

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені М.П. ДРАГОМАНОВА**

На правах рукопису

БУГАЄЦЬ Наталія Олександрівна

УДК 378.016:004.94

**РОЗВИТОК НАВЧАЛЬНО-ДОСЛІДНИЦЬКИХ УМІНЬ
СТУДЕНТІВ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ У
ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ІНФОРМАТИКИ**

13.00.02 – теорія та методика навчання (інформатика)

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата педагогічних наук

Науковий керівник –
дійсний член НАПН України,
доктор педагогічних наук, професор
Жалдак Мирослав Іванович

Київ – 2016

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ.....	4
ВСТУП.....	5
РОЗДІЛ I. ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГІЧНІ ОСНОВИ РОЗВИТКУ	
НАВЧАЛЬНО-ДОСЛІДНИЦЬКИХ УМІНЬ СТУДЕНТІВ.....	15
1.1 Дослідницька навчально-пізнавальна діяльність як основа формування та розвитку навчально-дослідницьких умінь студентів...15	15
1.2 Основні компоненти навчально-дослідницької діяльності студентів....31	31
1.3 Загальні методи наукового дослідження в процесі навчально- дослідницької діяльності студентів фізико-математичних спеціальностей.....54	54
1.4 Математична інформатика. Інформаційно-комунікаційні технології математичного призначення як засоби розвитку навчально- дослідницьких умінь студентів.....75	75
Висновки до першого розділу.....	89
 РОЗДІЛ II. МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ РОЗВИТКУ НАВЧАЛЬНО- ДОСЛІДНИЦЬКИХ УМІНЬ СТУДЕНТІВ У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ІНФОРМАТИКИ.....	
2.1 Особливості методичної системи навчання математичної інформатики студентів під час вивчення курсу «Комп’ютерні математичні пакети».....90	90
2.2 Дидактична система задач як засіб розвитку навчально- дослідницьких умінь студентів.....116	116
2.3 Задачі з параметрами.....129	129
2.4 Графічні дослідження за допомогою засобів комп’ютерних математичних пакетів.....139	139
2.5 Моделювання анімаційних наочностей.....159	159
2.6 Задачі на оптимізацію.....169	169

2.7 Програмування візуально орієнтованого інтерфейсу в програмі Maple...	188
2.8 Проведення педагогічного експерименту і аналіз його результатів.....	194
Висновки до другого розділу.....	205
ВИСНОВКИ.....	208
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	210
ДОДАТКИ.....	232

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

ІКТ – інформаційно-комунікаційні технології.

НСК – найменше спільне кратне.

НСД – найбільший спільний дільник.

ППЗ – педагогічний програмний засіб.

СКМ – системи комп'ютерної математики.

ВСТУП

Актуальність теми дослідження. Вища освіта на всіх рівнях має бути заснована на сучасних наукових дослідженнях і сприяти розвитку інновацій і творчості людей. Значним є потенціал програми вищої освіти, що включає прикладні науки, для сприяння інноваціям. А число людей з дослідницькими компетентностями має зростати [19]. В інноваційних процесах, які активно розвиваються в освіті, чітко виявляються дві тенденції [65, с.6]:

– гуманізація навчання, перехід від «жорсткої» системи формування виконавців, до системи формування особистості людини, здатної критично мислити і психологічно готової до вибору рішень з кількох альтернативних варіантів;

– наукова орієнтація освіти, перехід від простого вивчення відомих наукових фактів до вивчення разом з тим і практичного засвоєння методів наукової діяльності.

В системі вищої освіти існує важлива потреба [65, с.5]: підготовка фахівців, які володіють уміннями і навичками дослідницької діяльності, здатних донести результати своєї інтелектуальної праці до користувачів наукоємної продукції.

Важливим завданням сучасної вищої освіти є розвиток інтелектуального потенціалу молоді, необхідного і достатнього для забезпечення конкурентоспроможності на внутрішньому та міжнародному ринках праці, раціональності поведінки, готовності ставити і розв'язувати дослідницькі завдання. Для того, щоб посісти гідне місце в житті, молода людина повинна володіти відповідною системою компетентностей, що дозволить їй самостійно здобувати нові знання і уміння, швидко адаптуватися до нових умов, творчо підходити до розв'язування різноманітних проблем.

До важливих характеристик сучасного фахівця відносяться гнучкість, мобільність, критичність та креативність мислення, вміння презентувати себе, вміння генерувати нові ідеї, здобувати, аналізувати дані, отримані з різних джерел, застосовувати їх для індивідуального розвитку і самовдосконалення, бути здатним

до вибору численних альтернатив під час прийняття необхідних рішень. Всі ці характеристики є невід'ємними компонентами дослідницьких умінь людини.

Формування і розвиток дослідницьких умінь студентів можна розглядати як важливу педагогічну проблему, вирішення якої спрямоване на вдосконалення їхньої професійної підготовки. В багатьох сучасних дослідженнях, що стосуються проблеми розвитку дослідницьких умінь учнів і студентів, відзначається, що в суспільстві суттєво змінилися вимоги до освіти. Сьогодні ставиться акцент на загальний інтелектуальний розвиток, заохочення креативності та самостійності. Знання швидко застарівають і завдання вищої школи – сформувати у студента розуміння, що необхідно стати самому собі постійним вчителем. Необхідною характеристикою сучасного фахівця є наявність у нього сформованих дослідницьких умінь та навичок, що дозволяє йому ефективно працювати в швидко мінливому світі.

Цілеспрямована діяльність щодо розв'язування цих проблем дозволить забезпечити природне включення молодих людей, які займаються наукою і технікою, в систему соціально-економічних відносин суспільства.

Це вимагає створення в навчальній практиці необхідних умов для включення студента в активну пізнавальну діяльність, зокрема в навчально-дослідницьку. В процесі навчально-дослідницької діяльності відбувається розвиток інтелектуального та творчого потенціалу студентів, ознайомлення з методами наукового пізнання, формування інтересу до навчального матеріалу, що дозволяє формувати загальнокультурні та професійні компетентності. В результаті цієї діяльності студенти отримують нові знання, в них формуються і розвиваються навчально-дослідницькі вміння і навички.

Створення навчально-інноваційного середовища, необхідного в процесі розв'язування цих проблем, передбачає поєднання навчального процесу на різних стадіях підготовки з науковим пошуком в ході розв'язування теоретичних і практичних завдань, в тому числі в ході розробки нових технологій, методик, послуг, в процесі досліджень в галузі фундаментальних наук, вивчення оточуючого середовища і т.д.

В ході аналізу методичної та психолого-педагогічної літератури з'ясовано, що питанням організації дослідницької діяльності студентів в процесі навчання присвячено досить багато наукових праць.

Над питаннями вивчення психолого-педагогічних особливостей дослідницької діяльності учнів і студентів працювали В.І.Андрєєв [7], [93], Г.А.Балл [11], В.І.Загвязинський [83], В.В.Краєвський [111], І.Я.Лернер [124], Ю.І.Машбиць [133], П.І.Підкасистий [157], Д.Пойа [161], І.С.Якиманська [213] і ін.

Перші роботи, в яких розглядається дослідницький метод навчання, належать А.Я. Герду, А. Дістервегу, В.Ф. Наталі, Б.Е. Райкову, М.М. Рождественському, В.Ю. Ульянінському, К.П. Ягодовському [176]. Про дослідницький метод як один із методів проблемного навчання говориться в роботах Л.С. Рубінштейна [177], Г.С. Костюка [110], В.Т.Кудрявцева [115], А.М.Матюшкіна [131], М.І. Махмутова [132], І.Я. Лернера [124], [125] та ін. В працях В.І. Андрєєва [7], Д. Пойа [161], Ю.Н.Кулюткіна [117], М.І.Меєровича [134], І.І.Ільсова [92] та ін. дослідницький метод розглядається як метод пошуків та відкриттів, а також розкриваються основи дослідницької та евристичної діяльності учнів і студентів.

В Національній стратегії розвитку освіти в Україні [144] одним із пріоритетів визначається впровадження в освітню систему інформаційно-комунікаційних технологій, що надасть можливості забезпечити удосконалення навчально-виховного процесу, доступність та ефективність освіти, підготовку молодого покоління до життєдіяльності в інформаційному суспільстві.

Як зазначає М.І.Жалдак [78, с.5], важливим для розв'язування даних проблем є розробка нових комп'ютерно-орієнтованих методичних систем навчання – нового змісту навчання, нових засобів, організаційних форм і методів навчання, підготовки, супроводу, аналізу, управління навчальним процесом, розрахованих на значний ухил у самостійну, дослідницького, творчого характеру навчальну діяльність, і разом з тим, педагогічно виваженого та доцільного використання, поряд з традиційними, нових комп'ютерно-орієнтованих технологій навчання.

Розвиток навчально-дослідницьких умінь має особливо важливе значення в підготовці студентів фізико-математичних та інформатичних спеціальностей в

процесі навчання основ математичної інформатики та інформаційних технологій математичного призначення, які є дослідницьким інструментом в навчально-пізнавальній діяльності, на основі яких можна створити зручне комп'ютеризоване середовище для експериментування, для побудови та дослідження математичних моделей реальних об'єктів, процесів і явищ у певній предметній галузі.

Уміння використовувати інформаційні технології математичного призначення як засіб навчально-дослідницької діяльності та як дослідницький інструментарій є важливим компонентом в системі професійних компетентностей студентів фізико-математичних спеціальностей. Розвиток навчально-дослідницьких умінь майбутніх учителів математики, інформатики, економіки і фізики в процесі навчання основ математичної інформатики та інформаційних технологій математичного призначення є невід'ємною складовою їхнього професійного становлення.

Важливою є проблема – як поєднати навчання, пізнавальну діяльність з отриманням актуального наукового і професійного результату.

На шляху розв'язування даної проблеми важливого значення набуває формування сукупності знань, умінь і навичок, які є основою дослідницького підходу і повинні бути розвинені у студентів у процесі навчання.

Питанням, пов'язаним з організацією навчально-дослідницької діяльності та формуванням і розвитком навчально-дослідницьких умінь з використанням інформаційних технологій присвячені роботи В.Б.Дем'яненко [62], В.О.Далінгера [58]–[61], О.А.Дубровіної [64], А.Ю.Карлащук [98], М.В.Кларіна [99], Г.В.Лиходєєвої [127], Т.О.Олійник [150], І.В.Роберт [173], П.Ю.Романова [175], О.І.Скафи [186], Г.В.Токмазова [193] та ін.

Свідченням ефективності використання програмного забезпечення математичного призначення для підтримки навчання дисциплін природничо-математичного циклу учнів і студентів та для розширення досвіду експериментальної та дослідницької роботи в загальноосвітній і вищій школі є численні роботи представників вітчизняної групи науковців під керівництвом М.І.Жалдака [69]–[80] – Є.Ф.Вінниченка [43], Ю.В.Горошка [52],

Л.В.Грамбовської [53], Т.Г.Крамаренко [112], [113], С.А.Ракова [166], [167], Ю.С.Рамського [168]–[170], С.О.Семерікова [184], Ю.В.Триуса [195] та ін. Авторським колективом під керівництвом М.І.Жалдака розроблено програмно-методичний комплекс GRAN, який на сьогодні є педагогічним програмним засобом для підтримки навчальних математичних досліджень під час навчання математики і частково фізики в середніх і вищих педагогічних навчальних закладах.

Аналіз проблем інформатичної освіти, розробка теоретичних і методичних аспектів навчання інформатики в сучасних умовах знайшли відображення в працях А.П.Єршова, В.М.Монахова [68], В.Ю.Бикова [16], В.М.Глушкова [49], Ю.В.Горошка [52], М.І.Жалдака [69]–[80], В.І.Клочка [100], [101], Т.П.Кобильника [102], [103], К.К.Коліна [105], В.В.Лаптева [119], М.П.Лапчика [120], Є.В.Маєвського [129], Н.В.Морзе [138]–[141], Ю.С.Рамського [168]–[170], С.А.Ракова [166], [167], О.А.Самарського [181], С.О.Семерікова [184], Ю. В. Триуса [195], С.М.Яшанова [214] та інших.

Проте в методиці навчання інформатики недостатньо розроблені питання формування і розвитку навчально-дослідницьких умінь у процесі вивчення математичної інформатики та програмного забезпечення математичного призначення студентами фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів.

Важливим завданням є наповнення курсу математичної інформатики таким навчальним матеріалом, під час вивчення якого можна було б забезпечити можливість активно включатися в дослідницьку діяльність, в процесі якої розвиваються дослідницькі уміння.

Таким чином, актуальність теми даного дослідження визначається соціальним замовленням на творчих, самостійних, високоінтелектуальних фахівців, потребою вищої школи в розробці методичної системи навчання основ математичної інформатики, спрямованої на розвиток навчально-дослідницьких умінь студентів, необхідністю збагачення існуючої практики організації навчально-дослідницької діяльності.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Обраний напрям досліджень входить до плану науково-дослідної роботи кафедри теоретичних основ інформатики Національного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова. Зокрема, робота пов'язана з темою «Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання фізико-математичних та інформатичних дисциплін у педагогічних навчальних закладах» (код державної реєстрації 0111U000526). Тема дисертації затверджена Вченою радою Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова (протокол №11 від 27 квітня 2010 року) та погоджена у бюро Міжвідомчої ради з координації наукових досліджень з педагогічних і психологічних наук України Національної Академії педагогічних наук України (протокол №6 від 28.09.2010).

Об'єкт дослідження – процес навчання математичної інформатики студентів фізико-математичних спеціальностей в педагогічному університеті.

Предмет дослідження – розвиток навчально-дослідницьких умінь студентів у процесі навчання математичної інформатики на базі курсу «Комп'ютерні математичні пакети».

Мета дослідження полягає в науковому обґрунтуванні окремих компонентів методичної системи навчання математичної інформатики студентів фізико-математичних спеціальностей, спрямованого на розвиток навчально-дослідницьких умінь студентів.

Гіпотеза дослідження: систематичне, цілеспрямоване та науково обґрунтоване навчання сучасних теоретичних та технологічних основ математичної інформатики є ефективним засобом розвитку навчально-дослідницьких умінь студентів та сприяє підвищенню рівня інформатичної культури майбутніх вчителів, формуванню відповідних професійних і загальнокультурних компетентностей, особистісних якостей студентів.

Відповідно до мети і гіпотези дослідження були поставлені такі **завдання**:

1) на основі психолого-педагогічного аналізу наукової літератури виявити теоретичні основи формування і розвитку навчально-дослідницьких умінь студентів у процесі навчання математичної інформатики;

2) визначити сукупність психолого-педагогічних умов, необхідних для розвитку навчально-дослідницьких умінь студентів фізико-математичних спеціальностей;

3) розробити окремі компоненти методичної системи навчання основ математичної інформатики, зокрема інформаційних технологій математичного призначення, спрямованого на розвиток навчально-дослідницьких умінь студентів;

4) виявити, розв'язування яких типів задач дозволяє підвищити ефективність розвитку певних складових навчально-дослідницьких умінь;

5) розробити і впровадити в навчальний процес у вищих навчальних закладах систему творчих задач, розв'язування яких має сприяти розвитку навчально-дослідницьких умінь студентів;

6) експериментально перевірити педагогічну ефективність розроблених компонентів методичної системи навчання студентів.

Для розв'язування поставлених завдань застосовувались такі загальнонаукові **методи досліджень**:

методи теоретичного рівня: аналіз наукової, навчальної та методичної літератури з питань психології та педагогіки стосовно особливостей і способів розвитку навчально-дослідницьких умінь студентів (1.1 – 1.3, 2.1, 2.2 – тут і далі – підрозділи дисертації), з питань інформатики й методики її навчання у вищих навчальних закладах (1.3, 1.4), порівняння (1.2, 2.1, 2.3 – 2.7), аналіз і синтез, індукція та дедукція (1.1 – 1.4, 2.1 – 2.8, висновки);

методи емпіричного рівня: педагогічне спостереження (2.1, 2.3, 2.8), бесіди, анкетування, анкетування викладачів і студентів (2.8), вивчення результатів навчальної діяльності студентів (2.1 – 2.8), узагальнення власного педагогічного досвіду та досвіду колег з інших навчальних закладів (2.8), педагогічний експеримент у його конкретних формах (констатувальний, пошуковий, формувальний) (2.8), методи математичної статистики для аналізу і опрацювання експериментальних даних (2.8).

Методологічну основу дисертації складають: загальнодидактичні положення про структуру методичної системи навчання (С.І.Архангельський [9],

Ю.О.Бабанський [10], М.І.Бурда [40], М.І.Жалдак [69]–[80], І.О.Зимня [87], Ю.М.Колягін [106], Н.В.Морзе [141], Ю.В.Триус [195]); положення психології та педагогіки про особливості та розвиток навчально-дослідницьких умінь студентів (В.І.Андрєєв [7], Дж.Брунер [21], А.В.Брушлінський [20], Ю.Н.Кулюткін [117], [118], І.Я.Лернер [124], [125], Ю.І.Машбиць [133], М.Л.Смульсон [188]); теорія діяльнісного підходу до процесу навчання (Л.С. Виготський [46], С.Л.Рубінштейн [177], Н.Ф.Тализіна [190], П.Я.Гальперін [47]); теорія особистісно-орієнтованого навчання (Б.Г.Ананьєв [5], Г.С.Костюк [110], О.М.Леонтьєв [123], А.В.Усова [197], І.С.Якиманська [213]), концепції розвитку творчих здібностей учнів (В.І. Андрєєв [93], Д.Б.Богоявленська [18], В.А.Крутецький [45], В.О.Моляко [85]); основи проблемного навчання (В.Т.Кудрявцев [115], О.М.Матюшкін [131], М.І.Махмутов [132]); проектна технологія (Н.В. Морзе [138]–[141], О.І.Савенков [179], О.Є. Полат [148]); положення стосовно формування основ інформатичної культури та використання ІКТ у процесі навчання (В.Ю.Биков [16], М.І.Жалдак [69]–[80], А.П.Єршов [68], М.П.Лапчик [120], Н.В.Морзе [138]–[141], С.А.Раков [166], [167], Ю.С.Рамський [168]–[170], С.О.Семеріков [184], Ю.В.Триус [195]).

В основу дослідження покладено також основні положення Законів України «Про Вищу освіту», «Про Національну програму інформатизації», Національної доктрини розвитку освіти в Україні у XXI столітті, Національної стратегії розвитку освіти в Україні на період до 2021 року.

Наукова новизна дослідження полягає у тому, що:

– теоретично обґрунтовано психолого-педагогічні умови розвитку навчально-дослідницьких умінь студентів у процесі навчання основ математичної інформатики;

– розроблено окремі компоненти методичної системи навчання, спрямованого на розвиток умінь і навичок навчально-дослідницької діяльності у студентів фізико-математичних спеціальностей в процесі навчання математичної інформатики;

- визначено основні напрями і можливості використання засобів систем комп'ютерної математики для розвитку навчально-дослідницьких умінь студентів фізико-математичних спеціальностей;
- розроблено систему задач, розв'язування яких сприяє формуванню і розвитку навчально-дослідницьких умінь студентів;
- подальшого розвитку набули питання, що стосуються проблем міждисциплінарних досліджень у процесі навчання математичної інформатики.

Практичне значення одержаних наукових результатів полягає у розробці та впровадженні у практику професійної підготовки студентів фізико-математичних спеціальностей окремих компонентів методичної системи навчання математичної інформатики, спрямованого на розвиток навчально-дослідницьких умінь.

Особистий внесок автора в одержаних наукових результатах полягає в теоретичному обґрунтуванні і розробці підходів до розв'язування досліджуваної проблеми; в розробці і реалізації окремих компонентів методичної системи навчання основ математичної інформатики студентів вищих навчальних закладів, спрямованої зокрема на формування і розвиток навчально-дослідницьких умінь студентів; у розробці і доборі задач, розв'язування яких передбачає використання засобів інформаційних технологій математичного призначення; у розробці методичних рекомендацій для викладачів та студентів.

Обґрунтованість і вірогідність отриманих у ході дослідження результатів забезпечується методологічними основами дослідження, відповідністю основних положень дисертації результатам психолого-педагогічних і дидактичних досліджень, аналізом значного обсягу теоретичного та емпіричного матеріалу, відповідністю методів дослідження його меті і завданням, впровадженням результатів дослідження у педагогічну практику, результатами педагогічного експерименту.

Апробація та впровадження результатів дисертаційного дослідження здійснювались у Ніжинському державному університеті імені Миколи Гоголя (довідка № 05/215 від 02.06.2016 р.), Кіровоградському державному педагогічному

університеті імені Володимира Винниченка (довідка № 610 від 01.06.2016 р.), Сумському державному педагогічному університеті імені А.С.Макаренка (довідка № 989 від 25.05.2016 р.), Тернопільському педагогічному університеті імені Володимира Гнатюка (довідка №1097-33/03 від 19.09.2016 р.).

Основні положення дисертаційного дослідження доповідались автором на *конференціях*: Міжнародна науково-практична конференція «Освітні вимірювання в інформаційному суспільстві» – Київ, 26–29 травня, 2010р.; Міжнародна науково-практична конференція «FOSS» – Львів, 1–6 лютого 2011р.; Всеукраїнська науково-методична конференція «Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики, фізики, інформатики у середніх та вищих навчальних закладах» – Кривий Ріг, 17–18 лютого 2011р.; Всеукраїнська науково-практична конференція «Інформаційно-комунікаційні технології навчання» – Умань, 3–4 жовтня 2011 р.; Міжнародна науково-практична конференція «Інформаційні технології в освіті, науці і техніці» – Черкаси, 25–27 квітня 2012 р.; Міжнародна науково-практична конференція «FOSS» – Львів, 22–24 квітня 2014 р.; Міжнародна науково-практична конференція «Сучасні тенденції розвитку освіти і науки в інтердисциплінарному контексті» – Ченстохова–Ужгород, 24–25 березня 2016 р.; *семінарах*: 17 травня 2016 р. Всеукраїнський науково-методичний семінар з питань використання засобів сучасних інформаційних технологій у навчальному процесі, доповідь: «Розвиток навчально-дослідницьких умінь студентів фізико-математичних спеціальностей у процесі навчання математичної інформатики» (Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова).

Публікації. Результати дисертаційного дослідження опубліковано в 18 роботах. Серед них – 10 у фахових збірниках наукових праць і журналах, 7 – в збірниках матеріалів і тез конференцій. З них 16 робіт – одноосібні.

Обсяг і структура дисертації. Робота складається із вступу, двох розділів, висновків, 12 додатків, списку використаних літературних джерел – 225 найменувань. Основний обсяг роботи – 209 сторінок тексту, 9 таблиць, 55 рисунків. Загальний обсяг роботи – 283 сторінки.

РОЗДІЛ І. ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГІЧНІ ОСНОВИ РОЗВИТКУ НАВЧАЛЬНО-ДОСЛІДНИЦЬКИХ УМІНЬ СТУДЕНТІВ

1.1 Дослідницька навчально-пізнавальна діяльність як основа формування та розвитку навчально-дослідницьких умінь студентів

1.1.1 Дослідницький підхід у навчанні

Перед викладачем вищого освітнього закладу стоїть відповідальне завдання – підготовка спеціаліста, здатного мислити творчо, самостійно приймати обґрунтовані та відповідальні рішення у складних ситуаціях, орієнтуватися в інформаційному просторі.

Навчання у вищому навчальному закладі значною мірою спирається на навчально-пізнавальні дослідження, тобто в основі вузівської підготовки фахівців повинен лежати принцип організації навчально-дослідницької та наукової роботи студентів. Це означає, що в процесі навчання слід створювати умови для застосування форм і методів самостійного, активного пізнання різноманітних явищ, коли студент стає значною мірою самостійним дослідником, бо щось досліджуючи, людина разом з тим і навчається, здобуває нові знання. Студент повинен бути не просто виконавцем настанов викладача, а й активним учасником пошуку нових знань [146].

Зародження перших форм навчально-дослідницької діяльності молоді спостерігається в початкових закладах країн Стародавнього Світу, що цілком правомірно вважаються не тільки освітніми, але і науковими центрами. Серед них можна назвати школу Піфагора, Академію Платона, Лікей Арістотеля, Александрійський Мусейон та багато інших. Це були товариства, де об'єднувалися учні та вчителі, які прагнули до самовдосконалення шляхом пошуку істини в спільних дослідженнях [176].

Саме в Давній Греції виникли такі форми пізнавальної діяльності як систематичне доведення, раціональне обґрунтування, логічна дедукція, ідеалізація, з яких надалі розвивалася наука і дослідницька діяльність.

Ідеї дослідницького методу навчання з'явилися в педагогіці в останній третині

XIX століття. Біолог О.Я.Герд, історик М.М.Стасюлевич в Росії, хімік Г.Е.Армстронг, Т.Гекслі в Великобританії сформулювали загальну ідею методу, який педагоги називали по-різному: евристичним, лабораторно-евристичним, природничо-науковим, дослідницьким принципом, підходом тощо. Впровадження в практику навчання дослідницького методу сприяло ліквідації системи не завжди раціонального заучування навчального матеріалу, формуванню готовності до самостійної розумової діяльності, створювало атмосферу захопленості навчанням, давало учням радість самостійного пошуку і відкриття [176].

Не можна обійти стороною досвід німецьких дослідницьких університетів XIX століття, в основу діяльності яких покладені ідеї І.Г.Фіхте та Ф.Шлеєрмахера, реалізовані на практиці завдяки Вільгельму фон Гумбольдту, який розглядав університет як моральну душу суспільства, а університетську освіту як елітарну, що покликана слідувати за принципом «навчаючись – досліджуй, досліджуючи – навчайся» [56].

Пильна увага до дослідницької діяльності студентів у процесі навчання спостерігалася в 20 – 30-ті роки XX ст.. Перші роботи, пов'язані з навчально-дослідницькою діяльністю учнів і студентів, належать Б.В.Всесвятському, В.Ф.Наталі, А.П.Пінкевичу, Б.Є.Райкову, С.В.Рождественському та ін. [176].

Райков Б.Є. зазначає, що словесний метод можна застосувати так, що відомі факти і закономірності будуть повідомлятися в готовому вигляді, а можна, через бесіду, через сумісне обговорення зі студентами проблеми підвести їх до самостійного пізнання істини, «відкриття» невідомих студентам раніше фактів і закономірностей [176]. Наочність може використовуватися для ілюстрації відомих фактів, а може слугувати матеріалом для досліджень та відшукування відповідних самостійних висновків. Лабораторні заняття можуть застосовуватися для підтвердження наявних знань, для їх конкретизації, а можуть слугувати основою самостійного здобування знань шляхом пошуку і формулювання власних висновків.

Більш детальне, всебічне, системне вивчення дослідницької діяльності в навчанні та проблем її організації в навчальному процесі почалося в 60-ті роки

XX ст. Цим проблемам присвячені роботи В.І.Андрєєва [7], І.Я.Лернера [124], [125], В.В.Успенського [199] та ін.

І.Я.Лернер розглядає дослідницький метод як основний метод навчання, формування умінь і навичок творчої діяльності. Сутність дослідницького методу обумовлена його функціями. По-перше, в процесі його застосування формуються риси творчої діяльності. По-друге, здійснюється творче засвоєння знань, студенти вчаться застосовувати відомі знання для розв'язування проблемних задач та здобувати нові знання в результаті такого розв'язування. По-третє, на основі цього забезпечується оволодіння методами наукового пізнання в процесі діяльності стосовно пошуку цих методів. І, нарешті, дослідницька діяльність є умовою формування інтересу, потреби в творчій діяльності, оскільки поза діяльністю мотиви, що проявляються в інтересах та потребах, не виникають. Призначення дослідницького методу полягає в організації пошукової, творчої діяльності студентів для розв'язування проблемних задач [124, с.103].

У процесі реалізації дослідницького методу у студентів формуються такі елементи творчої діяльності, як самостійне перенесення знань і умінь у нову ситуацію, бачення задачі в знайомій ситуації, виявлення нової функції і структури об'єкта, самостійне комбінування з відомих способів діяльності нового, альтернативного підходу до пошуку розв'язання проблеми.

Цінність дослідницького методу полягає передусім у тому, що з його допомогою можна успішно розвивати у студентів творчі здібності. Застосування дослідницького методу навчання сприяє формуванню у студентів умінь спостерігати та порівнювати природні та суспільні явища, підводити їх під загальні правила і перевіряти дослідками; розглядати явища з різних боків, з'ясовувати їхню сутність, причинно-наслідкові зв'язки [157, с. 32].

В.І.Андрєєв [7] здійснив спробу визначити межі застосування дослідницького методу в навчанні. На думку вченого, ці межі залежать від рівня розвитку навчально-дослідницьких умінь і здібностей учнів та студентів, змісту навчального матеріалу, його дидактичної і методичної досконалості. Дослідницький метод навчання – це адаптована з урахуванням закономірностей і принципів навчання

система прийомів (правил) застосування відповідних методів пізнання, переважно самостійне застосування яких дає змогу студентам ефективно розв'язувати адекватні цьому методу навчальні проблеми, виконувати навчально-дослідницькі завдання.

В українському педагогічному словнику розглядається сутність дослідницького методу, що полягає в залученні студентів до самостійних спостережень, на основі яких встановлюються зв'язки між предметами та явищами дійсності, пізнаються закономірності, формулюються висновки. Наголошується, що дослідницька діяльність сприяє вихованню у студентів та учнів допитливості, ініціативності, прагнення до самостійного пошуку [51].

Дослідження вчених свідчать про те, що застосування дослідницького методу навчання сприяє досягненню високих результатів навчання під час побудови в межах навчального предмету системи задач, в процесі пропедевтичної підготовки до їх розв'язування, забезпечення психологічного клімату, сприятливого для творчості. Проте процес навчання не повинен будуватися на основі лише дослідницького методу. Студент не може і не повинен засвоювати весь обсяг знань тільки шляхом власного дослідження і відкриття для себе нових законів, правил тощо, оскільки самостійне дослідження вимагає більше часу, ніж сприйняття пояснення викладача.

Однією з умов виконання завдань, що стоять перед сучасною освітою, є використання дослідницького підходу до навчання. Так називається підхід до навчання, що ґрунтується на основі природного прагнення людини до самостійного вивчення навколишнього світу. Головна мета дослідницького навчання – формування здібностей самостійно, творчо засвоювати нові способи діяльності в будь-якій сфері людської культури [171, с. 54 – 63].

Роль педагога в дослідницькому навчанні суттєво відрізняється від тієї, що відводиться йому в традиційному навчанні, яка будується на основі переважно використання репродуктивних методів навчання. Якщо в традиційній освітній практиці основна функція педагога – подання навчального матеріалу та доведення його до усвідомлення студентами, то в дослідницькому навчанні ця функція

поєднується з функціями розвитку дослідницьких умінь і навичок студентів. Педагог перетворюється в наставника, консультанта і помічника починаючого дослідника. В умовах дослідницького навчання викладач для студента – зразок творчої діяльності, той, у кого можна вчитися дослідницького підходу до учіння і життя загалом [64], [171, с. 221 – 222].

Дослідницький підхід у навчанні реалізується через зміст навчання і через особливі способи навчання – методи, прийоми і форми, які базуються на проблемному навчанні, коли студенти, зіткнувшись з протиріччями наукового знання, відшукують способи їх подолання і усунення.

Дослідницький підхід у навчанні – це система прийомів, методів і форм навчання, на основі яких моделюються основні етапи наукового дослідницького процесу: постановка проблеми, збирання необхідних відомостей, порівняння існуючих методів аналізу, власне аналіз матеріалу, узагальнення, презентація результатів дослідження.

Поняття дослідницького підходу у навчанні більш загальне, ніж поняття дослідницького методу навчання або методу навчальних досліджень, тому що повною мірою повторювати історичний шлях побудови науки, заново відкривати принаймні основні положення навчальних курсів не уявляється можливим і необхідним ні за часом, ні за трудомісткістю, ні за педагогічною доцільністю. Застосування дослідницького підходу в навчанні означає його використання в процесі розгляду кожної теми, а глибина його використання має бути педагогічно виваженою, визначатися навчальною та педагогічною доцільністю, кваліфікацією викладача, підготовленістю аудиторії [166].

С.А.Раков зазначає, що дослідницький підхід – це підхід, за якого ідеями досліджень просякнуті всі форми навчальної роботи: лекції, практичні завдання, лабораторні заняття, індивідуальна та самостійна робота, курсові та дипломні проекти [166].

В дослідницькому навчанні дослідження постає не просто набором методів і прийомів учіння, а є його змістом і сенсом. У студента формується уявлення про дослідження не просто як про застосування набору окремих когнітивних

інструментів, використання яких дає змогу продуктивно розв'язувати пізнавальні задачі, а як про провідний спосіб контактів з навколишнім світом і навіть ширше – як про стиль життя. Тому від сучасної освіти вимагається цілеспрямована робота з метою розвитку у студентів дослідницьких умінь та навичок дослідницького пошуку [64].

Вчені виокремлюють такі функції дослідницького підходу в навчанні:

- виховання пізнавального інтересу;
- створення позитивної мотивації учіння;
- формування глибоких, міцних і дієвих знань;
- розвиток інтелектуального потенціалу;
- формування умінь та навичок самоосвіти;
- розвиток пізнавальної активності та самостійності [12], [58].

Сутність дослідницького підходу полягає у:

- 1) впровадженні загальних і окремих методів наукового дослідження у процес навчального пізнання на всіх його етапах (від сприйняття до застосувань на практиці);
- 2) організації навчальної та позанавчальної пошуково-творчої діяльності;
- 3) реалізації внутрішньопредметних і міжпредметних зв'язків;
- 4) вдосконаленні змістової та процесуальної сторін пізнавальної діяльності;
- 5) зміні характеру взаємовідносин «викладач – студент – колектив студентів» у бік співробітництва [58].

Мета дослідницького навчання – розвиток аналітичного мислення, вміння бачити логічні взаємозв'язки між фактами, формування навичок синтезу нових висновків на основі аналізу наявних відомостей. У дослідницькому навчанні важливим є не лише набуття знань, але й розвиток особистості студента і його мислення. Тобто основною метою використання дослідницького підходу в навчанні є не тільки розв'язування проблемної задачі, а й формування у студентів умінь і навичок дослідницької діяльності, якими вони зможуть скористатися у майбутньому. Саме через дослідницький підхід у навчанні викладач може формувати у студентів дослідницькі компетентності, надати студентам якомога ширші можливості інтелектуального розвитку, намагаючись навчити студентів

учитися, а не просто бути спостерігачами інтелектуальних здобутків інших людей.

Застосування інформаційно-комунікаційних технологій навчання у навчальному процесі дає змогу розширити дидактичні застосування дослідницького підходу, не зводити його лише до методів спостереження, експерименту, лабораторного методу. Використання комп'ютера дає змогу розглядати нові типи навчальних задач, близькі до реальних, задачі дослідницького характеру [118].

Дослідницький підхід у навчанні є ключем для вдосконалення математичної освіти, розвитку творчих, інтелектуальних здібностей, навчально-дослідницьких умінь студентів [133]. Використання дослідницького підходу у навчальному процесі є особливо ефективним за умов педагогічно виваженого використання ІКТ, завдяки чому можна зосередитись у навчанні на змістових, творчих аспектах навчально-пізнавальної діяльності і перекласти на комп'ютер рутинну, трудомістку роботу [78], [166].

Навчання математичної інформатики на основі дослідницького підходу – це шлях залучення студентів до навчально-дослідницької діяльності, ознайомлення студентів з методами наукового пізнання, важливий засіб формування у них наукового світогляду, розвитку аналітичного, синтетичного мислення і пізнавальної самостійності, формування інформатичних компетентностей і, зокрема, умінь використовувати засоби комп'ютерних математичних пакетів для проведення навчальних досліджень.

Для того, щоб розглянути особливості методичної системи навчання математичної інформатики на основі застосування дослідницького підходу, визначимо сутність понять «навчально-дослідницька діяльність» та навчально-дослідницькі уміння.

1.1.2 Сутність та зміст понять «навчально-дослідницькі уміння» та «навчально-дослідницька діяльність»

Щоб з'ясувати сутність поняття «навчально-дослідницькі уміння», розглянемо як визначається у психолого-педагогічній літературі взагалі поняття «уміння» та як воно співвідноситься з поняттями «знання» та «навички».

На основі аналізу психолого-педагогічної літератури доходимо висновку, що вчені розглядають різні підходи до формування умінь студентів. Основи психологічних закономірностей формування і розвитку навчальних умінь досліджені в працях Л.С.Виготського [46], П.Я.Гальперіна [47], В.В.Давидова [57], Г.С.Костюка [110], С.Л.Рубінштейна [177], Н.Ф.Тализіної [190]. У дидактичному аспекті питання формування умінь отримали своє висвітлення в наукових працях Є.О.Мілеряна [136], І.Я.Лернера [124], О.М.Новікова [147], А.В.Усової [197], Г.І.Щукіної [210] та інших.

За твердженням А.В.Усової *уміння* – це здатність виконувати дію відповідно до цілей і умов, в яких людині доводиться орієнтуватися [197, с.5]. Щукіна Г.І. розглядає *уміння* як операцію інтелектуального характеру [210, с.54].

Уміння часто називають знаннями в дії [110, с.318]. Це свідчить про те, що *уміння* завжди пов'язане із знаннями. Без знань немає *вмінь*. Але *вміє* тільки той, хто не тільки знає, а й може застосовувати свої знання на практиці, користуватися ними у змінюваних ситуаціях. *Вмілість* людини в тій чи іншій галузі діяльності характеризується передусім тим, як через її знання скеровуються дії, забезпечується їх досконалість та продуктивність.

«*Вміти робити*» в найбільш загальному розумінні означає, що людина, яку спонукують до діяльності відповідні мотиви, здатна самостійно орієнтуватися в ситуації, пізнавати її (в тому числі набувати нових необхідних знань), правильно визначати мету діяльності відповідно до об'єктивних умов, через які визначається її реальність та досяжність; відповідно до ситуації, мети і наявних можливостей визначати конкретні засоби і способи діяльності, в процесі її здійснення через відповідну систему дій вдосконалювати, відпрацьовувати їх і нарешті досягнути мети [147].

Основою формування та розвитку *вмінь* та навичок є знання, які є провідною ланкою в системі навчання, оскільки тільки володіння знаннями забезпечує свідоме користування *уміннями* та навичками [91, с.222].

У разі зміни зовнішніх обставин, коли людині доводиться мати справу з новим середовищем, виконувати нові завдання, провідною основою діяльності стають

уміння. За постійності середовища і стабілізації умов діяльності на перший план виступають навички.

Пов'язана з наявністю сформованих умінь «вміла» діяльність характеризується її усвідомленістю, що проявляється і в постановці мети діяльності, і в успішному визначенні і доборі її засобів і способів досягнення мети, співвідношенні мети діяльності та результатів. «Вміла» діяльність здійснюється в нерозривній єдності розумової, сенсорної та рухової активності, творчого, нестереотипного застосування знань.

Водночас в певного типу діяльності є стабільні, стереотипно повторювані компоненти, які можуть при багатократному повторенні автоматизуватися, тобто здійснюватися під згорнутим контролем свідомості. Автоматизація окремих стереотипних компонентів діяльності дає змогу людині не витратити увагу на всі елементи діяльності, а здійснювати свідому регуляцію дій, які відбуваються, як правило, в змінних умовах. Автоматизовані компоненти діяльності, які сформувалися під час багатократних повторень, є навичками. З цих позицій навички і уміння співвідносяться як частина та ціле. У широкому розумінні навички є специфічними компонентами уміння. В загальному випадку довільне нове уміння формується на основі накопичених людиною в попередньому досвіді знань, навичок та інших, раніше набутих умінь [147].

Сформоване вміння, як зазначає Є.М.Кабанова-Меллер, по-перше, є системою закріплених (у тренуванні) правильних і швидких дій під час виконання завдань; по-друге, є результатом оволодіння навичкою [95, с.14].

Психологічна природа умінь складна. За словами Є.О.Мілеряна, до них входять інтелект, воля, емоції, які проявляються у свідомому, цілеспрямованому, успішному здійсненні «системи перцептивних, мисленнєвих, мнемічних, вольових, сенсомоторних та інших дій, виконання яких забезпечує досягнення поставленої мети діяльності» [136, с.48].

Розрізняють прості і складні уміння, спеціальні і загальні [210, с.55]. У простих і спеціальних умінь менш широка сфера застосування, вони використовуються, зазвичай, у певних або деяких предметних галузях. Фізики, математики та

інформатики, наприклад, значною мірою оперують із уміннями, пов'язаними з формалізацією постановок задач.

Складні і загальні уміння поширюються на всі сфери навчальної діяльності студентів. До таких умінь належать уміння аналізувати, порівнювати, узагальнювати, з'ясовувати причинно-наслідкові зв'язки, систематизувати, структурувати тощо. Загальні уміння мобільні, рухомі, варіативні, вони застосовні в будь-яких ситуаціях і на будь-якому предметному матеріалі. Оволодіння загальними уміннями дає змогу студентові діяти вільно, швидко здійснювати будь-які предметні дії [210, с.55].

Уміння виявляється у відповідній йому діяльності. Кожна діяльність складається з певних дій: пізнавальних, або розумових, і практичних. Відповідно до цього і загальне вміння виконувати цю діяльність передбачає певні часткові уміння. Наприклад, уміння вчитися складається з таких елементів, як здатність планувати свою роботу, самостійно працювати над підручником та іншою літературою, раціонально заучувати текст, розв'язувати задачі, виконувати письмові завдання, контролювати відповідність результатів своєї роботи поставленим цілям і завданням [110, с.318].

Існує стільки умінь людини, скільки є конкретних видів діяльності. Але всі ці вміння пов'язані із спільними психічними властивостями, які набувають специфічних особливостей в кожній діяльності відповідно до її змісту. До них належать: чутливість різних аналізаторів, спостережливість, пам'ять, уява і фантазія, мислення, воля [110, с.318].

Навчально-дослідницькі уміння необхідно розглядати з позицій однієї з найбільш фундаментальних категорій сучасної психології – з позицій діяльності, оскільки, по-перше, кінцевою метою будь-якого навчання, формування і розвитку умінь є оволодіння певними видами діяльності. По-друге, формування і розвиток самих умінь здійснюється у процесі навчальної діяльності студентів.

Головна теза діяльнісного підходу полягає в тому, що людина виявляє властивості і зв'язки проявів реального світу лише у процесі діяльності і на підставі різних її видів (предметної, розумової, індивідуальної, колективної).

Студент добре засвоює те, що виступає як предмет і як мета його діяльності. Знання і уміння, зокрема з математики та інформатики, свідомо засвоюються лише тоді, коли студент на основі своєї діяльності отримує відомості про істотні властивості реального світу – про його кількісні та просторові форми.

Відповідно до діяльнісного підходу етапи засвоєння знань і розвитку умінь розглядаються разом з етапами засвоєння діяльності. Знання з самого початку включаються в структуру дій. Цінність і вагомість знань визначається за їх адекватністю діяльності. Знання не можна дати в готовому вигляді, вони завжди здобуваються лише через власну пізнавальну діяльність [190].

Сформувати у студентів необхідні уміння та навички можна лише через активні мисленнєві та практичні самостійні дії самого студента. Предметом пізнання в процесі навчання повинна стати не тільки змістова сторона знань, а також і структурна, і операційна (акцент ставиться на способі набуття знань, на тому, як ними користуватися).

Принцип активності і усвідомленості навчально-пізнавальної діяльності – один з основних принципів дидактики, згідно з яким пізнавальна діяльність розглядається не тільки як засіб оволодіння знаннями, але і як один з найважливіших, найдієвіших і найрезультативніших підходів до вирішення проблем розумового розвитку учнів та студентів [213].

Навчальна діяльність – це система дій (розумових і практичних), здійснення яких забезпечує засвоєння знань, оволодіння уміннями і навичками, застосування їх до розв'язування задач. Одна з основних функцій навчальної діяльності – пізнання навколишнього світу, засвоєння накопичених людством знань. Але через навчальну діяльність забезпечується не тільки пізнання. Адже в ході засвоєння знань студенти вчаться їх перетворювати, переосмислювати, застосовувати до розв'язування різноманітних задач.

За певної організації навчання навчальна діяльність здійснюється зокрема як дослідницька (пошукова) діяльність. У ході навчальної діяльності студент відкриває для себе те, що йому не було раніше відоме, але це невідоме йому особисто (суб'єктивно невідоме) вже відоме людству, стало основою, фундаментом

науки. Засвоюючи знання, накопичені людством, студент тим самим неначе заново відкриває для себе вже відоме людству, і його мисленнєва діяльність у такому разі здійснюється так само, як і діяльність вченого. Різниця полягає в тому, що таке пізнання суб'єктивно нового відбувається в навчальному процесі в спеціально організованих умовах і не є нескінченим ланцюжком пошуків, помилок і знахідок, якими характеризується наукове пізнання. Але разом з тим справжнє засвоєння знань зберігає всі риси пошукової, дослідницької діяльності, де поряд з відтворенням знань, накопичених раніше, величезну роль відіграє спостережливість, інтуїція, кмітливість, вміння швидко сприймати основний зміст навчального матеріалу, розглядати його під різними кутами зору, бачити в новому ракурсі, з іншого погляду, використовувати одне і те саме знання в різних ситуаціях, різних системах понять, переосмислюючи їх.

Спостерігаючи за реальними об'єктами, працюючи з ними, студенти встановлюють причинно-наслідкові зв'язки («що відбудеться, якщо...») і кількісні залежності, що лежать в основі проявів реальних явищ.

Дослідницька діяльність студента є засобом активізації пізнавальної активності, розвитку креативності і формування певних особистісних якостей, в тому числі вміння працювати в колективі, брати на себе відповідальність, аналізувати результати своєї діяльності. На основі дослідницького підходу до навчання забезпечуються і розкриваються можливості розвивати мисленнєві уміння та навички, формувати загальні навчальні уміння та навички, напрацювати спеціальні дослідницькі уміння та навички.

Дослідницька діяльність виступає як універсальна характеристика, що пронизує усі види людської діяльності. На її основі реалізуються найважливіші функції навчання стосовно розвитку пізнавальних процесів усіх рівнів, у навчінні, надбанні соціального досвіду, у соціальному розвитку і розвитку особистості людини.

Дослідницька діяльність знаходить своє місце в усіх вікових групах і на різному предметному матеріалі, але більш за все вона проявляється там, де найбільш яскраво виражена – у видах діяльності, що формуються, і діяльності в

нових предметних галузях. В наш час активно вивчаються види дослідницької діяльності з використанням засобів сучасних інформаційно-комунікаційних технологій. Ці види діяльності відіграють важливу роль у сучасному суспільстві, перебувають у стадії активного становлення, досліджуються фахівцями різних галузей знань, у тому числі педагогами і психологами [172].

Дослідницька діяльність студентів переважно є навчальною, оскільки її головне призначення не стільки в отриманні нових результатів, які мають об'єктивну новизну, скільки в формуванні умінь проводити дослідження.

Формування дослідницьких умінь здійснюється і під час навчання в середніх навчальних закладах, коли учні виконують нескладні лабораторні роботи, розв'язують творчі задачі, виконують експериментальні домашні завдання дослідницького характеру, займаються проектною діяльністю, беруть участь в різних конференціях, олімпіадах. Однак аналіз знань вступників до вищих навчальних закладів показує, що багато першокурсників на низькому рівні володіють необхідними знаннями, уміннями та навичками. У більшості абітурієнтів, які вступають до вищих навчальних закладів, недостатньо сформоване творче мислення та потреби до творчої інтелектуальної діяльності. Вони не завжди уміють працювати з літературними джерелами, бачити головне, правильно розуміти, тлумачити прочитане тощо. Але разом з тим вони мають високий рівень інтересу до дослідницької діяльності (пошукової активності), тобто виникає необхідність проведення цілеспрямованої роботи з формування і розвитку у студентів потрібних дослідницьких умінь та навичок.

Навчально-дослідницька діяльність – це взаємопов'язана діяльність студентів та педагогів, яка здійснюється поетапно, як і наукові дослідження:

- 1) пошук проблеми (теми) дослідження;
- 2) наукове осмислення проблеми;
- 3) визначення ключових ідей і формування плану розв'язування проблеми;
- 4) реалізація основних складових плану розв'язування проблеми;
- 5) синтез окремих результатів і цілісне розв'язування проблеми;
- 6) оформлення результату;

- 7) введення в наукове застосування, захист і супровід розв'язку;
- 8) внутрішній критичний аналіз розв'язку.

Тобто навчально-дослідницька діяльність має науковий характер. Але науково-дослідницька діяльність – це конкретна форма проведення наукової роботи, спрямованої на різностороннє, вірогідне вивчення об'єкта, процесу, явища, їх структури і зв'язків та відношень на основі розроблених в науці принципів та методів пізнання з метою отримання ще невідомих знань про них і подальшого корисного використання цих знань в практичній діяльності [151].

Ледньов В.С. звертає увагу на те, що отримання нових наукових відомостей в завдання початкових етапів освіти, навіть вищої, не входить і не може входити. Можна говорити лише про пропедевтичну фазу – про навчально-дослідницьку роботу, на основі якої людина готується до того, щоб пізніше спробувати себе на науковому поприщі [121].

В.О.Баранова [12, с.17], Т.О.Олійник [150] навчальним дослідженням називають таке дослідження, яке характеризується, по-перше, тим, що дослідницька проблема ставиться відповідно до дидактичних цілей, по-друге, в процесі дослідження дослідник навчається певного змісту і елементів дослідницької діяльності.

Навчально-дослідницька діяльність студентів забезпечує отримання суб'єктно нових знань, розвиток умінь та навичок, сприяє подальшому формуванню системи загальнокультурних та професійних компетентностей майбутніх фахівців.

Отже, під *навчально-дослідницькою діяльністю* студентів будемо розуміти діяльність, яка організовується і управляється викладачем та спрямована на пошук невідомих студентам елементів, на самостійне встановлення й доведення невідомих їм властивостей елементів, зв'язків та відношень між ними. В результаті цієї діяльності учні та студенти отримують нові для них знання, в них розвиваються дослідницькі, творчі уміння і навички.

За результатами аналізу різних означень поняття «дослідницькі уміння» в психолого-педагогічній літературі можна вказати на кілька підходів до його визначення.

З одного боку Н.Л. Головизніна [50], В.В. Успенський [199], І.О. Зимняя [87], О.А. Шашенкова [94] та ін. розглядають дослідницькі уміння як результат і міру дослідницької діяльності.

На думку Н.Л. Головизніної дослідницькі уміння структурно оформляються в ході здійснення дослідницької діяльності, є її підсумком, одним з основних критеріїв. Дослідницькі уміння – це очікуваний результат навчання дослідницької діяльності, який є інтеграцією спеціальних, усвідомлених, взаємообумовлених, досконало засвоєних знань і дій, що є основою для самостійного створення дослідницького продукту [50].

Аналогічної думки дотримується В.В.Успенський, який під дослідницькими уміннями розуміє здатність виконувати самостійні спостереження, експерименти, яка набувається в процесі розв'язування дослідницьких задач [199].

Автори іншого підходу – П.Ю.Романов [175], Л.Д.Литвинова [126], М.Н.Поволяєва [158] та ін. – розглядають дослідницькі уміння як здатність до дій, що необхідні для виконання дослідницької діяльності.

П.Ю.Романов вважає, що дослідницькі уміння – це здатність учня ефективно виконувати дії, що адекватні змісту навчання, спрямовані на розв'язування задачі, що виникла перед ними, відповідно до логіки наукового дослідження, на основі наявних знань і умінь.

Л.Д.Литвинова розглядає дослідницькі знання, які включають поняття про способи та прийоми роботи з даними, є результатом пізнавальної діяльності, спрямованої на з'ясування та пояснення закономірностей, фактів, процесів. А дослідницькі уміння – це здатність свідомо здійснювати дії пошуку, добору, опрацювання, аналізу, створення, проектування і підготовки результатів пізнавальної діяльності, спрямованої на виявлення (створення, відкриття тощо) об'єктивних закономірностей перебігу природних і соціальних процесів і проявів різноманітних явищ. В ході оволодіння дослідницькими знаннями, уміннями і здійснення навчально-дослідницької роботи відбувається формування здатності і готовності до виконання дослідницької діяльності.

М.Н.Поволяєва розуміє під дослідницькими вміннями систему інтелектуальних, практичних знань, умінь, навичок, необхідних для самостійного проведення дослідження або його частин [158].

О.В.Резіна [172] уміння виконувати дослідницьку діяльність пов'язує з:

- 1) здатністю до постановки різноманітних дослідницьких цілей;
- 2) спроможністю до виконання розумових і практичних дій, які підпорядковуються логіці наукового дослідження;
- 3) здатністю до пізнавального пошуку різноманітних відомостей і аналітико-синтетичного опрацювання одержаних результатів;
- 4) готовністю до одержання різноманітних, у тому числі несподіваних, непрогнозованих результатів дослідження, з'ясування їх сутності, узагальнення і використання для подальшого пізнання.

В.І.Амеліна визначає дослідницькі уміння як володіння складною системою психічних та практичних дій, необхідних для пізнавальної діяльності у всіх видах навчальної праці [3].

Під навчально-дослідницькими вміннями розуміють:

- 1) уміння застосовувати прийоми, відповідні методу пізнання в умовах розв'язування навчальної проблеми, у процесі виконання навчально-дослідницького завдання (В.І.Андрєєв [7]);
- 2) складне психічне утворення (синтез інтелектуальних і практичних дій, засвоєних і закріплених способів діяльності), яке лежить в основі готовності учня до пізнавального пошуку (Н.Г.Недодатко [145]);
- 3) вміння прогнозувати кінцевий результат, знаходити приховані властивості предметів або об'єктивні закономірності, досліджувати їх, на цій підставі висувати гіпотези, шукати шляхи їх обґрунтування або спростування (Л.В.Грамбовська [53]).

Об'єднуючи ці підходи, дослідницькі уміння розглядатимемо як складну систему практичних та інтелектуальних умінь, яка формується в процесі дослідницької діяльності за наявності відповідних знань, умінь і навичок.

Поняття «дослідницькі вміння» і «дослідницька діяльність» тісно пов'язані з близькими за змістом поняттями єдиного семантичного поля: «інтелектуальна

активність», «пізнавальна активність», «креативність», «допитливість», «дослідницька поведінка», «дослідницька ініціативність». З цієї точки зору дослідницькі уміння знаходяться у тісному взаємозв'язку з такими фундаментальними поняттями як інтелект, інтелектуальні вміння, творчість, учіння, здібності.

З огляду на наявність різних точок зору на визначення даного поняття, під *навчально-дослідницькими* вміннями студентів будемо розуміти систему умінь інтелектуального, практичного та психічного характеру, що підпорядковується логіці наукового пізнання і свідомо використовується студентами для здобуття нових для них, а можливо і для людства, знань.

1.2 Основні компоненти навчально-дослідницької діяльності студентів

Основою навчально-дослідницької діяльності фактично є всі навчально-пізнавальні дії, розумові прийоми і операції, а також специфічні характеристики дослідника, пов'язані з дослідницькою мотивацією і продуктивністю мислення.

В.І.Андрєєв [7] виокремлює процесуальну, мотиваційну, змістову, операційну, організаційну, комунікативну, технічну, результативну сторони навчально-дослідницької діяльності. Всі компоненти навчально-дослідницької діяльності між собою взаємопов'язані і співвіднесені з метою розвитку навчально-дослідницьких умінь.

В структурі навчально-дослідницьких умінь В.І.Андрєєв вказує на операційний, організаційний, технічний та комунікаційний компоненти [7].

Операційний компонент стосується умінь застосовувати розумові прийоми і операції в навчально-дослідницькій діяльності.

В процесі навчально-дослідницької діяльності проявляються не тільки уміння застосувати найпростіші операції аналізу та синтезу, але і більш складні прийоми, як, наприклад, уточнення цілей дослідження, висунення гіпотез, пошук і використання аналога, індуктивні та дедуктивні умовиводи тощо.

Організаційний компонент – уміння студента застосувати прийоми самоорганізації в навчально-дослідницькій діяльності. До них слід віднести вміння

планувати навчально-дослідницьку діяльність, проводити самоконтроль і регулювати свої дії, проявляти волюві зусилля для досягнення поставлених цілей.

Технічний компонент характеризується уміннями і здатністю студента застосовувати відповідні технічні прийоми в навчально-дослідницькій діяльності. До цих умінь можна віднести такі, як добір приладів і матеріалів, необхідних для виконання експерименту; збирання установки; вимірювання різних величин; дотримання правил техніки безпеки; оформлення результатів експерименту (побудова графіків, оформлення таблиць тощо)

Комунікативний компонент характеризується уміннями і здібностями студентів застосовувати прийоми співробітництва в процесі навчально-дослідницької діяльності. Наприклад, обговорення завдання і розподіл обов'язків, взаємодопомога, взаємоконтроль, обговорення результатів навчально-дослідницької діяльності. Комунікативні якості особистості студента реалізуються не завжди, а лише в процесі колективного виконання навчально-дослідницьких завдань.

Класифікуючи уміння за характером діяльності, А.В.Усова вказує на пізнавальні, практичні, організаційні, самоконтролю і оцінювальні уміння[197, с.6].

П'ять груп дослідницьких умінь виокремлює О.Г.Чугайнова [208]:

Операційно-гностичні уміння – розумові прийоми і операції, які застосовуються в дослідницькій та пізнавальній діяльності: порівняння, аналіз та синтез, абстрагування та узагальнення, висунення гіпотез, зіставлення, узагальнення та інші мисленнєві операції.

Інформаційні дослідницькі уміння полягають у вмінні працювати з різними джерелами відомостей, подавати наочно і конкретно ідеї та результати діяльності у вигляді моделей, схем, графіків тощо.

Конструктивно-проектні уміння – уміння застосовувати прийоми самоорганізації, планування в науково-дослідницькій чи навчально-дослідницькій діяльності, регулювати свої дії у процесі розв'язування дослідницьких задач.

Діагностичні уміння – уміння проводити експериментальне дослідження, спостерігати і оцінювати факти, події, опрацьовувати емпіричні дані, отримані за

допомогою різних способів дослідження.

Комунікативні уміння – уміння здійснювати сумісні дослідження, застосовувати прийоми співробітництва в процесі дослідницької діяльності, здійснювати взаємодопомогу та взаємоконтроль, грамотно і обґрунтовано в рамках наукової етики публічно подавати результати індивідуальної і сумісної дослідницької діяльності.

