МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им. А.М.ГОРЬКОГО

На правах рукописи

Л.Ф.ТАРГОНСКИЙ

ТАУБЕРОВЫ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО МЕТОДА ВОРОНОГО И ТЕОРЕМЫ МЕРСЕРОВА ТИПА

№ 01.001 /математический анализ/

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Киев - 1970

Работа выполнена на кафедре математического анализа Киевского государственного педагогического института им. А.М.Горького.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Н.А.ДАВЫДОВ

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
Б.И.КОРЕНБЛЮМ
кандидат физико-математических наук
Г.А.АЛИБЕКОВ

Ведущее предприятие - Институт математики АН УССР.

Автореферат разослан "   "________________197 г.
Защита диссертации состоится "   "____________1971 г.
на заседании Ученого совета Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького.

Отзывы просим присылать по адресу: г.Киев - 30, Бульвар Тараса Шевченко, 22/24.

Ученый секретарь Совета.

1

Пусть даны числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad /1/$$

с комплексными членами a_n $(n=0,1,\ldots)$ и матрица $A=\|a_{nk}\|$ с комплексными элементами a_{nk} $(n,k=0,1,2,\ldots)$. Обозначим через $S_n=\sum_{k=0}^{n} a_k$ частные суммы ряда /1/. Если ряды

$$t_n=\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}\, s_k \qquad /2/$$

сходятся для всех $n=0,1,2,\ldots$ и $\lim_{n\to\infty} t_n=S$ $(S\neq\infty)$, то говорят, что ряд /1/ или, что одно и то же, последовательность $\{S_n\}$ суммируется матрицей $A=\|a_{nk}\|$ / A - суммируется/ к числу S и записывают:

$$\lim_{n\to\infty} S_n=S\ (A) \quad \text{или} \quad S_n\to S\ (A).$$

Число S при этом называют обобщенной суммой ряда /1/ или A - суммой ряда /1/, а выражения /2/ - A - средними последовательности $\{S_n\}$.

Если $a_{nk}\geqslant 0$ для всех $n,k=0,1,2,\ldots$, то матрица $A=\|a_{nk}\|$ называется положительной.

Матрица $A=\|a_{nk}\|$ определяет метод суммирования и выражения: "ряд суммируется при помощи матрицы $A=\|a_{nk}\|$" и "ряд суммируется методом A" означает одно и то же.

Особо выделяют матрицы, суммирующие каждый сходящийся ряд к его сумме. Они называются регулярными или T -матрицами /матрицами Теплица/. Условия, определяющие регулярные матрицы, даются теоремой Сильвермана-Теплица /[1], теорема (4.1.11), стр. 79/. Матрицы, которые переводят всякую сходящуюся к числу S последовательность $\{S_n\}$ в последовательность $\{t_n\}$, сходящуюся к S', причем в общем случае $S \neq S'$, называются матрицами Кожима или K -матрицами. Условия, определяющие K -матрицы, даются теоремой Кожима /[1], теорема (4.1.1), стр. 74 /.

Будем говорить, что ряд /1/ суммируется к числу S положительным полиномиальным методом Вороного, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)S_0 + p(n-1)S_1 + \cdots + p(0)S_n}{p(0)+p(1)+\cdots+p(n)} = S, \qquad /3/$$

где $p(x) = a_0 x^{r-1} + a_1 x^{r-2} + \cdots + a_{r-1}$ -многочлен степени $r-1 \geq 0$, удовлетворяющий условию $p(0)>0$, $p(n) \geq 0$ $(n=1,2,\ldots)$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ - последовательность частных сумм ряда /1/. Это записывают следующим образом:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S\,(W;\,p(n)) \qquad \text{или} \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = S\,(W;\,p(n)).$$

В частности, если $p(x) = \dfrac{(x+r-1)(x+r-2)\ldots(x+1)}{(r-1)!}$, то

$$p(n) = \binom{n+r-1}{r-1} = \frac{(n+r-1)(n+r-2)\ldots(n+1)}{(r-1)!} > 0$$

для $n=0,1,2,\ldots$ и равенство /3/ в этом случае определяет метод суммирования Чезаро r -го порядка.

