подані зі зразками розв'язання. Спочатку іде передмова та екскурс в історію. Оскільки комбінаторика – один з розділів дискретної математики й оперує скінченними множинами, тому перший та другий параграфи присвячені роботі з основними поняттями теорії множин. Основною метою цих параграфів є засвоєння математичної мови, її символічного і схематичного записів. Багато комбінаторних задач можна розв'язувати за допомогою наочних засобів організації перебору. Третій параграф включає задачі на роботу зі схемами, таблицями та графами. Не потрібно витрачати час на побудову таблиць, слід тільки їх заповнити та добудувати дерева логічних можливостей, що значно економить навчальний час. Четвертий параграф присвячено засвоєнню загальних правил комбінаторики – правил додавання і множення. П'ятий параграф містить систему вправ і задач комбінаторного характеру.

Зошит можна використовувати як на уроках математики, так і вдома для самостійного розв'язування комбінаторних задач. Розв'язувати подані задачі слід послідовно і систематично, протягом усього терміну навчання в 5-7 класах. Зошит можна використати і в 8-11 класах, якщо ці питання не розглядалися раніше.

Включення в арифметичний, геометричний і алгебраїчний матеріал математики 5-7 класів комбінаторних задач дає можливість активізувати розумову діяльність учнів. Для цих задач особливе значення має не отримання

відповіді, а процес її знаходження, процес переробки вхідної інформації на вихідну. На першому місці стоїть пошук розв'язання, його реалізація і пізнавальні висновки з опрацьованої теми. Важливим є заключний етап роботи над навчальною задачею комбінаторного характеру.

Основним його змістом є осмислення розв'язання, формулювання і розв'язування інших задач (якщо це можливо), явно пов'язаних з попередньою, породжених першою, і висновки про те, як знаходиться і виконується розв'язання. В цілому процес роботи над задачею комбінаторного характеру має яскраво виражений дослідницький характер, містить елементи творчості. Важливо й те, що комбінаторні задачі є інтегративним чинником між різними математичними поняттями, виховують в учнів гнучкість мислення [220].

Таким чином, у 5-7 класах існує реальна можливість забезпечити комбінаторну пропедевтику шляхом відповідного доповнення системи вправ і задач чинних підручників. Зміст таких вправ, звичайно, носить прикладний характер; вони допомагають зрозуміти, що саме проблеми навколишнього світу, практики, життя приводять до постановки математичних задач. Учні набувають навичок і вмінь будувати та інтерпретувати математичні моделі різного типу, співвідносити математичні методи з практичними потребами на цьому етапі навчання. Це переконує їх у необхідності й практичній користі навчального матеріалу; а також у тому, що математичні абстракції виникають із задач, які ставить реальна дійсність.

Основною особливістю формування комбінаторних знань та вмінь у 5-7 класах є те, що у процесі ознайомлення з ними домінують індуктивні міркування, в основному, наочно-інтуїтивного рівня із залученням практичного досвіду учнів і прикладів довкілля. Ознайомлення з поняттями комбінаторики повинно відбуватись так, щоб не гальмувати вивчення основних розділів систематичного курсу математики, а сприяти йому. Це можливо завдяки спеціально дібраній, невеликій за обсягом, системі вправ і задач комбінаторного характеру, що за змістом пов'язані з навчальним матеріалом.

Бажано такий підхід продовжити застосовувати й для формування комбінаторних знань та вмінь в учнів 8-9 класів масової школи. Враховуючи базовий навчальний план та обсяг навчального матеріалу у цих класах, доцільно послідовно дотримуватись ідеї збагачення системи вправ задачами комбінаторного характеру.

2.2. Вивчення комбінаторики в класах з поглибленим навчанням математики

2.2.1. Особливості вивчення теоретичного матеріалу.

Для класів з поглибленим вивченням математики програма [164] передбачає вивчення комбінаторики в основній школі:

- у 8 класі в темі “Множини. Елементи математичної логіки. Комбінаторика. Імовірність” (12-17 год);
- у 9 класі в темі “Множини. Комбінаторика. Імовірність” (17-20 год).

При цьому у 8-му класі програмою передбачено вивчення комбінаторних правил множення і додавання; із сполук – вивчення тільки перестановок без повторення та формули для обчислення їх кількості.

Результати: *уявлення* про перестановки як упорядковані множини однієї і тієї самої кількості елементів; *знання* формули для обчислення кількості перестановок із n елементів; *уміння* обчислювати кількість перестановок для значення n у межах 10.

У 9-му класі вивчають розміщення та комбінації без повторень із n по k елементів і формули для обчислення їх кількості.

Результати: *знання* відповідних формул; *уміння* обчислювати кількість розміщень і комбінацій для значень n і k у межах 10.

Ми проводили вивчення комбінаторики у 8 класі за таким тематичним плануванням.

Таблиця 2.3

Тематичне планування

№	Тема	Кількість годин
1.	Множина. Елементи множини. Підмножина. Скінченні та нескінченні множини. Порожня множина. Числові множини.	1
2	Основні операції над множинами.	1
3	Комбінаторне правило додавання.	1
4	Комбінаторне правило множення. Перестановки.	1
5	Розв’язування задач.	1
6	Розв’язування задач. Самостійна робота.	1
7	Тематична контрольна робота.	1
8	Урок систематизації знань і корекції недоліків.	1

У запропонованій методиці формування основних комбінаторних понять базується на наступних поняттях: множина, елементи множини, підмножина, порожня множина, впорядкована множина тощо. Тому виклад матеріалу доцільно почати з формування, якщо не було попереднього ознайомлення, і з повторення та розширення основних відомостей з теорії множин, якщо таке ознайомлення проводилося, у такому обсязі: множина – первісне поняття математики, елемент множини, підмножина, рівність множин, порожня множина, елемент множини, дії над множинами та їх геометрична інтерпретація за допомогою діаграм Ейлера-Венна.

Основним засобом формування теоретико-множинних понять і їх застосування є спеціально дібрана система вправ, за допомогою яких учні оволодівають способами проводити міркування. Ці вправи сприяють активізації їх розумової діяльності, розвитку математичної мови, виробленню творчого підходу до розв’язування задач, установленню зв’язку теоретико-множинних понять з навколишнім світом.

Розпочати ознайомлення з комбінаторикою доцільно з історичних відомостей. Бажано, щоб учні заздалегідь підготували доповіді про цікаві моменти з історії виникнення комбінаторики, з життя основоположників цього розділу математики. Потім індуктивним методом даються основні правила

комбінаторики – правило додавання і правило множення, які вважають аксіомами комбінаторики. Бажано ці правила спочатку проілюструвати на прикладах, сформулювати їх для двох множин, після чого узагальнити на довільну кількість множин.

Корисно розглянути різні формулювання правила додавання.

Формулювання 1. Якщо множина A містить m елементів, а множина B – n елементів, і ці множини не мають спільних елементів, то число елементів об'єднання множин A і B дорівнює сумі чисел елементів цих множин. Отже, якщо $n(A) = m$, $n(B) = n$, а $A \cap B = \varnothing$, то $n(A \cup B) = n(A) + n(B) = m+n$.

Формулювання 2. Якщо елемент a можна вибрати m способами, а елемент $в$ – n способами, то вибір елемента a або елемента $в$ можна здійснити $m + n$ способами за умови, що ніякий вибір елемента a не збігається з вибором елемента $в$.

Вправа. У магазині 5 видів блюдець та 9 видів чашок. Скількома способами покупець може вибрати один з названих предметів?

Розв'язання. За формулюванням 1: А – множина блюдець, n(A) = 5, В – множина чашок, $n(B) = 9$, $n(A \cup B) = 5+9 =14$.

За формулюванням 2: одне блюдце можна вибрати 5 способами, а одну чашку – 9. Вибір блюдця не залежить від вибору чашки. Отже, 9+5 = 14.

Після кількох вправ можна розглядати випадки, коли А і В мають спільні елементи, і переходити до узагальнення цієї формули.

Наступними поняттями, які заслуговують на увагу, є розміщення, перестановки, комбінації.

У Державному стандарті базової та повної середньої освіти в Україні розміщення й перестановки розглядаються як упорядковані підмножини, а комбінації як невпорядковані підмножини деякої множини. Ми будемо дотримуватись такого трактування.

У 8 класі доцільно ознайомити тільки з перестановками. Слово "перестановка" знайоме учням з життєвого досвіду, тому формування цього поняття не викликає труднощів. Оскільки учні ще не знають методу

математичної індукції, то залежність P_n від кількості елементів можна з'ясувати за допомогою правила множення.

Вправа. Скільки одноцифрових чисел можна утворити з цифри 3? (Одну)

Вправа. Скільки двоцифрових чисел можна утворити з цифр 5, 6, щоб цифри в числі не повторювались?

Розв'язання. На перше місце можна вибрати одну з двох цифр, на друге поставимо цифру, що залишиться. За правилом множення $2 \cdot 1 = 2$.

Вправа. Скільки трицифрових чисел можна скласти з 6, 7, 9, щоб цифри в числі не повторювались?

Розв'язання. На перше місце можна поставити будь-яку цифру. Це можна зробити трьома способами. На друге місце можна поставити будь-яку з тих цифр, що залишилися. Це можна зробити двома способами. Як тільки вибрані перші дві цифри, то на третє місце можна поставити одну цифру, яка залишиться. За правилом множення маємо $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Одночасно з розв'язанням цих задач на дошці вчитель будує таблицю 2.4 й заповнює її за допомогою учнів.

Таблиця 2.4

Знаходження кількості перестановок з n елементів

Множина	Кількість елементів	Кількість чисел	Як визначили кількість чисел
{3}	1	1	1
{5;6}	2	2	$1 \cdot 2=2$
{6;7;9}	3	6	$1 \cdot 2 \cdot 3=6$

Вправа. Скільки різних чотирицифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4 так, щоб цифри в числі не повторювались?

Розв'язання: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Вправа. Розв'яжіть попередню задачу за умови, що дано *n* цифр і треба скласти всі різні *n*-цифрові числа.

Розв'язання. Розмірковуючи аналогічно, знаходимо кількість способів, якими можна скласти n-цифрові числа $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Слід звернути увагу учнів на характеристичну ознаку перестановок:

1) елементи різні;

2) усі місця зайняті;

3) порядок елементів важливий.

Учні ознайомлюються з новим символом – знаком факторіалу.

Означення. В математиці прийнято позначати $1 \cdot 2 = 2!$; $1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$; ...; $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$ Читається: “один факторіал, два факторіал, ..., n-факторіал». Домовились, що $0! = 1$.

Означення поняття факторіалу й ілюстрація його прикладами вправ є недостатніми для засвоєння цього поняття. Не всі учні при цьому уявляють зміст уведеного поняття й роблять помилки в тотожних перетвореннях виразів, що містять символ факторіалу. Для багатьох учнів стає в подальшому важким виведення формул знаходження кількості розміщень і комбінацій без повторень $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$. Найбільш поширеними виявилися такі помилкові перетворення: $\frac{n!}{(n-m)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-m)} = \frac{n}{(n-m)}$;

$$\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)!}{(p-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p-4)(p-3)(p-2)(p-1)p}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p-2)} = (p-4)(p-3)(p-1)p.$$

Не всі учні засвоюють той факт, що символом “n!” позначають добуток усіх натуральних чисел від 1 до n включно. Зростання кількості вправ, подібних попереднім, не розв’язує проблему: учні продовжують робити аналогічні помилки.

З метою їх попередження ми розробили навчальну самостійну роботу, у якій:

а) пропонується прямий і зворотний переходи від короткого запису добутку за допомогою символу факторіалу до розгорнутого добутку та у протилежному напрямку;

б) звертається увага на кількість множників у добутку;

в) з’ясовується склад множників добутку.

Навчаюча самостійна робота. (Цю роботу учні виконують дома на оцінку).

Завдання середнього рівня:

1. Запишіть наступні добутки за допомогою знака факторіалу:

а) 1·2·3·4·5; б)1·2·3·4·5·6·7·8·9; в) 1·2 ·... · (k-1)· k;

2. Які з рівностей правильні?

а) 1·2·3·4·5·6·7=7!; б)2·3·4·5·6 = 6!; в)1·2·3·5·6·7 = 7!; г) 6·5·4·3·2=6!;

Завдання достатнього рівня:

3. Запишіть у вигляді добутку:

а) 3!; б) n!; в) (n-1)! г) (n-3)!; д) (2n)!;

4. Поставте замість * такі множники, щоб утворилось істинне висловлення:

а) * · 5! = 7!; б) * · (k-4)! = (k-1)!; в) * · 7! = 8!; г) * · (n-3)! = n!; д) * · (n-1)! = (n+1)!;

Завдання високого рівня:

5. Обчисліть:

1) $P_8 - P_6$; 2) $\frac{8!-7!}{7!}$; 3) $\frac{5!+6!}{4!}$; 4) $\frac{6!}{4}$.

6. Спростіть:

1) $P_{k-1} - P_{k+1;}$ 2) $\frac{m!}{m-1}$; 3) (2n+2)!; 4) 2n!(n+1); 5) $\frac{(2n)!}{n!}$; 6) $\frac{1}{k!} - \frac{k}{(k+1)!}$; 7) $\frac{(n-2)!}{(n+1)!}$.

Учнів слід привчати оперувати виразами, що містять знак факторіалу, у згорнутому вигляді, не розкриваючи їх кожного разу в добуток окремих множників.

Після такої роботи виведення в подальшому формул кількості розміщень без повторень і кількості комбінацій без повторень не викличе труднощів. Цінність таких навчальних самостійних робіт у тому, що вони дозволяють індивідуалізувати роботу учнів. Цей принцип здійснюється наступним чином: по-перше, у кожній роботі вчителем може бути рекомендована обов'язкова й необов'язкова частини. Крім того, обов'язкові й необов'язкові вправи можуть бути рекомендовані й окремим учням. Для сильніших учнів, наприклад, до

обов’язкових вправ увійдуть складніші, а у й необов’язкові – деякі надто прості для них.

У процесі виконання учнями навчальних самостійних робіт у вчителя з’являється можливість вести спостереження за ходом роботи, коментувати його та давати поради, контролювати виконання вправ учнями й допомагати їм.

У 9-х експериментальних класах вивчення комбінаторики проводили за таким тематичним планом, розрахованим на 10 годин.

Таблиця 2.5

Тематичне планування

№	Тема	Кількість годин
1	Основні поняття теорії множини. Взаємнооднозначна відповідність між множинами	1
2	Кількість підмножин скінченної множини.	1
3	Сполуки без повторень: розміщення і комбінації.	1
4	Формула кількості розміщень з n елементів по k.	1
5	Формула кількості комбінацій з n елементів по k.	1
6	Розв’язування задач. Самостійна робота	
7	Властивості комбінацій з n елементів по k. Трикутник Паскаля.	1
8	Розв’язування задач.	1
9	Тематична контрольна робота.	1
10	Урок систематизації і корекції знань.	1

Виклад матеріалу починається з актуалізації основних відомостей з теорії множин і комбінаторних правил додавання і множення.

Під час розгляду кількості підмножин скінченної множини бажано спочатку розв’язати декілька вправ, що наочно показують зв’язок між кількістю підмножин і кількістю елементів у множині. Найбільш ефективним виявився саме індуктивний метод. Даємо таку задачу.

Задача. Випишіть всі підмножини наступних множин та визначіть їх кількість: а) $\varnothing$; б) $\{a\}$; в) $\{a,b\}$; г) $\{a,b,c\}$.

Учитель разом з учнями складає таблицю 2.6, причому остання колонка заповнюється в кінці, коли всі три колонки для чотирьох випадків будуть заповненими.

Таблиця 2.6

Знаходження кількості підмножин даної скінченної множини

Множина	Підмножини	Кількість підмножин	Формула
$\varnothing$	$\varnothing$	*1*	2^0
$\{a\}$	$\varnothing, \{a\}$	*2*	2^1
$\{a,b\}$	$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}$	*4*	2^2
$\{a,b,c\}$	$\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$,$\{b,c\}$, $\{a,b,c\}$	*8*	2^3

Учитель пропонує учням написати самостійно, скільки і які підмножини має множина $\{a,b,c,d\}$ (16 підмножин).

Задача. Кожного з трьох студентів можна направити для проходження практики на один з двох заводів. Скількома різними способами це можна зробити?

Вибиратимемо студентів на перший завод, зрозуміло, що решта автоматично іде на інший. Можливі такі випадки: 1) жодного – 1 варіант; 2) один студент; 3) два з трьох студентів; 4) три студенти.

Перекладаючи на мову комбінаторики в лексиці теорії множин, учням пропонується скласти всі можливі підмножини множини М = {а, в, с}.

У розглянутому прикладі кількість усіх підмножин дорівнює 8.

Задача. Зимою баскетболісти іноді не приходили на тренування. Бувало зберуться всі 9 членів секції, а часом тільки два-три. Одного разу тренер вирішив підрахувати, скільки ж всього варіантів присутності в залі складів ігроків.

– Ось сьогодні поки ще ніхто не прийшов. Один варіант. А може, хтось один ще прийде, хоча б м’яч покидає. 9 чоловік – 9 варіантів. – І тренер записав 1 + 9 = 10 варіантів. – Можуть прийти удвох, – продовжував він розмірковувати. – Вчора були Іван та Микола, позавчора – Микола та Віктор. Знов різні склади.

Рахував, рахував тренер та заплутався. Скільки різних складів баскетболістів може зібратися в залі? Склади вважаються різними, якщо вони відрізняються числом учасників та самими учасниками.

Розв'язання. Розмірковуючи аналогічно попередній задачі, отримаємо 2^9.

Спробуємо розв'язати цю задачу так. Перший з баскетболістів може бути присутнім або відсутнім, маємо два варіанти. Другий спортсмен також може бути присутнім або відсутнім. Для двох учасників маємо 4 варіанти і так далі.

№ варіанта	*1 учасник*	*2 учасник*
1	Ні	Ні
2	Так	Ні
3	Ні	Так
4	Так	Так

Присутність або відсутність кожного з баскетболістів збільшує число можливих варіантів в два рази, для дев'яти учасників $2^9 = 512$ способів.

Якщо узагальнити ці міркування на n учасників, то дістанемо 2^n способів.

Наступним етапом вивчення комбінаторики є формування понять розміщень і комбінацій без повторень. Для того, щоб ці поняття одразу формувалися не ізольовано, а як структурні елементи певного наукового розділу, важливо вводити їх не послідовно один за одним, а паралельно. Це створює умови для порівняння понять, визначення спільного й різного в них, встановлення між поняттями різних зв'язків уже на першому етапі їх формування.

Перший етап формування понять "розміщень без повторень" і "комбінацій без повторень" має на меті засвоєння змісту понять, а не вироблення формально-алгоритмічних навичок учнів.

Спочатку учням пропонується внутрішньомодельні комбінаторні завдання відносно заданої скінченної множини. Шляхом варіювання цих завдань учні отримують різні підмножини цієї множини. Задача вчителя в тому, щоб визначити з учнями спільні й різні властивості отриманих підмножин і відокремити з множини загальних властивостей істотні, що складають зміст поняття.

Прикладами таких завдань можуть бути такі:

1. У класі з 30 учнів треба обрати чергових у складі 3 осіб. Скількома способами це можна зробити?

2. У класі з 30 учнів треба обрати старосту, його заступника й редактора стіннівки. Скількома способами це можна зробити?

Чим схожі ці задачі й чим відрізняються?

В обох задачах нам потрібно з 30-елементної множини учнів класу обрати 3-елементні підмножини. Але в першій задачі порядок вибору чергових не є важливим, а в іншій задачі порядок обраних осіб має значення. Тобто в першій задачі маємо справу з невпорядкованими підмножинами, а в іншій задачі – з упорядкованими.

Задача. Дано множину {2; 5; 7; 9}. Складіть:

а) різні двохелементні підмножини; б) упорядковані (порядок елементів є суттєвим) двохелементні підмножини; в) різні триелементні підмножини; г) упорядковані триелементні підмножини; ґ) різні чотириелементні підмножини; д) упорядковані чотириелементні підмножини.

Отримані результати записують у таблицю 2.7

Таким чином, з учнями з’ясовується основна властивість, за якою у процесі розв’язування комбінаторних задач доводиться класифікувати підмножини: упорядкованість або невпорядкованість.

У процесі складання таблиці 2.7 увагу учнів треба звернути також на наступні моменти:

а) якої послідовності слід дотримуватися, щоб записати всі потрібні підмножини без пропусків або повторення елементів;

б) як пов’язані між собою набори першого та другого стовпчиків, другого та третього тощо, тобто як наступні стовпчики можна отримати з попередніх;

в) провести порівняння кількості підмножин у кожному зі стовпчиків.

Таке зіставлення дозволяє встановити різні зв’язки між поняттями, що вводяться.

Таблиця 2.7

Розв’язання задачі

а)	б)	в)	г)	ґ)	д)
{2; 5}	{2; 5} {5; 2}	{2; 5; 7}	{2;5;7} {2;7;5} {5;2;7} {5;7;2} {7;2;5} {7;5;2}	{2;5;7;9}	{2;5;7;9} {2;7;5;9} {5;2;7;9} {5;7;2;9} {7;2;5;9} {7;5;2;9}
{2; 7}	{2; 7} {7; 2}	{2; 7; 9}	{2;7;9} {2;9;7} {7;2;9} {7;9;2} {9;7;2} {9;2;7}		{2;7;9;5} {2;9;7;5} {7;2;9;5} {7;9;2;5} {9;7;2;5} {9;2;7;5}
{2; 9}	{2; 9} {9; 2}	{2; 9; 5}	{2;9;5} {2;5;9} {9;2;5} {9;5;2} {5;9;2} {5;2;9}		{2;9;5;7} {2;5;9;7} {9;2;5;7} {9;5;2;7} {5;9;2;7} {5;2;9;7}
{5; 7}	{5; 7} {7; 5}	{5; 7; 9}	{5;7;9} {5;9;7} {7;5;9} {7;9;5} {9;5;7} {9;7;5}		{5;7;9;2} {5;9;7;2} {7;5;9;2} {7;9;5;2} {9;5;7;2} {9;7;5;2}
{5; 9}	{5; 9} {9; 5}				
{7; 9}	{7; 9} {9; 7}				

Формуючи те або інше поняття, важливо визначати не тільки суттєві властивості, але й несуттєві. Це допоможе учням абстрагуватись від них під час аналізу умови конкретної задачі. Слід звернути увагу учнів на підмножини другого, четвертого та шостого стовпчиків. Хоча вони відрізняються кількістю елементів, проте зберігають свою суттєву ознаку – упорядкованість без повторень. Аналогічна картина має місце і для комбінацій. Позначимо кількість елементів підмножини через k й будемо називати таку підмножину k-елементною підмножиною n-елементної множини.

Перед уведенням означень необхідно визначити з учнями можливі співвідношення між k і n (чи може k бути більше n і в яких випадках ?). Лише після такої попередньої на матеріалі розв’язаних задач роботи учням даються

означення комбінаторних понять і вводиться відповідна символіка. Необхідно показати, що перестановки – це розміщення з *n* елементів по *n*.

Означення формулюються так.

Упорядкована k-елементна підмножина n-елементної множини називається розміщенням без повторень з n елементів по k, а кількість їх позначається A_n^k.

Одразу роз'яснюється характеристична ознака розміщень:

1) елементи і місця різні;
2) $0 \le k \le n$;
3) усі *k* місць зайняті;
4) порядок елементів важливий.

Кожну k-елементну підмножину n-елементної множини називають комбінацією без повторень з n елементів по k, а кількість їх позначається C_n^k.

Характеристична ознака комбінацій:

1) елементи різні;
2) $0 \le k \le n$;
3) порядок вибору елементів не має значення.

Уведені основні комбінаторні поняття й відомості про них важливо систематизувати. З цією метою разом з учнями складається класифікаційна схема (Рис. 2.21), яка в процесі подальшого вивчення кожного поняття доповнюється відповідними відомостями про це поняття.

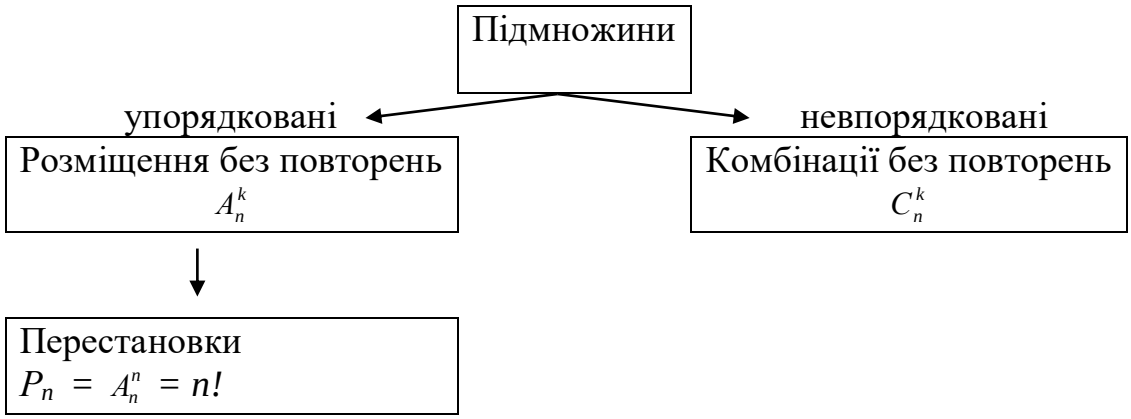


Рис. 2.21. Класифікаційна схема

Така класифікаційна схема дозволяє порівняти не тільки поняття, що вводяться, але й зібрати основні відомості про ці поняття, чітко розмежувати види підмножин, дає можливість усвідомити взаємозв'язки між різними видами комбінацій.

Побудовою цієї схеми встановлюються відношення ієрархії в самій системі понять, що є важливою загальнологічною дією, яка сприяє формуванню комбінаторних понять.

Слід звернути увагу, що, оскільки є розміщення й комбінації без повторень, то є й розміщення та комбінації з повтореннями. Тим більше, що учні раніше неодноразово зустрічалися з їх прикладами: телефонні номери, десяткові записи чисел, набори листівок, олівців, слова – сукупність букв українського алфавіту, множини значень змінної, що є розв'язанням рівнянь, нерівностей тощо. Повідомляємо, що з ними учні будуть ознайомлюватись у повному обсязі в 11 класі.

Проведення порівнянь, класифікація понять не вичерпує всіх необхідних дій, що складають процес формування комбінаторних понять. Відомо, що при спостеріганні тих самих об'єктів, виконанні тієї самої розумової діяльності у різних учнів можуть утворюватися поняття, що мають різний зміст, хоча вони й будуть позначатися одним словом.

Тому в систему дій з формування комбінаторних понять необхідно включати й такі, що дозволяють здійснювати контроль і самоконтроль за засвоєнням змісту понять. Позитивну роль грають вправи на утворення об'єктів, що відносяться до певного комбінаторного поняття. Ці вправи, по-перше, повинні носити внутрішньомодельний характер і здійснюватися на символічному матеріалі. Наведемо приклад.

З елементів множини M = {a;b;c;d} складіть усі можливі:

а) перестановки без повторень; б) комбінації без повторень по 2 елементи; в) утворіть з них розміщення без повторень по 2 елементи.

Такими вправами перевіряється правильність засвоєння основних властивостей комбінаторних понять; у процесі їх виконання активно

здійснюється аналітико-синтетична діяльність учнів, вони більш свідомо й диференційовано підходять до поняття. У процесі виконання такого роду вправ можна простежити за процедурою утворення одних понять через інші і, таким чином, установлюється зв'язок між поняттями, здійснюється кількісне порівняння їх, засвоюється комбінаторна символіка.

Наступним етапом формування основних комбінаторних понять є застосування їх до розв'язування конкретних сюжетних задач. Процес розв'язування починається з побудови дискретної математичної моделі за допомогою розглянутих понять. При цьому формулюється нова математична задача мовою комбінаторики. Цей етап потребує від учнів повторного абстрагування, тому під час побудови математичної моделі реальної задачі часто виникають труднощі, пов'язані з установленням типу підмножин, який відповідає даній задачі. Саме на цьому етапі учні роблять більшу частину помилок, оскільки формування дії підведення під поняття здійснюється випадково, з чим багато учнів не можуть упоратись.

Запобіганню таких помилок допомагає розв'язування вправ, які передбачають виконання дій підведення під поняття. У процесі їх виконання, по-перше, проходить більш глибоке засвоєння понять, по-друге, учні навчаються моделюванню конкретних ситуацій. З цією метою пропонується серія задач, пов'язаних з різними комбінаторними поняттями, означення яких відомо учням. Задача полягає в тому, щоб перекласти їх умови мовою комбінаторики, використовуючи при цьому теоретико-множинну модель.

У процесі підготовчої роботи учні усвідомлюють теоретико-множинний зміст комбінаторних понять, установлюють зв'язки між ними, виявляють процедуру отримання одних комбінаторних понять через інші; вчаться знаходити їх кількість за допомогою правила множення.

Формула кількості розміщень вводиться так: спочатку індуктивними міркуваннями на конкретних прикладах учнів підводять до висновку, що $A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-k))$.

Задача. Скільки різних чотирицифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 так, щоб цифри в числі не повторювались?

Розв'язання: Першу цифру можна вибрати 9 способами. Другу цифру вибираємо вже з 8 цифр, що залишились. Розмірковуючи далі, третю цифру можна вибрати 7 способами, а останню – 6. За правилом множення маємо: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ чотирицифрових чисел.

Перекладемо попередню задачу на мову множин. З дев'ятиелементної множини треба обрати 4-елементні підмножини, порядок елементів в яких є важливим і при цьому елементи у підмножині не повторюються. Тобто треба знайти всі розміщення з 9 елементів по 4 елементи. За попереднім розв'язанням $A_9^4 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$.

А якщо нам треба підрахувати кількість розміщень з *n* елементів по *k* елементам, тобто в умовах попередньої задачі з *n*-елементної множини треба обрати *k*-елементні підмножини? Будемо розмірковувати аналогічно.

(Можна викликати учня та допомагати йому додатковими запитаннями).

На перше місце в упорядкованій підмножині *n*-елементної множини можна поставити будь-який з *n* елементів. Після того, як перший елемент вибрано, для вибору другого маємо *(n – 1)* можливостей, для вибору третього вже *(n – 2)* можливостей і так далі. Нарешті, на *k* місце можна поставити будь-який з решти $n - (k-1) = n - k + 1$ елементів. За правилом множення

$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$

- Давайте помножимо і поділимо праву частину на *(n-k)!*

$$A_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!}$$

- Згадайте, що таке *(n-k)!*, та спростіть вираз.

$$A_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)\ldots 2 \cdot 1}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- Знайдіть значення цього виразу, якщо k = 0

$$A_n^0 = \frac{n!}{n!} = 1$$

- Якщо n = 0, k = 0, то розглядають порожню множину, яка має лише одну підмножину (саму себе).

Але таке введення формули в результаті індуктивних міркувань не строге. Далі правильність формули можна довести методом математичної індукції.

Для виведення формули кількості комбінацій спочатку доводиться формула $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$.

Задача. З 25 учнів класу треба обрати двох чергових. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання. (Першу частину розв'язання виконує учень, потім продовжує вчитель).

Учень: З 25-елементної множини треба скласти двохелементні підмножини, причому порядок не є важливим. Тобто мова йде про комбінації з 25 елементів по 2 елементи без повторень. Треба знайти C_{25}^2.