В структурі навчально-дослідницьких умінь П.Ю.Романов виокремлює практичні та інтелектуальні уміння [175].

Практичні уміння:

– підготовчі уміння: робота зі специфічними об'єктами (науковою літературою, комп'ютерними моделями, мережею Інтернет); бачення проблеми в тривіальній ситуації; самостійне планування експерименту, складання схем; добір обладнання для експерименту з використанням інструкцій; добір і приготування необхідних для експерименту матеріалів; використання знань з інших дисциплін на всіх етапах експерименту;

– технологічні уміння: налагодження установки або виготовлення її фрагментів; усунення несправностей, налагодження пристроїв; вдосконалення експерименту та модернізація експериментальної установки; використання об'єктів за іншим призначенням; дотримання техніки безпеки;

– вимірювальні уміння: самостійне проведення експерименту з використанням дослідницького обладнання та складних вимірювальних приладів; проведення незалежних експериментів для обґрунтування отриманих результатів;

– обчислювальні уміння: опрацювання та аналіз отриманих результатів; робота з комп'ютерною технікою; визначення грубих, систематичних і випадкових похибок вимірювань;

– організаційні: самоорганізація в навчально-дослідницькій діяльності; планування, регулювання, контроль своїх дій; вольові зусилля для досягнення поставлених цілей;

– комунікативні: співробітництво в процесі обговорення завдань; розподіл обов'язків, надання взаємодопомоги, взаємоконтроль, обговорення результатів

спільної діяльності.

Інтелектуальні уміння:

- мисленнєве проведення експерименту;
- теоретичне обґрунтування результатів експерименту;
- інтуїція;
- презентація експериментального дослідження перед аудиторією, проведення дискусії;
- пошук альтернативного і вибір раціонального розв'язання;
- здійснення ближнього і дальнього внутрісистемного і міжсистемного перенесення знань і умінь у нову ситуацію;
- оцінювання меж застосування;
- уміння самостійно працювати з матеріалами різного змісту;
- визначення місця і значення результатів, отриманих в ході експерименту.

О.М.Новіков вважає за доцільне розглядати уміння на трьох рівнях: на рівні виконання окремих операцій, наприклад, технологічних; на рівні тактики і на рівні стратегії певної діяльності [147].

1. Операційні уміння – вміння виконувати технологічні та інші операції.
2. Тактичні уміння – вміння планувати повний технологічний процес, успішно використовувати сукупність наявних засобів, наявних операційних умінь для виконання поточних завдань у змінних умовах. Здатність до швидкої орієнтації у проблемній ситуації, володіння загальними способами раціональної побудови дій та їх послідовності, вміння технологічного планування, користування довідковою літературою, вміння розподілу ролей в процесі колективної діяльності.
3. Стратегічні уміння – вміння орієнтуватися в усій системі проблем, визначати місце і цілі власної діяльності загалом і основних її етапів.

Д.І.Блюменау зазначає, що інформаційно-пошукова діяльність є складовою творчої дослідницької діяльності [17, с.6]. Уміння працювати з інформаційними джерелами є важливим компонентом навчально-дослідницьких умінь. За Д.І.Блюменау мета науково-дослідницької діяльності – опрацювання даних для створення нових наукових даних. Частиною науково-дослідницької діяльності є

інформаційна діяльність як сукупність операцій сприймання, опрацювання і подання всеможливих повідомлень в межах системи наукових комунікацій.

Таблиця 1.2.1

Структурні компоненти навчально-дослідницьких умінь

Інтелектуально-пізнавальні уміння	Розумові прийоми та операції, які застосовуються в дослідницькій та пізнавальній діяльності: порівняння; аналіз і синтез; абстрагування; узагальнення; пошук і використання аналогії; індуктивні та дедуктивні умовиводи.
Практично-експериментальні уміння	Уміння проводити спостереження. Уміння висувати гіпотези. Уміння моделювати. Уміння проводити експеримент. Графічні уміння. Обчислювальні уміння. Уміння працювати з джерелами відомостей.
Організаційні уміння	Уміння планувати навчально-дослідницьку діяльність. Уміння застосовувати прийоми самоорганізації. Уміння проводити самоконтроль і регулювати свої дії у процесі розв'язування навчально-дослідницьких задач. Правильно організовувати робоче місце під час занять. Уміння проявляти вольові зусилля для досягнення поставлених цілей.
Комунікативні уміння	Уміння застосовувати прийоми співробітництва: обговорення завдань; розподіл обов'язків; взаємодопомога; взаємоконтроль; обговорення результатів.
Результативно-оцінювальні уміння	Давати оцінку значимості результатів дослідження. Уміння презентувати одержаний результат.

Проаналізувавши і узагальнивши різні підходи до визначення умінь, які входять до складу навчально-дослідницьких, основні структурні компоненти системи дослідницьких умінь можна подати у вигляді таблиці 1.2.1.

Навчально-дослідницькі уміння та уміння використовувати комп'ютерні засоби для розв'язування дослідницьких задач є важливими компонентами інформатичних компетентностей, які С.М.Яшанов характеризує через ефективність діяльності з використанням комп'ютера, що означає ефективне застосування знань, умінь і навичок для розв'язування існуючих або поставлених перед людиною завдань. Грамотна людина знає про щось абстрактно, а компетентна – може на основі знання конкретно і ефективно виконувати певне інформатичне завдання чи розв'язувати проблему. Водночас компетентність означає відмову від прямого копіювання чужого досвіду, норм, традицій, зразків, звільнення від стереотипів, чітких вказівок, розпоряджень, установок [214].

1.2.1 Пізнавальні дії в структурі навчально-дослідницької діяльності

Одним із реальних шляхів підвищення ефективності навчання і розвитку навчально-дослідницьких умінь студентів є ретельний аналіз навчально-дослідницької діяльності з метою виокремлення розумових і практичних дій, які входять до її складу, та попереднє навчання студентів кожної з цих дій [7], [20], [95], [160], [171], [122], [123], [190].

У психології всяка мисленнева (розумова) дія є пошуком відповіді на якесь питання, що його інакше не можна з'ясувати. В кожній такій дії, незалежно від того, на пізнання яких об'єктів вона спрямована, ці об'єкти зіставляються, аналізуються, розглядаються окремі їх частини, сторони, синтезуються відповідні висновки тощо. Ці операції взаємопов'язані одна з одною, вони існують як система операцій, в якій для кожної з них є зворотна їй операція [110, с.206].

Механізми мислення та його операції охарактеризовані у праці С.Л.Рубінштейна [177], де показано провідну роль аналізу і синтезу в процесі мислення.

Аналіз є мисленним розчленуванням об'єктів, подій, явищ, виокремленням в них окремих частин, елементів, ознак, властивостей з метою детального їх дослідження.

Аналіз може мати мимовільний характер. Він набуває довільного характеру, коли скеровується спеціальною словесною вказівкою інших людей на те, на що необхідно звернути особливу увагу в складному об'єкті, які сторони і властивості необхідно з'ясувати. Мета вивчити ті чи інші сторони, з'ясувати властивості об'єктів ставиться і з ініціативи самого дослідника в ході його діяльності. В процесі навчальної роботи мета дослідження виникає у студентів під впливом розгляду завдань, які ставить перед ними викладач [110, с.209].

У дослідницькій діяльності аналіз стає одним із шляхів її здійснення. У багатьох галузях науки для його проведення використовуються спеціально створені технічні, експериментальні засоби. Інформаційні технології математичного призначення також використовуються в дослідницькій діяльності для проведення аналізу різноманітних ситуацій і об'єктів.

Будь-яке розуміння потребує не тільки аналізу, а й *синтезу* – мисленнєвого поєднання окремих сторін, ознак і властивостей об'єктів у єдине ціле.

Аналіз і синтез є протилежними і водночас доповнюючими один одного нерозривно пов'язаними між собою процесами. У процесі розумової діяльності аналіз і синтез постійно чергуються і переплітаються. Дослідження починається із захоплення якогось об'єкта думкою загалом, далі в ньому виокремлюються і вивчаються окремі більш чи менш істотні риси, потім отримані результати узагальнюються [110, с.210]. Рубінштейн С.Л. зазначає важливу форму аналізу – аналіз, який здійснюється через синтез. Суть його полягає в тому, що об'єкт в процесі осмислювання включається в дедалі нові зв'язки, внаслідок чого щоразу виявляються нові якості, які фіксуються в нових поняттях. Таким чином стосовно об'єкта, ніби виникає дедалі його нове бачення, у ньому виявляються щоразу нові властивості [177, с.98 – 99].

Аналіз і синтез – взаємопов'язані і взаємообумовлені логічні методи пізнання, що виникли на основі практичної діяльності людей, їхнього досвіду. Єдність аналізу і синтезу забезпечує об'єктивне адекватне відображення дійсності. Аналіз і синтез у навчанні – це застосування в навчальному процесі логічних прийомів, згідно з якими предмети і явища під час їх вивчення розглядаються за окремими

ознаками (аналіз), і, навпаки, в єдності їхніх частин (синтез). Аналіз і синтез пронизують собою весь навчальний процес, оскільки мислення учнів є аналітико-синтетичною розумовою діяльністю головного мозку [51, с.25].

У вивченні фактів та їх узагальненні в процесі дослідницької діяльності важливу роль відіграє *порівняння*. Через порівняння встановлюють схожі і відмінні ознаки, властивості певних об'єктів.

Порівняння може мати мимовільний характер. Таким воно є в актах сприймання і впізнавання різних предметів і явищ. Воно набуває довільного характеру, коли скеровується спеціальною метою зіставити два чи кілька об'єктів у певному відношенні, знайти в них схожі і відмінні властивості, уточнити судження про них, встановити тотожність об'єктів чи протилежність. Таке порівняння використовується як засіб групування об'єктів, їх класифікації [110, с.207]. Оволодіння студентами певними способами порівняння досліджуваних об'єктів значно підвищує, як показують дослідні дані, пізнавальну значущість цього процесу.

Розумовий аналіз пізнаваних об'єктів дає змогу переходити до *абстрагування*, тобто мисленне відокремлення певних ознак і властивостей від інших їхніх рис і від самих предметів, яким вони властиві. Наприклад, відокремлюють істотні ознаки об'єктів від неістотних, необхідні від випадкових, загальні – від поодиноких, кількісні відношення речей – від якісних їх особливостей, форму предметів від їх розмірів тощо.

Вміле абстрагування істотних властивостей речей стає могутнім засобом пізнання людиною об'єктивної дійсності, утворення понять про різноманітні предмети і явища в їх закономірних зв'язках і відношеннях [110, с.211].

Результатом абстрагування, як правило, є абстракції – образи, створені в процесі розумової діяльності людини.

Наукове мислення називається абстрактним, тому що абстрагування відіграє провідну роль в утворенні тих понять, в яких воно виявляється. Абстрагування є основою для широких і ґрунтовних узагальнень. В дійсності пізнання є рухом

думки від конкретного до абстрактного і далі знову до конкретного. Перехід від абстрактного до конкретного називається конкретизацією [110, с.212].

Подальшим продовженням і поглибленням синтезуючої розумової діяльності людини стає *узагальнення* – розкриття загальних властивостей і відношень, що існують в реальній дійсності. Воно дає змогу відносити предмети і явища до їх груп, класів, видів, родів тощо. Така операція називається класифікацією. Загальні зв'язки – це необхідні, істотні більш чи менш сталі зв'язки. Тому їх розкриття сприяє проникненню в сутність явищ, передбаченню їх виникнення. Від широти і глибини узагальнень залежить і коло тих передбачень, які може робити людина [110, с.212].

С.Л.Рубінштейн звертає увагу на те, що узагальнення – це не виявлення взагалі яких-небудь спільних властивостей, відносно яких предмети або явища схожі між собою, незалежно від того, що це за властивості; наукове узагальнення включає не взагалі властивості, спільні або схожі для певних явищ, а властивості, істотні для них [177, с.40].

Для розвитку навчально-дослідницьких умінь значну роль відіграє використання аналогії. *Аналогія* – прийом розумової діяльності, спрямований на одержання нових знань про властивості, ознаки, відношення предметів і явищ, що вивчаються, на основі їх часткової схожості.

Таблиця 1.2.2

Вбудовані функції СКМ для розв'язування задач оптимізації

Програма	Задача безумовної оптимізації	Задача лінійного програмування	Задача нелінійної умовної оптимізації
Mathcad 15	Minimize, Maximize	Minimize, Maximize	Minimize, Maximize
Maple 12	minimize, maximize	extrema, пакет Simplex	extrema, пакет Optimization
Maxima 5.37	–	minimize_lp, maximize_lp	–

Наприклад, порівняння записів окремих вказівок і процедур для різних систем комп'ютерної математики дає змогу з'ясувати спільне та виявити відмінності в їх записах. Таке порівняння сприяє з'ясуванню спільних рис і відмінностей різних систем комп'ютерної математики, глибшому усвідомленню їх суттєвих і несуттєвих особливостей, переваг і недоліків кожної з них, правил описування програмного коду, їх запам'ятовуванню і запобіганню помилок.

Порівнюючи аналогічні поняття, зручно подати висновки у вигляді таблиці. Наприклад, аналізуючи можливості використання засобів комп'ютерних математичних пакетів до розв'язування оптимізаційних задач, студенти складають порівняльну таблицю (таблиця 1.2.2).

Висновки за аналогією можуть виявитись або правильними або хибними, тобто є висновками гіпотетичного характеру. Тому потрібні спеціальні обґрунтування правильності таких висновків за допомогою дедуктивних міркувань (доведень) або ж їх спростування за допомогою певних контрприкладів тощо (див. Розділ II, стор.106, приклад 2.1.1).

В науці і в буденному мисленні йдуть від незнання до знання, від неповного знання до більш повного; часто доводиться висувати і потім обґрунтовувати різні припущення для пояснення явищ та їх зв'язків з іншими явищами. Для цього висувають гіпотези, які можуть перейти в разі їх підтвердження в науковій теорії або в окремі істинні судження, або, навпаки, будуть спростовані і виявляться неправильними судженнями.

Гіпотеза – це припущення про причини або взаємозв'язки яких-небудь явищ, подій, процесів. Гіпотези будуються тоді, коли виникає потреба в поясненні ряду нових фактів, які не вкладаються в межі раніше відомих наукових теорій або пояснень [48, с. 202].

Процес побудови і підтвердження гіпотез проходить через кілька етапів:

1. Відокремлення групи фактів, які не вкладаються в попередні теорії або гіпотези і мають бути пояснені на основі нової гіпотези.

2. Формулювання гіпотези (або гіпотез), тобто припущень, через які можна пояснити наявні факти.

3. Виведення з гіпотези всіх наслідків, що випливають з неї.

4. Зіставлення виведених з гіпотези наслідків з наявними науковими законами, спостереженнями, результатами експериментів.

5. Перетворення гіпотези у вірогідне знання або в наукову теорію, якщо підтверджуються всі виведені з гіпотези наслідки і не виникають протиріччя з раніше відомими законами науки.

Розвиток гіпотези, тобто логічний процес її висунення, обґрунтування і доведення, йде двома шляхами [197, с. 76]: 1) шляхом дедуктивного виведення її з уже відомих теорій, ідей, принципів, законів і правил; 2) шляхом індуктивної побудови гіпотези на основі фактів, явищ, відомих з життєвого досвіду, отриманих в результаті спостереження або експерименту.

Розвиток гіпотези дедуктивним способом, зокрема, може йти двома шляхами: а) шляхом перенесення загальних законів і принципів у конкретну ситуацію; б) шляхом аналогій, що широко використовуються в процесі вивчення явищ і законів природи.

Індукція – форма мислення, за допомогою якої думка наводиться на яке-небудь загальне твердження, що стосується одиничних предметів певної множини. *Дедукція* – форма мислення, за допомогою якої від відомого загального твердження переходять до менш загальних або одиничних.

Підтвердження гіпотез – це виведення наслідків та їх перевірка. Спростування гіпотез здійснюється через спростування їх наслідків [48, с.207].

1.2.2 Мотиваційна основа навчально-дослідницької діяльності студентів

Готовність і здатність досліджувати нове в навколишньому світі шляхом реальних спостережень за ним є особливою цінністю. Це надзвичайно важлива риса людини, через яку відображається рівень особистісного, творчого, пізнавального і соціального розвитку. Це особливо важливо зараз, коли виникають принципово нові галузі і види діяльності, а раніше вироблені основи і правила поведінки не завжди виявляються застосовними [159, с.2].

Дитина народжується дослідником. Невгамовна жага нових вражень, допитливість, постійне прагнення спостерігати та експериментувати, самостійно

шукати нові відомості про світ традиційно розглядаються як найважливіші риси дитячої поведінки. Дослідницька, пошукова активність – природний стан дитини, вона налаштована на освоєння навколишнього світу, вона хоче його пізнавати. Це внутрішнє прагнення до дослідження породжує дослідницьку поведінку і створює умови для того, щоб психічний розвиток дитини з самого початку розгортався як процес саморозвитку [171, с. 17].

Природною основою прагнення до пізнання навколишньої дійсності є орієнтувальний, або дослідницький, рефлекс. «У нас, – писав І.П.Павлов, – цей рефлекс іде надзвичайно далеко, проявляючись, нарешті, у вигляді тієї допитливості, через яку створюється наука, що дає і обіцяє нам найвище, безмежне орієнтування в навколишньому світі». Прояви цієї допитливості виразно виступають у запитаннях: «А це що?», «Чому?», «Навіщо» тощо. Треба розвивати в кожній людині цю дорогоцінну рису, що є внутрішньою спонукою до невпинного розгортання її пізнавальної діяльності [110, с.357].

Для успішності в навчально-дослідницькій діяльності студентів великого значення набуває *мотивація цієї діяльності*.

Мотивація є основою активності студента. Вона виражається в спонуканні людини до дії, в мобілізації її внутрішньої енергії, в направленості її дій і вчинків. Коли говорять про мотивацію, то розуміють потреби і прагнення, установки та інтереси, поривання і домагання. Інакше кажучи, наголос ставиться не на тому, як людина діє, а на тому, чому і заради чого вона здійснює свої дії та вчинки.

Мотивація як рушійна сила на різних рівнях має різну назву – допитливість, навчальний інтерес, жага знань, захопленість тощо. Пристрасть до пізнання, настанова на творчість визначають головний напрям дослідницької діяльності студента. На сучасному етапі розвитку підходів до освіти і стратегій розвитку мислення людини постає проблема формування дослідницької активності через формування інтересу до навчально-дослідницької діяльності, відповідних смислових установок, мотивації та дослідницької позиції.

О.Н.Подд'яков під дослідницькою активністю розуміє творче ставлення людини до світу, яке виражається у мотиваційній готовності та інтелектуальній

здатності до пізнання навколишнього світу шляхом активного його вивчення, спостереження різноманітних його проявів та з'ясування їх сутності та причинно-наслідкових зв'язків, до самостійної постановки різноманітних дослідницьких цілей, винаходу нових способів і засобів їх досягнення, отримання різноманітних, у тому числі і несподіваних, результатів дослідження та їх використання для подальшого пізнання [159].

Об'єктивна необхідність у дослідницькій поведінці виникає в галузі високої новизни і складності, коли вимагається робота з невизначено великими масивами різноманітних даних в режимі реального часу, потрібна інтуїція і творчість.

Мотиваційною основою дослідницької поведінки є [159]:

1) допитливість, потреба в нових враженнях і знаннях, пізнавальна активність, спрямованість на пізнання безвідносно до розв'язування утилітарних практичних завдань;

2) практичні мотиви, пов'язані з досягненням конкретного утилітарно-практичного результату;

3) навчальні мотиви, пов'язані з спрямованістю суб'єкта не на розв'язування пізнавальних або конкретних практичних проблем, а на здобуття досвіду;

4) мотиви внесення різноманітності в одноманітні умови, що викликають нудьгування.

Як підкреслюється в усіх дослідженнях, основна причина дослідницької поведінки людини – це суб'єктивна невизначеність: невизначеність об'єкта, ситуації тощо. Функція дослідницької поведінки – зменшення цієї суб'єктивної невизначеності шляхом пошуку відомостей із зовнішніх джерел.

Основні фактори, пов'язані з невизначеністю:

1) *Новизна*. Рушійною силою пізнавального і особистісного саморозвитку людини є фундаментальна потреба не тільки в нових зовнішніх враженнях, але й в оновленні власних психічних утворень, через які відображається фізичний і соціальний стан, а також внутрішній психічний світ людини.

2) *Складність*. Для розгортання дослідницької поведінки необхідний відповідний рівень складності досліджуваної проблеми, що вимагає від індивіда

інтелектуальних зусиль, але разом з тим проблема може бути розкрита, з'ясована її сутність. Постановка і розгляд як занадто простих, так і занадто складних проблем приводять до швидкого згасання пізнавальної активності.

3) *Когнітивний конфлікт через невідповідність або протиріччя наявних відомостей чи повідомлень.* Третій фактор, через який спричинюється дослідницька поведінка людини, – когнітивний конфлікт або суперечливість наявних відомостей. Різні фрагменти відомостей виявляються неузгодженими, з наявністю протиріч, ускладнюючи пізнання, категоризацію та аналіз. Дослідження спрямоване в цьому випадку на пошуки несуперечливої інтерпретації відомостей.

Отже, мотиваційною основою успішної дослідницької діяльності людини є її творча активність, що проявляється в прагненні до виходу за будь-які обмеження, накладені на побудову, вибір і перегляд будь-якого компонента діяльності. Це прагнення до нових об'єктів, нових здогадок, гіпотез, методів, нових результатів, що не вкладаються в рамки попередніх практичних і пізнавальних схем.

Діяльність більшості людей, як правило, мотивована не одним виключним і всеохоплюючим мотивом, а комбінацією багатьох різноспрямованих мотивів. Орієнтація людини на досягнення соціально значущих результатів, в яких проявляються її сили і здібності і через які стверджується її особистість в очах інших людей, соціальних груп, суспільства загалом, – такою орієнтацією визначається система мотивів та цілей діяльності людини.

Окрім внутрішніх мотивів існують і зовнішні. Під зовнішніми мотивами розуміють прагнення до матеріальних вигод, до забезпечення свого пріоритетного становища в науковому суспільстві. До зовнішніх мотивів відносять також «тиск обставин», наявність проблемної ситуації, пред'явлення завдань іншою особою тощо. Як незадоволеність своїм становищем, так і прагнення до самовираження, самоактуалізації можуть слугувати стимулами поведінки однієї і тієї самої людини.

Мотивація навчання різних предметів характеризується усвідомленням їх значущості для себе особисто (для майбутньої професії) і для суспільства, інтересом до предмету, усвідомленням необхідності систематичного і глибокого

вивчення предмету і найвищим проявом – прагненням самостійно й творчо опановувати знання з обраної спеціальності.

Успіх у навчанні залежить від багатьох факторів, серед яких провідне місце займають мотиви, психологічне налаштування, готовність до діяльності, пізнавальні потреби і інтереси, а також цілеспрямованість та інші вольові якості студента [160].

Розглянемо реально значущі для юнацького віку види діяльності (активності) і смислові установки, виходячи з психологічних закономірностей розвитку у цей віковий період.

Студентський період життя людини припадає переважно на період пізньої юності або ранньої дорослості, який характеризується оволодінням усім різноманіттям соціальних ролей дорослої людини, отримання права вибору, набуття певної економічної та юридичної відповідальності, можливості включення в усі види соціальної активності, здобуттям вищої освіти та опануванням професією. Головними сферами життєдіяльності студентів є професійне навчання, особистісне зростання та самоствердження, розвиток інтелектуального потенціалу, моральне, естетичне і фізичне самовдосконалення. Цей період життя максимально сприятливий для навчання і професійної підготовки молоді людини [160].

В умовах навчально-дослідницької діяльності у якості мотивів можуть виступати як безпосередній інтерес до завдання в процесі навчання, так і усвідомлення важливості отримуваних знань у житті теперішньому і майбутньому, прагнення самоствердитися серед товаришів, випробувати й виявити свої здібності, знайти своє місце в ієрархії соціальних стосунків у колективі, дістати схвалення від людей. Для багатьох прогресивних учених важливим стимулом науково-дослідницької діяльності є користь, яку вони можуть принести суспільству, людям.

Формування високої мотивації досягнення успіху пов'язане з навчанням на відповідному, досить високому, рівні складності, який визначається за змістом курсу і властивостями зони актуального і найближчого розвитку кожного студента; індивідуалізацією процесу навчання з метою надання кожному студенту можливості пережити і відчути власний успіх; включенням у навчальний та

позанавчальний процес роботи, спрямованої на реалістичного рівня домагання, адекватної самооцінки і зниження особистісної тривожності; використання педагогічної оцінки як об'єктивного показника індивідуальних досягнень суб'єкта, а не засобу заохочення чи покарання [86, с.28 – 29].

Умови формування мотивації досягнення успіху у навчанні [86, с.12]:

1) забезпечення усвідомлення студентами значущості навчання для подальшої професійної діяльності, прийняття ними вимог і завдань ситуації досягнення успіху у навчанні;

2) організація навчального процесу з урахуванням зон актуального та найближчого рівня інтелектуального розвитку студентів, що дає змогу ставити перед ними актуальні навчальні задачі, адекватні реальним можливостям їх виконання, дає змогу пережити задоволення у ситуації досягнення успіху;

3) використання індивідуалізованих максимально розгорнутих критеріїв педагогічного оцінювання (зауважень і похвали);

4) застосування педагогами таких видів навчальної роботи, виконання якої сприяє актуалізації мотиву досягнення успіху, подоланню особистісної тривожності, формування реалістичного рівня домагань і адекватного самооцінювання у процесі учіння, впевненості в тому, що неуспіх у навчальних ситуаціях пов'язаний з недостатньо докладеними зусиллями, а не з низькими здібностями.

Характеристики особистості, за якими відрізняють студентів, схильних до дослідницької діяльності визначає С.Л.Белих [14, с.18]:

1) специфічна «дослідницька» мотивація, особлива пізнавальна потреба, яка полягає не в бажанні накопичити корисні знання, а в прагненні виявити щось нове, «втрутитися» в звичний хід речей; в прагненні до «об'ємного», системного знання, бажання «охопити поглядом» явище якнайширше, в максимальному масштабі;

2) потреба в реальному баченні і розумінні об'єкта вивчення, стремління робити спроби, діставати відомості з власного досвіду, перевіряти все на власному досвіді (в науці цю властивість можна назвати прагненням до самостійної верифікації будь-якого знання);

3) особлива чутливість до проблем і протиріч, до виявлення систем і структур, які відрізняються від уже відомих людям (критичність мислення), як на першому етапі пошуку основної дослідницької проблеми, так і на наступних, пов'язаних із з'ясуванням окремих питань, на які поділяється потім головна проблема;

4) здатність до пошуку розв'язання, яка базується на такій розумовій дії, як аналогія (яка передусім розглядається в метафоричності мислення);

5) здатність до рефлексії двох типів: а) здатність до усвідомлення власних ментальних процесів, на основі якої можна управляти дослідницькою діяльністю; б) наукова рефлексія, на основі якої можна організовувати наявні знання в систему.

Дослідницькі вміння необхідні для розв'язування творчих задач. Важливим у цьому процесі є здатність викладача активізувати інтерес студента і вміння підтримати його, допомагати студентові знаходити необхідні засоби для його реалізації. Саме на такій мотиваційній основі базуються методи проблемного навчання [14, с.24].

Отже, завдання викладача полягає в тому, щоб на кожному етапі навчання (і зокрема в процесі навчально-дослідницької діяльності) розкривати значення результатів навчальної діяльності для духовного та професійного розвитку студента. Разом з тим викладач повинен з одного боку спиратися на життєвий досвід своїх студентів, на їхню самостійність, а з іншого – розширювати межі цього досвіду, формувати у студентів внутрішні основи (знання, переконання, методи навчальної діяльності), на основі чого студенти зможуть все більш ефективно регулювати процес свого учіння. Лише з розвитком власного творчого потенціалу студент все повніше усвідомлюватиме цінність освіти і самоосвіти для себе особисто.

Навчання для студентів повинно набути особистісно життєвого значення, оскільки через нього поєднуються розум, почуття і воля, що виявляється в спрямуванні творчої пізнавальної активності на життєве самовизначення і професійне самоствердження, оволодіння професією і розвиток своїх потенційних інтелектуальних можливостей.

1.2.3 Розвиток продуктивного мислення в процесі навчально-дослідницької діяльності

Багато вчених-дослідників [124], [18] сходяться на тому, що між дослідницькою діяльністю, інтелектом і творчістю існує тісний зв'язок.

Оскільки дослідницька діяльність є досить вільним нерегламентованим видом діяльності, то це дає можливість або навіть стимулює креативну, творчу людину проявити свої здібності: побачити справжню проблему, знайти нові нестандартні способи дослідження, отримати завдяки цьому неочікувані відомості і осмислити їх нетривіальним чином [159, с.96].

Формування системи пошукових і дослідницьких умінь та навичок творчої діяльності людини сприяє розвитку високого рівня її активності, оскільки забезпечує постійну спрямованість на подальшу пізнавальну та творчу діяльність. Основні компоненти пошукових та дослідницьких умінь студентів, що формуються в процесі реалізації пошукових, дослідницьких та експериментальних проектів:

- пізнавально-діяльнісний – через активність в оволодінні знаннями, уміннями, навичками пошукової та дослідницької діяльності постійно стимулюється прагнення до самостійної творчої праці, забезпечується розвиток здібностей, характеристик творчої особистості;
- мотиваційно-вольовий – забезпечується сформованість позитивних вольових рис творчої людини (цілеспрямованість, організованість, самостійність, рішучість) та можливі способи їх удосконалення;
- змістовно-операційний – через сформоване активно-перетворювальне ставлення студента до пошукової та дослідницької діяльності забезпечується спрямованість на інші види пізнавальної та творчої діяльності;
- емоційний – здатність до сприйняття оточуючої дійсності, творчого спілкування, налагодження позитивних контактів, подолання стереотипів, визначення характеристик творчої поведінки принципово важливі для постійного включення у творчу діяльність;

– самооцінювальний – прагнення до творчого пізнання власної особистості, виявлення та розвиток внутрішнього творчого потенціалу в процесі навчальних досліджень, самооцінювання своїх індивідуальних якостей.

Деякі автори взагалі розглядають дослідницьку діяльність як вид творчої діяльності.

Як для теоретичних, так і для прикладних досліджень головною ознакою творчості є нові відкриття, створення за певним задумом нових цінностей, встановлення невідомих раніше науці фактів, надання нових, цінних для людини відомостей [151].

Без теоретичного творчого мислення і досить глибоких і широких знань предметної галузі неможливо заперечити існуючі чи створити нові наукові гіпотези, дати глибоке пояснення процесів і явищ, які раніше були незрозумілими або мало вивченими, пов'язати в єдине ціле різні явища, тобто знайти стержень дослідження.

Творчий характер мислення в процесі наукових досліджень полягає у створенні уявлень, тобто нових комбінацій з відомих елементів, і базується на таких прийомах, як збирання і узагальнення відомостей; постійне зіставлення з уже відомим, порівняння, критичне осмислення; чітке формулювання своїх думок та їх письмове подання, удосконалення власних пропозицій.

Часто може бути так, що творче рішення не вкладається в межі визначеного плану, воно може виникнути «раптово». Творчі думки, оригінальні рішення з'являються тим частіше, чим більше сил, праці, часу витрачається на постійне обдумування об'єкта дослідження. Ефективність творчого задуму залежить від того, якою мірою науковець володіє знаннями предметної галузі, методами дедукції та індукції, аналізу, синтезу тощо.

Завданням саме вищої освіти є формування і розвиток особистості людини, яка умітиме творчо розв'язувати наукові, виробничі, суспільні задачі, самостійно і критично мислити, виробляти і захищати свою думку, свої переконання, систематично і неперервно поповнювати і оновлювати свої знання шляхом самоосвіти, вдосконалювати уміння творчо застосовувати їх в своїй діяльності.

Вказані характеристики формуються у студента в процесі систематичного залучення його до самостійної діяльності, яка в процесі виконання ним самостійних робіт і розв'язування дослідницьких навчальних задач набуває характеру проблемно-пошукової діяльності [157, с. 41].

Уміння студента самостійно організувати свою навчальну роботу – одна з найважливіших умов успішної навчально-дослідницької діяльності студентів. Студент як суб'єкт навчальної діяльності повинен володіти системою інтелектуальних, етичних і вольових якостей, що надасть йому можливість самостійно управляти процесом свого учіння.

Розумову самостійність як одну з найважливіших характеристик особистості, що лежить в основі творчої спрямованості людини, продуктивності її діяльності розглядає Ю.Н.Кулюткін [118].

Розумова самостійність проявляється в здатності людини ставити перед собою цілі діяльності, визначати для себе задачі (в тому числі пізнавальні, навчальні), знаходити способи і засоби їх розв'язування. Самостійність проявляється також в здатності людини планувати, організувати і регулювати свою діяльність. Нарешті, самостійність базується на добре розвинених самоконтролі і самооцінюванні. Таким чином, розумова самостійність – це здатність людини здійснювати управління своєю діяльністю, яке має в своїй структурі такі компоненти як планування, контроль, управляючі корективи.

Ю.Н.Кулюткін [118] виокремлює різні *рівні розвитку розумової самостійності*:

1) характеризується умінням розв'язувати навчальні задачі, коли вимагається від студентів просте відтворення (репродукція) засвоєних знань чи дій (розв'язування типових задач чи прикладів, виконання вправ за вивченим правилом, переказ засвоєного матеріалу тощо).

2) пов'язується з нестандартними задачами, розв'язування яких вимагає від студентів здійснення пошукових дій, тобто розв'язування не за готовими схемами чи зразками, а на основі самостійного пошуку (розв'язування відносно незнайомих

задач, де потрібні залучення знань з різних тем вивченого матеріалу, пошук математичних доведень, побудова узагальнень, класифікацій тощо).

3) коли студенти самостійно ставлять цілі, здійснюють перенесення знань з однієї галузі в іншу (в практичну діяльність, у винахідництво тощо).

Розвиток самостійності – це своєрідний перехід від діяльності, управління якою здійснюється викладачем, до такої діяльності, коли студент починає самостійно здійснювати управління своєю діяльністю. Цю думку добре виразив К.Д. Ушинський, який зазначав, що слід розвинути в учня бажання і здатність самостійно, без учителя, набувати нових знань, дати учневі засіб здобувати корисні знання не тільки з книг, але і з предметів, які його оточують, з життєвих подій, з історії його душі. Володіючи такою розумовою силою, що черпає звідусіль корисне, людина буде вчитися все життя, що звичайно й складає одне з найголовніших завдань будь-якого навчання [200].

Щоб самостійно управляти своєю навчально-пізнавальною діяльністю, студент передусім повинен стати для самого себе викладачем, бути одночасно і «учнем» і «вчителем». Лише в цьому випадку студент зможе мотивувати свою діяльність, здійснювати її планування і регуляцію, аналіз і оцінювання. В цьому якраз і знаходить своє вираження загальна психологічна закономірність, а саме інтеріоризація зовнішніх відносин між людьми, коли власна діяльність людини виступає для неї як об'єкт управління, а сама вона як суб'єкт, який здійснює управління.

Набуття студентом досвіду здійснення різних функцій – не тільки виконавських, але й управлінських – можливе тільки в процесі активної взаємодії студента з викладачем та з іншими студентами.

Джерелом становлення творчої спрямованості студента в процесі навчально-дослідницької діяльності є розвиток його навчальної самосвідомості і, зокрема, через процеси рефлексії. Зв'язок діалогу і процесів рефлексії очевидний. Існує думка, що рефлексія – це і є дискусія, тільки дискусія з самим собою. Слід відзначити, що рефлексивна позиція студента істотно відрізняється від репродуктивної, стереотипної, яка характеризується незацікавленим відношенням

до пошуку, прагненням розв'язати задачу через використання готових засобів, без попереднього осмислення умов, даних задачі, без ретроспективного аналізу отриманих результатів з точки зору їх раціональності, однозначності [93, с.77].

В.І.Андрєєв [93] називає психічні форми прояву рефлексивних процесів:

1. Критичність мислення суб'єкта діяльності. Ця характеристика в даний час стає соціально значимою, формується в особливих навчальних ситуаціях, де вимагається рецензування, оцінювання, висловлювання власної думки.

2. Прагнення студента до доказовості і обґрунтованості своєї думки. Якщо викладач заміняє логічне обґрунтування декларацією, то мало ймовірно, що вказані вміння будуть ефективно сформовані у студентів.

3. Здатність і прагнення студентів ставити питання. Рефлексивна активність студента розвивається, якщо матеріал подається так, щоб «спровокувати» питання.

4. Прагнення та здатність студента вести дискусію. Оскільки рефлексія – це дискусія з самим собою, коли ставиш питання і сам на нього відповідаєш, розвитку рефлексії сприяють діалогічні форми навчання. Монолог у початковому процесі веде до гальмування рефлексивно-оцінювальних дій.

5. Готовність до адекватного самооцінювання.

В умовах сучасного життя необхідним стає перехід до таких форм освіти, на основі яких забезпечуватиметься пізнавальна активність і самостійність мислення студентів, здатність до дослідницької діяльності. А самостійність мислення, яка необхідна для здійснення дослідницької діяльності, неможлива без його критичності.

Критичне мислення – це мислення, яке характеризується усвідомленістю, самостійністю, рефлексивністю, цілеспрямованістю, обґрунтованістю, контрольованістю та самоорганізованістю людини [192]. В його основі лежить здатність студентів до самостійних логічно грамотних роздумів і суджень; уміння не піддаватися впливу чужих думок, а правильно оцінювати їх, бачити їхні сильні й слабкі сторони, виявляти цінне, що в них є, і ті помилки, що допущені в них [187].

Людина, яка критично мислить, використовує критичне мислення як засіб коригування та ліквідації помилок насамперед у власному мисленні. В такому разі

здійснюються не окремі розумові дії та операції, а сам процес мислення, пов'язаний із такими основними характеристиками, як відчуття життєвої ситуації, здатність до висновків, самокорекція.

Критичне та творче мислення – це мислення вищого порядку, яке спирається на знання, відомості, усвідомлене сприйняття власної інтелектуальної діяльності та діяльності інших.

За своєю суттю критичне мислення є діалогічним, тобто перебігає в безперервній дискусії. Увага в ній зосереджується більше на предметі дискусії, а не на індивідуумах. Головне призначення дискусії – чіткіше і краще функціонування процесу пізнання. Під критичним мисленням розуміють здатність аналізувати навчальний матеріал з позицій логіки та особистісного підходу як до розгляду стандартних, так і нестандартних ситуацій і розв'язування проблем, та здатність ставити нові запитання, знаходити аргументи, приймати незалежні продумані рішення.

Критичне мислення в процесі навчально-дослідницької діяльності проявляється у здатності студента:

- самостійно аналізувати дані і відомості, урівноважувати у своїй свідомості різні точки зору;
- знаходити відомості, необхідні для прийняття рішення;
- піддавати ідею м'якому скепсису, вміти бачити помилки або логічні порушення у твердженнях інших авторів або партнерів;
- аргументувати свої думки, змінювати їх, якщо вони неправильні, і відстоювати, якщо правильні;
- прагнути до пошуку найкращих та аргументованих рішень.

О.В.Тягло звертає увагу на недостатність критичного мислення самого по собі, на необхідність доповнення розвитком у студентів творчого мислення [196]. Критичне і творче мислення становлять необхідні та взаємодоповнюючі складові продуктивного мислення (таблиця 1.2.3), яке є бажаним продуктом навчання. Тому в процесі формування критичного мислення слід уникати його абсолютизації й відриву від розвитку креативності і творчого мислення.

Таблиця 1.2.3

Творче мислення	Критичне мислення
<ul style="list-style-type: none"> □ відкриття нового; □ формулювання гіпотези; □ створення нових ідей; □ пошук розв'язку; □ вдосконалення, доповнення розв'язування; 	<ul style="list-style-type: none"> □ обґрунтування, спростування або доведення; □ перевірка запропонованого розв'язку; □ визначення напрямів застосування розв'язку; □ виявлення недоліків і дефектів;

Викладач повинен прагнути і домагатися того, щоб студенти не лише запам'ятовували матеріал, а й ставили запитання, проводили дослідження, творили, вирішували, інтерпретували, брали участь у дискусіях. Дослідження показують, що саме на заняттях, де студенти проявляють активність, якщо вони зорієнтовані на досягнення конкретних цілей і добре організовані, студенти засвоюють матеріал найбільш повно і з користю для себе. Це означає, що студенти думають про те, що вивчають, застосовують набуті знання в ситуаціях реального життя або для подальшого навчання і здатні вчитися самостійно.

У процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу відбувається ефективно формування критичного мислення. Усвідомлене володіння навчальним матеріалом з математики та інформатики дає змогу активізувати розумову діяльність студентів, виховує вміння думати логічно, послідовно, обґрунтовано, тобто вміння, які необхідні для виконання навчально-дослідницьких завдань.

1.3 Загальні методи наукового дослідження в процесі навчально-дослідницької діяльності студентів фізико-математичних спеціальностей

У вищій освіті цілі навчальної дослідницької діяльності та експериментування визначаються за більш загальними цілями кожного напрямку освіти, профілем «ідеального» фахівця в певній галузі. У вищій освіті – це оволодіння загальною методологією наукової дослідницької діяльності і конкретними методами дослідження, що застосовуються в тій чи іншій галузі діяльності [159, с.190].

Для сучасної вищої школи характерним є зв'язок навчальної роботи студентів з дослідницькою діяльністю і розв'язуванням задач передбачуваного розвитку відповідних спеціальних галузей знань. В установленні цього зв'язку важливу роль відіграє відповідне використання методів пізнання, методів науки або методів дослідження.

У вищій школі важливим завданням є навчання студентів методів дослідницької діяльності, самостійного пізнання і науково обґрунтованих дій. Навчання спеціальних дисциплін поєднується з навчанням методів науки і шляхів їх застосування, формування умінь дослідницької діяльності, умінь самостійно знаходити необхідні відомості і поповнювати свої знання, творчо здійснювати науковий пошук, вивчення методів наукової організації праці, вміння аналізувати і синтезувати факти і явища.

Використання методів і засобів наукового пошуку здійснює суттєвий вплив на всю систему вищої освіти, на визначення змісту навчальних предметів і вдосконалення способів і прийомів оволодіння ним, формування у студентів наукового мислення, вміння аналізувати, узагальнювати, обґрунтовувати твердження і шукати істину. На процесуальному рівні ознайомлення з методами пізнання, методами наукового пошуку є невід'ємною частиною формування і розвитку дослідницьких умінь студентів.

Існує багато визначень поняття «метод». Метод у широкому розумінні слова – «шлях до чогось», шлях дослідження, шлях пізнання, теорія, вчення, спосіб досягнення певного результату, здійснення певної діяльності, розв'язування певних задач. Метод виступає як сукупність певних правил, прийомів, способів, норм пізнання і дії. Він є системою приписів, принципів, вимог, яких слід дотримуватися в процесі розв'язування конкретної задачі, вирішенні проблеми, досягненні результату у певній сфері діяльності. [151, с. 24].

За визначенням Г.І.Рузавіна [178], метод пізнання або метод дослідження – це специфічні правила, які покладаються в основу певних дій або операцій, за допомогою яких здобувається і обґрунтовується нове знання у науці.

Але визначення методу як сукупності правил, застосування яких у кожному конкретному випадку приводить до мети, застосовне лише до найпростіших видів практичної діяльності та елементарних методів алгоритмічного характеру. Складні ж проблеми науки менш за все піддаються алгоритмізації, їх розв'язування не можна звести до застосування готових правил і рецептів. Їх розв'язування вимагає мобілізації всіх інтелектуальних зусиль ученого і наполегливого творчого пошуку. Такі методи називають евристичними або пошуковими [178, с.6].

Серед загальнонаукових методів виокремлюють [151]:

1. Методи емпіричного дослідження: спостереження, експеримент, порівняння, опис, вимірювання.

2. Методи теоретичного пізнання: формалізація, аксіоматичний метод, гіпотетико-дедуктивний метод і сходження від абстрактного до конкретного.

3. Загальні логічні методи і прийоми дослідження: аналіз, синтез, абстрагування, ідеалізація, узагальнення, індукція, дедукція, аналогія, моделювання, системний підхід, ймовірнісні, статистичні методи.

Окрім того, в кожній науці є свій специфічний предмет дослідження, тому з'являються притаманні саме їй прийоми аналізу і синтезу, систематизації результатів спостереження, експерименту та опрацювання дослідних даних.

Розглянемо деякі методи дослідження в процесі навчально-дослідницької діяльності студентів фізико-математичних спеціальностей.

1.3.1 Спостереження

Людина здобуває відомості через спостереження за навколишньою дійсністю, за проявами різноманітних явищ і перебігом процесів у природі та суспільстві. Для того, щоб *спостереження* стало для студентів методом отримання вірогідних знань про навколишнє середовище, необхідно розвивати вміння спостерігати. Необхідно виховувати культуру спостереження. Людина, яка володіє цим умінням, може помітити в здавалася б найменш значних, звичайних явищах прояви суттєво важливих властивостей матеріального світу, важливі тенденції в розвитку культури, науки, техніки [197, с. 7].

На основі даних, отриманих за допомогою спостережень, в результаті теоретичного аналізу і математичного опрацювання результатів спостережень встановлюються наукові факти і виконуються узагальнення.

Науково поставлене спостереження будується згідно завчасно обдуманого плану, ведеться систематично, у відповідності із строго визначеним завданням. Успіх спостережень залежить від ясності і конкретності поставленої мети, наявності необхідних попередніх знань про спостережувані предмети і явища, вміння аналізувати і синтезувати результати спостереження, від чіткої фіксації результатів спостереження в формі протоколу, таблиці, графіка, схеми.

Наукове спостереження може здійснюватися в природних і штучно створених (експериментальних) умовах. Воно є важливим елементом експериментального дослідження. Водночас експериментальне вивчення явищ дійсності виходить із попередніх спостережень над ними.

Наукове спостереження планується самим ученим, він сам визначає мету і способи опрацювання результатів [197, с. 42].

Спостереження в навчальному процесі також є одним із важливих методів пізнання, необхідним для формування у студентів наукових понять. Навчальне спостереження відрізняється від наукового тим, що воно здійснюється за завданням викладача; мета спостереження і відповідні завдання, як правило, формулюються викладачем.

Проведення спостережень у процесі навчання має на меті: 1) розвиток у студентів спостережливості, вміння бачити явища оточуючої дійсності, через що значною мірою визначається загальний рівень розвитку людини; 2) ознайомлення студентів з особливостями спостереження як методу наукового пізнання і підготовки їх до проведення наукових досліджень, як одного з шляхів розвитку їх пізнавальних здібностей; 3) вивчення властивостей різноманітних явищ і процесів.

План проведення спостереження [197, с.53]:

1. Формулювання мети спостереження.
2. Вибір об'єкта спостереження.
3. З'ясування умов, необхідних для спостереження.

4. Практичне створення умов, необхідних для спостереження. (Використання різноманітних прийомів для забезпечення доцільного унаочнення спостережуваного).

5. Планування спостереження.

6. Вибір способу фіксації спостережуваного (словесний опис, малюнок, система малюнків, за допомогою яких описують явище в його розвитку; побудова графіка, фотографування).

7. Виконання спостереження з фіксацією одержаних даних.

8. Аналіз результатів спостереження.

9. Формулювання висновків, їх фіксація.

Спостереження не є пасивним спогляданням чи фотографічним відображенням сприйнятого. Воно є складною мисленнєвою діяльністю, через яку забезпечується повнота і точність сприйняття досліджуваних явищ. В процесі аналізу явищ, з одного боку, ставляться задачі перед сприйняттям, яке відповідним чином організовується і направляється (що саме в спостережуваному об'єкті треба знайти, виокремити, пізнати; чим керуватися і т.п.). З іншого боку, в процесі мислення переробляються результати сприйняття, завдяки чому формуються знання про розглядуваний об'єкт. На їх основі сприйняттю відкриваються нові властивості об'єкта, раніше не виявлені [213].

Так, наприклад, через динамічне перетворення графічного зображення за рахунок відповідної зміни параметрів у програмі Gran1 забезпечується зручне середовище для розвитку у студентів прийомів спостереження за математичними об'єктами, які необхідні і важливі для успішного здійснення навчально-дослідницької діяльності.

Для ефективності спостереження необхідно не тільки спонукати студентів до розгляду об'єктів, а організувати їх діяльність в цьому напрямку.

Щоб розвивати уміння студентів володіти раціональними прийомами спостереження в процесі засвоєння знань, доцільно розглядати такі навчально-дослідницькі задачі, в процесі розв'язування яких вимагається не тільки сприйняття початкових даних, але й чітке уявлення про те, що відбуватиметься з

цими даними, якщо змінити наявну ситуацію в тому чи іншому напрямку. Під час розв'язування задач необхідно спрямовувати студентів на самостійне дослідження заданого об'єкта, на виявлення його окремих ознак, істотних для виконання даного завдання, на встановлення відношень, функціональних взаємозв'язків між об'єктами.

Використання дослідницького методу навчання передбачає вивчення об'єктів і ситуацій в процесі відповідних спостережень і експериментів. Для досягнення успіху необхідна наявність відповідного середовища. У цьому плані незамінним є моделювання, тобто імітація змін реального об'єкта, ситуації або середовища з часом [186].

1.3.2 Моделювання

Моделювання є одним із найдавніших методів пізнання.

У філософській та психолого-педагогічній літературі моделювання розглядається з різних точок зору. У широкому розумінні моделювання є однією з основних категорій теорії пізнання і чи не єдиним науково обгрунтованим методом наукових досліджень систем і процесів будь-якої природи в багатьох сферах людської діяльності [176].

Науковою основою моделювання як методу пізнання і дослідження різних об'єктів і процесів є теорія подібності, в якій головним є поняття аналогії, тобто схожості об'єктів за деякими ознаками.

В [194] даються означення:

Моделювання – це спосіб дослідження будь-яких явищ, процесів або об'єктів шляхом побудови та аналізу їх моделей.

Модель – це реально існуюча або уявна система, яка використовується для заміщення і відображення в пізнавальних процесах іншої системи-оригінала, що знаходиться з нею у відношенні подібності.

Система – цілісний комплекс взаємопов'язаних елементів, який характеризується певною структурою і взаємозв'язками між ними та із зовнішнім середовищем.

Основна мета побудови і використання моделі – забезпечити дослідження та аналіз функціонування реального об'єкта.

Філософське означення моделі береться за основу в психолого-педагогічних дослідженнях, оскільки за своїми суттєвими характеристиками навчальне і наукове моделювання схожі. Досліджуючи нові поняття, об'єкти, розв'язуючи завдання за методом моделювання, учень і студент міркують як дослідники, і саме в цьому полягає найважливіше методологічне значення моделювання в навчанні. Однак, навчальна діяльність студента не тотожна дослідницькій діяльності вченого. У науці моделювання є засобом одержання об'єктивно нових відомостей, тоді як в навчальному пізнанні за допомогою моделювання студент здобуває суб'єктивно нові знання.

В.О.Далінгер вважає моделювання одним з найбільш прогресивних і розвиваючих методів навчання, якому властиві ознаки творчого процесу, дослідницької діяльності і відкриття студентами суб'єктивно нових знань [60].

В.В.Давидов [57] і Д.Б.Ельконін [212] розглядають моделювання як навчальну дію, без якої неможливе повноцінне навчання. У рамках створеної ними теорії навчальної діяльності моделювання визнається як найважливіший етап розв'язування навчальних задач, оскільки саме моделювання виокремленого суттєвого відношення в предметній, графічній або знаковій формі дає змогу перейти до дослідження цієї властивості в «чистому» вигляді.

Розуміння, що властивості явищ з'ясовуються саме через моделі, сприяє оволодінню моделюванням як методом наукового пізнання [203].

На основі різних підходів до класифікації моделей розрізняють їх види.

Інформаційна модель – це відповідним чином структурований опис об'єкта, система даних про об'єкт, за допомогою яких описують властивості і стан об'єкта, процесу або явища, а також його зв'язки з навколишнім світом [52, с.29].

Інформаційне моделювання – метод наукового дослідження об'єктів пізнання шляхом побудови і дослідження їх інформаційних моделей.

Математичне моделювання – це метод дослідження перебігу процесів чи проявів явищ шляхом побудови системи математичних співвідношень

(математичних моделей), що є описами досліджуваних об'єктів, та їх подальшого вивчення. У процесі математичного моделювання використовуються загальні основи природознавства, спеціальні закони конкретних наук, результати спостережень та експериментів, імітаційне моделювання за допомогою комп'ютера. Математичне моделювання здійснюється з використанням методів і засобів математики та логіки, зокрема з використанням комп'ютерів. Дослідження математичних моделей дає змогу передбачити розвиток процесу, розрахувати його характеристики, здійснювати управління цим процесом, проектувати системи з бажаними характеристиками тощо [52, с.29].

Саме за допомогою математичного моделювання можна [60]:

- інтегрувати математичні і природничо-наукові знання в процесі побудови і дослідження математичних моделей перебігу реальних процесів та проявів явищ;
- забезпечити тісний зв'язок науки і навчальної діяльності;
- формувати компоненти творчого мислення, розвивати прийоми мислення (аналіз, синтез, індукція, дедукція, аналогія, узагальнення);
- забезпечити цілісність, структурованість, динамічність знань;
- пов'язувати дослідження об'єктів з аналогами в інших галузях.

Важливим методом прикладних наукових досліджень є експеримент, зокрема комп'ютерний обчислювальний, що є науково поставленим дослідом чи спогляданням явища в чітко визначених умовах, що дає змогу стежити за його ходом, здійснювати управління ним, відтворювати щоразу за повторення цих умов [151, с.50]. Основна мета проведення експерименту полягає в перевірці теоретичних положень, а також у більш широкому і глибокому вивченні об'єкта наукового дослідження.

Над математичною моделлю певного явища проводиться обчислювальний експеримент. За характеристиками моделі обчислюються значення параметрів і робляться висновки про властивості явища, що досліджується.

Обчислювальний експеримент – це метод дослідження, заснований на вивченні математичної (інформаційної) моделі за допомогою комп'ютера.

Основою обчислювального експерименту є математичне моделювання,

теоретичною базою – прикладна математика, а технічною – потужні засоби інформаційно-комунікаційних технологій [181, с.28].

Мета обчислювального експерименту – побудова з необхідною точністю за допомогою комп'ютера відповідного кількісного опису явища, що вивчається.

Аналіз більшості математичних моделей потребує проведення обчислень з використанням комп'ютера або комп'ютеризованих експериментів. З іншого боку, будь-які обчислення можливі тільки на основі деякої математичної моделі.

Комп'ютерна модель – модель, реалізована за допомогою комп'ютера [194].

Під комп'ютерною моделлю розуміють [109]:

– образ об'єкта чи деякої системи об'єктів (або процесів), описаних за допомогою взаємозалежних комп'ютерних таблиць, схем, діаграм, графіків, малюнків, анімаційних фрагментів тощо, в яких відображаються структура та взаємозв'язки між елементами об'єкта чи системи;

– окрему програму, сукупність програм чи програмний комплекс, використання якого дає змогу виконання послідовності обчислень з подальшим графічним відображенням їх результатів.

Комп'ютерне моделювання – метод розв'язування задачі аналізу або синтезу складної системи, що ґрунтується на використанні її комп'ютерної моделі [194].

У комп'ютерній моделі складної системи мають якомога повніше відображатися всі основні фактори й взаємозв'язки, через які характеризуються реальні ситуації, критерії та обмеження. До того ж модель має бути не тільки універсальною (щоб охоплювати якнайширше коло близьких за властивостями об'єктів), але й досить простою (щоб необхідні дослідження можна було здійснювати із мінімальними витратами).

Сутність комп'ютерного моделювання полягає в одержанні кількісних і якісних характеристик досліджуваних реалій за наявною моделлю. Якісні висновки, що одержуються за результатами аналізу, стосуються властивостей об'єкта, його структури, динаміки розвитку, стійкості, цілісності тощо. Кількісні висновки переважно мають характер прогнозу деяких майбутніх або пояснення минулих значень змінних, за допомогою яких подають дану модель.

Комп'ютерне моделювання має значні переваги перед моделюванням інших видів через свою гнучкість та універсальність. Дослідження моделей за допомогою комп'ютера дає змогу сповільнювати і прискорювати «хід часу», стискати або розтягувати простір, імітувати виконання дій значною мірою затратних, небезпечних або просто неможливих у реальному світі [186].

Моделювання є ефективним методом навчання всіх предметів, що забезпечує підвищення результативності навчально-пізнавальної діяльності студентів [141]. Зокрема це стосується і математичної інформатики, в процесі навчання якої моделювання постає об'єднуючим (системоутворюючим) фактором інтеграції природничо-наукових, математичних та інформатичних дисциплін.

Важливим результатом вивчення курсу математичної інформатики є розширення і поглиблення знань з певної предметної галузі, що вивчається, за рахунок надання студентам можливості моделювання, імітації досліджуваних процесів та явищ, організації на цій основі дослідницької діяльності, умінь створювати необхідні комп'ютерні моделі та проводити експерименти з їх використанням [204].

Переваги навчального комп'ютерного моделювання пов'язані з подоланням формальності засвоєння знань, розвитком дослідницьких і конструкторських умінь, інтелектуальних здібностей [141, с. 48].

Уміння моделювати є важливою складовою практично-операційного компоненту навчально-дослідницької діяльності і тісно пов'язане з іншими складовими їх структурних компонентів, зокрема з оволодінням розумовими операціями: аналогією, порівнянням, аналізом, синтезом, узагальненням.

Розробка моделей поєднує в собі і науку, і мистецтво, і знання відповідної предметної галузі [209]. Слід зауважити, що немає чіткого формального алгоритму, за допомогою якого можна було б побудувати модель для будь-якого об'єкта. Разом з тим процес побудови моделі поділяється на певні етапи [194]:

1. Аналіз та визначення міри деталізації опису об'єкта моделювання. Об'єкт реального світу може вивчатися з найрізноманітніших позицій, однак у кожному конкретному випадку дослідників цікавить як правило невелика скінченна

кількість властивостей і характеристик досліджуваного об'єкта. Тому перед дослідниками постає задача визначити ці основні характеристики і властивості й відтворити їх в моделі. На даному етапі проводиться аналіз взаємозв'язків об'єкта із зовнішнім середовищем, дослідження особливостей функціонування об'єкта, його внутрішньої структури; здійснюється огляд літературних джерел, аналіз та порівняння побудованих раніше моделей подібних об'єктів; аналіз та узагальнення всього накопиченого матеріалу.