Заметим, что положительный полиномиальный метод Вороного регулярен /[2], стр. 89 /.

2.

Данная диссертация посвящена теоремам тауберова и мерсерова типа.

Теоремы, утверждающие регулярность матрицы $A = \| a_{nk} \|$, называются теоремами типа Коши.

Сущность теорем типа Таубера заключается в наложении на члены последовательности $\{S_n\}$ таких условий, которые гарантируют обратимость соответствующих теорем типа Коши. Среди работ, посвященных тауберовым теоремам для положительного метода Вороного следует отметить работы Агнью /[3], стр. 147/, А.Якимовского /[4], стр. 244-256/, И.И.Огиевецкого /[5]/.

Н.А.Давыдов в работах /[6],[7],[8]/ ввел понятие /с/-множества последовательности, доказал /с/-свойство методов Чезаро и Абеля-Пуассона и получил ряд теорем тауберова типа для этих методов, обобщающих известные теоремы тауберова типа Харди, Литтльвуда, Шмидта, Ландау, Евграфова, Обрешкова. Приведем результат Н.А. Давыдова для методов Чезаро. Сначала дадим определение /с/-множества последовательности.

Замкнутое выпуклое множество G в комплексной плоскости он назвал /с/-множеством последовательности S_n, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся число $\lambda(\varepsilon) > 1$ и такая последовательность отрезков $[n_k; m_k]$ $(k=1,2,\dots)$ натурального ряда чисел, что $S_{n_k+i} \in G_\varepsilon$ для $i=1,2,\dots, m_k-n_k$,

$$\frac{m_k}{n_k} \geqslant \lambda(\varepsilon) > 1 \quad (k=1,2,\dots), \quad \lim_{k\to\infty} n_k = \infty .$$

Здесь G_ε -замкнутое выпуклое множество, которое содержит в себе множество G и каждая точка границы которого отстоит от множества G на расстояние, меньше или равное $\varepsilon>0$. Если, в частности, /с/-множеством последовательности является точка, то эта точка называется /с/-точкой этой последовательности.

Бесконечно удаленная точка комплексной плоскости называется /с/-точкой последовательности S_n, если существует число $\lambda>1$, последовательность отрезков $[n_k; m_k]$ чисел натурального ряда, а также последовательность замкнутых выпуклых множеств G_k, стягивающихся к бесконечно удаленной точке и таких, что $S_n \in G_k$ для $n_k \leq n \leq m_k$, $\frac{m_k}{n_k} \geqslant \lambda > 1$ $(k=1,2,\ldots)$, $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = \infty$.

При этом говорят, что замкнутые выпуклые множества G_k стягиваются к бесконечно удаленной точке, если расстояние множеств G_k от точки $z=0$ стремится к бесконечности при $k\to\infty$.

/С/-свойство методов Чезаро суммирования рядов, установленное Н.А.Давыдовым, состоит в следующем:

Если ряд /1/ суммируется к числу S методом Чезаро порядка $\alpha>0$ и если замкнутое выпуклое множество G является /с/-множеством последовательности $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ -частных сумм этого ряда, то $S \in G$.

Если бесконечно удаленная точка является /с/-точкой последовательности $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, то для любого $\alpha>0$ $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |C_n^{(\alpha)}| = \infty$, где $C_n^{(\alpha)}$ -средние Чезаро порядка α для последовательности S_n.

Основной результат нашей первой главы составляет

Т е о р е м а. Если ряд /1/ суммируется к числу S каким-нибудь положительным полиномиальным методом Вороного и G является /с/-множеством последовательности $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ частных сумм этого ряда, то $S \in G$.

Если бесконечно удаленная точка является /с/-точкой последовательности $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, то средние полиномиального положительного метода Вороного этой последовательности $\{S_n\}$ не ограничены.

Из этой теоремы получен ряд теорем тауберова типа. Отметим некоторые из них.