Вчитель: Давайте кожних двох чергових упорядкуємо (буде перший черговий та другий), тоді дістанемо всі впорядковані двоелементні підмножини, тобто розміщення. Отже, $C_{25}^2 \cdot P_2 = A_{25}^2$, а звідси можна дістати $C_{25}^2 = \frac{A_{25}^2}{P_2} = \frac{25!}{23!2!} = 12 \cdot 25 = 300$ способів.

Доведення в загальному випадку виконується аналогічно. Щоб утворити впорядковані множини, які містять *k* елементів з даних *n* елементів, потрібно:

1) виділити з даних елементів які-небудь *k* елементів; це можна зробити C_n^k способами;

2) виділені *k* елементів упорядкувати, що можна зробити P_k способами.

Усього одержимо $C_n^k \cdot P_k$ упорядкованих множин, тобто $C_n^k \cdot P_k = A_n^k$. Звідси, після підстановки відомих уже виразів для A_n^k і P_k, дістанемо формулу $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Зупинімося на методиці вивчення властивостей комбінацій без повторень:

$C_n^k = C_n^{n-k}$ (2.1), $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^{k-1} + C_n^k = 2^n$ (2.2), $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ (2.3).

Аналізуючи помилки, можна помітити, що учні швидко засвоюють формальне доведення рівностей (2.1) – (2.3), однак застосування цих рівностей у розв'язуванні задач ускладнює роботу учнів. Причину такого положення ми бачимо, по-перше, в тому, що увага учнів акцентується на формальному доведенні рівностей і не з'ясовується теоретико-множинний зміст. У результаті цього учні не можуть застосовувати ці властивості в моделях конкретних комбінаторних задач.

В експериментальній методиці вивчення властивостей (2.1)–(2.3) пропонується здійснювати за такою схемою:

а) умова текстової задачі перекладається на мову комбінаторики в лексиці теорії множин;

б) розв'язування задачі приводить учнів до тієї чи іншої властивості;

в) проводяться аналогічні міркування для загального випадку, формулюється гіпотеза, що виражає відповідну властивість для будь-яких цілих k, n $(0 \le k \le n)$;

г) здійснюється формальне доведення гіпотези;

д) учням пропонуються вправи, пов'язані з властивістю, що вивчається;

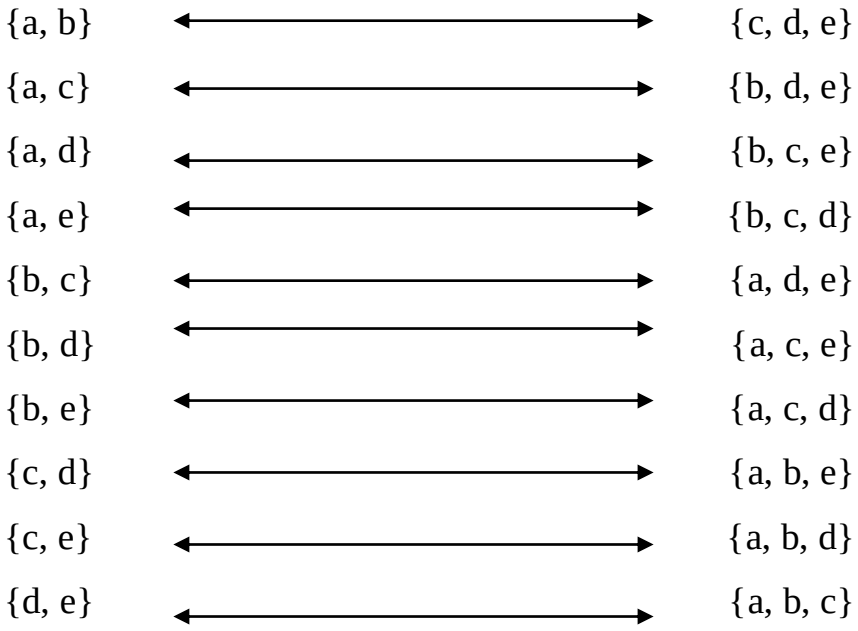
е) здійснюється застосування вивченої властивості до розв'язування сюжетних комбінаторних задач.

Перший крок цього процесу формування властивостей ми вважаємо важливим і необхідним, оскільки він допомагає розкрити теоретико-множинний зміст властивостей, що вивчаються.

Так, перед формальним доведенням властивості $C_n^k = C_n^{n-k}$ учням пропонується така задача.

Задача. Шість хлопчиків на дворі великого дому часто грали в футбол "три на три". Одного разу один з хлопчиків поїхав до бабусі, і друзі залишились уп'ятьох. Стали грати вдвох проти трьох. А щоб ніхто не образився, стали утворювати команди всіма можливими способами. Скільки різних команд по три учасники, скільки – по два можна скласти з 5 чоловік?

Перекладаючи цю задачу мовою комбінаторики, маємо множину M = {a, b, c, d, e}, з елементів якої треба скласти всі можливі двохелементні та трьохелементні підмножини. Учням пропонується спочатку скласти всі двохелементні підмножини. Далі для кожної з складених підмножин виписати доповнення – трьохелементні підмножини елементів, що залишаться, та порівняти кількості тих і інших.



$C_5^2 = 10 = C_5^3$

Учні переконуються в тому, що між двоелементними підмножинами множини і їх доповненнями до множини *M* можна встановити взаємнооднозначну відповідність і, отже, кількість тих і інших підмножин однакова. Тобто, мовою комбінаторики вони отримують рівність $C_5^2 = C_5^3$. Узагальнюючи цю задачу, коли *n* спортсменів треба розбити на дві команди, в одній з яких *k* футболістів, а в іншій – *(n-k)*, учні отримують $C_n^k = C_n^{n-k}$. Потім уже можна довести цю рівність, використовуючи формулу для обчислення кількості комбінацій без повторень з *n* елементів по *k*.

Розглядаючи властивість $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$, треба звернути увагу, що йдеться про кількість підмножин скінченної множини, що вже було розглянуто.

Вивчення властивості $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$, що є рекурентною формулою для знаходження кількості комбінацій, на наш погляд, слід почати з задачі на

розбиття скінченної множини на два класи за деякою ознакою. Учням пропонується скласти всі *k* підмножин множини *M={a,b,c,d,e}* та розбити їх на два класи, що містять, наприклад, елемент *a*, і не містять цей елемент.

Задача. У магазині є 5 видів тістечок: білкове, горіхове, шоколадне, ванільне, вафельне. Скількома способами можна вибрати й купити три з них? Скільки трійок буде містити горіхове? Скільки трійок не буде містити горіхове?

Розв'язання: а) мовою комбінаторики з п'ятиелементної множини тістечок вибирають трьохелементні підмножини, різні трійки можна утворити $C_5^3 = 10$ способами; б) якщо горіхове входить до вибраних тістечок, тобто вже з чотириелементної множини вибирають двохелементні підмножини, то ще два можна вибрати з решти, для цього існує $C_4^2 = 6$ способів; в) якщо горіхове не входить до вибраних тістечок, то всі трійки треба обирати з 4 тістечок; з чотириелементної множини обираємо трьохелементні підмножини, тобто існує $C_4^3 = 4$ способів; три тістечка, які містять горіхове можна вибрати 6 способами, а які не містять – 4 способами; загальне ж число способів 10. Тобто $C_5^3 = C_4^2 + C_4^3$.

Узагальнюючи на випадок, коли в магазині *n* тістечок, а треба вибрати *k* тістечок за даними умовами, учні переходять до формули (2.3).

Властивість (2.3) є основою для складання таблиці чисел C_n^k для різних *n* і *k*, тобто для побудови трикутника Паскаля. Цей факт слід використати й показати учням практичне застосування вивченої властивості, як працює ця властивість у процесі складання таблиці, запропонувати учням продовжити утворення рядків таблиці, виявити властивості елементів рядків таблиці та обґрунтувати їх.

При такій структурі й методиці вивчення властивостей комбінацій без повторень і трикутника Паскаля робота, що проводиться, набуває цілеспрямованого характеру, учні чітко встановлюють зв'язок між окремими частинами матеріалу, що вивчається, створюються умови для самостійних побудов узагальнень, висновків, виявлення інших властивостей комбінацій.

З метою систематизації й узагальнення розглянутого матеріалу корисно встановити логічні зв'язки між основними поняттями комбінаторики. Результат у схемі (Рис. 2.22).

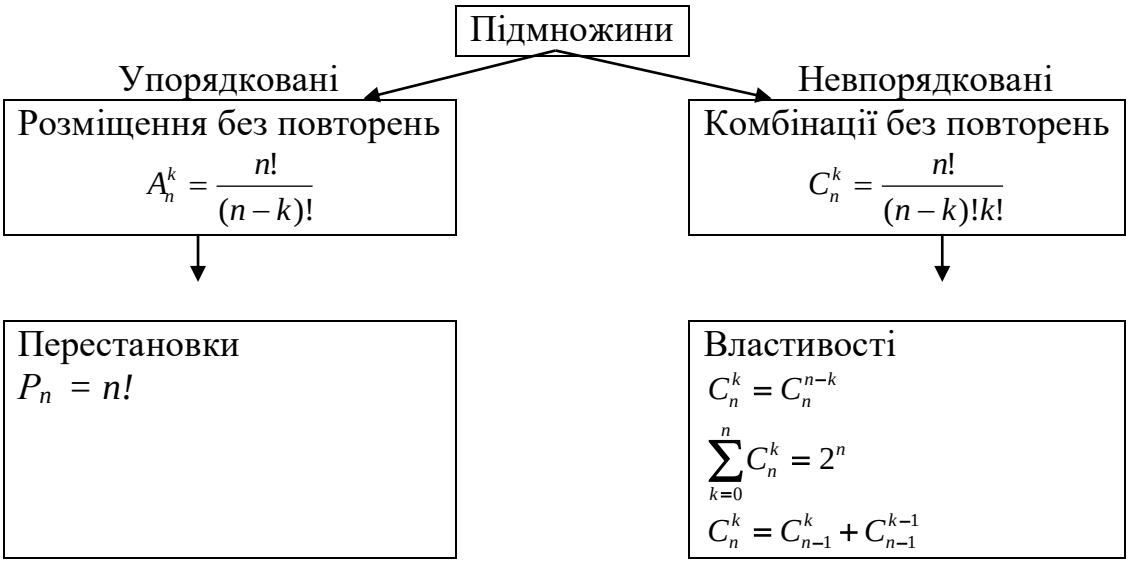


Рис. 2.22. Класифікаційна схема

Робота в експериментальних класах підтвердила доступність вивчення теми "Біном Ньютона" у 9 класі, але зміст 10 класу більш пов'язаний з цим матеріалом. Тому доцільно тему "Біном Ньютона" перенести в програму 10 класів з поглибленим вивченням математики.

У кінці наведемо приклад структурно-методичного аналізу змісту розглядуваної теми. Нагадаємо структурно-методичний аналіз змісту навчальної теми за планом [68].

1. Формулювання основних мети й завдань вивчення теми.
2. Змістове структурування теми.
3. Перелік відповідних базових умінь учнів.
4. Пошук шляхів реалізації різнорівневих вимог.
5. Критерії оцінювання й форми контролю досягнутих результатів вивченої теми.

1. Мета вивчення теми – ознайомити учнів з основними поняттями теорії множин, основними поняттями комбінаторики й навчити використовувати ці поняття для побудови дискретних моделей прикладних задач, розв'язувати відповідні математичні задачі і аналізувати результати.

Сформульованій вчителем меті відповідають завдання:

а) засвоїти нову термінологію; б) оволодіти основними поняттями комбінаторики; в) вивчити основні комбінаторні правила; г) навчитися застосовувати основні поняття й закономірності комбінаторики для побудови дискретних моделей текстових задач і під час розв’язування відповідних математичних задач.

2. На основі встановлених для даної теми логічних зв’язків типу “попередній матеріал – відомості, що вивчаються зараз – основні напрямки використання під час вивчення інших тем” зміст тематичного розділу структурується за ступенем важливості на три підгрупи: допоміжну, основну, перспективну зв’язки. Результат у таблиці 2.8.

3. Перелік відповідних базових умінь учнів складається на основі перших двох кроків при подальшому розгортанні кожної структурної зв’язки – конкретизації її змісту. Змістове уточнення ми пропонуємо виконувати з опорою на ідеї американських психологів Дж. Каррола, В. Блума про досягнення спільних результатів навчання в індивідуально прийнятому темпі, точніше, на вимогу формувати чітку систему навчальних цілей, за якою вчитель може співвідносити досягнутий результат із запланованим, конкретизація кожної зв'язки проводиться окремо. Результат у таблиці 2.9.

4. Реалізація різноманітних вимог здійснюється відповідно до методичної системи роботи вчителя. Якщо перевага віддається традиційному навчанню, то основним засобом є розв’язування вправ різних рівнів складності. Якщо вчитель володіє рівневим підходом до навчання, то починають діяти технологічні прийоми рівневої диференціації.

5. Критерії оцінювання результатів навчання загальноприйняті. Певною мірою критерії оцінювання розкриваються змістом відповідних базових умінь. Обов’язкова вимога – їх відповідність формам оцінювання результатів навчання. Форми організації навчальної діяльності учнів у процесі здійснення контролю загальновідомі: індивідуальні, групові, фронтальні.

Таблиця 2.8

Структура змісту теми “Елементи теорії множин. Комбінаторика”

8 клас (8 годин)

№	Зміст	Кількість годин	Тип уроку
1	Допоміжна зв’язка а) множина, елемент множини, підмножина, запис множин, зображення множин, кількість елементів у множині, скінченна множина з n елементів, порожня множина, рівність множин, числові множини; б) переріз множин, об’єднання множин, різниця множин, запис та схематичне зображення основних операцій над множинами.	2 1 1	 в/ф в/ф
2	Основна зв’язка а) основні правила комбінаторики; б) перестановки, отримання формули кількості перестановок без повторень за допомогою правила множення, обчислення кількості перестановок для будь-якого n; в) самостійна робота.	4 2 1 1	 в/ф в/ф к
3	Перспективна зв’язка а) комбінаторні задачі; б) тематична контрольна робота	2 1 1	 с к

9 клас (10 годин)

№	Зміст	Кількість годин	Тип уроку
1	Допоміжна зв’язка а) основні поняття теорії множин, взаємнооднозначна відповідність між множинами; б) виведення формули кількості підмножин скінченної множини.	2 1 1	 с в/ф
2	Основна зв’язка а) сполуки без повторень; б) виведення формули для обчислення кількості розміщень без повторень A_n^k . Обчислення кількості розміщень для будь-яких значень n і k; в) виведення формули для обчислення числа комбінацій без повторень C_n^k . Обчислення кількості комбінацій без повторень для будь-яких n і k. Властивості чисел C_n^k , трикутник Паскаля; г) самостійна робота.	5 1 1 2 1	 в/ф в/ф в/ф к
3	Перспективна зв’язка а) комбінаторні задачі; б) тематична контрольна робота.	3 2 1	 с к

в/ф – урок вивчення нового матеріалу й формування навичок та вмнь;

с – урок узагальнення та систематизації знань та умінь;

к – урок контролю і корекції знань, умінь та навичок.

Таблиця 2.9

Перелік основних базових умінь учнів з теми

“Елементи теорії множин. Комбінаторика”

№	Зміст	Рівні знань		
		Р	З	В
1	Допоміжна зв’язка Факти: історичні відомості про комбінаторику, роль, місце та значення комбінаторики в системі математичних наук. Терміни й поняття: основні поняття теорії множин. Способи дій: а) наводити приклади й записувати множини; б) наводити приклади підмножин даної множини; в) наводити приклади й записувати множини різного типу (скінченні, впорядковані, невпорядковані, числові); г) наводити приклади й записувати операції над множинами.		 Н Н Н Н	У У О,П О,П О,П О,П
2	Основна зв’язка Терміни й поняття: сполуки без повторень; Закономірності: а) правила додавання і множення; б) формули для обчислення кількості сполук без повторень; в) властивості чисел C_n^k. Способи дій: а) наводити приклади сполук кожного типу без повторень; б) виписувати всі розміщення, перестановки, комбінації для будь-якого *n* і *k;* в) обчислювати кількості сполук кожного типу без повторень; г) будувати трикутник Паскаля; д) застосовувати основні правила комбінаторики й формули для обчислення кількості розміщень, перестановок, комбінацій до розв'язування найпростіших типових комбінаторних задач.	 Н Н Н	 О О О Н Н Н Н Н	У П П П О,П О,П О,П О,П О,П
3	Перспективна зв’язка Терміни й поняття: дискретна математична модель. Способи дій: а) побудова дискретної моделі прикладних комбінаторних задач; б) застосування комбінаторних закономірностей до розв’язування відповідних математичних комбінаторних задач.	 Н Н	 О О	У П П

Рівні знань: Р – розуміння – можливість запам’ятати й відтворити теоретичний матеріал шляхом пригадування або з наявною сторонньою допомогою; З – застосування – повне розуміння змісту виучуваного та вміння самостійно застосовувати знання в типових ситуаціях; В – володіння – вільна орієнтація в теоретичних відомостях і вміння використовувати їх за змінених обставин.

Групи учнів: Н – група, яка об’єднує учнів з низькими навчальними можливостями; О – основна група, яку складають учні з достатніми навчальними можливостями; П – перспективна група, до якої входять учні з високими навчальними можливостями; У – усі три групи одночасно.

Програмою з математики для загальноосвітніх середніх закладів освіти вивчення комбінаторики віднесено до 11 класу. В основній школі ці питання розглядаються тільки в класах з поглибленим вивченням математики. Проте існує велика кількість шкіл (і в цьому специфіка системи освіти України) з одним класом універсального профілю (переважно це сільські школи), де немає можливості формувати в основній школі окремі класи з поглибленим навчанням математики. Ми розробили спецкурс за вибором для таких класів. Цей курс може бути використаний для проведення індивідуальної чи групової роботи у таких класах [22].

Включення курсів за вибором до особистісно орієнтованої системи навчання основної школи допомагає глибше ознайомити учнів з математичними ідеями та методами, спонукає до перших математичних досліджень. Курс розрахований на 17 годин протягом одного півріччя для учнів 7-9 класів. Важливою складовою організації навчального процесу є самостійні роботи: індивідуальне вивчення обраної теми, написання рефератів, виступи на семінарах з доповідями.

Таблиця 2.10

Тематичне планування

7 клас (1 год на тиждень, разом 17 год)

Зміст програми	Орієнтовні результати:
Основні поняття теорії множин. Основні операції над множинами. Комбінаторика, комбінаторні задачі. Безпосередній перебір. Наочні засоби перебору. Комбінаторні правила додавання та множення.	*уявлення*: - про комбінаторику як розділ математики; - про наочні засоби перебору (таблиці, схеми, дерева логічних можливостей); *знання:* - означення основних понять теорії множини; - означення основних операцій над множинами; - формулювання комбінаторних правил додавання і множення; *уміння:* - читати і записувати основні поняття теорії множини; - виконувати основні операції над множинами; - зображати множини та основні операції над множинами за допомогою діаграм Ейлера-Вена; - розв’язувати комбінаторні задачі безпосереднім перебором; - застосовувати наочні засоби перебору; - розв’язувати комбінаторні задачі за допомогою комбінаторних правил додавання і множення;

8 клас (1 година на тиждень, всього 17 годин)

Зміст програми	Орієнтовні результати
Взаємнооднозначна відповідність між множинами. Комбінаторні правила додавання і множення для трьох і більше множин. Перестановки.	*Уявлення:* - про взаємно однозначну відповідність між множинами; - про перестановки; *знання:* - формули включень й виключень для трьох і більше множин; - означення факторіала; - формули для обчислення кількості перестановок із n елементів; *уміння:* - застосовувати формулу включень й виключень під час розв’язування задач на додавання кількох множин; - розв’язувати комбінаторні задачі на застосування перестановок;

9 клас (1 година на тиждень, всього 17 годин)

Зміст програми	Орієнтовні результати:
Кількість підмножин скінченної множини. Розміщення і комбінації без повторень. Властивості комбінацій, трикутник Паскаля. Біном Ньютона. Рівняння і нерівності, що містять комбінаторні вирази.	*Уявлення:* - про сполуки без повторень; - про трикутник Паскаля; - про рівняння і нерівності, що містять комбінаторні вирази; - про біном Ньютона; *знання:* - формули для обчислення кількості підмножин скінченної множини; - формули для обчислення кількості розміщень з n елементів по k без повторень; - формули для обчислення кількості комбінацій з n елементів по k без повторень; - властивості комбінацій з n елементів по k без повторень; - принципу побудови трикутника Паскаля; - властивості трикутника Паскаля; *уміння:* - за допомогою правила множення отримувати формули для обчислення кількості розміщень і комбінацій з n елементів по k без повторень; - проводити порівняння і класифікацію понять сполук без повторень; - перекладати задачу на мову комбінаторики, будувати її дискретну модель та розв'язувати, застосовуючи поняття сполук без повторень, правила додавання і множення; - доводити основні властивості комбінацій з n елементів по k без повторень; - будувати трикутник Паскаля; - розв'язувати задачі на застосування формули бінома Ньютона; - розв'язувати рівняння і нерівності, що містять комбінаторні вирази.

2.2.2. Розв'язування задач.

Задачі є основним засобом формування і розвитку математичних здібностей учнів. Розв'язуючи задачі, вони застосовують теорію і тим самим пізнають її, а також поглиблюють та розширюють.

Основна роль у формуванні комбінаторних знань та вмінь, розвитку мислення належить системі задач, які розглядаються і як мета, і як засіб навчання.

Засвоєння основних понять теорії множин, поняття перестановки, комбінаторних правил додавання і множення у 8 класі з поглибленим навчанням математики проходить під час розв'язування вправ і задач різного рівня складності.

У процесі розв'язування задач на застосування правила додавання зручно для наочності використовувати діаграми Ейлера-Венна. Наприклад, така дидактична гра.

Учитель диктує умови гри й показує на кодоплівці їх схематичний запис. Формуються імпровізовані команди (учні, що сидять за попередніми партами, повертаються до тих, хто сидить за ними, команда складається з 4-6 чоловік).

- "Ви – експертна група банку, який погодився фінансувати проект благодійного фонду. Благодійний фонд подав 3 проекти: "Обдарована дитина – 2003", "Допомога в реконструкції храму", "Реконструкція пам'ятки культури". Ці проекти були захищені на засіданні правління банку. За перший проект проголосувало 8, за другий – 9, за третій – 9, за перший та другий – 5, за другий та третій – 3, за перший та третій – 4. За три проекти одночасно проголосувало 2 особи. Ви як експерти повинні з'ясувати скільки всього членів правління банку, скільки членів проголосувало тільки за один проект і за який. Результати будуть подані президентові банку, який і вирішить, який проект фінансувати.

Порада експертам: щоб робота була виконана швидко, розподіліть обов'язки. Тобто є експерти, які розробляють математичну модель задачі, а є експерти, які розробляють схематичну модель задачі".

Розв'язання. Нехай U – множина всіх членів правління банку, A – множина членів правління банку, які проголосували за перший проект, B – множина членів правління банку, які проголосували за другий проект, C – множина членів правління банку, які проголосували за третій проект.

$n(A) = 8$, $n(B) = 9$, $n(C) = 9$, $n(A \cap B) = 5$, $n(A \cap C) = 4$, $n(B \cap C) = 3$, $n(A \cap B \cap C) = 2$.

$n(U) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

$n(U) = 8 + 9 + 9 – 5 – 3 – 4 + 2 = 16$

$n(U) – n(B) – n(C) + n(B \cap C) = 16 – 9 – 9 + 3 = 1$ - за перший проект.

$n(U) – n(A) – n(C) + n(A \cap C) = 16 – 8 – 9 + 4 = 3$ - за другий проект.

$n(U) – n(A) – n(B) + n(A \cap B) = 16 – 8 – 9 + 5 = 4$ - за третій проект.

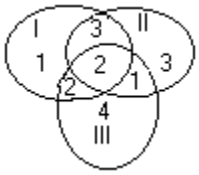


Рис. 2.23. Розв’язання за допомогою діаграми Ейлера-Венна

Розв’язання захищають представники команди, що першою розв’яже задачу, представники інших команд виступають у ролі опонентів. Члени команди, що першою правильно розв’яже задачу, отримують 10 балів, другою – 9 балів, третьою – 8 балів.

Вдалою наочною ілюстрацією правила множення можуть стати графи. Наведемо такий приклад.

Задача. Скільки двоцифрових чисел можна скласти з цифр 3, 5, 7 так, щоб:

а) цифри в числі не повторювались; б) цифри в числі можуть повторюватись.

Учитель розв’язує на дошці й коментує пункт “а” за допомогою дерева логічних можливостей. Для розв’язування пункту “б” можна викликати учня.

Розв’язання: а) на перше місце можна поставити будь-яку з трьох цифр, а на друге вже з двох цифр, що залишаться. Будуємо дерево логічних можливостей. З нього видно, що таких чисел буде 6 (Рис. 2.24).

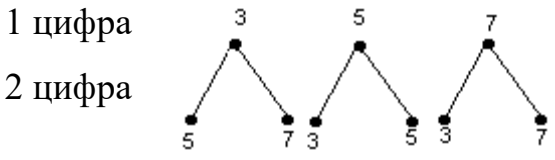


Рис.2.24. Граф до задачі

Оскільки вивчення комбінаторики передбачене на початку 8 і 9 класів, то бажано продовжувати розглядати вправи комбінаторного характеру протягом усього року навчання у 8 класі. Лише за цих умов навички комбінаторної

діяльності можуть закріпитись на операційному рівні мислення. Для цього нами розроблено зошит з друкованою основою для учнів 8 класів з поглибленим вивченням математики [24]. Зошит має такий зміст.

Передмова. Екскурс в історію

1. Основні поняття теорії множин
2. Основні операції над множинами
3. Таблиці, графи, схеми
4. Правило додавання
5. Правило множення
6. Перестановки
7. Задачі з комбінаторики
8. Задачі підвищеної складності

Тематична контрольна робота

Відповіді

Список використаної та рекомендованої літератури

Необхідний матеріал з теорії у вигляді схем включено в кожний з параграфів. Задачі кожного типу подані зі зразками розв'язання. Домашнє завдання й запитання для самоконтролю, подані після кожного параграфа, сприятимуть закріпленню знань та комбінаторних вмінь.

Восьмий параграф містить систему вправ трьох рівнів складності. Вправи першого рівня (А) передбачають відтворення викладеного матеріалу й забезпечують засвоєння нових математичних понять і засобів дій, вправи другого рівня складності (Б) – застосування засвоєних понять та способів дій до розв'язування нестандартних задач, і, нарешті, завдання третього рівня (В) за своєю складністю вимагають творчого підходу. В останньому параграфі подано кілька конкурсних і олімпіадних задач. Зошит також містить тематичну контрольну роботу, структуровану за IV рівнями навчальних досягнень у 4 варіантах.

Основна увага під час вивчення комбінаторики в 9-му класі має бути зосереджена на розв'язуванні прикладних задач. Процес розв'язування

починається з побудови дискретної математичної моделі за допомогою розглянутих понять і правил. При цьому формулюється нова математична задача мовою комбінаторики, для розв'язування якої використовуються правила комбінаторики й формули для обчислення кількості сполук без повторень певного типу. Далі аналізуються результати. Тут основна трудність, яка виникає в учнів, – саме визначення виду сполуки.

Тому на основі схеми (див. Рис. 2.22) рекомендовано підготувати схеми-орієнтири (Рис. 2.25–2.26), що сприятиме правильному визначенню виду сполуки, про яку йдеться в умові задачі, та вибору комбінаторного правила. Можна використати їх як кодопозитиви для кодопроектора.

Рис. 2.25. Схема-орієнтир до вибору формули у процесі розв'язування комбінаторних задач

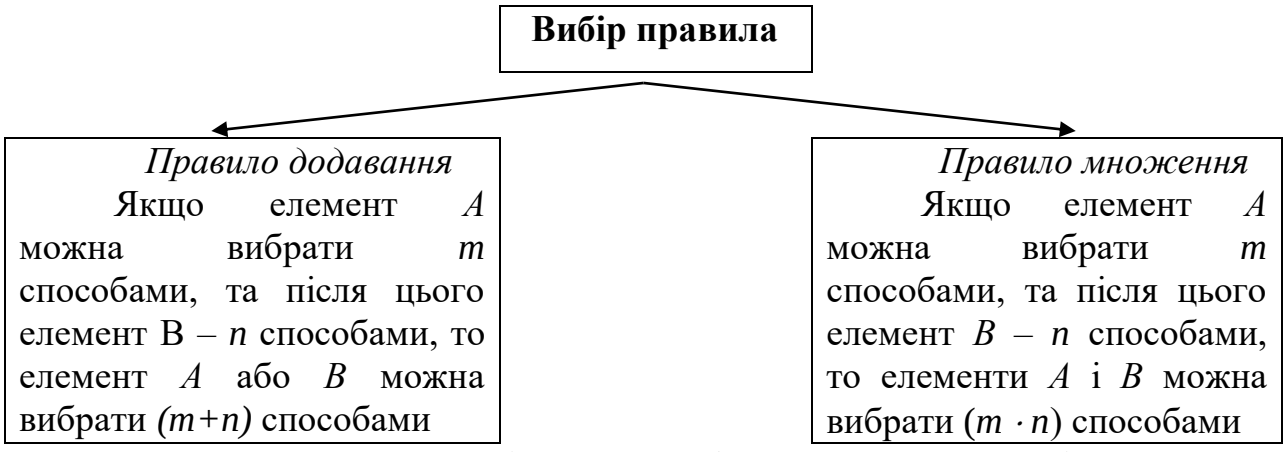


Рис. 2.26. Схема-орієнтир до вибору правила у процесі розв'язування комбінаторних задач

Спочатку задачі розв'язуються без застосування відповідних формул. Для визначення виду сполук, з яким пов'язана конкретна задача, необхідно знати, з якої множини здійснюється вибір елементів або, здійснюється упорядкування, або те і інше. Для підрахування важливо знати кількість елементів у множині, з якої вибираються елементи, або в якій установлюється порядок, а також кількість елементів у підмножинах, що складаються. Враховуючи, що відповіді на ці запитання не завжди явно визначені умовою задачі, необхідна постановка наступних запитань:

а) здійснюється вибір елементів з однієї множини або кількох?

б) з якої або яких множин здійснюється вибір елементів?

в) скільки елементів містить ця (ці) множина (множини)?

г) скільки елементів входить у кожну підмножину, що вибираються?

д) чи важливий для підрахунку об'єктів, що вибираються, порядок елементів у них? Для цього в підмножині змініть будь-які два різних елемента місцями. Чи отримаєте при цьому новий об'єкт для підрахунку?

Наведемо приклади.

Задача. У десятому класі 10 навчальних предметів. Скількома способами можна скласти розклад уроків на середу з 5 різних предметів?

Розв'язання. З 10-елементної множини навчальних предметів треба вибрати 5-елементну підмножину, порядок елементів є важливим. Мова йде про розміщення з 10 елементів по 5, число способів дорівнює A_{10}^5.

Задача. У магазині продають листівки з краєвидами міст Києва, Сум, Луганська і Дрогобича. Скількома способами можна скласти набори з трьох різних листівок?