2. Опис змінних (параметрів) моделі та формалізоване подання концептуальної моделі. Концептуальна постановка задачі моделювання – це сформульований в термінах конкретних дисциплін (фізики, хімії, біології та ін.) список основних понять. Формалізація – відображення системи в точних поняттях. Частина моделі, які можна описати через математичні вирази, подають як аналітичні залежності. Математичний опис моделі складається на основі законів відповідної предметної наукової галузі, за якими характеризують динаміку і статику процесів у досліджуваному об'єкті і виражають мовою математики.

3. Вибір засобів реалізації моделі, вибір програмного середовища. На даному етапі слід розглянути питання:

- можливості відображення структури модельованої системи;
- можливості зміни структури та налагодження моделі;
- можливості внесення змін у програмну реалізацію системи;
- зручність управління програмою;
- можливості збирання статистичних даних стосовно перебігу досліджуваного процесу чи проявів явищ за допомогою розробленої моделі;
- можливості формування звіту стосовно дослідження моделі в зручному для користувача вигляді.

4. Програмна реалізація моделі. Опис мовою програмування статичних і динамічних об'єктів, задання інтерфейсів, характеристик і властивостей об'єктів. Розроблення алгоритму розв'язування задачі, подання алгоритму у вигляді комп'ютерної програми. Для оцінювання правильності програмної реалізації моделі проводяться пробні експерименти (тестування моделі), в яких

застосовуються налагоджувальні засоби вибраної системи моделювання. Ця перевірка дає змогу визначити, чи відповідає функціонування моделі особливостям перебігу відтворюваного процесу. У разі невідповідності процесів програма коригується.

5. Перевірка вірогідності і правильності імітаційних моделей. Необхідною умовою для переходу від дослідження об'єкта до дослідження моделі і подальшого перенесення результатів моделювання на досліджуваний об'єкт є вимога адекватності моделі об'єкту. Адекватність – це відтворення в моделі з необхідною повнотою всіх властивостей об'єкта, важливих для цілей даного дослідження.

Виокремлюють 5 етапів технологічного циклу обчислювального експерименту: побудова математичної моделі, розробка методу аналізу математичної моделі, програмування, обчислення за допомогою комп'ютера, аналіз результатів розрахунків і застосування [128, с.6].

Моделювання за допомогою сучасних комп'ютерних математичних пакетів є одним із найпотужніших засобів досліджень. Використовуючи комп'ютерні програми, проводять обчислювальний експеримент, а також створюють графічні, імітаційні моделі.

Графічне моделювання – метод дослідження властивостей об'єктів, проявів явищ, перебігу процесів на основі графічного подання їх описів. Графічне моделювання як технологія візуалізації і метод пізнання є важливою складовою навчального процесу.

Відображення перебігу процесу чи зміни станів досліджуваного об'єкта за допомогою динамічної графічної моделі також є динамічним, змінюваним з плином часу. Таким чином, у кожний довільний момент часу графічна модель буде вірогідним образом реального явища або процесу.

Останнім часом часто використовується поняття імітаційного моделювання. Інтерес до цього виду комп'ютерного моделювання поживався у зв'язку з істотним технологічним розвитком систем моделювання, в яких задіяний весь арсенал новітніх інформаційних технологій, включаючи розвинені графічні оболонки для конструювання моделей та інтерпретації вихідних результатів моделювання,

мультимедійні засоби і відео, на основі чого підтримується анімація в реальному масштабі часу, об'єктно орієнтоване програмування тощо.

Імітаційне моделювання – це імітація перебігу процесів та проявів явищ за допомогою конструювання моделі та проведення експериментів з нею.

Стан досліджуваного об'єкта в момент часу t визначається через значення параметрів об'єкта у цей самий момент часу t . Будь-яку зміну цих значень можна розглядати як перехід до іншого стану.

Власне будь-яка комп'ютерна модель є імітаційною, але цей термін закріпився за моделями складних систем, коли внутрішні закони досліджуваних явищ невідомі або визначаються через випадкові чинники.

Приклад 1.3.1. Змоделювати траєкторію руху броунівської частинки.

Броунівським рухом називають невпорядкований рух дрібних частинок, завислих у рідині чи газі під впливом ударів молекул навколишнього середовища. Причиною руху броунівської частинки є тепловий рух молекул середовища і відсутність точної просторової орієнтації ударів, що їх зазнає частинка з боку оточуючих її молекул. Ці удари приводять частинку у невпорядкований рух: швидкість її весь час різко змінюється і за величиною, і за напрямком. Якщо фіксувати положення довільної частинки через невеликі однакові проміжки часу, то побудована у такий спосіб траєкторія виявляється надзвичайно складною і заплутаною лінією.

Припустимо, що у початковий момент часу частинка знаходиться в точці з координатами $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ і далі може бути зміщена у довільному, випадковому напрямку. Максимальна відстань, на яку може зміститися частинка до зіткнення з іншою частинкою, нехай не перевищує 1 мм. Після зіткнення частинки знову випадковим чином змінюється напрямок наступного зміщення і знову частинка зміщується на деяку відстань до моменту нового зіткнення і зміни напрямку.

Оскільки координати x та y місця знаходження такої частинки у будь-який довільний момент часу заздалегідь передбачити неможливо, то моделювати їх будемо парами випадкових чисел, які можна згенерувати, наприклад, за допомогою функції $rnd(k)$ в середовищі Mathcad. Якщо змінній k надати конкретне чисельне

значення, то в результаті виконання функції генерується псевдовипадкове число з інтервалу від 0 до k .

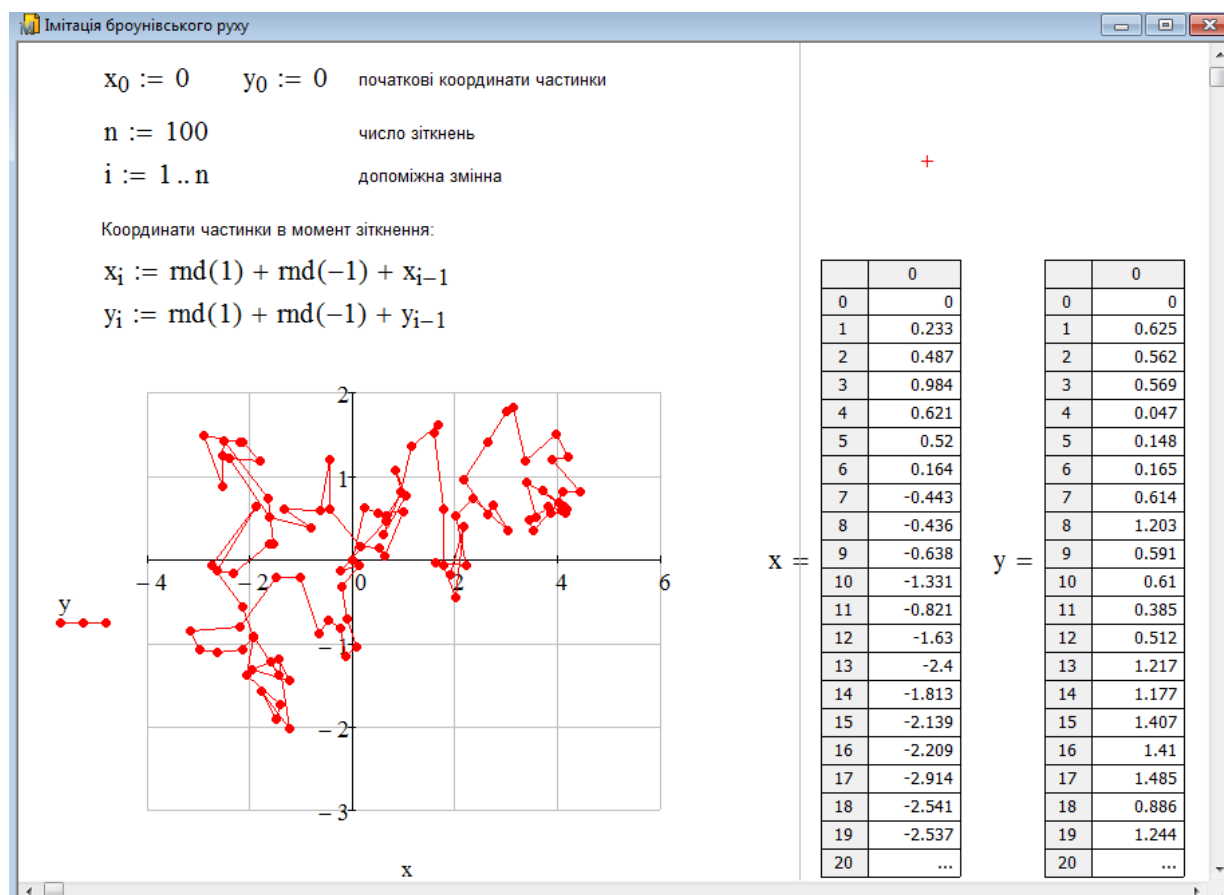


Рис. 1.3.1 Моделювання броунівського руху молекул

Позначимо координати місця знаходження частинки в кожен момент зіткнення через x_i та y_i , причому змінна i набуває значень від 1 до n , n – число зіткнень (рис. 1.3.1). Для того, щоб координати набували як додатних, так і від’ємних значень, випадкові числа повинні змінюватися в інтервалі $[-1;1]$. Такі числа одержуємо за формулами: $x_i := \text{rnd}(1) + \text{rnd}(-1) + x_{i-1}$, $y_i := \text{rnd}(1) + \text{rnd}(-1) + y_{i-1}$.

Таким чином, за допомогою програми Mathcad одержуємо два набори чисел x та y , що відповідають координатам місця знаходження частинки в момент кожного зіткнення. Наносимо значення координат точок зіткнення в кожний момент часу на координатну площину і одержуємо графік (рис. 1.3.1), який є імітацією траєкторії руху броунівської частинки.

В результаті перерахунку обчислень на робочому аркуші (після натискання комбінації клавіш Ctrl+F9) щоразу змінюється набір координат x та y . Відповідно до цього змінюється вигляд траєкторії руху броунівської частинки на графіку. Також легко змінити кількість зіткнень, наприклад до $n = 200, 500, 1000$ і т.д. та провести обчислювальний експеримент і спостереження за зміною даних.

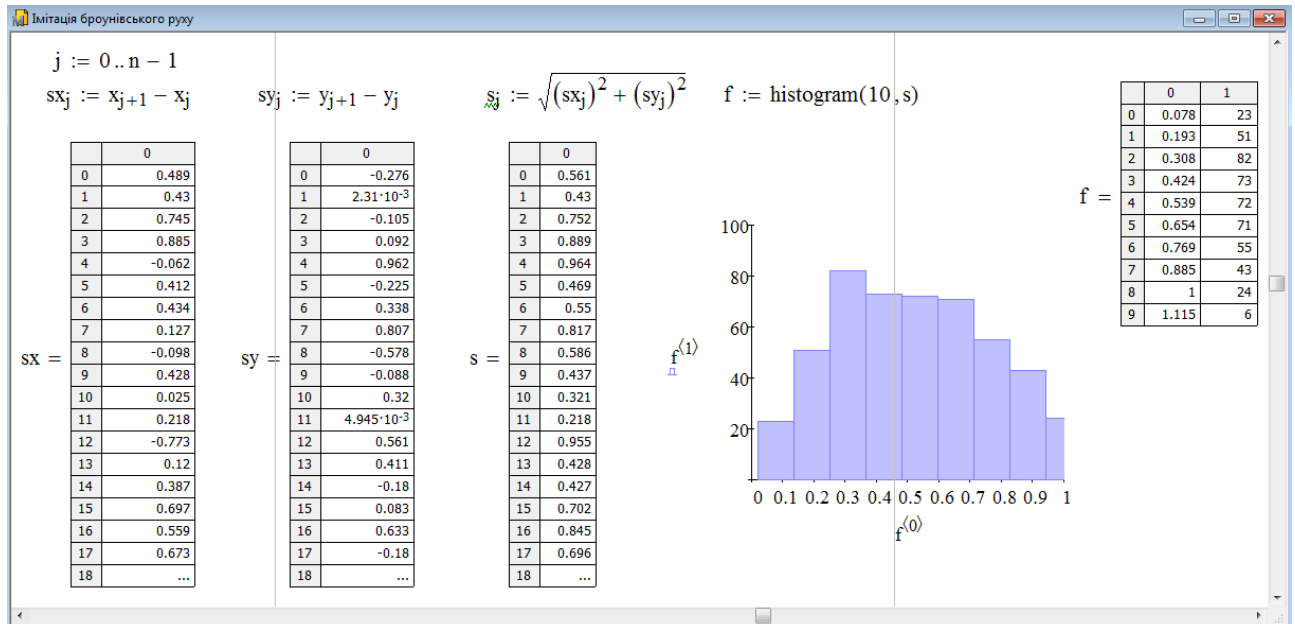


Рис. 1.3.2

Проведемо статистичний аналіз результатів експерименту. Значення координат x та y значно виходять за межі інтервалу $(-1; 1)$, тому вони є не дуже зручними для розгляду. Розглянемо переміщення $s_x = x_{j+1} - x_j$, $s_y = y_{j+1} - y_j$, де $j = 0, 1, \dots, n-1$, а також масив s , елементами якого є довжини векторів переміщення $s_j = \sqrt{(sx_j)^2 + (sy_j)^2}$ (рис. 1.3.2). Згрупуємо дані масиву s .

Поділимо проміжок зміни даних вектора s , наприклад, на десять проміжків і обчислимо скільки значень із масиву s потрапляє до кожного з проміжків. Для цього скористаємося вбудованою функцією $histogram(n, data)$, де n – число проміжків, на яке ділиться діапазон даних $data$. В результаті виконання функції одержуємо два набори чисел: $f^{(0)}$, який складається із середин кожного з інтервалів, та $f^{(1)}$ – частоти попадання випадкових чисел в кожен з інтервалів. За цими даними будемо гістограму як простий графік, для якого встановлюємо *Формат/ Трасування/ Тип/ Суцільні стовпчики* (рис. 1.3.2). За гістограмою

встановлюємо, що розподіл статистичних ймовірностей попадання значень із масиву s на визначених десяти проміжках є практично нормальним для досить великого значення числа зіткнень молекул ($n=500$).

1.3.3 Методи опрацювання експериментальних даних

Загальна математизація науки відіграє суттєву роль у математичному пошуку, в упорядкуванні здобутих раніше і нових знань, в синтезі наукових понять, сприяє доказовому формуванню нових уявлень і визначень у найтіснішому зв'язку з емпіричними даними і теоретичними уявленнями.

Математичні методи в даний час знаходять широке застосування під час розв'язування задач оптимізації різних планів і прийняття оптимальних рішень. На їх основі із множини варіантів дій і станів вибираються найкращі (оптимальні). Сюди можна віднести цілі галузі нових наукових теорій, такі як теорія і методи оптимізації, теорія прийняття рішень, теорія оптимального управління, дослідження операцій тощо.

Межі застосувань математичних методів у науковому дослідженні і розв'язуванні багатьох практичних задач суттєво розширюються шляхом використання сучасних інформаційно-комунікаційних технологій і, зокрема, комп'ютерних математичних пакетів.

Математизація науки забезпечує в ряді випадків проведення доказових досліджень без експерименту і спостереження, організація яких або неможлива, або вони є досить складними.

Застосування математичних методів і засобів у науці не зменшує значення спостереження, експерименту, систематизації та інших емпіричних методів вивчення сутності та закономірностей перебігу різних процесів і проявів явищ. Це все ланки єдиного ланцюжка наукових досліджень [9, с.249 – 250].

Застосовуючи обчислювальні методи для розв'язування прикладних задач за допомогою комп'ютерів, треба пам'ятати, що точність знайденого результату залежить від багатьох факторів. На даному етапі є важливими обчислювальні уміння, зокрема уміння виконувати наближені обчислення, уміння оцінювати похибку знайденого розв'язку.

Похибка розв'язку задачі складається з похибки математичної моделі, неусувної похибки, похибки методу і обчислювальної похибки [80, с.10].

Слід враховувати, що дослідження не може зводитися до застосування одного методу. Кожен метод застосовується не ізольовано, а в поєднанні з іншими. Будь-який метод модифікується залежно від конкретних умов, мети дослідження, розв'язуваних задач, особливостей предмета дослідження, перебігу явищ і процесів. Основне призначення будь-якого методу – забезпечити успішне розв'язування певних пізнавальних і практичних проблем.

Розглянемо методи опрацювання експериментальних даних та їх реалізацію за допомогою засобів комп'ютерних математичних пакетів.

Під час опрацювання даних експерименту часто виникає необхідність у знаходженні значень деякої функції $f(x)$ (залежності) на основі даних, що подані як окремі точки $\{x_i, f_i\}, i \in \overline{0, n}$ (наприклад, у вигляді таблиці). Таку задачу розв'язують за методами апроксимації.

Апроксимація (від лат. *approximo* – наближатися) – заміна одних математичних об'єктів іншими, більш простими і в тому чи іншому сенсі близькими до початкових. Наприклад, заміна кривих ліній близькими до них ламаними; ірраціональних чисел – раціональними; неперервних функцій – многочленами.

Існує два основних підходи до апроксимації даних. За одним з них вимагається, щоб апроксимувальна крива проходила через всі задані точки. Це можна зробити за допомогою методів *інтерполяції*. За іншим підходом дані апроксимують за допомогою функції, значення якої якомога менше відрізняються від табличних значень, але не обов'язково, щоб вони співпадали із значеннями, заданими в таблиці. Такий підхід зветься регресією або припасуванням (зглажуванням) кривої, яку прагнуть дібрати так, щоб її значення відхилялися від таблично заданих значень якнайменше. Як правило, в такому разі користуються методом найменших квадратів, тобто зводять до мінімуму суму квадратів різниць між значеннями шуканої функції в заданих точках та значеннями, заданими в таблиці.

Інтерполяція – в математиці і статистиці – це знаходження проміжних значень величини за деякими її відомими значеннями.

Наприклад, знаходження значень функції $f(x)$ в точках x , які лежать між точками x_0, x_1, \dots, x_n за відомими значеннями $y_i = f(x_i)$, де $i \in \overline{0, n}$.

Екстраполяція – протилежне поняття, тобто коли x лежить поза інтервалом $(x_0; x_n)$, тоді аналогічна процедура називається екстраполяцією.

Екстраполяція – метод наукових досліджень, який полягає в поширенні висновків, одержаних із спостереження над однією частиною явища, на іншу його частину. В математиці екстраполяція означає знаходження за рядом даних значень функції інших її значень, що знаходяться поза цим рядом.

Регресія – залежність середнього значення випадкової величини від деякої іншої величини або кількох величин. Якщо, наприклад, для деякого значення x_i випадкової величини X спостерігається n_i значень y_{i1}, \dots, y_{in_i} випадкової величини Y , то залежність середніх арифметичних $\bar{y}_i = \frac{1}{n_i}(y_{i1} + \dots + y_{in_i})$ цих значень від x_i і є регресією в статистичному розумінні цього терміну.

В разі регресійного відношення одному і тому самому значенню x_i величини X (на відміну від функціональної залежності) може відповідати деяка множина значень величини Y . Розподіл імовірностей на множині цих значень називається умовним розподілом імовірностей на множині значень випадкової величини Y за умови, що випадкова величина X набула значення x_i .

Рівняння, через яке виражається залежність математичного сподівання випадкової величини Y від значення випадкової величини X , називається рівнянням регресії Y на X , а відповідний графік – лінією регресії Y на X .

Задача математичної регресії полягає у наближенні вибірки даних (даних експерименту) $(x_i; y_i)$ деякою функцією $f(x)$ так, щоб певним чином мінімізувати сукупність похибок $|f(x_i) - y_i|$. Відшукування функції $f(x)$ зводиться до добору невідомих коефіцієнтів, через які визначається аналітична залежність $f(x)$. Більшість задач регресії є окремим випадком більш загальної проблеми згладжування (припасування) даних.

Найпростіший вид регресії – лінійна регресія. Наближення даних $(x_i; y_i)$ здійснюється за допомогою лінійної функції $y(x) = a + bx$. Задача лінійної регресії розв’язується за допомогою *методу найменших квадратів*.

За методом найменших квадратів коефіцієнти a і b добирають так, щоб звести до мінімуму суму квадратів різниць значень функції $y(x_i)$ і табличних значень y_i . Тобто коефіцієнти a, b добираються так, щоб мінімізувати суму квадратів різниць

$$|a + bx_i - y_i|, \text{ тобто } \sum_{i=1}^n (a + bx_i - y_i)^2.$$

Поліноміальна регресія полягає в наближенні даних $(x_i; y_i)$ поліномом k -го степеня: $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_kx^k$.

Коли $k = 1$ поліном є лінійною функцією, коли $k = 2$ – квадратним тричленом, $k = 3$ – поліномом третього степеня і т.д.

Розглянемо, як можна використовувати засоби комп’ютерних математичних пакетів, зокрема програми Mathcad, для розв’язування регресійної задачі на знаходження функції, за якою визначається залежність одного параметра від інших.

Приклад 1.3.2. Встановити залежність ринкової ціни автомобіля від його віку та пробігу, спираючись на певну статистичну вибірку.

В таблиці Excel зберігаються дані про ціну, пробіг та вік автомобіля марки Skoda Fabia з інтернет-сайту продажу автомобілів. На робочому аркуші програми Mathcad сформуємо масив A з даних в електронній таблиці за допомогою функції READEXCEL. Використовуючи функцію *submatrix*, виокремимо з таблиці A вектор-стовпчики «Вік», «Пробіг», «Ціна» (рис. 1.3.3).

Виконаємо графічний аналіз даних з таблиці A. Позначимо точками на графіку дані стовпців «Вік» та «Пробіг» у відповідній системі координат, а також обчислимо за допомогою функцій *max*, *min*, *mean* значення максимального, мінімального та середнього пробігу автомобілів у км/рік (рис. 1.3.4). За допомогою даного розрахунку, порівнюючи одержані загальні дані з даними стосовно конкретного автомобіля, можна зробити висновок про те, наскільки великий чи малий пробіг автомобіля для його віку.

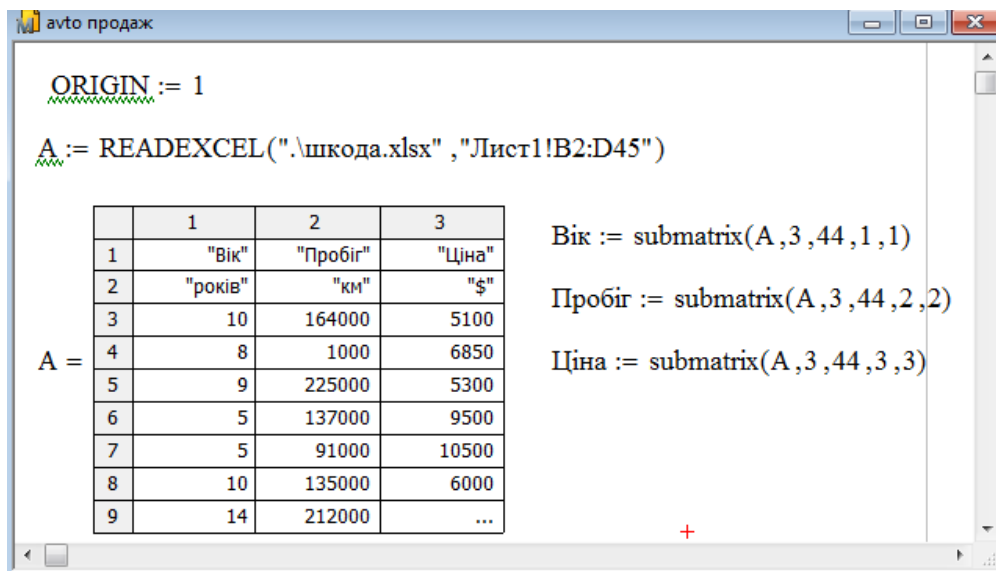


Рис. 1.3.3

Далі на графіку зобразимо залежність ціни автомобіля з пробігом від його віку (рис. 1.3.5). Застосовуючи метод лінійної регресії, за допомогою процедури *line* знаходимо коефіцієнти лінійної регресії та функцію залежності ціни від віку $r(t)$. В основі процедури *line* лежить метод найменших квадратів. За допомогою процедури *medfit* знаходимо коефіцієнти лінійної регресійної залежності ціни від віку та функцію $gm(t)$ за альтернативним методом – методом медіанної регресії.

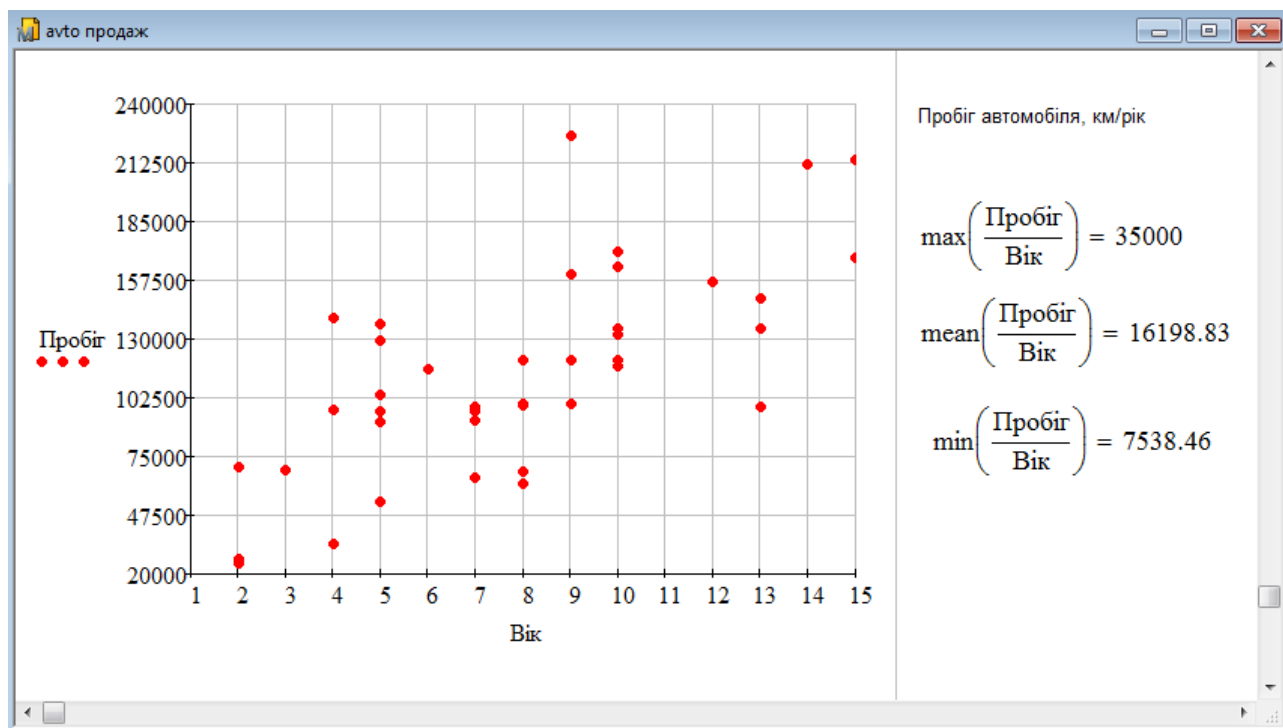


Рис. 1.3.4

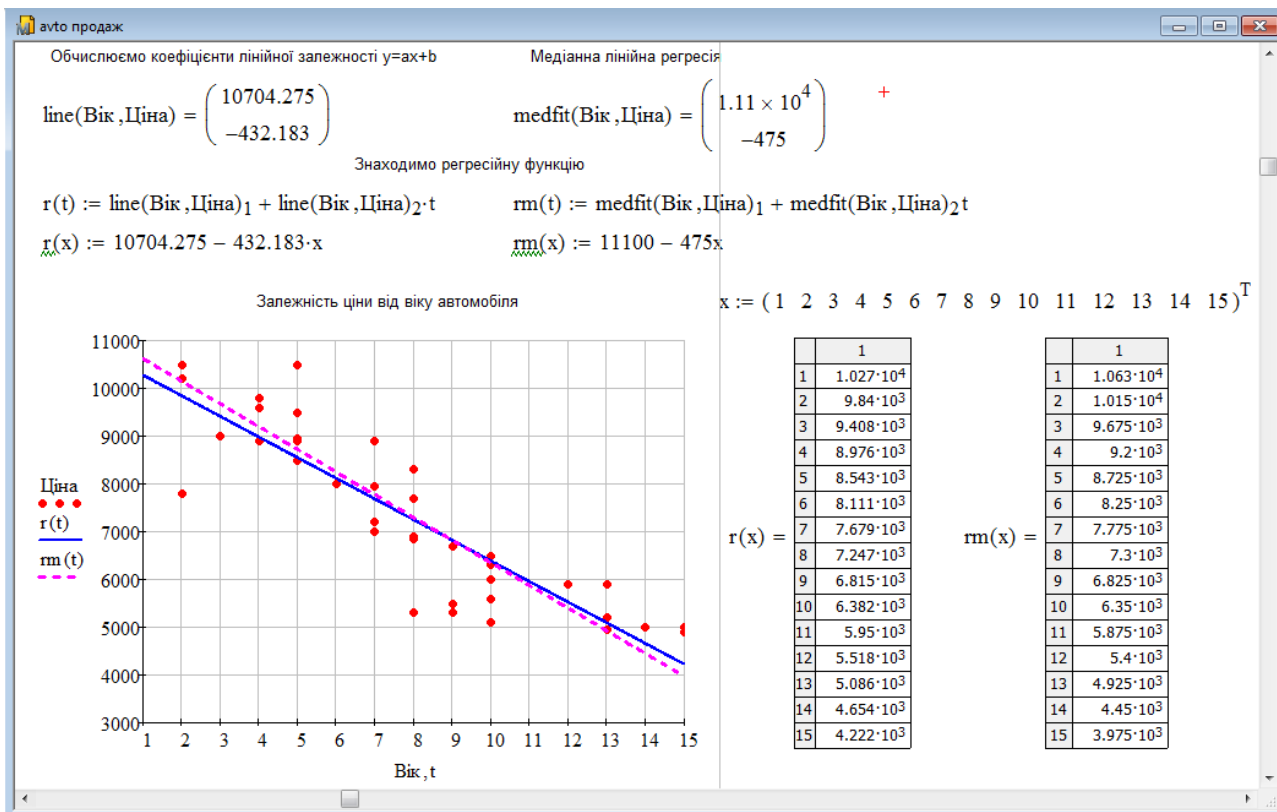


Рис. 1.3.5

Зобразимо одержані лінії на графіку та знайдемо числові значення ціни автомобіля віком від 1 до 15 років (рис. 1.3.5).

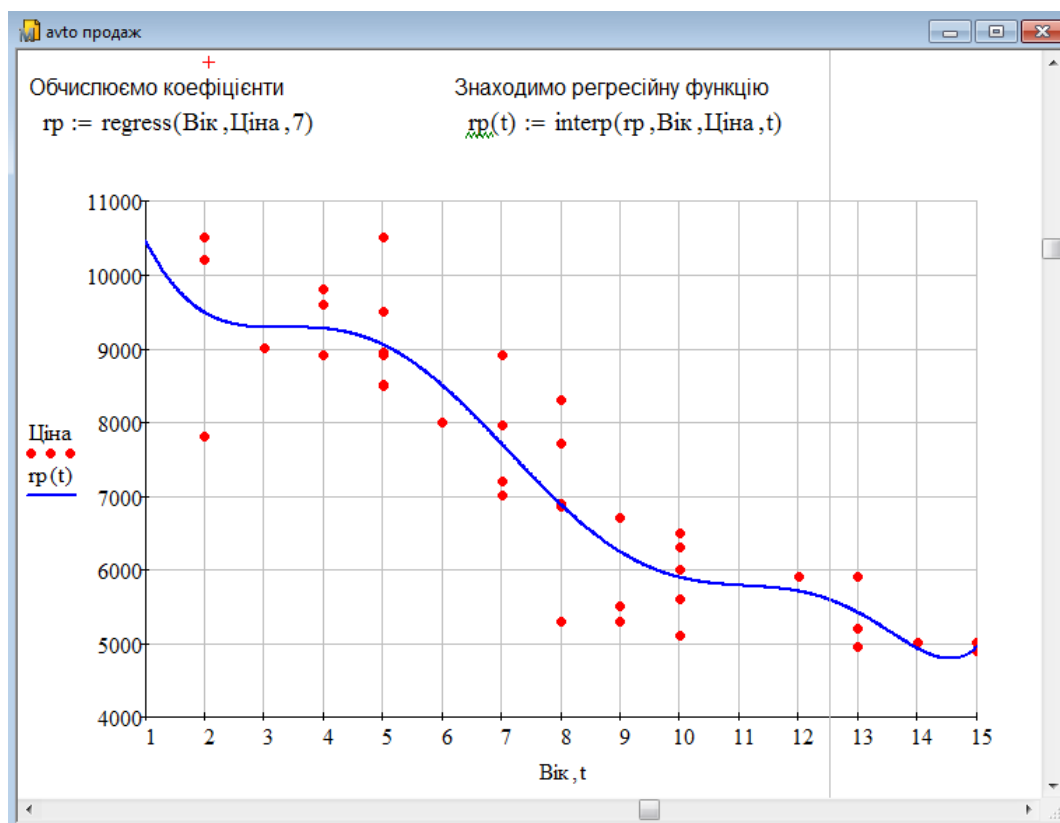


Рис. 1.3.6

Таким чином, за методом найменших квадратів одержуємо, що ціна автомобіля Skoda Fabia з кожним роком приблизно знижується на 432 грошові одиниці, а за методом медіанної регресії – на 475 грошових одиниць.

В системі Mathcad для поліноміальної регресії є функція `regress`, за допомогою якої знаходять коефіцієнти регресійного полінома n -го степеня. На рис. 1.3.6 зображено пошук залежності ціни автомобіля від його віку у вигляді полінома 7-го степеня.

За одержаним графіком можна припустити, що в період, коли вік автомобіля становить 2 – 4 роки та в період 10 – 12 років, ціна на нього майже не змінюється, в інші періоди ціна досить стрімко знижується з кожним роком.

За даним прикладом можна організувати навчальний дослідницький проект в процесі навчання математичної інформатики. Студенти проводять спільне дослідження вартості автомобілів різних марок. Кожен студент обирає для дослідження свою окремо взятую марку автомобіля, а результат презентує перед всією групою. В такому разі, порівнюючи одержані дані, перевіряємо, чи існують спільні тенденції для характеристики ціни автомобіля від віку та пробігу, чи підтверджуються припущення, розглянуті в прикладі. Разом з тим студенти навчаються використовувати засоби комп'ютерних математичних пакетів для опрацювання і аналізу експериментальних даних.

1.4 Математична інформатика. Інформаційно-комунікаційні технології математичного призначення як засоби розвитку навчально-дослідницьких умінь студентів

В Національній стратегії розвитку освіти в Україні на період до 2021 року [144] одним із пріоритетних завдань постає впровадження, зокрема в педагогічну практику, засобів інформаційно-комунікаційних технологій, використання яких забезпечує вдосконалення навчально-виховного процесу, доступність та ефективність освіти, підготовку молодого покоління до життєдіяльності в інформаційному суспільстві.

Це досягається шляхом формування та впровадження комп'ютеризованого освітнього середовища в системі освіти, педагогічно виваженого використання у

навчально-виховному процесі засобів інформаційно-комунікаційних технологій в гармонійному поєднанні з традиційними технологіями навчання, з врахуванням педагогічних напрацювань і здобутків минулого [76].

В сучасному світі використання ІКТ, як інструментів для дослідження і опрацювання даних, впливає на стратегію вибору адекватного рішення в конкретній ситуації. В умовах неперервного розвитку науки, техніки, виробничих та інформаційно-комунікаційних технологій виникає гостра необхідність у висококваліфікованих фахівцях, здатних адаптуватися до інформаційного середовища, що постійно розвивається.

Сьогодні головними напрямками розвитку і вдосконалення системи освіти є:

- фундаменталізація освіти на всіх її рівнях;
- реалізація концепції випереджаючого навчання;
- широке впровадження методів інноваційного і розвиваючого навчання, орієнтованого на розкриття творчого потенціалу людини;
- підвищення доступності освіти для широких мас населення шляхом розвитку систем дистанційного навчання на основі сучасних інформаційно-комунікаційних технологій [105].

Інформатика як галузь наукового пізнання і практичної діяльності людини стрімко розвивається і розширюється, а зміст інформатичної освіти повинен бути релевантним та зберігати сучасність і актуальність.

Більше того, через зростання кількості різних напрямів у комп'ютерних науках і посилення інтеграції інформатики з іншими дисциплінами виникають додаткові труднощі у вирішенні даних проблем.

У документі міжнародних програмних нормативів «Computer Science: Curricula 2013» [216], який створений спільними зусиллями провідних товариств комп'ютерингу – ACM (Association for Computing Machinery) та IEEE-CS (Institute of Electrical and Electronics Engineers Computer Society), зазначається, що для комп'ютерної галузі характерним є дуже швидкий темп змін. Тому випускники навчальних закладів повинні володіти глибокими фундаментальними знаннями, що сприятиме і допомагатиме формуванню нових необхідних умінь та навичок в

міру того, як розвивається галузь. Для цього в «Computer Science-2013» наведені основні принципи визначення змісту навчання для інформатичних дисциплін:

1. Забезпечення можливості студентам працювати в багатьох галузях людської діяльності. Студенти в галузі комп'ютерних наук повинні розвивати здібності до роботи в різних галузях діяльності.

2. У змісті навчання має бути закладена ясність реалізації цілей, але водночас має забезпечуватися гнучкість, яка необхідна для того швидкого реагування на зміни в галузі.

3. У процесі навчання у вищому навчальному закладі необхідно готувати студентів до неперервного навчання протягом життя, ознайомлювати їх з джерелами інформаційних ресурсів та стратегіями оновлення своїх знань.

4. Студенти повинні вивчати і теорію, і практику, усвідомлювати важливість абстрактних понять і знатися на цінностях досконалої інженерної розробки.

5. У змісті навчання повинні допускатися навчальні проекти, які є інноваційними і в яких відстежуються останні досягнення в цій галузі.

6. Навчати студентів на творчих задачах та вправах, розв'язування яких розвиває їхню ініціативність, незалежність мислення, організаційні, проєктивні та комунікативні уміння, уміння працювати в колективі.

В ролі фундаментальних концепцій інформатики в «Computer Science-2013» визначаються спільні ідеї, які незалежні від виробників програмного забезпечення, конкретних програмних пакетів та вмінь вузької спеціалізації. З таких позицій розглядається теорія алгоритмів, архітектура і організація обчислювальної техніки, способи подання даних, моделювання, графіка і візуалізація та ін.

Описані концепції та принципи навчання необхідно мати на увазі і в процесі визначення змісту навчання математичної інформатики.

Інформатику, як виключно багатопланову науку, можна розглядати з різних поглядів. На початку свого становлення, в 60-х рр. XX ст., інформатика розглядалася як гуманітарна наука. У великій радянській енциклопедії вона визначалася як галузь гуманітарного знання, де вивчаються структура і загальні

властивості наукових повідомлень, а також основні закономірності процесів комунікації.

Саме вторгнення ряду гуманітарних наук у галузь обчислювальної техніки і програмування привело до формування нової наукової дисципліни – інформатики. З'явилась об'єктивна необхідність в новому терміні, який буде носієм факту взаємопроникнення обчислювальної техніки та програмування з одного боку і ряду традиційно гуманітарних наук – з іншого боку [1, с.3].

За останній час ця думка була суттєво переосмислена. В 70-х рр. у тлумаченні поняття інформатики превалюють технічні і технологічні акценти, що сталося під впливом стрімкого розвитку обчислювальної техніки, електроніки та поширення персональних комп'ютерів. Інформатика розумілася як «галузь, пов'язана з розробкою, створенням, використанням і матеріально-технічним обслуговуванням систем опрацювання даних, включаючи машини, обладнання, математичне забезпечення, організаційні аспекти, а також комплекс промислового, комерційного, адміністративного, соціального, політичного впливу» [105].

В 80-х рр. як природничо-наукову дисципліну інформатику визначили А.П.Єршов, Є.П.Велихов, В.М.Глушков, М.М.Моїсєєв, Б.М.Наумов, та ін.

Зародившись в надрах науки про управління – кібернетики, швидко розширюється предметне поле інформатики. З технічної дисципліни про методи і засоби опрацювання даних за допомогою обчислювальної техніки інформатика перетворюється в фундаментальну науку про інформаційні процеси не тільки в технічних системах, але й в природі та суспільстві [105, с.15 – 16.]

В сучасному розумінні інформатика – фундаментальна наукова дисципліна, об'єктом якої є інформаційні процеси в оточуючому світі, предметом – математичні структури, за допомогою яких моделюються інформаційні процеси, та комп'ютерні інформаційні моделі, в яких відображаються математичні структури на архітектуру обчислювальних систем. Методологією інформатики є обчислювальний експеримент [119, с.61].

Інформатика – фундаментальна наукова дисципліна. Вона має вивчати закони природи, інформаційні процеси і відповідні технології [70, с.49 – 54].

Інформатика – одна з фундаментальних галузей наукового знання, де вивчаються інформаційні процеси, методи і засоби одержання, перетворення, передавання, зберігання, подання і використання різноманітних повідомлень, що стрімко розвивається і розширюється як галузь практичної діяльності людей, пов'язана з використанням інформаційних технологій [105, с.24].

Поглибити теоретичну підготовку з інформатики, зробити її справді фундаментальною дисципліною значною мірою можна через вивчення її теоретичних основ, зокрема математичної інформатики, вважають М.І.Жалдак [70], [79], Ю.С.Рамський [168], С.О.Семеріков [184], Т.П.Кобильник [103] та ін. Вивчення математики та математичної інформатики, які є фундаментом теоретичних основ інформатики і становлять її загальноосвітнє ядро, повинно займати важливе місце в профільній підготовці вчителів математики та інформатики, в формуванні важливих компонентів їхньої інформатичної культури. Головне в процесі навчання інформатики – засвоїти фундаментальні поняття кожної з її галузей, орієнтуватися в їх взаємозв'язках, набути навичок практичної роботи з найважливішими технічними і програмними засобами [168].

Автори [54] розглядають фундаментальні математичні положення, що лежать в основі теоретичної інформатики і є необхідною математичною основою для фахівця в галузі комп'ютерних наук: рекурсивні задачі, обчислення сум, цілочисельні функції, елементи теорії чисел, біноміальні коефіцієнти, спеціальні числа, обчислювальні функції, дискретна ймовірність, асимптотика.

В.М.Глушков розглядає основні розділи теоретичної інформатики на основі фундаментальних математичних відомостей: основні поняття про інформатичні матеріали та їх опрацювання; програмування і управління обчислювальним процесом; бази даних; математичні методи оптимізації; автоматизація інформаційних технологій; штучний інтелект [49].

Одним із шляхів фундаменталізації інформатичної освіти є посилення її математичної складової. Взаємозв'язки математики та інформатики дуже тісні: якщо на попередніх етапах розвитку інформатика розглядалась як елемент прикладної математики, то сьогодні, з появою поняття «комп'ютерна математика»,

на черзі дослідження і зворотного процесу – як інформатика впливає на математику [166, с.62].

М.П.Лапчик зазначає, що математика та інформатика зберігають єдність як найважливіші компоненти розвитку фундаментального ядра наукового пізнання [120]. Єдність математики і комп'ютерних наук демонструється з часу появи перших комп'ютерів, за рахунок чого було створено умови для інтенсифікації застосування наукових знань у всіх сферах людської діяльності, в тому числі і в самій математиці.

Експансія інформаційно-комунікаційних технологій супроводжується активізацією інтеграційних процесів в науці і освіті, синтезом наукових знань, перенесенням методів дослідження з одних наукових галузей в інші.

Посилення взаємозв'язків між математикою та інформатикою, коли в навчанні математики використовуються інформаційні технології, а в навчанні інформатики розглядаються приклади математичних моделей, викликає необхідність інтеграції цих дисциплін за умови збереження теоретичної і практичної цілісності кожної з них. Таким чином виникає математична інформатика та інформатична математика [120, с.3].

На перетині двох взаємопов'язаних наукових галузей – математики та інформатики – утворюються два інтегрованих компоненти, які формуються на різних основах: інформатична математика і математична інформатика. Незважаючи на єдність та інтегративні процеси, які пронизують математику та інформатику, зона перетину цих галузей в структурі наукового пізнання містить два незалежні компоненти, причому цільовою основою для розвитку і самовизначення одного з них є математика, а іншого – інформатика. Математична інформатика – це фундаментальна природничо-наукова частина інформатики, де вивчаються математичні об'єкти і поняття, що належать до основ інформатики [120].

О.Л.Семенов уточнює, що в фундаментальній природничо-науковій частині інформатики будуються теоретичні моделі опрацювання, зберігання, подання, передавання даних [183]. За своїми об'єктами, поняттями, методами – це галузь математики. Предметом її вивчення є скінченні (конструктивні) об'єкти та

алгоритмічно описані (конструктивні) процеси, що відбуваються в середовищі цих об'єктів. Зазначену частину О.Л.Семенов називає математичною інформатикою.

Також інформатика розглядається як особлива інтегративна дисципліна. Навколо інформатики формується цілий комплекс нових напрямів наукових досліджень, які знаходяться на межі інформатики з іншими науками.

Інформатика є комплексним науковим напрямом, який має міждисциплінарний характер. Її розвиток сприяє розвитку ряду інших наукових напрямів і тим самим інформатика виконує інтегративну функцію в системі наук [105, с.16].

Термін «математична інформатика» пропонується розуміти [156] аналогічно до термінів «математична кібернетика», «математична лінгвістика», «математична статистика» тощо. Математична інформатика – наукова галузь математики, де вивчаються математичні методи та моделі, що використовуються для розв'язування математичних задач за допомогою засобів сучасних інформаційних технологій, і насамперед за допомогою систем комп'ютерної математики.

Інформатика стосується багатьох сфер людської діяльності. Прикладна інформатика спрямована на створення різноманітних інформаційно-комунікаційних технологій. Прикладними є математична інформатика, хімічна інформатика, педагогічна інформатика, економічна інформатика, соціальна інформатика, геоінформатика, медична інформатика та ін.

Якщо математична інформатика (в значенні як інформатика для математики) асоціюється швидше з її програмними засобами, то інформатична математика (як математика для інформатики) означає фундаменталізацію інформатики, математичні основи інформатики.

Т.П.Кобильник розглядає математичну інформатику з двох сторін. З одного боку математична інформатика є частиною теоретичної інформатики, де використовуються математичні моделі і засоби для моделювання та дослідження інформаційних процесів. З іншого боку, математичну інформатику можна розглядати і як напрям у прикладній чи практичній інформатиці, і термін «математична інформатика» означати аналогічно до термінів, наприклад,

«соціальна інформатика» чи «педагогічна інформатика» [103]. Згідно такого підходу, математична інформатика – це галузь інформатики, де вивчаються впровадження та використання сучасних інформаційних технологій, зокрема систем комп'ютерної математики, в процесі розв'язування математичних задач.

Тому в процесі навчання математичної інформатики необхідно сформулювати основні поняття про сучасні методи побудови та аналізу алгоритмів, ознайомити з основними алгоритмами, які використовуються в процесі створення програмного забезпечення для розв'язування математичних задач, а також сформулювати знання і уміння щодо використання інформаційних технологій математичного призначення до аналізу математичних моделей процесів та явищ з найрізноманітніших галузей знань і діяльності людей.

Математична інформатика – це навчальна дисципліна, де вивчаються основні алгоритми розв'язування типових задач та використовуються інформаційні, зокрема математичні, моделі та інформаційні технології для їх дослідження [103].

Під час навчання математичної інформатики необхідно показати, як математичні теорії використовуються в інформатиці, які досягнення математики вплинули на розвиток інформатики з одного боку, а з іншого боку, які задачі інформатики дали поштовх до появи нових ідей і методів досліджень в математиці, яким чином взаємовплив цих двох наук продовжується дотепер.

Таким чином, математична інформатика виокремлюється в навчальну дисципліну, мета навчання якої – поглибити математичні знання, розвивати вміння застосовувати їх до вивчення інформаційних моделей різноманітних процесів і явищ, дати поняття про методи програмування та формувати навички роботи з програмами математичного призначення для розв'язування практичних задач.

Надалі будемо розглядати математичну інформатику як напрям прикладної чи практичної інформатики, де вивчаються впровадження та використання сучасних інформаційних технологій, зокрема комп'ютерних математичних пакетів, в процесі розв'язування математичних задач. Методика навчання математичної інформатики з метою розвитку навчально-дослідницьких умінь студентів буде розглядатися в

межах навчального курсу «Комп'ютерні математичні пакети» для студентів фізико-математичних спеціальностей.

Універсальними програмними засобами, за допомогою яких можна здійснювати побудову і дослідження математичних моделей, чисельний аналіз, візуалізацію одержаних результатів, вставляння текстових коментарів, публікацію результатів досліджень у мережі Інтернет та багато іншого є системи символної (комп'ютерної) математики, які також називають прикладними комп'ютерними математичними пакетами. Це дає змогу розглядати їх в якості ефективного навчально-методичного засобу. Завдяки зрозумілому інтерфейсу, потужній графіці, природній для математики мові і зручній довідковій системі комп'ютерні математичні пакети стають доступними для широкого кола користувачів, які не є професійними програмістами. Використання потужних засобів комп'ютерних математичних пакетів відкриває принципово нові можливості використання комп'ютера для навчально-дослідницької діяльності.

Системи комп'ютерної математики або комп'ютерні математичні пакети – це комплекси програмних засобів, за допомогою яких можна автоматизувати виконання як чисельних, так і аналітичних та графічних операцій і перетворень.

На межі інтеграції математики та інформатики також виникає поняття комп'ютерної математики, яку визначають як сукупність теоретичних, алгоритмічних, апаратних і програмних засобів, призначених для ефективного розв'язування за допомогою комп'ютера всіх видів математичних задач з високою мірою візуалізації всіх етапів обчислень [66].

Розвиток подій щодо виникнення комп'ютерної математики окреслює Ю.С.Рамський: «математики відіграли найважливішу роль у створенні комп'ютерів; природно було їм самим скористатися плодами своїх зусиль. Так виникла «комп'ютерна математика» – розв'язування суто математичних проблем з широким (інколи вирішальним) використанням комп'ютерів» [168].

Ю.В.Триус зазначає, що комп'ютерна математика – це перш за все синтетична назва для цілої серії математичних систем, в яких акумульовані багатовікові знання людства в галузі математичних методів обчислень і

розрахунків, що виконуються як у чисельній, так і в аналітичній та графічній формах. Використання таких систем значно підвищує масовому користувачеві можливості та результативність його навчально-пізнавальної, наукової, педагогічної або іншої творчої діяльності [195, с. 35].

Значення автоматизації не тільки чисельних, а й аналітичних обчислень розумів академік В.М.Глушков ще на початку 60-х рр. XX століття. Під його керівництвом у Києві були створені перші в світі персональні комп'ютери (точніше, передвісники майбутніх персональних комп'ютерів) серії «МІР» (Машини для Інженерних Розрахунків) з апаратною реалізацією мов програмування високого рівня та унікальними можливостями виконання чисельних та аналітичних розрахунків. За швидкістю виконання аналітичних перетворень їм не було конкурентів.

На жаль, ці новаторські роботи академіка В.М.Глушкова не були підтримані й згодом ініціативу в цій галузі було втрачено.

Сьогодні системи комп'ютерної математики представлені переважно великими західними фірмами (Waterloo Maple Inc., PTC Inc, Wolfram Research та ін.) Вони стають потужними засобами діяльності як професійних математиків, так і тих, хто використовує математику для побудови й дослідження математичних моделей в різних предметних галузях.

Використання сучасного прикладного математичного забезпечення дає можливість доповнювати традиційні геометричні і механічні моделі динамічними кольоровими анімаціями, комбінувати аналітичні, геометричні і комп'ютерні методи розв'язування задач. Використання сучасних систем комп'ютерної математики, що призначені для реалізації різноманітних обчислювальних методів, виконання аналітичних перетворень, в які вбудовані спеціальні мови програмування високого рівня, дає змогу одержувати тривимірні моделі з довільним рівнем умовності і наочності, забезпечити високий рівень реалістичності зображення, за рахунок чого можна з великою вірогідністю проаналізувати властивості об'єкта, що досліджується. Застосування систем комп'ютерної математики дає можливість більше уваги звертати, наприклад, на фізичний,

геометричний, економічний зміст операцій граничного переходу, диференціювання, інтегрування.

До позитивних навчальних і виховних результатів вивчення і використання систем комп'ютерної математики в навчальному процесі можна віднести:

- розвиток мисленнєвих процесів;
- поглиблення знань з предмету, передусім теоретичних основ, що забезпечує свідоме їх використання і розширює коло задач, доступних для практичного розв'язування;
- формування математичних та інформатичних компетентностей;
- формування і розвиток умінь створювати математичні і комп'ютерні моделі та проводити обчислювальний експеримент;
- розширення можливостей наукової творчості;
- зацікавленість студентів у кінцевому результаті своєї роботи, відповідальне відношення до конкретних етапів діяльності.

Найбільш важливими методичними і професійними можливостями використання математичних пакетів є:

- ілюстрація результатів математичного моделювання та дослідження побудованої моделі;
- точне та якісне графічне відображення аналітично одержаних результатів;
- унаочнення подання найбільш складних тем курсу;
- створення електронних навчальних матеріалів, посібників.

Системи комп'ютерної математики є невід'ємним компонентом комп'ютерно орієнтованих методичних систем навчання. Їх використання дає змогу ефективно будувати та досліджувати математичні моделі, проводити навчальні дослідження. Це відповідає ідеям інформатизації навчального процесу і забезпечує можливості удосконалення вищої освіти. Згідно з Великою Хартією університетів [217], в якій визначені принципи методології організації навчальних досліджень та освітнього процесу в університетах, студенти мають залучатися до участі у наукових дослідженнях і одним із основних методів навчання є проведення навчальних досліджень у межах навчальних предметів, де моделюються наукові дослідження у

відповідній предметній галузі. Форми навчальної роботи постійно вдосконалюються та наближаються до методології досліджень у відповідній галузі науки. Дослідницький підхід в освіті повинен сприяти формуванню дослідницьких компетентностей фахівців і тому має максимально спиратися на інформаційно-комунікаційні технології – інфраструктуру суспільства знань [167, с.103].

М.І.Жалдак наголошує на тому, що особливого значення в процесі використання ІКТ у навчальному процесі набуває врахування і розвиток неформалізованих, творчих компонентів мислення: реалізація проблемної ситуації чи постановка задачі; самостійне вироблення критеріїв добору потрібних операцій, виконання яких приводить до розв'язку; побудова опису (моделі) ситуації, генерація здогадок і гіпотез у процесі пошуку основної ідеї щодо способів відшукування розв'язку [69].

Отже, підготовка студентів фізико-математичних спеціальностей до використання СКМ як в процесі навчання, так і в подальшій професійній діяльності, набуває особливого значення. Розробка методики навчання систем комп'ютерної математики, спрямованого на розвиток дослідницьких компетентностей студентів, є актуальною проблемою.

Як зазначає Ю.С.Рамський [169], актуальними залишаються і сьогодні визначені академіком А.П.Єршовим основні напрями впливу інформатизації навчального процесу (впровадження інформатики та інформаційних технологій) на математичну освіту, серед яких виокремлюють такі:

1. Значне розширення математичної практики. На основі застосування комп'ютерів, побудови інформаційних моделей різноманітних процесів та явищ значно розширюється обсяг і різноманітність математичної практики. Багато інструментів і методів математичної роботи стають загальним надбанням. Побудова знакових систем, схематизація конкретних об'єктів шляхом визначення їх властивостей, атрибутів і відношень, побудова моделей, дедукція, редукція і рекурсивне мислення, розгляд і підтримка рівнів абстракції, прогнозування подій, аналіз законів і правил, нарешті, конструювання великої кількості алгоритмів і їх оцінювання – все це стає засобом інтелектуальної діяльності, основою

інформатичної культури. Отже, комп'ютеризація є і засобом, і виявом експансії математичних знань.

2. Зміна номенклатури математичних знань. За допомогою комп'ютера імітують людську поведінку. Через програмування і побудову інформаційних моделей у змістову частину математики входять абстракції людської діяльності, властивості штучних і живих (біологічних, соціотехнічних) систем. З'являються нові прийоми математичної роботи, наприклад, автоматичне доведення теорем.

3. Системна роль математичної теорії. Поняття теорії зародилося в математиці. З іншого боку, в інформатиці є важливе поняття обстановки. Обстановка – це втілена в комп'ютері замкнута модель світу, в якій доводиться «діяти запрограмованому виконавцю». Оскільки всі наслідки «поведінки виконавця» повинні бути заздалегідь передбачені, то на практиці необхідно володіти повним знанням обстановки й усвідомлювати межі цих знань в реальному світі. Всі ці знання повинні передувати конкретному конструюванню. Формування таких знань складає сутність системного аналізу, а побудова теорії обстановки стає його результатом.

4. Обчислювальний експеримент з математичною моделлю. В інженерній практиці роль обчислювального експерименту загальновідома, а в педагогічній практиці підтверджують його роль як нового методу пізнавальної діяльності. Слід зазначити, що в останні роки обчислювальний експеримент досить часто стає джерелом математичних відкриттів.

5. Візуалізація абстракцій. Візуальне сприйняття людини відіграє величезну роль, воно дає змогу робити відкриття. Наскільки важливий яскравий видимий образ для активізації розумової діяльності, добре відомо кожному вчителю, вихователю, психологу. Пошуки того, як зробити думку наочною, завжди було складною справою для вчених і вихователів. За допомогою комп'ютера вдається синтезувати зображення, що сприяє людській проникливості. Комп'ютерна графіка – це образи, породжені на основі абстрактних знань, які «оживляються», анімуються за допомогою комп'ютера завдяки зусиллям вченого і програміста. Візуалізуючи різноманітні абстракції, слід пам'ятати (це особливо важливо на

освітньому рівні) й про відмінності між абстрактним математичним об'єктом і його візуальною моделлю.