Теорема 1. Пусть дан ряд /1/ и пусть каждый частичный предел последовательности $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, конечный или бесконечный, является /с/-точкой этой последовательности.

Если $S_n = O(1)\ (W; P(n))$, где $P(x)$ -полином степени $r \geq 0$, $P(0)>0$, $P(n) \geq 0 \quad (n=1,2,\dots)$,
то $S_n = O(1)$.

Если $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = S\ (W; P(n))$, где $P(x)$ -полином степени $r \geq 0$, $P(0)>0$, $P(n) \geq 0 \quad (n=1,2,\dots)$,
то

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S.$$

Теорема 2. Пусть дан ряд /1/ и возрастающая последовательность натуральных чисел n_k, и пусть частные суммы $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ этого ряда удовлетворяют условию:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\ |S_m - S_{n_k}| = r_1 < \infty \quad (r_1 \geq 0), \text{ когда } 1 < \frac{m}{n_k} \to 1 \ (k\to\infty)$$

или условию:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\ |S_{n_k} - S_m| = r_1 < \infty \quad (r_1 \geq 0), \text{ когда } 1 < \frac{n_k}{m} \to 1 \ (k\to\infty).$$

Если $S_n = O(1)\ (W; P(n))$, где $P(x)$ -полином степени

$r \geq 0, \ P(0) > 0, \ P(n) \geq 0 \quad (n=1,2,\dots),$

то $S_{n_k} = O(1)$.

Если $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = S \ (W; P(n))$, где $P(x)$ -полином степени $r \geq 0, \ P(0) > 0, \ P(n) \geq 0 \quad (n=1,2,\dots)$,

то $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} |S_{n_k} - S| \leq r_1$, т.е. множество всех частичных пределов последовательности S_{n_k} содержится в круге с центром в точке S и радиуса r_1 .

Теорема 3. Пусть дан ряд /1/ с действительными членами и пусть его частные суммы $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ удовлетворяют условию:

$\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} (S_m - S_{n_k}) \geq -r_1 > -\infty \ (r_1 \geq 0)$, когда $1 < \frac{m}{n_k} \to 1 \ (k\to\infty)$,

а также условию:

$\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} (S_{n_k} - S_m) \geq -r_2 > -\infty \ (r_2 \geq 0)$, когда $1 < \frac{n_k}{m} \to 1 \ (k\to\infty)$,

где n_k заданная возрастающая последовательность натуральных чисел.

Если $S_n = O(1) \ (W; P(n))$, где $P(x)$ -полином степени $r \geq 0, \ P(0) > 0, \ P(n) \geq 0 \quad (n=1,2,\dots)$,

то $S_{n_k} = O(1)$.

Если $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = S \ (W; P(n))$, где $P(x)$ -полином степени $r \geq 0, \ P(0) > 0, \ P(n) \geq 0 \quad (n=1,2,\dots)$,

то

$$S - r_2 \leq \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} S_{n_k} \leq \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} S_{n_k} \leq S + r_1 .$$

Теоремы 1-3 обобщают теоремы Н.А.Давыдова, доказанные им для методов Чезаро.

Теоремы типа Мерсера в их самой общей формулировке можно характеризовать как теоремы типа Таубера без условий Таубера.

Регулярная матрица A называется неэффективной для некоторого класса последовательностей, если она не суммирует ни одной расходящейся последовательности из этого класса.

Регулярная матрица называется вполне неэффективной, если она суммирует только сходящиеся последовательности.

Если регулярная матрица A неэффективна для некоторого класса последовательностей /вполне неэффективна/, то соответствующее ей регулярное преобразование /2/ также называется неэффективным /вполне неэффективным/.

В теоремах типа Мерсера устанавливают неэффективность /вполне неэффективность/ заданных матриц.

Общая теорема мерсерова типа, дающая необходимое и достаточное условие полной неэффективности регулярной матрицы, принадлежит А.Л.Брудно /[1], теорема 29, стр. 380/.