Розв'язання. З 4-елементної множини листівок обираємо 3-елементні підмножини, порядок не є важливим. Тобто мова йде про комбінації з 4 елементів по 3. Таких наборів можна скласти C_4^3

Задача. На одній прямій взято *k* точок, а на іншій, що паралельна даній,– *l* точок. Скільки існує трикутників, вершинами яких є ці точки? (Рис.2.27)

У задачі мова йде про дві множини: $M = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$, $N = \{B_1, B_2, \ldots, B_l\}$.

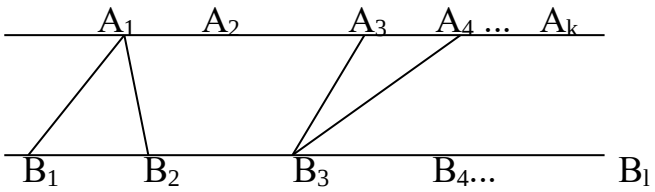


Рис. 2.27. Ілюстративний матеріал до задачі

Кількість елементів у них: *n(M) = k, n(N) = l.* Трикутник визначається трьома вершинами. Отже, потрібно здійснювати вибір трьох елементів. Але три елементи множини *M* або *N* трикутник не визначають, то ми будемо здійснювати вибір трьох елементів з двох множин так: два елементи з множини *M,* один елемент – з множини N, або один елемент з множини *M*, два – з *N*.

Візьмемо будь-яку пару точок однієї з прямих, наприклад, A_3A_4 у поєднанні з точкою іншої прямої, наприклад, B_3. Отримана підмножина визначає трикутник $A_3A_4B_3$. Поміняємо місцями елементи в названій парі. У поєднанні з тією самою точкою B_3 нова підмножина $A_4A_3B_3$ визначить той самий трикутник. Отже, порядок елементів у підмножинах не впливає на результат підрахунку трикутників.

Таким чином, задача пов’язана із знаходженням комбінацій без повторень. Вибір двох елементів з *M* можна здійснити C_k^2 способами, одного елемента з множини *N – l* способами, а вибір того і іншого за правилом множення - $l \cdot C_k^2$ способами. Аналогічно записується кількість трикутників виду II - $k \cdot C_l^2$. За правилом додавання всього трикутників буде $l \cdot C_k^2 + k \cdot C_l^2$.

Одночасний розгляд учнями серії задач, пов’язаних з різними комбінаторними поняттями, має на меті здійснення зіставлення і протиставлення цих понять на етапі формалізації. При цьому важливо включити учнів у різні види діяльності. Відомо, що якщо нові знання включати в структуру тих самих прийомів діяльності, то розвиваючий ефект навчання буде низьким. Навпаки, з чим більшою кількістю прийомів діяльності пов’язані знання, що формуються, тим вище пізнавальні можливості учнів та ефективність результатів. Тому комбінаторні завдання, що пропонуються учням, носять різний характер:

а) визначити в даній задачі вид комбінаторного поняття, що використовується;

б) вибрати з серії задач ті, що пов’язані з певним комбінаторним поняттям;

в) скласти задачу, що приводить до знаходження кількості, що задана комбінаторною символікою;

г) розв’язати задачі, що пропонуються учням, відомими для них способами “неформальної” комбінаторики (спосіб перебору, наочні засоби перебору, комбінаторні правила множення і додавання).

Розв’язування на цьому етапі комбінаторних задач способами “неформальної” комбінаторики дозволяє:

а) установити зв’язок між комбінаторними знаннями, що мають учні, і поняттями, що вводяться;

б) здійснити подальше узагальнення й диференціацію комбінаторних понять; зокрема визначити загальне й відмінне не тільки в змісті цих понять, але й у способі отримання кількості певних сполук.

Розглянемо, наприклад, задачу: на прямій задано 5 різних точок A, B, C, D, E. Скільки: а) відрізків визначають ці точки; б) спрямованих відрізків визначають ці точки?

Мовою комбінаторики в задачі потрібно підрахувати а) C_5^2 ; б) A_5^2 .

За правилом множення з множини {A, B, C, D, E } можна отримати 5·4 упорядкованих пар різних елементів. Таким чином $A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$. Але, оскільки кожна пара елементів може бути впорядкована двома способами, то з елементів тієї самої множини можна отримати $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ невпорядкованих пар елементів, $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$.

У процесі розв’язування комбінаторних задач способами “неформальної” комбінаторики учні переконуються в тому, що знаходження кількості розміщень і комбінацій без повторень може бути здійсненим за допомогою

правила множення. Однак у їх знаходженні є суттєва різниця. Правило множення є способом знаходження впорядкованих підмножин. Для того, щоб знайти кількість невпорядкованих підмножин, зокрема, комбінацій без повторень, необхідно підрахувати на основі вказаного правила кількість упорядкованих підмножин, а потім відмовитись від їх упорядкованості, вносячи відповідні зміни в отриману кількість упорядкованих підмножин, як це зроблено в попередній задачі.

Таке розв'язання комбінаторних задач є вдалою підготовкою для побудови подальших узагальнень – отримання формул кількості розміщень і комбінацій без повторень. Таким чином, виведення комбінаторних формул є наступним ступенем узагальнення, що будується на основі правила множення.

Які переваги застосування цього методу в названих цілях?

а) При такому підході комбінаторні формули є істотним узагальненням комбінаторних знань, яких набули учні у процесі вивчення "неформальної" комбінаторики, і, таким чином, правило множення є зв'язком між вивченим матеріалом і матеріалом, що вивчається.

б) Правило множення дає єдиний підхід до отримання основних комбінаторних формул. Воно являє собою найбільш економний спосіб, що легко ілюструється графами, отримання формул.

в) Використання у виведенні комбінаторних формул правила множення економить навчальний час, за рахунок чого можна збільшити кількість практичних завдань, урізноманітнити комбінаторні задачі за змістом і способами розв'язання.

Після доведення основних формул учні вже застосовують їх до розв'язування задач.

Задача. Комісія складається з голови, його заступника і ще п'яти чоловік. Скількома способами 7 членів комісії можуть розподілити між собою обов'язки.

Розв'язання. Очевидно, що на кількість способів впливає лише вибір голови та його заступника, бо інші члени комісії "визначаються" автоматично. Отже, всього розподіл обов'язків може відбутися $A_7^2 = 42$ способами.

Задача. Потрібно виділити двох з п'яти учнів на чергування до їдальні. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання. У виборі учнів для чергування порядок вибору несуттєвий, адже немає різниці, в якому порядку вчитель викличе чергових. Це одна й та сама пара чергових. При цьому в кожному виборі задіяні два учні з п'яти. Отже, маємо справу з комбінаціями з 5 елементів по 2 елементи. Їх кількість $C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = 10$.

Такий підхід до розв'язування задач має суттєвий недолік. Учні, прочитавши умову задачі, намагаються "впізнати" сполуку, записати "потрібну" формулу і вже автоматично виконують обчислення. При цьому вони не намагаються до кінця зрозуміти сюжет, про який ідеться в задачі, спробувати його змоделювати. Бажано, якщо є можливість, розглянути різні способи їх розв'язування. Зрозуміло, що за браком часу це не завжди вдається зробити. Тому, готуючись до уроку, необхідно не обмежуватися тільки одним способом розв'язування задачі, щоб на уроці організувати роботу з пошуку більш раціонального способу розв'язування. При цьому, як домашнє завдання, можна запропонувати учням відшукати інші способи розв'язування розглянутих на уроці задач.

Задача. Скільки трицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 0, 2, 5, 8, 9 так, щоб цифри в числі не повторювались?

Розв'язання. 1-й спосіб. На перше місце цифру можна вибрати чотирма способами (0 не може бути не першому місці), на друге місце цифру вже можна вибрати з чотирьох цифр, що залишились, тобто маємо знов 4 способи, на третє місце можна вибрати цифру вже трьома способами. За правилом множення маємо $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ чисел.

2-й спосіб. У запису числа важливий порядок цифр. Три елементи з п’яти в певному порядку можна вибрати A_5^3 способами. Але до них увійшли й усі ті записи, які починаються з цифри 0. Це двоцифрові числа, записані цифрами 2, 5, 8, 9. Їх можна утворити A_4^2 способами. Отже, шукана кількість чисел $A_5^3 - A_4^2 = 3 \cdot 4 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = 48$.

3-й спосіб. Число не може починатися з 0. Тому для вибору першої цифри є 4 різних способи. На друге і третє місце у певному порядку цифри з тих, що залишилися, можна вибрати A_4^2. Загальна кількість буде $4 \cdot A_4^2 = 48$.

Програма з математики для загальноосвітніх шкіл не передбачає вивчення сполук з повтореннями, проте за допомогою комбінаторних правил додавання і множення можна розв’язувати нескладні комбінаторні задачі на знаходження кількості сполук, у яких можливі повторення елементів.

Задача. Скільки різних чотирицифрових чисел можна записати в десятковій системі числення, якщо цифри можуть повторюватись?

Розв’язання. На першому місці можна записати будь-яку з 9 цифр (0 не може бути на першому місці). На друге місце цифру можна вибрати уже 10 способами, оскільки цифри можуть повторюватися, і так далі. Отже, всіх можливих чотирицифрових чисел буде $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ чисел.

Система задач на цьому етапі формування основних комбінаторних знань та вмінь має бути розрахована на реалізацію рівневої диференціації. Принцип диференційованого навчання реалізувався за допомогою добору задач різної складності. Пропонується трирівнева система задач (А – середній, Б – достатній, В – високий). В основу їх добору, як показали результати наших досліджень, доцільно покласти принцип структурування, розроблений і теоретично обґрунтований З. Слєпкань, М. Бурдою, Я. Грудьоновим для різних за цільовим призначенням систем вправ.

Цей принцип структурування системи задач полягає в тому, що, по-перше, кожний наступний рівень задач вимагає від учнів більш повного використання як алгоритмічної, так і евристичної компоненти, по-друге, задачі

третього рівня складності включають елементи задач першого і другого рівнів, а задачі другого рівня складності містять елементи задач першого рівня.

Орієнтація на диференціацію знаходить своє відображення у відкритості рівнів складності запропонованого масиву задач. Надання до теми переліку задач різного рівня складності дозволяють залучати до роботи всіх учнів. Велика кількість запропонованих задач створює атмосферу творчого змагання.

Наведемо приклад контрольної роботи для 8 класу, структурованої за чотирма рівнями навчальних досягнень школярів.

У процесі виконання завдань початкового рівня слід заповнити пропуски в тексті. Правильне виконання завдання оцінюється трьома балами.

Виконуючи завдання середнього рівня, слід вибрати й підкреслити правильну відповідь у текстових завданнях. Правильне виконання цього завдання оцінюється трьома балами.

Достатньому рівню навчальних досягнень відповідають завдання 3 і 4. Їхнє розв'язання повинно супроводжуватися необхідними обґрунтуваннями. Правильне виконання кожного з завдань оцінюється 1,5 балами. Таким чином, розв'язавши два завдання достатнього рівня, можна одержати також три бали.

Високому рівню навчальних досягнень відповідають завдання 5 і 6. Виконуючи їх, слід продемонструвати варіативність мислення і вміння обирати раціональний шлях розв'язування. Виконати слід одне з завдань – 5-те або 6-те. Правильне виконання оцінюється трьома балами. Звичайно, можна розв'язати кожне з завдань.

Отже, правильне розв'язання завдань чотирьох рівнів дає змогу одержати максимальну оцінку – 12 балів.

На виконання контрольної роботи відводиться один урок.

I. Початковий рівень навчальних досягнень

1. Заповніть пропуски в тексті.

а) множина, яка складається з усіх тих і тільки тих елементів, які належать принаймні хоча б одній з множин (A, B) називається _____ та позначається _____

б) Перестановка з n елементів – це _____ множина, утворена з __ даних елементів. Кількість усіх можливих перестановок з n елементів позначають символом _____. Кількість перестановок з n елементів дорівнює _____ всіх натуральних чисел від 1 до __. Такі добутки коротко позначаються символом _____. Отже, _____.

в) Якщо елемент *а* можна вибрати *m* способами, та після кожного такого вибору елемент *в* можна вибрати *n* способами, то вибір пари *а* та *в* у _____ _____ порядку можна здійснити _ способами.

II. Середній рівень навчальних досягнень

2. Виберіть і підкресліть правильну відповідь.

а) Скількома способами можна скласти список з 5 прізвищ?

1) 120; 2) 5^5; 3) 60

б) Скільки трицифрових чисел можна скласти з цифр 5, 8 та 1 (цифри в числі можуть повторюватись)?

1) 9; 2) 6; 3) 27

в) У вазі є 11 яблук та 6 апельсинів. Скількома способами можна вибрати один із цих фруктів?

1) 66; 2) 17; 3) 11

III. Достатній рівень навчальних досягнень

3. Кожний учень класу – або дівчинка, або має біляве волосся, або любить математику. У класі 20 дівчаток, з них 12 блондинок, а одна блондинка любить математику. Усього в класі 24 учні-блондини, математику з них люблять 12, а всього учнів (хлопчиків та дівчаток), які люблять математику, – 17, з них 6 дівчаток. Скільки учнів у цьому класі?

4. Скільки шестицифрових чисел, більших за мільйон, можна скласти з цифр 2, 3, 0, 5, 4, 1, 8?

IV. Високий рівень навчальних досягнень

5. Скількома способами можна розмістити на книжковій полиці 6 книг з алгебри і 3 з геометрії так, щоб усі книги з алгебри стояли поруч?

6. Знайдіть n. $\frac{n!}{(n-4)!}P_{n-4} = 42P_{n-2}$

Результати педагогічного експерименту підтверджують теоретичне положення про те, що домінуючим дидактичним засобом формування комбінаторних знань та вмінь у класах з поглибленим навчанням математики є система доцільно дібраних задач, структурована за рівнями їх складності.

2.4. Комп'ютерна підтримка вивчення комбінаторики

Зростання ролі сучасних інформаційних технологій в багатьох видах людської діяльності цілком природно спричинює зміни в системі освіти, спрямовані на переорієнтацію навчально-виховного процесу з суто репродуктивних механізмів мислення на заохочення творчої активності учнів, що розвиватиметься на базі належного інформаційного забезпечення.

Першоджерелами усієї людської культури завжди і залишаються інноваційні, евристичні моменти свідомості. Тому найважливішим завданням сучасної освіти має бути вироблення творчого становлення до дійсності, адже лише тоді може стати творчою і діяльність людини.

Творчого, евристичного характеру мислення школярів може набувати у процесі роботи з різноманітною, багатоплановою інформацією, яку методично подають вчителі в усній, письмовій та електронній формах, активізуючи при цьому якомога більше сенсомоторних механізмів психіки дитини, що в свою чергу сприяє поступовому виробленню стійких навичок вмілого прикладання здобутих знань у проблемних ситуаціях. Комп'ютерні засоби при цьому стають не лише технічними знаряддями навчального процесу, але їх використання формує новий інтелектуальний фон, нову операційну обстановку, що органічно і природно використовується дитиною в її розвитку в школі та вдома [84, с.23].

Одне із провідних місць у навчальному процесі на сучасному етапі розвитку освіти належить комп'ютерним технологіям навчання, визначенню їх цілей, завдань, місця та доцільності використання на різних етапах навчально-

пізнавальної діяльності учнів. Останніми роками інтенсивно проводяться дослідження з впровадження НІТ у навчальний процес на різних його етапах (А. Верлань, О. Вітюк, Ю. Горошко, М. Жалдак, Ю. Машбиць, Н. Морзе та ін.).

Дослідження підтверджують, що застосування комп'ютерної техніки сприяє індивідуалізації і підвищенню мотивації навчальної діяльності, активізує процес формування рефлексії власної діяльності, дозволяє здійснювати вибір темпу навчання, формує позитивне ставлення до навчання (через відсутність категоричної негативної оцінки власної діяльності учня), урізноманітнює способи отримання нової навчальної інформації, дає можливість оперативно і переконливо ілюструвати поняття та зв'язки між ними.

Проте слід пам'ятати, що талант вчителя криється в його діалогічності з учнями, в організації діалогу учнів між собою. Діалогічність виражається у прагненні до діалогу. Саме він сприяє пошуку знань; розвитку в учнів вміння порівнювати, аналізувати, міркувати; залученню учнів до атмосфери творчості, звісно, за наявності педагогічного такту у вчителя та захопленості процесом пізнання в учнів [176].

Тому будь-яку навчально-пізнавальну діяльність учнів, пов'язану з використанням на уроках математики комп'ютерної техніки, слід контролювати, супроводжувати спрямовуючими хід робіт рекомендаціями, вчасно реагувати на утруднення, що виникають в діяльності учнів на шляхи успішного засвоєння навчального матеріалу.

Фахівці вважають, що в процесі розвитку комбінаторного мислення допомагають не тільки операційно-технологічні процедури і програми розв'язування вже сформульованих задач, скільки побудова образу проблемної ситуації, висування гіпотези, постановка проблеми, формулювання задачі. Майбутні системи штучного інтелекту зможуть розв'язувати будь-які проблеми, проте не зможуть висувати їх [75].

Тому в управлінні процесом навчання керівна роль залишиться за вчителем, а дидактичним комп'ютеризованим засобам відводиться лише роль засобів навчально-пізнавальної діяльності.

Прикладом таких програмних засобів у процесі вивчення математики можуть бути програми, зорієнтовані на візуалізацію абстракцій і проведення експерименту. Інструментальні програмні засоби доцільно використовувати для розвитку самостійного мислення, дослідницьких умінь, творчого підходу до справи, коли матеріал має середній рівень складності. Моделюючі комп'ютерні програми слугують для розвитку абстрактного мислення, спостережливості; їх використовують, коли зміст теми має теоретико-інформаційний характер, потребує проведення досліджень, коли в учнів розвинені дослідницькі риси .

Проблеми, які виникають у зв'язку із активним уведенням комп'ютера у процес навчання математики, полягають у з'ясуванні питання про те, коли, якою мірою, які програми і як можуть бути використані на уроках математики для ефективного розв'язування педагогічних задач.

Як свідчить досвід, інтерес до навчально-пізнавального процесу в учнів викликає не лише використання ігрових програм навчального призначення, але й програм, які дозволяють проводити пошуки, побудови та дослідження моделей математичних об'єктів під час розв'язування комбінаторних задач. Найбільш доцільними в цьому плані є програми GRAN-1, GRAN-2D, GRAN-3D, DERIVE, EVRICA. Використання подібних програм дає можливість учневі розв'язувати окремі задачі, не знаючи відповідного аналітичного апарату, методів і формул, правил перетворення виразів тощо. З іншого боку, розвиває образне мислення, просторову уяву, дозволяє досить глибоко проникнути в сутність досліджуваного явища, неформально розв'язувати задачу. При цьому на передній план виступає з'ясування проблеми, постановка задачі, розробка відповідної математичної моделі, матеріальна інтерпретація отриманих за допомогою комп'ютера результатів [86].

Програми з навчально-інструментальної серії GRAN – зручний та випробуваний полігон для навчання учнів математики, розвитку їх творчих

здібностей, ефективний засіб пізнання через відкриття. Проведеєння експериментів у середовищі GRAN сприяє вихованню в учнів математичної інтуїції, оскільки використання програм дозволяє швидко відстежити неправильні кроки, бачити раціональні, перспективні шляхи розв'язування задачі.

Працюючи один на один з такою програмою, учень отримує зручні умови для відпрацьовування самобутніх методів, навичок і стратегій розв'язування задач, тобто має змогу виховувати в себе оригінальність думки, так потрібну для розвитку евристичних та творчих компонент у мисленні.

З використанням пакету "GRAN" корисний з педагогічної точки зору вплив на навчальну діяльність підлітків починають спричиняти помилки у побудовах – результати, здобуті помилковим шляхом, ретельно аналізуються учнями, досліджуються шляхи виходу з подібних ситуацій.

У процесі аналізу виконаних за допомогою програми побудов і підрахунків (для "GRAN1"), взаємного розміщення геометричних об'єктів (для "GRAN2D" і 3D) учні можуть формулювати інші задачі.

У процесі розв'язування задач за допомогою програм пакету "GRAN" робиться акцент на розуміння, а не на запам'ятовування, що сприяє кращому усвідомленню задачного матеріалу [184].

На уроках геометрії в 7 експериментальному класі ми використовували цикл геометричних задач комбінаторного характеру, які варто розв'язати за допомогою програм пакету "GRAN 2D". Тому один урок геометрії ми провели в комп'ютерному класі. На уроці "Точка та пряма, їх властивості. Відрізок." після того, як учитель переконався, що учні засвоїли поняття, можна переходити до задач на комп'ютері. Розглянемо деякі з них.

Спочатку учні розв'язують кожну задачу і записують відповіді в зошитах, за допомогою комп'ютера встановлюється правильність очікуваних результатів.

1. Побудуйте дві прямі, що перетинаються і розташуйте на них два відрізки, що не мають спільних точок.

Учитель вмикає комп’ютери і завантажує засіб GRAN 2D. Після завантаження програми GRAN 2D слід скористатися кнопками панелі інструментів для побудови необхідних об’єктів. Вибрати кнопку “Створення прямої через дві точки”, встановити курсор “миші” в будь-якому місці екрану і натиснути ліву клавішу “миші”, так само побудувати другу точку, через яку буде проходити пряма. Аналогічно побудувати другу пряму (Рис.2.28). Позначити на прямих необхідні відрізки, скориставшись кнопкою “Створення точки”.

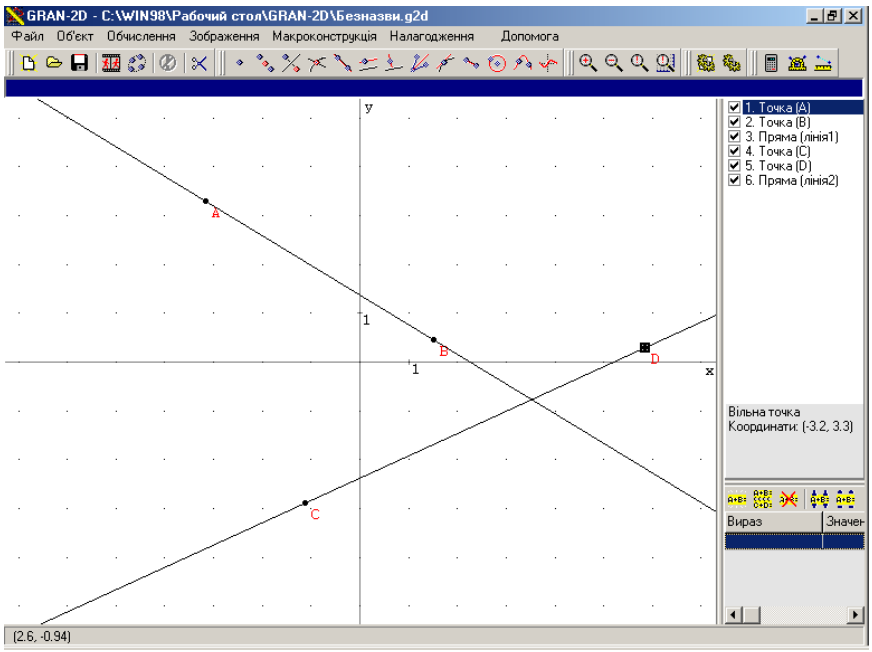


Рис. 2.28. Вигляд екрану під час розв’язування задачі 1

2. Скільки різних прямих можна провести через чотири точки, зробіть креслення.

Побудувати 4 точки за допомогою кнопки “Створення точки”. Використовуючи кнопку “Створення прямої через дві точки”, провести прямі через побудовані точки. Для цього слід встановити курсор “миші” на точці і натиснути ліву клавішу “миші”, потім встановити курсор “миші” на другій точці і натиснути ліву клавішу, отже пряма побудована. Потім знов вибирається опція “Створення прямої через дві точки” і будується друга пряма (Рис.2.29). Після виконання всіх побудов учні роблять висновок про те, скільки прямих, які проходять через вказані 4 точки, вони змогли побудувати.

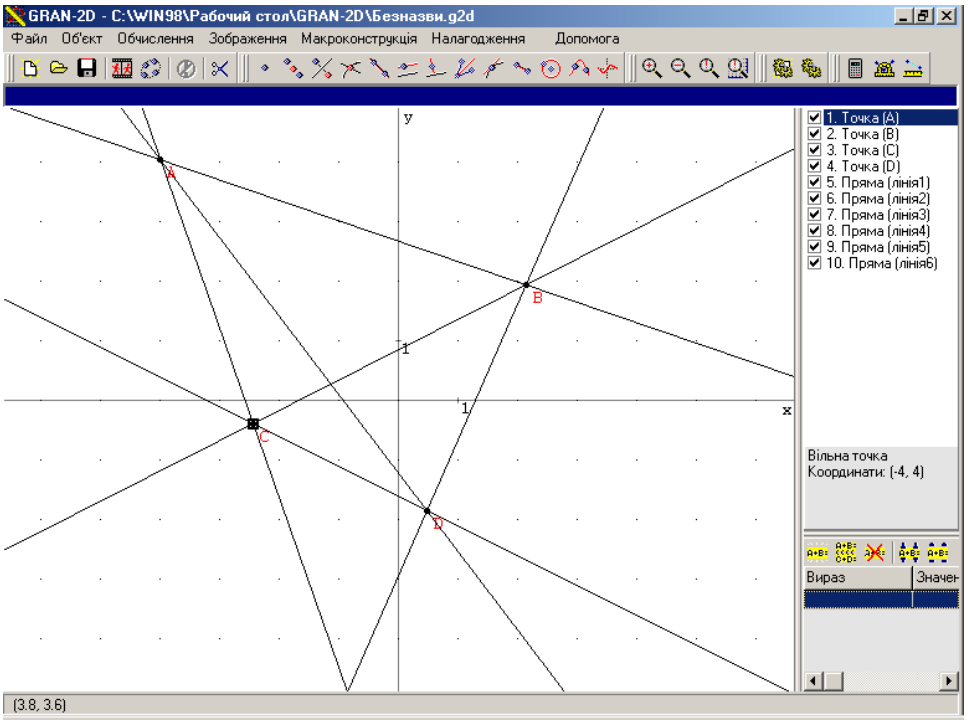


Рис. 2.29. Вигляд екрану під час розв'язування задачі 2

3. Дано відрізок АВ, точки Е і С, що не лежать на прямій АВ. Скільки існує взаємних розміщень прямої ЕС і відрізка АВ. Зробити висновок.

Для побудови відрізка слід скористатись опцією Об'єкт/Створити/Ламана. У відкритому вікні зняти галочку "замкнена", ввести координату початкової точки ламаної (будь-яку, оскільки її потім можна перемістити) і натиснути кнопку "застосувати". Встановити курсор "миші" на точці, натиснути ліву клавішу і перемістити його на необхідну відстань, тримаючи ліву клавішу "миші" натиснутою. У разі необхідності можна змінити положення точок шляхом переміщення їх в інше місце. Потім за допомогою кнопки "Створення точки" побудувати точки Е і С згідно умови, після чого провести через них пряму. Слід зробити кілька креслень, таких щоб відрізки АВ і ЕС перетинались, а також пряма ЕС не перетинала відрізка АВ і перетинала його на продовженні відрізка ЕС.

На рис.2.30 зображено кілька можливих побудов:

- відрізок АВ перетинає відрізок ЕС;
- відрізок АВ не перетинає відрізок E_1C_1, але перетинає пряму E_1C_1;
- пряма E_2C_2 не перетинає відрізок АВ.

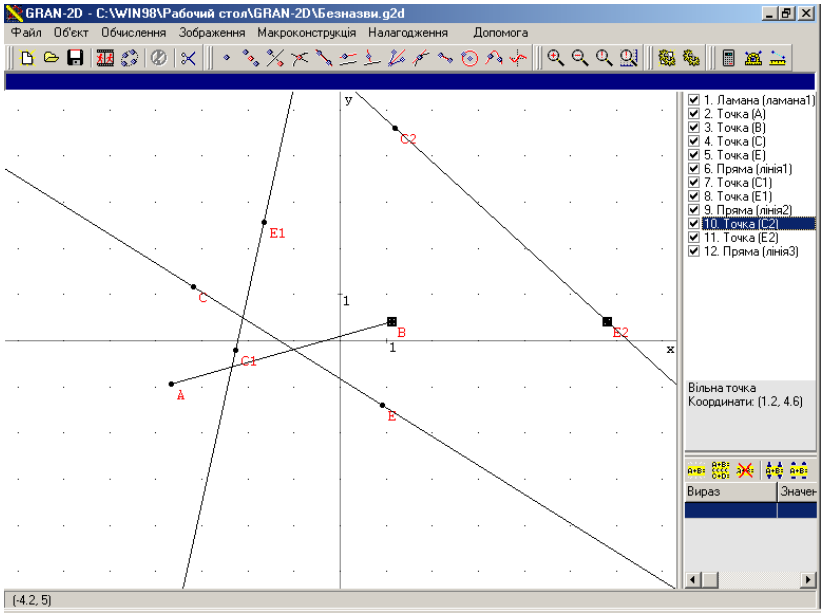


Рис.2.30. Вигляд екрану під час розв'язування задачі 3

4. Відстань між точками A і B дорівнює 10, знайти всі точки M такі, що MA + MB = 14.

Застосовуючи команду Об'єкт/Створити/Ламана, будуємо відрізок AB і переміщуємо точки так, щоб довжина відрізка AB була 10 (відстань між точками фіксується на правій панелі вікна GRAN 2D. Після побудови відрізка AB спробувати знайти точку M, що задовольняє вказаним умовам. Можна побудувати точку M в довільному місці, а потім скориставшись опцією Обчислення/Відстань, знайти відстань між точками A і M, а потім B і M. Після цього можна пересувати точку M по координатній площині, щоб виконувалась умова MA + MB = 14 (Рис.2.31).

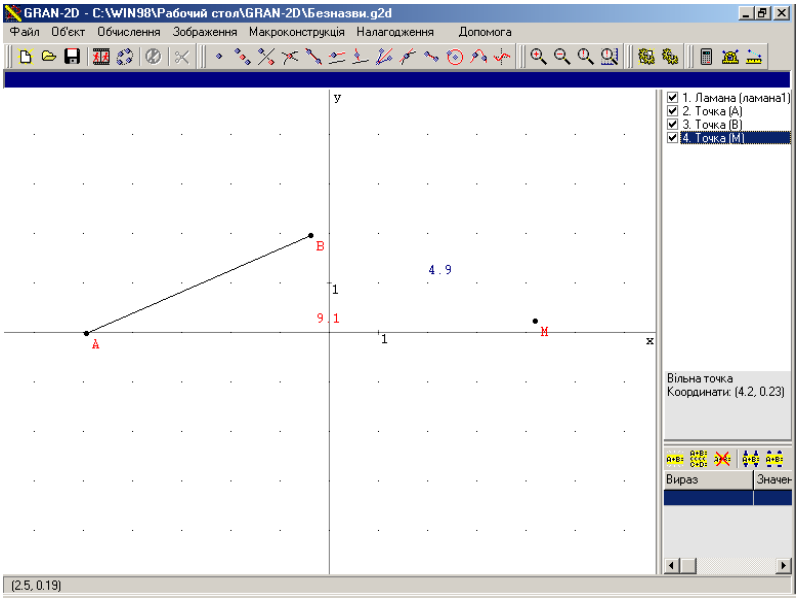


Рис. 2.31. Вигляд екрану під час розв'язування задачі 4

Цю ж саму задачу можна розв’язати по-іншому: скориставшись опцією Об'єкт/Створити/Ламана, побудувати замкнену ламану АВМ, причому, щоб закінчити побудову ламаної слід натиснути праву клавішу “миші”, і вибрати “замкнена”. Потім за допомогою опції Обчислення/Відстань знаходимо відстані між точками А і В, А і М, В і М. Змінюємо положення точок А і В так, щоб відстань між ними була 10 (Рис.2.32), а потім, пересуваючи точку М, знаходимо такі положення, щоб виконувалася умова АМ + ВМ = 14.