6. Динамізація математичних об'єктів. Математика – це наука про інваріанти. Пізнати природу інваріанта можна, якщо усвідомити діалектику сталості й мінливості параметрів цього інваріанта. Побачити в константі всі прояви реального життя, описаного законом, значить зрозуміти закон і навчитися його застосовувати. Використання комп'ютера з його засобами візуалізації й обчислень дає змогу спостерігачеві на основі статичних математичних співвідношень отримати всеможливі траєкторії розвитку динамічного процесу як в часі, так і в просторі, збагачуючи тим самим досвід спостерігача, його інтуїцію й здатність до прогнозування. Все це наближає навчальний процес до дослідження і експерименту.

7. Становлення структур із хаосу. Серед різних застосувань комп'ютера (математичні експерименти, візуалізація і т.ін.) на особливу увагу заслуговують експерименти, пов'язані із спостереженнями становлення регулярних структур з початкового хаосу. В їх найпростішому прояві – це різноманітні конструкції, які виникають у результаті ітеративного застосування деяких нелінійних операторів до випадкових вхідних даних чи попутних параметрів. Саме освітній потенціал таких математичних явищ використовується недостатньо. Тут формується цілком новий і виключно потужний канал для поширення математичного пізнання на величезний клас природних явищ: формування берегової лінії, гірські ландшафти, малюнки полярних сьйв, формоутворення у рослин, забарвлення тварин, розвиток конфліктів і виникнення криз. Аналіз матеріалів, що пов'язані з теорією фракталів, синергетикою і математикою нелінійного, дає змогу зробити висновок про принципове значення обчислювального експерименту як пізнавального інструменту.

8. Пробудження початкового інтересу. Динамічний, наочний, «слухняний» і симулюючий стиль «поведінки» комп'ютера у поєднанні з його універсальністю роблять його ідеальним інструментом для пробудження інтересу до математики (як

і до інших предметів), до її простоти, несподіваності, прогнозуючої сили і чарівного зв'язку з усім оточуючим.

Висновки до першого розділу

На основі аналізу психолого-педагогічної літератури можна зробити такі висновки:

1. Навчально-дослідницька діяльність є основою формування і розвитку навчально-дослідницьких умінь студентів. Дослідницькі компетентності виражаються у володінні уміннями і навичками, досвідом творчої діяльності, збагаченні суб'єктивного досвіду людини загалом, що є необхідною умовою для особистісно-професійного розвитку студентів.

2. Процес розвитку навчально-дослідницьких умінь в освітньому процесі у вищому навчальному закладі є формою співтворчості викладача і студентів, яка спрямована на розкриття дослідницького потенціалу та індивідуальності студента в процесі дослідницької діяльності, відповідно до потреби у пізнанні, що сприяє формуванню наукового світогляду студентів. Через названий процес забезпечується здатність людини самостійно здобувати знання, висловлювати та обґрунтовувати судження, оцінки, думки.

3. Інформаційно-комунікаційні технології математичного призначення (системи комп'ютерної математики) є потужним засобом вивчення, засвоєння, з'ясування сутності, унаочнення, аналізу досліджуваних процесів та явищ, їх використання може сприяти ефективності навчального процесу на основі дослідницьких підходів у навчанні математичної інформатики.

Основні результати дослідження, описані в першому розділі, відображені у працях [22], [23], [27], [30], [33], [34], [39].

РОЗДІЛ II. МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ РОЗВИТКУ НАВЧАЛЬНО-ДОСЛІДНИЦЬКИХ УМІНЬ СТУДЕНТІВ У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ІНФОРМАТИКИ

2.1 Особливості методичної системи навчання математичної інформатики студентів під час вивчення курсу «Комп'ютерні математичні пакети»

Розглянемо окремі компоненти методичної системи навчання математичної інформатики студентів фізико-математичних спеціальностей в курсі «Комп'ютерні математичні пакети».

Як відомо, методична система складається з п'яти основних компонентів: цілі, зміст, засоби, методи і організаційні форми навчання [154].

Під час навчання математичної інформатики основними цілями є розвиток мислення, інтелектуального потенціалу, навчально-дослідницьких умінь студентів у процесі розв'язування математичних задач за допомогою засобів систем комп'ютерної математики. Цілі досягаються шляхом виконання ряду конкретних завдань:

- формування мотивації навчально-дослідницької діяльності;
- навчання методів наукового дослідження;
- формування досвіду виконання індивідуального чи колективного проекту;
- забезпечення участі студентів у різних формах подання дослідницьких робіт (статті, презентації, виступи на семінарах, конференціях);
- навчання студентів ефективно працювати з різними джерелами відомостей (література, Інтернет тощо);
- створення умов для підвищення академічної успішності шляхом посилення зацікавленості студентів здійснювати пошук різноманітних відомостей, зокрема і через дослідницьку діяльність.

Курс «Комп'ютерні математичні пакети» складається з теоретичної та практичної частин. До теоретичної частини відносяться теми, які розглядаються на лекціях та в процесі самостійної роботи студентів:

Тема №1. Загальна характеристика комп'ютерних математичних пакетів.

Тема №2. Основи роботи в середовищі програми Mathcad.

Тема №3. Символьні перетворення та програмування в системі Mathcad.

Тема №4. Засоби опрацювання експериментальних даних за методами апроксимації.

Тема №5. Основи роботи з програмою Maxima.

Тема №6. Основи роботи з програмою Maple.

Практична частина курсу складається з лабораторних робіт та задач для самостійного розв'язування:

Лабораторна робота №1. Символьні перетворення, розв'язування рівнянь.

Лабораторна робота №2. Дослідження функцій. Моделювання явищ і процесів. Анімація.

Лабораторна робота №3. Дослідження функції від двох змінних на екстремум. Задачі оптимізації (див. додаток Д).

Лабораторна робота №4. Опрацювання експериментальних даних за допомогою засобів програми Mathcad (див. додаток Л).

Лабораторна робота №5. Засоби програми Maxima для виконання символьних перетворень та графічних досліджень (див. додатки В, Є).

Лабораторна робота №6. Розв'язування задач за спеціалізацією (див. додаток Ж).

Зміст курсу побудований так, щоб якомога повніше розглянути засоби різних комп'ютерних математичних пакетів та їх застосування до розв'язування математичних задач, задач прикладного та дослідницького характеру.

Здатність студентів до творчої і дослідницької діяльності ефективно розвивається в процесі доцільно організованої діяльності студента під керівництвом викладача. Необхідно створювати умови для виникнення у студентів потреби здобувати знання, оволодіти способами їх використання, що впливає на формування умінь та навичок творчої діяльності [58, с.30].

Успіх дослідницької діяльності студентів переважно забезпечується правильним плануванням видів і форм завдань, використанням ефективних систем завдань, а також умілим управлінням цією діяльністю.

Однією із загально визнаних особливостей сучасного світу є бурхливе зростання обсягу наукових та загального характеру повідомлень, які мають бути вивчені на різних рівнях. За даних умов викладач просто не в змозі бути ознайомлений з усіма повідомленнями про свій предмет. До того ж щоб навчати, недостатньо знати предмет. Відбулася різка зміна поглядів на функції викладача. Він перестав бути головним чином повідомлювачем різних навчальних відомостей [4, с.440]. Дедалі більше зростає значення іншої функції викладача – управління пізнавальною діяльністю студентів. У викладача з'явилися дуже потужні засоби подання найрізноманітніших повідомлень, зокрема і навчального призначення – інтернет, аудіо, відео посібники, комп'ютерні мультимедійні системи тощо. Тому необхідно раціонально, відповідно до положень педагогіки і психології організувати навчальну, самостійну, науково-дослідницьку роботу студентів.

Навчання загалом охоплює такі види діяльності викладача:

- організація діяльності студентів із засвоєння знань;
- формування знань, умінь та навичок студентів стосовно певної предметної галузі;
- подання і розкриття, роз'яснення сутності наукових понять, складних теоретичних положень;
- контроль знань та умінь студентів;
- стимулювання пізнавальної діяльності студентів.

Перед кожним педагогом вищої школи стоїть завдання не тільки сформувати у студентів знання з того чи іншого предмета, а й навчити їх розвивати уміння і навички використання методів наукового пошуку, самостійного відкриття нових наукових відомостей. Викладачеві доводиться розширяти горизонти знань студентів, здатності передбачати, прогнозувати, широко використовувати шляхи і методи розвитку творчого мислення, дослідницьких умінь і навичок [9, с.316].

Основним у процесі навчання є пізнавальна діяльність студентів, спрямована на засвоєння знань, формування умінь здобувати нові знання, що ігнорується в разі тлумачення методу навчання як способу управління навчально-пізнавальною діяльністю студента. Метод навчання – це не лише спосіб управління навчально-

пізнавальною діяльністю студента, але і взаємопов'язана діяльність студента і викладача, спрямована на досягнення відповідних дидактичних цілей і завдань.

Під методом навчання (у практичному аспекті) слід розуміти спосіб організації і спрямування діяльності викладача та студентів, за допомогою якого досягається оволодіння знаннями, уміннями і навичками, формується світогляд студента, система загальнокультурних і професійних компетентностей, розвиваються його здібності, аналітичне і синтетичне, творче мислення, інтелектуальний потенціал [4].

З самої суті методів навчання випливає, що на їх основі визначаються відповіді на питання: як навчати?

У методиці навчання у вищій школі повинні розкриватися відповіді не тільки на питання, як навчати, як подавати навчальні повідомлення, що стосуються предмета вивчення; в ній повинне також розкриватися підґрунтя для відповідей на перелік взаємопов'язаних питань, що стосуються навчально-дослідницької діяльності, самостійного пошуку і формування у студентів дієвих знань, навчально-дослідницьких умінь і навичок, формування у них системи загальнокультурних і професійних компетентностей, наукового світогляду, високого рівня фундаментальних і практико-орієнтованих знань, умінь і навичок.

До цього переліку передусім входять питання [9], [146]:

- як навчити студентів самостійно знаходити наукові і практико-орієнтовані відомості;
- як вибудувати чітку систему наукових знань на основі величезної кількості різноманітних повідомлень;
- як навчити оперативно і творчо застосовувати знання для розширення і набуття нових знань, для розв'язування різних прикладних задач;
- яким чином і в розв'язках яких задач встановлювати зв'язки відомостей із самого навчального предмету з відомостями з інших предметів;
- яким чином і де найкраще застосовувати знання з різних предметів у навчальній і творчій професійній діяльності;

- яким чином найбільш раціонально поєднувати формування наукових знань з формуванням світогляду і переконань;
- як навчити студентів поєднувати навчальну діяльність з науковим пошуком і розв'язуванням практичних задач;
- як навчити спостерігати, аналізувати, узагальнювати факти і явища і прогнозувати появу нових напрямів і тенденцій;
- яким чином виявляти і спрямовувати розвиток індивідуальної творчої обдарованості студентів.

Номенклатура і класифікація методів навчання характеризується значною різноманітністю залежно від того, яка основа вибирається для їх класифікації і систематизації.

В процесі добору методів навчання необхідно [10]:

1. Враховувати відомості про те, чи буде матеріал вивчатися самостійно, чи за настановами педагога; якщо студент може без зайвих зусиль і витрат часу досить глибоко вивчити матеріал самостійно, допомога педагога може виявитися не обов'язковою. В протилежному випадку в тій чи іншій формі вона необхідна.

2. Визначити раціональне поєднання репродуктивних і продуктивних методів навчання. Якщо є можливість, перевагу слід надавати продуктивним методам.

3. Раціонально поєднувати використання індуктивної і дедуктивної логіки, аналітичного і синтетичного шляхів пізнання. Якщо емпірична база для дедукції і аналізу підготовлена, дедуктивні і синтетичні методи цілком посильні для дорослої людини. Їм слід надавати перевагу як більш строгим, економним з погляду часу, близьким до наукового пізнання.

4. Передбачати раціональне поєднання словесних, наочних, практичних методів.

5. Стимулювати діяльність студентів та добирати відповідні заходи.

6. Визначити «точки», інтервали, методи контролю і самоконтролю.

7. Передбачити запасні варіанти на випадок відхилення реального процесу від запланованого.

Оскільки успіх у навчанні вирішальною мірою залежить від спрямованості і внутрішньої активності студентів, характеру їхньої діяльності, то саме характер діяльності, ступінь самостійності, виявлення творчих здібностей і повинні слугувати важливим критерієм добору методів навчання [155].

За характером навчально-пізнавальної діяльності виокремлюють такі методи навчання [125]:

- 1) пояснювально-ілюстративний;
- 2) репродуктивний;
- 3) проблемного подання навчального матеріалу;
- 4) частково-пошуковий (евристичний);
- 5) дослідницький.

В процесі застосування перших двох методів поповнюються знання студентів. Студенти здобувають знання на лекції, опрацьовуючи навчальну або методичну літературу, електронні ресурси і джерела. Сприймаючи та осмислюючи факти, оцінки, висновки, студенти залишаються в межах репродуктивного мислення (на рівні відтворення). У вищому навчальному закладі цей метод знаходить найширше застосування для передавання великих масивів повідомлень.

До репродуктивних методів відносять застосування вивченого на основі зразка або правила. Діяльність студентів здійснюється за інструкціями, вказівками, правилами в аналогічних, схожих з показаним зразком, ситуаціях.

Ці методи навчання мають також важливе значення для формування і розвитку навчально-дослідницьких умінь студентів. М.І.Жалдак зауважує, що будь-який майбутній фахівець повинен уміти здобувати нові знання, відшукувати нові відомості, використовуючи сучасні інформаційні ресурси, але для цього він повинен знати де, як і які саме відомості потрібно шукати, як їх аналізувати і узагальнювати, для чого потрібний відповідний запас знань, та ще й немалий [69, с.9].

Головне призначення методу проблемного подання навчального матеріалу, частково-пошукового та дослідницького методів, які також називають продуктивними методами, – розвиток у студентів креативності, продуктивного

мислення, формування пізнавальної і дослідницької активності, умінь у галузі наукового пошуку [155]. Разом з тим відбувається збагачення знань студентів новими знаннями, здійснюється їх перевірка і закріплення.

В разі застосування проблемного методу ([149], [131], [132]), використовуючи найрізноманітніші джерела і засоби, педагог, перш ніж подавати матеріал, ставить проблему, формулює пізнавальну задачу, а потім, розкриваючи систему доведень, порівнюючи точки зору, різні підходи, показує спосіб розв'язування певної задачі. Студенти неначе стають свідками та співучасниками наукового пошуку.

Евристичний метод навчання ([92], [106], [117]) полягає в організації активного пошуку розв'язків, висунутих в навчанні (або сформульованих самостійно), пізнавальних задач або під керівництвом педагога, або на основі евристичних програм і вказівок. Процес мислення набуває продуктивного характеру, але поетапно спрямовується і контролюється педагогом або самими студентами на основі роботи над програмами (в тому числі і комп'ютерними) і навчальними посібниками. Такий метод, один з різновидів якого – евристична бесіда, є перевіреним способом активізації мислення, збудження інтересу до пізнання на практичних заняттях [186].

Дослідницький метод навчання [125] полягає в тому, що після аналізу матеріалу, постановки проблем і задач і короткого усного або письмового інструктажу студенти самостійно вивчають літературу, інші джерела різних повідомлень, ведуть спостереження і вимірювання та виконують інші дії пошукового характеру. Ініціатива, самостійність, творчий пошук проявляються в дослідницькій діяльності найбільш повно.

Уміння мислити, знаходити – це і є уміння використовувати одержані знання, методи і засоби науки для розв'язування навчальних, наукових і прикладних задач. В навчальному процесі вищої школи справжні знання предмета приходять до студентів тоді, коли вони формуються через самостійний активний пошук [9, с.346].

Використовуючи евристичні методи і прийоми, студенти можуть організувати цей пошук і здійснювати його проведення. За допомогою цих прийомів студенти набувають навички оригінально розв'язувати задачі, знаходити необхідні наукові

відомості, самотійно розкривати сутності деяких положень навчального предмету. За допомогою евристичних прийомів студенти формулюють висновки, узагальнюють зв'язки і відношення різних наукових положень навчального предмета. Самостійна робота студентів, що проводиться на основі евристичних методів і прийомів, сприяє розширенню їхнього наукового світогляду, дає їм змогу глибше проникати в сутність предмета вивчення і формувати власні судження про розглядувані наукові положення. Використання евристичних методів і прийомів та пов'язаних з ними методів мисленнєвого моделювання спрямовує творчу діяльність студентів на самотійне розкриття сутності питання, яке вивчається [92], [117].

На основі евристичних прийомів у навчальному пізнанні можна здійснювати пошук розв'язків поставлених задач із застосуванням не заданої, а своєї системи мисленнєвих дій. Основною метою застосування евристичних методів, прийомів і мисленнєвого моделювання є оцінювання раніше застосовуваних правил і способів пошуку шляхів розв'язування навчальних задач, особистого досвіду навчальної роботи, спостережень за тим, як це роблять інші студенти і викладачі [87]. Все це дає змогу студентам знаходити своє, раціональне, оригінальне в самотійному пошуку знань, у проведенні аналізу досліджуваних явищ і синтезу відповідних висновків і заключень.

Використовуючи евристичні методи і прийоми, студенти знаходять відповіді на такі питання: що дано, що необхідно знайти, що невідоме в цьому пошуку, які задачі, аналогічні даній, розв'язувались, і чи є можливість скористатися цією аналогією, які слід ввести додаткові, допоміжні дані, щоб раціонально розв'язати поставлену задачу?

Для евристичних методів і прийомів характерні розвивальні форми мисленнєвих дій, до яких належать порівняння, зіставлення, аналіз, синтез, логічні зв'язки, оцінювання нової якості стану і поява шляхів розв'язування поставлених задач [92].

Застосування евристичних методів і прийомів у навчальному процесі вищої школи є однією з необхідних умов свідомого, глибокого засвоєння знань і їх раціонального застосування.

Призначення проблемного навчання у вищій школі полягає в постановці і розв'язуванні студентами теоретичних або практичних задач, які раніше ними не розв'язувалися. Пропоновані задачі (проблеми) можуть бути досить широкого діапазону складності – від достатньо простих навчально-предметних задач до дослідження і розв'язування оригінальних науково-прикладних питань комплексного характеру [9, с.348].

В основі проблемного навчання лежить створення проблемних ситуацій деякого ступеня складності з поєднанням відомого і невідомого для студентів матеріалу.

Навчально-дослідницька діяльність є частково-пошуковою або пошуковою діяльністю, пов'язаною з проблемним навчанням і характеризується активізацією навчально-пізнавальної діяльності і підготовкою студентів до наукової і професійної діяльності.

Проблемне навчання містить елементи дослідницької діяльності. М.І.Махмутов [132], Т.В.Кудрявцев [115] підкреслюють, що особливістю проблемного навчання є його пошуковий і дослідницький характер. Так, М.І.Махмутов визначає проблемне навчання як дидактичну систему, що базується на закономірностях творчого засвоєння знань і способів діяльності, що включає спеціальне поєднання прийомів і методів навчання і учіння, якому властиві риси наукового пошуку [132, с.288].

Т.В.Кудрявцев вважає, що в проблемному навчанні моделюється процес мислення пошукового характеру [115, с.15].

За проблемного навчання від студентів вимагається аналітико-синтетична діяльність, тобто самостійний науковий пошук. Студенти повинні вміти користуватися набутими знаннями, різноманітними літературними джерелами, довідниками, таблицями та іншими джерелами повідомлень і даних.

Проблемне навчання є формою самостійного пошуку нових знань не тільки за книгами, але і шляхом досліджень, використання вимірювальних приладів, шляхом проведення розрахунків і проектування, комп'ютеризованих обчислювальних експериментів, теоретичних пошуків.

На відміну від евристичного пошуку розв'язування проблемних задач здебільшого відбувається на основі логічних суджень, в яких стверджують або заперечують можливість або імовірність досягнення мети на основі певних даних, пов'язаних з умовами і шляхами розв'язування проблеми, що не виключає застосування евристик [116]. Відповідно для розв'язування складних проблем створюються проблемно-гіпотетичні, модельно-проблемні завдання або концептуально-імітаційні моделі, для аналізу яких використовуються сучасні інформаційно-комунікаційні технології. В такого виду моделюванні широко застосовуються аналогії, екстраполяція, інтерполяція та інші загальні методи наукового пошуку.

Суттєво важливим для проблемного навчання є розвиток у студентів уміння приймати самостійні рішення, швидко орієнтуватися в ситуації, розв'язувати задачі з цікавістю і захопленням.

Фактично розв'язування проблемної ситуації – це завжди творчий акт, результатом якого є не тільки одержання конкретного знання, а й позитивне емоційне переживання успіху, почуття задоволення. Бажання знову і знову переживати ці почуття приводить до появи нових і розвитку існуючих пізнавальних мотивів [187, с.175].

Основна трудність у проблемному навчанні – добір проблемних задач з дотриманням таких вимог:

- їх розв'язування має викликати інтерес у студентів;
- задачі повинні бути доступними розумінню студентів, тобто спиратися на наявні знання;
- задачі повинні «лежати» в зоні «найближчого розвитку», тобто бути одночасно і посильними, і не надто тривіальними;
- розв'язування задач повинно давати предметні знання відповідно до навчальних програм;
- розв'язування задач повинно розвивати професійне мислення.

Таким чином, в разі застосування продуктивних методів навчання безпосередньо стимулюється розвиток навчально-дослідницьких умінь студентів.

Одним із найважливіших чинників формування дослідницьких умінь студентів розглядається використання дослідницьких методів навчання [138].

Різні аспекти проблеми застосування дослідницьких методів навчання розробляються багатьма вченими та науковцями, серед яких: В.П.Безпалько [15], О.М.Подд'яков [159], С.А.Раков [167], О.І.Скафа [186], С.О.Сисоєва [185] та ін.

Широке розуміння дослідницьких методів навчання передбачає включення до групи дослідницьких усіх методів, в основі яких передбачається дослідницька діяльність і застосування яких сприяє пошуковій активності студентів, формуванню та розвитку у студентів мотивів, умінь, навичок і здібностей до наукового пошуку, творчому засвоєнню знань і нових способів дій. В основі дослідницьких методів завжди лежить власна пошукова діяльність студентів.

За такого підходу до дослідницьких методів навчання належать методи, які за різними класифікаціями називають евристичними, частково-пошуковими, проектними [138].

За компетентнісного підходу важливими є не тільки обізнаність студента, а уміння бачити і розв'язувати проблеми, які виникають в реальних життєвих ситуаціях. З огляду на це актуальним стає застосування в навчальному процесі методу проектів як одного з методів організації навчально-дослідницької діяльності [164], [182].

Результатом стає активна діяльність студента, далека від репродукції, перетворююча, інноваційна, творчо спрямована. Це сприяє підготовці випускника вищого навчального закладу до системних дій у професійній ситуації, до роботи з постійно зростаючим потоком всеможливих повідомлень, до аналізу і проектування своєї діяльності, до самостійних дій в умовах невизначеності, до самовдосконалення (самопізнання, самоконтролю, самооцінювання, саморегуляції) і творчої самореалізації.

Аналіз психолого-педагогічної літератури, а також проведені дослідження свідчать про те, що ефективним методом розвитку навчально-дослідницьких умінь студентів є їх залучення до проектної діяльності дослідницького характеру. Підготовка студентів до такої діяльності і її реалізація в умовах сучасного

освітнього процесу нерозривно пов'язані із застосуванням сучасних інформаційно-комунікаційних технологій [173].

Проектно-дослідницька діяльність розуміється як вид навчально-пізнавальної діяльності, в якій інтегруються компоненти проектної і дослідницької діяльності.

На думку О.І.Савенкова [179, с.6 – 16], проектування і дослідження – з самого початку принципово різні за направленістю, метою і змістом види діяльності. Принципова відмінність дослідження від проектування полягає в тому, що в процесі дослідження не передбачається створення певного завчасно запланованого об'єкта, навіть його моделі чи прототипу. Дослідження – за своєю суттю процес пошуку невідомого, нових знань, один з видів пізнавальної діяльності людини.

У проектуванні задаються межі, глибина розв'язування проблеми, тоді як дослідження будується принципово інакше, в ньому допускається нескінченний рух в глибину проблеми. Проектування – це творчість, але творчість за планом у певних контрольованих рамках.

Дослідження як пошук істини надзвичайно важливе в справі розвитку творчих здібностей. Проектування може бути зорієнтоване на розвиток креативності, але виконуючи проект, студенти вчать чіткості і строгості в роботі, вмінню планувати свої пошуки, рухатися до наміченої цілі.

Розглянемо приклад: Проект «Задачник».

Мета проектування: закріпити уміння розв'язувати задачі за допомогою інструментарію систем комп'ютерної математики; дослідити можливості використання засобів математичних пакетів для розв'язування задач з певного розділу математики.

Сценарій. Команда науковців вивчає можливості використання засобів комп'ютерних математичних пакетів для розв'язування задач на обчислення інтегралів. Команда повинна презентувати задачник, у якому подано розв'язування різноманітних задач із теми «Інтегрування» за допомогою комп'ютера.

Робота над проектом виконувалася згідно з планом проекту (таблиця 2.1.1) та поетапно:

1. Постановка проблеми.

З'ясувати, які труднощі виникають у процесі розв'язування задач на інтегрування і скласти задачник так, щоб ці труднощі подолати. Дослідити, наскільки ефективним є використання засобів СКМ для розв'язування різноманітних задач на тему «Інтегрування»?

2. Планування роботи, розподіл обов'язків.

В процесі колективного обговорення узгоджується план роботи для кожного учасника. Кожен повинен знати свою роль на певному етапі роботи і розуміти свою відповідальність за результати проектування.

3. Самостійна робота студентів.

Кожен добирає і розв'язує за допомогою засобів комп'ютерних математичних пакетів 5-7 задач з різних розділів теми «Інтегрування».

4. Добір задач для «Задачника».

В процесі спільного обговорення виконується добір кращих задач.

5. Остаточне редагування задач разом з викладачем.

6. Оформлення задач.

7. Презентація задачника викладачам і студентам.

8. Рефлексія.

Таблиця 2.1.1

План виконання проекту

Етапи роботи	Учасники	Дата
1. Ідея проекту	всі	
2. Складання задач	індивідуально	
3. Обмін і розв'язування задач, редагування і визначення кращих	всі	
4. Остаточне редагування	разом з викладачем	
5. Оформлення	індивідуально	
6. Остаточне редагування	всі	

В процесі планування роботи на початку проекту викладач разом зі студентами складає перелік критеріїв оцінювання задачника, що надалі є основою для самооцінювання і рефлексії (таблиця 2.1.2).

Таблиця 2.1.2

Перелік критеріїв оцінювання задачника

№	Критерії оцінювання	1 – 5 балів
1.	Дібрано оригінальну назву задачника, в ньому зазначено імена всіх його авторів.	
2.	Наведені в задачнику відомості є вірогідними та відповідають темі проекту.	
3.	Ідеї розв'язування задач чітко висловлені, легко зрозуміти спосіб розв'язування задачі, наведені чіткі пояснення і обґрунтування.	
4.	Графічні зображення доречні та доповнюють розв'язування задач	
5.	Тема висвітлена детально, наведені задачі різних типів, розв'язування різними способами.	
6.	Доцільність розв'язування задач за допомогою засобів комп'ютерних математичних пакетів.	
7.	Цікавість задач, матеріалу.	
8.	Матеріал впорядкований логічно, його легко читати, постійно утримується увага читача.	
9.	Матеріали отримані з різних джерел, самостійно опрацьовані студентами, скомбіновані та самостійно оформлені.	
10.	Немає орфографічних, граматичних, пунктуаційних помилок.	
11.	Аналіз змісту задачника свідчить про розуміння його авторами матеріалу теми проекту.	
12.	Кожен студент групи зробив свій внесок у створення задачника.	
	<i>Сумарний бал</i>	

В ході роботи використовувалися інформаційно-комунікаційні технології: комп'ютерні математичні пакети (Maxima, Mathcad), інтернет-сервіси Google для спільної роботи, віртуальне навчальне середовище на платформі Moodle УНІКОМ.

В результаті виконання проектно-дослідницької діяльності у студентів розвиваються такі уміння і навички дослідницької роботи:

- планувати результати діяльності і розробляти шляхи їх досягнення;

- виявляти та заповнювати прогалини в своїх знаннях і уміннях в процесі розв'язування нових задач;
- здійснювати пошук даних і відомостей, необхідних для розв'язування поставлених задач (проблем);
- самостійно здобувати нові знання і уміння;
- робити аргументовані висновки;
- оцінювати результати своєї діяльності; співвідносити одержані результати з поставленою метою;
- висловлювати свою думку в процесі спільного обговорення і відстоювати її в дискусії.

В.І.Андрєєв [7], О.В.Баранова [12], В.О.Далінгер [61], О.І.Савенков [179] та ін. сходяться на тому, що більшість навчальних дослідницьких завдань – це невеликі пошукові задачі, для розв'язування яких необхідно пройти всі або більшість етапів дослідження:

- постановка задачі (проблеми);
- побудова плану дослідження;
- спостереження та вивчення фактів і явищ, аналіз наявних відомостей стосовно питання, яке розглядається;
- експериментування: проведення обчислювального експерименту, випробування, вимірювання, спостереження тощо з метою одержати фактичний матеріал;
- систематизація та аналіз одержаного фактичного матеріалу;
- формулювання гіпотез;
- розв'язування, пояснення і перевірка отриманих результатів;
- доведення або спростування гіпотез;
- висновки про можливе і необхідне застосування отриманих знань.

В процесі навчання математичної інформатики, вивчаючи комп'ютерні математичні пакети як засоби дослідницької діяльності, необхідно розглянути описані етапи дослідження, дати студентам рекомендації щодо їх реалізації, розглянути приклади розв'язування дослідницьких задач.

Дослідження починається з постановки проблеми або задачі (problema – задача, перепона, трудність [176]), виявлення незрозумілих явищ, які підлягають дослідженню. Важливо знайти проблему, яку студенти можуть досліджувати і дослідження якої їх зацікавить.

Для пошуку проблеми в процесі навчання математичної інформатики студентам можна запропонувати загальну схему основних можливих напрямів досліджень, використовуючи засоби комп'ютерних математичних пакетів (рис.2.1.1). На схемі зображені деякі галузі, які можна вивчати, використовуючи системи комп'ютерної математики. Студент обирає галузь, яка найбільше його цікавить, і продовжує схему, описуючи розділи, які вивчаються в цій галузі, які задачі розв'язуються і які засоби комп'ютерних математичних пакетів застосовуються до розв'язування задач з того чи іншого розділу.

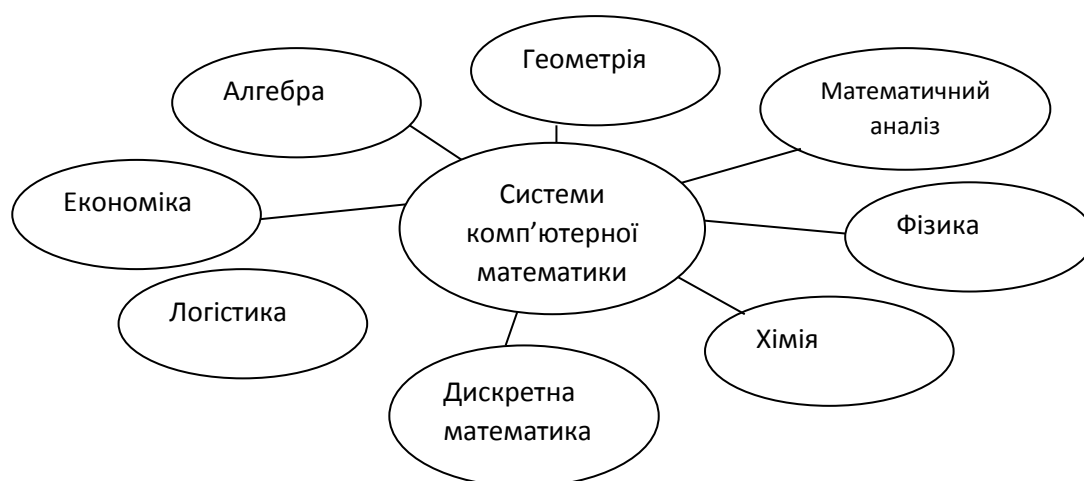


Рис. 2.1.1 Можливі напрями застосування систем комп'ютерної математики

Важливою рисою будь-якого дослідника є вміння відшукати щось незвичайне в звичайному, побачити складності і протиріччя там, де на перший погляд здається все звичним, ясним і простим. Один із способів розвивати вміння бачити проблеми – вчитися дивитись на одні й ті самі предмети з різних поглядів, ставити питання: що відбудеться, якщо?

Визначити мету дослідження – означає відповісти на питання про те, для чого проводиться дослідження. Формулювання мети дослідження починається зі слів: виявити, визначити, вивчити, дізнатися... Формулювання мети проектування: розробити, створити, виконати... На основі завдань дослідження зазвичай

уточнюють мету. Якщо за метою визначається загальний напрям руху, то в завданнях описуються основні кроки розв'язування задачі чи виконання завдання.

На початку дослідження необхідно розробити попередній план дослідження. Але потрібно враховувати, що під час проведення роботи план зазвичай доводиться доопрацьовувати і вдосконалювати. Дослідження – творчий процес, і часто щось необхідно доповнити, а від чогось відмовитися.

Для того, щоб скласти план дослідження, потрібно відповісти на питання: як можна дізнатися щось нове про те, що досліджується? Для цього необхідно визначити, якими інструментами, засобами або методами можна скористатися.

Можливі шляхи і способи дослідження:

1. Подумати самому (саме з цього найкраще починати будь-яку дослідницьку роботу). Відповісти на питання: що я знаю про це, які умовиводи я можу зробити з того, що мені вже відомо?

2. Аналіз літературних джерел: довідники, енциклопедії, монографії, наукові статті, електронні джерела. Записати все, що вдалося дізнатися з літератури про досліджувану проблему.

3. Комп'ютерний експеримент: провести математичні розрахунки; побудувати математичну модель об'єктів вивчення; провести спостереження та обчислювальний експеримент; підготувати схеми, графіки, рисунки; записати все, що вдалося дізнатися про предмет дослідження.

Одне з основних умінь дослідника – уміння висувати гіпотези, робити припущення, шукати їх обґрунтування, доводити або спростовувати. Для цього дослідник повинен проявити оригінальність, гнучкість, високу продуктивність мислення.

Розглянемо приклад. Студенти фізико-математичних спеціальностей вміють визначати період тригонометричної функції. Але як, наприклад, визначити період суми тригонометричних функцій? Це питання використаємо для постановки проблеми.

Приклад 2.1.1. Визначити період суми тригонометричних функцій.

Розглянемо функцію $f(x) = \sin x + \sin 2x$. Застосуємо засоби програми

Mathcad у процесі дослідження періоду тригонометричних функцій. За графіком (рис.2.1.2) видно, що період даної функції – 2π , оскільки період функції $\sin 2x - \pi$, а період функції $\sin x - 2\pi$. В одну хвилю $\sin x$ вкладається дві хвилі $\sin 2x$. Найменший спільний період – 2π .

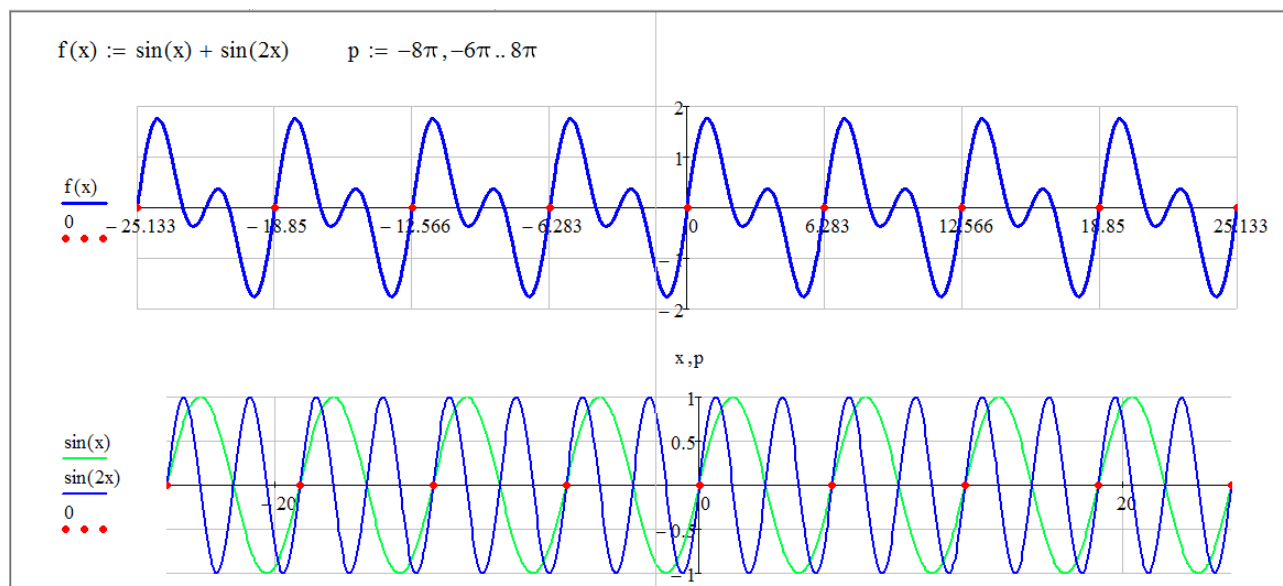


Рис. 2.1.2

Розглянемо функцію $g(x) = \sin 3x + \sin 5x$. За графіком (рис. 2.1.3) видно, що період цієї функції також 2π . Але чому так? Можливим поясненням може бути те, що період функції $\sin 3x$ становить $\frac{1}{3}(2\pi)$ (три хвилі в межах 2π), а для функції $\sin 5x$ період $\frac{1}{5}(2\pi)$ (5 хвиль в межах 2π). Тому 2π – найменша спільна хвиля.

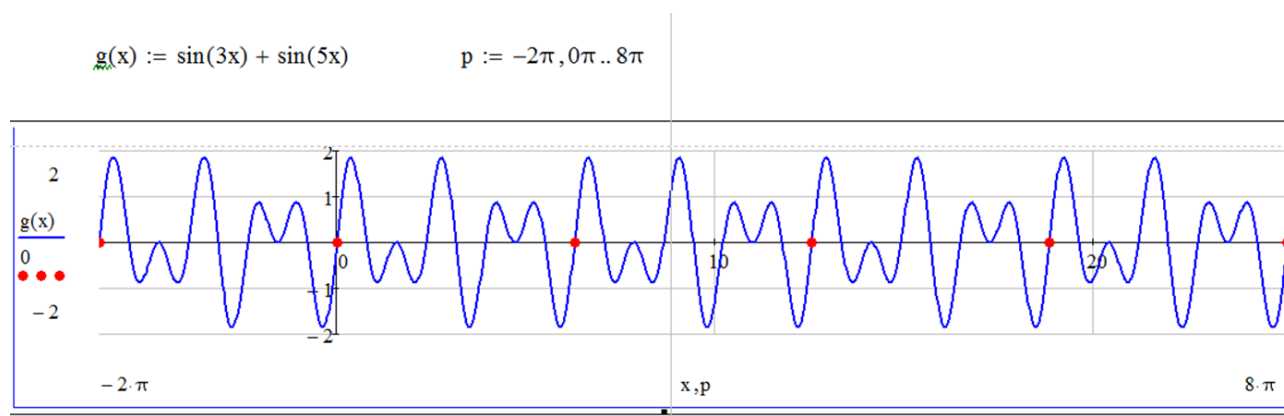


Рис. 2.1.3

Якщо розглядати менш зручні числа, тоді розв'язок не такий очевидний.

Розглянемо суму $t(x) = \sin \frac{8}{3}x + \sin \frac{16}{9}x$, а також $h(x) = \sin \frac{20}{7}x + \sin \frac{15}{7}x$. В даному випадку важко визначити період суми функцій за графіком (рис. 2.1.4). Однак, період кожного окремого доданку відомий. Приходимо до питання: якщо період однієї функції $\frac{a}{b}$, а період другої $\frac{c}{d}$, то який період їх суми?

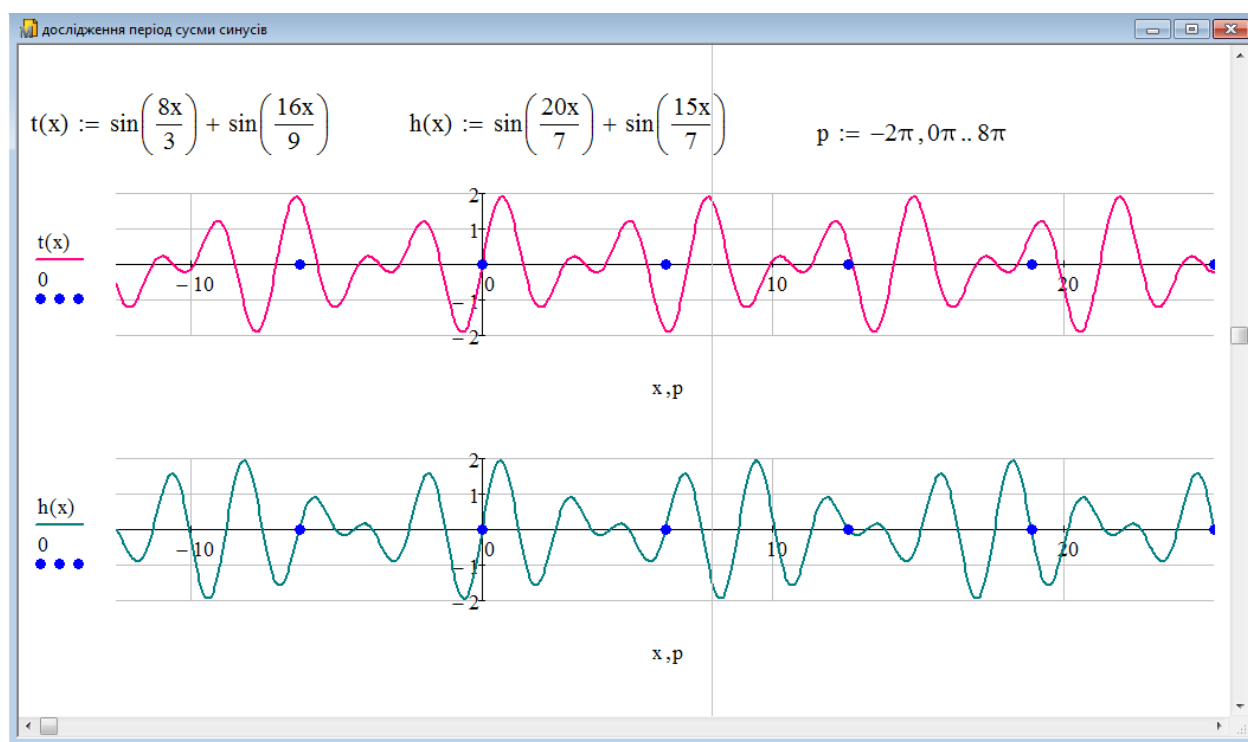


Рис. 2.1.4

Розглянемо суму $g(x) = \sin 3x + \sin 5x$. Уявимо кожен період як стрибок на числовій прямій від початку відліку. Якщо в першому випадку відбувається стрибок з кроком $2/3$, а в другому – з кроком $2/5$, в яких точках вони збігаються, подібно до найменшого спільного кратного двох цілих чисел? Наприклад, одна й та сама числова пряма може слугувати для ілюстрації спільних кратних чисел для 3 і 5. Стрибки відбуваються в різних точках, але найменше спільне кратне є першою спільною точкою стрибків.

На графіку (рис. 2.1.5) бачимо, що найменшою спільною точкою стрибків з кроком $2/3$ і $2/5$ є точка 2, а період функції $g(x) = \sin 3x + \sin 5x$ становить 2π .

Позначимо через $HCKp\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right)$ спільну точку стрибків з кроком $\frac{a}{b}$ та $\frac{c}{d}$.

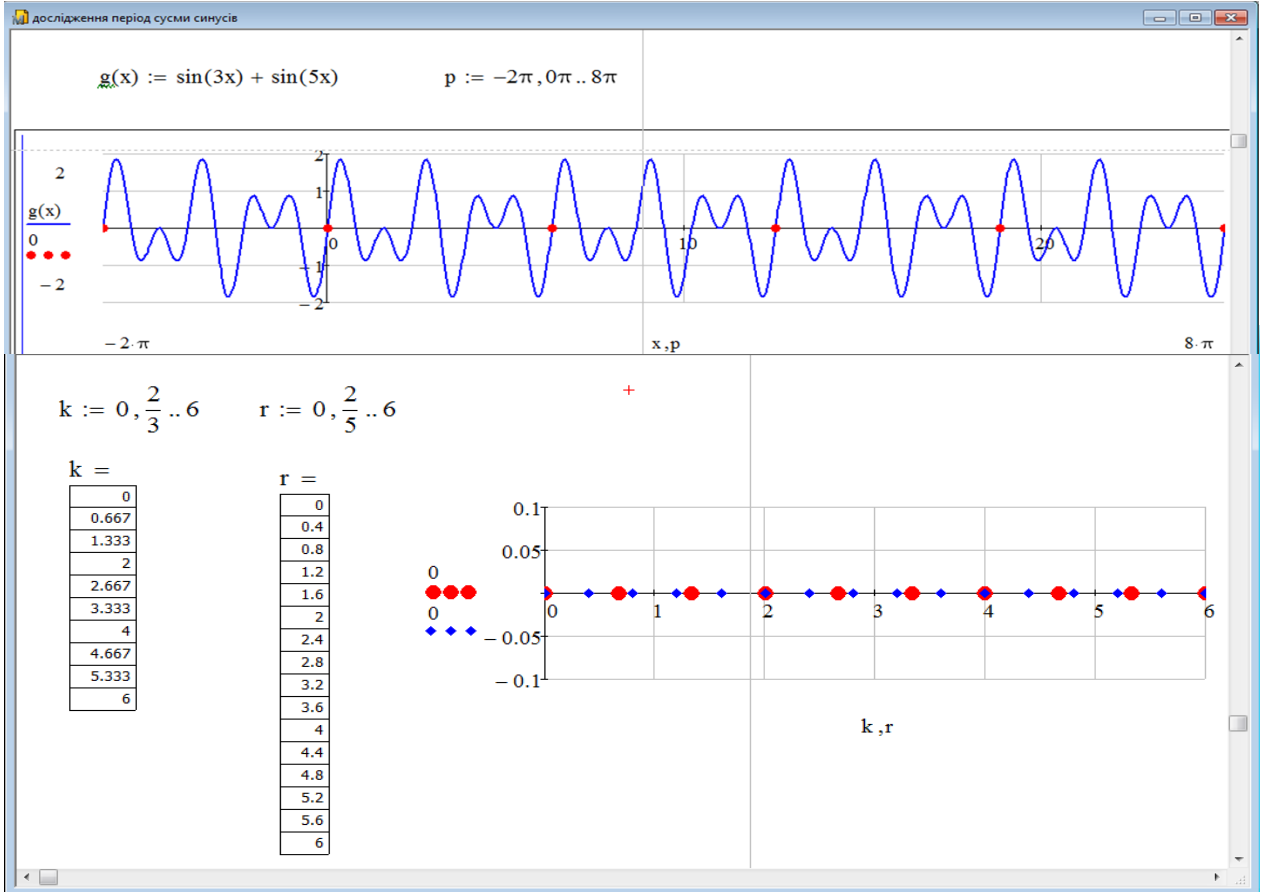


Рис. 2.1.5

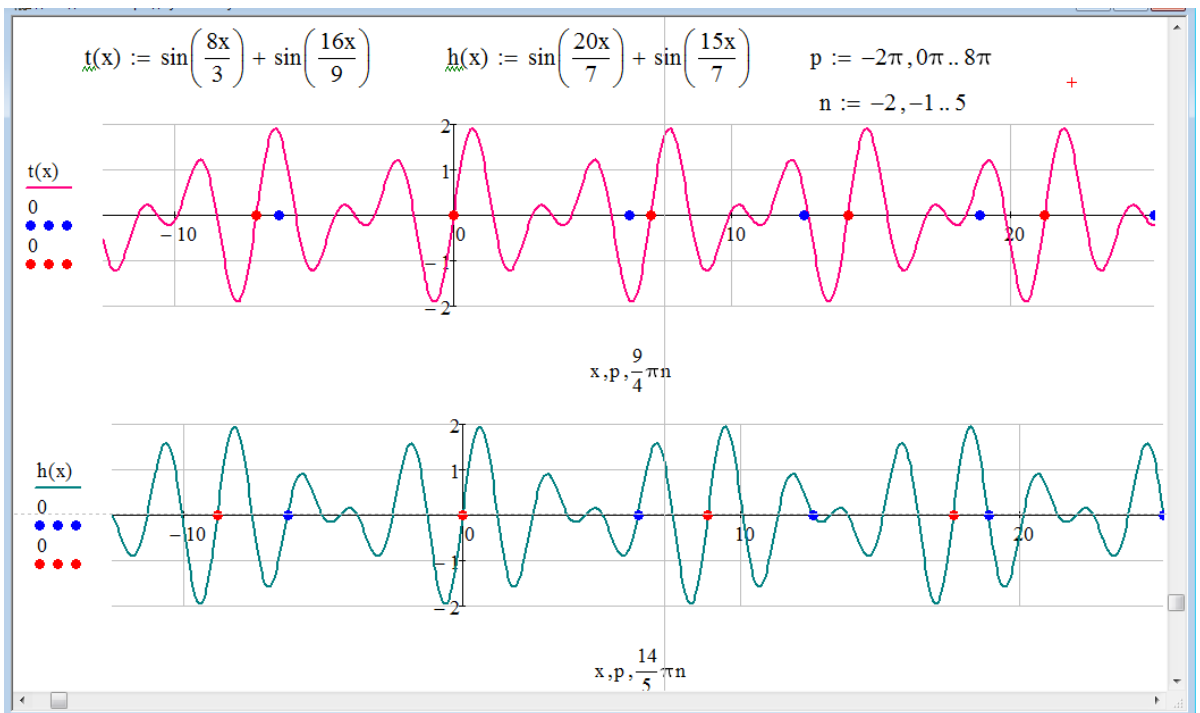


Рис. 2.1.6

Значить для $\frac{2}{5}$ і $\frac{2}{3}$ $HCKp\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right) = 2$. Яким чином з чисел $\frac{2}{5}$ і $\frac{2}{3}$ можна одержати 2? Припустимо, $HCKp\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) = \frac{HCK(a,c)}{HCD(b,d)}$. Тоді $HCKp\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{8}\right) = \frac{9}{4}$, а $HCKp\left(\frac{7}{10}, \frac{14}{15}\right) = \frac{14}{5}$. Дійсно, з рис. 2.1.6 бачимо, що період функції $t(x)$ дорівнює $\frac{9}{4}\pi$, а період функції $h(x) - \frac{14}{5}\pi$. Доведення встановленого твердження подано в [223], а також див. Додаток Б.

В цій задачі розглядається сума синусів, але результати можна застосувати і для інших періодичних функцій. Завдяки графічним засобам програми Mathcad поставлене припущення (гіпотезу) легко перевірити, студенти можуть згенерувати кілька своїх прикладів. Дослідження можна розширити (продовжити) для суми чи різниці кількох функцій. Комбінування періодичних функцій надає цікаве поле для досліджень і діяльності в теоретичних математичних дослідженнях.

Легкість генерування графіки в системі комп'ютерної математики Mathcad є невіддільним від даного дослідження. Застосування засобів систем комп'ютерної математики надає миттєву візуалізацію і має важливе значення для підтримки таких досліджень, створює необмежений простір для тестування і генерування здогадок, гіпотез, припущень.

Фактично в цьому прикладі спостерігається спроба застосувати поняття теорії чисел до раціональних чисел, що сприяє ширшому розгляду понять теорії чисел (подібно до того як афінна система координат в геометрії є розширенням поняття декартової системи координат), розширює межі для відкриття нового. Доповненням до теоретичних досліджень є практичне застосування: спосіб визначення періоду суми періодичних функцій, якщо періоди пропорційні.

Результат цього дослідження можна застосовувати в процесі моделювання явищ (наприклад, процесів коливання, що описуються такими сумами) у фізиці.

Розвиток навчально-дослідницьких умінь і формування дослідницької компетентності студентів у процесі навчально-пізнавальної діяльності забезпечується в разі реалізації таких педагогічних умов [140]:

- залучення студентів до самостійної пізнавальної і практичної діяльності;
- створення у студентів цільової установки на оволодіння комплексом умінь і навичок самоосвітньої і науково-творчої діяльності;
- використання сучасних інформаційних технологій і сервісів;
- паритетність дослідницьких позицій викладач – студент, студент – студент, готовність до спільної роботи для досягнення поставленої мети;
- вільний вибір, тобто реалізація суб'єктної позиції студента.

В [140] описано підхід, за яким мережа Інтернет розглядається як глобальна платформа розповсюдження колективних знань, проектування індивідуальної траєкторії навчання і здобуття досвіду, а єдиний відкритий інформаційно-освітній простір є засобом і місцем накопичення ресурсів, організації комунікації, співробітництва, навчання, моніторингу та інтелектуального розвитку студентів і викладачів.

В основу реалізації навчання математичної інформатики в рамках дослідницького підходу покладено віртуальне навчальне середовище УНІКОМ Ніжинського державного університету імені Миколи Гоголя, створене на основі платформи Moodle.

Для підтримки навчання дисципліни «Комп'ютерні математичні пакети», в процесі даного дослідження розроблений комп'ютерно орієнтований навчальний курс, що розміщений на сервері університету.

Проектування електронного інформаційно-навчального простору, системи створення і добору якісних ресурсів, добір ефективних сервісів, що базуються на туманних обчисленнях та хмарних технологіях, є однією з основних задач сучасного університету [140].

Необхідно змінити ставлення студентів до процесу пізнання, оскільки навчання вимагає від них високого рівня мотивації. Для цього потрібно делегувати їм відповідальність за свої освітні результати, визначити вектор розвитку (не декларативним способом, а через діяльність і усвідомлення потреби), створити умови для самореалізації. Одним із способів виконання цього завдання є

застосування хмарних сервісів і туманних обчислень у процесі організації навчання студентів.

Для того щоб на лабораторній роботі розглянути задачі дослідницького характеру, на заняття студент повинен прийти вже підготовлений, тобто він повинен уміти застосовувати засоби комп'ютерних математичних пакетів для розв'язування елементарних найпростіших задач. Більше того, в нього повинні з'явитися питання щодо застосування засобів комп'ютерних математичних пакетів для розв'язування більш складних задач.

Тому в електронному навчальному курсі до кожної теми, яка розглядається на лекції або вивчення якої відведене на самостійне опрацювання, передбачені завдання на закріплення знань, які студент виконує самостійно або спільно з іншими студентами. Отже, на самостійне вивчення дається не тільки навчальний матеріал з теми, а також завдання, серед яких можуть бути такі:

- пройти тест для самоперевірки;
- сформулювати питання, які виникли, записати питання на форумі;
- скласти конспект, зробити висновок;
- відповісти на питання: що дізналися нового і як це використовувати;
- проілюструвати основний зміст нового матеріалу за допомогою схеми, таблиці, створити публікацію на спільному ресурсі тощо;
- розв'язати задачу за зразком.

Самостійна робота полегшується і стає більш цілеспрямованою, якщо студенти одержують такі завдання. За необхідності студент одержує підтримку від викладача.

Як правило після виконання самостійних завдань у студента з'являються питання, пошук відповідей на які здійснюється в процесі виконання лабораторної роботи. Це означає, що студент вмотивований до виконання лабораторної роботи, в нього є потреба розв'язати свою проблему.

Теоретичний матеріал за темою «Засоби опрацювання експериментальних даних за методами апроксимації», який розміщений у відповідному розділі електронного навчального курсу, виноситься на самостійне опрацювання

студентами. З метою систематизації і закріплення навчального матеріалу студенти одержують завдання скласти узагальнюючу таблицю, в якій описані основні засоби програми Mathcad для апроксимації функцій (рис. 2.1.7).

Інтерполювання	<ul style="list-style-type: none"> • Лінійне • Поліноміальне • Лагранжа • Сплайнами 	$lspline(x,y)$ $pspline(x,y)$ $cspline(x,y)$	
Екстраполювання	<ul style="list-style-type: none"> • Лінійне передбачування 	$predict(v,m,n)$	
Регресія	<ul style="list-style-type: none"> • Лінійна • Медіанна • Поліноміальна 	$line(x,y)$ $intercept(x,y)$ $slope(x,y)$ $medfit(x,y)$ $regress(x,y,k)$ $interp(s,x,y,t)$ $loess(x,y,span)$	
Згладжування функціями	<ul style="list-style-type: none"> • Експонентна • Логістична • Степенева • Логарифмічна • Синусоїда 	$expfit(x,y,g)$ $lgsfit(x,y,g)$ $pwrfit(x,y,g)$ $logfit(x,y,g)$ $sinfit(x,y,g)$	

Рис. 2.1.7 Апроксимація функцій

Також можна застосувати педагогічну техніку, за якою студенти самі формулюють питання за самостійно вивченим матеріалом, які починаються зі слів: Назвіть..., Придумайте..., Чому?..., В якому випадку?..., Запропонуйте..., Поясніть... (рис. 2.1.8) та публікують їх на спільному електронному ресурсі.

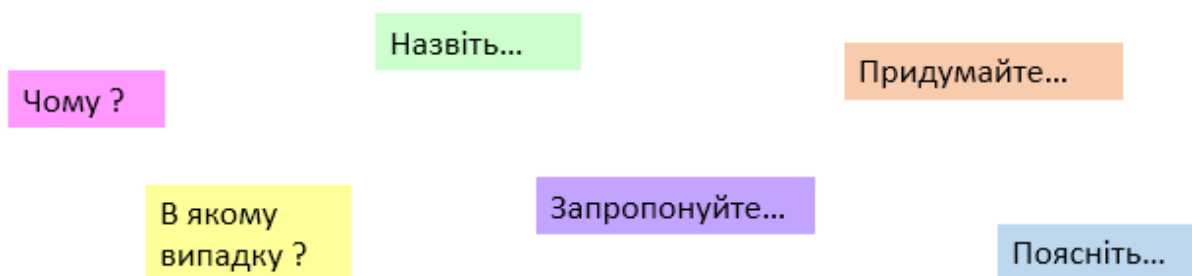


Рис.2.1.8.