Для того чтобы T -матрица $A=\|a_{nk}\|$ была вполне неэффективной, необходимо и достаточно, чтобы существовало число $\delta_0>0$, такое, что

$$\varlimsup_{m\to\infty}\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}s_n\right|\geq\delta_0\varlimsup_{n\to\infty}s_n$$

для любой ограниченной последовательности $\{s_n\}$.

Однако, условия этой теоремы трудно проверить. Представляют большой интерес теоремы, дающие достаточные условия для того, чтобы регулярная матрица была вполне неэффективной или неэффективной на множестве ограниченных последовательностей. К таким теоремам следует отнести теоремы Агнью /[2], стр. 483/, теоремы Н.А.Давыдова /[9], стр.189-200/.

Чаще встречаются теоремы мерсерова типа для некоторых классов регулярных методов суммирования. Впервые такая теорема была получена Мерсером в 1907 году /[10], стр.206-224/.

Если $\alpha > 0$, $S \neq \infty$ и если

$$\alpha S_n + (1-\alpha)\frac{\sum_{k=0}^{n} S_k}{n} \to S \quad (n \to \infty),$$

то

$$S_n \to S \ (n \to \infty).$$

Эта теорема получила многочисленные обобщения в работах Шура /[11], стр. 447-458/, Белинфанте /[12], стр. 312-315/, Давыдова Н.А. /[13], стр. 73-77, [14], стр. 86-89/, Польняковского /[15], стр. 1-24/ и других.

Во второй главе доказаны следующие четыре теоремы:

Теорема 1. Пусть $\varphi(x)$ -неубывающая, $S(x)$ -непрерывная, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ -произвольные действительные функции в промежутке $[0;\infty)$, $\varphi(0)=0$, $\alpha(x)+\beta(x) \to \gamma > 0 \ (x \to \infty)$.

Если $\alpha(x) \geqslant 0$ для $x \in [0;\infty)$ и $\varphi(x)>0$ для $x > X$, то из

$$\alpha(x) S(x) + \frac{\beta(x)}{\varphi(x)} \int_0^x S(t)\, d\varphi(t) = O(1) \quad (x \to \infty)$$

следует

$$\frac{1}{\varphi(x)} \int_0^x S(t)\, d\varphi(t) = O(1) \ (x \to \infty).$$

Если кроме того $\alpha(x) \geqslant a > 0$, то $S(x) = O(1) \ (x \to \infty)$.

Теорема 2. Пусть $\varphi(x)$ -неубывающая функция в промежутке $[0;\infty)$, $\varphi(0)=0$, $\varphi(x) \to \infty \ (x \to \infty)$, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ -произвольные действительные функции, определенные в промежутке $[0;\infty)$

и удовлетворяющие условиям
$\alpha(x)+\beta(x)\to\gamma>0\ (x\to\infty)$, $0<a\leq\alpha(x)\leq b<\infty$.
$S(x)$ - непрерывная функция на $[0;\infty)$.

Если

$$\alpha(x)S(x)+\frac{\beta(x)}{\varphi(x)}\int_0^x S(t)d\varphi(t)\to\gamma S\ (x\to\infty)\ (S\neq\infty),$$

то

$$S(x)\to S\ (x\to\infty).$$

Показано, что условия, которым удовлетворяют функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, существенны для справедливости утверждения теоремы 2.

Теорема 3. Пусть α_n и β_n последовательности действительных чисел, $\alpha_n+\beta_n\to 1\ (n\to\infty)$ и пусть задано преобразование

$$t_n\equiv\alpha_n S_n+\beta_n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Delta^{n-k}\frac{1}{\gamma k+1}\cdot S_k,$$

где $Re\gamma>0$.

Если $\alpha_n\geq 0\ (n\geq n_0)$, то из $t_n=O(1)\ (n\to\infty)$ следует

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Delta^{n-k}\frac{1}{\gamma k+1}\cdot S_k=O(1)\quad(n\to\infty),$$

а из $t_n\to S$ следует

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Delta^{n-k}\frac{1}{\gamma k+1}\cdot S_k\to S^*\quad(n\to\infty),$$

где S^*, вообще говоря, не равно числу S.