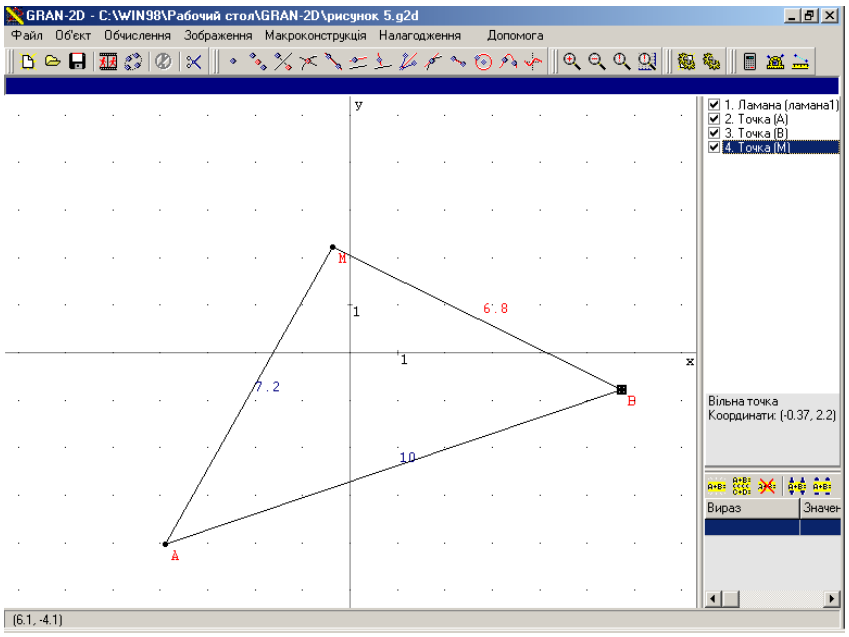


Рис. 2.32. Вигляд екрану під час розв’язування задачі 4

5. Розмістити п’ять прямих на площині так, щоб в них було 8 точок перетину і через кожну з цих точок проходило не більше двох прямих. Підрахувати, скільки вийшло відрізків.

За допомогою GRAN 2D задачу можна розв’язати двома способами: побудувати 5 прямих, а потім їх пересувати, або побудувати 8 точок, а потім на їх основі будувати прямі і дивитись, щоб через кожну точку проходило не більше двох прямих, і не з’являлось зайвих точок перетину. Слід пам’ятати, якщо прямі не перетинаються в межах малюнка, то це ще не означає, що вони не перетинаються взагалі. Після побудови варто зменшити розмір зображення і зробити необхідні виправлення, якщо це потрібно.

З малюнку видно, що побудовані прямі задовольняють умові, учням залишилось правильно підрахувати кількість відрізків, які утворились під час такої побудови (Рис.2.33).

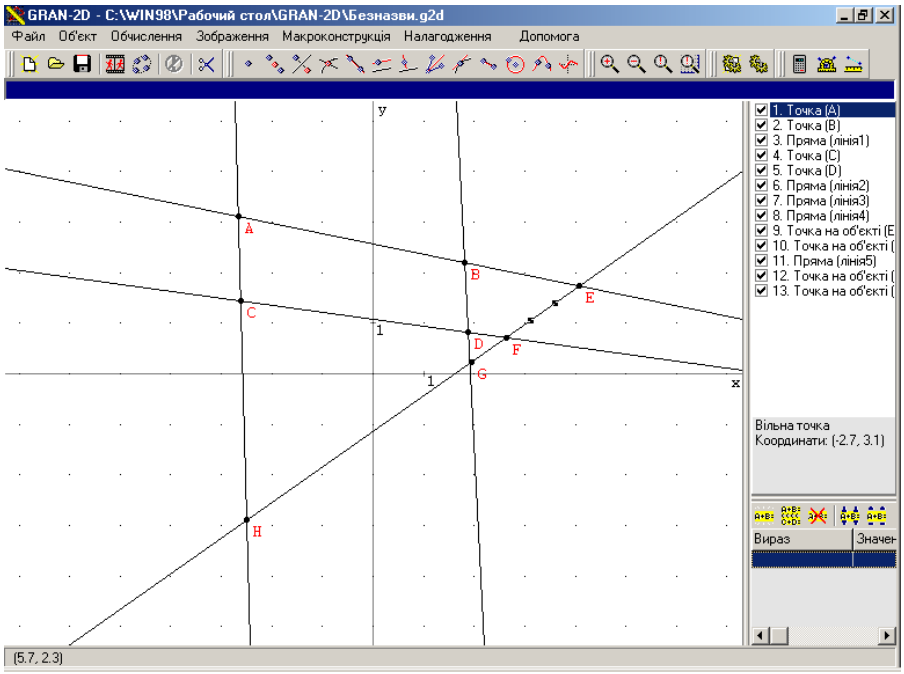


Рис. 2.33. Вигляд екрану під час розв’язування задачі 5

Учнів дуже приваблює комп’ютер, вони завжди із задоволенням працюють, тим більше, що програмний засіб GRAN 2D не вимагає глибоких знань щодо його використання [188].

Проведення експериментів у середовищі “GRAN” може сприяти вихованню в учнів математичної та геометричної інтуїції, оскільки реалізовані можливості програми дозволяють швидко відстежувати “тупикові” кроки в розв’язуванні, бачити вигідні, перспективні шляхи.

Коли комп’ютер стає інструментом пізнання, то його використання допомагає учням посилити розумові здібності, покращити свою пам’ять та здатність розв’язувати проблеми.

У сучасних умовах класно-урочної системи педагогу-предметнику дуже важко зважати на індивідуальні відмінності дітей, тому йому на допомогу методисти рекомендують програмно-інструментальні комп’ютерні засоби з відповідною дидактичною підтримкою. Можливість індивідуального

“озадачування” учнів дозволить вчителю дібрати саме ті задачі, які відповідають потрібному рівню знань і є для кожного учня творчими.

Спостерігаючи за діяльністю школярів, учитель може адекватніше оцінити кожного учня.

Стає можливим ураховувати індивідуально-психологічні особливості пам’яті та мислення школярів, націлювати їх на найбільш повне засвоєння навчального матеріалу, створювати комфортні умови для індивідуалізованого навчання з метою забезпечення бажаного темпу роботи учнів над завданнями, привертання та підвищення уваги учнів під час роботи над складними завданнями, забезпечення повноцінного контролю та адекватного оцінювання навчальної діяльності школярів. Корисним є ще й те, що використання сучасних ІТ на уроках математики забезпечує інтеграцію двох наук: математики та інформатики.

Комп’ютер є також засобом, що містить в собі потенційні можливості інтеграції багатьох інших сфер застосувань, а інтеграція шкільних предметів, як відомо, відкриває широкі перспективи розвитку мислення, зокрема комбінаторного, розвиває інтелектуальну діяльність, стимулює інтелектуальну активність школярів [184].

Відомо, що міжпредметні зв’язки є одним із засобів забезпечення ефективності навчання. Комбінаторика набула свого інтенсивного розвитку завдяки появі ЕОМ. З’явилася можливість розв’язувати значно ширше коло комбінаторних задач методом перебору, що реалізується на ЕОМ. З цим матеріалом тісно пов’язані задачі оптимізації комбінаторного типу, які розвивають мислення учнів, спонукають до творчої діяльності, викликають зацікавленість математикою та інформатикою. Тому комбінаторні задачі певного типу доцільно розв’язувати на уроках інформатики.

Ми розглянули кілька задач комбінаторного характеру спочатку на уроках математики, а потім їх учні розв’язували на уроках інформатики за допомогою комп’ютера. Наприклад, в 9 класі з поглибленими навчанням математики ми розглянули таку задачу:

Приклад 1. Знайти факторіал заданого цілого числа n.

Спочатку з учнями з'ясовується, як вони розуміють поняття факторіала, дев'ятикласники наводять приклади задач, де розв'язання зводиться до знаходження факторіала. Потім переходять до написання програми.

```
Program factorial;
Var a, n,b: integer;
begin
    writeln ('введіть задане число');
    readln (n);
    b:=1;
    for a:=1 to n do
    b: = b*a;
    writeln ('n! = ',b);
end.
```

Деякі учні, правильно розробивши алгоритм розв'язання даної задачі, допускають розповсюджену помилку, використовують для змінної, яка підраховує факторіал числа, тип integer. У результаті програма, яка не сповіщає на етапі компіляції про помилки, видає після виконання правильний результат лише при малих значеннях n, а при більших значеннях у відповіді з'являється деяке від'ємне число. Частина учнів намагається просто проігнорувати знак мінус, інша частина звертається за допомогою до вчителя, будучи не в силах самостійно виявити помилку в програмі. Лише невелика кількість учнів сама здогадується, що правильна відповідь просто виходить за допустимий діапазон типу integer (-32768 - +32767). Заміна типу integer на тип longint дозволяє отримати правильну відповідь задачі.

Отже, комбінаторне мислення учнів 9-х класів, якщо вони вивчають інформатику 2 чи 3 роки, можна успішно розвивати засобами інформатики, для цього вчитель повинен привчати учнів робити аналіз задачі, учитись самостійно знаходити й виправляти помилки, а також проводити повне тестування програми. Дуже ефективними для розвитку комбінаторного мислення є підбір

задач, які призводять до виникнення проблемних ситуацій, але вони повинні використовуватись після засвоєння простіших завдань.

Надаючи учням можливість досліджувати та експериментувати за допомогою комп'ютерних програм, вчителю обов'язково слід контролювати їхню діяльність, спостерігаючи за ходом їхніх міркувань, побудов, обчислень. Необхідно слідкувати за тим, щоб дослідження учнів не відхилялися значно від меж, що охоплюють поле діяльності із поставленою задачею; щоб учні свої зусилля спрямовували не занадто далеко в хибних напрямках, або виникне так зване перевизначення задачі, або значно відхилившись від правильного шляху розв'язування та обравши тупиковий шлях, учні втратять цікавість до задачі, а можливо взагалі до предмета.

У контролюванні навчальної діяльності учнів вчителю може допомогти використання сучасної комп'ютерної, проекційної відеотехніки та мережевого обладнання. Використовуючи мережеві технології, функції контролю можна урізноманітнити та зробити цікавими для учнів. Це можна здійснити, наприклад, надаючи одним учням завдання виконати якесь обчислення, побудувати рисунок до задачі чи вдало виконати допоміжні побудови, а іншим – проконтролювати правильність виконання цього завдання.

Для учнів 8-9 класів з поглибленим вивченням математики було розроблено навчально-контролюючу програму на мові DELPHY. Інтерфейс програми являє собою вікна, що учні звикли бачити на екрані комп'ютера. Внизу кожного вікна є підказка, яку клавішу треба натиснути для виконання свого вибору.

Програма містить історичну довідку, теоретичні відомості про основні комбінаторні поняття та блок з контрольними тестовими завданнями (Рис.2.34). Учень за своїм бажанням вибирає в меню, з чого йому почати ознайомлення з програмою: з історичних відомостей, з повторення основних означень та формул, з прикладів розв'язування комбінаторних задач або одразу приступити до контролю своїх знань і умінь.

Теоретичний блок побудовано так, що учень у будь-який момент може повернутися до попередньої інформації або пропустити деякі блоки, що йому вже знайомі.

Контрольний блок містить 10 тестових завдань, розташованих за рівнем складності та рекомендації щодо їх виконання. Кожне завдання має три варіанти відповіді та оцінюється певною кількістю балів. Після виконання всіх 10 запитань висвітлюється вікно з оцінкою та коментарем щодо знань учня. Наприклад, рисунок 2.34.

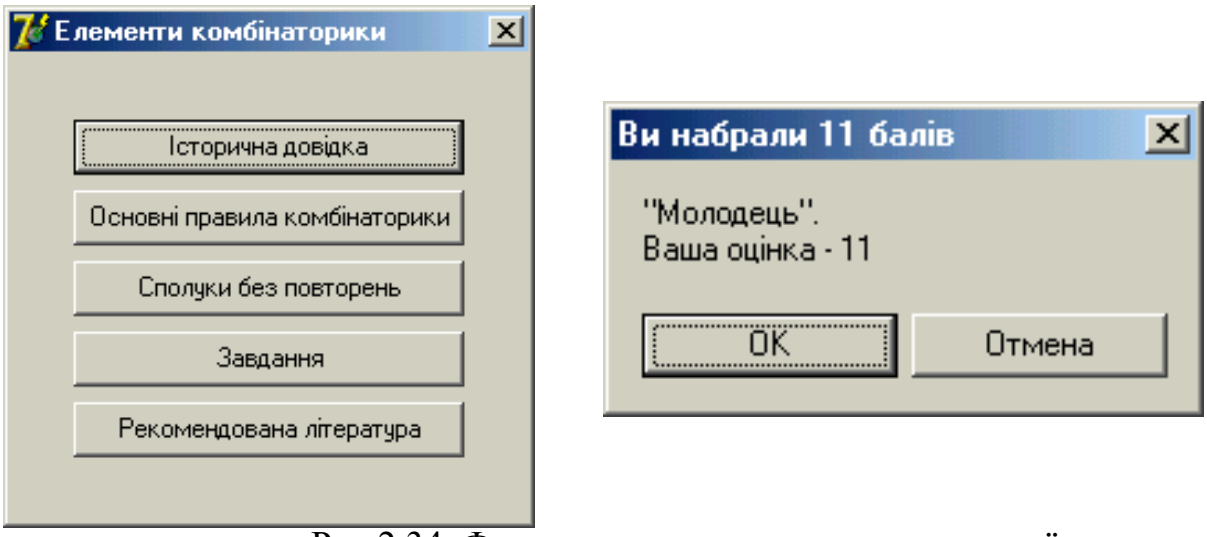


Рис.2.34. Фрагменти навчально-контролюючої програми

Після отримання менше ніж 6 балів учневі пропонується повернутися до теорії, а потім спробувати ще раз.

Використання комп'ютера дозволяє якісно змінити контроль за діяльністю учнів, забезпечуючи при цьому гнучкість управління навчальним процесом. Працюючи з групою (класом), педагог не в змозі перевірити правильність розв'язання усіх задач, що виконали всі учні. Проте, як відомо, вчасно не виправлені помилки закріплюють неправильні уявлення учнів про галузь знань, що вони засвоюють. А здолати ці уявлення з часом зовсім не легко. Використання ж комп'ютера дозволяє перевірити всі відповіді, причому часто самими учнями, і в багатьох випадках не лише зафіксувати помилку, але й досить точно визначити її характер, що допомагає вчасно усунути причину, яка обумовила появу помилки.

Різноманіття форм та видів навчальних програмних продуктів епізодичність у поєднанні з традиційними та некомп'ютеризованими евристичними прийомами і методами навчання за умови доцільного використання сприяють наповненню шкільної математики дійовими дидактичними засобами, збагаченню інтелектуальної, комунікативної сфер особистості учнів. Це, у свою чергу, якісно збагатить структуру та зміст шкільного навчання з математики, вдосконалить методику її навчання, покращить результати засвоєння та в подальшому використанні значно наблизить момент досягнення освітньої мети.

2.5. Організація, проведення і результати педагогічного експерименту

Створення, дослідження, уточнення, корекція та перевірка ефективності запропонованої методичної системи формування комбінаторних знань та вмінь у процесі вивчення математики в основній школі здійснювалися нами в процесі проведення педагогічного експерименту.

Мета експерименту полягала в перевірці ефективності розробленої методичної системи навчання комбінаторики учнів основної школи. У зв'язку з цим потрібно було розв'язати наступні завдання:

1. Дібрати контрольні та експериментальні групи таким чином, щоб на момент проведення експерименту вони мали майже однаковий рівень успішності.

2. Розробити експериментальні матеріали, які б сприяли перевірці гіпотези дослідження.

3. Провести кількісний і якісний аналіз результатів педагогічного експерименту.

Педагогічний експеримент проходив у три етапи:

1) констатувальний етап експерименту (1999-2002);

2) пошуковий етап експерименту (2002-2003);

3) формувальний етап експерименту (2003-2004).

На першому етапі аналізувалися психолого-педагогічна та методична література з проблеми дослідження та стан сучасної математичної освіти в школі, виявлявся рівень володіння загальними підходами до розв’язування комбінаторних задач учнями основної школи, розроблялася пробна система задач комбінаторного характеру. У ході констатувального етапу експерименту нами застосовувалися обсерваційні методи педагогічного дослідження (спостереження) та діагностичні методи (анкетування, тестування). На цьому етапі було визначено необхідні теоретичні положення, сформульовано гіпотезу і завдання дослідження.

З метою вивчення практичного досвіду формування комбінаторних знань та вмінь в учнів початкової школи здійснювалися цілеспрямовані спостереження: обговорювались уроки, зміст яких був пов’язаний з досліджуваною проблемою, проводились бесіди, анкетування завучів, учителів, студентів-практикантів. У ході анкетування близько 50 респондентів з’ясувалося, що 78% розглядають з учнями комбінаторні задачі рідко, розв’язують їх як задачі на “кмітливість”, 10% намагаються робити це систематично, решта зовсім не розглядають задачі комбінаторного характеру. В останньому випадку однією з основних причин учителі найчастіше називають дефіцит навчального часу. Але майже всі вчителі, які опитувались, висловлювали думку про необхідність систематичного та послідовного формування певних комбінаторних знань та вмінь в учнів, починаючи з молодшого шкільного віку за допомогою вправ та задач.

В учнів 5-7 класів у ході констатувального етапу експерименту перевірялося:

- формування в процесі навчання спрямованості на пошук різних розв'язань задачі, тобто на розвиток варіативності мислення;

- вміння організовувати перебір обмеженого кола можливостей та знайти їх усі, тобто проводити комбінаторні міркування.

Така перевірка проводилась з учнями 5–7 класів, у ній брали участь 218 учнів.

Сформованість якості варіативності мислення виявлялася за допомогою роботи 1.

Робота 1.

1. Хлопчик отримав здачу чотирма монетами. Напишіть, які це були монети, якщо йому дали 40 копійок.

2. У магазині продавалися блокноти за 80 копійок, лінійки за 50 копійок, стрижні для ручок за 20 копійок, олівці за 30 копійок. Що можна купити на 1 гривню?

3. Намалюйте 9 квадратів, розмістивши їх у три ряди так, щоб у кожному наступному було більше квадратів, ніж у попередньому.

4. На аркуші поставте 4 точки. Проведіть усі відрізки, кінцями яких є ці точки. Скільки трикутників отримаємо?

5. Переставте букви ЛКОСО так, щоб можна було прочитати слово.

В усіх задачах передбачається кілька відповідей, але вказівок на їх знаходження не дається. Таким чином, перевіряється спрямованість розумової діяльності учнів на пошук різних розв'язань, тобто варіативність мислення.

Як видно з таблиці 2.11, 30,3% учнів, що виконали роботу, не навели більше одного варіанту розв'язання в жодній задачі. Решта учнів дають кілька варіантів тільки в одній задачі (10,5% всіх учнів).

Використовуючи вибірковий метод, можна розповсюдити отриманий результат на всю сукупність учнів, що навчаються у 5-7 класах. Оцінимо ймовірність виникнення робіт, у яких в жодному завданні не наведено більше одного варіанту розв'язання. Замінимо відсоткове відношення (30,3%) простим відношенням (0,303). Це відношення є частотою h = 0,303. Для оцінки ймовірності знайдемо абсолютну похибку ε для 95% рівня вірогідності за формулою $\varepsilon = 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96\frac{\sqrt{D}}{\sqrt{n}} = 1{,}96\frac{\sqrt{h(1-h)}}{\sqrt{n}}$, де h – частота дії, n - обсяг вибірки.

$\varepsilon = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}303(1-0{,}303)}{218}} \approx 0{,}06$. Отримуємо вірогідні межі для ймовірності: 0,30 – 0,06 = 0,24 та 0,30+0,06 = 0,36. Таким чином, ймовірність, що цікавить нас, буде знаходитися в інтервалі (0,24; 0,36) [175, с.230].

Таблиця 2.11

Результати перевірки варіативності мислення учнів 5-7 класів

		Номери завдань							
		1	2	3	4	5	%		
Наведено кілька варіантів	у п’яти завданнях						7,3	7,3	
	у чотирьох завданнях	+ + +	+ + +	+ +	 + +	+ +	3,7 3,7 0,5	7,9	69,7
	у трьох завданнях	+ +	+ +		 + +	+ + +	7,3 3,7 4,1	15,1	
	у двох завданнях	 + +	+ + +	 + +	 +	+ + + +	3,7 6,4 1,4 5,5 0,9 11	28,9	
	в одному завданні	 +	 + 	 +	 + 	+ 	3,2 0,9 4,6 0,9 0,9	10,5	
У всіх завданнях один варіант									30,3

Можна зробити висновок: у 95% випадках ймовірність виникнення робіт, у яких у жодному завданні не наведено більше одного варіанта розв’язання, міститься в інтервалі (0,24; 0,36). Інакше, від 24 до 36 робіт з кожних 100 не будуть містити в жодному завданні більше одного варіанта розв’язання. При цьому, якщо з сукупності всіх робіт учнів 5-7 класів скласти послідовність вибірок з 100 робіт, то даний висновок буде справедливий для 95% цих вибірок. Таким чином, отримані дані говорять про те, що часто учні 5-7 класів знаходять лише один варіант розв’язання, зупиняються на цьому, не намагаються знайти

інші можливі варіанти, тобто не можна сказати, що при вивченні математики у 5-7 класах завдання розвитку варіативності мислення розв'язується успішно.

Уміння учнів 5-7 класів проводити комбінаторні міркування перевірялося за допомогою роботи 2.

Робота 2.

1. У тебе є тільки синя, чорна і біла фарби. Як можна розфарбувати будинки, якщо покрівля, стіни та двері одного будинку мають бути різних кольорів. Намалюйте усі можливі варіанти.

2. Переставляючи тільки числа, складіть усі можливі вирази: 10 + 7 – 8.

3. Скільки всього існує чотирицифрових чисел, у запису яких є дві одиниці та дві трійки? Запишіть усі такі числа.

4. Запишіть усі двоцифрові числа, які можна скласти з цифр 2, 9, 4, 7.

5. Розставляючи знаки "+" та "-" між даними числами, складіть усі можливі вирази: 8 2 4 1.

6. У магазині є чотири види тістечок: безе, горіхове, шоколадне, бісквітне. Хлопчик купив два тістечка. Якими вони можуть бути?

7. Складіть усі трицифрові числа, у яких на місці сотень можуть бути цифри 5 або 6, на місці десятків – 3 або 1, а на місці одиниць – 0 або 4.

Результати розв'язання задач оцінюються за показниками повноти та правильності. Повнота виконання означає, що знайдено всі можливі розв'язки. Про правильність виконання можна говорити, якщо розв'язок відповідає умовам і не має повторень.

Указані показники враховуються одночасно. Таким чином, передбачається 4 різні результати. Задача комбінаторного характеру може бути розв'язана:

1) повно і правильно;

2) повно, але неправильно (наприклад, серед усіх можливих варіантів є ті, що повторюються);

3) неповно, але правильно (знайдено не всі можливі варіанти);

4) неповно і неправильно.

Результати виконання учнями роботи №2 наведено у таблиці 2.12. Як видно з таблиці, кількість учнів, що розв'язали задачі повно і правильно, змінюється від 19% до 59% у залежності від складності задачі. Поширюючи способом, що був описаний вище, отримані дані на всю сукупність учнів, що навчаються у 5-7 класах, отримаємо, що ймовірність виникнення повних і правильних відповідей у більш простих випадках (№3) буде знаходитися в інтервалі (0,59 – 0,07; 0,59 + 0,07), у більш складних випадках (№5) – в інтервалі (0,19 – 0,05; 0,19 + 0,05). Таким чином, значна кількість учнів 5-7 класів у процесі розв'язування задач комбінаторного характеру не може знайти всі можливі варіанти.

Таблиця 2.12

Результати виконання роботи 2

Номери задач	Кількість учнів (%), що розв'язали задачу				Кількість учнів (%), що використовували системний перебір
	1)	2)	3)	4)	
1	52	37	5	6	15
2	40	52	2	6	21
3	59	32	4	5	30
4	42	40	3	15	22
5	19	59	4	18	6
6	36	34	17	13	18
7	37	29	7	27	24

У процесі аналізу підсумків виконання учнями роботи зверталася увага також на процес знаходження розв'язків задачі. З'ясовувалося, чи використовують учні раціональні прийоми організації своєї діяльності. Системний перебір, на відміну від хаотичного, дозволяє знаходити розв'язання швидко, не пропускаючи жодного і не повторюючи двічі однакові варіанти. Тому системність перебору може бути показником уміння учнів діяти раціонально.

При аналізі робіт було виявлено три можливості здійснення учнями перебору:

1) перебір здійснюється в певній системі, учень складає єдиний, цілісний план перебору;

2) хаотичний перебір;

3) перебір, при якому для складання тільки частини об'єктів використовується певна система (наприклад, розв'язання задачі №4 виконується так: 29, 47, 79, 72, 24, 27, 22, 77, 44, 99, 92, 94, 97), або система, що вибирається, не охоплює всі можливі варіанти.

Застосування системного перебору учнями залежить від характеру задачі, що розв'язується. Кількість учнів, що здійснюють перебір у певній системі, змінюється від 6% до 30% у різних задачах. Те, що в більшості випадків у процесі розв'язування задач учні діють хаотично, можна пояснити тим, що в простих випадках вони не бачать необхідності в системному переборі (задача №1), а в складних задачах (№5) не можуть самостійно скласти, знайти систему перебору.

Таким чином, констатувальний етап експерименту показав, що учні 5-7 класів, хоча не володіють умінням проводити комбінаторні міркування, охоче розв'язують комбінаторні здачі. Виявлено також, що в них не сформовано спрямованість на пошук різних варіантів розв'язків задач, тобто варіативність мислення.

На констатувальному етапі в класах з поглибленим вивченням математики аналізувався досвід роботи вчителів з формування комбінаторних знань та вмінь розв'язувати відповідні задачі. У ході бесід з учителями з'ясувалося, що більшість учителів переносять вивчення комбінаторики з 8 класу до 9, або з 8 та 9 до 11 класу. Аналіз результатів проведення констатувального етапу педагогічного експерименту дозволив зробити висновок про невисокий рівень сформованості в учнів комбінаторних понять, про наявність у них труднощів під час розв'язування задач комбінаторного характеру (див. § 1.2).

На другому етапі відбувався пошук методів і форм, традиційних і сучасних засобів навчання, що сприяють формуванню комбінаторних знань та вмінь в учнів через систему задач і вправ відповідного характеру, а також проводилась робота з відбору задач, на матеріалі яких доцільно формувати в

учнів комбінаторні уміння та розвивати комбінаторне мислення. У зазначений період було проаналізовано отримані результати, внесено необхідні корективи, уточнено побудову і зміст окремих компонентів методики. У той же час проводилося коригування гіпотези і моделі навчального процесу з урахуванням специфіки навчального матеріалу та психологічних особливостей учнів основної школи. Неодноразово уточнювалися методичні рекомендації щодо впровадження системи задач комбінаторного характеру і методики її використання для формування основних комбінаторних знань та вмінь в учнів основної школи в практичну діяльність. З'ясувалося, що система задач не дає очікуваного результату, оскільки зайвий час витрачається на читання умови, на її запис та оформлення, але ергономіка розв'язання дозволяє розглядати ці задачі на уроках математики. Тому було розроблено зошити з друкованою основою [23; 24]. З метою удосконалення пропонованої методики здійснювалося спостереження за динамікою успішності та якості підготовки учнів, за формуванням у них позитивних мотивів навчання. У результаті пошукового етапу експерименту були розроблені, відібрані й експериментальні матеріали.

На третьому етапі проводився масовий педагогічний експеримент. Його мета полягала в перевірці справедливості сформульованої гіпотези. Проводилась реалізація розроблених системи задач комбінаторно характеру і методики її виконання для формування основних комбінаторних знань та вмінь в учнів 5-9 класів основної школи шляхом тривалого спостереження за їх діяльністю на уроках математики, анкетування вчителів і учнів, індивідуальних бесід з ними, аналіз відповідних занять. Однак провідними були результати виконання письмової роботи, запропонованої нами в середині навчального року і традиційної підсумкової контрольної роботи наприкінці року.

Для участі в експерименті було залучено 814 учнів, у тому числі 172 – 5-х, 182 - 6-х, 174 – 7-х, 142 – 8-х, 144 – 9-х. Навчання в експериментальних класах проводилося за спеціально складеним робочим зошитом, до кожного розділу якого дібрано систему вправ, наведено список використаної літератури.

Нами були виділені такі однорідні вибірки експериментальних та контрольних класів для проведення формувального етапу експерименту.

Таблиця 2.13

Розподіл учнів за класами експериментальних і контрольних класів

Класи	5-ті	6-ті	7-мі	8-мі з поглибленим навчанням математики	9-ті з поглибленим навчанням математики	Усього учнів
ЕК	86	92	87	73	70	408
КК	86	90	87	69	74	406
Усього	172	182	174	142	144	814

Письмова робота для учнів 5-7 класів включала 5 задач. Максимальна кількість балів за кожну розв'язану задачу була така: перша –1 б, друга – 2б, третя – 2 б, четверта – 2 б, п'ята – 3 б. Сумарна максимальна кількість балів 10. Критерії виставлення балів наступні:

"+" – задача розв'язана правильно, повно;

"$\overset{+}{-}$" - розв'язання задачі правильне, але містить окремі недоліки;

"$\overset{-}{+}$" – часткове розв'язання задачі;

"-" – задача розв'язана неправильно або учень не приступав до розв'язування.

Відповідно до цих критеріїв виставлялися бали (табл. 2.14). Такий підхід давав змогу розподілити учнів за рівнями сформованості комбінаторних знань та вмінь (табл. 2.15).

Таблиця 2.14

Нараховані бали за відповідними критеріями

Критерії / № задачі	+	$\overset{+}{-}$	$\overset{-}{+}$	-
1	1	0	0	0
2	2	1	0	0
3	2	1	0	0
4	2	1	0	0
5	3	2	1	0

Таблиця 2.15

Розподіл за рівнями сформованості комбінаторних знань та вмінь у відповідності кількості набраних балів

Рівень сформованості комбінаторних знань та вмінь	Низький	Середній	Високий
Кількість набраних балів (К)	К < 5	К < 9	К ≥ 9

Розподіл учнів експериментальних і контрольних класів за рівнями сформованості комбінаторних знань та вмінь, здійснений на основі результатів виконання запропонованої нами письмової роботи, представлений в таблицях 2.16-2.18.