Серед можливих питань можуть бути:

- як створити масив даних в разі великої кількості вузлів інтерполяції?
- як збільшити точність чисельного результату розрахунків?
- в яких випадках застосовують методи апроксимації даних?
- назвати недоліки інтерполювання за методом Лагранжа;
- як визначити правильність виду вибраної функції наближення?
- дослідити точність методу для різної кількості вузлових точок.

На поставлені питання викладач повинен звернути увагу і організувати їх обговорення в процесі виконання лабораторної роботи з даної теми.

За результатами самостійного виконання завдань студентами викладач може побачити, хто і як засвоїв новий матеріал, кому на що потрібно звернути увагу. Тобто результати виконання всіх завдань оцінюються з метою підтримати студента, в разі потреби допомогти, дати можливість навчитися, зрозуміти, визначити недосить глибоко вивчені теми. Студенти повинні бачити свої освітні здобутки, а навчальні ситуації повинні стати ситуаціями успіху студентів. У такий спосіб здійснюється формуюче оцінювання та індивідуальний підхід до навчання.

Під час вивчення засобів побудови графічних зображень студентам доцільно самостійно виконати індивідуальне завдання: побудувати графік заданої функції разом з додатковими лініями на тому самому графічному полі, щоб пояснити властивості функції, спосіб побудови графіка через зсув і деформацію графіка простішої функції, спосіб побудови графіка функції за правилом додавання або множення графіків.

Кожен студент групи свою роботу публікує на спільній віртуальній дошці хмарного сервісу Padlet, посилання на яку публікується в електронному курсі (рис. 2.1.9). В результаті забезпечується рефлексія своєї діяльності, відбувається співпраця, оскільки студенти мають можливість ознайомитися з результатами роботи інших, побачити різні способи побудови графіків, оцінити найкращі, найбільш цікаві роботи своїх одногрупників. Студенти починають розуміти, яким чином і що саме вони могли б покращити і вдосконалити у своїй роботі. На даному етапі доцільно застосувати метод рецензій [186, с.111], за яким студенти

аналізують результати роботи однокласників, дають характеристику їхньої роботи. Користуючись віртуальною дошкою, викладачеві зручно переглядати, перевіряти й оцінювати роботи всіх студентів. Щоб забезпечити зворотний зв'язок, викладач може залишити короткий письмовий коментар про те, що вдалося краще, а де є недоліки.

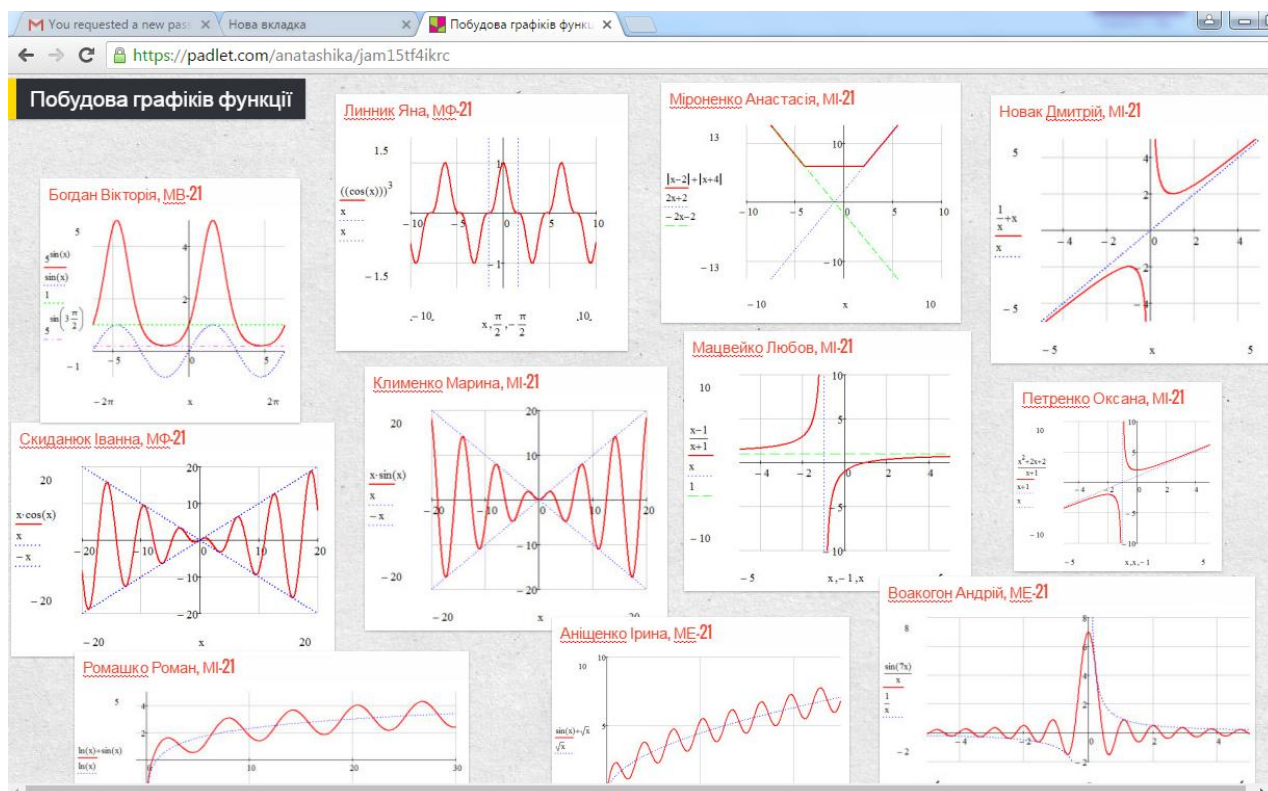


Рис. 2.1.9 Онлайн-дошка «Побудова графіків функції»

Добір інформаційних ресурсів, їх адаптація до навчального процесу здійснюється викладачем, виходячи з цілей і задач навчання, для чого відповідно вимагається наявність певного рівня ІКТ-компетентностей і методичної майстерності педагога.

Вдало дібраний і поданий навчальний матеріал, а також матеріал для самостійного опрацювання є однією з характерних ознак і особливостей дослідницького, проблемно орієнтованого навчання. Перш ніж планувати навчання, необхідно провести глибокий методичний аналіз теми й оцінити інформаційні ресурси для застосування технологій дослідницького навчання: цифрові освітні ресурси, інформаційно-довідкові системи, тексти з підручника та інші джерела, і відповідність їх змісту навчання.

Навчання необхідно спроектувати, організувати таким чином, щоб студент був у захопленні від цікавої діяльності, бажав діяти, проявляв пізнавальну активність досліджувати реалії навколишнього світу.

Важливим засобом розвитку навчально-дослідницьких умінь студентів фізико-математичних спеціальностей в процесі навчання математичної інформатики є система доцільно дібраних задач.

2.2 Дидактична система задач як засіб розвитку навчально-дослідницьких умінь студентів

Процес пізнання навколишньої дійсності є складним і багатоплановим процесом. Зрозуміло, що цей процес не міг би здійснюватись і навіть розпочатися без постановки і розв'язування різноманітних задач, які є початковими ланками пізнавального процесу [186, с.54].

У педагогічній психології, дидактиці і методиці навчання математики були проведені дослідження з різних проблем теорії задач. Значний вклад в цю теорію зробили Г.А.Балл [11], М.І.Бурда [40], А.О.Вербицький [42], В.В.Давидов [57], В.О.Далінгер [61], І.І.Льясов [92], А.М.Матюшкін [131], І.Я.Лернер [125], Ю.М.Колягин [106], Кулюткин Ю.Н [117], Д.Пойа [161], Г.В.Токмазов [193], В.В.Успенський [199], Л.М.Фрідман [203] та ін.

В цих дослідженнях розглядаються і розв'язуються кардинальні питання стосовно постановки задач, їх структури, методики навчання розв'язування задач і навчання математики через розв'язування задач, типології задач.

Процес розв'язування задачі як розумова діяльність досліджується в психології і аналізується в методиці навчання. Задачі у навчанні математики є і об'єктом вивчення, і засобом навчання. Зазвичай вказують на 4 основні функції розв'язування задач – навчальна, розвивальна, виховна і контролювальна [183].

Навчальна функція – розв'язування задач спрямоване на формування у студентів системи знань, умінь і навичок на різних етапах навчання. Через розв'язування задач студенти вчаться не лише застосовувати здобуті теоретичні знання, а й переконуються на етапі мотивації у необхідності здобування нових

знань; в процесі розв'язування задач студенти здобувають додаткові теоретичні знання і відомості про методи розв'язування задач.

Розвивальна функція – розв'язування задач спрямоване на розвиток мислення студентів, на формування у них розумових дій та прийомів розумової діяльності, просторових уявлень і уяви, аналітичного і синтетичного мислення, вміння моделювати ситуації, з'ясовувати причинно-наслідкові зв'язки перебігу різноманітних процесів і проявів всеможливих явищ.

Виховна функція – розв'язування задач є основою у формування у студентів наукового світогляду, сприяє підвищенню рівнів екологічного, економічного, естетичного виховання, розвитку пізнавального інтересу, позитивних рис особистості студента (наполегливість, воля, відповідальність тощо).

Контрольовальна функція – розв'язування задач спрямоване на встановлення навченості, рівня розвитку загальнокультурних і професійних компетентностей майбутніх фахівців, стану засвоєння навчального матеріалу окремими студентами і групою загалом.

Жодна з названих функцій не може бути ізольована від інших, але перед постановкою кожної конкретної задачі викладач має визначити провідну функцію її розв'язування, за належної цільової установки домагатися її реалізації в першу чергу. Кожна з основних функцій розв'язування задач важлива в загальній системі навчання. Разом з тим останніми роками особлива увага приділяється розвивальній функції. Не випадково Д.Пойа, Е.Резерфорд, Н.Бор, А.Ейнштейн, П.Л.Капіца, Б.М.Кедров та інші вчені зазначали, що розв'язування задач має не тільки і не стільки сприяти закріпленню знань, тренуванню в їх застосуванні, скільки формувати дослідницький стиль розумової діяльності, дослідницький метод підходу до явищ, що вивчаються [181].

Навчальну діяльність можна розглядати як процес розв'язування системи навчальних задач (Г.О.Балл [11], В.В.Давидов [57], Д.Б.Ельконін [212]). Відповідно до теорії діяльнісного підходу в навчально-пізнавальній діяльності опанування знаннями, набуття необхідних навичок відбувається в процесі розв'язування навчальних задач.

Оскільки розв'язування задач є одним з основних компонентів навчальної діяльності, то через їх зміст і розв'язування визначають характер пізнавальної діяльності студентів. Кожна успішно розв'язана задача викликає певні зрушення в досвіді й інтелектуальному розвитку студента.

Нині все частіше звертають увагу на необхідність з'ясування зв'язків змісту задачі з тією конкретною ситуацією, в якій вона виникла. В цьому випадку студенти ознайомлюються з визначеною, досить змістовною навчальною ситуацією, в ході дослідження якої перед ними ставляться ті чи інші цілі, на основі чого виявляються окремі особливості цієї ситуації, або використовують ситуацію як основу для певних узагальнень, оволодіння новими знаннями [145].

У своїх працях І.Я.Лернер вказує на показники системи пізнавальних задач, розв'язування яких буде сприяти розвитку дослідницьких умінь і формуванню творчої особистості студента, і визначає типологію задач у ній [125]:

1. Встановлення причинно-наслідкових зв'язків досліджуваних процесів і явищ.
2. Усвідомлення процесу розвитку явища та його механізмів.
3. Встановлення загальних і часткових закономірностей розвитку.
4. Визначення наступності між фактами, подіями, явищами.
5. Визначення тенденцій розвитку явища чи сукупності явищ.
6. Визначення ступеня прогресивності явища.
7. Співвіднесення часткового факту і загальної закономірності.
8. Виявлення структури об'єкта і взаємозв'язків між його елементами.
9. Визначення етапів розвитку явища.
10. Визначення типовості одиничного і масового явищ.
11. Встановлення відмінного в подібних явищах.
12. Встановлення нових фактів та явищ.
13. Оцінювання характеру та значення явища.

Врахування такої типології задач, стверджує І.Я.Лернер, виконує у навчанні такі функції:

по-перше, є орієнтиром для викладача, з яких питань у даній темі є виразний матеріал;

- по-друге, полегшує добір завдань на відтворення знань;
- по-третє, визначення типів проблем стає частиною змісту навчання;
- по-четверте, орієнтування на конструювання проблемних ситуацій.

Більш широко охарактеризована дидактична система пізнавальних завдань в [145], де зазначається, що ця система має відповідати таким вимогам:

- 1) охоплювати основні типи доступних студентам проблем певної науки й суміжних;
- 2) важливі в освітньому значенні й доступні методи науки повинні бути втілені в узагальнених способах розв'язування проблем;
- 3) у ній має бути представлений перелік важливих характеристик творчої діяльності;
- 4) до системи мають бути включені різні задачі за рівнем складності, впливом їх розв'язування на розвиток пізнавальної самостійності студентів, з урахуванням особливостей різних груп студентів;
- 5) мають бути враховані дидактичні вимоги до структури задач, їх змісту, повторюваності.

Залучення студентів до розв'язування задач, постановка яких вимагає пошуку необхідних вихідних відомостей, аналізу і обґрунтування способу розв'язування, добору ефективних інструментів його реалізації, є дієвим методом розвитку творчих здібностей і дослідницьких умінь студентів.

Головне значення такої системи задач полягає в тому, що на основі їх розв'язування студенти готуються до самостійного використання доступних їм методів наукового пізнання, розгляд розв'язування задач і аналіз розв'язків дає змогу здійснювати управління розвитком пізнавальної діяльності.

Дидактична система навчально-дослідницьких задач – це не простий перелік завдань. На її основі відбувається включення в процес навчання особливого змісту діяльності студентів: усвідомлення проблемної ситуації, виявлення і формулювання головного протиріччя, здійснення процесу розв'язування, обґрунтування правильності висновків.

Застосування дидактичної системи навчально-дослідницьких завдань дає змогу доцільно поєднати в разі необхідності використання репродуктивних та продуктивних методів навчання.

У дидактичній системі завдань окремі завдання можуть бути пов'язані за об'єктом, проблемою, умовами чи результатом, тобто за зв'язками змістового характеру. Другу групу складають процесуальні зв'язки – коли розглядаються задачі, близькі за процесом розв'язування: зв'язки за методом, способом розв'язування, необхідністю проявів творчої діяльності студентів, складністю задач, необхідним рівнем пізнавальної самостійності студентів, проблемністю задач тощо. Названі зв'язки можуть враховуватися одночасно, інколи ставлячи той чи інший на перший план залежно від дидактичної мети.

Обов'язковим компонентом будь-якої методичної системи навчання є способи включення різним чином задач у навчальний процес (через використання проблемного, евристичного або дослідницького методів навчання, ситуацій спільної продуктивної діяльності та ін.).

За результатами розв'язування задач мають розкриватися провідні лінії змісту навчального предмету, а також зв'язки між загальними і частковими узагальненнями.

Якісними показниками результатів застосування дидактичної системи навчально-дослідницьких задач є досвід пошукової діяльності студентів (нові знання окремих закономірностей; можливість застосування теоретичних знань у конкретних ситуаціях; розширення дієвості знань і т.ін.); ознайомлення студентів із певними типами проблем, методами у межах відповідних типологій; формування окремих рис творчої діяльності студентів.

В.І.Андрєєв до навчально-дослідницьких задач відносить завдання, з яких утворюється система логічно-пов'язаних навчальних проблем, аналіз і розв'язування яких в сукупності з евристичними питаннями, вказівками і мінімумом навчальних відомостей спонукує студента здобувати нові знання чи відомості про об'єкт дослідження [7].

В.В.Успенський до таких задач відносить запитання і завдання викладача або питання, що виникають у самого студента і спонукують його до активної пошукової діяльності, спрямованої на розв'язування пізнавальних проблем і самостійні відкриття [199].

Навчальна задача є власне дослідницькою у випадку, якщо вона не буде розв'язана шляхом прямого використання засвоєних раніше знань і вимагає суттєвих перетворень запропонованої умови. Тому, коли мова йде про застосування навчальних завдань, слід зважати на те, якою є функція виконання кожного з них в інтелектуальному розвитку студентів [213].

Слід зауважити, що в педагогічній науці розглядають два аспекти поняття «розв'язування задачі»: з одного боку треба навчити студента того, як розв'язувати задачу (за якими етапами, технологією, алгоритмами тощо); з іншого боку не менш важливо навчити студентів, як знайти метод, ідею розв'язування задачі.

Однак Д.Пойя зазначає, що абсолютно правильного методу для навчання здогадування немає, і тому не може бути ніякого абсолютно правильного методу для навчання того, як здогадуватися [161, с. 390]. Вчений пише, що значне наукове відкриття надає розв'язання якоїсь значної проблеми, але в будь-якій задачі є «зернинка» відкриття. Задача, яку розв'язує студент, може бути нескладною, але якщо її розв'язування викликає цікавість у студента і змушує його бути винахідливим і якщо студент розв'яже таку задачу самостійно, то зможе відчувати напруження розуму, що веде до відкриття, та одержати насолоду від радості перемоги.

В процесі конструювання системи навчально-дослідницьких завдань необхідно передбачати особливий зміст діяльності студентів, спрямований на оволодіння прийомами наукових методів пізнання. У змісті і результатах розв'язування навчально-дослідницьких завдань мають розкриватися головні змістові лінії навчального предмету.

В процесі конструювання дидактичної системи навчально-дослідницьких задач мають передбачатися і враховуватися рівні пізнавальної самостійності студентів (задачі розв'язуються під керівництвом викладача і самостійно).

В процесі створення дидактичної системи задач мають бути передбачені всі

можливі підходи до організації навчально-дослідницької діяльності (від простого запитання до складної навчально-дослідницької задачі), поступовий перехід від репродуктивного навчання до продуктивного.

Якісними показниками результатів застосування у навчальному процесі дидактичної системи навчально-дослідницьких задач є високий рівень навчально-дослідницьких умінь, досвід пошукової діяльності, формування і прояв творчих рис характеру студента.

Задачі необхідно розв'язувати в певній системі і відповідності до логіки розгортання навчального матеріалу, звертаючи максимальну увагу на загальні і фундаментальні закономірності і факти [101].

Розв'язування задачі – це активний пізнавальний процес, велику роль в якому відіграють спостереження та експеримент. На основі спостережень і експериментів можна створити образи і уявлення, уточнити умову задачі, отримати дані, яких не вистачає, встановити залежність між величинами тощо. З цією самою метою використовують малюнки, креслення, графіки.

Для більш глибокого і повного засвоєння знань і формування та розвитку дослідницьких умінь великого значення набуває варіювання умов (або вимог) задачі [193, с.51]. Для формування і розвитку дослідницьких умінь необхідно виробити у студентів звичку ще раз повернутися до розв'язуваної задачі, поставити питання про пошук нового способу її розв'язування після зміни певних умов або введення нових умов.

За такого підходу розширюються творчі можливості студентів, у них з'являється можливість замість окремо взятої задачі розв'язувати цілий блок задач. Знання студентів стають більш міцними, оскільки вони не механічно завчені, а є продуктом власних досліджень і закріпилися в результаті творчої і дослідницької діяльності над поставленою проблемою.

Після того як студент навчився розв'язувати задачі певного типу, йому пропонується ряд додаткових завдань для самостійного розв'язування, які є варіаціями початкових задач. На наступному етапі студентам пропонується розглянути ряд питань, пов'язаних зі зміною тільки умов; або тільки вимог того,

що треба знайти; або як умов, так і вимог задач. Такий ряд задач і завдань можна значно розширити, використовуючи комп'ютерні програми. Таким чином, студенти проводять повне дослідження задачі, вчать конструювати нові моделі з новими (більш вигідними) умовами і виявляють відповідні закономірності в ході побудови нового розв'язування. В процесі такого дослідження використовуються сучасні комп'ютерні програми, що дає змогу скоротити час на подання навчального матеріалу і сформулювати у студентів повне уявлення про об'єкт дослідження, показавши його внутрішню структуру, відповідні закономірності, причинно-наслідкові зв'язки проявів відповідних явищ. Варіювання компонентів задач (як умов, так і шуканих результатів) залежно від предметного змісту навчального матеріалу сприяє розвитку у студентів дослідницьких умінь і пошуку єдиного правильного розв'язку в процесі самостійної пізнавальної та дослідницької діяльності.

На думку А.А.Вербицького [42], у задачі не може бути «креативного поля», оскільки розгляд будь-якої задачі з самого початку передбачає відомий спосіб її розв'язування, який просто необхідно актуалізувати (згадати) і застосувати. Якщо мова йде про варіацію умов або вимог задач, то це вже не задача, а свого роду проблеми, на розгляді яких тільки і можна формувати дослідницькі вміння.

Традиційно практичні завдання проводяться за простою схемою, за якою передбачається перевірка формальних знань студентів, постановка викладачем конкретних задач (як правило, репродуктивного рівня, адже розв'язування задач має сприяти засвоєнню основних теоретичних положень стосовно певної теми), одержання чітких відповідей на них. За правильне розв'язування задачі студент отримує позитивну оцінку. Таким чином, одержання позитивної оцінки студентом є моментом його повного задоволення, з одного боку, і «точкою замерзання» його творчих запитів – з іншого. Але ж нормальний неперервний процес пізнання передбачає природне, безпосереднє чи опосередковане породження аналізом однієї задачі інших, наступних задач. Коло питань, що виникають у дослідника, повинно розширюватися разом з розв'язуванням задач, в ідеалі в геометричній прогресії [104].

В такому разі дослідник постійно перебуває у стані пошуку. Без сумніву, на

вищу оцінку заслуговують результати діяльності студента, який зумів самостійно сформулювати, хоча б у загальному вигляді, наступні кроки на цьому етапі дослідження задачі. Це наводить на думку про те, що етап практичного заняття, пов'язаний з розв'язуванням однієї задачі, повинен закінчуватися не відповіддю, а постановкою наступних задач, що випливають з розв'язування даної. Разом з тим зовсім не обов'язково негайно розв'язувати ці «вторинні» задачі. Нічого негативного не буде в тому, що після заняття у студента буде більше запитань, ніж відповідей. Навпаки, через кожну сформульовану, але не розв'язану проблему породжується активна установка у свідомості (чи підсвідомості).

Як відомо, шляхи розв'язування задач, які довго не вдавалося знайти, можуть несподівано виявитись цілком прозорими і зрозумілими. Пуанкаре, наприклад, вважав, що миттєве прозріння, яке приходить до людини у процесі творчості, зовсім не є миттєвим. Насправді це результат тривалої неусвідомленої роботи, внаслідок якої свідомою робота стала лише більш плідною [165].

Різним задачам властивий різний «породжувальний» потенціал. Виникає потреба у розробці особливих класів задач із значним «породжувальним» потенціалом, розв'язування яких може породжувати розгалужену ієрархію вторинних задач. Такі задачі називають задачами з динамічною умовою [113], [167].

Ю.О.Ковальчук вважає: в задачах з динамічною умовою не повинні міститися дерева (чи, більш загально, мережі) підзадач у явному вигляді, як це є у так званих задачах з параметрами. Завдання постановки підзадач повинно покладатися на навчальну діяльність дослідницького характеру. В цьому, власне, й полягає реалізація ідеї надання студентам самостійності, духу дослідництва у навчальному процесі [104].

Стосовно структури процесу розв'язування задачі з динамічною умовою можна вказати на два таких моменти. Перший – це момент «розхитування» умови на одному понятійному рівні, тобто дослідження залежності результатів від простої зміни даних в усьому доступному діапазоні. Такий етап відповідає горизонтальному зрізу дерева підзадач. Другий – етап постановки задач нового ієрархічного рівня, коли для успішного розв'язування можуть знадобитися

залучення додаткових понять і фактів [81]. Цей етап є складнішим і може супроводжуватись допомогою студентам з боку викладача.

Джерелом задач з динамічною умовою можуть бути так звані некоректні задачі, а саме ті з них, некоректність яких полягає в необхідності уточнення умов. Застосування таких задач, розгляд яких має певний породжувальний потенціал, дає ще й корисний ефект виховання критичного, «з підозрою», ставлення студента до запропонованих йому завдань. Крім того, на основі завдань з не до кінця визначеною умовою краще моделюються реальні різноманітні завдання, які постають перед людиною в різних сферах діяльності. Наприклад, такими є практично всі завдання, які доводиться виконувати програмістові в процесі розробки алгоритмів розв'язування різноманітних задач і опису відповідних програм для комп'ютерів.

Розглянемо приклад. Студентам спеціальності «Математика» зі спеціалізацією «Інформатика» пропонувалась така задача: за допомогою генератора випадкових чисел отримано набір із 6 чисел. Яка ймовірність того, що ці числа впорядковані? Термін «генератор» був застосований уперше і ніяк не уточнювався. Деякі студенти за таких обставин уявили абстрактну комп'ютерну реалізацію генератора і самотійно (але без усвідомлення самотійності!) наділили цей генератор певними додатковими властивостями. Разом з тим окремі студенти звернулися за уточненням до викладача. Адже задача справляє враження цілком визначеної через наявність в умові конкретного числа 6. Спробуємо розгорнути цю задачу в дерево підзадач.

1. Як можна на практиці реалізувати генератор набору випадкових чисел?

1.1. Якщо розглядати комп'ютерну реалізацію генератора, то яким може бути алгоритм продукування набору випадкових чисел? З якої множини можуть вибиратись числа?

1.1.1. Чому випадкові числа, одержані за допомогою комп'ютера, називають псевдовипадковими? У чому полягають недоліки і переваги такого способу генерації скінченного набору випадкових чисел?

1.2. В якості альтернативних генераторів можна розглянути, наприклад, генератори, запропоновані в [44]. Потрібно вибрати для одержання випадкової

десятькової цифри кращий з таких способів:

1.2.1. Вибрати навмання номер з телефонного довідника, потім взяти молодшу цифру цього номера.

1.2.2. Кинути правильний ікосаедр з нанесеними на його грані цифрами (по дві грані на кожен цифру).

1.2.3. Попросити свого приятеля назвати цифру.

1.2.4. Нехай те саме зробить перша зустрічна незнайома людина.

1.2.5. Нехай у змаганнях беруть участь 10 абсолютно невідомих вам спортсменів. Надавши їм номери довільно, виберіть номер спортсмена, який виявився переможцем.

У запропонованих вище моделях мова йде про одержання тільки одного числа. В разі переходу до розгляду кількох чисел неминує виникати питання про припустимість розгляду схем з поверненням і без повернення.

1.3. Можна спробувати розглядати абстрактні генератори, наприклад, кидання точки на числову пряму. За такого розгляду можна найшвидше досягнути розуміння того, які принципові обмеження повинні накладатися на абстрактну модель генератора, а отже, і на будь-яку конкретну його реалізацію.

2. Що слід розуміти під терміном «скінченний набір випадкових чисел»? Чи повинен на множині розглядуваних чисел розподіл імовірностей бути рівномірним?

2.1. Як можна перевірити, що в одержаному за допомогою генератора наборі випадкових чисел містяться елементи множини чисел, на якій має місце потрібний розподіл ймовірностей (наприклад, нормальний)?

2.2. Чи впливає розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини, що використовується для одержання набору випадкових чисел, на відповідь поставленої задачі? Адже йдеться тільки про впорядкованість набору чисел. Навести приклади для ілюстрації відповіді на це запитання.

3. Потрібно уточнити саме поняття впорядкованості набору чисел (наприклад, за зростанням, за спаданням).

4. Чи можна, не втрачаючи загальності, розглядати замість шести чисел, наприклад, три?

4.1. Як може впливати співвідношення кількості елементів у множині значень базової випадкової величини і кількості елементів у розглядуваному наборі чисел на відповідь на поставлену задачу?

Таким чином, навіть таку, на перший погляд просту, задачу можна перетворити на проблему, повне дослідження якої могло б стати змістом якісної курсової роботи студента. Слід зауважити, що наведене дерево задач є насправді частиною мережі, яку ефективно можна дослідити тільки тоді, коли багаторазово повертатись до вузлів дерева, адже одне і те саме запитання може виникати, наприклад, в разі використання різних варіантів реалізації генератора випадкових чисел. Це стосується хоча б питання про вплив характеристик множини значень базової випадкової величини на відповідь на поставлену задачу.

Слід зауважити, що в процесі розв'язування цієї задачі можна спробувати зайнятись і конструктивною теоретичною діяльністю. Наприклад, можна дослідити клас інваріантних щодо відповіді розподілів імовірностей на множині значень базової випадкової величини, ввівши необхідні означення, сформулювавши на основі досліджень певні твердження і спробувавши ці твердження обґрунтувати.

Очевидно, що детальне дослідження подібних проблем вимагає часу. Тому таким важливим є висновок про те, що далеко не кожна задача повинна розв'язуватись безпосередньо в аудиторії, і кількість всіх постановок задач може значно перевищувати кількість задач, на які необхідно дати вичерпну відповідь. Хід розв'язування якихось задач може бути тільки частково окресленим, інші задачі можуть бути «відкладеними», тобто визнаними як цікаві і варті подальшого осмислення і розгляду. За умови дійсного зацікавлення розв'язування таких задач приводить до певних, нехай і зовні непомітних, змін у свідомості і знаннях студента.

Слід зауважити, що розв'язування задач з динамічною умовою сприяє формуванню такого підходу до розв'язування задач, коли розв'язування будь-якої задачі, якою б однозначною вона не була, може стимулювати дослідницьку роботу студента. За такого творчого підходу будь-яка задача може вважатися задачею з динамічною умовою.

Велике значення для систематизації знань має цілеспрямована система задач, в процесі розв'язування яких передбачається осмислення, засвоєння понять, операцій, дій, залежностей у процесі формування відповідних прийомів мислення.

Розробляючи систему задач, варто визначити основні розумові, дослідницькі вміння, які можуть і повинні бути сформовані у студентів у процесі розв'язування таких задач; з'ясувати основні прийоми і методи формування відповідних умінь і навичок користувача комп'ютерної техніки під час розв'язування задач; визначити параметри системи завдань, на основі виконання яких можна контролювати ступінь навченості та інтелектуального розвитку студентів на кожному етапі навчання. Питання впливу розв'язування розв'язування системи задач і виконання доцільно дібраних завдань на розвиток мислення, здібностей, умінь у процесі навчання розкриваються в працях Л.В.Грамбовської [53], Т.Г.Крамаренко [112]–[113], Н.В.Морзе [141], І.В.Роберт [173], С.Л.Рубінштейна [177], Н.Ф.Тализіної [190], Ю.В.Триуса [195] та інших дослідників.

Слід підкреслити, що для того, щоб система задач була ефективною, необхідно дотримуватись певних загальнометодичних вимог та дидактичних принципів навчання: науковості, диференційовної реалізованості, реалізації провідних функцій розв'язування задач у навчанні, методичної доцільності поєднання теоретичних та практичних аспектів змісту навчального предмету в системі завдань; систематичності, зв'язку навчання з життям, доступності, усвідомленості навчальної діяльності.

Враховуючи типології навчально-творчих задач, розглянуті в працях В.А.Андрєєва [7], [93], В.А.Крутецького [45], В.О.Моляко [85], С.А.Ракова [167], С.О.Сисоєвої [185], можна виокремити типи задач, які доцільно використовувати для розвитку навчально-дослідницьких умінь у процесі навчання математичної інформатики.

Типи навчальних задач, розв'язування яких розвиває навчально-дослідницькі вміння студентів фізико-математичних спеціальностей, можуть бути такі:

- задачі на дослідження моделі-функції, розв'язування яких сприяє формуванню у студентів дослідницьких умінь висувати різні припущення, гіпотези,

генерувати ідеї та обґрунтовувати їх;

- задачі на опрацювання експериментальних даних, на прогнозування, на прогресивне або регресивне інтерполювання та екстраполювання;

- задачі на оптимізацію, на вибір оптимального розв'язку, які використовуються для знаходження різних варіантів розв'язків і вибору оптимального; для аналізу проведеної роботи і визначення засобів досягнення кінцевого результату;

- задачі з параметрами, які використовуються для формування вмінь аналізувати можливі розв'язки задачі, можливі значення параметрів, виявлення різноманітних варіантів умов задачі, її визначеності, можливих протиріч та ін.;

- задачі з відсутністю повних вихідних даних, використовувані для формування здатності знаходити потрібні відомості та переносити їх у нові ситуації;

- задачі, розв'язування яких сприяє оволодінню прийомами евристичної та дослідницької діяльності;

- задачі на доведення або пояснення, в процесі розв'язування яких формуються уміння будувати логічні твердження, здійснювати синтез знань, в окремому бачити загальне, в загальному особливе;

- дослідницькі задачі на застосування методів і принципів наукового пізнання: експериментувальні задачі, задачі на моделювання, задачі на формалізацію та застосування математичних методів.

Розглянемо особливості розв'язування зазначених типів задач студентами фізико-математичних спеціальностей у процесі навчання математичної інформатики.

2.3 Задачі з параметрами

Важливим класом задач, у процесі розв'язування яких відбувається розвиток інтелектуальних здібностей студентів, формуються та розвиваються їхні навчально-дослідницькі уміння та математична культура, є задачі з параметрами.

А.Ю.Карлащук зазначає, що дослідницький потенціал розв'язування задач з параметрами полягає в тому, що необхідно за різних значень параметрів дослідити можливі ситуації, в кожній з яких існує розв'язок задачі [98].

В процесі педагогічного експерименту серед труднощів розв'язування задач з параметрами студентами фізико-математичних спеціальностей були помічені такі:

- побудова графіків функцій, які є комбінацією кількох елементарних функцій, до виразів яких включено модулі тощо. Навіть якщо студенти вміють будувати такі графіки, їх побудова займає багато часу і є рутинним процесом, що заважає моментам творчості під час розв'язування задач;

- точність побудови графіків «вручну» може бути недостатньою для розв'язування задачі. До того ж естетичний вигляд такого графіка може бути непривабливим, що зменшує емоційне задоволення від їх побудови і знижує емоційний стан студента, його активність;

- графіками функцій можуть бути криві, невідомі студентам, і їх побудова, а тим більше точна, є проблематичною без використання спеціальних програмних засобів;

- для побудови множини розв'язків нерівності спочатку необхідно також будувати графіки, а потім ще й визначати область існування розв'язків нерівності, що теж не завжди є простим завданням, виконання якого займає багато часу;

- в процесі виконання перетворень складних математичних виразів студенти часто допускають «механічні» помилки.

Використання засобів комп'ютерних математичних пакетів сприяє уникненню таких труднощів і допомагає зробити розв'язування задачі більш простим і наочним за рахунок автоматизації обчислень, швидкого виконання символічних перетворень, знайти раціональний спосіб розв'язування, надає можливість експериментувати з різними значеннями параметра, проводити обчислювальний експеримент, перевіряти правильність висунутих гіпотез.

Розглянемо приклади використання педагогічного програмного засобу Gran1 для розв'язування задач на дослідження інтегралів, залежних від параметра. Залежно від виду задачі, параметри можуть входити до виразів підінтегральної функції або меж інтегрування.

Для обчислення визначеного інтеграла за допомогою Gran1 використовуємо послугу *Операції/Інтеграли/Інтеграл...* В результаті з'являється допоміжне вікно

«Інтегрування», у якому потрібно ввести значення «А» – лівої межі відрізка інтегрування і значення «В» – правої межі відрізка інтегрування. Як до підінтегрального виразу, так і до виразів меж інтегрування можуть входити якісь із параметрів P1, P2, ..., P9.

Після звернення до послуги і далі до пункту «Занести у відповіді» у вікні «Відповіді» з'являється вираз функції, для якої проводилося обчислення інтеграла, вказані межі інтегрування, а також знайдене значення I визначеного інтеграла.

Якщо перед цим у вікні «Графік» був побудований графік функції, інтеграл від якої обчислюється, то область, обмежена графіком функції, віссю Ox і прямими $x = a$ та $x = b$, заштриховується (рис. 2.3.1).

Приклад 2.3.1. Враховуючи геометричний зміст інтеграла, знайти значення параметра a , за якого виконується рівність: $\int_{-4}^a (2 - |x|) dx = 0$.

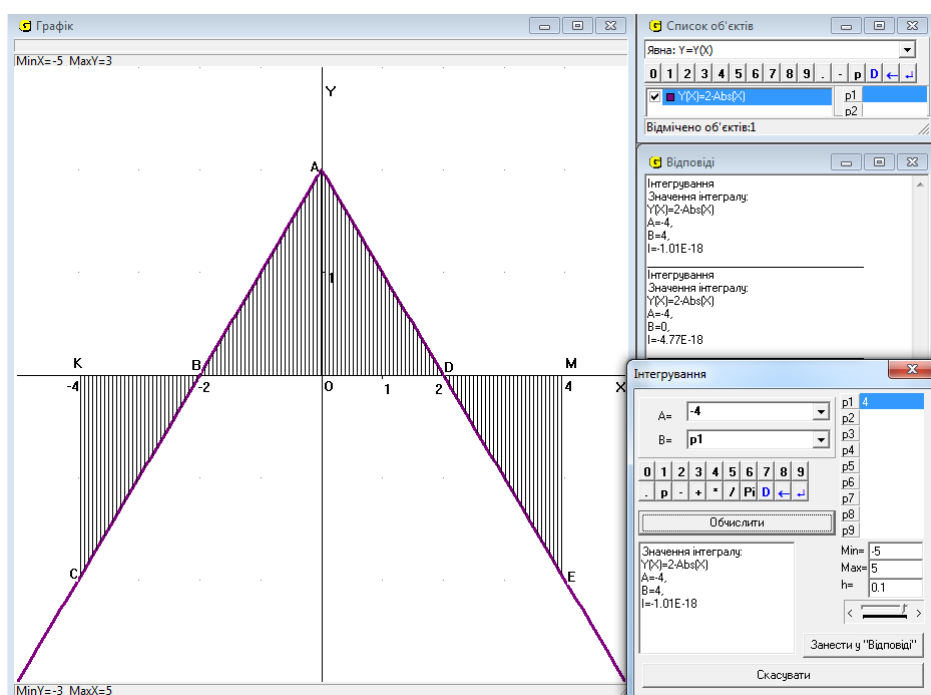


Рис. 2.3.1

Будуємо графік залежності $Y(x) = 2 - abs(x)$ (рис 2.3.1). Звертаємося до послуги *Операції/Інтеграл/Інтеграл...* та у вікні *Інтегрування* вводимо межі інтегрування $A = -4$, $B = p1$, де $p1$ – параметр, значення якого відповідає значенню a – верхньої межі інтегрування. Змінюючи значення параметра $p1$, знаходимо, що даний інтеграл рівний нулю, коли $p1 = 0$ або $p1 = 4$.

Справді, оскільки підінтегральна функція симетрична відносно осі Oy , то інтеграл дорівнює нулю, якщо рівні суми площ трикутників: 1) $S_{\Delta ABO} = S_{\Delta BCK}$. Це можливо за умови $OB = BK$, тобто коли $a=0$; 2) $S_{\Delta ABO} + S_{\Delta BCK} = S_{\Delta AOD} + S_{\Delta DME}$. Це можливо за умови $OB = BK = OD = DM$, тобто коли $a=4$.

Слід зауважити, що графічні прийоми бажано супроводжувати ще й доказовими аналітичними міркуваннями, оскільки графічні методи не завжди повною мірою можна вважати строгими.

Приклад 2.3.2. Враховуючи геометричний зміст інтеграла, знайти значення параметрів a та b , для яких виконується рівність: $\int_a^b (x+3)dx = 0$, ($b > a$).

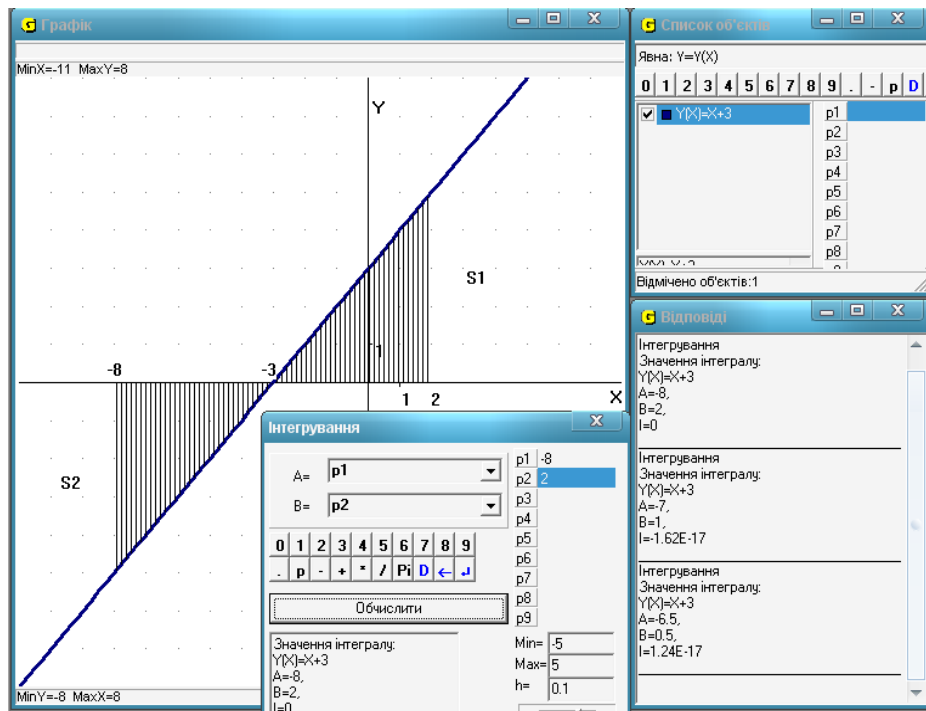


Рис. 2.3.2

Створюємо об'єкт та будуємо графік $Y(x) = x + 3$ (рис. 2.3.2). Звернувшись до послуги *Операції/Інтеграл/Інтеграл...*, відкриваємо вікно *Інтегрування*. Вводимо межі інтегрування $A=p1$, $B=p2$, де $p1$, $p2$ – параметри, відповідні межам інтегрування a та b відповідно, ($b > a$). Змінюючи значення параметрів встановлюємо, що даний інтеграл дорівнює нулю, кожного разу, коли $p1=p2$ або

$p_1 + p_2 = -6$. Дійсно, $\int_a^b (x+3)dx = \frac{x^2}{2} \Big|_a^b + 3x \Big|_a^b = \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} + 3a - 3b$. Отже, інтеграл

дорівнює нулю, якщо:

$$a^2 - b^2 + 6a - 6b = 0,$$

$$(a-b)(a+b) + 6(a-b) = 0,$$

$$(a-b)(a+b+6) = 0.$$

Звідси або $a=b$ або $a+b=-6$.

Отже, використання Gran1 для обчислення інтегралів, залежних від параметра, дозволяє зробити розв'язування простим і наочним, віднайти спосіб розв'язування задачі, надає можливість бачити геометричну інтерпретацію визначеного інтеграла і в той же час експериментувати з різними значеннями параметрів.

Вивчення фізичних процесів, економічних задач часто вимагає обчислення інтегралів, залежних від параметра, і обов'язковою частиною їх розв'язування є дослідження залежності характеру процесу від значень параметрів. З метою

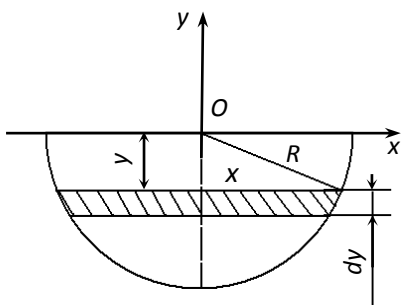


Рис. 2.3.3

реалізації міжпредметних зв'язків корисно розглянути задачі як моделі досліджуваних процесів.

Розглянемо задачу про обчислення тиску рідини на вертикальну пластину. Як відомо, тиск рідини на горизонтальну пластину, занурену в рідину, визначається за законом Паскаля: тиск P рідини на пластину дорівнює її площі S , помноженій на глибину занурення h , густину рідини ρ і на

прискорення вільного падіння g : $P = \rho g h S$.

Якщо в рідину занурити пластину не горизонтально, то її різні точки лежатимуть на різних глибинах і цією формулою користуватись не можна. Проте якщо розміри пластинки дуже малі, то всі її точки лежать майже на одній глибині, яку вважають за глибину занурення пластини. Це дає змогу знайти диференціал тиску на елементарну частину пластини, а потім визначити тиск на всю поверхню пластини.

Приклад 2.3.3. Знайти тиск рідини на вертикально повністю занурений в рідину на глибину радіуса півкруг, діаметр якого знаходиться на поверхні рідини.

Нехай елементарна частина площини півкруга знаходиться на глибині $-y$ (рис. 2.3.3). Вважаючи її прямокутником з основою $2x$ і висотою dy , знайдемо за законом Паскаля диференціал тиску:

$$dP = \rho \cdot g \cdot (-y) \cdot 2x dy. \quad \text{Оскільки } y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad \text{а } dy = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx, \quad \text{то}$$

$$dP = \rho \cdot g \cdot (-y) \cdot 2x dy = 2\rho g x^2 dx. \quad \text{Звідси } P = 2\rho g \int_0^R x^2 dx = \frac{2}{3} R^3 \rho g.$$

Незважаючи на те, що розрахунки в даній задачі досить прості, варто розглянути розв'язування за допомогою комп'ютерних математичних пакетів. Зокрема, розв'язування в середовищі Mathcad подане на рис. 2.3.4. Як бачимо, символічні розрахунки виконуються автоматично, але

Рис. 2.3.4

необхідно зауважити, що y визначається як функція змінної x , а тиск P – як функція змінної x і параметрів густини та прискорення. Тепер, надаючи конкретних значень параметрам, легко обчислити числове значення тиску.

Зауважимо, що будь-яка задача з параметрами може розглядатися як задача на дослідження функції як мінімум двох змінних: незалежного аргумента і параметра.

Теоретичне вивчення і математичне моделювання різноманітних процесів з різних наукових галузей і практичної діяльності людини часто приводять до досить складних рівнянь, нерівностей та їх систем з параметрами. Необхідною частиною розв'язування таких задач є дослідження характеру і кінцевого результату перебігу процесу залежно від значень параметрів. В.В.Мірошин зауважує, що часто

зустрічаються задачі, коли розв'язок залежить не від окремо взятого параметра, а від деякого їх комплексу [137]. В подібних випадках стає неможливим поділ початкової задачі з багатьма параметрами на сукупність задач з одним параметром. Такі задачі вимагають глибокого розуміння суті процесу, вільного володіння різними математичними методами і детального аналізу.

В процесі навчання застосування засобів комп'ютерних математичних пакетів до розв'язування диференціальних рівнянь та їх систем доцільно розглянути задачі на моделювання перебігу різних процесів та проявів явищ у природі та їх дослідження. Розглянемо приклад системи звичайних диференціальних рівнянь, за допомогою якої моделюється часова динаміка чисельності двох біологічних популяцій – хижаків та жертв (рівняння Вольтерра-Лотки).

Приклад. 2.3.4. Використовуючи засоби програми Mathcad, дослідити динаміку зростання популяцій хижаків і жертв.

Побудуємо модель взаємоіснування хижаків та їх здобичі (жертв), коли між особами одного виду немає конкуренції. Нехай Y_1 та Y_2 – число жертв і хижаків

відповідно. Припустимо, що відносний приріст жертв становить $\frac{Y_1'}{Y_1}$ і дорівнює

$a - bY_2$, ($a > 0, b > 0$), де a – швидкість розмноження жертв за відсутності хижаків, bY_2 – втрати через хижаків. Розвиток популяції хижаків залежить від кількості їжі,

тобто жертв, а за відсутності їжі ($Y_1 = 0$) відносна швидкість зміни популяції

хижаків дорівнює $\frac{Y_2'}{Y_2} = -d$, ($d > 0$). Наявність їжі компенсує спадання популяції

хижаків і якщо $Y_1 > 0$, то $\frac{Y_2'}{Y_2} = -d + cY_1$, ($c > 0$). Таким чином система рівнянь

Вольтерра-Лотки набуває вигляду:
$$\begin{cases} Y_1' = (a - bY_2)Y_1, \\ Y_2' = (-d + cY_1)Y_2 \end{cases}, \text{ де } a > 0, b > 0, c > 0, d > 0.$$

Для системи рівнянь, відповідної моделі Вольтерра-Лотки, не існує точних аналітичних розв'язків, тобто виразити $Y_1(t)$ і $Y_2(t)$ (де t – час спостереження за

розвитком популяцій) через відомі елементарні функції неможливо. Тому єдине, що залишається зробити в цій ситуації, – скористатися чисельними методами розв’язування.

Для розв’язування одержаної системи звичайних диференціальних рівнянь за допомогою програми Mathcad скористаємося функцією *rkfixed*. (рис. 2.3.5).

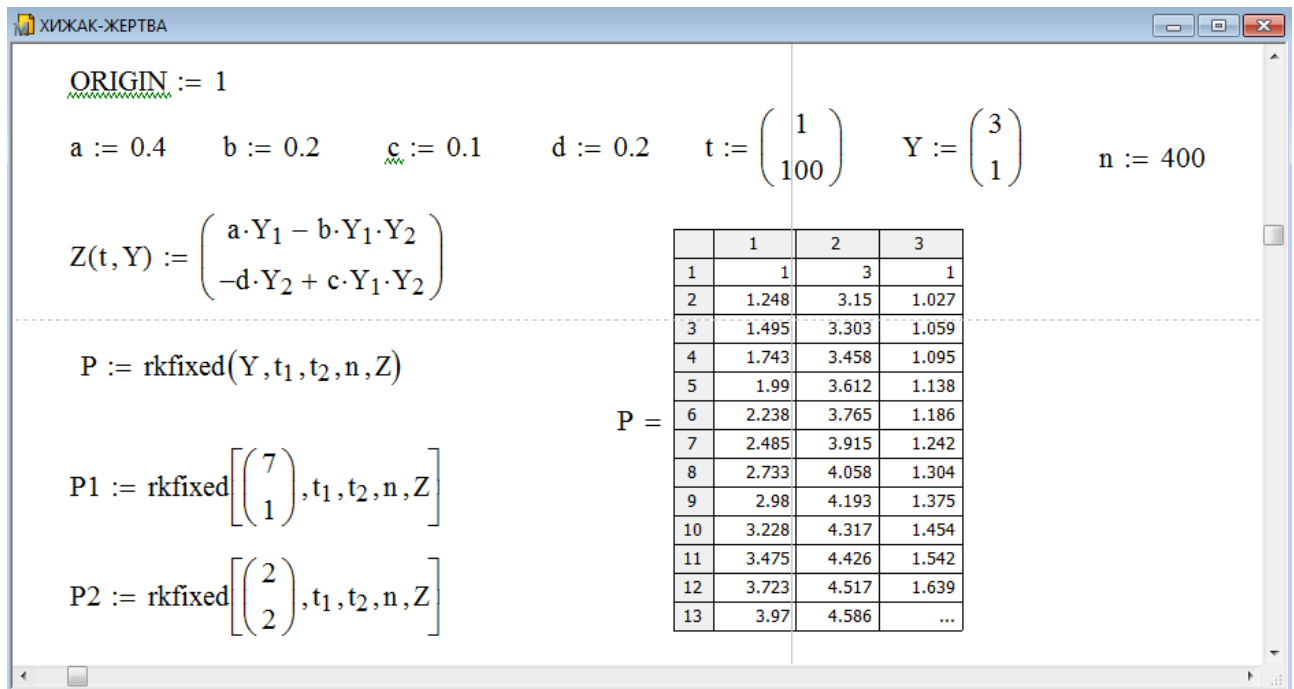


Рис. 2.3.5

Припустимо, що в початковий момент часу кількість хижаків і кількість жертв знаходились у відношенні 1:3, тобто $Y_1 = 3$, $Y_2 = 1$ (відносних одиниць). Задаємо вектор початкових значень $Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, а також параметри системи $a = 0.4$, $b = 0.2$, $c = 0.1$, $d = 0.2$. Інтервал часу t набуває значень від 1 до 100 (наприклад, років), а число точок, в яких буде знайдено розв’язок системи, $n = 400$. Знаходимо чисельний розв’язок P . Дослідимо вплив параметрів моделі на перебіг процесу. Загальноприйнятим є такий підхід: усі параметри моделі, крім одного, фіксуються, а незафіксованому параметру надають різних значень. Змінюючи початкові умови Y , одержимо відповідні розв’язки $P1$ та $P2$ (рис. 2.3.5).

На рис. 2.3.6 наведено графічне подання розв’язків P , $P1$, $P2$. В поданій системі спостерігається циклічне збільшення і зменшення кількості хижаків та жертв. На графіках бачимо результати розрахунку – залежність чисельності популяцій від

часу. Помічаємо, що коли збільшувати Y_1 , амплітуда кількості хижаків і жертв зростає, а також збільшується період коливань. Аналогічним чином можна запропонувати студентам змінити кількість хижаків Y_2 і спостерігати за процесом далі. Таким чином, можна дати відповіді на питання: за яких початкових умов амплітуди коливань чисельності хижаків і жертв набувають мінімумів, якими є ці мінімальні значення?

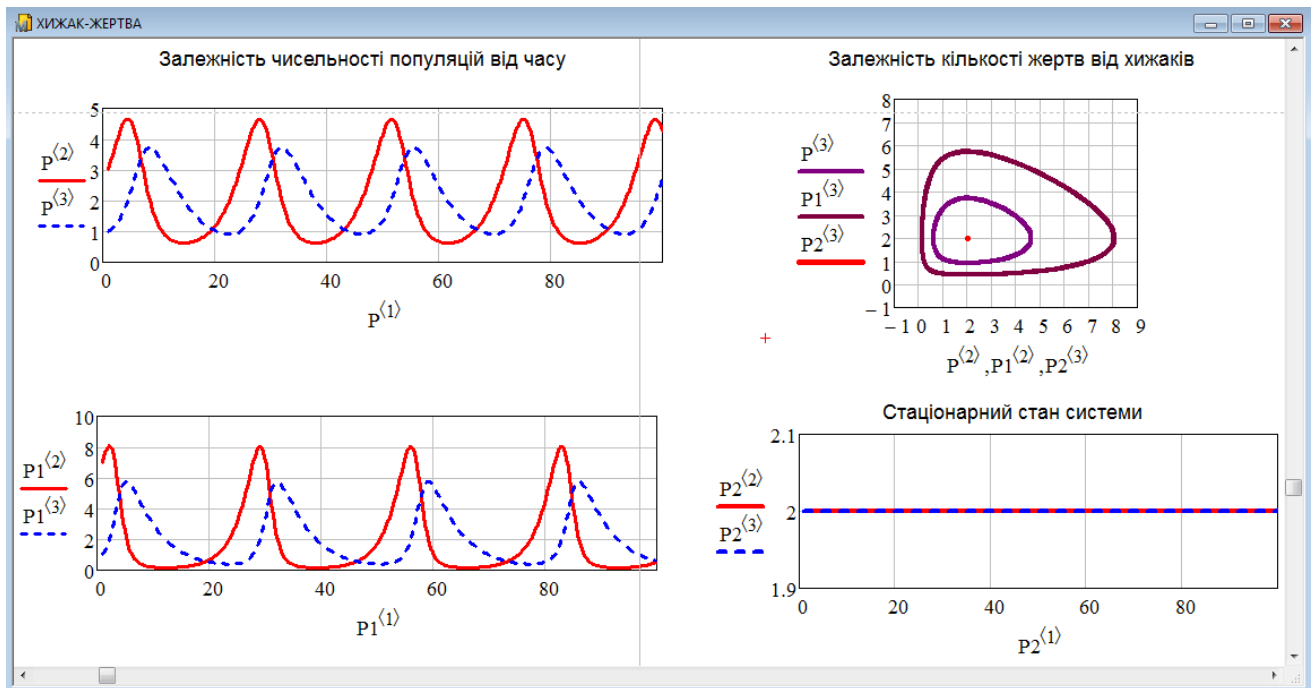


Рис. 2.3.6

На рис. 2.3.6 також зображена залежність кількості жертв від хижаків, яка є фазовим портретом досліджуваної системи у вигляді концентричних замкнутих кривих навколо однієї точки. Крайня точка зліва на цих кривих – точка, в якій число жертв досягає найменшого значення. Крайня права точка – пік зростання популяції жертв.

Схоже, що фазові криві оточують точку $(2;2)$. В термінах диференціальних рівнянь система має стаціонарний стан, коли $Y_1' = 0$, $Y_2' = 0$. Для стаціонарної точки зміна чисельності популяції дорівнює нулю. Тоді стаціонарна точка, навколо якої відбуваються коливання, визначається таким чином: $\bar{x} = \frac{d}{c}$, $\bar{y} = \frac{a}{b}$ (одержуємо з рівнянь Вольтерра–Лотки). Дійсно, для заданих параметрів $a = 0.4$, $b = 0.2$, $c = 0.1$, $d = 0.2$ маємо стаціонарну точку $\bar{x} = 2$, $\bar{y} = 2$.

Змінюючи параметри a, b, c, d для постійних початкових умов Y , студенти самостійно досліджують і аналізують стан системи. Для більш широкого дослідження описаного процесу студентам ставимо питання, запропоновані в [191, с.102]:

- з'ясуйте, чи утворюють послідовності максимумів функції $Y_1 = Y_1(t)$ і $Y_2 = Y_2(t)$ прогресії. Якщо так, то які: арифметичні чи геометричні?
- за яких умов дані коливання мають затухаючий характер?
- запропонуйте додаткові версії моделі, пов'язані з відловом жертв, або жертв і хижаків одночасно.

Відповіді на ці питання не обов'язково розглядати в процесі навчання математичної інформатики. Вони можуть бути досліджені в курсових роботах, стати темою доповіді на конференції або статті.

Моделлю Вольтерра-Лотки користуються і для з'ясування проблем, пов'язаних з кінетикою хімічних та ядерних реакцій.