Если же справедливы неравенства

$$0<a\leq\varliminf_{n\to\infty}\alpha_n\leq\varlimsup_{n\to\infty}\alpha_n\leq b<\infty,$$

то из $t_n\to S\ (n\to\infty)$ следует $S_n\to S\ (n\to\infty)\ (S\neq\infty)$.

Теорема 4. Пусть α_n и β_n последовательности комплексных чисел, $\alpha_n+\beta_n\to 1\ (n\to\infty)$ и пусть задано преобразование

$$t_n \equiv \alpha_n S_n + \beta_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} \frac{1}{\gamma k+1} \cdot S_k ,$$

где γ комплексное число, причем $\gamma k+1 \neq 0$ $(k=1,2,\ldots)$.

Если $Re(\alpha_n \gamma) \geq a > 0$ и $|\alpha_n| \leq C$, то из $t_n \to S$ $(n \to \infty)$ $(S \neq \infty)$ следует $S_n \to S$ $(n \to \infty)$.

Результаты данной работы докладывались и обсуждались на городском семинаре по теории функций / г.Киев, сентябрь 1967/, и на пятой научной конференции молодых математиков Украины / г.Киев, 1970 г./.

Основное содержание диссертации отражено в работах [16] - [18].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Р.Кук. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. Физматгиз, М., 1960.

2. Г.Харди. Расходящиеся ряды, М., ИЛ, 1951.

3. Agnew. Tauberian theorems for Nörlung Summability, Math. Review 8, N3, 1947, 147.

4. Jakimowski. On a converse of Abel's theorem Proceeding of the American, Math. Soc. 3, 1952, 244-256.

5. И.И.Огиевецкий. Некоторые тауберовы теоремы. УМН, № 4. 1964.

6. Н.А.Давыдов. Об одном свойстве методов Чезаро суммирования рядов, Матем. сб., 38 /30/, 1956, 509-524.

7. Н.А.Давыдов. Об одном свойстве одного класса интегралов Стильтьеса, Матем. сб., 48 /90/, 1959, 429-446.

8. Н.А.Давыдов. /С/-свойство методов Чезаро и Абеля-Пуассона и теоремы тауберова типа. Матем. сб., 60, /102/, 1963, 186-206.

9. Н.А.Давыдов. Неэффективные регулярные линейные интегральные преобразования. Сб. "Теория функций, функциональный анализ и их приложения", Изд-во ХГУ, Харьков, вып.6, 1968, 189-200.

10. Mercer. On the limits of real variants, Proceedings of the London Mathematical Society, (2), vol 5, 1907, 206-224.

11. Schur, Über die Äquivalenz der Cesaroschen und Hölderschen Mittelwerte. Math. Ann.; 1913, 74, 447-458.

12. Belinfante, Über einen Grenzwertsatz aus der unendlichen Folgen. Math. Ann., 101, 1929.

13. Н.А.Давыдов. Обобщение мерсеровой теоремы Кноппа-Белинфанте. Сб. "Теория функций, функциональный анализ и их приложения", вып. 3, Изд-во ХГУ, Харьков, 1966.

14. Н.А.Давыдов. Обобщение теоремы Мерсера. УМН, 20, вып. 6, /126/, 1965.

15. Polniakowski. Polynomial Hausdorff transformations. Annales Polonici Math., v1, 1958, 1-24.

16. Л.Ф.Таргонский. Одна теорема Мерсерова типа. Сб. "Теория функций, функциональный анализ и их приложения", вып. 8, Изд-во ХГУ, Харьков, 1969, 29-43.

17. Л.Ф.Таргонский. /C/-свойство полиномиальных положительных методов Вороного и теоремы тауберова типа. Укр.мат. журнал, № 5, 1970, 625-636.

18. Л.П.Таргонський. Узагальнення мерсерової теореми М.О.Давидова. П"ята наукова конференція молодих математиків України. Тези доповідей. Київ. 1970. 72-73.

БФ 22673. 17.12.1970 г. Объем 1 п.л. Зак. 3610. Тир. 150 экз
Книжная типография № 5, Киев, Репина, 4.