Таблиця 2.16

Розподіл учнів за рівнями сформованості комбінаторних знань та вмінь в експериментальних і контрольних 5-х класах

Класи	Н	С	В
ЕК (86 учнів)	17	46	23
КК (86 учнів)	29	41	16

Таблиця 2.17

Розподіл учнів за рівнями сформованості комбінаторних знань та вмінь в експериментальних і контрольних 6-х класах

Класи	Н	С	В
ЕК (92 учня)	21	46	24
КК (90 учнів)	36	38	17

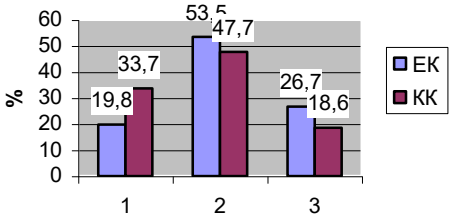
Таблиця 2.18

Розподіл учнів за рівнями сформованості комбінаторних знань та вмінь в експериментальних і контрольних 7-х класах

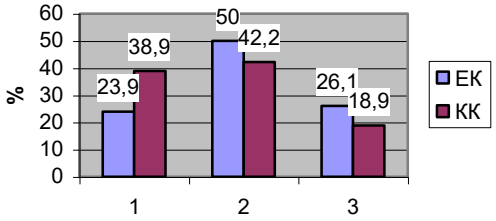
Класи	Н	С	В
ЕК (87 учнів)	22	43	22
КК (87 учнів)	31	40	16

За даними таблиць 2.18 – 2.29 можна зробити висновок, що кількісні показники рівня сформованості комбінаторних знань та вмінь в учнів експериментальних класів вищі, ніж в учнів контрольних, що відображено на відповідних діаграмах (Рис.2.35).

5 клас



6 клас



7 клас

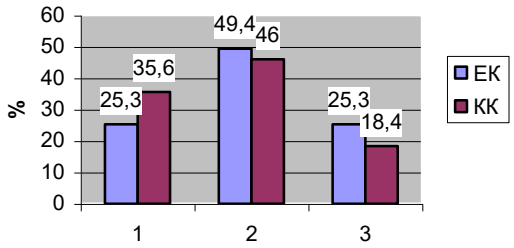


Рис. 2.35. Кількісні показники сформованості комбінаторних знань та вмінь в учнів експериментальних і контрольних 5-7 класів (%)

Наприкінці навчального року в експериментальних і контрольних класах було проведено традиційну підсумкову роботу. Результати її виконання наведені в таблиці 2.19-2.21.

Таблиця 2.19

Результати підсумкової роботи у 5-х класах

Класи	Рівні навчальних досягнень				% успішності	% якості
	Н-С		Д	В		
	0-3 балів	4-6 балів	7-9 балів	10-12 балів		
ЕК n_1=86	7	22	41	16	91,8	66,2
КК n_2=86	12	30	35	9	86	51,2

Таблиця 2.20

Результати підсумкової роботи у 6-х класах

Класи	Рівні навчальних досягнень				% успішності	% якості
	Н-С		Д	В		
	0-3 балів	4-6 балів	7-9 балів	10-12 балів		
ЕК n_1=92	9	28	43	12	90,2	59,7
КК n_2=90	13	31	38	8	85,5	51,1

Таблиця 2.21

Результати підсумкової роботи у 7-х класах

Класи	Рівні навчальних досягнень				% успішності	% якості
	Н-С		Д	В		
	0-3 балів	4-6 балів	7-9 балів	10-12 балів		
ЕК n_1=87	10	31	35	11	88,5	52,8
КК n_2=87	13	35	31	8	85	44,8

За даними таблиць можна зробити висновок, що кількісні показники рівня знань та вмінь з математики в учнів експериментальних класів вище, ніж у контрольних.

У нашому дослідженні вибірки є випадковими і незалежними з однаковим розподілом учнів за успішністю навчання на початку експерименту, крім того, шкалою вимірювання є шкала найменувань з трьома категоріями: 0-6 балів – 1 категорія, 7-9 балів – 2 категорія, 10-12 балів – 3 категорія. Тому можна застосувати критерій Пірсона χ^2 [67, с.96-106]. При цьому висуваємо нульову гіпотезу H_0 про відсутність впливу запропонованої системи вправ і задач комбінаторного характеру та методики її використання на рівень знань і вмінь з математики учнів 5-7 класів, а відмінність результатів, що спостерігаються, вважаємо випадковими. Нульову гіпотезу перевіряємо за допомогою критерію.

$$T = \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{i=1}^{3} \frac{(n_1 O_{2i} - n_2 O_{1i})^2}{O_{1i} + O_{2i}}, \text{ де}$$

n_1, n_2 – обсяги вибірок контрольних і експериментальних класів;

O_{11}, O_{21} – відповідно кількість учнів експериментальних і контрольних класів, які написали підсумкову контрольну роботу на 0-6 балів;

O_{12}, O_{22} – відповідно кількість учнів експериментальних і контрольних класів, які написали підсумкову контрольну роботу на 7-9 балів;

O_{13}, O_{23} - відповідно кількість учнів експериментальних і контрольних класів, які написали підсумкову контрольну роботу на 10-12 балів.

Тоді значення статистики критерію χ^2 дорівнює $T_{ст} \approx 7{,}1$. За таблицею χ^2 -критерію для рівня значущості $\alpha = 0{,}95$ з одним ступенем вільності визначаємо критичне значення статистики $T_{кр} = 5{,}99$. Маємо $T_{ст} > T_{кр}$, що є основою для відхилення нульової гіпотези і прийняття альтернативної про вплив розробленої системи вправ і задач комбінаторного характеру та запропонованої методики її використання на рівень знань і вмінь з математики учнів 5-7 класів.

На третьому етапі у 8-х та 9-х експериментальних класах з поглибленим вивченням математики вивчення теми “Елементи теорії множин. Комбінаторика” проводилось за розробленою методикою з використанням зошитів з друкованою основою.

Після вивчення теми “Елементи теорії множини. Комбінаторика” було проведено традиційну тематичну контрольну роботу, результати якої у таблицях 2.22 та 2.23. Мета цих робіт – перевірити рівень розуміння та глибину засвоєння матеріалу.

Таблиця 2.22

Результати контрольної роботи у 8-х класах з поглибленим вивченням математики

Класи	Рівні навчальних досягнень				% успішності	% якості
	Н-С		Д	В		
	0-3 балів	4-6 балів	7-9 балів	10-12 балів		
ЕК n_1=73	4	7	48	14	94,5	84,9
КК n_2=69	5	9	45	10	92,7	79,7

Таблиця 2.23

Результати контрольної роботи у 9-х класах з поглибленим вивченням математики

Класи	Рівні навчальних досягнень				% успішності	% якості
	Н-С		Д	В		
	0-3 балів	4-6 балів	7-9 балів	10-12 балів		
ЕК n_1=70	4	9	45	12	94,3	81,4
КК n_2=74	7	14	43	10	90,5	71,6

За даними таблиць 2.22 і 2.23 можна зробити висновок, що кількісні показники рівня сформованості комбінаторних знань та вмінь в учнів експериментальних класів вищі, ніж в учнів контрольних.

Упровадження системи комбінаторних задач у практику навчання дозволило нам одержати такі результати: поглиблення й посилення мотивації до занять з математики, посилення інтересу до неї як до навчальної дисципліни, успішності виконання контрольних робіт з математики.

У ході спостереження і бесід з учнями експериментальних і контрольних класів з'ясувалося, що учні експериментальних класів у порівнянні з учнями контрольних класів:

- успішніше розв'язують нестандартні задачі, позитивно реагують на підвищення рівня їх складності, на додаткові завдання, частіше звертаються до літературних джерел, більш охоче і вільно вступають в дискусію;

- активніше працюють на уроках, успішніше роблять домашні завдання;

- більш охоче зіставляють різні способи розв'язування задач, шукають раціональніший варіант, придумують свої задачі, запитання до вчителя, як правило, більш змістовні;

- більш охоче працюють з додатковими джерелами, беруть участь у конкурсах.

Дослідження носило багатоцільовий характер. Поряд із з'ясуванням ефективності розробленої системи задач комбінаторного характеру та методики її використання ставилося за мету вивчити думку педагогічної громадськості про доцільність та доступність системи вправ для формування основних комбінаторних знань та вмінь.

Учителям та студентам-практикантам була запропонована анкета, зміст якої наведено у додатку Г. Респондентам пропонувалося дати відповідь на запитання у відсотковій формі, виходячи з таких міркувань: 0% - відповідно відповіді "ні", 100% - відповідно відповіді "так". Анкетуванням було охоплено близько 90 респондентів експерименту. Середнє значення результатів анкетування наведено в тому ж додатку.

Більшість учителів вважають, що система вправ та задач комбінаторного характеру позитивно вплинула на підвищення рівня знань учнів. Схвальні відповіді опитуваних свідчать про доцільність формування комбінаторних знань та вмінь з молодшого шкільного віку.

Таким чином, пізнавальні мотиви (як широкі, так і навчально-пізнавальні, мотиви самоосвіти) змінюються в позитивному напрямку в процесі навчання, якщо воно в достатній мірі насичене елементами творчості, у даному випадку елементами комбінаторики. На мотивацію навчання і його результати не може не впливати позитивно спільний пошук істини.

Висновки до другого розділу

Своєчасна пропедевтика формування основних комбінаторних знань та вмінь, яку можна почати вже в початковій школі, створює реальні передумови для виховання таких рис мислення, як варіативність, критичність, послідовність, гнучкість з перших років навчання в школі.

Основною особливістю формування комбінаторних знань та вмінь у 1-7 класах є те, що в процесі ознайомлення з ними домінують індуктивні міркування, в основному, наочно-інтуїтивного рівня із залученням практичного досвіду учнів і прикладів довкілля. Це можливо завдяки спеціально дібраній системі вправ комбінаторного характеру, що за змістом пов’язані з навчальним матеріалом. Бажано такий підхід продовжити застосовувати й для формування комбінаторних знань та вмінь учнів 8-9 класів масової школи.

Система комбінаторних задач має бути розробленою у відповідності з дидактичними принципами та з урахуванням особливостей процесу формування комбінаторних знань та вмінь, зв’язків комбінаторних задач із змістом навчального матеріалу шкільного курсу математики, прикладної спрямованості комбінаторних задач, зацікавленості та наочності комбінаторних задач, розвитку в учнів самостійності та творчих здібностей і диференційованого підходу до навчання.

Методика формування комбінаторних знань та вмінь на І етапі будується з урахуванням психологічних особливостей дітей молодшого шкільного віку і спрямовується на розвиток комбінаторного мислення. Навчання характеризується етапністю: від хаотичного перебору до системного без застосування наочних засобів перебору та з їх допомогою. Велика увага приділяється самостійному "відкриттю" учнями способів дій.

Робота, що проводиться на ІІ етапі формування комбінаторних знань та вмінь, є продовженням пропедевтичної діяльності, розпочатої в початковій школі. Система комбінаторних задач відповідає тим самим умовам, але відрізняється такими властивостями: підвищується сюжетна різноманітність задач, множини складаються з більшої кількості елементів, використовуються наочні засоби перебору, правила додавання і множення. Учні в певному обсязі ознайомлюються із змістом понять, але не застосовують відповідні терміни.

Оскільки чинні підручники не містять певного набору комбінаторних задач, то враховуючи дефіцит навчального часу, включення нових мовних конструкцій та схематичних засобів, ергономічні особливості комбінаторних задач, доцільно використовувати зошити з друкованою основою. Опрацьовуючи завдання таких робочих зошитів, можна засвоїти математичну мову, її символічний і схематичний записи, ознайомитися з основними поняттями теорії множини і комбінаторики, набути певних комбінаторних умінь та навичок. Зошити можна використовувати як на уроках математики, так і дома для самостійного розв'язування. Розв'язувати задачі слід послідовно і систематично, протягом усього терміну навчання в 5-7 класах масової основної школи.

З метою економії навчального часу для учнів 8-ого класу з поглибленим вивченням математики (ІІІ етап) також доцільно використовувати робочі зошити з друкованою основою, які допомагають оволодіти основними поняттями комбінаторики в 8 класі, повторити й систематизувати свої знання з цього розділу на початку 9 класу і тим самим краще підготуватись до

подальшого її вивчення. Систему вправ і задач слід структурувати за рівнями складності.

Ефективність формування комбінаторних знань та вмінь підвищується за рахунок доцільного використання ППЗ з метою унаочнення навчального матеріалу на основі наочно-інтуїтивних уявлень; інтерпретації теорії; при перевірці засвоєння понять на рівні “розпізнавання”; сприяння самостійному “відкриттю” важливих властивостей; забезпечення експериментування; проведення дослідження самими учнями; прискорення перевірки правильності висунутих гіпотез.

ВИСНОВКИ

1. Створення нової концепції математичної освіти 12-річної школи, Державного стандарту базової та повної середньої освіти в освітній галузі “Математика” сприяє реалізації переконливо доведених вченими можливості, доцільності і доступності включення надзвичайно корисної для розвитку мислення та адаптивних якостей особистості комбінаторної змістової лінії в зміст шкільної математичної освіти.

2. Процес швидкої комп’ютеризації суспільства, розвиток інформаційних мереж різного рівня і призначення, перехід до ринкових відносин в економіці, на виробництві обумовлюють потребу сформованості гнучкості, варіативності, критичності мислення, здатності висувати гіпотези перебігу подій та реальності її підтвердження. Ці якості продуктивно розвиваються у процесі розв’язування комбінаторних задач. Саме тому виникає необхідність включення комбінаторних знань та вмінь в інтелектуальний багаж сучасної людини.

3. У 1-9 класах існує реальна можливість забезпечити органічний зв’язок комбінаторної пропедевтики з арифметичним, алгебраїчним і геометричним матеріалом. Задачний матеріал чинних підручників доцільно доповнити комбінаторними задачами. Основною особливістю формування комбінаторних знань та вмінь в учнів основної школи є те, що у процесі ознайомлення з ними домінують індуктивні міркування із залученням практичного досвіду учнів і прикладів довкілля. Це можливо завдяки спеціально дібраній системі вправ комбінаторного характеру, що за змістом пов’язані з навчальним матеріалом.

Доцільно дібрана система комбінаторних задач дає змогу активізувати розумову діяльність учнів, зрозуміти, які питання оточуючої дійсності, практики, життя приводять до постановки математичних задач. Учні набувають навичок і вмінь будувати та інтерпретувати математичні моделі різного типу, співвідносити математичні методи з практичними потребами на кожному з етапів навчання. Це переконує їх у необхідності й практичній користі навчального матеріалу; а також у тому, що математичні абстракції виникають із задач, поставлених реальною дійсністю.

4. Розвиток комбінаторного мислення відбувається в процесі активної розумової діяльності учнів у напрямку пошуку різних способів перелічування об’єктів дослідження. Основними його характеристиками є: організація цілеспрямованого перебору певним чином обмеженого кола можливостей; універсальність (незалежність від конкретного математичного матеріалу; гнучкість – зміна внутрішнього плану дій як у процесі пошуку розв’язання задачі, так і в процесі розв’язування). Комбінаторне мислення спирається на критерії вибіркового пошуку, дає змогу вирішувати складні, невизначені проблемні ситуації; дозволяє перебирати різноманітні стратегії та обирати найкращий напрямок розв’язування проблеми. Спеціальний фактор, що відповідає здатності “мислити в різних напрямках” називають “дивергентним мисленням”. З дивергентністю в наш час пов’язуються буквально всі прояви творчості. Цей стиль мислення можна виховувати в школі, починаючи з молодшого шкільного віку.

5. Розвиткові комбінаторного мислення в учнів основної школи сприяють: забезпечення інтуїтивної основи курсу, яка передбачає збагачення досвіду учнів щодо математичних закономірностей за допомогою залучення їх до спостережень з використанням матеріальних і знакових моделей, комп’ютерних експериментів; формування в них потреби ознайомлюватись з додатковою літературою; орієнтації учнів на самостійну роботу; створення сприятливого мікроклімату для творчої співпраці; організація та забезпечення продуктивної роботи учнів в гомогенних і гетерогенних групах, парами, індивідуально і колективно; забезпечення “математичного” спілкування не тільки на уроці, а і в позаурочний час, яке може відбуватися у формі взаємоконсультацій, поточних заліків, математичних вечорів, КВК, математичних боїв і т. ін.; систематичне проведення роботи з розв’язаною задачею для навчання ставити і вирішувати нові проблеми, повернення учнів до аналізу власних дій, що допомогли віднайти ідею розв’язання проблеми.

6. Процес вивчення комбінаторики характеризується етапністю: побудова та використання різних наочних комбінаторних моделей відповідно до змісту

задачі; уведення основних понять комбінаторики, вивчення правил додавання і множення; вивчення основних формул комбінаторики та використання їх до розв'язування задач різних рівнів складності, а також наявним рівнем пізнавальних потреб. Відповідно до цих умов має моделюватись динаміка та методичні особливості формування комбінаторних знань та вмінь на кожному етапі. Для творчого самовираження і розвитку комбінаторного мислення потрібні не просто задачі з невідомим учню способом розв'язування, а саме ті, які відповідають його пізнавальним потребам.

7. Система задач комбінаторного характеру є основним дидактичним засобом навчання і будується на дидактичних принципах з урахуванням: особливостей процесу формування комбінаторних знань та вмінь на різних етапах, відповідності комбінаторних задач матеріалу шкільного курсу математики, що вивчається, наочності комбінаторних задач, диференційованого підходу в навчанні, прикладної спрямованості комбінаторних задач, здійснення порівняння та встановлення зв'язків між комбінаторними поняттями, розвитку в учнів самостійності та творчих здібностей, комплексного і доцільно виправданого залучення традиційних і сучасних засобів навчання. Систему задач слід будувати на базі так званої "неформальної" комбінаторики, способи якої складають основні пошукові стратегії, а саме – хаотичний перебір, систематичний перебір без застосування наочних засобів перебору та з їх допомогою, графи, комбінаторні правила множення і додавання.

8. Враховуючи ергономічні особливості комбінаторних задач, ефективність схематичних засобів їх розв'язування доцільно використовувати зошити з друкованою основою. Опрацьовування завдань такого робочого зошиту сприятиме засвоєнню математичної мови, її символічного і схематичного записів, розвитку мислення, ознайомленню з основними поняттями теорії множин і комбінаторики. Необхідний матеріал з теорії у вигляді схем доцільно включати до кожного з параграфів, задачі кожного типу подавати зі зразками розв'язання. Домашнє завдання й запитання для самоконтролю, подані після кожного параграфа, сприятимуть систематизації та

узагальненню знань. Зошит можна використовувати як на уроках математики, так і дома для самостійного розв’язання. Недоцільно одразу розв’язувати велику кількість задач, слід це робити послідовно і систематично, протягом усього терміну навчання в 5-11 класах масової основної школи.

9. Робочий зошит для учнів 8-ого класу з поглибленим вивченням математики сприятиме засвоєнню основних понять комбінаторики, повторенню й систематизуванню знань учнів з цього розділу на початку 9 класу. Систему вправ і задач слід структурувати за рівнями складності. Вивчення основних понять комбінаторики “розміщення” і “комбінації” здійснювати з використанням методу паралельного зіставлення і протиставлення.

10. Використання у процесі розв’язування комбінаторних задач програмного забезпечення сприяє вихованню інтуїції, розвитку евристичного мислення, фантазії, елементарних дослідницьких навичок. Доцільними для використання під час формування комбінаторних знань та вмінь в основній школі виявилися програми серії GRAN.

11. Розроблена система вправ і задач комбінаторного характеру та експериментально перевірена ефективність методики її використання для формування основних комбінаторних знань та вмінь в учнів основної школи.

12. Подальшого дослідження вимагає розвиток методичної системи навчання учнів комбінаторики в напрямі більш повної реалізації цієї змістової лінії як наскрізної.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Айгнер М. Комбинаторная теория / Пер. с англ. В.В. Ермакова, В.М. Лямина; Под ред. Г.П. Гаврилова. – М.: Мир, 1982. – 558 с.

2. Алгебра: Учеб. пособие для IX–X кл. сред. шк. с мат. специализацией / Н.Я. Виленкин, Р.С. Гутер, С.И. Шварцбурд и др. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1972. – 302 с.

3. Алгебра и начала анализа: Учеб. пособие для 9 кл. сред. шк. / Под ред. А.Н. Колмогорова. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1975. – 221с.

4. Алгебра и математический анализ для учащихся 11 кл.: Пособие для учащихся шк. и кл. с углубл. изучением математики / Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд. – М.: Просвещение, 1993. – 288 с.

5. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 11 кл. з поглибл. вивч. математики в серед. закл. освіти / М.І. Шкіль, Т.В. Колесник, Т.М. Хмара. – К.: Освіта, 2001. – 311с.

6. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М.І. Шкіль, З.І. Слєпкань, О.С. Дубинчук. – К.: Зодіак-ЕКО, 2002.–384с.

7. Антонова Н.П. Познавательная деятельность детей 6-7 лет. – М.: Прометей, 1991. – 124 с.

8. Бабенко В.В., Війтович Г.К., Холявко Я.М. Математика – 5: Пробн. підруч. для загальноосвіт. навч. закл. – К.: Зодіак-Еко, 2005. – 352 с.

9. Бевз В.Г. Методические основы построения системы стереометрических упражнений: Дис. … канд. пед. наук: 13.00.02. – К., 1989. – 173 с.

10. Бевз Г.П. Методика викладання математики: Навч. посіб. – 3-тє вид., перероб. і доп. – К.: Вища шк., 1989. – 367 с.

11. Бевз Г.П. Про зміст шкільної математики // Математика в шк. України. – Х., 2003. – №28. – С.1–5.

12. Бевз Г.П., Бевз В.Г. Математика: Підруч. для 5 кл. загальноосвіт. навч. закл. – К.: Зодіак-ЕКО, 2005. – 352 с.

13. Белокурова О.В. Обучение младших школьников проведению комбинаторных рассуждений: Автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Моск. гос. ун-т. – М., 1991. – 19 с.

14. Беляева И.С. Комбинаторный подход и его применение в преподавании математики в восьмилетней школе: Автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Ярослав. гос. пед. ин-т им. К.Д. Ушинского. – Ярославль, 1971. – 19 с.

15. Берж К. Теория графов и ее применение: Пер. с фр. / Под ред. И.А. Вайнштейна – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 319 с.

16. Бертранж Ж., Буренин К. Алгебра для гимназий и реальных училищ. – СПб., 1896. – 673 с.

17. Беспалько В.П. Программированное обучение. – М.: Высш. шк., 1970. – 300 с.

18. Блох А.Я. Изучение дискретной математики в школе // Математика в шк. – 1977. – №6. – С. 64–68.

19. Богоявленская Д.Б. Пути к творчеству. – М.: Знание, 1981. – 96 с.

20. Богоявленский Д.Н., Менчинская Н.А. Психология усвоения знаний в школе. – М. АПН РСФСР, 1959. – 347 с.

21. Божко В.Г. Елементи комбінаторики у 8 класі // Математика в шк. – К., 2003. – №8. – С. 37-43; 2003. – №9. – С. 33-36.

22. Божко В.Г. Елементи теорії множин. Комбінаторика (7-9 кл.) // Математика в шк. – К., 2004. – № 6. – С. 26-28.

23. Божко В.Г., Хмара Т.М. Задачі з комбінаторики: Зошит з друкованою основою для учнів 5–7 кл. серед. загальноосвіт. закл. – Луганськ, 2004. – 24 с.

24. Божко В.Г., Хмара Т.М. Елементи комбінаторики: Робочий зошит для учнів 8-х кл. з поглибл. вивченням математики. – Луганськ, 2004. – 50 с.

25. Болтянский В.Г., Груденов Я.И. Как учить поиску решения задач // Математика в шк. – 1988. – № 1. – С.8-15.

26. Боровик В.Н. До вивчення розділу “Елементи комбінаторики” в курсі “Алгебра і початки аналізу” // Математика в шк. – К., 2000. – № 3. – С. 13–15; 2000. – № 4. – С. 15–19.

27. Брадис В.М. Методика преподавания математики в средней школе: Учеб. пособие для пед. ин-тов и гос. ун-тов. / Под ред. А.И. Маркушевича. – 3-е изд. – М.: Учпедгиз, 1954. – 503 с.

28. Бродський Я.С. Комбінаторика без формул; знайомство з імовірністю і статистикою. – Х.: Вид. група «Основа», 2004. – 103 с.

29. Бродський Я.С. Про вивчення елементів комбінаторики, імовірності, статистики в школі // Математика в шк. України. – Х., 2004. – №35. – С.6–10; 2004. – №36. – С. 15–17.

30. Бродський Я.С., Павлов О.Л. Про введення ймовірнісно-статистичної змістової лінії в шкільний курс математики // Математика в шк. – К., 2000. – № 4. – С. 4–6.

31. Бродський Я.С., Павлов О.Л. Шляхи реформування шкільної математичної освіти // Математика в шк. України. – Х., 2003. – №26. – С. 2–6; 2003. – №27. – С.2–6.

32. Бронштейн С.Р. Методика алгебри: Посібник для вищих пед. шк. – К.: Рад. шк., 1939. – 489 с.

33. Брушлинский А.В. Субъект, мышление, учение, воображение: Избр. психол. тр. – 2-е изд., испр. – М.: МПСИ; Воронеж: МОДЭК, 2003. – 408 с.

34. Брушлинский А.В. Мышление и прогнозирование. – М.: Мысль, 1979. – 230 с.

35. Бэм Д.А., Волков А.А., Струве Р.Э. Сборник упражнений и задач по элементарному курсу алгебры. Ч.2. (Курс старших кл. сред. учеб. заведений). – М.: Типография т-ва Н.Д. Сытина, 1915. – 331 с.

36. Ващенко Л.І. Задачі на біном Ньютона // Математика в шк. – К., 2002. – № 4. – С. 18–20; 2003. – № 1. – С. 14–18.

37. Вейц Б.Е., Демидов И.Т. Алгебра и начала анализа: Проб. учеб. 9 кл. / Под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 1969. – 264 с.

38. Вікова психологія / За ред. Г.С.Костюка. – К.: Рад. шк., 1976. – 270 с.

39. Виленкин Н.Я. Индукция. Комбинаторика: Пособие для учителя. – М.: Просвещение, 1976. – 48 с.

40. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. – М.: Наука, 1969. – 328 с.

41. Виленкин Н.Я. Популярная комбинаторика. – М.: Наука, 1975. – 208с.

42. Виленкин Н.Я. Рассказы о множествах. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Наука, 1969. – 128 с.

43. Виленкин Н.Я. Современные проблемы школьного курса математики и их исторические аспекты // Математика в шк. – 1988. – №4. – С. 7–14.

44. Вишенський В. Комбінаторні задачі, пов’язані з конфігураціями прямих на площині // Математика в шк. – К., 2000. – №2. – С. 42–46.

45. Войналович Н.М. Елементи дискретної математики в професіональній підготовці вчителя: Дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02. – Кіровоград, 2000. – 204 с.

46. Войшвилло Е.К. Понятие. – М.: Изд-во МГУ, 1967. – 305 с.

47. Волков Ю.І., Войналович Н.М. Елементи дискретної математики: Навч. посіб. – Кіровоград: РВГ ІЦ КДПУ ім. В. Винниченка, 1999. – 178 с.

48. Возрастные возможности усвоения знаний: Мл. классы школы / Под ред. Д.Б. Эльконина, В.В. Давидова. – М.: Просвещение, 1966. – 442 с.

49. Возрастные и индивидуальные особенности младших подростков / Под ред. Д.Б. Эльконина, Г.В. Драгуновой. – М.: Просвещение, 1969. – 264 с.

50. Возрастные и индивидуальные особенности образного мышления учащихся / Под ред. И.С. Якиманской. – М.: Педагогика, 1989. – 224 с.

51. Возрастная и педагогическая психология: Учебник для студентов пед. ин-тов / В.В. Давидов, Т.В. Драгунова, Л.Б. Ительсон и др; Под ред. А.В. Петровского. – 2-е изд., испр. и доп. - М.: Просвещение, 1979. – 288 с.

52. Волгина В.Ф. Графовые модели в методике преподавания математики: Автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / НИИ содержания и методов обучения АПН СССР. – М., 1976. – 24 с.

53. Волгина В.Ф. Изучение комбинаторики на графах // Математика в шк. – 1977. – №1. – С.73-76.

54. Воропай В.С. Математика в трудовій школі. – К.: Укрдержвидав, 1923. – 59с.

55. Выготский Л.С. Воображение и творчество в детском возрасте. – СПб.: Союз, 1997. – 94 с.

56. Выготский Л.С. Избранные психологические исследования. Мышление и речь. Проблемы психологического развития ребенка. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1956. – 519 с.

57. Гальперин П.Я. Психология мышления и учение о поэтапном формировании умственных действий. – М.: Изд-во МГУ, 1965. – 516 с.

58. Гальперин П.Я. Развитие исследований по формированию умственных действий // Психологическая наука в СССР. – М.: Просвещение, 1959. – Т.1. – 599 с.

59. Ганчев Ю. Новые элементы в обучении математике в начальной школе Болгарии // Математика в шк. – 1976. – № 1. – С.91-94.

60. Гильбух Ю.З. Темперамент и познавательные способности школьника: Психология, диагностика, педагогика: Пер. с укр. – К.: Ин-т психологии АПН Украины, 1993. – 272 с.

61. Гельфанд М.Б. Формування математичних понять у процесі викладання алгебри і початків аналізу. – К.: Рад. шк., 1976. – 143 с.

62. Гнеденко Б.В. Статистическое мышление и школьное математическое образование // Математика в шк. – 1968. – № 1. – С.8–15.

63. Гнеденко Б.В., Журбенко И.Г. Теория вероятностей и комбинаторика // Математика в шк. – 1968. – № 2. – С. 72–84; 1968. – № 3. – С. 30–49.

64. Головина Л.И. Графы и их приложения // Математика в шк. – 1965. – №3. – С. 4–5.

65. Горчакова І.А. Система математичних задач як засіб формування евристичної діяльності учнів основної школи: Дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02. – К., 2002. – 226с.

66. Граве Д. Начало алгебры: Классное руководство для гимназий и других средних учебных заведений. – П., 1915. – 316 с.

67. Грабарь М.И. Применение математической статистики в педагогических исследованиях: Непараметрические методы / М.И. Грабарь, К.А. Краснянская; НИИ содержания и методов обучения АПН СССР. – М.: Педагогика, 1977. – 136 с.

68. Гришина Т. Структурно-методичний аналіз тем курсу математики // Освітян. слово. – 1997. – Листопад. – С.5.

69. Груденов Я.И. Изучение определений, аксиом, теорем: Пособие для учителя. – М.: Просвещение, 1981. – 95 с.

70. Груденов Я.И. Психолого-дидактические основы методики обучения математике. – М.: Педагогика, 1987. – 158 с.

71. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1990. – 223 с.

72. Гуманізація процесу навчання в школі: Навч. посібник / За ред. С.П.Бондар. – 2-е вид., доп. – К.: Стилос, 2001. – 256 с.

73. Давыдов В.В. Виды обобщений в обучении (логико-психологические проблемы построения учебных предметов). – М.: Педагогика, 1972. – 424 с.

74. Давыдов В.В. О понятии развивающего обучения: Сб. ст. – Томск: Пеленг, 1995. – 144 с.

75. Демакова И.Д., Жамкочьян М.С. Социально-педагогические проблемы использования ЭВМ в школе //Теоретические проблемы использования ЭВМ в школе. – М.: АПН СССР, 1991. – С. 4–19.

76. Державний стандарт базової і повної середньої освіти в Україні: Освітня галузь “Математика” // Освіта України. – 2004. – 20 січ. (№5). – С.7–8.

77. Дидактика средней школы: Некоторые проблемы современной дидактики. Учеб. пособие для пед. ин-тов / Под ред. М.А. Данилова, М.Н. Скаткина. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1982. – 319 с.