Отже, ще один напрям дослідження – розглянути застосування моделі Вольтерра-Лотки для опису процесів і явищ, які пов'язані зі спеціалізацією студентів, тобто з фізикою, економікою тощо.

Таким чином, використання програмного забезпечення математичного призначення для розв'язування задач з параметрами, дозволяє: дати наочну графічну інтерпретацію перебігу процесів чи проявів явищ на основі використання інформаційних моделей для виявлення логічної структури понять і осмислення функціональних залежностей, дозволяє розширити коло розв'язуваних задач за рахунок автоматизації складних обчислень, сприяє свідомому засвоєнню навчального матеріалу, розвиває навчально-дослідницькі уміння.

Такий підхід потребує ґрунтовних знань з предметної галузі та знань про можливості використання засобів комп'ютерних математичних пакетів, а також умінь їх застосовувати до розв'язування задач. Для створення наочної графічної інтерпретації інформаційної чи математичної моделі важливого значення набуває розвиток графічних умінь студентів, які є необхідною складовою їх дослідницьких умінь.

2.4 Графічні дослідження за допомогою засобів комп'ютерних математичних пакетів

В науковому пізнанні та навчально-дослідницькій діяльності особливе місце займає графічне моделювання. В більшості сфер сучасної практичної діяльності людини значно зросла питома вага мисленневих операцій, пов'язаних зі сприйняттям різноманітних даних, поданих графічно, їх усвідомленням і мисленневим оперуванням. Графічні зображення набувають все більшого поширення і в процесі вивчення багатьох предметів фізико-математичного напрямку.

В навчальному процесі суттєво важливою є наочність, на основі якої поєднуються чуттєві та мисленневі сторони пізнання і яка є важливим засобом набуття знань. За допомогою інформаційно-комунікаційних технологій розширюється змістова сторона наочності навчання, стає можливим подавати відомості у формах, більш придатних для активного сприйняття, здійснюється вплив на емоційний стан людини, що сприяє активізації її навчально-пізнавальної та мисленневої діяльності.

В дослідженнях А.О.Вербицького [42], В.В.Давидова [57], З.І.Калмикової [96] та інших звертається увага на принципи когнітивності та евристичний потенціал застосування технологій візуалізації та графічного моделювання, на важливість використання наочності в процесі пізнавальної діяльності.

З.І.Калмикова називає вищою формою візуалізації навчального матеріалу різні форми діяльності з об'єктом вивчення, починаючи від його спостереження в різних ситуаціях і з різних сторін, до довільних маніпуляцій з об'єктом, а потім проведення планомірного віртуального експерименту [96].

Суттєво, що використання технологій візуалізації надає можливість [13]:

- 1) подавати навчальний матеріал більш доступно;
- 2) подати складні абстрактні об'єкти у вигляді наочних і зрозумілих образів, використовуючи динамічні схеми і анімаційні моделі;
- 3) матеріал, що лежить поза сферою інтересів студентів, зробити захоплюючим і цікавим, використовуючи відомості про яскраві факти реального

світу, комплексно впливаючи на емоційно-чуттєву сферу студентів.

Використання таких можливостей візуалізації навчального матеріалу позитивно відображається на мотиваційних механізмах навчально-пізнавальної діяльності студентів, підвищує рівень їхнього пізнавального інтересу, стимулює до самостійного пошуку знань.

Наукові основи формування графічних знань і умінь, цілі, зміст і методи навчання графічної діяльності розглянуті в роботах М.І.Бурди [40], Д.Б.Ельконіна [212], Н.І.Кальницької [97], Н.Г.Салміної [180], Н.О.Усової [198], І.С.Якиманської [213] та ін.

Принципи навчання графічного моделювання та графічного аналізу даних за допомогою засобів ІКТ досліджували М.І.Жалдак [69]–[80], Ю.В.Горошко [73], [52], Є.Ф.Вінниченко [73], [43], Т.Г.Крамаренко [112], [113], С.А.Раков [166], [167], Ю.В.Триус [195] та ін. Використання графічних моделей передбачає ознайомлення з принципами їх класифікації, способами побудови, використання, перекодування, для чого необхідні не тільки спеціальний добір засобів створення знаково-символьних елементів, але і розробка особливих типів задач, під час розв'язування яких формуються і розвиваються графічні уміння.

Створенню оригінальних прийомів комп'ютерного моделювання і візуалізації навчального матеріалу за допомогою комп'ютерних математичних пакетів присвячені роботи Т.П.Кобильника [102], [103], Л.І.Розакової [174], І.О.Теплицького [191], С.А.Хазіної [204], С.В.Шокалюк [88] та інших.

В роботах, які присвячені проблемам формування та розвитку графічних умінь, відзначається наявність особливої графічної мови і вказується на необхідність спеціального її вивчення.

Опанування мови графічних побудов передбачає оволодіння: 1) різними графічними засобами, за допомогою яких зручно передавати той чи інший зміст; 2) основними семіотичними закономірностями, дотримання яких дає змогу вільно оперувати в межах довільної знакової системи, а також переходити від однієї системи до іншої; 3) методами передавання повідомлень у графічній формі [180, с. 249].

Візуально подані повідомлення – це графічні побудови, які можна розглядати як тексти, принципи кодування яких і є предметом вивчення на різних етапах навчання [180, с. 249].

Графічні засоби подання даних застосовуються в різних галузях візуальних комунікацій для того, щоб викликати певні процеси мислення, які спираються на відповідні образи. Креслення, графік, рисунок є засобами, за допомогою яких повідомлення подаються у вигляді графічних зображень.

Візуалізація суттєвих властивостей і зв'язків предмета, процесу, явища здійснюється в схемі, в якій подають найбільш суттєві ознаки предметів, явищ. В схемі використовують систему просторово-графічних засобів, систематизованих за певними законами.

Для візуалізації кількісних відношень, тенденцій розвитку об'єкта тощо адекватним засобом відображення є діаграма. Графічні засоби, що використовуються для її побудови, – це лінії різної висоти, набір геометричних фігур різної площі, за допомогою яких виражаються числові співвідношення величин. У цьому випадку є важливим взаємне розташування і розміри різноманітних носіїв даних (секторів, кубиків та ін. фігур), за допомогою яких виражають деяку статистичну ознаку.

Для візуалізації функціональних залежностей між об'єктами і явищами, кількісних і якісних залежностей адекватним засобом є графік. Для його побудови використовується система координат, на осях якої відкладають значення досліджуваних величин. Залежність між ними виражається за допомогою ліній, з яких складається графічний текст.

Сучасну науку неможливо уявити без застосування графіків. Вони стали засобом наукового узагальнення.

Графічні методи аналізу перебігу різноманітних процесів і прояву явищ є формою подання даних, ефективною для їх сприйняття. За допомогою графіка можна миттєво охарактеризувати і осмислити сукупність різноманітних показників, виявити найбільш типові співвідношення і зв'язки цих показників, визначити тенденції розвитку, оцінити в графічному зображенні розміщення

об'єктів. Графіки є відображенням взаємозв'язків, показників і співвідношень та мають велике ілюстративне значення.

За допомогою графіків можна побачити тенденції змін явищ у часі і просторі; на основі абстрактного мислення наперед визначити стан і перебіг того, що відбувається.

Знання правил і засобів візуалізації даних, вміння реалізувати їх у навчальній та професійній діяльності важливі в умовах зростаючого змістового навантаження, впровадження комп'ютерних технологій у найрізноманітніші галузі людської діяльності, зокрема і в навчально-пізнавальну. Здатність візуалізувати різноманітні явища стає невід'ємною частиною загальної культури фахівця [97].

Здатність візуалізувати різноманітні об'єкти і явища означає:

- знання способів графічного подання даних та його переваги;
- знання правил побудови графічних моделей об'єктів, процесів та явищ;
- вміння застосовувати графічні моделі для подання даних, які використовуються в різних галузях людської діяльності;
- вміння створювати нові просторові образи на основі наявного досвіду; володіння засобами комп'ютерної графіки для вираження ідеї, замислу, гіпотези, власного технічного розв'язання, результатів експериментально-дослідницьких робіт у вигляді графічних образів.

До сукупності засобів створення графічних зображень в системах комп'ютерної математики включено потужний інструментарій, що може широко застосовуватися в процесі графічного моделювання, візуалізації даних та розв'язування навчально-дослідницьких задач.

До системи умінь використовувати засоби комп'ютерних математичних пакетів для графічних побудов відносяться:

1. Уміння будувати графік функції, що задана в різних системах координат *на площині*: прямокутна система координат (явно, неявно, параметрично задана функція); полярні координати;
- у просторі*: прямокутна система координат (явно, неявно, параметрично задана функція); циліндричні координати; сферичні координати.

2. Уміння налаштувати властивості графічного зображення: визначати властивості лінії (тип, колір, товщина); визначати властивості системи координат (лінії сітки, шкала на осі, масштаб, написи).

3. Уміння створювати композиції графічних побудов: кілька графіків в одній системі координат на площині; взаємне розміщення фігур у просторі; уміння виконувати перетворення системи координат (поворот, паралельне перенесення).

4. Уміння будувати спеціальні графічні об'єкти: побудова точки або заданої множини точок; зображення геометричного місця точок; побудова відрізка, вектора та інших фігур, за допомогою спеціальних засобів в СКМ; побудова ліній рівня (контурних ліній, градієнтне забарвлення); побудова гістограм; побудова векторного поля.

5. Уміння створювати динамічне зображення (анімація графіка).

Засоби створення графічних об'єктів, передбачені, наприклад, в програмі *Maxima*, можуть успішно використовуватися в процесі розв'язування задач на виконання повного дослідження функції та побудови її графіка і дотичних ліній; знаходження многочленів Тейлора та створення графічної демонстрації розкладу функції в ряд залежно від степеня многочлена [29]; обчислення найбільшого та найменшого значень функції, ілюстрація отриманих результатів на рисунках з лініями рівня; дослідження функції, що задана таблично; геометричні задачі з параметрами та ін. У системі *Maxima* є достатнє число геометричних форм, щоб створювати довільні графічні композиції.

Слід зазначити, що вміння студента розв'язувати будь-яку графічну задачу ґрунтується на знаннях теоретичного матеріалу. Формування культури графічного подання досліджуваних об'єктів у студентів фізико-математичних спеціальностей невіддільне від розвитку їхньої геометричної і загальної математичної культури. Воно повинно здійснюватися у вищому навчальному закладі як цілісний процес становлення і розвитку образного (просторового, синтетичного) і абстрактно-логічного (аналітичного) мислення засобами різних навчальних предметів [198]. Інтегруючу роль поза сумнівами тут може відігравати навчання математичної інформатики.

Розглянемо деякі графічні побудови в середовищі програми Maxima.

Приклад 2.4.1. Задано дві точки $M_1(3, -1, 2)$ і $M_2(4, -2, -1)$. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M_1 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_2}$. Побудувати площину, вектор, позначити точки.

Розв'язування

Загальне рівняння площини, що проходить через точку M_1 , має вигляд:

$$A(x-3) + B(y+1) + C(z-2) = 0.$$

Координати вектора нормалі цієї площини набувають значень $\overline{M_1M_2} = (4-3; -2+1; -1-2) = (1; -1; -3)$. Підставивши координати вектора $\overline{M_1M_2}$ замість коефіцієнтів A, B, C у загальне рівняння площини, одержимо $x - y - 3z + 2 = 0$.

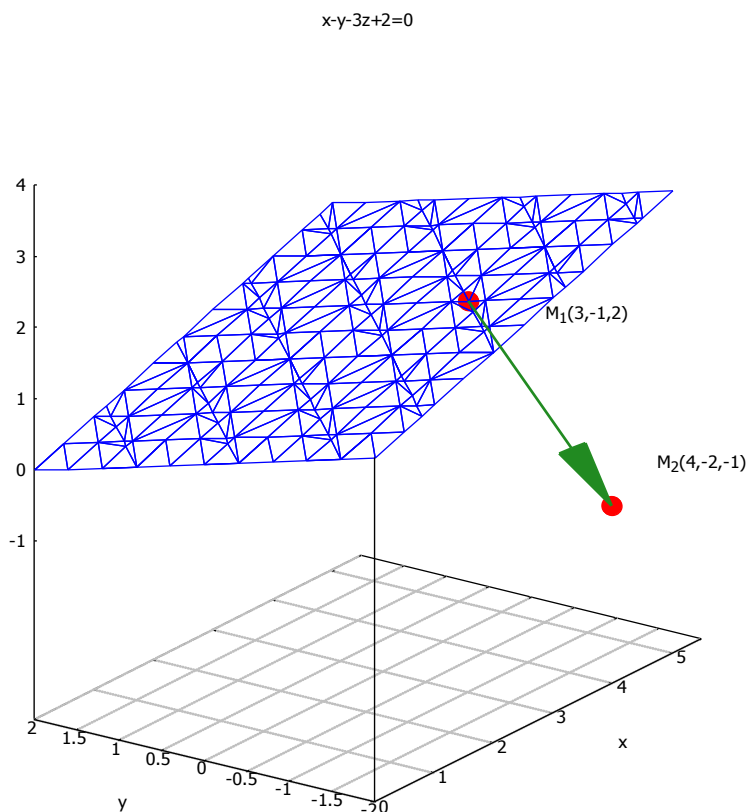


Рис.2.4.1

Скористаємося послугами програми Maxima:

```
M: points([[3, -1, 2], [4, -2, -1]]);
plan: implicit(x-y-3*z+2=0, x, 0, 5, y, -2, 2, z, -1, 4);
normal: vector([3, -1, 2], [1, -1, -3]);
```



```

text: label(["M_{1}(3,-1,2)", 5, -1, 1],
           ["M_{2}(4,-2,-1)", 5.5, -2, -1]);
draw3d(proportional_axes=xyz,
       title="x-y-3z+2=0",
       xlabel="x", ylabel="y", grid=true,
       color=red, point_size=2, point_type=7, M,
       color=black, text,
       color=blue, plan,
       color=forest_green,
       head_angle=10, head_length=0.7,
       line_width=2, normal)$

```

Одержимо зображення, подане на рис. 2.4.1:

Вивчаючи засоби створення графічних побудов, важливо розвивати уміння студентів виражати один і той самий зміст різними способами.

Приклад 2.4.2. Використовуючи послуги програми Maxima, побудувати поверхню $z = \frac{5}{(y-5)^2 + x^2 + 1} + \frac{9}{y^2 + x^2 + 1}$. Зобразити лінії рівня $z(x, y) = c$, де $c=1,2,\dots,9$, встановити градієнтне забарвлення поверхні.

Розв'язування

```
load(draw)$ /* завантажуюмо графічний пакет
```

Надамо змінній f значення виразу функції:

```
f: 5/((y-5)^2+x^2+1)+9/(y^2+x^2+1)$
```

Створюємо графічний об'єкт явно заданої функції:

```
g: explicit(f, x, -4, 4, y, -4, 8)$
```

Описуємо графічну процедуру:

```

draw3d(surface_hide=true, /*невидима частина поверхні прихована
      xu_grid=50, yv_grid=50, /*збільшуємо густину сітки
      xlabel="x", ylabel="y", /*підписи осей
      grid=true, /*координатна сітка площини xOy
      color=green, /*колір поверхні
      g)$ /* графічний об'єкт поверхні

```

В результаті одержимо зображення, подане на рис. 2.4.2.

За замовчуванням (коли `enhanced3d=false`) поверхня зображується у вигляді сітки, колір якої визначається за опцією `color`. Для забарвлення поверхні

встановлюємо опцію `enhanced3d=true`. Колір забарвлення поверхні задається через опцію `palette`. За замовчуванням `palette=color` і забарвлення відбувається в градації кольорів спектру. Якщо записати `palette=[blue, red, yellow]`, то колір поверхні буде утворюватися змішуванням відтінків синього, червоного, жовтого. Також зобразимо на графіку і в проекції на площину xOy лінії рівня.

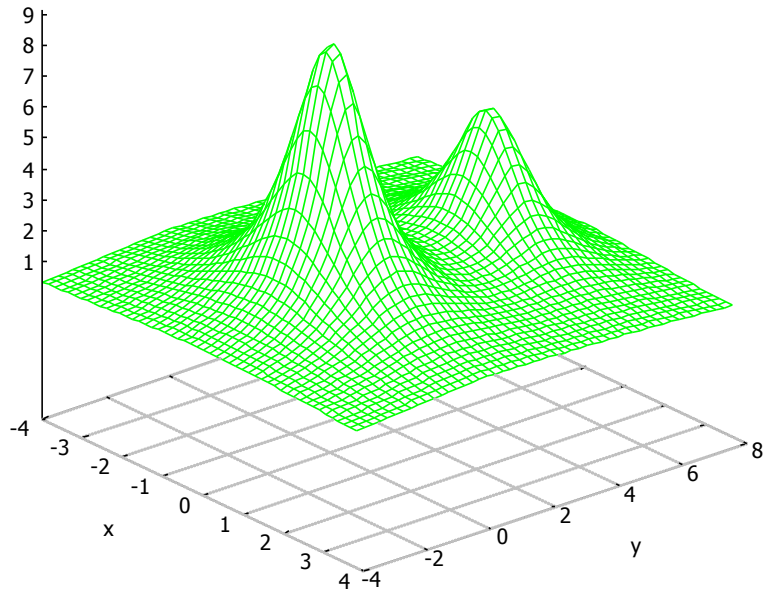


Рис.2.4.2

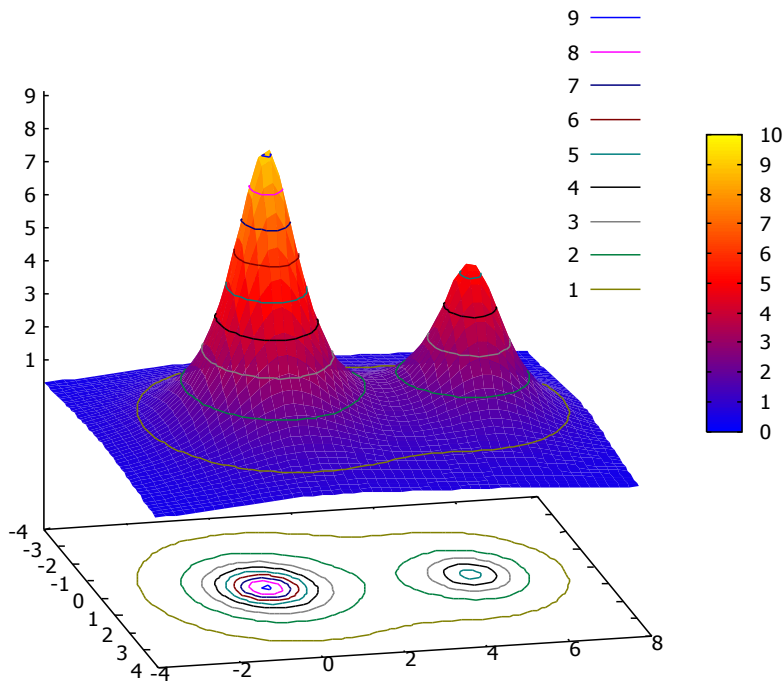


Рис.2.4.3

Записуємо програмний код у вигляді:

```
draw3d(surface_hide=true,xu_grid=50,yv_grid=50,
        enhanced3d=true,palette=[blue,red,yellow],
        contour_levels=[1,1,9],contour=both,g)$
```

В результаті одержимо зображення, подане на рис 2.4.3.

Дану поверхню можна оглядати зверху та збоку. Для цього скористаємося опцією `view[ϕ , ψ]` програми Maxima:

```
s1:gr3d(axis_3d=false,zticks=false,
        proportional_axes=xyz, ylabel="y",
        xu_grid=50,yv_grid=50,
        enhanced3d=true,
        view=[0,90],g) $
s2: gr3d(axis_3d=false,xticks=false,
        proportional_axes=xyz,
        xu_grid=50,yv_grid=50,
        enhanced3d=true,
        view=[90,90],g)$
wxdraw(s1,s2,columns=2,dimensions=[1000,800]);
```

В результаті одержимо зображення, подані на на рис. 2.4.4.

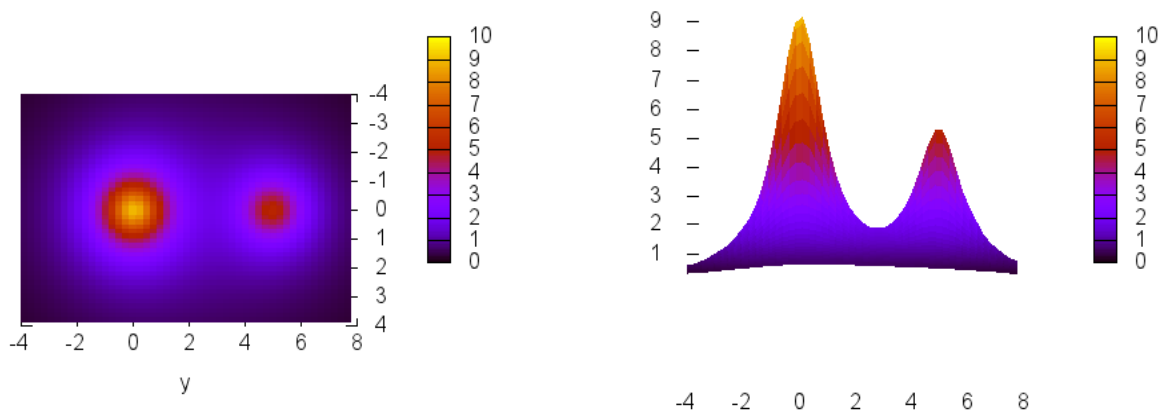


Рис. 2.4.4

Розв'язування прикладу 2.4.2 допомагає сформувати у студентів такі графічні уміння, які необхідні для розв'язування дослідницьких задач прикладного характеру. Наприклад, подібний графік буде у функції, за якою визначається фізична величина освітленості поверхні. Тоді студентам можна запропонувати розв'язати наступну задачу.

Задача. Визначити місце розміщення світильників на стелі для найкращого освітлення кімнати. Загальна потужність ламп повинна не перевищувати 300 Вт. Як необхідно розмістити лампи, щоб у найтемнішій частині кімнати було якомога світліше? Дослідити освітленість в разі використання замість однієї лампи потужністю 300 Вт двох ламп потужністю 150 Вт кожна, трьох ламп потужністю 100 Вт кожна тощо. Розміри кімнати обрати самостійно.

Для розвитку графічних умінь важливими є уміння подавати різноманітні відомості графічно та уміння читати і записувати графічно подані дані. Розв'язування задач на створення графічного зображення за поданим малюнком сприятиме формуванню таких умінь. Прикладом є задача на знаходження функції, графік якої в циліндричній системі координат має вигляд, як на рис. 2.4.5.

Перед побудовою графіків у циліндричній та сферичній системі координат студентам потрібно дати пояснення для актуалізації знань з цієї теми.

Циліндрична система координат є розширенням полярної системи координат шляхом додавання третьої координати (як правило z), за допомогою якої задають висоту точки над площиною.

Координатами точки $P(r, \varphi, z)$ в циліндричній системі координат є: r – радіальна відстань від осі Oz до точки P ; азимут φ – кут між напрямом відліку на вибраній площині та променем, що проходить з початку координат до проекції P на площині; висота z дорівнює відстані від обраної площини до точки P .

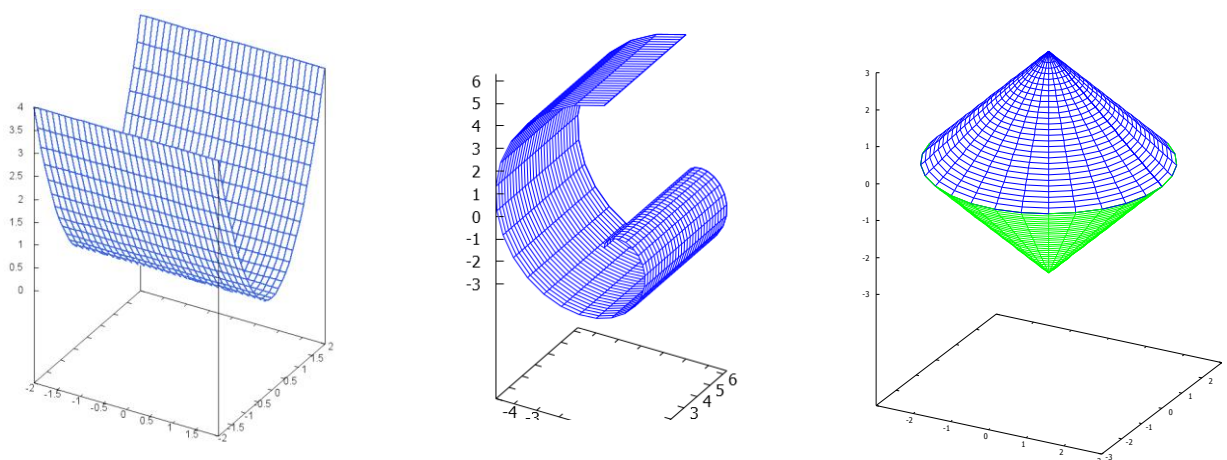


Рис. 2.4.5

Циліндричні координати зручно використовувати під час аналізу поверхонь, симетричних відносно якої-небудь осі, наприклад, якщо вісь z взяти як вісь симетрії, то опис кругового циліндра з висотою c в прямокутних декартових координатах матиме вигляд $x^2 + y^2 = c^2$, а в циліндричних координатах $r(\varphi, z) = c$, де $c = \text{const}$ – радіус основи циліндра.

Приклад 2.4.3. Використовуючи послуги програми Maxima, побудувати конічну поверхню в циліндричній системі координат, задану рівнянням $r(\varphi, z) = z$. Червоним кольором зобразити твірну лінію конічної поверхні.

Розв'язування.

Звернемось до послуг програми Maxima:

```
draw3d(nticks=200, surface_hide=true,
       proportional_axes=xyz,
       cylindrical(z, z, -2, 2, p, 0, 2*%pi), /*конічна поверхня
       color=red, line_width=3, /*колір та ширина твірної
       parametric(t, 0, t, t, -2, 2)); /*твірна лінія (параметричне р.)
```

В результаті одержуємо зображення, подане на рис. 2.4.6.

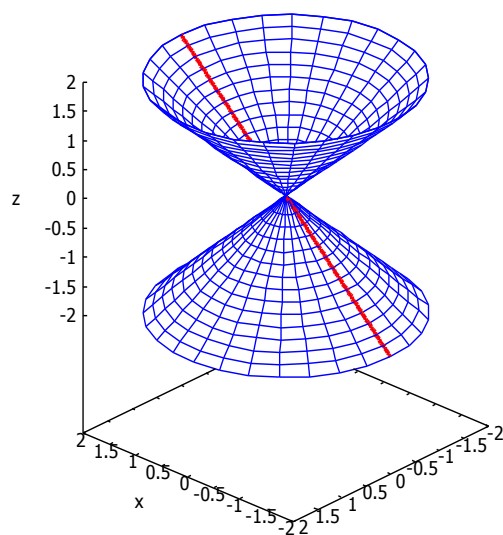


Рис. 2.4.6

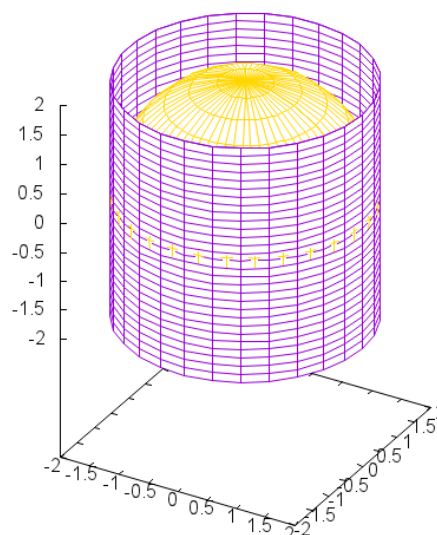


Рис. 2.4.7

Сферичною називають систему координат для відображення геометричних властивостей фігури в трьох вимірах за допомогою задання трьох координат (r, θ, φ) , де $r \geq 0$ – відстань від початку координат до заданої точки M ;

$0 \leq \theta \leq 180^\circ$ – зеніт, кут між віссю z і відрізком, яким з'єднується початок системи координат і точка M ; $0 \leq \varphi \leq 360^\circ$ – азимут, кут між віссю x і проекцією відрізка, яким з'єднується початок координат з точкою M , на площину xOy .

Рівняння сфери матиме вигляд $r(\theta, \varphi) = c$, $c = \text{const}$ – радіус сфери.

Приклад 2.4.4. Скориставшись послугами програми Maxima, побудувати графік функції в циліндричній і сферичній системах координат так, щоб сформувані сферу, вписану в циліндр.

Розв'язування.

Звернемось до послуг програми Maxima:

```
sfera: spherical(2, phi, 0, 2*%pi, theta, 0, 2*%pi);
cilindr: cylindrical(2, z, -2, 2, phi, 0, 2*%pi);
wxdraw3d(nticks=200, surface_hide=true,
         proportional_axes=xyz, dimensions=[500, 500],
         color=gold, sfera,
         color=dark_violet, cilindr);
```

В результаті одержуємо зображення, подане на рис. 2.4.7.

Інші приклади розв'язування задач та задачі для самостійного розв'язування на створення графічних зображень за допомогою програми Maxima подані в Додатку В.

Слід зазначити, що для створення графічних зображень за допомогою таких систем комп'ютерної математики як Maple, Maxima, Mathematica необхідно добре знати синтаксис запису вбудованих графічних процедур і володіти знаннями про можливості налаштування численних опцій. Щоб полегшити студентам роботу з описом функцій і звільнити більше часу на аналіз умови задачі, доцільно запропонувати довідкові опорні таблиці з описом вбудованих процедур (див. Додаток Є) або дати завдання створити самостійно подібні таблиці.

Для роботи з графічними об'єктами в пакеті Mathcad не потрібно знати спеціальні процедури. Побудова графіків та налаштування їх властивостей в цій програмі виконується за допомогою графічного інтерфейсу, спеціальних послуг меню, кнопок на панелі інструментів. Це значно спрощує роботу з графічним

супроводом розв'язування задач. Але слід мати на увазі, що можливості використання Mathcad для побудови графіків дещо скромніші, порівняно з програмами Maple чи Maxima. Наприклад, у Mathcad немає послуг для побудови неявно заданої функції, фігур, наприклад, у вигляді вектора, геометричного місця точок, що задане нерівністю, немає таких гнучких засобів, як у Maple чи Maxima, для створення анімації.

Цікавою для графічного аналізу і досліджень є програма Gran1, завдяки потужним обчислювальним засобам (разом з тим з простим інтерфейсом) та можливостям задавати значення кількох параметрів і створювати фіксовані зображення на одному графіку для різних значень цих параметрів.

Використання педагогічного програмного засобу Gran1 під час вивчення теми «Криві другого порядку на площині» в курсі аналітичної геометрії дає змогу провести детальне графічне дослідження загального рівняння кривої другого порядку.

Приклад 2.4.5. Виконати повне дослідження загального рівняння кривої другого порядку на площині:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (2.4.1)$$

де коефіцієнти a_{11} , a_{12} , a_{22} не дорівнюють нулю одночасно, $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$.

Для створення графіка кривої за допомогою ППЗ Gran1 у вікні «Список об'єктів» обираємо «Неявна $0 = G(X,Y)$ », звертаємось до послуг «Об'єкт/Створити» та у вікні «Введення виразу залежності» в рядок « $0 =$ » записуємо вираз, записаний в лівій частині даного рівняння: $P1 * X^2 + 2 * P2 * X * Y + P3 * Y^2 + 2 * P4 * X + 2 * P5 * Y + P6$, де параметри $P1, P2, \dots, P6$ відповідають коефіцієнтам $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$ відповідно. В рядках « $A=$ » і « $B=$ » вказуємо верхню і нижню межі відрізка, на якому змінюється змінна x , а у рядках « $Ay=$ » і « $Bu=$ » – межі відрізка, на якому змінюється змінна y . Звернувшись до послуги «Графік/Побудувати», отримаємо зображення графіка. Плавню змінюючи значення параметрів, можна прослідкувати за зміною графічних образів, що відповідні рівнянню (2.4.1), та помітити певні закономірності стосовно коефіцієнтів.

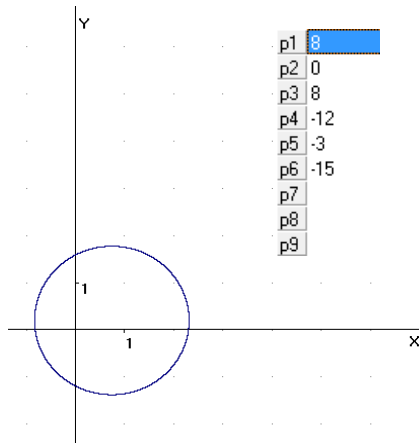


Рис. 2.4.8а.

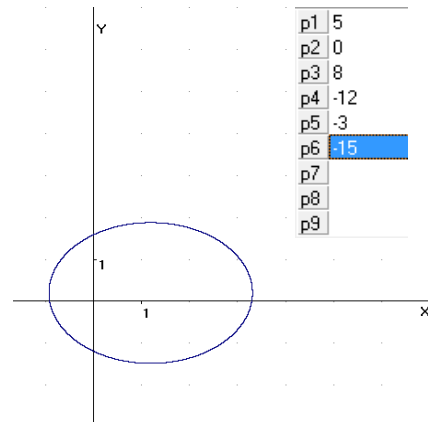


Рис. 2.4.8б.

Спочатку розглянемо неповне рівняння та визначимо всі можливі випадки. Якщо в рівнянні (2.4.1) або $a_{12} = 0$ (відсутній доданок з добутком змінних), або $a_{11} = a_{22} = 0$ (відсутні доданки з квадратами змінних), то таке рівняння називають *неповним*.

Аналіз графіків неповного рівняння кривої другого порядку за різних значень параметрів показує, що коли $a_{11}a_{22} > 0$, $a_{12} = 0$, тоді геометричним образом рівняння можуть бути еліпс (коло, коли $a_{11} = a_{22}$), або точка. Тому у випадку $a_{11}a_{22} > 0$, $a_{12} = 0$ образ рівняння (2.4.1) називають *еліптичним* (рис. 2.4.8 а, б).

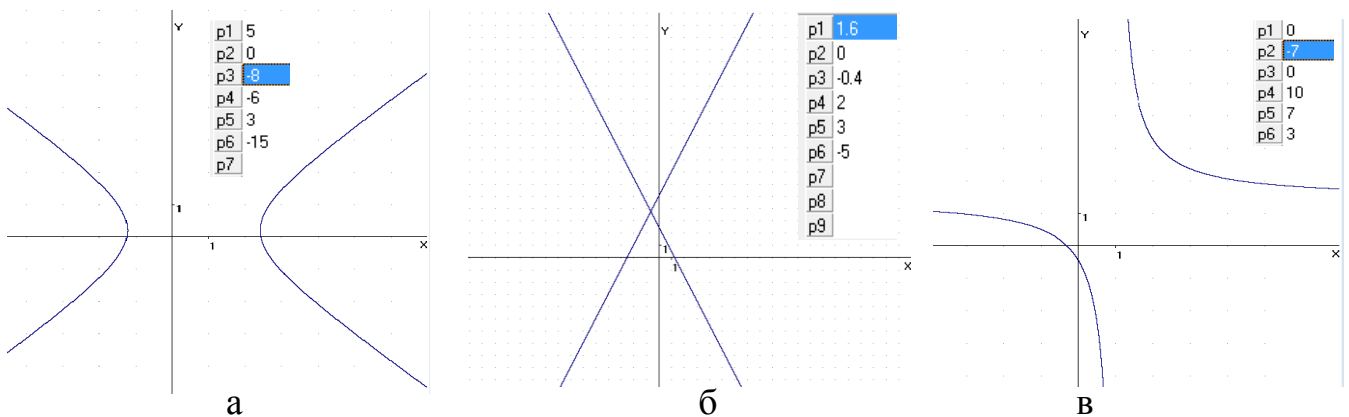


Рис. 2.4.9

У випадку $a_{11}a_{22} < 0$, $a_{12} = 0$, геометричним образом рівняння можуть бути тільки гіпербола або пара прямих, що перетинаються, які можна розглядати як вироджений випадок гіперболи. Аналогічна ситуація у випадку $a_{11} = a_{22} = 0$, $a_{12} \neq 0$. В такому разі образ рівняння (2.4.1) називають *гіперболічним* (рис. 2.4.9 а,б,в)

Нарешті, якщо в рівнянні з трьох коефіцієнтів в доданках другого порядку відмінний від нуля тільки один, a_{11} або a_{22} , то геометричним образом може бути або парабола, або пара паралельних прямих чи пара прямих, що збігаються. В такому разі образ рівняння (2.4.1) називають *параболічним* (рис. 2.4.10 а,б,в).

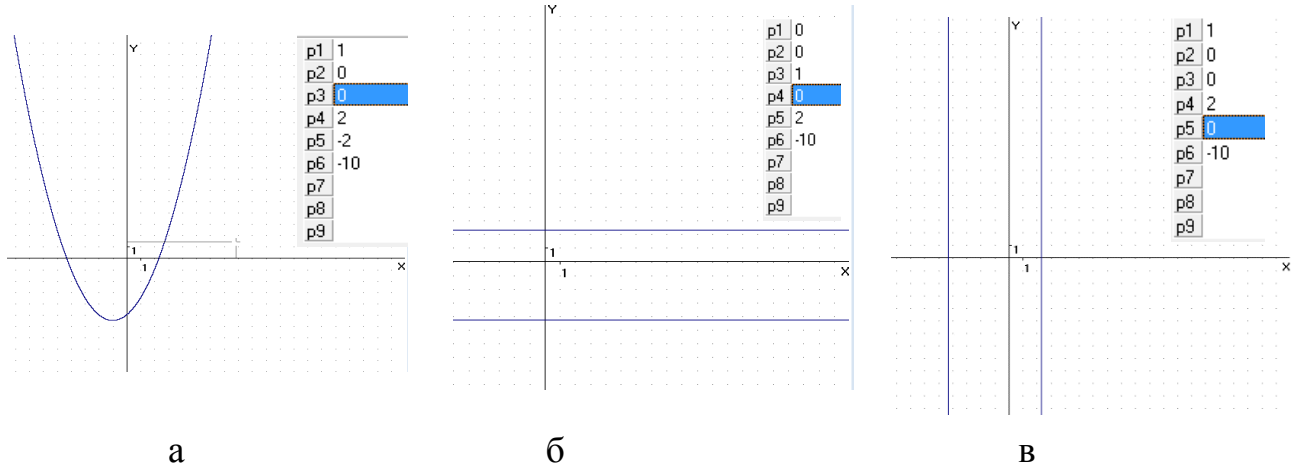


Рис. 2.4.10

Розглянемо тепер рівняння (2.4.1), коли всі коефіцієнти в групі старших членів відмінні від нуля.

Лінія, що визначається за рівнянням (2.4.1), не змінюється, якщо від даної декартової прямокутної системи координат перейти до іншої декартової системи координат. Тобто дане рівняння (2.4.1) та рівняння, яке отримуємо після перетворення координат, еквівалентні [90]. Причому в разі паралельного перенесення системи координат коефіцієнти групи старших членів не змінюються.

Геометричні характеристики ліній 2-го порядку та їх розташування повністю визначаються за значеннями інваріантів I_1, I_2, I_3 [90].

$$I_1 = a_{11} + a_{22}, \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \quad I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Нехай маємо таку декартову систему координат $x'O'y'$ (отриману паралельним перенесенням системи xOy), в якій рівняння кривої другого порядку не містило б доданків $a'_{13}x'$ та $a'_{23}y'$, тобто коефіцієнти a_{13} та a_{23} рівні нулю. В разі

паралельного перенесення системи координат коефіцієнти групи старших членів (a_{11}, a_{12}, a_{22}) не змінюються.

$$\text{Тоді } I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)a_{33}.$$

Скориставшись програмою Gran1, побудуємо графічні образи рівняння (2.4.1) Плавню змінюючи значення параметрів $P1, P2, \dots, P6$ в Gran1, які відповідають коефіцієнтам $a_{11}, a_{12}, a_{22}, \dots, a_{33}$, та обчислюючи значення інваріантів, слідкуємо за зміною графічних образів, які відповідають рівнянню (2.4.1). В результаті помічаємо, що всі лінії, що визначаються за рівнянням (2.4.1), поділяються на три типи.

1. Лінії *еліптичного типу*, $I_2 > 0$ (рис. 2.4.11).

Оскільки $I_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$, то $a_{11}a_{22} > 0$, тобто коефіцієнти $a_{11} = P1$ і $a_{22} = P3$ обидва відмінні від нуля і знак яких співпадає із знаком I_1 . Тому можна вважати обидва ці коефіцієнти додатними (цього завжди можна досягнути, помноживши дане рівняння на -1). Отже, спостерігаючи за зміною динамічних графічних образів, встановлюємо, що коли $I_1 > 0$ та $I_2 > 0$, то за умови $I_3 < 0$ через таке рівняння описується еліпс, коли $I_3 = 0$ – координати лише однієї точки (вироджений еліпс), коли $I_3 > 0$, тоді дане рівняння не задовольняють координати жодної точки (уявний еліпс).

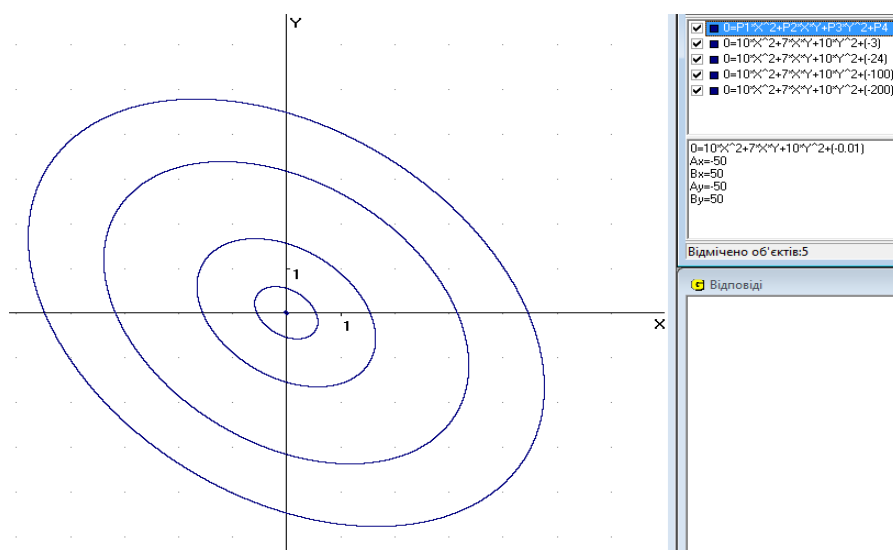


Рис. 2.4.11

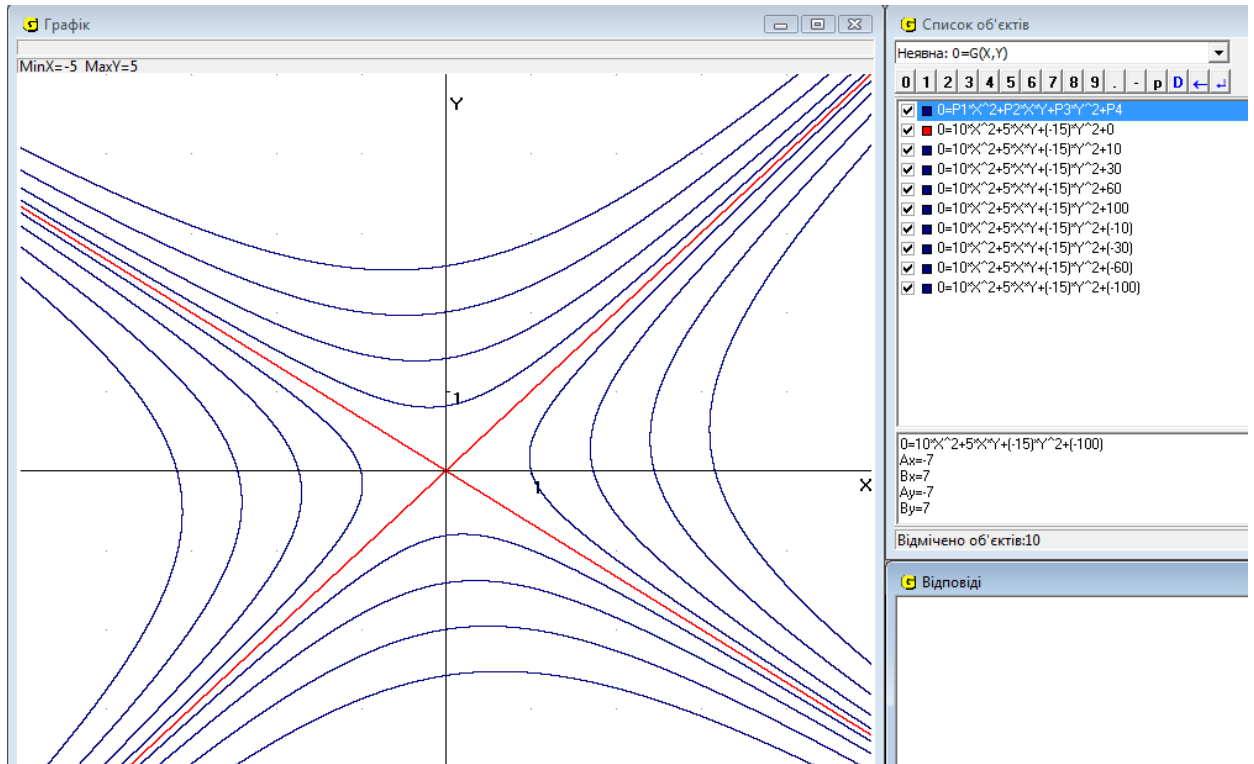


Рис. 2.4.12

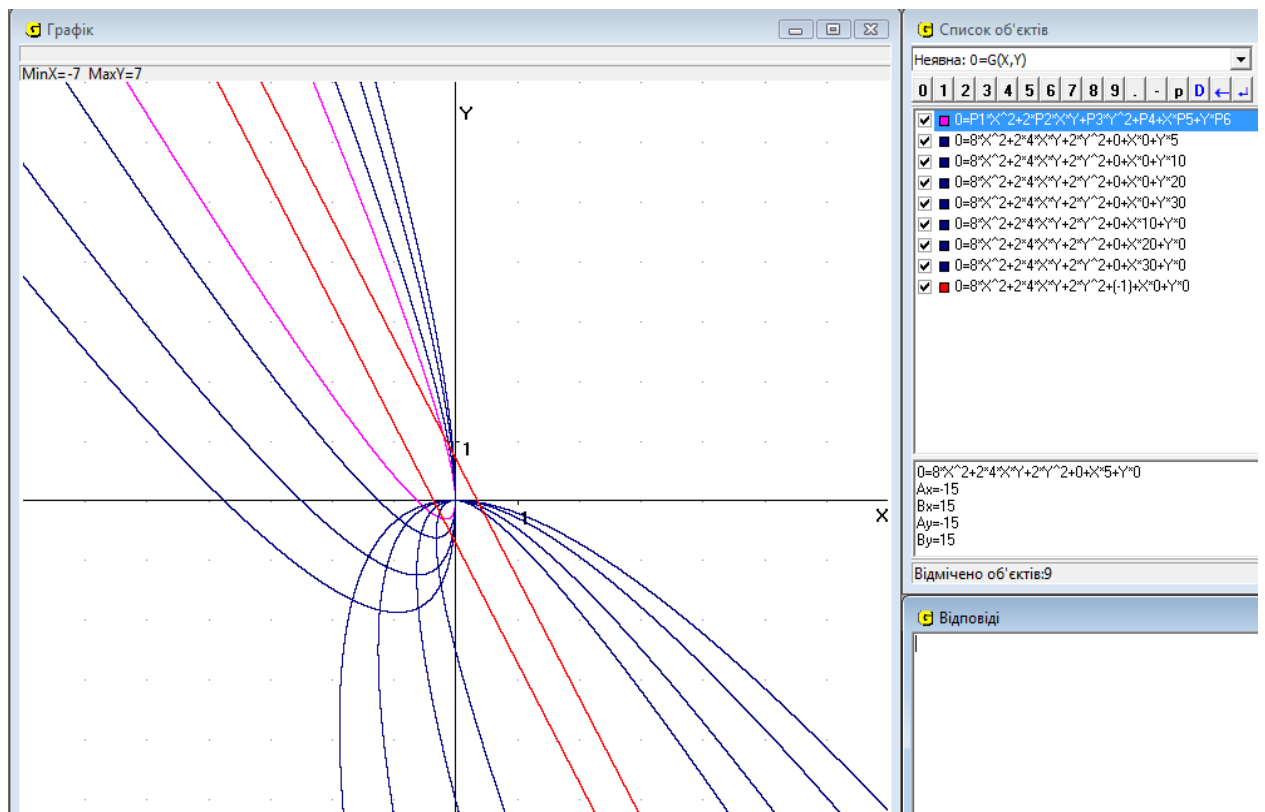


Рис. 2.4.13

2. Лінії *гіперболічного типу*, $I_2 < 0$ (рис. 2.4.12).

Якщо $I_2 < 0$, то за рівнянням (2.4.1) визначається лінія гіперболічного типу. Причому, якщо $I_3 \neq 0$, то маємо гіперболу, а коли $I_3 = 0$ – пару прямих, що перетинаються.

Змінюючи в рівнянні параболічного типу параметр, що відповідає вільному члену (коефіцієнт a_{33}), помічаємо, що всі криві, які відрізняються тільки вільними членами, мають спільні асимптоти, які визначаються за даним рівнянням за умови $a_{33} = 0$.

3. Лінії *параболічного типу*, $I_2 = 0$ (рис. 2.4.13).

Рівняння лінії (2.4.1) за умови $I_2 = 0$ є рівнянням параболічного типу і за ним визначається парабола, якщо $I_3 \neq 0$. Якщо ж $I_3 = 0$, тоді за рівнянням (2.4.1) визначається пара паралельних прямих (які можуть збігатися).

Отримані результати подамо у вигляді таблиці 2.4.1.

Таблиця 2.4.1

	$I_3 \neq 0$	$I_3 = 0$
$I_2 > 0$	Еліпс	Дійсна точка
$I_2 = 0$	Парабола	Паралельні прямі або прямі, що збігаються в одну пряму
$I_2 < 0$	Гіпербола	Дійсні прямі, що перетинаються

Аналітичне обґрунтування цих випадків розглядається, наприклад, в [90].

На проведення графічного дослідження лінії другого порядку студентам можна запропонувати задачі з параметром, які розглянемо далі в прикладах.

Приклад 2.4.6. Які криві визначаються за рівнянням $x^2 - 2xy + ay^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ за різних значень параметра a ?

Побудуємо графік, що відповідає даному рівнянню. У вікні «Список об'єктів» обираємо «Неявна: $0 = G(X, Y)$ », звертаємося до послуги «Об'єкт/Створити» та у вікні «Введення виразу залежності» вводимо $X^2 - 2 * X * Y + P1 * Y^2 - 4 * X - 6 * Y + 3 = 0$,

де $P1$ – параметр, який відповідає заданому параметру a . Для кращого унаочнення нехай змінні x та y змінюються на відрізку $[-22; 22]$, тобто $A = -22$, $B=22$, $A_y = -22$, $B_y=22$.

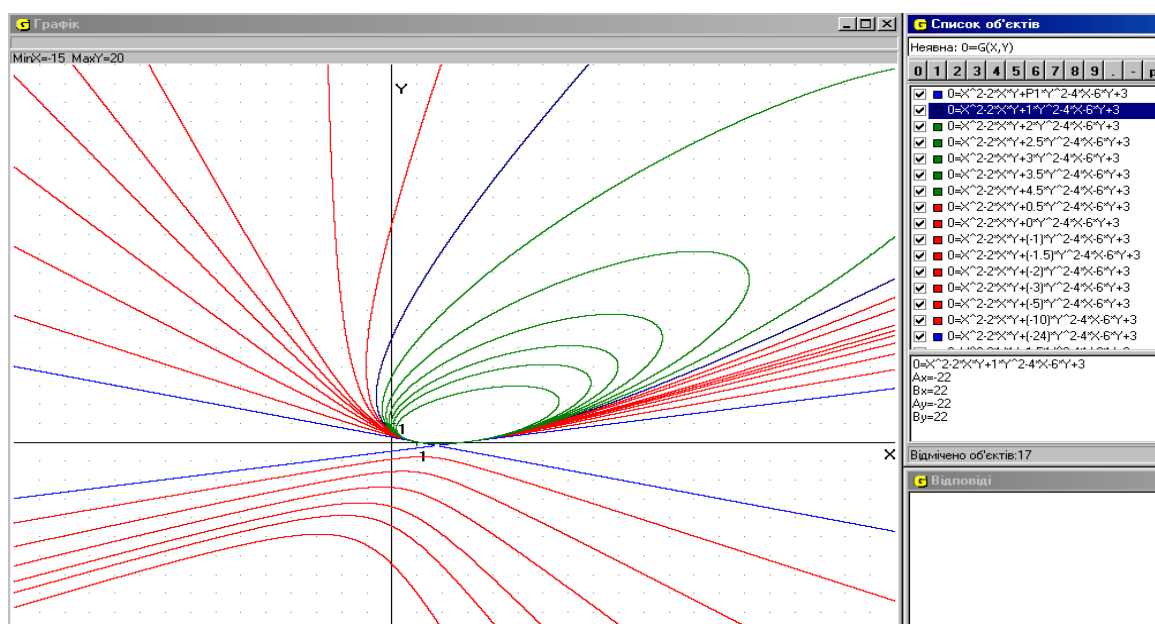


Рис. 2.4.14

Змінюючи значення параметра $P1$, отримуємо все нові і нові зображення, які можна фіксувати, користуючись послугою «Об'єкт/Новий об'єкт з зафіксованими параметрами». В результаті одержимо зображення, подане на рис. 2.4.14.

Змінюючи значення параметра $P1$ в межах від -25 до 25 з кроком $0,5$, встановлюємо, що графічним образом даного рівняння є еліпс, коли $P1 > 1$, парабола – коли $P1 = 1$. А коли $P1 < 1$, тоді образом рівняння буде гіпербола, до того ж в окремому випадку, коли $P1 = -24$, гіпербола перетворюється на дві прями, що перетинаються (Рис. 2.4.14).

Щоб розв'язати задачу аналітично, обчислюємо другий та третій інваріанти:

$$I_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & a \end{vmatrix} = a - 1. \quad I_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & a & -3 \\ -2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -a - 24.$$

Звідси випливає, що дійсно за умови $a = 1$ маємо параболу, за будь-якого $a > 1$ – еліпс, за будь-якого $a < 1$ – лінію гіперболічного типу, причому коли $I_3 = 0$, а отже $a = -24$, гіпербола розпадається на дві прями, що перетинаються.

В додатку I наведений приклад подібної задачі на дослідження кривої, гіперболічного типу. Розглянувши такі приклади, студенти можуть самі скласти подібні задачі і проводити графічні дослідження самостійно.

Також у процесі вивчення лінійної алгебри та аналітичної геометрії студентам доводиться розв'язувати типові задачі на встановлення типу кривої другого порядку, лінійного перетворення змінних з метою спрощення загального рівняння кривої другого порядку на площині. Розв'язування таких задач вимагає виконання значної кількості обчислювальних операцій. Тому корисно доповнити аналітичні обчислення використанням графічних образів, створених за допомогою ППЗ Gran1. Аналіз графіків, створених за допомогою даної програми, дає можливість перевірити остаточний результат, уникнути помилок, переконатися в правильності розв'язання.

В задачах на дослідження кривих другого порядку, що задані в прямокутній системі координат загальними рівняннями, як правило, вимагається визначити канонічне рівняння і визначити в системі координат xOy : для параболи – координати вершини і фокуса; для еліпса – координати центра, вершин і фокусів, а також рівняння директрис, а для гіперболи – ще і рівняння асимптот. Приклад задачі на встановлення вигляду кривої за загальним рівнянням кривої другого порядку, побудову її графіка, дослідження властивостей за допомогою програми Gran1 наведено в Додатку I.

Таким чином, під час вивчення курсу аналітичної геометрії використання ППЗ Gran1 надає навчальній діяльності дослідницького, пошукового характеру, формує пізнавальні можливості, унаочнює розв'язування задач, розвиває візуальне мислення. Графічне дослідження загального рівняння кривої другого порядку сприяє кращому засвоєнню і осмисленню теоретичного матеріалу, надає можливість перевірити остаточні відповіді.

Наочність графічного подання абстрактних математичних співвідношень, результатів моделювання різних об'єктів і явищ та їх дослідження також суттєво підвищується за умови використання засобів анімації зображення, за допомогою яких можна спостерігати явища і процеси в динаміці їх проявів і перебігу.

2.5 Моделювання анімаційних наочностей

Однією з основних переваг використання анімаційних моделей в навчальному процесі є наочність та динамічність анімаційного матеріалу. Навчання із застосуванням анімаційних зображень сприяє посиленню позитивного емоційно-психологічного фону – важливого компоненту навчально-пізнавальної діяльності.

Використання анімаційних зображень як супроводу до лекцій сприяє кращому сприйняттю навчального матеріалу, його розумінню і запам'ятовуванню, дає більш яскраве і глибоке уявлення про предмети, явища, об'єкти вивчення, а також стимулює пізнавальну активність студентів. Застосовувати анімаційні зображення слід на прикладах, складних для розуміння, коли вимагаються додаткові роз'яснення, для узагальнення та систематизації, для загального «оживлення» навчального матеріалу.

Тому вміння створювати анімаційні моделі є важливою складовою в системі професійних компетентностей і дослідницьких умінь вчителів та викладачів дисциплін природничо-математичного циклу, а також студентів фізико-математичних спеціальностей.

В [6] *анімація (animation)* означається як виведення на екран послідовності зображень (кадрів), що трохи відрізняються, для створення ілюзії руху. Для цього моделюють розвиток у часі певних процесів, відображуваний через послідовність кадрів.

Комп'ютерна анімація – вид анімації, який створюється за допомогою комп'ютера: послідовний показ (слайд-шоу) завчасно підготовлених графічних зображень, а також комп'ютерна імітація руху за допомогою зміни форми об'єктів або показу послідовних зображень з фазами руху.