78. Дограшвили А.Я. Формирование у учащихся умений и навыков решения комбинаторно-вероятностных задач при обучении математике в 8-летней школе: Автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Тбилис. гос. пед. ин.-т им. А.С. Пушкина. – Тбилиси, 1979. – 31 с.

79. Дополнительные главы по курсу математики 10 класса для факультативных занятий: Пособие для учащихся. Сб. ст. / Сост. З.А. Скопец. – М.: Просвещение, 1970. – 256 с.

80. Дубинчук О.С., Мальований Ю.І., Дичек Н.П. Методика викладання алгебри в 7-9 класах: Посіб. для вчителя. – К.: Рад. шк., 1991. – 254 с.

81. Елементи комбінаторики і теорії ймовірностей для учнів фізико-математичного ліцею / Упоряд. Л.І. Ващенко. – К.: ВЦ «Київ. ун-т», 1999. – 20 с.

82. Елементи теорії множин в курсі математики 4 класу: Метод. лист. – К.: Рад. шк., 1972. – 47 с.

83. Елементи теорії множин в курсі математики 5 класу: Метод. лист. – К.: Рад. шк., 1973. – 52 с.

84. Ершов А.П. Человек и машина. – М.: Знание, 1988. – 32 с.

85. Єжов І.І., Скороход А.В., Ядренко М.Й. Елементи комбінаторики.– К.: Вища шк., 1977. – 84 с.

86. Жалдак М.І. Комп’ютер на уроках математики: Посіб. для вчителів. – К.: Техніка, 1997. – 304 с.

87. Ігнатенко М.Я. Методологічні та методичні основи активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів старших класів при вивченні математики: Автореф. дис. … докт. пед наук: 13.00.02. / КПІ ім. М.П. Драгоманова – К., 1997. – 45 с.

88. Ігнатенко М.Я. Активізація навчально-пізнавальної діяльності учнів старших класів при вивченні математики. – К.: Тираж,1997. – 299 с.

89. Істер О.С. Комбінаторика, біном Ньютона та теорія ймовірностей у школі. – К.: Факт, 1997. – 184 с.

90. Избранные вопросы математики: 9 класс. Факультатив. курс / Сост. О.А.Боковнев, В.В.Фирсов, С.И.Шварцбурд. – М.: Просвещение, 1979. – 191 с.

91. Кабанова-Меллер Е.Н. Формирование приемов умственной деятельности и умственное развитие учащихся. – М.: Просвещение, 1968. – 288с.

92. Кабанова-Меллер Е.Н. Учебная деятельность и развивающее обучение. – М.: Знание, 1981. – 160 с.

93. Кабехова Л.М. Методика построения единого курса «Начала теории вероятности с элементами комбинаторики» для 9 класса средней школы: Дис. … канд. пед. наук: 13.00.02. – Л., 1971. – 330 с.

94. Калмыкова З.И. Продуктивное мышление как основа обучаемости. – М.: Педагогика, 1981. – 200 с.

95. Калмыкова З.И. Психологические принципы развивающего обучения. – М.: Знание, 1979. – 48 с.

96. Кисельов А.П. Алгебра Ч.ІІ: Підруч. для серед. шк. 8-9 кл. – Х.; К.: Рад. шк., 1934. – 170 с.

97. Кисельов А.П. Алгебра Ч. ІІ: Підруч. для серед. шк. – К.: Рад. шк., 1966. – 264 с.

98. Колмогоров А.М. Введение в теорию вероятностей и комбинаторику // Математика в шк. – 1968. – №2. – С.63–72.

99. Колмогоров А.М. Современная математика и математика в современной школе // Математика в шк. – 1971. – №6. – С.2–3.

100. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике. В 2 ч. – М.: Просвещение, 1977. – Ч.1. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. – 110 с.

101. Колягин Ю.М. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся средней школы: Автореф. дис. … докт. пед. наук: 13.00.02 // НИИ содержания и методов обучения АПН СССР. – М., 1977. – 55 с.

102. Кон И.С. Психология ранней юности: Кн. для учителя. – М.: Просвещение. – 1989. – 255 с.

103. Кондаков Н.И. Логический словарь. – М.: Наука, 1971. – 638 с.

104. Концепція середньої загальної освіти (12-річна школа) // Інформ. зб. М-ва освіти і науки України. – 2002. – № 2. – С.2-22.

105. Концепція математичної освіти 12-річної школи: Проект // Математика в шк. – К., 2002. – № 2. – С.12–17.

106. Кочетков Е.С., Кочеткова Е.С. Алгебра и начала анализа, 9 класс: Проб. учеб. – М.: Просвещение, 1969. – 277 с.

107. Крутецкий В.А. Психология: Учеб. для пед. училищ. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1986. – 336 с.

108. Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьников. – М.: Просвещение, 1968. – 431 с.

109. Курсанов Г.А. Диалектический материализм о понятии. – М.: Изд-во ВПИИ и АОН, 1983. – 384 с.

110. Кухар В.М. та ін. Множини. Логіка. Цілі числа. Практикум: Навч. посіб. для вузів. – К.: Вища шк., 1989. – 231 с.

111. Лебединцев К.Ф. Алгебра для трудової школи або самонавчання. – Ч.2. – К., 1925. –117 с.

112. Лейтес Н.С. Возрастная одаренность школьников: Учеб. пособие для вузов. – М.: Академия. – 2000. – 320 с.

113. Леонтьев А.Н., Гальперин П.Я. Теория усвоения знаний и программированное обучение // Сов. психология. – 1964. – № 10. – С. 56–65.

114. Лернер Н.Я. Дидактические основы методов обучения. – М.: Педагогика, 1981. – 186 с.

115. Липкина А.М., Рыбак Л.А. Критичность и самооценка в учебной деятельности. – М.: Просвещение, 1968. – 142 с.

116. Магкаев В.Х. Экспериментальное изучение планирующей функции мышления в младшем школьном возрасте // Вопр. психологии. – 1974. – №5. – С. 98–106.

117. Маланюк М., Кравчук В. Метод математичної індукції та елементи комбінаторики / За ред. В. Тадєєва. – 2-е вид. – Т.: Підруч. і посіб., 2003. – 48 с.

118. Малинин А., Буренин К. Руководство алгебры и собрание алгебраических задач для гимназий, реальных училищ и учительских институтов. – М., 1890. – 415 с.

119. Маркова А.К., Матис Т.А., Орлов А.Б. Формирование мотивации учения: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1990. – 192 с.

120. Маркова А.К., Орлов А.Б., Фридман Л.М. Мотивация учения и ее воспитание у школьников. – М.: Педагогика, 1983. – 65 с.

121. Маркушевич О.И. К вопросу о реформе школьного курса математики // Математика в шк. – 1964. – № 6. – С. 7.

122. Математика: Посіб. для факультатив. занять у 10 кл. / За ред. В.А. Зморовича. – К.: Рад. шк., 1972. – 192 с.

123. Математика: Посібник для факультатив. занять у 10 кл. / За ред. проф. І.Є. Шиманського. Розд. 1. – К.: Рад. шк., 1970. – 295 с.

124. Математика: Проб. підруч. для 5 кл. серед. загальноосвіт. шк. / Т.В. Місюра, І.Т. Зарецька, М.В. Владимирова. – Х.: Факт, 2004. – 255 с.

125. Математика – 5: Підруч. для 5 кл. / За ред. Г.М. Янченко. – Т.: Піруч. і посіб. – 2002. – 272 с.

126. Математика – 5: Учеб. для общеобразоват. заведений / Под ред. Г.В. Дорофеева, И.Ф. Шарыгина. – М.: Дрофа, 1995. – 416 с.

127. Математика – 6: Учеб. для общеобразоват. заведений / Под ред. Г.В. Дорофеева, И.Ф. Шарыгина. – 4-е изд. – М.: Дрофа, 1996. – 415 с.

128. Математическая энциклопедия: В 5 т. / Под ред. И.М. Виноградова. – М.: Сов. энциклоп., 1979. – Т.2. – 2000 с.

129. Махмутов М.И. Организация проблемного обучения в школе. – М.: Просвещение, 1965. – 224 с.

130. Махмутов М.И. Современный урок. – 2-е изд. – М.: Педагогика, 1985. – 183 с.

131. Мацьоха О.М. Розвиток розумових здібностей учнів засобами інформатики // Комп’ютер у шк. та сім'ї. – К., 2003. – №8. – С. 19–21.

132. Медведева О.С. Решение задач комбинаторного характера как средство развития мышления: Автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Моск. гос. пед. ун-т. им. В.И. Ленина. – М., 1990. – 15 с.

133. Менчинская Н.А. Мышление в процессе обучения: Исслед. мышления в советской психологии. – М.: Наука, 1966. – 496 с.

134. Менчинская Н.А. Проблемы обучения, воспитания и психологического развития ребенка. – М.: МПСИ; Воронеж: МОДЭК, 2004. – 512 с.

135. Менчинская Н.А. Психология усвоения понятий // Известия АПН РСФСР, 1950. – Вып.28. – С.3– 16.

136. Мерзляк А.К., Полонський В.Б., Якір М.С. Математика 5: Підруч. для 5 кл. – Х.: Гімназія, 2005. – 288 с.

137. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / В.А. Оганесян, Ю.М. Колягин, Г.Л. Лукашин, В.Я. Саннинский. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Просвещение, 1980. – 368 с.

138. Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики: Учеб. пособие для физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Ю.М. Колягин, Г.Л. Лукашин, Е.М. Мокрушин и др. – М.: Просвещение, 1977. – 480 с.

139. Методика преподавания математики. Общая методика / Сост.: Р.С. Черкасов, А.А. Столяр. – М.: Просвещение, 1985. – 336 с.

140. Моляко В.А. Психология решения школьниками творческих задач. – К.: Рад. шк., 1983. – 95 с.

141. Моляко В.А. Психология творческой деятельности. – К.: О-во "Знание УССР". – 1978. – 77 с.

142. Морзе Н.В. Система методичної підготовки майбутніх учителів інформатики в педагогічних університетах: Автореф. дис. … д-ра. пед наук: 13.00.02 // КНПУ ім. М.П. Драгоманова. – К., 2003. – 39 с.

143. Немов Р.С. Психология: Учеб. для студ. высш. учеб. заведений: В 3 кн. – Кн. 2. Психология образования. – 2-е изд. – М.: Просвещение: ВЛАДОС, 1995. – 496 с.

144. Нешков К.И. и др. Множества. Отношения. Числа. Величины / К.И. Нешков, А.Н. Пышкало, В.Н. Рудницкая. – М.: Просвещение, 1978. – 63 с.

145. Нешков К.И., Семушин А.Д. Функции задач в обучении // Математика в шк. – 1971. – №3. – С. 4–7.

146. Онищук В.А. Типы, структура и методика урока в школе. – К.: Рад. шк., 1976. – 184 с.

147. Онищук В.А. Урок в современной школе. – М.: Просвещение, 1986. – 160 с.

148. Оре О. Графы и их применение / Пер. с англ. Л.И. Головиной; Под ред. И.М. Яглома. – М.: Мир, 1965. – 174 с.

149. Осинская В.Н. Активизация познавательной деятельности учащихся на уроках математики в 9-10 классах. – К.: Рад. шк., 1980. – 143 с.

150. Осинская В.Н. Формирование умственной культуры учащихся в процессе обучения математике: Кн. для учителя. – К.: Рад. шк., 1989. – 188 с.

151. Особенности обучения и психического развития школьников 13-17 лет / Под ред. И.В. Дубровиной, Б.С. Кругловой. – М.: Педагогика, 1988. – 192с.

152. Паппи Ф., Паппи Ж. Дети и графы. Обучение детей шестилетнего возраста математическим понятиям: Пер. с фр. – М.: Педагогика, 1974. – 192 с.

153. Педагогіка / За ред М.Д.Ярмаченка. – К.: Вища шк., 1986. – 544 с.

154. Перестюк М., Вишенський В. Роль комбінаторних задач у шкільному курсі математики // Математика в шк. – К., 1999. – № 3. – С. 16–18.

155. Пиаже Ж. Преподавание математики: Пер. с фр. – М.: Просвещение, 1960. – 135 с.

156. Пиаже Ж. Избранные психологические труды: Психология интеллекта, генезис числа у ребенка, логика и психология. – М.: Междунар. пед. академия, 1994. – 680 с.

157. Плоцки А. Стохастические задачи и прикладная направленность в обучении математике // Математика в шк. – 1991. – № 3. – С.69–71.

158. Пойа Д. Математическое открытие: Решение задач, основные понятия, изучение и преподавание / Пер. с англ. В.С. Бермана; Под ред. И.М. Яглома. – 2-е изд. – М.: Наука, 1976. – 448 с.

159. Пойа Д. Как решать задачу. Пособие для учителей / Пер.с англ. В.Г. Звонаревой и Д.Н. Белла; Под ред. Ю.М. Гайдука. – 2-е изд., испр. – М.: Учпедгиз, 1961. – 207 с.

160. Программы семилетней единой трудовой школы. – М.:ГИЗ, 1921. – 359с.

161. Программы средней школы: Математика V-X кл. – К.: Рад. шк., 1949. – 32 с.

162. Программы по математике для 5-11 классов средней общеобразовательной школы. – К.: Рад. шк., 1989. – 88 с.

163. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5-11 кл. / В. Бевз та ін.; Голов. упр. змісту освіти АПН України – К.: Шк. світ, 2001. – 110 с.

164. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. Навчальні програми для професійного навчання. Програми факультативів, спецкурсів, гуртків: Математика / М-во освіти і науки України. Упр. змісту освіти. Наук-метод. центр серед. освіти. – К.: Навч. кн. – 2003. – 203 с.

165. Пустовойтов В. Елементи теорії множин у школі // Математика в шк. – К., 2001. – №3. – С.2-4; 2002. – № 3. – С.14–17.

166. Развитие учащихся в процессе обучения (I–II кл.) / Под ред. Л.В. Занкова. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1963. – 151 с.

167. Райзер Г. Дж. Комбинаторная математика / Пер. с англ. К.А. Рыбникова. – М.: Мир, 1966. – 154 с.

168. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ / Пер. с англ. Л.Е. Садовского; Под ред. Л.Я. Куликова. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 287 с.

169. Рогановский Н.М. Методика преподавания математики в средней школе: Учеб. пособие для пед. ин-тов. по физ.-мат. спец. – Минск: Вышэйша шк., 1990. – 266 с.

170. Роменець В.А. Психологія творчості: Навч. посібник – 2-е вид., доп. – К.: Либідь, 2001. – 288с.

171. Рубинштейн С.Л. Основы общей психологии. – Спб.: Питер, 2001. – 702 с.

172. Рыбников К.А. Введение в комбинаторный анализ. – М.: Изд-во Моск. ун-та., 1972. – 255 с.

173. Рычик М.В. От наглядных образов к научным понятиям. – К.: Рад. шк., 1987. – 79 с.

174. Савченко О.Я. Дидактика початкової школи. – К.: Генеза, 1999. – 252 с.

175. Сборник задач по математике для втузов. Ч.3. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для втузов / Под ред. А.В. Ефимова. – 2-е изд., перераб и доп. – М.: Наука,. 1990. – 428 с.

176. Семенов Е.С. Актуализировать диалоги в преподавании // Математика в шк. – 1999. – № 2. – С. 21–23.

177. Сигорский В.П. Математический апарат инженера. – 2-е изд., стереотип. – К.: Техника, 1977. – 766 с.

178. Скафа О.І. Теоретико-методологічні основи формування прийомів евристичної діяльності в процесі вивчення математики в умовах впровадження сучасних технологій навчання: Автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / КНПУ ім. М.П. Драгоманова. – К., 2004. – 40 с.

179. Скафа Е.И Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология: Монография. – Донецк: Изд-во ДонГу, 2004. – 439 с.

180. Слєпкань З.І. Методика навчання математики. – К.: Зодіак–ЕКО, 2000. – 512 с.

181. Слепкань З.И. Психолого-педагогические основы обучения математике. – К.: Рад. шк., 1983. – 193 с.

182. Слєпкань З.І., Соколовська І.С. Методика вивчення елементів комбінаторики, початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в загальноосвітніх навчальних закладах. – К.: Перше вересня, 2004. – 112 с.

183. Слєпкань З.І, Грохольска А.В., Волянська О.Є. Збірник задач з алгебри і початків аналізу: Навч. посіб. для учнів 10-11 кл. загальноосвіт. навч. закл. – Т.: Підруч. і посіб., 2003. – 240 с.

184. Смалько О.Л. Розвиток творчого мислення старшокласників на уроках математики з використанням інформаційних технологій навчання: Автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Київ. нац. пед. ін-т ім. М.П. Драгоманова. – К., 1999. – 19с.

185. Столяренко Л.Д. Основы психологии. – 3-е изд., перераб. и доп. – Ростов н/Д.: Феникс, 1999. – 672 с.

186. Строгович М.С. Логика. – М.: Госполитиздат, 1949. – 75 с.

187. Сухотин А.К. Превратности научных идей. – М.: Мол. гвардия, 1991. – 272 с.

188. Сябро Т.М. Методика використання пакета GRAN 2D на уроках геометрії // Комп’ютер у шк. та сім’ї. – 2002. – № 5. – С. 27–29.

189. Тарасенкова Н.А. Використання знаково-символічних засобів у навчанні математики. – Черкаси: Відлуння-Плюс, 2002. – 400 с.

190. Тарасенкова Н.А. Теоретико-методологічні основи використання знаково-символьних засобів у навчанні математики учнів основної школи: Автореф. дис. ... д-ра. пед. наук: 13.00.02 / КНПУ ім. М.П. Драгоманова. – К, 2004. – 39 с.

191. Талызина Н.Ф. Теория планомерного формирования умственных действий сегодня // Вопр. психологии. – 1993. – №1. – С. 92–101.

192. Талызина Н.Ф. Управление процессом усвоения знаний. – 2-е изд., доп. и испр. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 344 с.

193. Талызина Н.Ф. Педагогическая психология: Учебник. – 3-е изд., стереотип. – М.: Академия, 2001. – 288 с.

194. Терлецька Л. Мислення школярів // Психолог. – 2002. – №20. – С. 2–3.

195. Тополя Л.В. Дидактичні ігри під час вивчення алгебри та геометрії в 7-9 класах: Автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / КНПУ ім. М.П. Драгоманова – К. – 2003. – 20с.

196. Третяк Т.М. Батькам про розв’язування творчих задач // Обдарована дитина. – К., 2001. – №7. – С.19–25.

197. Усова А.В. Формирование у школьников научных понятий в процессе обучения. – М.: Педагогика, 1986. – 176 с.

198. Фадеев Д.К., Никулин М.С., Соколовский У.Ф. Элементы высшей математики для школьников. – М.: Наука, 1987. – 336с.

199. Фіцула М.М. Педагогіка: Навч. посіб. для студ. вищ. пед. закл. освіти. – К.: ВЦ “Академія”, 2001. – 528 с.

200. Философский словарь. – 3-е изд. / Под ред. М.М. Розенталя. – М.: Политиздат, 1975. – 495 с.

201. Фридман Л.М. Наглядность и моделирование в обучении. – М.: Знание, 1984. – 80 с.

202. Фридман Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе: Учителю математики о пед. психологии. – М.: Просвещение, 1983. – 160 с.

203. Фридман Л.М. Кулагина И.Ю. Психологический справочник учителя. – М.: Просвещение, 1991. – 288 с.

204. Халамайзер А.Я. Комбинаторика и бином Ньютона: Пособие для учащихся 9-10 кл. – М.: Просвещение, 1980. – 32 с.

205. Халмош П.Р. Теория меры / Пер. с англ.. Д.А. Василькова; Под ред. С.В. Фомина. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – 291 с.

206. Харламов И.В. Педагогика: Учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1990. – 576 с.

207. Хинчин А.Я. Педагогические статьи / Под ред. Б.В. Гнеденко. – М.: Изд-во Акад. пед наук РСФСР, 1963. – 201 с.

208. Холл М. Комбинаторика / Пер. с англ. С.А. Широковой; Под ред. А.О. Гельфонда и В.Е. Тараканова. – М.: Мир, 1970. – 424 с.

209. Чепрасова Т.І. Підвищення практичної значущості результатів навчання інформатики в старших класах середньої школи в умовах НІТН: Автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / КНПУ ім. М.П. Драгоманова. – К, 1998. – 17 с.

210. Чошанов М.А. Анализ стандарта школьной математики в США // Математика в шк. – 2000. – № 2. – С.73–76.

211. Шардаков М.Н. Мышление школьника. – М.: Учпедгиз РСФСР, 1963. – 255 с.

212. Шихова А.П. Обучение комбинаторике и ее приложениям в средней школе. – Дис. … канд. пед. наук: 13.00.02. – М., 1978. – 252 с.

213. Шмигевський М. Навчання математики у Франції // Математика в шк. – К., 2001. – № 6. – С. 36–38.

214. Эльконин Д.Б. Избранные психологические труды. – М.: Педагогика, 1989. – 560 с.

215. Эльконин Д.Б. Психология развития: Учеб. пособие для вузов. – М.: Академия, 2001. – 144с.

216. Эрдниев Б.П. Методика упражнений по математике. – 2-е изд., доп. и перераб. – М.: Просвещение, 1970. – 319 с.

217. Эрдниев Б.П. Развитие творческого мышления учащихся при изучении математики. – Элиста, 1991. – 124 с.

218. Яглом И.М. О некоторых тенденциях в зарубежной методике математики // Математика в шк. – 1965. – № 4. – с.81–89.

219. Ядренко М.Й. Дискретна математика: Навч. посіб. – К.: Вид-во «Експрес», 2003. – 244 с.

220. Якиляшек В. Розвиток комбінаторних уявлень учнів 5-6 класів // Математика в шк. – 1999. – №3. – С. 18–21.

221. Якиманская И.С. Развивающее обучение. – М.: Педагогика, 1979. – 146с.

222. Brown R. Advanced Mathematics. Precalculus with Discrete Mathematics and data Analysis. – Boston: Houghton Mifflin company, 1992. – 837p.

223. Gutek G. Education and schooling in America. – 3-rd edition. – USA, 1992. – 445 p.

224. Martin M., Smart N. Modern mathematics for schools. – London: Scottish mathematics group, 1969 – 89 p.

225. Mathematik. Lahrbych fiir Klasse 11. Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin, 1980. – 288 c.

226. Skupescki J., Garbaj Z., Sawicki T. Arytmetika I algebra. – Warszawa: Panstwowe zaklady wydawnictw szkolnych, 1968. – 285 c.

227. Stewart J., Redlin L., Watson S. Mathematics for calculus. – California: Brooks/cole Publishing company, Pasific Grove, 1993. – 773 p.

228. Ziltan P. Diens. Mathematics in the primary school. – London–Bombay–Calcutta–Madras–Melbourne: Macmillian&CO LTD, 1984. – 257 p.

229. Zofia Krygowska. Zarus dydaktyki matematyki. Czesc 2. – Warszawa: Wydawnictwa szkolne I pedagogiczne, 1977. – 120 c.

ДОДАТКИ

Додаток А

Експериментальна система завдань для 1-4, 5-7, 8-9 класів

Для творчого самовираження і розвитку комбінаторного мислення потрібні не просто задачі, спосіб розв'язування яких невідомий учням, а саме ті, які відповідають їх пізнавальним потребам.

Дійсно, людину постійно оточує велика кількість явищ, і чим більше вона пізнає, тим ширше стає для неї коло невирішених питань. Але навіть великі діячі науки вибирали для своїх досліджень не будь-які проблеми, а лише ті, які особливо їх хвилювали, цілком захоплювали, змушували думати про них постійно.

В основу побудови системи задач комбінаторного характеру покладено дидактичні принципи, що визначають зміст і структуру задачного матеріалу з орієнтацією на підвищення рівня сформованості комбінаторного мислення. Обумовлюються вони основними закономірностями творчих процесів і навчання й підтверджуються практикою викладання.

1-4 класи

1. Розгляньте уважно малюнок. Скажіть, що змінюється від одного малюнка до іншого?

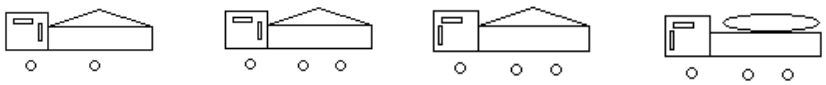


Рис. А.1. Ілюстративний матеріал до задачі 1

2. Які два числа при додаванні дають 8?

3. Розставляючи знаки "+" та " – " між даними числами 8, 3, 5, складіть всі можливі числові вирази і знайдіть їх значення.

4. Скільки двоцифрових чисел можна утворити з цифр 5 та 8?

5. Знайдіть суму можливими способами та підкресліть простіший з них:

а) 24 + 19 + 36 ; б) 15+ 27 + 85.

6. З трьох чисел 32, 29, 3, знака “=” та знаків арифметичних дій запишіть різні правильні рівності.

7. Скільки двоцифрових чисел можна утворити з цифр 2, 3, 0 (повторювати цифри можна)?

8. Утвори двоцифрові числа, використовуючи тільки цифри 0, 2, 5 і 7. У кожному числі цифри повинні бути різні. Всі числа записати у порядку від найменшого до більшого.

9. Із чисел 7, 10, 12, 15, 18, 23, 27, 30 знайди такі три числа, сума яких дорівнює 50.

10. Учень записав підряд усі числа від 1 до 100. Скільки разів йому довелося писати цифру 8?

11. Розстав цифри 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 і 9 по сторонах трикутника так, щоб їх сума на кожній стороні дорівнювала 20.

Вказівка: на одній стороні записано цифри 5, 2, 9 і 4.

12. Якими п’ятьма монетами можна набрати 80 копійок?

13. Хлопчик отримав решту чотирма монетами. Запишіть, що це були за монети, якщо йому дали 40 копійок.

14. Намалюйте 9 кіл, розташовуючи їх у три ряди так, щоб у кожному наступному було кіл більше, ніж у попередньому.

15. Скількома способами можна пройти з пункту А до пункту Е? Який шлях є найбільш раціональним (Рис. А.2)?

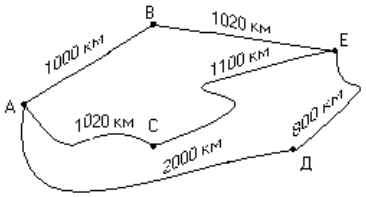


Рис. А.2. Схема доріг з пункту А до пункту Е

16. Скількома способами можна пройти з А до В (Рис.А.3)?

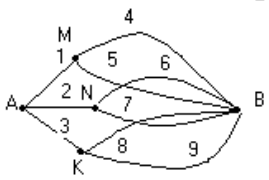


Рис. А.3. Схема доріг з пункту А до пункту В

17. Запишіть у потрібні клітинки таблиці числа: 99, 97, 89, 78.

д/од	9	8	7
9			
8			
7			

18. Фабрика іграшок виробляє мишок, мавп, білочок та зайченят. Кожну з цих іграшок роблять з плюшу та резини. Скільки різних видів іграшок виробляє фабрика? Заповніть таблицю (Рис. А.4).

	Ми	Ма	З	Б
П				
Р				

Рис. А.4. Таблиця до задачі 18

19. За допомогою таблиці (Рис. А.5) з'ясуйте, скільки різних двоцифрових чисел можна утворити з цифр 2, 5 та 9, щоб цифри в числі не повторювались?

Д/од	2	5	9
2			
5			
9			

Рис. А.5. Таблиця до задачі 19

20. Вибираючи попарно числа з множини {34, 42, 66}, запишіть всі можливі суми.

21. Запишіть у вигляді рівності різними способами речення:

а) число 2781 більше а на 782; б) число 2645 менше а на 395.

22. Напишіть усі трицифрові числа цифрами 5, 7 та 4 так, щоб у числі цифри не повторювались. Скільки їх?

23. Знайти суму всіх трицифрових чисел, які можуть бути записані цифрами 1, 0, 2 так, щоб усі цифри в кожному числі були різні.

24. Запиши всі трицифрові числа, використовуючи тільки цифри 0, 3 і 7. Повторювати цифри можна.

25. Використовуючи чотири рази цифру 5, знаки дій і дужки, запиши число 30.

26. Використовуючи шість разів цифру 3 і знаки дій та дужки, запиши число 100.

27. Дві дівчинки мали по 70 копійок. У кожної було по 4 монети. У першої дівчинки були такі монети: 25к., 25 к., 10 к., 10 к. Які монети були у другої дівчинки?

28. Є два пакети. Один вмішує 200 г цукрового піску, а другий – 350 г. Як за допомогою цих пакетів відсипати 500 г цукру.

29. Для зв'язку між кожними двома артилерійськими батареями виділили одного зв'язківця. Скільки зв'язківців потрібно, щоб забезпечити зв'язок між п'ятьма батареями?

30. У тебе є тільки синя, чорна та біла фарби. Як можна розфарбувати будиночки, якщо крівля, стіни та двері одного будинку мають бути різного кольору. Намалюйте всі можливі варіанти.

31. У даній множині з'єднайте а) червоною стрілкою кожне з чисел з числом, що у два рази більше нього; б) синьою стрілкою кожне з чисел з числом, що на 2 одиниці більше нього;

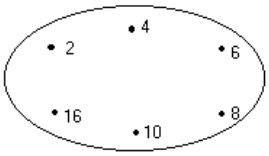


Рис. А.6. Ілюстративний матеріал до задачі 31

32. Перевірте, чи правильно вказує стрілка а) добуток елементів числової множини, розміщених чисел ліворуч на число 6; б) частку від ділення елементів числової множини, розміщених ліворуч на число 6;

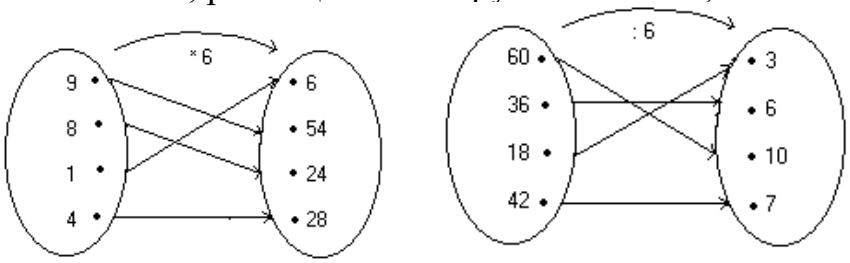


Рис. А.7.Ілюстративний матеріал до задачі 32

33. У класі чергують четверо учнів: Сергійко, Юрко, Наталка, Марійка. З них двоє мають вимити підлогу. Які пари чергових можуть бути?

34. На малюнку “зашифровані” чотирицифрові числа, що можна скласти з цифр 5 та 7. Покажіть шлях, в якому “зашифровано” число 5557. Чи нагадує Вам ця схема “дерево”? Побудуйте своє цифрове “дерево”.

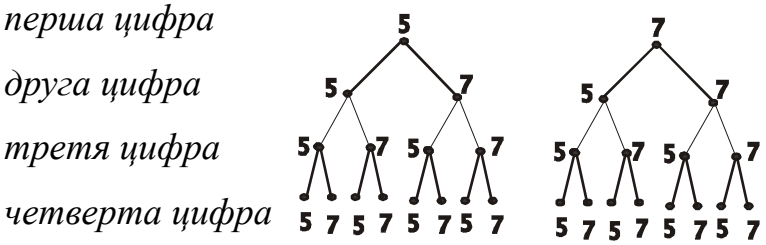


Рис. А.8. Дерево логічних можливостей

35. В одній маленький казковій країні всього 25 автомобілів. Вирішили давати цим автомобілям трицифрові номери, складені з цифр 1, 2, 3, 4, причому однакових цифр в одному номері не повинно бути. Чи вистачить номерів для всіх автомобілів?

36. Запиши різними цифрами найбільше п’ятицифрове число, у якого сума цифр дорівнює 10.

37. У числі 59241 закреслити такі дві цифри, щоб число утворене залишеними цифрами, було: а) найбільшим; б) найменшим.

38. Віднови цифри:

```
  *2*
-
  *5
------
  111
```

39. Побудуй прямокутник і поділи його двома відрізками на 2 трикутники і 2 чотирикутники.

40. Накресли який-небудь прямокутник і поділи його двома відрізками на 3 трикутники і один п’ятикутник.

Дидактичні ігри

Гра “День –ніч”.

Мета: навчати учнів організовувати перебір у певній системі, переходячи від хаотичного перебору до системного, розвивати варіативність, критичність, послідовність мислення.

Матеріал до гри: 3 стільці біля дошки.

Методика проведення: Учитель викликає трьох учнів (наприклад, Наталку, Сергія, Бориса). Вони сідають біля дошки на стільці. По команді “День” діти встають і можуть пересуватися; по команді “Ніч” вони сідають на стільці, але так, щоб кожний раз порядок розташування їх був іншим. Інші діти записують у зошиті розташування викликаних учнів за першими буквами імен і стежать за тим, щоб не було повторень. Гра продовжується доти, поки не виявляться всі можливі варіанти: Н.С.Б., С.Н.Б., Б.Н.С., Н.Б.С., С.Б.Н., Б.С.Н.

У процесі гри виникають ситуації, коли гравці повторюють розташування або не можуть знайти нове. У цьому випадку допомагають учні з класу. Ставляться запитання: “Чи можна грати без помилок? Як треба діяти для цього?” Аналізуючи записи, учні помічають, що треба кожному сідати на перше місце, а двом іншим при цьому мінятися місцями.

Гра “Башточки”.

Мета: навчати учнів організовувати перебір у певній системі, переходячи від хаотичного перебору до системного, розвивати варіативність, критичність, послідовність мислення.

Матеріал до гри: для кожного учня олівці червоного, синього та жовтого кольорів; для вчителя – три кубики відповідного кольору.

Методика проведення: Учитель кладе в коробку три кубики: червоного, синього і жовтого кольорів і говорить, що буде брати, не дивлячись, по-одному кубику і складати башточки таким чином: перший кубик – нижній поверх, другий – середній, третій – верхній поверх. Дітям пропонується задумати варіант башточки, яка може вийти, і намалювати її. Кубики зображують квадратами відповідного кольору. Потім проводиться дослід (кубики виймаються з коробки). Той, хто вгадав, стає переможцем. Це повторюється кілька разів.

У результаті багатьох дослідів учні приходять до висновку: якщо малюєш одну башточку, то можеш отримати як задуманий, так і інший порядок кольорів. Далі ставиться нове питання: “Скільки башточок треба намалювати, щоб бути впевненим, що серед малюнків завжди виявиться потрібний варіант, і

ти постійно будеш вигравати?" Діти малюють всі можливі башточки, при цьому спираються на правила попередньої гри, тобто здійснюють перенесення наочного прийому в уявну сферу.

Доцільно змінювати дані цього завдання та отримувати нові задачі.

Наприклад:

1. Для складання башточок взяти 4 кубики: один червоний, три жовтих. У цьому випадку буде 4 варіанти: ЧЖЖЖ, ЖЧЖЖ, ЖЖЧЖ, ЖЖЖЧ.

Діти помічають, що правила дещо змінилося: червоний кубик тільки по одному разу може бути по кожному місці, яких чотири, тому й утворилося 4 варіанти.

2. У коробку поклали один червоний і два жовтих кубики. Скільки варіантів може бути в цій задачі?

Гра "Костюм для ляльки".

Мета: навчати учнів організовувати перебір у певній системі, переходячи від хаотичного перебору до системного, розвивати варіативність, критичність, послідовність мислення.

Матеріал до гри: олівці та зошит.

Умова: Марійці подарували ляльку. У ляльки є 3 різні спідниці та 4 різні кофти. Допоможіть Марійці утворити різні костюми з цих речей. Скільки днів вона зможе вдягати ляльку у новий костюм?

Методика проведення: Вчитель пропонує спочатку намалювати костюми, потім не малювати спідниці та кофти, а позначити їх відповідними цифрами та буквами. Наприклад: 1с – перша спідниця, 2к – друга кофта. Потім учні в зошитах складають різні варіанти костюмів. Учитель запитує, скільки різних костюмів утворили учні, хто з учнів отримав більшу кількість, чи є ще якісь варіанти складання костюмів, як легше складати костюми (мається на увазі, що з початку взяли першу спідницю, та до неї додавали різні кофти; потім взяли другу спідницю та до неї додавали різні кофти і так далі), тобто йде спроба перебору в певній системі.

Гра "Маршрут".

Мета: навчати учнів організовувати перебір у певній системі, переходячи від хаотичного перебору до системного, розвивати варіативність, критичність, послідовність мислення.

Матеріал до гри: олівець та зошит.

Умова: Замок Кощія Безсмертного знаходиться на пагорбку, до якого веде три стежки. Одного разу вкрав Кощій Царівну та сказав, що поверне, якщо Іван-Царевич підніметься на пагорбок та опуститься з нього 8 різними способами. Допоможіть, будь ласка, Івану. Складіть різні маршрути.

Методика проведення: Вчитель для спрощення пропонує назвати стежки цифрами 1, 2 та 3. Маршрути допомагає складати учням запитаннями: “Якими стежками можна спуститися з пагорбку, якщо піднятися першою дорогою?” (12, 13, 11). Аналогічні питання відносно другої та третьої стежки. “Скільки всього маршрутів можна скласти?”, “Чи зможе Іван врятувати Царівну?”

Гра “Зимова схованка”.

Мета гри: навчати учнів організовувати перебір у певній системі, переходячи від хаотичного перебору до системного, розвивати варіативність, критичність, послідовність мислення.

Методика проведення: Учитель читає умову: “Зайчик, їжачок і білочка зробили зимову схованку продуктів і поставили на її двері три замки, щоб не було обману, звірята вирішили розподілити між собою ключі від замків так, щоб двері могли відкриватися тільки в присутності хоча б двох із них, тільки не одного. Допоможи звірятам правильно розподілити ключі”.

Спочатку перебираються всі можливі варіанти розподілу ключів: кожному звірятку можна дати по одному різному ключу, по два різних ключі і по три різних ключі.

Припустимо, що кожен одержав по одному ключу. Тоді, якщо прийдуть двоє, вони не зможуть відкрити двері, не буде вистачати одного ключа.

Припустимо, що кожний одержав по три різних ключі, тоді кожен із них сам зможе відкрити двері, але ж це заперечує умові.

Припустимо, що кожний одержав по два різних ключі: зайчик – 1 й 2 ключі, їжачок 1 й 3 ключі, білочка – 2 й 3 ключі. Здійснюється вибір із трьох типів ключів по два ключі. Розглядаються всі можливі випадки. Якщо прийдуть зайчик та їжачок, у них будуть ключі 1, 2, 3, двері можна відчинити. Якщо прийдуть зайчик і білочка, у них будуть ключі 1, 2 і 3. Двері знов-таки відчиняться. Коли прийдуть їжачок і білочка, двері теж відчиняться, тому що в них буде весь набір ключів. Розподіл зроблений правильно.

Таким чином, щоб зробити відповідь у цій задачі, треба виконати операцію перебору кілька разів.

Гра: “Суперечка”

Мета гри: навчати учнів організовувати перебір у певній системі, переходячи від хаотичного перебору до системного, розвивати варіативність, критичність, послідовність мислення.

Умови гри: Рома та Ганна збираються до бабусі в село. Рома бере із собою одні брюки та червону, жовту й зелену сорочки, а Ганна – довгу та коротку спідниці та кофти – рожеву й білу. Ганна вважає, що зі своїх речей вона зможе скласти більше костюмів, ніж Рома. Чи права вона? Доведіть.

Методика проведення: З’ясовується, що якщо дізнатися, які костюми складуть діти, то, порівнявши їх число, можна відповісти на питання. Помічається, що костюм включає в себе верх (сорочка чи кофта), і низ (брюки або спідниця). Учням пропонується позначити брюки буквою “Б”, та сорочки відповідно “Ж”, “З” та “Ч”, та аналогічно спідниці “КС” та “ДС”, кофти – “РК”, “БК”. Потім складаються різні костюми для Роми: БЖ, БЗ, БЧ; для Ані – КСРК, КСБК, ДСРК, ДСБК. Зрозуміло, що Аня була права, тому що 4 більше ніж число 3.

Лінгвістичні вправи, спрямовані на розвиток вміння дитини використовувати комбінаторну дію перебору.

(Комбінаторні дій з лінгвістичним матеріалом - це поєднання окремих мовних одиниць в ціле: складання слів з обмеженої кількості букв, складів;

складання словосполучень, речень з обмеженої кількості слів; конструювання речень різних видів).

1. Назвіть якомога більше слів з цього переліку букв - А, М, Й, Р, К, А, Н, О, Г, Л, Ж:

- які починаються з комбінації букв А і К;

- комбінуючи склади на *ма* і *на* з іншими складами.

2. Складіть речення, спираючись на асоціації, що спричиняють слова *кицька і лампочка* (наприклад, асоціації можуть бути такі: голова кицьки нагадує лампочку; кицька тепла, як лампочка; очі кицьки блищать, як лампочки...).

4. Складіть:

- казку, в кожне речення якої входили б слова: бабуся, клоун, палац, а разом ці речення складали б зв'язну розповідь;

- діалог сонячного променя з ластівкою, діалог може мати такий початок: "Заглянув сонячний промінець рано-вранці у гніздо ластівок: - Доброго ранку, маленькі пташки! – привітався ввічливий промінь.- ...;

- розповідь (історію), в якій діють такі головні герої: літак, книга, банан, комп'ютер.

Приклади задач на вільне конструювання.

1. Складіть що-небудь з конструктора, до складу якого входять один червоний квадрат, три зелених трикутників, п'ять синіх кіл.

2. Ти малюєш кола двох видів: великі й маленькі. Намалюй усі візерунки, що можна скласти з трьох фігур, розташовуючи їх у рядок.

3. Складіть різні візерунки з 2 червоних кіл та трьох чорних квадратів.

4. Бабуся хоче сплести шаль. Для цього вона спочатку плете окремі частини: квадрати й трикутники, а потім поєднує їх разом. Як бабуся може поєднати їх разом? Як бабуся може поєднати ці частини так, щоб шаль мала форму трикутника. Скільки деталей кожного виду треба сплести в цьому випадку? (Шаблони деталей готуються заздалегідь).

5. З яких фігур складається перший будинок. Домалюй інший будинок так, щоб порядок розташування фігур змінився.

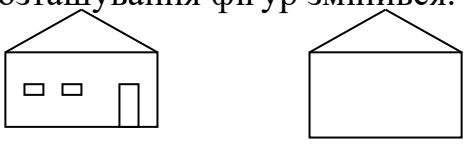


Рис. А.9. Ілюстративний матеріал

6. Башточка складена з червоного, синього та жовтого кубиків. Побудуй схожу башточку, що відрізняється від даної складом кубиків. Як по-іншому можна виконати завдання? (Вважається, що у дітей є набори кубиків 4-6 різних кольорів).

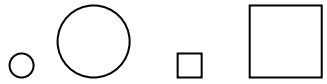
7. Намалюй візерунки з фігур 

Рис. А.10.Геометричні фігури

5-7 класи

1. Як інакше назвати вказані множини:

а) множину людей, яких перевозить автобус; б) множину фруктових дерев біля будинку; в) множину футболістів, що тренується на полі; г) множину птахів, які летять на південь; д) множину людей у трамваї; е) множину музикантів, що виконує музичний твір.

2. Назвіть множини, яким відповідають слова: клас, ліс, сад, команда, колекція.

3. Назвіть множину натуральних чисел, які знаходяться між числами 21 та 29.

4. Назвіть множини букв, які використані для написання слів “сир”, “кокарда”, “рис”, “ кокос”, “Одарка”, “сосна”.

5. Запишіть:

а) множину днів тижня; б) множину планет Сонячної системи; в) множину натуральних чисел, що знаходяться між числами 21 і 27; г) множину відмінників Вашого класу.

6. А – множина додатних трицифрових чисел, що закінчуються цифрою 5. Чи належать до цієї множини задані числа?

а)135; б) 25; в)1455; г) 446.

7. Наведіть два приклади множин, що зустрічаються в житті. Назвіть їх елементи.

8. Чи належить:

а) 12 множині чисел, кратних 4?; б) літера “z” множині букв українського алфавіту?; в) Луганськ множині міст України?

9. Запишіть:

а) множину всіх цифр; б) множину голосних українського алфавіту.

10. У наступних множинах всі елементи, крім одного, мають деяку властивість. Опишіть цю властивість та знайдіть елемент, що її не має:

а) {Лев, лисиця, гієна, слон, рись}; б) {2; 6; 15; 84; 156; 1113; 875136};

в) {бігти; дивитися; блакитний; малювати}.

11. За допомогою слів “так” чи “ні” дайте відповідь чи правильно:

а) у множині {17; 25; 27; 35} є числа, що діляться на 9; б) у множині {18; 36; 54; 72} всі числа діляться на 9; в) у множині {18; 36; 54; 72} є числі, що діляться на 9; г) у множині { 18; 36; 53; 72} всі числа діляться на 9.

12. Запишіть множину чисел перших двох десятків, що

а) діляться на 3; б) діляться на 4.

13. Запишіть множину чисел першої сотні, що

а) діляться на 7; б) діляться на 5.

14. Скільки елементів у кожній з множин:

A = {1; 2; 3; 4}; B = {12; 34}; C = {1234}.

15. Задайте переліком всіх елементів наступні множини:

а) двоцифрових парних чисел, менших 20; б) одноцифрових парних чисел.

16. Що спільного між множиною букв в слові «море», множиною сторін прямокутника, множиною кутів у класній кімнаті?

17. Є дві множини. Скількома способами можна вибрати один елемент з цих множин?

а) A = {а; б; в; г;}, B = {ю; я}; б) A= {3; 4; 5;}, B = {4; 6; 7}; в) A = {а; в; г; д; }, B = {г; д; ж; к; ї}.

Основні операції над множинами

У школі працює два гуртки: історичний і математичний. В історичному навчаються учні І, С, П, У (учні позначені першою буквою їх прізвища). В математичному Ф, К, І, П, Т (одні і ті самі учні позначаються однією буквою). Вирішили провести спільні збори обох гуртків. Скільки учнів прийде на збори? Скільки учнів відвідують історичний і математичний гуртки?

Дамо відповідь спочатку на перше запитання. Очевидно, щоб дізнатися, скільки учнів прийде на загальні збори, треба до учнів одного з гуртків приєднати учнів другого, але тих, які не відвідують цей перший гурток. Розглядаючи членів кожного з гуртків як множини, ми утворюємо з двох множин третю за певним правилом, що називається *об'єднанням*.

Дамо тепер відповідь на друге запитання. Ясно, що це учні І та П. Отже, з двох множин ми вибрали елементи, які належать як одній, так і другій множині. Створена таким чином третя множина називається *перерізом.*

Вправа. Розглянемо А ={1; 2; 3; 4}, В = {5; 6}. Що можна сказати про множину С= {1; 2; 3; 4; 5; 6}?

Вона складається з елементів множини А та В, тобто елементи цих множин об'єднали. Об'єднаємо множини А ={1; 2; 3; 4} та В = {2; 3; 5}. С = {1; 2; 3; ;4 5}. Спільні елементи будуть входити в об'єднання лише один раз.

Об'єднанням множин також буде множина. Позначається об'єднання так: $A \cup B$

18. Що буде спільною частиною множин А і В, якщо:

а) А – множина парних чисел, більших 0, В – множина натуральних непарних чисел; б) А – множина прямокутників, В – множина квадратів; в) А – множина хлопчиків 8-А класу, В – множина хлопчиків Вашої школи; г) А – множина цифр числа 3902, В – множина цифр числа 7841.

19. У класі з гуманітарним напрямком є учні, які вивчають англійську мову, учні, які вивчають німецьку мову. Але є два учні, які вивчають і англійську, і німецьку мову. Тобто, якщо А – множина учнів, які вивчають

англійську мову, В – множина учнів, які вивчають німецьку мову, то ці два учні належать і множині А, і множині В.

Спільну частину двох або кількох множин називають перерізом.

Перерізом множин також буде множина. Позначається переріз так: А∩В

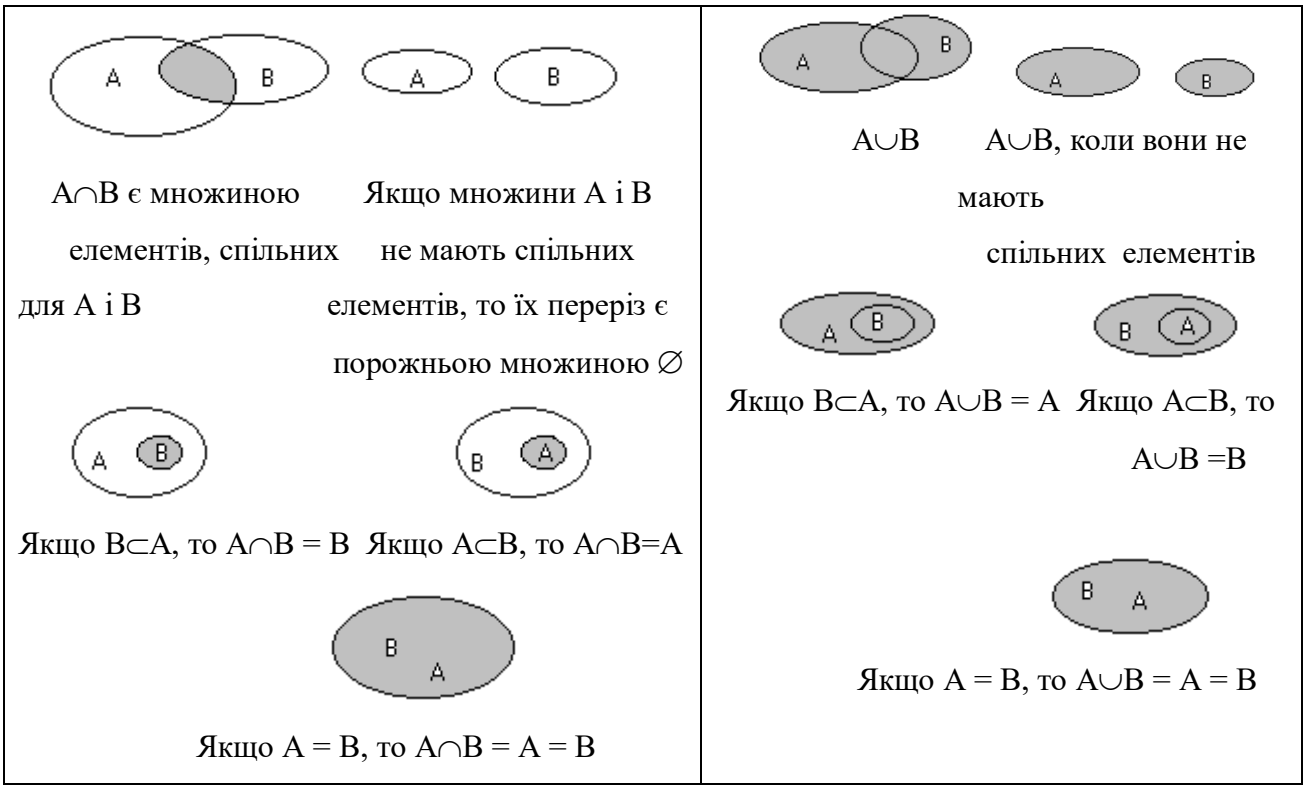


Рис. А.11. Зображення об’єднання і перерізу двох множин за допомогою діаграм Ейлера-Вена

Перерізом двох множин А і В називається множина, яка складається з тих і тільки тих елементів, що належать і множині А, і множині В. Позначається А∩В.	Об’єднанням двох множин А і В називається множина, яка складається з тих і тільки тих елементів, що належать принаймні до однієї з множин А або В (або А, або В, або обом множинам). Позначається А∪В.

Рис. А.12. Основні операції над множинами

20. Що буде множиною С, якщо С = А∪В, де:

а) А – множина дівчинок вашого класу, В – множина хлопчиків вашого класу; б) А – множина натуральних парних чисел, В – множина натуральних

непарних чисел; в) А – множина цифр числа 2001, В – множина цифр числа 3002.

21. Нехай А – множина цифр числа 701263557, а В = {1; 7; 6; 5; 2; 3; 0}. Знайдіть елементи об'єднання і перерізу цих множин.

22. З 40 учнів шостого класу 32 відвідують математичний гурток, 21 – спортивну секцію, 15 – спортивну секцію та математичний гурток одночасно. Скільки учнів не беруть участь ні в секції, ні в гуртку?

23. З 38 учнів восьмого класу мистецьку студію відвідують 28 учнів, 17 – лижну. Скільки "лижників" відвідують мистецьку студію, якщо в класі немає учнів, які б не відвідували хоча б одну секцію?

24. Побудуйте діаграми Ейлера-Вена для:

1) множин геометричних фігур: паралелограмів, квадратів, чотирикутників, трапецій; 2) числових множин: натуральних чисел, додатних цілих чисел, від'ємних цілих чисел; 3) множин: хлопчиків Вашого класу, хлопчиків Вашої школи, дівчинок Вашої школи, учнів Вашої школи;

25. Дано дві множини: множина всіх парних чисел першого десятка і множина всіх натуральних чисел, менших 20, що діляться на 3. Знайдіть об'єднання і переріз цих множин.

26. Множина А складається з цілих чисел від 5 до 10. Множина В – з натуральних чисел від 3 до 15. Напишіть елементи множин $A \cup B$, $A \cap B$.

Правила додавання та множення

27. У магазині є 5 різних ляльок та 6 різнокольорових м'ячів Скількома способами можна обрати одну з іграшок?

Скількома способами можна обрати ляльку? м'яч?

Скількома способами можна обрати або ляльку, або м'яч?

Зазначимо, що вибір м'яча не впливає на вибір ляльки, так саме і вибір ляльки не впливає на вибір м'яча.

28. У вазі є 5 троянд та 3 гвоздики різних кольорів. Скількома способами можна вибрати одну квітку?

- Скільки квітів у вазі?

- Скількома способами можна вибрати троянду?

- Скількома способами можна вибрати гвоздику?

- Скількома способами можна вибрати або троянду, або гвоздику?

Зазначимо, що вибір троянди не впливає на вибір гвоздики, так само і вибір гвоздики не впливає на вибір троянди.

Вибори елемента, що не впливають на вибори інших елементів, називаються незалежними.

29. У класі треба обрати одного чергового (або хлопчика, або дівчинку). Скільки існує способів для вибору чергового, якщо в класі 22 дівчинки та 18 хлопчиків?

Хлопчика або дівчинку можна вибрати 22 + 18 = 40 способами.

30. У класі 5 шахістів та 3 шашкістів. Скільки в класі шахістів та шашкістів?

ПРАВИЛО ДОДАВАННЯ

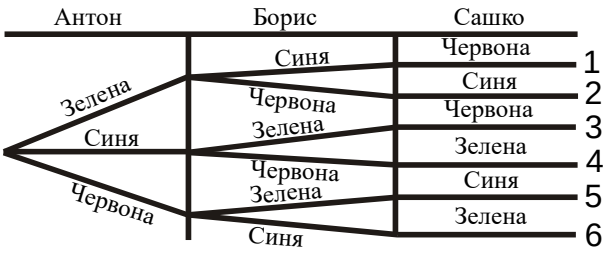
Якщо елемент *а* можна вибрати *m* способами, а елемент *в* – *n* способами, то вибір елемента *а* або *в* можна здійснити *m* + *n* способами, за умови, що ніякий вибір *в* не залежить від вибору *а*.

31. У вазі 5 яблук та 8 апельсинів. Скількома способами батько може дати один фрукт своєму синові?

32. Є 2 дороги, які ведуть з C до D через A, та 3 дороги з C до D через B. Скільки можна скласти автобусних маршрутів, які зв'язують D та C? Зробіть схематичний малюнок.

33. Три брати – Антон, Борис та Сашко на Новий рік вирішили написати листа Діду Морозу з запрошенням на свято. У них є синя, зелена та червона ручки. Скількома способами вони можуть розподілити ручки?

Розв'язання. З Антоном можна зіставити будь-яку з 3 ручок, тобто є три можливості. Після кожного з таких зіставлень Борису залишається 2 ручки, з яких він може вибрати одну. Після кожного такого вибору Сашку залишається остання ручка. Будуємо дерево логічних можливостей.

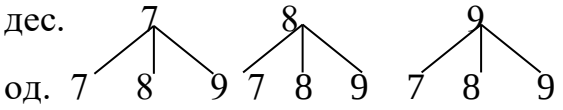


3 · 2 = 6

Рис. А.13. Дерево логічних можливостей до задачі 33

34. Скільки двоцифрових чисел можна скласти з цифр 7, 8, 9?

Розв'язання. Поставимо на перше місце цифру 7, тоді на друге місце можна вибрати або 7, або 8, або 9. Так само, якщо на перше місце поставити 8 або 9. Таким чином, маємо 9 чисел.



3 ·3 = 9

Рис. А.14. Дерево логічних можливостей до задачі 34

35. Скільки двоцифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3 так, щоб цифри в числі не повторювались?

ПРАВИЛО МНОЖЕННЯ

Якщо елемент *а* можна вибрати *m* способами, та після кожного такого вибору елемент *в* можна вибрати *n* способами, то вибір *а* й *в* у зазначеному порядку можна здійснити $m \times n$ способами

36. У трьох учнів – Марії, Тетяни, Миколи виникла потреба розподілити між собою 3 книжки. Скількома різними способами вони можуть це зробити?

37. Три дівчини – Юля, Зіна та Таня хочуть розподілити між собою м'яч, сачок та ляльку. Скількома різними способами вони можуть це зробити?

38. Скільки двоцифрових чисел можна скласти, якщо число десятків належить множині {5, 9, 3}, а число одиниць – множині {5, 1, 0}.

39. Напишіть усі трицифрові числа цифрами 5, 7 та 4 так, щоб в числі цифри не повторювались. Скільки їх?

40. Скільки двоцифрових чисел можна скласти з цифр 2, 5 та 8, цифри в числі можуть повторюватись? Побудуйте дерево логічних можливостей.

41. З королівства ОХ до королівства АХ ведуть 2 дороги, а з королівства АХ до міста, де тече жива та мертва вода – 3 дороги. Івану-Царевичу потрібна жива вода, щоб повернути Мар'ю-Царівну до життя, та мертва вода, щоб вбити Кощія Безсмертного. Скількома способами Іван-Царевич може з живою та мертвою водою пройти з того міста, де тече ця вода, до Мар'ї-Царівни в АХ, а потім до Кощія в ОХ? Зробіть схематичний малюнок.

42. З Луганська до Києва можна доїхати поїздом, автобусом та долетіти літаком, а з Києва до Парижа можна долетіти літаком або доїхати поїздом. Скількома способами можна зробити поїздку з Луганська до Парижа та назад?

43. На гору веде 7 доріг. Скількома способами можна піднятися на гору і спуститися з неї?

44. Скільки двоцифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3?

а) кожна з цифр не повторюється; б) цифри можуть повторюватись.

45. Скільки чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 0; 1; 2; 3; 4; 5, якщо:

а) цифри не повторюються; б) цифри можуть повторюватись; в) числа повинні бути непарними.

46. Знайдіть суму всіх трицифрових чисел, які можуть бути записані за допомогою 1, 2, 3 так, щоб цифри не повторювались.

47. Чи можуть 8 чоловік прибути з міста А в місто С через місто В різними шляхами, якщо з А до В ведуть три дороги, а з В до С – п'ять?

48. Стадіон "Авангард" має 4 входи. Скількома способами можна а) увійти на стадіон та вийти з нього? б) увійти через один вхід, а вийти через інший?

48. Скільки двоцифрових чисел, які закінчуються цифрою:

а) 3; б) парною; в) непарною.

50. Скількома способами можна записати число 10 у вигляді суми чотирьох непарних чисел?

51. Серед двоцифрових чисел, що можна скласти за допомогою 1, 5, 7, 9, 6, знайдіть кількість таких, що а) починаються з 1 або 5; б) закінчуються 3 або 5; в) починаються з 4 та закінчуються 3?

52. Вінні-Пух, П'яточок і Сова збиралися на день народження до Віслюка Іа і почали вирішувати, в якому порядку вони будуть вручати подарунки. Скільки можливих варіантів у них є?

53. Мама Коза пішла по молоко, а семеро козенят почали гратися в "потяг". Але засперечалися, в якому порядку їм "їхати". Тоді вони вирішили перепробувати всі можливі випадки. Скільки часу вони витратять, якщо кожний новий "потяг" буде "їхати" рівно одну хвилину?

54. Тітонька Поллі наказала Тому Соєру пофарбувати паркан біля будинку, який складається з чотирьох секцій. Він вирішив пофарбувати кожну секцію у свій колір і замислився, в які кольори і в якому порядку це зробити. Скільки варіантів фарбування є, якщо у Тома шість різних кольорів?

55. Сніданок містить два блюда. Перше вибирається з множини – {пельмені; риба; котлети}, друге – {чай; кава; молоко}. Скільки сніданків можна скласти з цих блюд?

56. У коробці є 7 червоних та 5 синіх олівців. Олівці виймають навмання. Яку найменшу кількість олівців потрібно вибрати, щоб серед них було не менш двох червоних та трьох синіх?

57. У шафі є туфлі одного розміру: 6 пар чорних та 6 пар коричневих. Знайти найменшу кількість туфель, яку потрібно вибрати з шафи, щоб серед них була хоч одна пари (ліва та права) одного кольору.

58. Дано множини $X = \{0; 1; 2; 10\}$ і $У = \{40; 4; 0; 8\}$. Знайдіть пари відповідних $x \in X$ та $y \in У$, що є коренями рівняння $4 \times x = y$.

59. {0; 1; 2} – множина значень x, {0; 2} – множина значень y. Складіть всі пари (x; y) та порівняйте відповідні значення виразів $x + y$ та $x \times y$.

60. Чи буде елемент множини {2; 5; 3} розв'язком рівняння $x^2 + 5 = 14$?

61. Розкладіть $a^2 - ав - 8a + 8в$ в добуток двочленів різними способами.

62. Скількома способами можна скласти різні одночлени стандартного виду з коефіцієнтами 5, які містять x і y, так, щоб степінь кожного одночлена дорівнювала б 5. Запишіть їх.

63. Скількома способами можна обчислити $(4\frac{2}{3}+5\frac{1}{2})\cdot 3^2$?

64. Скільки неправильних дробів можна скласти з цифр 4, 7, 5, 9, 1?

65. Марійка зайшла в ліфт дев'ятиповерхового будинку на п'ятому поверсі, проїхала 3 поверхи та вийшла. На якому поверсі вона вийшла?

66. В одній казковій країні, за синіми морями, за високими горами жив собі кмітливий хлопчик Басик. Закінчив одного разу Басик початкову школу й перейшов до 5 класу. Довелося йому в дорозі багато перепон здолати, багато труднощів вирішити.