Під *моделюванням анімаційних наочностей* будемо розуміти графічне динамічне подання об'єктів, імітацію перебігу процесів чи проявів явищ, що стосуються деякої предметної галузі, з метою відтворення, вивчення і дослідження характеристик і властивостей досліджуваних процесів і явищ, з'ясування відповідних причинно-наслідкових зв'язків і закономірностей.

Умовою ефективного навчання моделювання анімаційних наочностей студентів фізико-математичних та інформатичних спеціальностей є розвиток у них стилю мислення [191], володіючи яким, студент зможе:

- а) структурувати відомості про об'єкт у просторі та часі;
- б) визначати логічну структуру моделі, створювати графічні образи елементарних явищ, що є складовими процесу;
- в) виявляти основні зміни стану об'єкта або фаз процесу;
- г) визначати взаємозв'язки об'єктів і процесів у просторі й часі.

В прикладні математичні пакети (Maple, Mathematica, Mathlab, Mathcad, Maxima) вбудовано широкий інструментарій для графічного подання і візуалізації математичних об'єктів, що дає змогу використовувати їх для створення анімаційних моделей цих об'єктів [29], [30], [37], [38].

Розглянемо можливості створення анімаційних моделей деяких об'єктів у середовищі програми Maxima.

Працюючи з системою Maxima, користувач може використовувати набір засобів створення графічних примітивів для двохвимірних та тривимірних побудов і разом з тим задіяти потужні обчислювальні засоби для математичних розрахунків [225].

Можливість створення анімацій – специфічна особливість графічної оболонки wxMaxima. Для створення анімації в *wxmaxima* використовуються графічні plot- та draw-процедури:

```
with_slider(k, list, expr, opts),
```

де *k* – параметр, *list* – список значень параметра, *expr* – вираз функції, графічний об'єкт; *opts* – опції графіка функції. Правила опису даної функції аналогічні до правил опису plot-процедур.

```
wxanimate_draw(k, list, opts, expr),
```

де *k* – параметр, *list* – список значень параметра, *opts* – опції графіка функції, *expr* – вираз функції, графічний об'єкт. Опис аргументів даної функції аналогічний до правил опису аргументів draw-процедур.

```
with_slider_draw3d(k, list, opts, expr) –
```


будується послідовність тривимірних графічних об'єктів, залежних від параметра `k`, `list` – список значень параметра, `opts` – опції графіка функції, `expr` – вираз функції, графічний об'єкт.

Процес показу анімації управляється за допомогою послуг панелі інструментів `wxMaxima`:



Щоб отримати доступ до цих елементів управління, необхідно встановити курсор в полі графічного вікна з анімацією та натиснути ліву клавішу мишки. Також управління анімацією можливе за допомогою послуг контекстного меню графічного вікна або прокручування коліщатка мишки.

За допомогою описаних процедур створюється анімація, яка може бути відтворена тільки в інтерфейсі `wxmaxima`. Але анімаційне зображення легко зберегти у вигляді файлу з розширенням `.gif` за допомогою послуги з контекстного меню малюнка анімації «Зберегти зображення...».

Характерною особливістю `Maxima` є можливість використання разом з графічними процедурами функції `makelist` для створення серії графічних зображень на одному і тому самому графіку залежно від зміни деякого параметра. Тому, визначаючи набір значень параметра анімації, як правило, використовують дану функцію:

`makelist(expr, i, i1, i2, step)` – процедура генерації впорядкованих наборів, за допомогою якої створюється список значень виразу `expr` від значень змінної `i`, яка змінюється від значення `i1` до значення `i2` з кроком `step`. За замовчуванням крок вважається рівним одиниці.

Кожна окрема анімаційна модель візуалізації процесу чи явища формується за деякою схемою і реалізовується згідно загальними етапами побудови моделі. Наведемо основні елементи цієї схеми:

- 1) опис математичної моделі об'єкта візуалізації;
- 2) налаштування вигляду системи координат, графічного поля, вибір розмірності;

- 3) опис елементарних графічних об'єктів моделі;
- 4) визначення параметрів анімаційної моделі;
- 5) моделювання динаміки графічних об'єктів, налаштування програмного коду;
- 6) організація користувацького інтерфейсу, відтворення значень параметра в графічному полі, налаштування властивостей графічних об'єктів (колір, розмір тощо);
- 7) дослідження та аналіз анімаційної моделі, випробовування різних варіацій значень параметра анімації.

Важливим етапом в процесі створення анімаційної моделі є визначення параметра анімації, за допомогою якого забезпечується варіювання однієї змінної в процесі збереження інших сталими. Уміння моделювати складні анімаційні наочності базуються на вміннях створювати прості анімації:

1. Плавна побудова лінії. В цьому випадку через параметр анімації визначається діапазон значень змінної (аргумента) функції і виконується графічне дослідження функції залежно від значень її аргумента. На рис.2.5.1 подані окремі кадри анімаційного зображення побудови графіка функції в полярних координатах

$$r = \frac{1}{2} + \sin \frac{5t}{3}, \quad t \in [0; 6\pi].$$

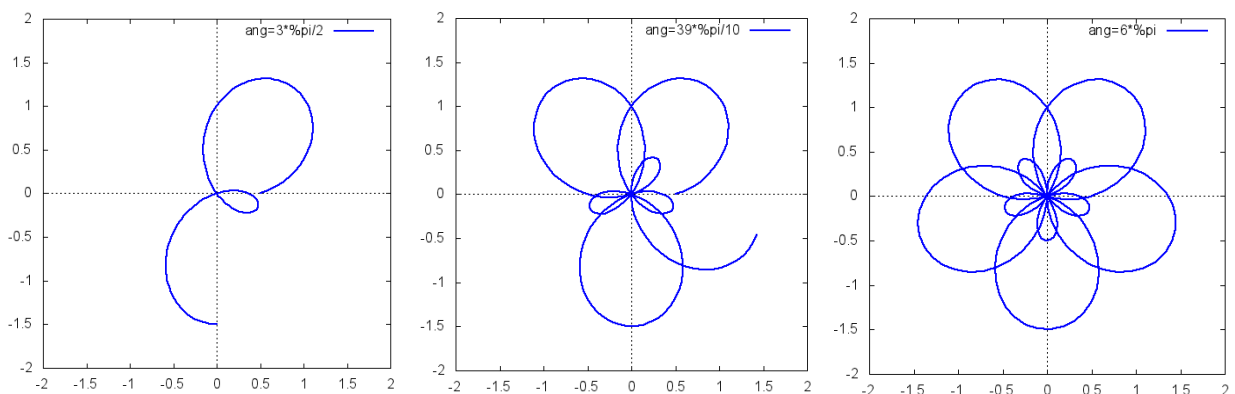


Рис. 2.5.1

2. Послідовне демонстрування графіків відповідно до зміни значень параметра функції, який одночасно є параметром анімації. Для прикладу можна розглянути створення анімаційної демонстрації дослідження вигляду n-пелюсткової троянди $r = R \sin n\varphi$ для різних значень параметра n (рис. 2.5.2).

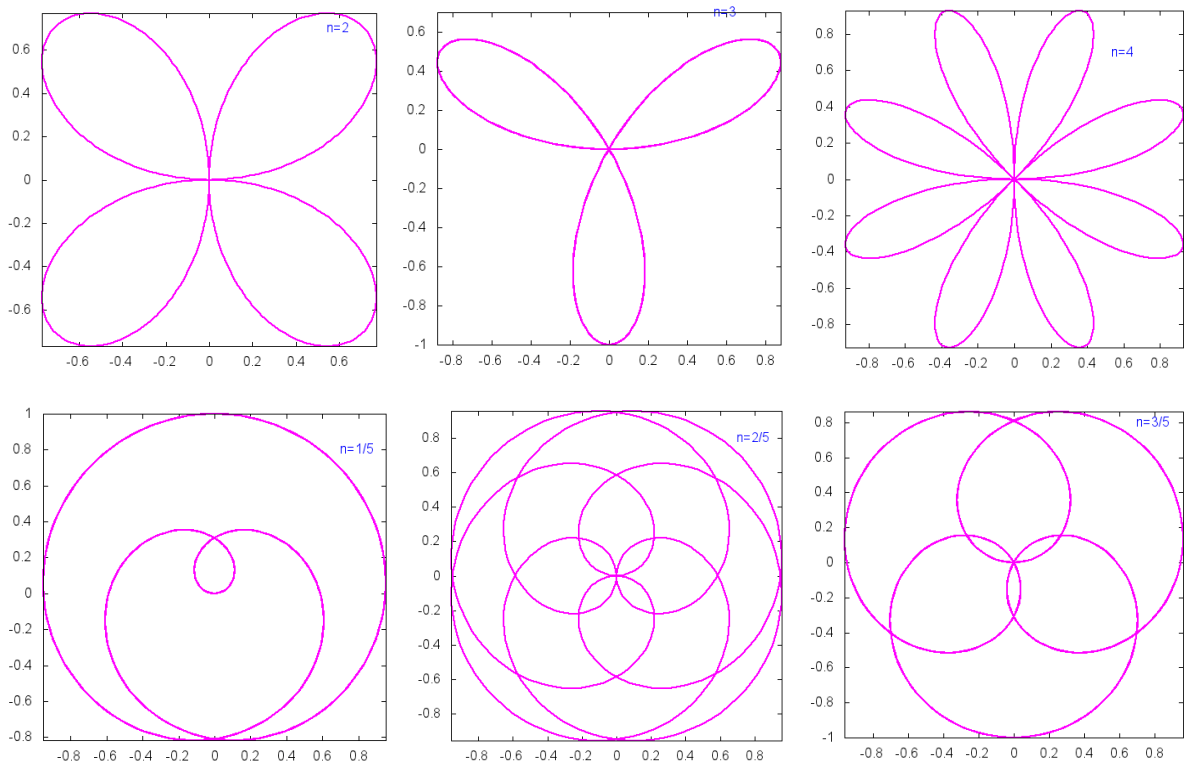


Рис. 2.5.2

3. Рух геометричних об'єктів (точки, прямої, площини, лінії тощо) в певному напрямку або вздовж лінії, за якою визначається траєкторія руху. Наприклад, якщо розглядати рух точки вздовж кола, параметр анімації пов'язують з координатами точки на колі.

Під час моделювання складних анімаційних наочностей описані анімаційні примітиви використовуються в комплексі. Розглянемо приклад.

Приклад 2.4.1. Створити анімаційну імітацію утворення гіпоциклоїди, як кривої, що описується точкою кола, яке котиться вздовж внутрішньої сторони іншого нерухомого кола без проковзування.

Розв'язування.

Відомо, що параметричні рівняння гіпоциклоїди мають вигляд:

$$\begin{cases} x(t) = r(k-1)\left(\cos t + \frac{\cos(k-1)t}{k-1}\right), \\ y(t) = r(k-1)\left(\sin t - \frac{\sin(k-1)t}{k-1}\right), \end{cases}$$

де $k = \frac{R}{r}$, R – радіус нерухомого кола, r – радіус кола, що котиться вздовж внутрішньої сторони нерухомого кола.

Для спрощення і кращого розуміння розглянемо спочатку окремий випадок, коли $R = 8$, $r = 2$. Центр великого нерухомого кола розмістимо в початку координат.

Нехай ang – параметр анімації. Для того, щоб зробити повний оберт малого кола, потрібно ang змінювати від 0 до 2π , причому різниця між кадрами анімації нехай складає $\Delta ang = \frac{\pi}{10}$.

Під час руху малого кола його центр рухатиметься вздовж кола з радіусом $R - r$. Отже, параметричні рівняння рухомого кола матимуть вигляд:
 $x(t) = (8 - 2)\cos ang + 2\sin t$, $y(t) = (8 - 2)\sin ang + 2\cos t$.

Змінювання t від 0 до ang в параметричних рівняннях гіпоциклоїди забезпечить ілюстрацію плавної побудови лінії (в цьому випадку астроїди), як сліду точки на рухомому колі, координати якої визначаються за рівняннями:
 $x(t) = (8 - 2)(\cos ang + 2\cos(ang(8/2 - 1))/(8 - 2))$;
 $y(t) = (8 - 2)(\sin ang + 2\sin(ang(8/2 - 1))/(8 - 2))$.

Тоді програмна реалізація цього завдання матиме вигляд:

```
with_slider_draw(
    /*визначаємо параметр анімації*/
    ang, makelist(i, i, 0, 20) * %pi / 10,
    /*налаштовуємо вигляд графічного поля*/
    proportional_axes = xy, n_ticks = 80,
    xrange = [-8, 8], yrange = [-8, 8],
    /*нерухоме коло*/
    color = red, parametric(8 * cos(t), 8 * sin(t), t, 0, 2 * %pi),
    /*рухоме коло*/
    parametric((8 - 2) * cos(ang) + 2 * sin(t),
        (8 - 2) * sin(ang) + 2 * cos(t), t, -%pi, %pi),
    /*гіпоциклоїда (астроїда)*/
    color = blue, line_width = 2,
    parametric((8 - 2) * (cos(t) + 2 * cos(t * (8 / 2 - 1)) / (8 - 2)),
        (8 - 2) * (sin(t) - 2 * sin(t * (8 / 2 - 1)) / (8 - 2)),
```

```

t, 0, ang),
/*ТОЧКИ*/
color = black, point_type=7, point_size = 1,
points_joined = true, line_width = 1,
points([
[0, 0], /* центр великого кола
(8-2) * [cos(ang), sin(ang)], /* центр малого кола
/* точка на малому колі */
[(8-2) * (cos(ang) + 2*cos(ang*(8/2-1)) / (8-2)),
(8-2) * (sin(ang) - 2*sin(ang*(8/2-1)) / (8-2))] ]]);

```

В результаті одержимо анімацію, окремі кадри якої зображені на рис. 2.5.3.

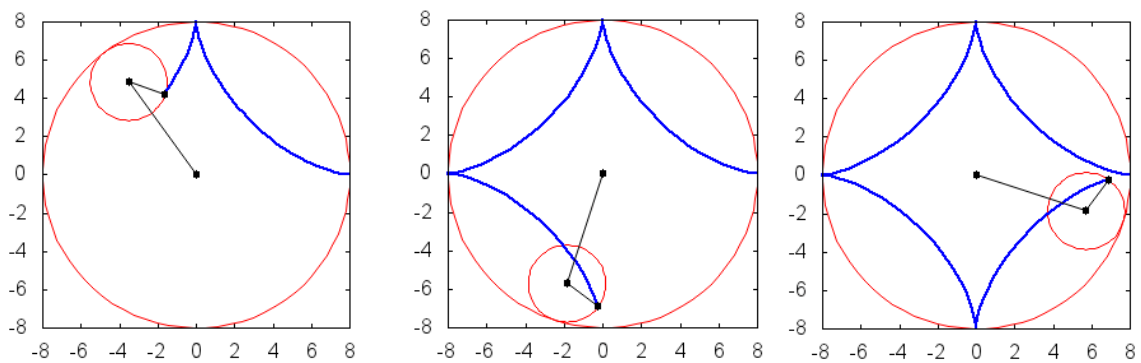


Рис. 2.5.3

У тривимірній системі координат, як приклад, можна розглянути анімаційну модель перетину поверхні другого порядку площиною (рис. 2.5.4) або перетворення поверхні другого порядку залежно від зміни параметрів [30].

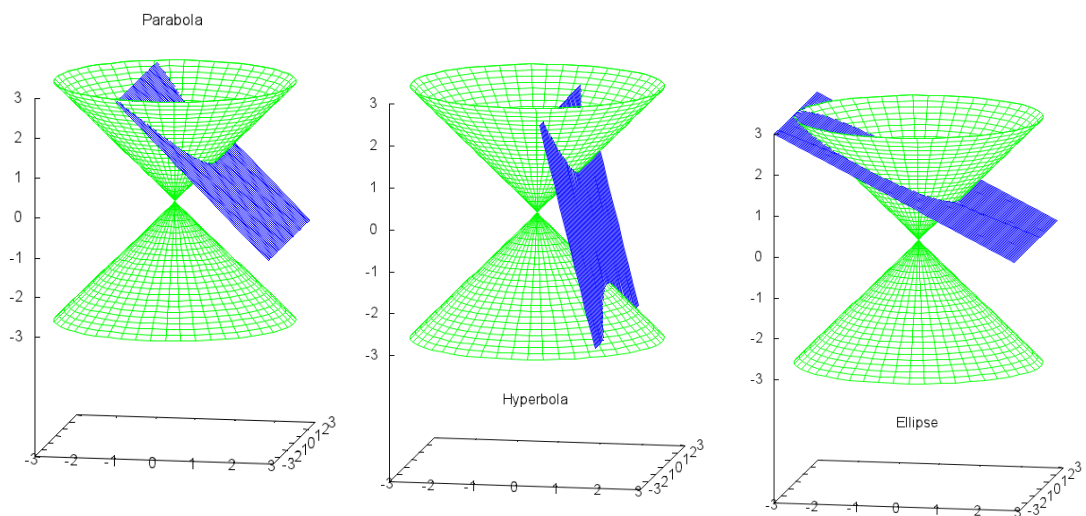


Рис. 2.5.4

В кожній системі комп'ютерної математики наявний свій інструментарій для створення анімацій. Детально засоби для створення двовимірної і тривимірної анімації і способи їх використання для моделювання анімаційних наочностей розглянуті в роботах [22], [37].

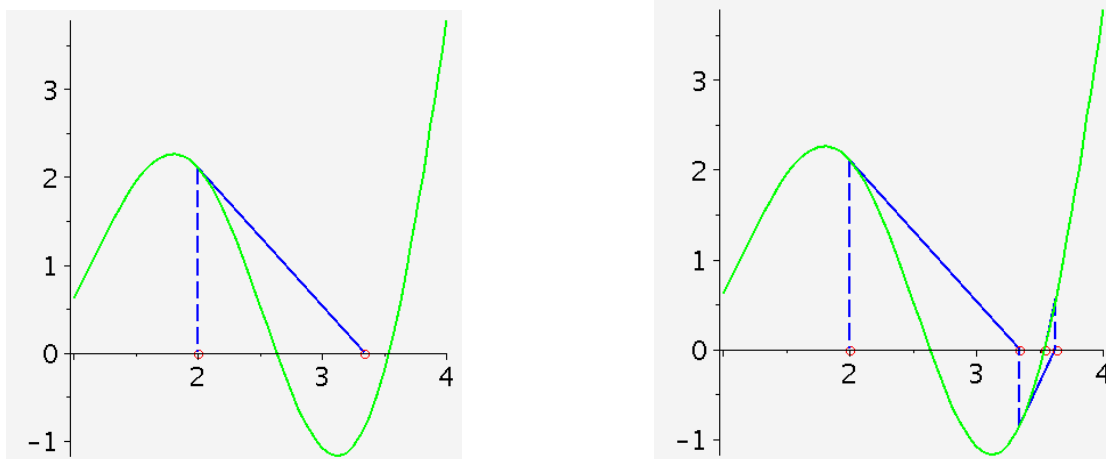


Рис. 2.5.5

Для прикладу розглянемо моделювання анімаційної наочності геометричного змісту пошуку коренів рівняння за методом Ньютона в програмі Maple. Покажемо, як, починаючи від значення початкової точки на осі Ox , будується вертикальний відрізок в певній точці до перетину з графіком. Потім відтворюємо побудову прямої лінії, дотичної до графіка в цій точці. Далі знаходимо точку перетину дотичної з віссю Ox і використовуємо її в якості початкової точки, повторюємо процес (рис. 2.5.5).

Для створення цієї анімації потрібна процедура побудови прямої лінії. В пакеті `plottools` програми Maple є функція `line([x1,y1],[x2,y2], opts)`, за допомогою якої будується відрізок прямої між точками $(x1, y1)$ та $(x2, y2)$.

```
restart:
```

```
with( plots ):
```

```
with( plottools ):
```

```
setoptions( thickness=2, symbol=circle, symbolsize=16,  
axesfont=[HELVETICA,18], labels=["", ""] ):
```

Записуємо функцію, вказуємо інтервал $[a;b]$, початкове наближене значення кореня та кількість ітерацій.

```
f:= x -> 1/5*x^2 - x*cos(2*x);
```

```

a:= 1: b:= 4:
Start:= 2;
NumIterations:= 3:

```

Створюємо графічні об'єкти: графік даної функції, дотичну, проєкцію до графіка. За допомогою параметра **linestyle=DASH** задається стиль лінії – пунктирна.

```

Grafix:=plot(f(x), x=a..b, color=green):
DotLine:=(x0,x1)->line([x0,f(x1)],[x1,0], color=blue):
VertLine:=x->line([x,f(x)],[x,0], color=blue,
linestyle=DASH):

```

Створюємо початкову точку на осі Ox .

```

FrameSequence:= pointplot([Start,0],color=red):

```

```

x0:= Start:

```

В тілі циклу описуємо графічне зображення одного кроку ітерації за методом Ньютона. Спочатку обчислюємо точку перетину дотичної з віссю Ox за формулою

$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, ($k=1,2,\dots$). Для того, щоб точка залишалася в кадрі, вказуємо

FrameSequence перед функцією **display**. За допомогою першої процедури **display** здійснюється реалізація побудови проєкції початкової точки на графік функції, за допомогою другої – побудова дотичної та її точки перетину з віссю Ox .

```

for i from 1 to NumIterations do
x1:= x0 -> x0 - f(x0)/D(f)(x0);
Tochka:= pointplot([x1,0], color=red);
FrameSequence:= FrameSequence,
display( FrameSequence, VertLine(x0) );
FrameSequence:= FrameSequence,
display( FrameSequence, DotLine(x0,x1), Tochka );
x0:= x1 #знайдену точку використовуємо як початкову
end do:

```

Вказуємо, що анімаційні кадри мають бути послідовно показані. І нарешті демонструємо їх на фоні графіка.

```

Frames:= display( FrameSequence, insequence=true):

```

```
display( Grafix, Frames );
```

Анімаційні моделі зручно використовувати для пояснення і кращого розуміння та засвоєння понять, наприклад, з математичного аналізу.

Приклад 2.4.2. Створити анімаційну модель відображення властивості границі проміжної функції.

Відомо, що якщо $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ для будь-якого x з околу точки a , і якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = c$, то $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$.

Для прикладу розглянемо границю $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Оскільки $-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$, то $-x^2 \leq x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$.

Тепер продемонструємо графічно (рис. 2.5.6), як $x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ буде прямувати до нуля, за умови, що $-x^2$ та x^2 також прямують до нуля.

Спочатку визначаємо функції:

```
restart:
```

```
with( plots ):
```

```
setoptions( thickness=2): # задаємо товщину ліній графіків
```

```
g:= x -> x^2*cos(1/x):
```

```
Parabola:= plot( {-x^2, x^2}, x=-0.1..0.1, color=red ):
```

Далі створюємо анімаційні елементи, використовуючи функцію **animatecurve**. Потрібно, щоб під час демонстрації лінія графіка функції наближалася до нуля з обох боків (як з лівого, так і з правого), тобто щоб графік $g(x)$ малювався зліва до нуля, а графік $g(-x)$ – справа до нуля. В Maple не можна використовувати такий діапазон побудови графіка, як $x=0.1..0$, тому скористаємося діапазоном $x=-0.1..0$ для обох графіків.

```
Liva:= animatecurve( [x, g(x), x=-0.1..0],  
numpoints=200, color=blue ):
```

```
Prava := animatecurve( [-x, g(-x), x=-0.1..0],  
numpoints=200, color=blue ):
```

```
display( Parabola, Liva, Prava );
```

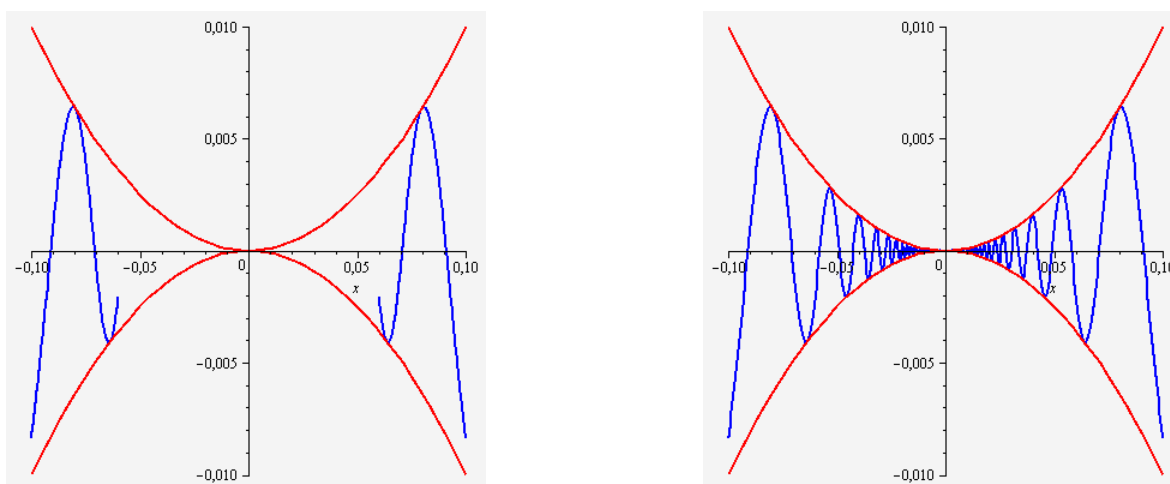



Рис. 2.5.6

Таким чином, під час навчання моделювання анімаційних наочностей здійснюється реалізація міжпредметних зв'язків математики та інформатики, а також інших навчальних дисциплін: геометрії, математичного аналізу, чисельних методів і т.д.

Вміння студента створювати анімаційні моделі ґрунтується не тільки на вмінні використовувати інструментарій програмного засобу, але і на теоретичних знаннях предметної галузі. Розвиток умінь анімаційного моделювання та формування графічної культури студентів фізико-математичних спеціальностей невіддільне від формування їхніх навчально-дослідницьких умінь, геометричної і загальної математичної культури, системи загальнокультурних і професійних компетентностей. Це повинно здійснюватися у вищому навчальному закладі через цілісну систему розвитку мислення, уяви, інтелектуальних здібностей, дослідницьких умінь в процесі навчання різних навчальних предметів. Навчання математичної інформатики в такому разі може відігравати інтегруючу роль.

2.6 Задачі на оптимізацію

Одним з найважливіших застосувань комп'ютерів є машинне управління і проектування. Застосування обчислювальних машин в цих галузях діяльності людей дає змогу забезпечувати в багатьох видах діяльності прийняття найкращих, оптимальних рішень. Математичні методи оптимізації почали розвиватися ще в домашинну епоху. Однак без комп'ютерних засобів вони могли застосовуватися на

практиці лише в найбільш простих випадках. Широке впровадження машинних методів створення управлінських та проектно-конструкторських рішень викликало стрімкий розвиток теорії оптимізації та забезпечило її широкі практичні використання [49, с.216].

Проблеми відшукування найкращих серед деякої множини варіантів відносяться до проблем, які постійно доводиться розв'язувати людям. Такі найкращі варіанти називають оптимальними. Щоб знайти оптимальний серед множини різних допустимих варіантів, доводиться розв'язувати задачі на знаходження максимуму чи мінімуму певних показників, тобто найбільших чи найменших значень деяких функцій. Обидва ці поняття об'єднуються єдиним терміном – екстремум. Задачі на відшукування максимальних чи мінімальних значень функцій називаються екстремальними задачами [77, с.9].

Однією з проблем, що постають в процесі розв'язування задач з використанням комп'ютера, є вибір програмного середовища. Різні комп'ютерні математичні пакети можуть суттєво відрізнятися за функціональністю, інтерфейсом, ємністю необхідних для їх функціонування запам'ятовуючих пристроїв, вбудованою мовою програмування тощо. Безальтернативне ознайомлення лише з однією з програм математичного призначення звужує можливості щодо розв'язування різноманітних задач.

Розглянемо основні можливості використання різних програмних засобів для розв'язування задач на пошук екстремумів функцій за різними методами. Серед методів розв'язування задач на пошук екстремуму загалом можна виокремити такі (рис.2.6.1): графічний метод, метод на основі геометричної інтерпретації; класичний метод, що ґрунтується на основі перевірки необхідних та достатніх умов існування екстремуму; чисельні методи обчислення екстремуму; градієнтні методи найшвидшого спуску; за допомогою графів і ін.

Якщо необхідно знайти екстремум функції від однієї або 2-х змінних, доцільно скористатися графічним методом, використовуючи відповідні геометричні образи залежностей між змінними. Для цього необхідно побудувати графік відповідної залежності, за яким визначити наявність і значення екстремумів.

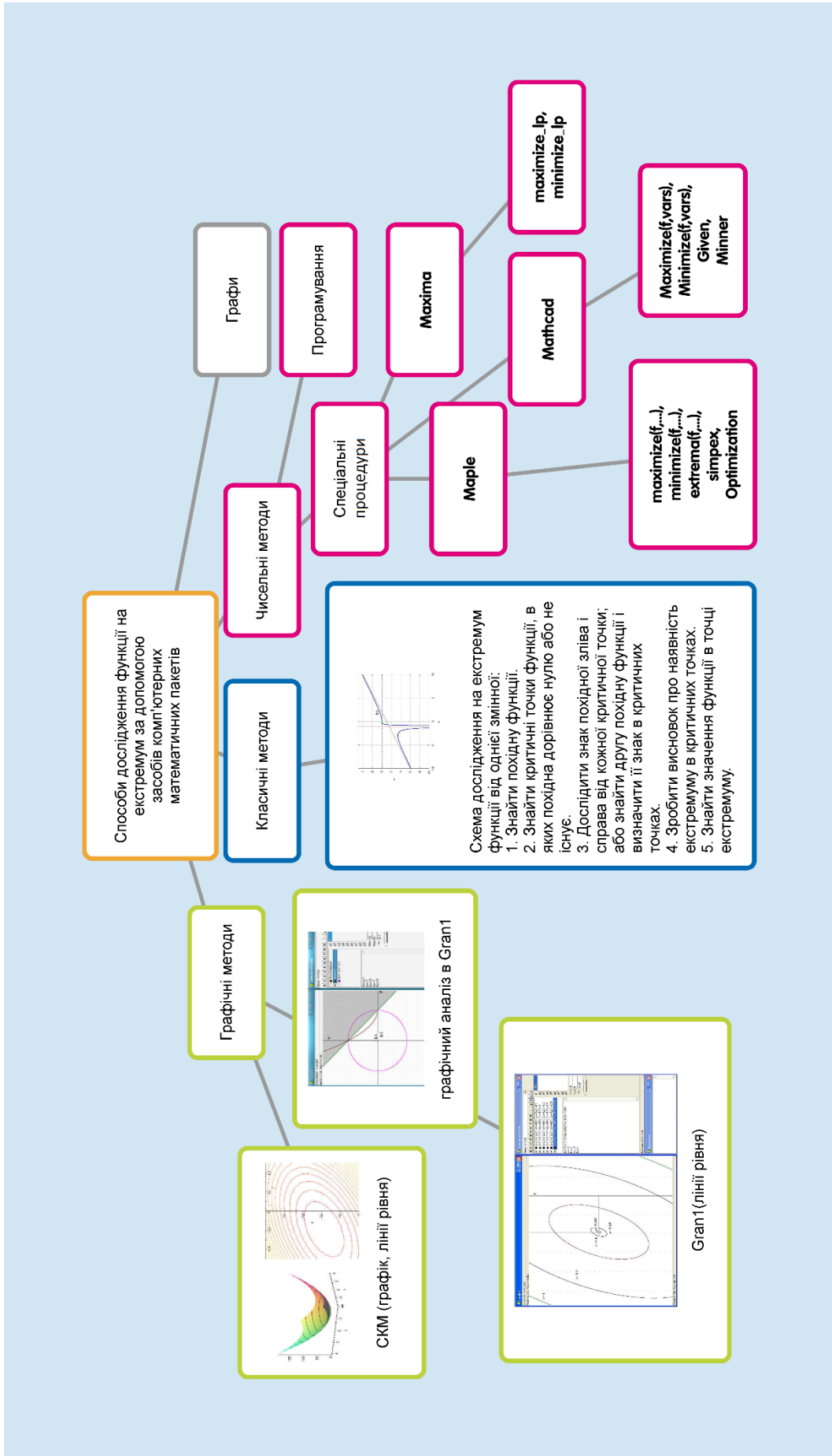


Рис.2.6.1

Наприклад, розглянемо функцію двох змінних $z = f(x, y)$, через яку задано деяку поверхню в тривимірному просторі з координатами x, y, z . Задача знаходження мінімуму (максимуму) функції двох змінних означає пошук найнижчої (найвищої) точки на цій поверхні.

У випадку функції двох змінних рельєф заданої поверхні часто зображують за допомогою ліній рівня. Зафіксуємо значення z , тобто будемо перетинати дану поверхню $z = f(x, y)$ площинами $z = c$, де c – довільне число, взяте з множини значень даної функції. Одержимо криву $f(x, y) = c$, яку називають лінією рівня (або ізокривою) функції. Інакше кажучи, лінія рівня на площині xOy – це проекція кривої, яка утворюється при перетині поверхні $z = f(x, y)$ площиною $z = c$. Будуючи лінії рівня для різних значень c , можна одержати певне уявлення про графік функції від двох змінних. Отримана картина буде нагадувати топографічне зображення рельєфу горизонталями. Розглянемо приклад.

Приклад 2.6.1. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $f(x, y) = 2.5x^2 - 3.1xy + 4.6y^2 - x + 5.2y$.

На початку дослідження даної функції на екстремум побудуємо її графік, щоб мати наочне уявлення про графічний образ даної функції.

Для побудови графіка функції звернемося до послуг системи комп'ютерної математики Maple і скористаємося пакетом `plots`. Звернемося до послуг `plot3d` та `contourplot`, в результаті виконання яких отримаємо графічне зображення даної функції (рис.2.6.2а, 2.6.2б).

```
with(plots);
"Графік функції від 2-х змінних f(x,y)";
f:=2.5*x^2-3.1*x*y+4.6*y^2-x+5.2*y;
plot3d(f,x=-20..20,y=-20..20);
"Лінії рівня функції f(x,y)";
contourplot(f,x=-0.5..0.5,y=-1..0,contours=15);
```

З рисунків видно, що мінімум функції знаходиться в точці з координатами в межах $x \in [-0,4; 0]$ та $y \in [-0,4; -0,8]$.

Досить зручні можливості знаходити за графічними методами наближені розв'язки задач на пошук екстремуму надає використання послуг програми Gran1.

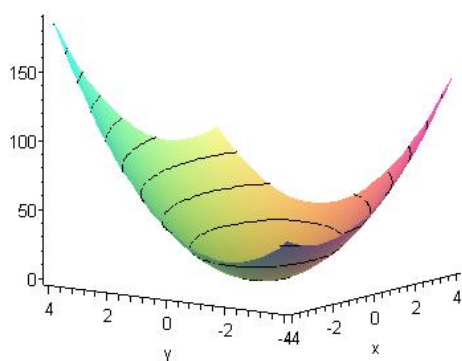


Рис. 2.6.2а

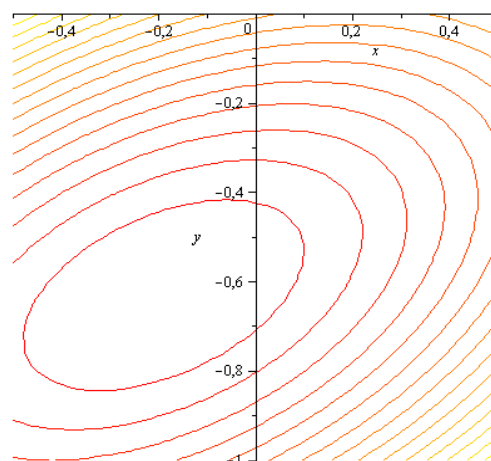


Рис. 2.6.2б

Для знаходження мінімуму функції від двох змінних з прикладу 2.6.1 з використанням послуг програми Gran1 будемо графік залежності $0 = f(x,y) - c$ як неявно заданої функції зі змінними x, y та параметром c . Для цього у вікні «Список об'єктів» обираємо тип задання залежності між змінними x, y «Неявна $0 = G(X,Y)$ », звертаємося до послуги «Об'єкт/Створити» та у вікні «Введення виразу залежності» в рядок « $0 =$ » записуємо вираз даної залежності $2.5 \cdot x^2 - 3.1 \cdot x \cdot y + 4.6 \cdot y^2 - x + 5.2 \cdot y - P1$, де параметр $P1$ відповідає параметру c . Змінюючи значення параметра $P1$, можна наближено встановити, за якого значення c функція $f(x,y)$ набуває мінімального значення і в якій точці $(x_0; y_0)$.

Зменшуючи $P1$, починаючи з деякого значення, будемо графіки ліній нульового рівня функції $F(x, y) - P1 = 0$, які відповідають лініям рівня поверхні $z = f(x,y)$. Як тільки лінія графіка зникає з графічного поля, зменшуємо на один порядок крок h , і уточнюємо значення параметра $P1$, значення якого і відповідає мінімальному значенню функції. Таким чином можна знайти з досить високою точністю наближене значення функції в точці мінімуму. Щоб знайти координати точки мінімуму, достатньо навести курсор в область, обмежену останньою лінією рівня, і зчитати значення x та y , які відображаються в рядку, над графічним полем. (рис. 2.6.3). За необхідності фрагмент графічного поля, де знаходиться шукана точка, можна збільшити для уточнення координат точки.

Таким чином, за допомогою графічних методів одержуємо наочне зображення ліній рівня досліджуваної функції, але знайдений результат буде точним лише до певної міри.

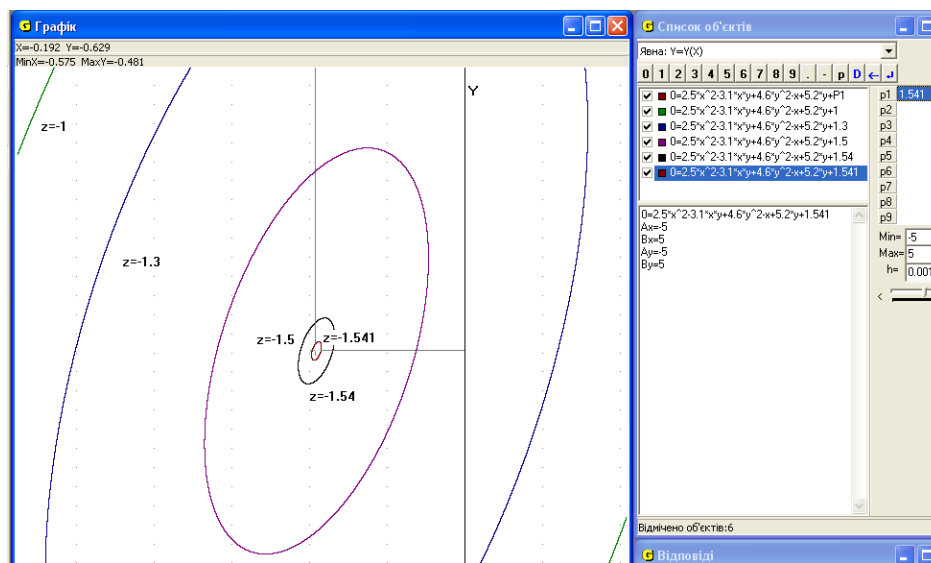


Рис. 2.6.3

Класичний метод знаходження точок екстремуму [77, с.81] ґрунтується на диференціальному численні.

В процесі дослідження функції на екстремум важливе місце займають питання про умови оптимальності або умови екстремуму. Вони складають основу якісних методів теорії оптимізації, за допомогою яких вивчаються властивості екстремальних задач і які використовуються під час побудови та обґрунтування чисельних методів розв'язування цих задач, а у деяких випадках для отримання явного розв'язку екстремальної задачі.

Розрізняють необхідні і достатні умови екстремуму. Необхідними є умови, яким повинна задовольняти точка, яка може бути розв'язком екстремальної задачі. Достатніми є умови, з яких випливає, що знайдена точка є точкою екстремуму певного типу (точкою мінімуму чи максимуму).

Детально ці питання студенти вивчають під час навчання курсу математичного аналізу. В процесі навчання математичної інформатики потрібно актуалізувати знання стосовно дослідження функції на екстремум і розглянути засоби комп'ютерних математичних пакетів для розв'язування задач на екстремум (таблиця 2.6.1).

Таблиця 2.6.1

Опорна схема дослідження функції на екстремум

$f(x)$	$f(x, y)$
<p>1. Знайти похідну $y' = f'(x)$.</p> <p>2. Знайти критичні точки функції, в яких $f'(x) = 0$ або не існує.</p> <p>3.1. Дослідити знак похідної ліворуч і праворуч від кожної критичної точки. Якщо в разі переходу в напрямі збільшення аргумента через критичну точку знак похідної змінюється, то екстремум в цій точці існує, причому якщо знак змінюється з плюса на мінус – точка максимуму, якщо з мінуса на плюс – точка мінімуму. Якщо знак не змінюється – екстремуму немає. Або:</p> <p>3.2. Знайти другу похідну функції $f''(x)$. Дослідити знак другої похідної в кожній критичній точці. Якщо $f''(x_0) > 0$, тоді x_0 – точка мінімуму, якщо $f''(x_0) < 0$, тоді x_0 – точка максимуму.</p>	<p>Якщо існують частинні похідні функції $z = f(x; y)$, то критичні точки, або точки, підозрілі на екстремум, шукаються серед розв'язків системи рівнянь: $\frac{dz}{dx} = 0, \frac{dz}{dy} = 0$.</p> <p>Нехай в результаті розв'язування даної системи одержали точку $M(x_0; y_0)$. Позначимо через A, B, C відповідно до значення $\frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dxdy}, \frac{d^2z}{dy^2}$ в точці M.</p> <p>Якщо:</p> <p>1) $\Delta = AC - B^2 > 0$, то в точці $(x_0; y_0)$ функція досягає максимуму $z(x_0; y_0)$, коли $\Delta < 0$, коли $\Delta > 0$ – тоді мінімуму;</p> <p>2) $\Delta = AC - B^2 < 0$, тоді екстремуму немає;</p> <p>3) $\Delta = AC - B^2 = 0$ – сумнівний випадок, потрібні додаткові дослідження.</p>

Розв'язування задачі з прикладу 2.6.1 класичним способом з використанням послуг програми Maxima матиме такий вигляд:

```
/* визначаємо дану функцію */
```

```
f(x, y) := 2.5*x^2 - 3.1*x*y + 4.6*y^2 - x + 5.2*y;
```

```
/* обчислюємо частинні похідні*/
```

```
fx: diff(f(x, y), x); fy: diff(f(x, y), y);
```

```
(fx) -3.1*y + 5.0*x - 1
```

```
(fy) 9.2*y - 3.1*x + 5.2
```

```
/* знаходимо критичні точки*/
```

```
algsys([fx, fy], [x, y]), numer;
```

```
[[x=-0.1901621324539709, y=-0.6292937620225336]]
```

$x_0: -0.1901621324539709$ $y_0: -0.6292937620225336$

/*Перевіряємо виконання необхідних умов існування екстремуму в критичній точці*/

$\text{diff}(f_x, x) * \text{diff}(f_y, y) - \text{diff}(f_x, y)^2;$

36.39 /* одержали додатне число, отже, маємо точку мінімуму*/

$f(x_0, y_0);$

-1.541082715031602 /*мінімум функції*/

Автоматизований пошук екстремумів функції в середовищі комп'ютерних математичних пакетів виконується за допомогою спеціальних процедур, в основі яких лежать чисельні методи.

Зокрема в програмі Maple для пошуку екстремумів функцій є команди, які входять до стандартної бібліотеки даної програми: **minimize(f, vars, ranges, opts)**, **maximize(f, vars, ranges, opts)**.

Детально синтаксис і правила використання цих функцій розглянуті в [25]. Знайдемо мінімум функції з прикладу 2.6.1 з використанням засобів програми Maple:

"Мінімум функції $f(x, y)$ ";

minimize(f, location);

В результаті виконання записаних операторів отримуємо результат:

"Мінімум функції $f(x, y)$ "
-1.541082715, [{x = -0.1901621325, y = -0.6292937620}, -1.541082715]}

Для розв'язування екстремальних задач за допомогою системи Mathcad використовують вбудовані функції *Minimize* та *Maximize* (рис. 2.6.4).

Важливими для розвитку навчально-дослідницьких умінь студентів є задачі на умовний екстремум, коли на екстремум досліджується функція $z = f(x, y)$ за

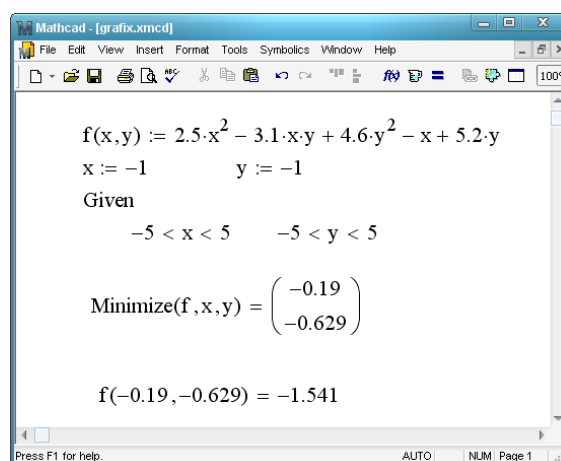


Рис. 2.6.4

умови, що на змінні x та y накладені певні обмеження. Коли змінні x та y пов'язані рівнянням зв'язку $\varphi(x, y) = 0$, така задача зводиться до дослідження на

безумовний екстремум функції Лагранжа $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$, де λ – множник Лагранжа. Після виключення λ досліджують на екстремум функцію Лагранжа $L(x, y)$ як функцію двох змінних.

Для знаходження умовного екстремуму із заданими обмеженнями-рівностями на змінні в програмі Maple є команда **extrema(f, constr, vars, `s`)**.

За цією командою реалізується метод множників Лагранжа для знаходження точок умовного екстремуму за обмежень-рівностей, а її результатом є значення цільової функції в точках умовного екстремуму.

Якщо вимагається знайти значення змінних, за яких функція набуває найменшого (найбільшого) значення за умови виконання певних обмежень на змінні, заданих у вигляді лінійних нерівностей, то процедур із стандартної бібліотеки програми недостатньо, необхідно скористатися пакетом *simplex*. Отже, спочатку завантажується даний пакет за командою **with(simplex)**, а потім використовуються команди **minimize(f, C, vartype)**, **maximize(f, C, vartype)**, які будуть відрізнятися набором параметрів від аналогічних команд із стандартної бібліотеки системи Maple.

Для знаходження екстремуму функції за заданих нелінійних обмежень-нерівностей (задачі нелінійного математичного програмування) в Maple можна скористатися пакетом *Optimization*. В цей пакет входять функції: **Minimize(f, constr, ranges, opts)**, **Maximize(f, constr, ranges, opts)**.

Приклад 2.6.2. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x, y) = x + \sqrt{y}$ за умов $x + y \geq 1$ та $x^2 + y^2 = 1$.

Оскільки в цій задачі одне з обмежень на змінні задане у вигляді нелінійної нерівності, то в програмі Maple для пошуку екстремуму необхідно скористатися функціями пакету *Optimization*.

```
> with(Optimization) :
f:=x+sqrt(y) ;
"Мімум функції:" ;
Minimize(f, {x+y>=1, x^2+y^2=1}) :
```

```

evalf(%,4);
"Максимум функції:";
Maximize(f, {x+y>=1, x^2+y^2=1}):
evalf(%,4);

```

В результаті виконання записаних команд отримуємо:

```

f:=x+√y
"Мінімум функції:"
[1.000, [x = 1.883 10-16, y = 1.]]
"Максимум функції:"
[1.577, [x = 0.8307, y = 0.5567]]

```

В програмі Mathcad команди *Minimize* та *Maximize* використовуються і для розв'язування задач на умовний екстремум, причому обмеження можуть бути задані у вигляді лінійних і нелінійних рівнянь чи нерівностей.

Під час розв'язування задач нелінійного програмування в контекстному меню команд *Minimize* або *Maximize* можна обрати один з ітераційних методів пошуку екстремуму, зокрема метод лінійних наближень, метод квазіньютонівських наближень, метод спряжених градієнтів, метод квадратичних наближень.

Пошук мінімуму з використанням програми Mathcad можна організувати і за допомогою функції *Minner*. Для цього необхідно ім'я функції *Minimize* замінити на *Minner*, а після ключового слова *Given* додати вираз, за яким прирівнюється значення функції f до значення, яке напевне менше мінімального.

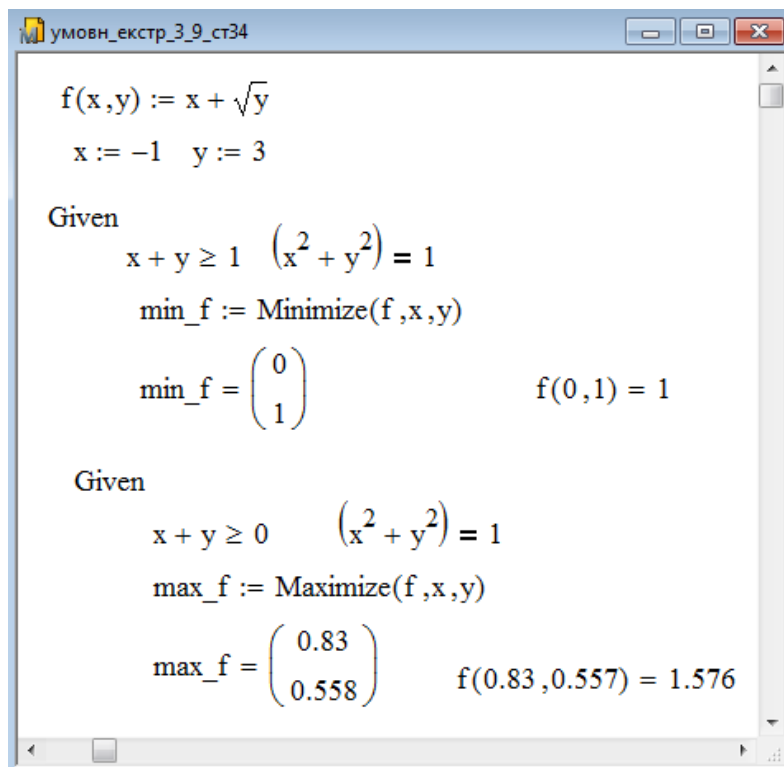


Рис. 2.6.5

Щодо розв'язування екстремальних задач в системі Maxima значно скромніший інструментарій порівняно з вище розглянутими програмами. В цій програмі є процедура `maximize_lp` (`minimize_lp`), за допомогою якої знаходять екстремум лінійної функції з обмеженнями у вигляді лінійних нерівностей.

В результаті розв'язування прикладу 2.6.2 в програмі Mathcad за допомогою процедур *Minimize* або *Maximize* одержуємо відповідь (рис. 2.6.5), яка фактично збігається з результатом, одержаним у програмі Maple.

Використання послуг програми Gran1 дає можливість за графічними методами знаходити наближені розв'язки деяких задач на відшукання найбільших чи найменших значень функції однієї чи двох змінних на множинах, визначених через деякі системи нерівностей (чи якимось іншим чином) [73]. Перевіримо одержаний в СКМ Maple та Mathcad розв'язок прикладу 2.6.2, використовуючи програму Gran1.

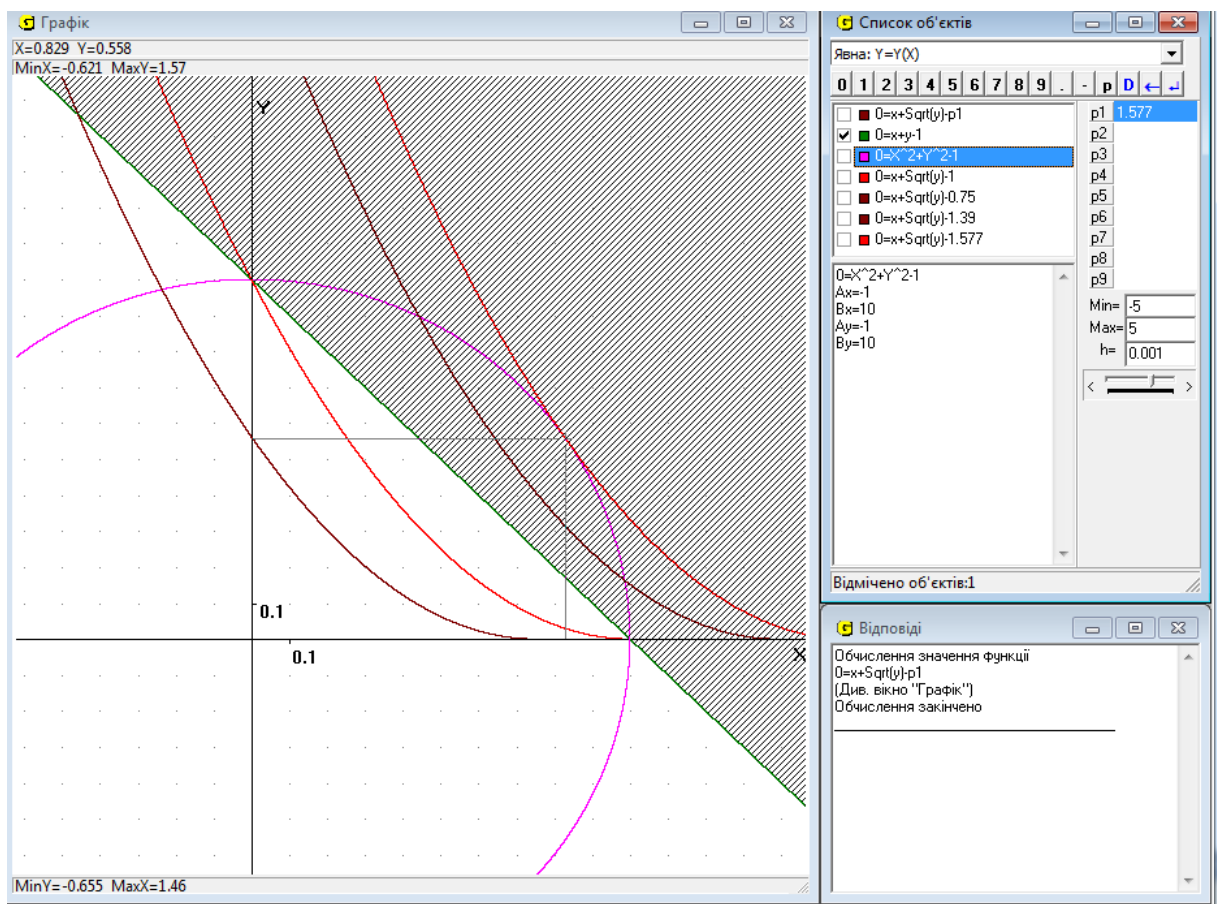


Рис. 2.6.6

Побудуємо графіки залежностей $X^2+Y^2-1=0$ та $X+Y-1=0$. За допомогою послуги *Операції*→*Нерівності*→*C-ма нерівностей* $G(x, y) < (>) 0$ встановлюємо, що

мінімум та максимум треба знаходити на множині точок дуги кола, яку відтинає пряма $x + y = 1$ (рис. 2.6.6).

Далі побудуємо графіки залежностей $X + \sqrt{Y} - P1 = 0$ для різних значень параметра $P1$, тобто лінії рівня даної функції. Слідкуючи за зміною $P1$, приходимо до висновку, що за заданих обмежень функція $f(x, y) = x + \sqrt{y}$ набуває мінімального значення в точках перетину прямої та кола, які в даному випадку лежать на прямих Ox та Oy , а максимального значення – в точці дотику графіка $X + \sqrt{Y} - P1 = 0$ та кола $X^2 + Y^2 - 1 = 0$. Отже, мінімального значення, яке дорівнює 1, дана функція набуває в двох точках з координатами $(0; 1)$ та $(1; 0)$, а максимуму, який наближено дорівнює 1.577, функція набуває в точці $x = 0.83$, $y = 0.55$ (рис. 2.6.6).

Слід зауважити, що в програмах Maple та Mathcad одержали неповний розв'язок, а саме лише одну точку мінімуму, хоча насправді їх виявилось дві.

Таким чином, за допомогою Gran1 можна знайти екстремум функції з точністю, яка не поступається точності результатів, отриманих за допомогою професійних математичних пакетів, та перевірити одержаний розв'язок. До того ж, розв'язування екстремальних задач за графічними методами розвиває уяву та формує у студентів необхідні вміння та навички їх розв'язування. Розв'язуючи одну і ту саму задачу різними способами з використанням різних математичних пакетів, можна краще зрозуміти особливості того чи іншого методу, його переваги та недоліки залежно від змісту задачі.

Оскільки для розв'язування екстремальних задач в системах комп'ютерної математики використовуються наближені ітераційні методи, то результат може залежати від обраного початкового наближення (зокрема, в програмі Mathcad). Тому в разі розв'язування реальних задач потрібно шукати розв'язки для різних початкових даних, обов'язково аналізуючи одержані результати.

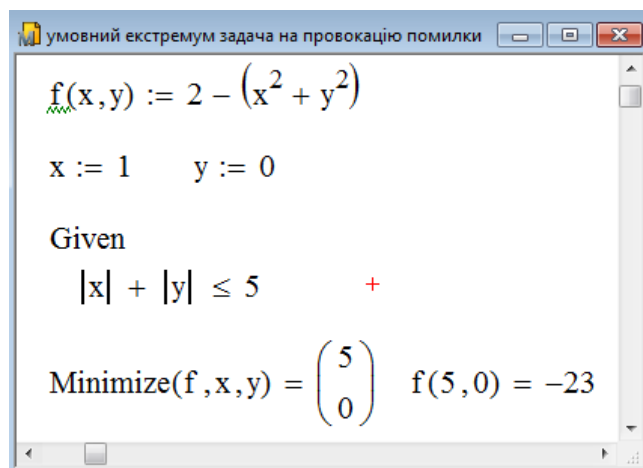


Рис. 2.6.7

Приклад. 2.6.3. Знайти найменше значення функції $f(x, y) = 2 - (x^2 + y^2)$ на множині розв'язків нерівності $|x| + |y| \leq 5$.

Розв'язування даної задачі в середовищі Mathcad за допомогою конструкції Given – Minimize подано на рис. 2.6.7. Але чи правильний результат одержано?

Розглянемо дану задачу, користуючись послугами програми Gran1. Побудуємо графік залежності $abs(x) + abs(y) - 5 = 0$.