1) Треба було Басику перебратися через грузьке болото. Перейти його можна тільки по купинках, рухаючись тільки за схемою праворуч ($\rightarrow$) і вгору ($\uparrow$). Скількома способами можна пройти це болото? За яким маршрутом рухався Басик, якщо стрибаючи по купинах, він збирав тим часом Журавлину й набрав 40 ягід (цифрами позначено кількість ягід на кожній купині)?

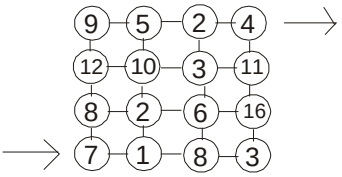


Рис. А.15. Маршрут для Басика

2) Побував Басик у Баби Яги. Казала Яга, що не вибереться Басик із її хатинки, бо поставила вона на двері замок кодовий. Треба набрати на замку 9 різних цифр (1...9) так, щоб були правильними рівності:

□ □ : □ = □ - □ = 3 + □ = 1 × □

Рис. А.16. Код замку на двері Баби Яги

Знав Басик, лише де стоїть 1 і 3, та зміг таки відчинити замок! Як він розташував решту цифр?

67. У числі 92574063 закресліть 3 цифри так, щоб 5 цифр, які залишилися у тій самій послідовності утворювали: а) якнайбільше число; 2) якнайменше число.

68. Подайте число 24 у вигляді добутку всіма можливими способами. Запиши множину дільників числа 24, розташувавши їх у порядку збільшення.

69. Знайдіть методом перебору множину пар натуральних чисел x і y, що задовольняють рівняння: *а)* $3x + y^2 = 19$; *б)* $x^2 = 20 - y^2$; *в)* $x^2 + 5y = 46$.

70. Знайдіть переріз множин натуральних розв'язків нерівностей:

а) $x > 4$; б) $5 \le x \le 9$

$3 \le x \prec 7$ $8 \le x \le 11$

71. Побудуйте два суміжних кути так, щоб один з них: а)був на 70^0 більший за другий; б) був у 4 рази менший за другий; в) дорівнював другому.

72. Побудуйте трикутник АВС так, щоб $\angle A = 34^0$, $\angle B = 42^0$. Скільки ще можна побудувати трикутників, які задовольняють цю умову? Як треба доповнити умову, щоб розв'язок став єдиним?

73. Розв'яжіть рівняння методом проб і помилок:

а) $x(x-4) = 96$, $x \in N$; б) $x(x+12) = 64$, $x \in N$

74. Розв'яжіть рівняння методом перебору:

а) $x^2 + 3x = 40$, $x \in N$; б) $x(x+1) = 6$ $x \in N$.

75. На рисунку А.17 зображено різні фігури. Покажіть на малюнку А один трикутник, два чотирикутники; на малюнку Б три трикутники, три чотирикутники; на малюнку В три чотирикутники та на малюнку Г – п'ять прямокутників.

Рис. А.17. Геометричні фігури до задачі 75

76. Скільки трикутників у кожній з фігур, зображених на рисунку А.18?

Рис. А.18. Геометричні фігури до задачі 76

77. Запишіть усі трикутники кожної з фігур, зображених на рисунку А.19. Підрахуйте їх окремо для кожної з фігур.

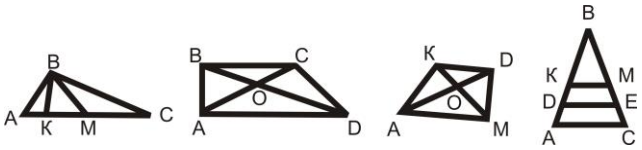


Рис. А.19. геометричні фігури до задачі 77

78. Покажіть усі шляхи, якими можна пройти від точки А до точку В, якщо рухатися зліва направо та знизу вгору. За допомогою цифр запишіть усі шляхи від А до В. Скільки шляхів ведуть від А до В?

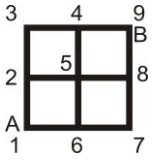


Рис. А.20. Схема шляхів від А до В

79. Олена та Артем повинні були дати відповідь за допомогою слів “так” чи “ні” на такі запитання: “У множині накреслених трикутників: а) є гострокутний трикутник; б) усі трикутники гострокутні; в) не всі трикутники прямокутні; г) не має тупокутного трикутника”. Чи правильно вони відповіли?

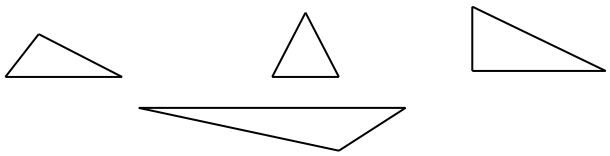


Рис. А.21. Геометричні фігури до задачі 79

Олена: а) так; б) ні; в) так; г) так;

Артем: а) так; б) так; в) так; г) ні.

80. За допомогою малюнка знайдіть, що є спільною частиною (промінь, відрізок, пряма):

а) променів АХ і АУ; б) променів ВХ і АУ; в) променя АУ і відрізка АВ;

г) променів АУ і ВУ; д) променя АХ і прямої ХУ; е) відрізка АВ і прямої АВ.

81. На колі є 6 точок. Скільки хорд вони визначають?

82. Побудуйте дві прямі, що перетинаються і розташуйте на них два відрізки, що не мають спільних точок.

83. Скільки різних прямих можна провести через чотири точки? Зробіть креслення.

84. Дано відрізок АВ, точки Е і С, що не лежать на прямій АВ. Скільки можливо взаємних розміщень прямої ЕС і відрізка АВ. Зробить висновок.

85. Відстань між точками А і В дорівнює 10, знайти всі точки М такі, що МА + МВ = 14.

86. Розташувати п’ять прямих на площині так, щоб в них було 8 точок перетину і через кожну з цих точок проходило не більше двох прямих. Підрахувати, скільки вийшло відрізків.

8-9 класи з поглибленим вивченням математики

А

1. Визначте, які з наведених множин скінченні:

а) множина учнів вашого класу; б) множина учнів школи; в) множина міст України; г) множина натуральних чисел; д) множина днів у квітні; е) множина непарних чисел.

2. Запишіть кількість елементів множин:

а) А – множина парних одноцифрових додатних чисел; б) В – множина непарних одноцифрових чисел; в) С – множина учнів Вашого класу; г) D – множина осіб у складі Вашої родини.

3. Запишіть за допомогою фігурних дужок або знака $\varnothing$ множини:

а) множина букв українського алфавіту, що позначають голосні звуки; б) множина знаків арифметичних дій; в) множина майстрів спорту, що навчаються у вашому класі; г) множина натуральних чисел, менших від 3; д) множина натуральних чисел, менше від 1; е) множина натуральних чисел від 8 до 32, які діляться на 4; є) множина парних чисел, розташованих між 3 і 11; ж) множина чисел, які в сумі з числом 4 дають 4; з) множина непарних додатних двоцифрових чисел, що діляться на 6; і) множина чисел, що дорівнюють своїм квадратам; к) множина натуральних чисел, кратних 3.

4. Запишіть множини та знайдіть рівні:

а) А – множина цифр, що потрібні для запису числа 5371; б) В – множина цифр, що потрібні для запису числа 102012; в) С - множина цифр, що потрібні для запису числа 2110000; г) D - множина двоцифрових натуральних чисел, сума яких дорівнює 5; д) U - множина осіб, які побували на Марсі; е) K - множина натуральних чисел, менших 1.

5. Дана множина {6; 8; 24; 7; 12; 13}. Складіть її підмножину, що містить числа:

а) які діляться на 4; б) які діляться на 6; в) які діляться на 4 та на 6; г) які діляться на 4 або на 6.

6. N - множина всіх натуральних чисел, Z - множина всіх цілих чисел, Q - множина всіх раціональних чисел. Наприклад, $-5 \notin N$, $\frac{3}{7} \in Q$. Наведіть власні приклади для числових множин.

7. Запишіть множину цифр чисел та визначте кількість елементів кожної з множин:

а) 222330; б) 677809; в) 100011;

8. Визначте за допомогою характеристичної властивості множину:

а) всіх рівнобедрених трикутників; б) всіх прямокутних трикутників; в)всіх натуральних чисел, кратних 6.

9. Прочитайте запис і задайте переліком всіх елементів множину:

а) $B = \{x \in Z \mid 0 \le x \le 7\}$; б) $У = \{x \in N \mid x \le 8\}$; в) $C = \{x \in Z^+ \mid x \le 7\}$;

г) $D = \{x \in Z \mid |x| < 10\}$.

10. Запишіть за допомогою характеристичної властивості та прочитайте:

а) А = {3; 6; 9; 12; 15;}; б) А = {5; 10; 15; 20; 25}; в) $B = \{\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}\}$;

11. $A = \{x \in Z \mid 40 \vdots x\}$.Чи правильні записи:

а) $4 \in A$; б) $10 \in A$; в) $-8 \in A$; г) $4 \notin A$; г) $0 \in A$; д) $3 \notin A$; е) $0 \notin A$.

12. Що буде об’єднанням множин А і В, якщо:

а) А – множина весняних місяців, В – множина зимових місяців; б) А – множина дівчат вашого класу, В – множина хлопчиків вашого класу; в) А – множина натуральних парних чисел, В – множина натуральних непарних чисел; г) А – множина цифр числа 2001, В – множина цифр числа 3002.

13. Що буде перерізом множин А та В:

а) А = {2; 3; 5}, В = {1;4}; б) А – множина хлопчиків 8-А класу, В – множина хлопчиків Вашої школи; в) А – множина цифр числа 3902, В – множина цифр числа 7841; г) А- множина цифр числа 58924, В – множина цифр числа 82495.

14. Є дві множини. Скількома способами можна вибрати один елемент з цих множин?

а) А = {1; 2; 3; 4; 5; 6;}; В = {7; 8; 9}; б) А = {а; б; в; г;}; В = {ю; я};

в) А= {3; 4; 5;}; В = {4; 6; 7}; г) А = {а; в; г; д; }; В = {г; д; ж; к; ї}.

15 А = [-3; 10], В = [-1; $+\infty$]. Знайти $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

16. Множина А містить 4 елементи, а множина В – 3. Скільки елементів може містити об’єднання цих множин?

17. Скількома способами можуть розміститись 6 спортсменів на лаві перед гімнастичним снарядом?

18. З 40 чоловік треба обрати старосту, його заступника і профорга. Скількома способами це можна зробити?

19. Скільки десятицифрових чисел можна скласти в десятковій системі числення так, щоб цифри в числі не повторювались?

20. Скількома способами 4 плавці можуть розміститись на чотирьох доріжках басейну?

21. Скільки різних “слів” можна утворити з літер слова “школа”? (Словом вважається будь-яка послідовність букв).

22. У класі навчаються 16 юнаків. Скількома способами їх можна вишикувати в шеренгу?

23. У вазі є різнокольорові 5 троянд та 3 гвоздики. Скількома способами можна вибрати одну квітку?

24. На прямій МД є дві точки – А і В. Скільки є променів на цій прямій з початком у точці А або в точці В? Зробіть малюнок.

25. Розклад уроків одного дня має 5 різних навчальних предметів. Визначте кількість варіантів таких розкладів при виборі з 11 навчальних предметів.

26. Запишіть наступні добутки за допомогою знака факторіала:

а) 1×2×3×4×5; б)1×2×3×4×5×6×7×8×9; в) 1×2×...×(k-1)×k.

27. Які з рівностей правильні?

а) 1×2×3×4×5×6×7 = 7!; б)2×3×4×5×6 = 6!; в)1×2×3×5×6×7 = 7!; г) 6×5×4×3×2 = 6!.

28. Запишіть у вигляді добутку:

а) 3!; б) n!; в) (n-1)!; г) (n-3)!; ґ) (2n)!.

29. Поставте замість * множник:

а) *×5! = 7!; б) *×(k-4)! = (k-1)!; в) *×7! = 8!; г) *×(n-3)! = n!; д) *×(n-1)! = (n+1)!;

30. Клавіатура піаніно складається з 88 клавіш. Скільки різних музичних фраз можна скласти з 6 нот, якщо не допускати в одній фразі повторення звуків, які вже зустрічалися?

31. Скількома способами можуть розміститись у класі 10 учнів на 25 стільцях?

32. Скільки існує варіантів трикольорового прапора, на якому зображено три вертикальні смуги різних кольорів?

33. Скількома способами можна вибрати 3 книжки з 7?

34. Скількома способами з 7 викладачів можна скласти екзаменаційну комісію з 4 чоловік?

35. Із заданих *n* точок жодні три не лежать на одній прямій. Скільки прямих можна провести, сполучаючи точки попарно?

36. Скільки існує трицифрових чисел, у яких кожна наступна цифра менша за попередню (більша за попередню)?

37. Обчисліть суму п’яти середніх елементів дев’ятого рядка трикутника Паскаля.

38. Обчисліть суму шести крайніх членів десятого рядка трикутника Паскаля.

Б.

39. За якою ознакою складено множину Б = {100; 200; ... 900}? Чи будуть елементами цієї множини числа 107 і 500?

40. Складіть множину всіх трицифрових чисел, для запису яких використано цифри 0, 2, 3 за умови, що жодна цифра в числі не повторюється.

41. З 38 учнів восьмого класу мистецьку студію відвідують 28 учнів, 17 – лижну. Скільки “лижників” відвідують мистецьку студію, якщо в класі немає учнів, які б не відвідували хоча б одну секцію?

42. У таборі відпочинку 70 дітей. З них 27 займаються в драматичному гуртку, 32 співають у хорі, 22 займаються спортом. У драмгуртку є 10 дітей з хору, у хорі 6 спортсменів, в драмгуртку 8 спортсменів, 3 спортсмена відвідують і драмгурток, і хор. Скільки дітей не співають в хорі, не захоплюються спортом і не займаються у драмгуртку?

43. В одній родині було багато дітей. Семеро з них любили капусту, шість – моркву, п’ять – горох. Четверо дітей любили капусту й моркву, три – капусту й горох, два – моркву й горох, а один – і капусту, і моркву, і горох. Скільки дітей було в сім’ї?

44. *У* класі 35 учнів. Усі в цьому класі займаються спортом: 25 – волейболом, 15 – баскетболом, 19 – футболом. У трьох секціях одночасно займаються 4 учні, волейболом і баскетболом – 10, баскетболом і футболом – 7, волейболом і футболом – 11. Скільки дітей займаються тільки в одній секції і в якій?

45. Із 100 іноземних туристів 83 знають французьку мову і 75 німецьку, причому кожний із туристів знає хоча б одну мову. Скільки туристів знають обидві мови?

46. У книжковому магазині є 6 екземплярів роману І.С.Тургенєва “Рудін”, 3 екземпляри його ж роману “Дворянське гніздо” та 4 екземпляри роману “Батьки та діти”. Крім того, є 5 томів, які містять романи “Рудін”, “Дворянське гніздо”, та 7 томів, які містять романи “Дворянське гніздо”, “Батьки та діти”. Скількома способами можна зробити покупку, яка складається з одного екземпляру кожного з цих романів?

47. На пікнік поїхало 92 особи. Бутерброди з ковбасою взяли 47 осіб, із сиром – 38, з баликом – 42, із сиром і ковбасою – 28, з ковбасою та з баликом – 31, із сиром та з баликом – 26. Усі три види бутербродів узяли 25 осіб, а кілька замість бутербродів узяли з собою пиріжки. Скільки осіб взяли пиріжки, тільки бутерброди з ковбасою, тільки з сиром, тільки з баликом?

48. Припустимо, що потрібно сформувати команду космічного корабля з трьох осіб: командира, інженера й лікаря. На місце командира є 4 кандидати, на місце інженера – 3, а на місце лікаря – 5. Скількома способами може бути сформовано команда корабля?

49. До Ялти можна доїхати поїздом і автобусом, до Анапи – поїздом, літаком і автобусом. Скількома способами можна поїхати в одне з цих міст? Зобразіть схематично.

50. Скільки двоцифрових чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2 таких, що:

а) кожна з цифр повторюється не більше одного разу; (побудуйте дерево логічних можливостей); б) цифри можуть повторюватися; (побудуйте дерево логічних можливостей)

51. Скільки є п’ятицифрових чисел, що діляться на 5?

52. Скількома способами можуть бути розподілені золота і срібна медалі між 16 командами?

53. Три хлопці і п’ять дівчат сідають на місця, пронумеровані від 1 до 10, причому дівчата – на місця з парними номерами, а хлопці – з непарними. Скількома способами можна це зробити?

54. Пасажир залишив речі в автоматичній камері схову, а коли прийшов їх отримувати, виявилося, що він забув номер, пам’ятаючи лише, що номер мав

числа 23 і 37. Щоб відкрити камеру, треба правильно набрати п’ятицифровий номер. Яку найбільшу кількість номерів потрібно перебрати, щоб відкрити камеру?

55. Серед двоцифрових чисел, що можна скласти за допомогою цифр 1, 5, 7, 9, 6, знайдіть кількість таких, що:

а) починаються з 1 або 5; б) закінчуються 9 або 5; в) починаються з 6 та закінчуються 7;

56. В Англії є звичай давати дітям кілька імен. Скількома способами можна назвати малюка, якщо загальна кількість імен дорівнює 300, а йому дають не більше трьох імен?

57. Спростіть.

1) $\frac{5!+6!}{4!}$; 2) $\frac{1}{k!}-\frac{k}{(k+1)!}$; 3) $\frac{(n-2)!}{(n+1)!}$; 4) $\frac{6!}{4}$; 5) $P_{k-1}-P_{k+1}$; 6) $\frac{m!}{m-1}$; 7) $\frac{8!-7!}{7!}$;

8) $(2n+2)!$; 9) $2n!(n+1)$; 10) $\frac{(2n)!}{n!}$;

58. Обчисліть:

а) $\frac{A_{20}^6+A_{20}^6}{A_{20}^4}$; б) $\frac{P_6-P_5}{3!}$; в) $\frac{P_{k+1}}{A_{k-1}^{n-1}P_{k-n}}(k\geq n)$; г) $\frac{A_n^k(n-k)!}{(n-1)!}(k\leq n)$

59. Доведіть нерівність $C_{10}^{x-1}>2C_{10}^{x}$.

60. Доведіть тотожність $C_{2n}^{n}=(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\ldots+(C_n^n)^2$.

61. Скількома способами можна розподілити 28 кісточок доміно між 4 гравцями, щоб кожен одержав по 7 кісточок.

62. Дослід передбачає підкидання монети n разів. У скількох комбінаціях герб випаде лише k разів?

63. На диску телефонного апарату є 10 цифр. Кожен телефон автоматичної станції має номер, що складається з 5 цифр. Знайти найбільше число телефонів, які може обслужити така станція.

64. Тридцять перших букв українського алфавіту зображені на картках без повторень. Скільки різних чотирибуквених «слів» можна скласти так, щоб у слові букви не повторювались? (Словом будемо називати будь-яку послідовність чотирьох букв).

65. Скільки шестицифрових чисел, кратних п’яти, можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 за умови, що в числі цифри не повторюються?

66. 4 студенти складають іспит. Скількома способами можуть бути поставлені їм оцінки, якщо відомо, що ніхто з них не одержав незадовільної оцінки?

67. Садівник повинен протягом трьох днів посадити 10 дерев різних порід. Скількома способами він може розподілити за днями свою роботу, якщо буде висаджувати не менше одного дерева в день?

68. Чотири біатлоністи з України приймали участь у чемпіонаті світу. Відомо, що жоден з них не посів місця, нижчого п’ятнадцятого. Скількома способами могли бути розподілені місця, що посіли представники України, за умови, що жодне місце не було поділено?

69. З колоди, що містить 52 карти (з них 4 туза), взяли 10 карт. В скількох випадках серед них буде хоча б один туз?

70. Скільки різних варіантів хокейної “шістки” можна скласти з 2 воротарів, 13 нападаючих, 7 захисників, якщо до її складу входять 1 воротар, 3 нападаючі, 2 захисники?

71. Букви азбуки Морзе утворюються як послідовність точок і тире. Скільки різних букв можна утворити, якщо використати п’ять символів?

72. Скільки є шестицифрових чисел, що закінчуються двома цифрами 7?

73. Скількома способами можна вибрати на шаховій дошці білий та чорний квадрати в зазначеному порядку, які не лежать на одній горизонталі й вертикалі?

74. На одній з бічних сторін трикутника взято m точок, на другій – n точок. Кожну з вершин при основі трикутника сполучено прямими з точками, які взято на протилежній стороні. Скільки точок перетину цих прямих утворюється всередині трикутника?

75. На площині проведено n попарно непаралельних прямих, з яких ніякі три не перетинаються в одній точці. На скільки частин поділили площину ці прямі?

76. Скільки різних напрямків задають на площині а) вершини трикутника; б) вершини квадрата?

77. Скільки прямих визначають вершини а)чотирикутника; б)п’ятикутника? Скільки діагоналей серед цих прямих? Побудуйте.

78. На площині проведено n прямих, причому ніякі дві з них не паралельні, і ніякі три не перетинаються в одній точці. Скільки точок перетину мають ці прямі?

79. Знайти число точок перетину діагоналей, що лежать у випуклому n-кутнику, якщо ніякі три 3 з них не перетинаються в одній точці.

80. Дана функція $y = P_x$:

а) знайдіть область визначення; б) чи має графік цієї функції точку, що належить осі абсцис (осі ординат)?; в) чи є ця функція зростаючою?; г) вкажіть множину, на якій функція зростає?; д) побудуйте графік функції $y = P_x$, де $x \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

81. Дана функція $y = A_4^x$:

а) знайдіть області визначення та значень; б) чи має графік цієї функції точку, що належить осі абсцис (осі ординат)?; в) чи є ця функція зростаючою?; г) вкажіть множину, на якій функція зростає; д) побудуйте графік функції $y = A_4^x$.

82. Дана функція $y = C_4^x$:

а) знайдіть області визначення та значень; б) вкажіть х, при яких функція приймає своє найбільше та найменше значення; в) чи має графік функції точки, що належать осі абсцис (осі ординат)?; г) чи має графік функції ось симетрії?; д) знайдіть рівняння осі симетрії; е) побудуйте графік функції $y = C_4^x$.

В

83. У батька є 5 апельсинів. Він видає своїм 8 синам за добрі вчинки так, що кожний одержує або один апельсин, або нічого. Скількома способами можна це зробити?

84. Скільки можна скласти різних нескоротних дробів, чисельником та знаменником яких є числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19?

85. На залізничній станції є m світлофорів. Скільки різних сигналів можна подати за їх допомогою, якщо кожен світлофор має три сигнали – червоний, жовтий і зелений?

86. У передвиборчій компанії за дві однакові посади змагаються шість кандидатів. Кожен виборець повинен занести в свій бюлетень або одного кандидата, або 2. Скількома способами можуть бути заповнені бюлетені?

87. Для польоту на Марс необхідно укомплектувати екіпаж космічного корабля в такому складі: командир корабля, перший його помічник, другий його помічник, два бортінженери і один лікар. Керуюча трійка може бути відібрана з числа 25 льотчиків, два бортінженери - з числа 20 спеціалістів, які досконало знають будову космічного корабля, і лікар – із числа 8 медиків. Скількома способами можна укомплектувати екіпаж?

88. Скільки десятицифрових чисел у десятковій системі числення можна скласти так, щоб цифри 2 та 6 стояли поруч?

89. Скількома способами можна вишикувати в одну шеренгу гравців двох футбольних команд по 11 чоловік так, щоб два футболісти однієї команди не стояли поруч?

90. Скільки п’ятицифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, щоб парні не стояли поруч і цифри в числі не повторювались?

91. Скільки різноманітних перестановок можна утворити з букв слова “задача”?

92. Число перестановок із n букв відноситься до числа перестановок з $n+2$ букв, як 0, 1 до 3. Знайдіть n.

93. У деякому населеному пункті проживає 1000 чоловік. Покажіть, що принаймні двоє з них мають однакові ініціали.

94. Автомобільні номери складаються з однієї, двох або трьох букв та 4 цифр. Знайти число таких номерів, якщо використовуються 27 букв українського алфавіту.

95. Палітурник має переплести 12 різноманітних книжок, використовуючи червоний, зелений та синій кольори. Скількома способами він

може це зробити, якщо в кожний колір повинна бути переплетена хоча б одна книжка?

96. Розклад одного дня має 6 різних уроків. Визначте кількість варіантів таких розкладів при виборі з навчальних предметів: алгебра, геометрія, українська мова, фізкультура, хімія та фізика так, щоб алгебра з геометрією йшли поряд.

97. Скільки треба взяти елементів, щоб кількість усіх перестановок, утворених з них, дорівнювала 120?

98. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{3!P_{x+2}}{(x-1)!P_3}=210$; б) $\frac{x!}{3!}=x\cdot P_{x-2}$; в) $\frac{P_{x+6}}{A_{x+4}^{n+4}P_{x-n}}=240$; г) $A_n^4P_{n-4}=42P_{n-2}$.

96. Є різнокольорові 10 червоних та 5 рожевих троянд. Скількома способами можна взяти:

а) три квітки; б) три квітки одного кольору; в) три квітки так, щоб серед них були як червоні, так і рожеві троянди.

100. Скількома способами можна розмістити на шаховій дошці (квадрат 8×8) дві тури, щоб одна не змогла побити іншу? (Одна тура може побити іншу, якщо вона знаходиться з нею на одній горизонталі або вертикалі шахової дошки).

101. У речовій лотереї розігрується 8 предметів. Усього в "урні" 50 квитків. Виймається 5 квитків. Скількома способами їх можна винути так, щоб а) рівно два з них були виграшні; б) принаймні два з них були виграшні?

102. Поїзд метро робить 10 зупинок, не враховуючи початкової, протягом яких виходять усі пасажири й не заходять нові. Скількома способами можуть розподілитися між цими зупинками 200 пасажирів, що ввійшли в поїзд на початковій зупинці?

103. В урні m білих та n чорних кульок. Скількома способами можна вибрати з урни r кульок, з яких білих буде k штук? (Вважати, що кульки одного кольору різні, занумеровані).

104. На площині проведено п’ять прямих. Кожна з них перетинає всі, що залишились, і ніякі три з цих прямих не перетинаються в одній точці. Знайдіть кількість точок перетину даних прямих.

105. На колі є *n* точок. Скільки існує опуклих многокутників, що вписані в це коло? Розв’яжіть задачу для n = 3, 4, 5.

106. Кожна сторона квадрата розбита на *n* частин. Скільки можна побудувати трикутників, вершинами яких є точки ділення?

107. В опуклому n-кутнику проведено всі діагоналі. Відомо, що жодні 3 з них не перетинаються в одній точці. На скільки частин поділяється при цьому многокутник?

108. На площині є 6 точок: А, В, С, Д, Е, М. Скільки можна побудувати шестикутників з вершинами в цих точках?

109. *n* паралельних прямих площини перетинають *m* паралельних прямих. Скільки паралелограмів утворилося в побудованій сітці?

110. На одній з паралельних прямих є 10 точок, а на іншій – 7. Кожна точка однієї прямої пов’язана з кожною точкою другої прямої. Знайдіть число точок перетину отриманих відрізків, якщо ніякі три відрізки не мають спільної точки.

Задачі підвищеної складності

1. Народна дружина налічує 100 чоловік, і кожний вечір на чергування виходять троє. Доведіть, що не можна так скласти графік чергування, щоб довільні два чоловіки чергували разом рівно один раз.

2. Скільки є трицифрових натуральних чисел, у десятковому запису яких немає непарних (парних) цифр? Знайти суму всіх цих чисел.

3. Нехай $p_1, p_2, \ldots, p_m$ – різні прості числа. Скільки дільників має число $q = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$, де $k_1, k_2, \ldots, k_m$ - деякі натуральні числа?

4. На площині проведено n прямих, n ≥3, причому жодні дві з них не паралельні і всі вони не мають спільної точки. довести, що:

а) існує точка перетину прямих, через яку проходять рівно дві прямі;

б) кількість точок, які фігурують в пункті а) не менша трьох.

Додаток Б

Анкета учня

Підкресліть або обведіть потрібну відповідь:

- клас 5 6 7 8 9

- Чи змінилося Ваше ставлення до математики після ознайомлення з комбінаторними задачами?

інтерес сильно підвищився	інтерес незначно підвищився	інтерес незмінний	інтерес дещо змінилося	інтерес помітно знизився

- Як вплинуло ознайомлення з комбінаторними задачами на Ваше особисте розуміння математики?

розуміння підвищилося	розуміння незначно підвищилося	розуміння не змінилося	розуміння дещо змінилося	розуміння помітно знизилося

- Які (2-3) комбінаторні задачі для Вас були найбільш цікаві?

- Які задачі зовсім нецікаві?

- Які комбінаторні задачі дозволили Вам відкрити в математиці щось нове для себе? Може, в іншій галузі? Що саме?

Додаток В

Анкета для учасників експерименту

Виберіть і обведіть потрібну відповідь

1. Я вивчаю математику, тому що

	Значною мірою	середнє	майже ні	ні
вона цікава	5 4	3	2	1
Це необхідно для моєї освіти	5 4	3	2	1
вона необхідна для моєї майбутньої професії	5 4	3	2	1
це заняття робить мене розумнішим	5 4	3	2	1
Я хочу стати математиком	5 4	3	2	1

2. Прослідкуйте, як змінювалося Ваше ставлення до математики за час її вивчення.

	дуже цікава	середнє	майже ні	Ні
4 клас	5 4	3	2	1
5 клас	5 4	3	2	1
6 клас	5 4	3	2	1
7 клас	5 4	3	2	1
8 клас	5 4	3	2	1
9 клас	5 4	3	2	1

2. Як Ви вважаєте, чи доцільно розв’язувати комбінаторні задачі на уроках математики?

3. Які форми роботи з математичними задачами Ви вважаєте заслуговуючими на увагу?

	значною мірою	середнє	майже ні	ні
1. Конкурси з розв’язування задач:				
- хто швидше?	5 4	3	2	1
- хто найбільш раціонально?	5 4	3	2	1
- хто наочніше?	5 4	3	2	1
- хто придумує більше способів?	5 4	3	2	1
- хто розв’яже більше задач?	5 4	3	2	1
2. Конкурси по складанню задач.	5 4	3	2	1
3. Розв’язування за індивідуальним планом	5 4	3	2	1
4. Тести з розбором помилок	5 4	3	2	1

4. Наведіть власні приклади життєвих ситуацій, що мають комбінаторний характер.

Додаток Г

На питання 1-6 відповідь дайте у відсотках із таких міркувань: 0% - відповідає відповіді “ні”, 100% - відповідає відповіді “так”.

1. Чи вважаєте Ви доцільним посилення ролі комбінаторики в математичній освіті учнів?	69
2. Чи сприяє розв’язування комбінаторних задач підвищенню рівня математичної підготовки учнів?	80
3. Чи використовуєте Ви в шкільний практиці матеріал з комбінаторики?	55
4. Чи зможете Ви організувати з цієї тематики навчально-дослідницьку роботу учнів?	32
5. Чи вважаєте Ви, що готові реалізувати міжпредметні зв’язки математики та інших дисциплін? Якщо так, то чи сприяє цьому, і якою мірою, розв’язування комбінаторних задач?	63
6. Чи сприяє розв’язування комбінаторних задач більш глибокому розумінню прикладного значення математики?	75,5
7. Які у Вас будуть побажання щодо змісту навчання математики, зокрема комбінаторики?	