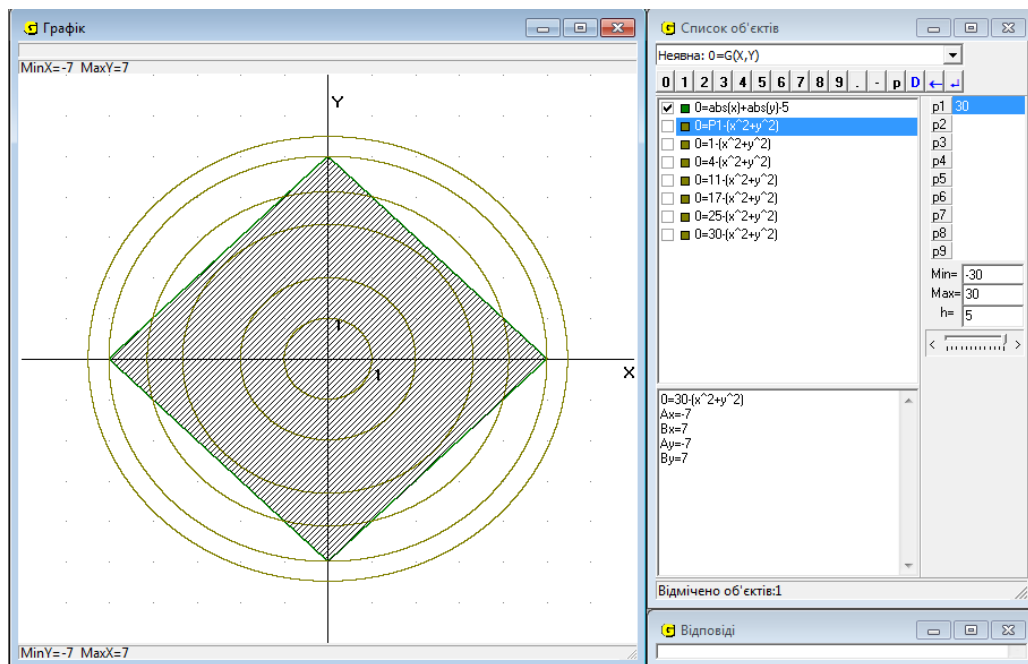


Рис.2.6.8

Звернувшись до послуги *Операції/Нерівності/Система нерівностей*, легко бачити, що будь-яка точка всередині отриманого квадрата буде окремим розв'язком даної нерівності (рис. 2.6.8).

Побудуємо далі графіки залежностей $P1 - (x^2 + y^2) = 0$ для різних значень параметра $P1$. Як видно з рисунка 2.6.8, множиною розв'язків нерівності $|x| + |y| \leq 5$ є внутрішня область квадрата з вершинами в точках $(5;0)$, $(0;5)$, $(-5;0)$, $(0;-5)$, і найменшого значення, рівного -23 , функція $f(x, y) = 2 - (x^2 + y^2)$ досягає в цих чотирьох точках, що належать до множини розв'язків нерівності $|x| + |y| \leq 5$.

Одержати дану відповідь можна також, встановивши курсор на вираз $G(x, y) = 2 - (x^2 + y^2)$ у вікні *Список об'єктів* і звернувшись до послуги

Операції/Значення виразу $G(x, y)$. Переміщуючи координатний курсор всередині області розв'язків, можна відстежити значення виразу $2 - (x^2 + y^2)$, що обчислюється у вікні *Графік*.

Отже, в програмі Mathcad одержали правильний розв'язок, але частковий. Такий результат можна пояснити тим, що в даному випадку за ітераційними методами шукався розв'язок, що розташований найближче до початкових значень x та y (рис. 2.6.9).

В системах комп'ютерної математики зазвичай вбудовано розвинені мови програмування. Розв'язування задач на написання програми пошуку максимуму або мінімуму сприятиме ознайомленню студентів з алгоритмами чисельних методів

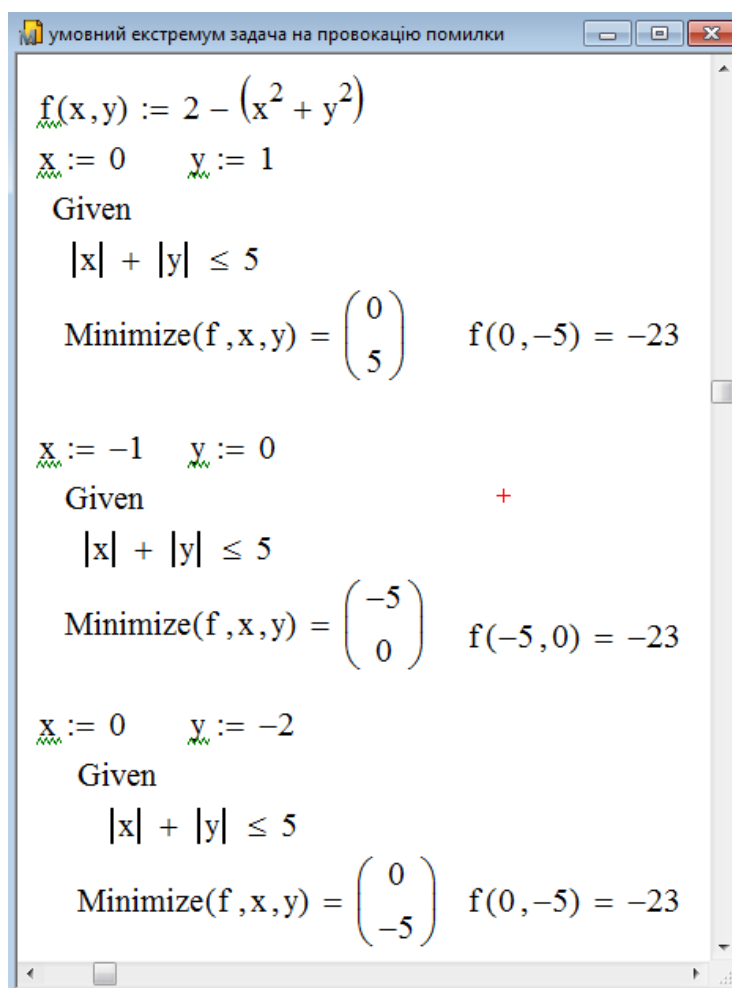


Рис.2.6.9

пошуку екстремумів і дасть змогу зрозуміти, яким чином «влаштовані» команди програми та на основі яких процедур вони виконуються.

В Додатку Г наведена програма для знаходження мінімуму функції з прикладу 2.6.1 за методом найшвидшого спуску в середовищі Maple.

Розв'язування оптимізаційних задач практичного характеру з використанням математичних методів і засобів комп'ютерних технологій проходить через такі основні етапи [77, с.20], які також можна подати у вигляді схеми (рис. 2.6.10):

1. Постановка задачі стосовно реальних об'єктів. В процесі постановки будь-якої практичної задачі вона спочатку формулюється в реальних термінах галузі

людської діяльності, де задача виникла. Чітко визначається мета, яку необхідно досягти в результаті розв'язування.

2. Постановка задачі стосовно математичних об'єктів (побудова математичної моделі). Необхідно описати умову задачі мовою математики (формальною мовою). Процес побудови такого опису називають формалізацією або побудовою математичної моделі. Він починається з введення символічних позначень для тих характеристик об'єкта дослідження, які є найбільш суттєвими. Потім на основі введених символічних позначень описуються величини, які задані поза моделлю і значення яких відомі заздалегідь. Далі описуються змінні, параметри, величини, значення яких визначаються в процесі розрахунків у межах моделі задачі і не задані безпосередньо в умові задачі. Конкретні цілі, поставлені в задачі, описуються за допомогою цільової функції, максимум чи мінімум якої треба знайти. Задаючи обмеження, через які відображають, як правило, нестачу відповідних ресурсів або умови, за яких відбувається певний процес, визначають деяку множину значень величин, від яких залежить цільова функція і які задовольняють всі умови задачі. Через цю множину значень визначається множина допустимих розв'язків задачі.

3. Класифікація одержаної математичної задачі і добір методу для її розв'язування. Необхідно визначити, до якого типу моделей (математичних задач) належить розглядувана задача. Якщо одержана після формалізації математична задача належить до певного класу, то метод для її розв'язування обирається, як правило, серед уже існуючих методів.

4. Вибір засобів розв'язування задачі за обраним методом. Для розв'язування оптимізаційної задачі можна використати комп'ютер з відповідним програмним забезпеченням, зокрема засоби систем комп'ютерної математики. Якщо такого програмного засобу немає, то необхідно скласти алгоритм за обраним або розробленим методом і описати відповідну програму однією з мов програмування. У такому випадку цей етап розв'язування задачі називають етапом алгоритмізації і програмування. Після створення програми правильність її треба перевірити на контрольних задачах, розв'язки яких відомі заздалегідь.

5. Проведення обчислень, комп'ютерний експеримент, одержання результатів в математичних термінах та їх аналіз. Аналіз результатів комп'ютерного експерименту є обов'язковим, оскільки в процесі розв'язування задачі можуть бути одержані результати, які або не задовольняють умови задачі, або взагалі є некоректними. Причиною тому може бути неадекватно побудована математична модель поставленої задачі, або невдало обраний метод її розв'язування, або логічні помилки, допущені в процесі побудови алгоритму чи опису програми реалізації методу.

6. Інтерпретація результатів у реальних об'єктах. Якщо аналіз одержаних результатів показав їх адекватність умовам поставленої задачі, то необхідно з'ясувати реальний зміст цих результатів і сформулювати їх у термінах відповідної предметної галузі.

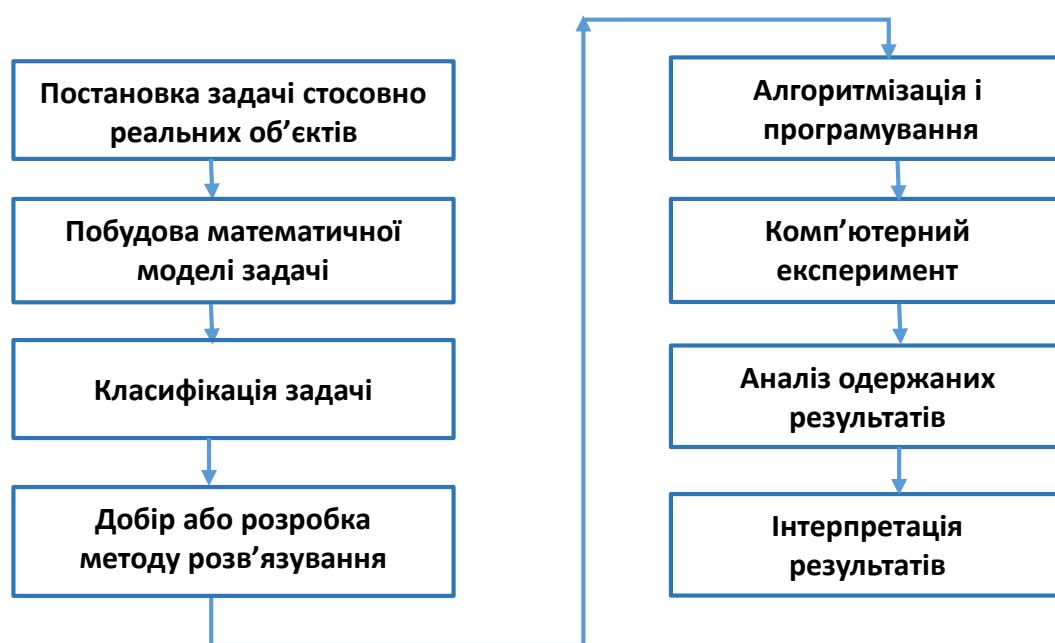


Рис. 2.6.10. Схема розв'язування задач на пошук оптимального розв'язку

Етапи розв'язування задач на пошук оптимального розв'язку можна зіставити з етапами проведення дослідження. Такі задачі пов'язані з пошуком, аналізом, формулюванням здогадки стосовно шляхів розв'язування, їх перевіркою і обґрунтуванням.

В багатьох геометричних та технічних задачах вимагається знайти найбільше або найменше значення величини, що пов'язана функціональною залежністю з

іншими величинами. Для розв'язування таких задач необхідно з умови задачі визначити незалежні змінні та відповідні залежні величини, а потім знайти найбільші або найменші значення так визначених функцій.

Приклад 2.6.4. З жерстяного круга потрібно виготовити конус максимального об'єму.

Спочатку постає питання, яким чином з круга можна виготовити конус. Щоб виготовити конус з жерстяного круга, необхідно вирізати сектор, одержану викройку згорнути в конус і з'єднати шов (рис. 2.6.11). Від якого параметра може залежати об'єм конуса? За умовою задачі є в наявності певний жерстяний круг, тому радіус круга – стала величина, через яку визначається довжина твірної конуса, об'єм конуса очевидно буде залежати від величини вирізаного сектора. Отже, приходимо до питання: яким повинен бути кут α вирізаного сектора, щоб об'єм одержаного конуса був максимальним?

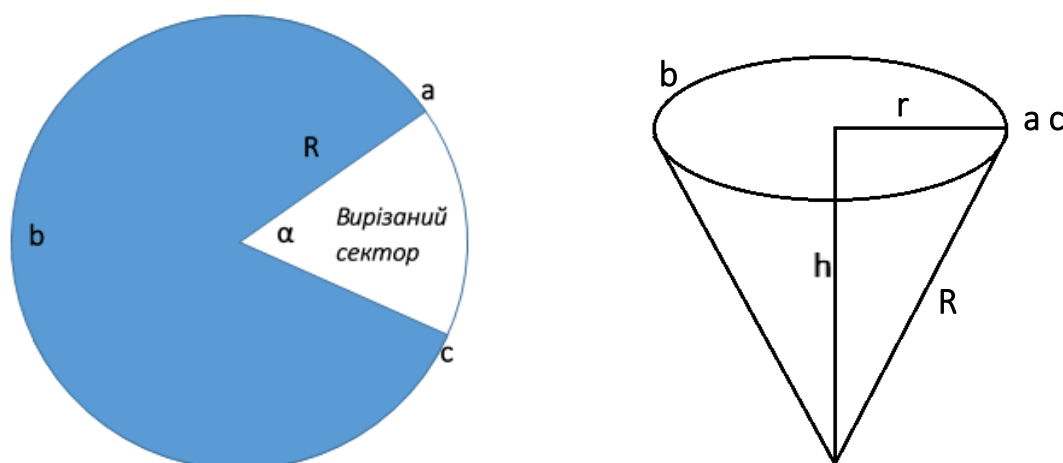


Рис. 2.6.11

Тепер виконаємо постановку задачі в математичних термінах.

Знайдемо залежність об'єму конуса від кута сектора, що вирізається. Об'єм конуса обчислюється за формулою $V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$, де r – радіус основи конуса, h –

висота конуса. Позначимо через α кут сектора, що треба вирізати. Довжина дуги abc круга з вирізаним сектором дорівнює довжині кола, що лежить в основі

виготовленого конуса: $2\pi R - 2\pi R \frac{\alpha}{2\pi} = 2\pi r$. Розв'язуємо отримане рівняння

відносно r . Одержуємо залежність $r(\alpha, R) = \frac{(2\pi - \alpha)R}{2\pi}$. Виразимо h через радіус

круга і радіус основи конуса: $h(\alpha, R) = \sqrt{R^2 - r(\alpha, R)^2}$. Тоді об'єм конуса $V(\alpha, R) = \frac{1}{3} \pi \cdot r(\alpha, R)^2 \cdot h(\alpha, R)$. Одержану функцію досліджуємо на максимум як функцію однієї змінної α , оскільки R – відома величина за умовою.

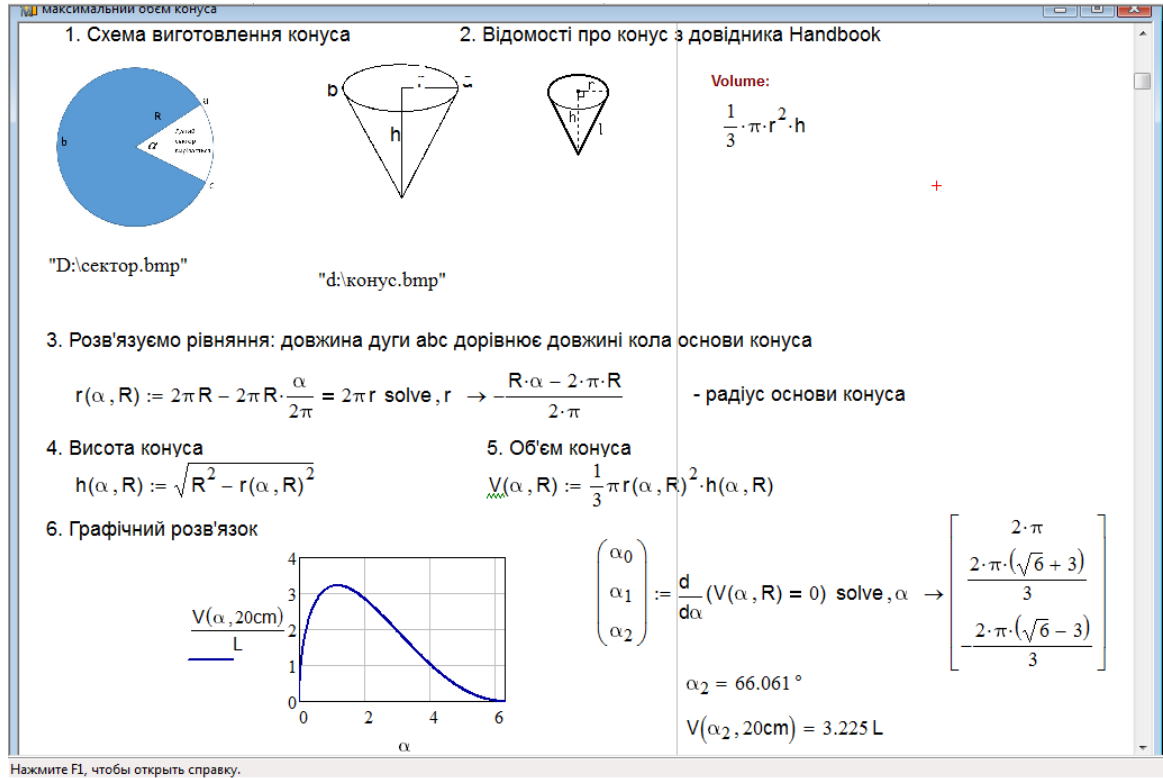


Рис.2.6.12

Для виконання обчислень оберемо середовище програми Mathcad (рис.2.6.12), оскільки всі аналітичні розрахунки в документі програми майже не відрізняються від звичних математичних записів. Схеми виготовлення конуса можна подати у вигляді малюнка на тому самому аркуші, де розв'язується задача, а також в Mathcad зручно робити розрахунки з використанням розмірних величин.

Графічний розв'язок маємо на графіку. Досліджуючи функцію $V(\alpha, R)$ на максимум за класичним методом, одержуємо результат $\alpha = 66,061^\circ$. Якщо, наприклад, $R = 20 \text{ см}$, максимальний об'єм конуса становитиме 3,225 л (рис.2.6.12).

Дану задачу вважатимемо задачею з динамічною умовою. Знаючи кут вирізаного сектора, можна продовжити дослідження: як буде залежати об'єм конуса від величини радіуса даного круга; розв'язати задачу за допомогою функції

Maximize (тобто за чисельними методами) або за допомогою послуг програми Gran1. Студенти можуть сформулювати та розв'язати інші задачі: виготовити два конуси максимального об'єму з даного круга жерсті; виготовити зрізаний конус максимального об'єму тощо.

Таким чином, з'являється поле для творчої діяльності студентів. Студенти вчаться самостійно ставити нові проблеми та шукати їх розв'язки, а, отже, продовжувати виконувати дослідження самостійно і розвивати свої дослідницькі уміння, поглиблювати знання з математики та інформатики, застосовувати їх до розв'язування практичних задач. Саме практична значущість оптимізаційних задач може бути мотиваційною основою для навчально-дослідницької діяльності студентів.

В процесі навчання математичної інформатики відомості про засоби комп'ютерних математичних пакетів для пошуку екстремумів та способи їх застосування подаються викладачем на лекційних заняттях, а також засвоюються студентами в процесі розв'язування задач під час виконання відповідних лабораторних робіт (див. додаток Д). Для закріплення та систематизації знань студентам пропонується скласти узагальнюючу таблицю, в якій наведено дані про можливості застосування різних систем комп'ютерної математики та перелік вбудованих функцій і пакетів розширення, які можна застосувати до розв'язування оптимізаційних задач.

У процесі самостійної роботи студенти добирають задачі на пошук оптимальних розв'язків та розв'язують за допомогою засобів комп'ютерних математичних пакетів. Роботи студентів публікуються на спільному електронному ресурсі, що створений викладачем, де студенти можуть ознайомитися з задачами один одного, проаналізувати запропонований розв'язок, дати рецензію на роботу одногрупників. Викладач перевіряє всі роботи. Спільно визначаються найбільш цікаві задачі, на основі яких студенти в подальшому можуть підготувати публікації в студентському збірнику статей або зробити доповідь на студентській науковій конференції.

2.7 Програмування візуально орієнтованого інтерфейсу в програмі Maple

Серед сучасних інформаційних технологій особливе місце займають технології програмування. Візуальне програмування – один із сучасних напрямів програмування. В його основі лежить об'єктно орієнтований підхід до описування перебігу різноманітних процесів і проявів явищ, який є одним з найбільш ефективних та зручних і використовується сьогодні програмістами для створення великих програмних систем.

Вміння працювати в середовищі візуального програмування є важливим компонентом в системі професійних компетентностей студентів фізико-математичних спеціальностей. Володіння навичками візуального програмування підвищує професійний рівень використання сучасних прикладних програм, дає змогу конструювати для них додатки, які застосовуються в практичній сфері діяльності.

Для візуально орієнтованого програмування важливими є поняття «інтерфейс користувача», «графічний інтерфейс користувача».

В тлумачних словниках [6], [41] *інтерфейс користувача (user interface)* означено як сукупність засобів управління комп'ютерною системою з боку користувача.

У 80-х рр. ХХ ст. інтерфейси користувача були текстовими або створювалися у вигляді спеціальних форм. На сьогодні практично на всіх комп'ютерах підтримується графічний (візуально орієнтований) інтерфейс користувача .

Графічний користувацький інтерфейс (Graphical User Interface, GUI) – інтерфейс, в основі якого лежить візуалізація об'єктів, з якими працює користувач, а також самого процесу опрацювання таких об'єктів [6].

Грамотно спроектований інтерфейс користувача вкрай важливий для успішної роботи з програмним засобом. Тому розробник програмного додатку повинен знати основні принципи проектування ефективного інтерфейсу користувача.

Процес проектування інтерфейсу повинен орієнтуватися на користувача і здійснюватися за такими принципами [55], [133]:

1. *Природність (інтуїтивна зрозумілість) інтерфейсу.* Природний (інтуїтивно зрозумілий) інтерфейс означає, що користувач не повинен істотно змінювати звичні для нього способи розв'язування задачі. Це, зокрема, означає, що до повідомлень та результатів, які з'являються в процесі роботи з програмним додатком, не повинні вимагатися додаткові пояснення. Доцільно також зберегти систему позначень та термінологію, які використовуються в цій предметній галузі.

2. *Узгодженість інтерфейсу* – дає змогу користувачам застосовувати наявні знання для розв'язування нових завдань та зосереджувати увагу на розв'язуваній задачі, а не витратити час на з'ясування відмінностей у використанні тих чи інших елементів управління, команд тощо. Узгодженість робить інтерфейс пізнаваним та передбачуваним.

3. *«Люб'язність» інтерфейсу.* Навіть за наявності добре спроектованого інтерфейсу користувачі можуть допускати ті чи інші помилки. На кожному етапі роботи повинен дозволятися тільки певний набір дій і видаватися попередження користувачам про ситуації, де можуть бути ушкоджені дані. Ще краще, якщо у користувача є можливість скасувати або виправити результати виконаних дій. За ефективного інтерфейсу повинні забезпечуватися можливості користувачеві попередити ситуації, які ймовірно закінчатся з помилками. В інтерфейс можуть бути вбудовані засоби підтримки дій користувача, за допомогою яких забезпечуються різні рівні допомоги та довідки.

4. *Принцип зворотного зв'язку.* Кожна дія користувача повинна отримувати візуальне, а іноді звукове підтвердження того, що введена команда прийнята і виконана.

5. *Простота інтерфейсу.* Мається на увазі не спрощеність, а зручність і комфортність вивчення і використання інтерфейсу. Крім того повинен без перешкод надаватися доступ до всього переліку функціональних призначень програмного засобу. Один з важливих шляхів підтримки простоти – лаконічне подання на екрані повідомлень, необхідних для виконання користувачем певного кроку завдання. Багатослівні командні імена або повідомлення, непродумані або непотрібні фрази можуть ускладнювати отримання важливих відомостей і даних. Інший шлях до створення простого, але ефективного інтерфейсу – розміщення та

подання на екрані елементів з врахуванням їх змістового значення та логічних взаємозв'язків.

6. *Гнучкість інтерфейсу*. Полягає у пристосуванні його до рівня підготовки та результативності праці користувача. Гнучкість означає можливість зміни системи управління виконанням завдань чи вхідними даними.

7. *Естетична привабливість*. Потрібно, щоб середовище, яке формується на екрані, було не тільки легко доступним для розуміння користувачем поданих повідомлень, але і щоб, працюючи з ним, користувач міг зосередитися на найважливіших особливостях повідомлень і даних.

Крім загальних принципів проектування інтерфейсу, в кожній галузі є свої спеціальні особливості, які слід враховувати в процесі розробки програмних засобів.

Наприклад, проектування навчальної програми повинно базуватися на певному психолого-педагогічному фундаменті. Передусім необхідно спроектувати процес навчання і лише потім проектувати його комп'ютерну підтримку [133].

До навчальних програм висуваються педагогічні вимоги: дидактичні, методичні, обґрунтування вибору тематики, перевірка на педагогічну доцільність використання, врахування вікових та індивідуальних особливостей користувачів.

М.І.Жалдак зазначає, що сучасний розвиток програмного забезпечення комп'ютерів досяг такого рівня, коли в багатьох випадках алгоритм досягнення мети може бути побудований автоматично. В такому разі вказівки комп'ютерові потрібно задавати в термінах шуканих результатів, а не в описах процесів, що приводять до таких результатів. Головна трудність полягає в тому, щоб кваліфіковано і точно охарактеризувати шукані результати, що висуває відповідні вимоги до загальної строгості і логічності мислення користувача. Особливого значення в процесі використання інформаційно-комунікаційних технологій у навчальному процесі набуває врахування і розвиток неформалізованих, творчих компонентів мислення: реалізація проблемної ситуації чи постановка задачі; самостійне вироблення критеріїв добору потрібних операцій, що приводять до розв'язку та ін. [79].

Програма Maple – одна з небагатьох систем комп'ютерної математики, до якої

включено засоби програмування інтерфейсу, які можна використовувати для розробки програмних додатків навчального призначення з графічним інтерфейсом.

В останніх версіях програми (починаючи з Maple 8) [221] було введено новий пакет Maplets, призначення якого – програмування візуально орієнтованого (графічного) інтерфейсу для виконання обчислень із застосуванням процедур Maple, запитів та повідомлень. Такі додатки прийнято називати маплетами (maplets, Maplet Application). Якщо в процедурному програмуванні головною метою було отримати результат і вивести його на екран у звичайному поданні, то під час роботи з маплетами оформлення результатів на екрані відіграє важливу роль. Результати розміщуються у характерному для операційної системи Windows вікні, де можна застосувати різноманітні елементи управління, властиві для вікон прикладних програм: текстові поля, поля редагування, поля-списки, кнопки, слайдери тощо.

Пакет Maplets створений на основі застосування засобів мови Java. Але для створення маплетів не обов'язково володіти мовою Java, достатньо знати основи програмування в Maple та вміти використовувати засоби пакету Maplets.

В пакет Maplets вбудовано функцію Display, яка необхідна для управління створеним маплетом, та підпакели:

1) Elements (Елементи) – набір команд для створення та налаштування окремих елементів маплету, наприклад, вікон, кнопок, текстових та графічних полів, списків, слайдерів, таблиць, меню, розмітки вікна тощо;

2) Examples (Приклади) – команди використання заготовок, зокрема, вікна з попередженнями, вказівками чи запитам, вікна налаштування кольорів, вибору шляху до файлу та ін.;

3) Tools (Інструменти) – допоміжні засоби для розробки маплетів;

4) Utilities (Послуги) – сервісні команди для подання на екрані вікон з повідомленнями про помилки, відкривання файлу, довідки.

В таблиці 1 (див. Додаток Е) подано основні функції програмування візуально орієнтованого інтерфейсу, які передбачені в даних підпакетах, а також наведено приклад створення маплету.

Маплет можна зберегти як окремий програмний додаток, який відкривається за допомогою MarpletisViewer і не потребує запуску програми Maple. Для цього треба виконати послугу *File/Export As...* та зберегти як файл з розширенням **.maplet*.

Таким чином, використовуючи процедури пакету Marplets, можна створювати додатки з елементами візуально орієнтованого інтерфейсу, що допоможе користувачеві виконувати обчислення, навіть не знаючи тонкощів роботи з системою Maple.

Маплети можуть використовуватися як зручний засіб автоматизації опрацювання експериментальних даних в процесі проведення математичних досліджень. Їх використання суттєво полегшує налаштування та опис змінних і параметрів у процедурах Maple.

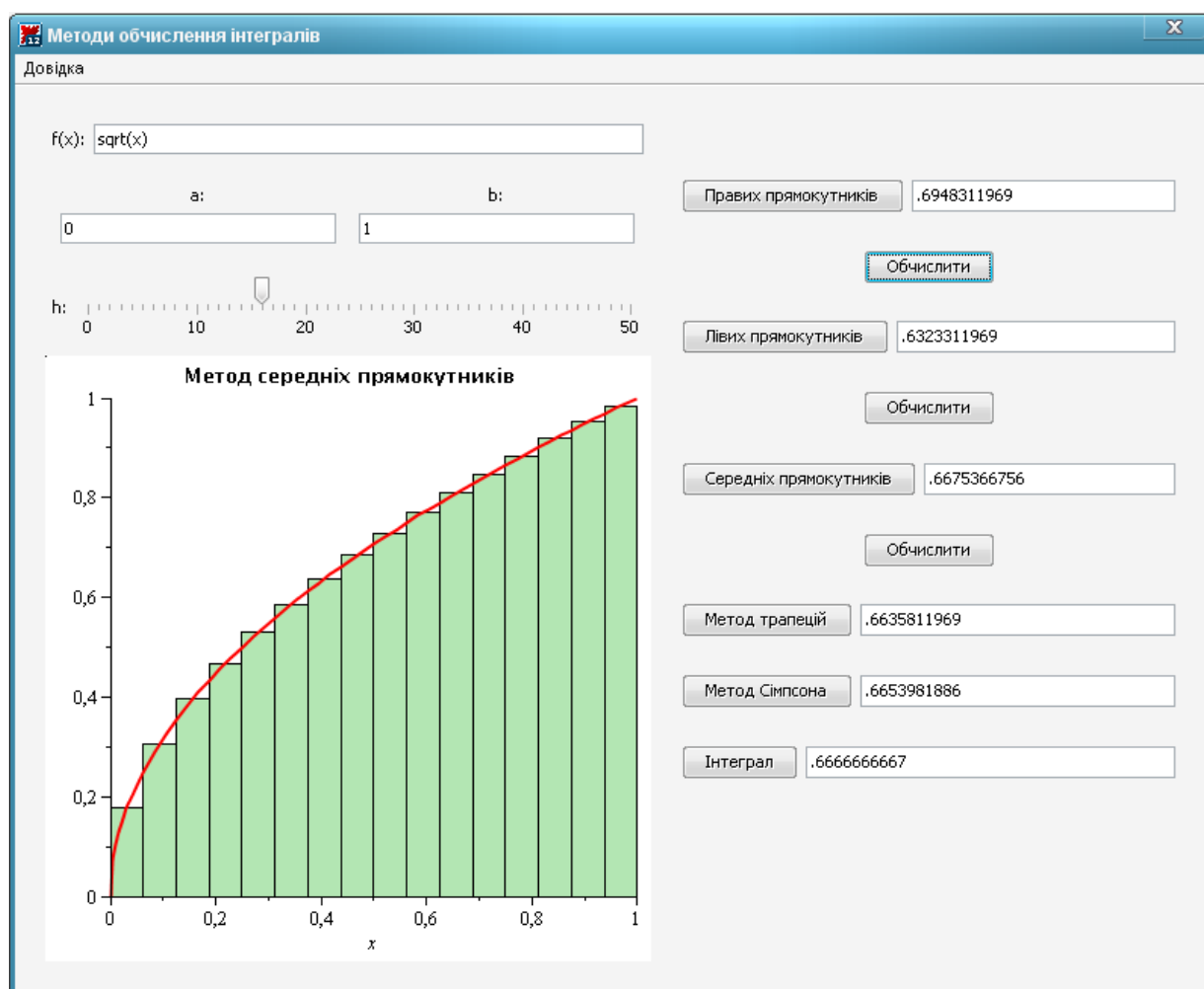


Рис. 2.7.1

Розглянемо маплет «Методи обчислення інтегралів», який створено з метою підтримки навчання методів чисельного інтегрування (рис. 2.7.1). В поле $f(x)$:

вводимо вираз функції, в поля a : і b : – межі інтегрування. На слайдері h : вказуємо крок поділу інтервала $[a;b]$. Натискаючи на відповідні кнопки, отримуємо графічне подання результатів інтегрування за тим чи іншим методом.

Використовуючи цей маплет, легко скласти таблицю значень визначеного інтеграла в заданих межах від заданої функції, обчисленого за квадратурними формулами середніх прямокутників, трапецій, Сімпсона, за методами, передбаченими в Maple (таблиця 2.7.1). Порівнюючи отримані дані, можна дослідити, як змінюються значення інтеграла із зменшенням кроку h та подрібненням інтервала інтегрування на відповідні частини, за якими формулами отримуються результати найвищої точності, чим це зумовлено.

Таким чином, навички роботи із засобами візуально орієнтованого програмування інтерфейсу в Maple дають можливість викладачам та вчителям самим розробляти навчальні, демонстраційні, контролюючі та інші педагогічні програмні засоби досить високого дидактичного рівня. Причому на основі зауважень, які виникають у процесі випробування маплетів навчального призначення, можна оперативно внести зміни для вдосконалення програмного додатку, налаштувати його під різні умови використання.

Таблиця 2.7.1

Обчислення визначеного інтеграла

	h	Середніх прямокутників	Трапецій	Сімпсона	Maple
$\int_0^1 e^x dx$	10	1.717566086	1.719713491	1.718282782	1.718281828
	20	1.718102854	1.718639789	1.718281888	1.718281828
	30	1.718202281	1.718440926	1.718281841	1.718281828
	40	1.718237082	1.718371321	1.718281833	1.718281828

З іншого боку, розробляючи свої оригінальні маплети, студенти не тільки знайомляться з принципами та технологіями візуального програмування, а також мають можливість найбільш повно розкрити свій творчий та інтелектуальний потенціал.

2.8 Проведення педагогічного експерименту та аналіз його результатів

З метою практичного обґрунтування висновків, отриманих у ході організації спостережень за навчально-пізнавальною діяльністю студентів фізико-математичних спеціальностей у процесі навчання математичної інформатики, проводилося експериментальне дослідження.

На першому етапі проводився констатувальний експеримент (2010 – 2011 рр.), спрямований на з'ясування рівня розвитку навчально-дослідницьких умінь студентів фізико-математичних спеціальностей.

На другому етапі роботи (пошуковий експеримент – 2012 – 2014 рр.) було проведено серію експериментальних занять з метою визначення необхідних складових методичної системи навчання, спрямованого на розвиток у студентів навчально-дослідницьких умінь.

Метою дослідження на заключному, третьому етапі – тобто метою формувального експерименту (2015 – 2016 рр.), – було виявлення індивідуальних змін у розвитку навчально-дослідницьких умінь та здатності студентів розв'язувати задачі дослідницького характеру.

У зміст експериментальної роботи входило виконання таких завдань:

- проаналізувати проблему розвитку навчально-дослідницьких умінь студентів, узагальнити досвід організації навчально-пізнавальної діяльності студентів фізико-математичних спеціальностей в процесі навчання математичної інформатики;
- визначити розумові дії, мисленнєві операції, уміння і навички, опанування якими сприятиме розвитку навчально-дослідницьких умінь, та вдосконалити зміст навчання математичної інформатики на фізико-математичному факультеті;
- розробити методичні рекомендації щодо розвитку навчально-дослідницьких умінь у процесі навчання математичної інформатики;

- перевірити ефективність запропонованої системи розвивальних навчально-дослідницьких завдань для розвитку навчально-дослідницьких умінь, закріплення знань та оцінювання навчальних досягнень студентів.

Виявлення рівня сформованості навчально-дослідницьких умінь студентів здійснювалося за допомогою методу експертних оцінок. Було здійснено анкетування викладачів фізико-математичного факультету Ніжинського державного університету імені Миколи Гоголя, Сумського державного педагогічного університету імені А.С.Макаренка, Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка, Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка.

На констатуючому етапі педагогічного експерименту експертам (викладачам), які вже працювали з відповідними групами і вже знають студентів, було запропоновано оцінити рівень розвитку навчально-дослідницьких умінь студентів, для чого пропонувався лист опитування (додаток А, таблиця А1).

Результати опрацювання анкетного опитування (рис. 2.8.1) свідчать, що лише у 28,8 % студентів від загальної кількості опитаних цілком достатній рівень сформованості навчально-дослідницьких умінь. У більшості студентів (52,5 %) рівень розвитку навчально-дослідницьких умінь є початковим, у 14,2 % – дуже низький рівень сформованості навчально-дослідницьких умінь, і 4,5% володіють на високому рівні уміннями, які необхідні для виконання навчально-дослідницької діяльності.

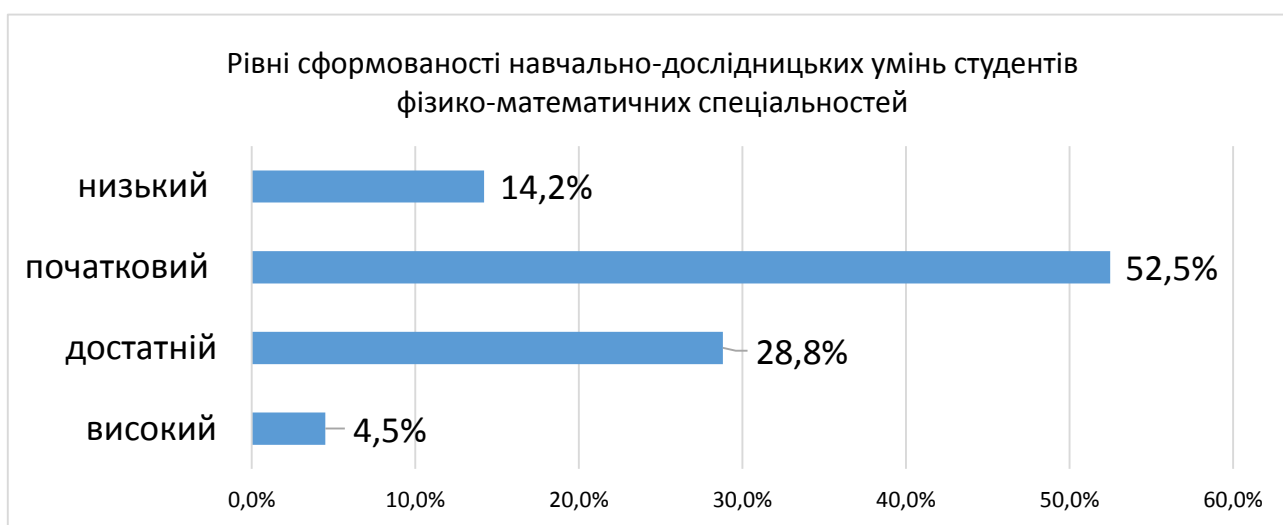


Рис.2.8.1

За результатами анкетування викладачів можна зробити висновок, що в навчальному процесі недостатня увага приділяється роботі стосовно розвитку навчально-дослідницьких умінь, оскільки помітно більше студентів з низьким або початковим рівнем розвитку навчально-дослідницьких умінь порівняно з тими, хто володіє такими вміннями на високому чи хоча б достатньому рівні.

Планування цієї роботи не має достатньої цілеспрямованості, послідовності та системності з урахуванням спеціалізації та творчих інтересів студентів. Отже, сучасну теорію і методику навчання математичної інформатики необхідно доповнити практичними рекомендаціями щодо формування і розвитку навчально-дослідницьких умінь студентів фізико-математичних спеціальностей.

Аналіз отриманих в ході констатувального експерименту даних надав можливість визначити основні завдання, конкретизувати об'єкт і предмет дослідження. Було спроектовано підходи до розв'язування поставленої проблеми: дослідження проблем формування і розвитку навчально-дослідницьких умінь в процесі навчання математичної інформатики, теоретичне обґрунтування прийомів (механізмів) розвитку у студентів навчально-дослідницьких умінь, виявлення умов реалізації дослідницького підходу в навчанні, що сприяє поетапному розвитку навчально-дослідницьких умінь у студентів фізико-математичного факультету.

Аналіз результатів констатувального етапу експериментальної роботи став підґрунтям вибору систем комп'ютерної математики як засобу розвитку навчально-дослідницьких умінь студентів фізико-математичних факультетів.

На цій основі були визначені основні напрями розв'язування проблем дослідження, а також з'ясовано можливості використання засобів комп'ютерних математичних пакетів для розвитку навчально-дослідницьких умінь студентів.

На підставі зібраних відомостей було зроблено висновок: в умовах високого інтересу студентів до дослідницької діяльності, але дефіциту навчального часу і традиційної організації освітнього процесу існує потреба пошуку педагогічно виважених і доцільних підходів до організації навчально-дослідницької діяльності студентів у процесі навчання математичної інформатики, спрямованого на розвиток навчально-дослідницьких умінь студентів.

Результативність будь-якого дослідження пов'язана з виявленням початкового стану досліджуваного явища. Враховуючи це, у змісті педагогічного експерименту значне місце відводиться вивченню рівня навчальних досягнень та розвитку навчально-дослідницьких умінь студентів, а саме: в експерименті на заняттях з математичної інформатики студентам пропонувалися завдання різної складності на:

– узагальнення навчального матеріалу; уміння дати означення; визначення головного у навчальному матеріалі; використання прийомів аналізу і синтезу, порівняння і абстрагування, встановлення та побудову зв'язків між поняттями;

– визначення рівня володіння студентами основними навичками розв'язування задач з використанням інформаційно-комунікаційних технологій; виконання завдань за відсутності повних вхідних даних;

– оцінювання студентами досконалості власного виконання завдань та відповідних міркувань, для чого пропонувався лист опитування (див. додаток А, таблиця А2).

Під час перевірки процесу розв'язування задач зверталася увага на те, що в процесі навчально-пізнавальної діяльності студентів на заняттях з математичної інформатики у кінцевому підсумку повинні сформуватися знання, уміння і навички, необхідні для раціонального використання сучасних інформаційно-комунікаційних технологій під час розв'язування різних типів задач. Діагностичні завдання добиралися таким чином, щоб:

- 1) не знадобилося багато часу на їх виконання;
- 2) активізувати процеси мислення;
- 3) деякі завдання не були чітко визначені, щоб надати простір для пошуку і творчості студентів;
- 4) використовувати різні форми подання матеріалу.

На основі аналізу результатів констатувального етапу педагогічного експерименту можна зробити висновок про доцільність роботи в напрямку вдосконалення методичної системи навчання математичної інформатики на фізико-математичному факультеті та про недостатню розробленість існуючих методичних систем навчання математичних та інформатичних дисциплін стосовно

сприяння розвитку навчально-дослідницьких умінь студентів, самостійності для подальшого навчання і виконання дослідницької діяльності.

На другому етапі, в процесі пошукового експерименту, передбачалося уточнення змісту навчання математичної інформатики і виокремлення структурних компонентів навчально-дослідницької діяльності та навчально-дослідницьких умінь, формування і розвиток яких відбувається в процесі навчання математичної інформатики.

В межах досліджуваної проблеми розроблялися основні компоненти методичної системи навчання математичної інформатики для студентів фізико-математичних спеціальностей університету, спрямованої на розвиток навчально-дослідницьких умінь студентів, проводився пошук і методичний аналіз різноманітних програмних засобів, використання яких у навчальному процесі мало б відповідати поставленим у дослідженні завданням.

Запропоновані окремі компоненти методичної системи ґрунтуються на тому, що навчання математичної інформатики має бути спрямоване не тільки на формування знань, але й на педагогічно доцільне управління навчально-пізнавальною діяльністю студентів, створення умов для прояву їхньої самостійності і активності в процесі навчання.

Для того щоб розробити методику формування і розвитку навчально-дослідницьких умінь студентів, необхідно забезпечити, перш за все, формування необхідних фундаментальних знань основ наук та відповідних умінь і навичок, правильних уявлень про взаємозв'язки математики, інформатики, фізики, економіки; використання загальнонаукових і математичних методів у практичній діяльності, через що зрештою повинен забезпечуватися розвиток навчально-дослідницьких умінь.

На цьому етапі розв'язувалися такі проблеми:

- виявлення особливостей розв'язування задач за допомогою систем комп'ютерної математики;
- проведення дидактичного аналізу різних програмних засобів математичного призначення;

- використання програмних засобів математичного призначення у навчальному процесі;
- розробка електронних засобів навчального призначення;
- структурування змісту електронного навчального курсу та з'ясування вимог, яким повинні відповідати електронні навчальні курси;
- з'ясування напрямів і можливостей розширення організаційних форм навчальної діяльності, спрямованих на посилення інтересу до навчально-дослідницької діяльності;
- добір змісту та методів навчання, використання яких сприятиме розвитку навчально-дослідницьких умінь та надасть змогу сформуванню уявлення студентів про застосування систем комп'ютерної математики та математичних методів як засобів і методів дослідницької діяльності в різних галузях людської діяльності.

У процесі пошукового етапу експерименту виконувалися такі завдання:

- здійснювався добір спочатку тренувальних завдань, а потім розвиваючих творчих завдань, для розв'язування яких необхідно використовувати СКМ;
- розроблялися окремі компоненти методичної системи навчання математичної інформатики, зокрема курсу «Комп'ютерні математичні пакети»;
- добирався матеріал для лабораторних робіт та самостійної роботи студентів;
- створювався електронний навчальний курс «Комп'ютерні математичні пакети» для підтримки навчання зазначеного курсу;
- відпрацьовувалася система доцільно дібраних задач;
- відстежувалася відповідність змісту навчання основним дидактичним принципам навчання;
- удосконалювалися організаційні форми і методи навчання;
- відстежувалися і вивчалися помилки та недоліки, які студенти допускали в своїй навчально-пізнавальній діяльності.

На цьому етапі вивчалася також проблема оцінювання рівня розвитку навчально-дослідницьких умінь студентів.

На основі аналізу результатів пошукового експерименту можна зробити такі висновки: запропоновані компоненти методичної системи навчання математичної

інформатики є науково обґрунтованими і спрямованими на розвиток навчально-дослідницьких умінь студентів; важливу роль у створенні сприятливих умов для навчання і розвитку навчально-дослідницьких умінь студентів відіграє систематичне звертання уваги на міжпредметні зв'язки, мотиваційні основи навчально-дослідницької діяльності, розвиток і підтримку пізнавального і дослідницького інтересу.

У процесі дослідно-експериментальної роботи виявлено факти впливу використання комп'ютерного математичного середовища на пізнавальну діяльність студентів:

- 1) подобається можливість миттєво побачити результат заданої дії;
- 2) приваблює можливість створювати власноруч певні об'єкти і перетворювати їх на свій розсуд – замість традиційних жорстко незмінних конструкцій;
- 3) досить швидко приходить розуміння, що програму неможливо використовувати, не будучи в достатній мірі обізнаним в математиці;
- 4) особливо подобається студентам робота з графічними об'єктами, можливість їх формувати, змінювати, анімувати. Хоч виконання цих робіт може займати багато часу, але воно приносить студентам естетичне задоволення;
- 5) загалом активізується робота мислення, концентрується увага на об'єктах дослідження та його результатах, з'являється пізнавальний інтерес; формуються навички програмування.

Ефективності навчання сприяє посилення практичної значущості змісту навчання, урізноманітнення організаційних форм навчання, зокрема проведення лабораторних робіт, робота у складі творчих груп над виконанням проекту.

В методичній системі наявні всі необхідні для роботи викладача та студентів навчальні матеріали, рекомендації щодо вибору форм і методів організації навчально-дослідницької діяльності і система залишається відкритою для подальшого удосконалення.

В результаті пошукового експерименту були розроблені експериментальні матеріали та дібрані засоби для проведення формувального експерименту.

На третьому етапі – етапі формувального експерименту – здійснювалася апробація і уточнення пропонованої навчально-методичної системи. В експерименті брали участь студенти фізико-математичного факультету Ніжинського державного університету імені Миколи Гоголя, Сумського державного педагогічного університету ім.А.С.Макаренка, Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка, Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка.

Метою апробації було:

- виявлення недоліків та перевірка ефективності пропонованої методичної системи навчання математичної інформатики, зокрема тих тем, що пов'язані з процесом розв'язування задач за допомогою систем комп'ютерної математики, впливу пропонованих підходів до навчання математичної інформатики на підвищення рівня розвитку навчально-дослідницьких умінь студентів;

- дотримання основних психологічних вимог до навчальних задач, визначення їх місця в навчально-пізнавальній діяльності та співвідношення навчальних задач і навчальних цілей;

- експериментальна перевірка системи задач та пропонованого електронного навчального курсу (узгодженість теоретичного матеріалу і відповідних практичних завдань, доступність та логічність подання, достатність або надмірність матеріалу);

- реалізація запропонованих організаційних форм і методів навчання, виявлення рівня зацікавленості студентів до виконання практичних та лабораторних завдань.

Таким чином, основною метою експерименту на формувальному етапі було визначення рівня досконалості і обґрунтованості розроблених компонентів методичної системи навчання математичної інформатики, її ефективності стосовно розвитку навчально-дослідницьких умінь студентів. Навчання проводилося за спеціально укладеною навчальною робочою програмою, його результати в ході формуючого експерименту обговорювалися з педагогами, які брали участь в експерименті.

В ході навчального процесу для активізації навчально-пізнавальної діяльності та організації навчально-дослідницької діяльності студентів в умовах особистісно орієнтованого навчання поєднувалися на заняттях фронтальні і групові форми роботи студентів, індивідуальна робота та робота в парах. Організації навчально-дослідницької діяльності сприяло створення навчальних ситуацій, в яких від студентів вимагалось висловлення особистої думки, обґрунтування своєї позиції, встановлення зв'язків між новими відомостями та власним досвідом, презентації одержаних результатів і проведення самооцінювання. Значна увага в процесі експериментування приділялася мотиваційному компоненту навчально-дослідницької діяльності студентів з урахуванням їхніх інтересів і потреб.

В процесі дослідження були використані загальноприйняті і найбільш часто використовувані критерії результативності експерименту за рівнем знань та умінь студентів.

Результати експерименту оцінювались шляхом визначення рівня знань та сформованості вмінь щодо виконання конкретних завдань на основі як поточного, так і підсумкового контролю за результатами розв'язування задач залежно від виконання окремих етапів цієї роботи; вивчення експертних оцінок викладачів та висновків науковців за результатами їхніх спостережень.

Наведемо деякі кількісні показники, за якими певною мірою можна визначити ефективність розробленої методики.

На формувальному етапі педагогічного експерименту здійснювалося експериментальне навчання студентів відповідно до розроблених у ході дослідження навчальних матеріалів. Мета проведення формувального етапу педагогічного експерименту полягала у перевірці ефективності розробленої методичної системи навчання математичної інформатики і аналізі результатів, отриманих в ході дослідження.

Ефективність навчання визначалася з використанням критеріїв рівнів сформованості навчально-дослідницьких умінь у процесі навчання математичної інформатики (додаток А, таблиця А1). У процесі експериментування порівнювалися рівні сформованості навчально-дослідницьких умінь студентів на

початку і наприкінці навчання курсу математичної інформатики за пропонованою методикою. На початку навчання більшість показали початковий рівень сформованості навчально-дослідницьких умінь (55,44%) та достатній (31,93%), незначний відсоток показали високий (3,51%) і низький (9,12%).

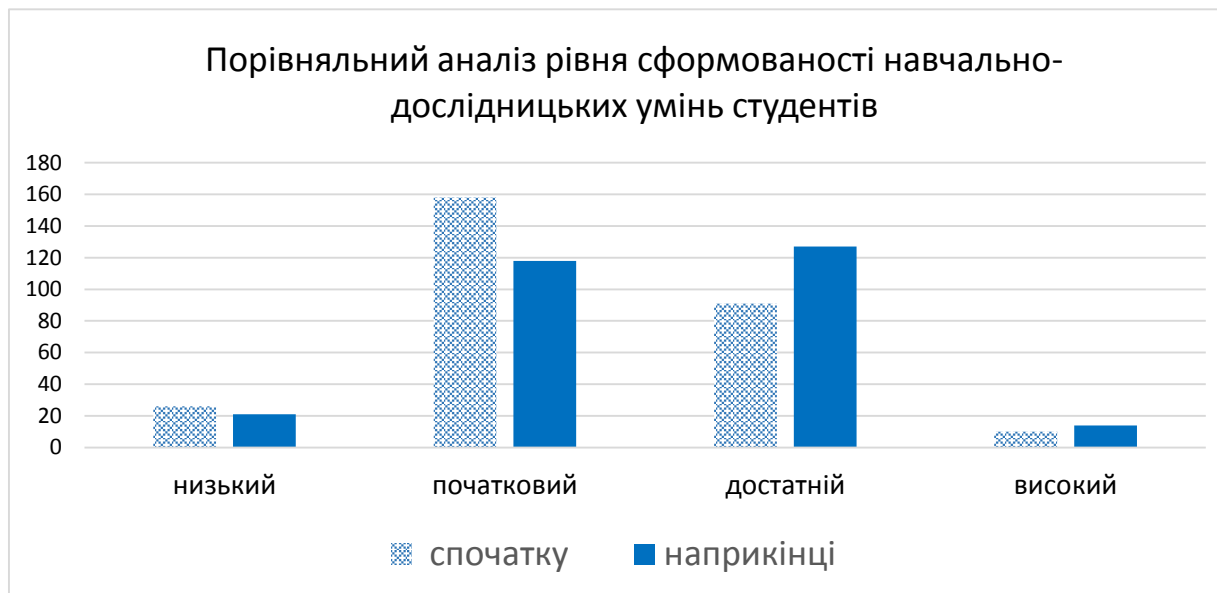


Рис. 2.8.2

Після проведення експерименту спостерігалось зростання рівня сформованості навчально-дослідницьких умінь студентів: низький – 7,50%, початковий – 42,14%, достатній – 45,36%, високий – 5,00% (рис. 2.8.2, таблиця 2.8.1).

Таблиця 2.8.1

<i>Рівень розвитку навчально-дослідницьких умінь</i>	<i>спочатку</i>		<i>наприкінці</i>	
	<i>Кількість респондентів</i>	<i>%</i>	<i>Кількість респондентів</i>	<i>%</i>
низький	26	9,12	21	7,50
початковий	158	55,44	118	42,14
достатній	91	31,93	127	45,36
високий	10	3,51	14	5,00
Всього респондентів	285		280	

Перехід значної кількості студентів на більш високі рівні сформованості навчально-дослідницьких умінь свідчить про ефективність запропонованої методичної системи навчання, доцільний добір засобів навчання. Статистична

значущість відхилення експериментального розподілу оцінок була перевірена із застосуванням χ^2 критерію Пірсона.

Аналіз результатів формувального експерименту дає підстави:

1) стверджувати, що запропонована методична система навчання математичної інформатики є доступною для студентів фізико-математичних спеціальностей;

2) підтвердити гіпотезу про те, що впровадження у навчальний процес розроблених компонентів пропонованої методичної системи навчання математичної інформатики студентів фізико-математичних спеціальностей сприяє розвитку навчально-дослідницьких умінь, на що вказують результати опрацювання даних;

3) стверджувати, що цілеспрямоване управління розумовою діяльністю студентів, створення умов для прояву їх самостійності і активності в процесі навчання є необхідним фактором успішного формування і розвитку у них основних компонентів навчально-дослідницьких умінь;

4) вважати доцільним використання запропонованих творчих завдань, виконання яких сприяє виробленню у студентів узагальнених способів розв'язування задач, сформованості прийомів розумової та навчально-дослідницької діяльності;

5) зробити висновок, що використання задач відкритого характеру (задач з динамічною умовою) сприяє формуванню у студентів реалістичного уявлення про застосування засобів комп'ютерних математичних пакетів для розв'язування задач дослідницького характеру, що є корисним для позитивного досвіду наукової творчості, формування культури наукових досліджень, як окремої складової загальної інформатичної культури, та системи математичних та інформатичних компетентностей;

6) вважати педагогічно доцільним та ефективним використання розроблених компонентів методичної системи навчання математичної інформатики, що надає можливість викладачеві ефективно організувати навчальну діяльність студентів та більш ефективно реалізовувати дослідницький підхід у навчанні.

Висновки до другого розділу

Використання компонентів методичної системи навчання математичної інформатики, спрямованої на розвиток навчально-дослідницьких умінь студентів, забезпечує можливість розвитку у студентів узагальнених прийомів мислення, активізації їх пізнавальної діяльності, практико-експериментальних умінь, формуванню у них потреби до самоосвіти, розвитку творчих здібностей.

1. Навчання інформатичних дисциплін у вищому навчальному закладі має проводитися з урахуванням професійної спрямованості навчання та базуватися на постановці і розв'язуванні практико-орієнтованих задач та використанні засобів комп'ютерних математичних пакетів у процесі навчально-дослідницької роботи студентів. Поєднання задач, що розв'язуються на заняттях з інформатики, з математикою та напрямом спеціалізації вимагає від студентів нетрадиційного підходу до розв'язування таких задач, ґрунтовних знань навчального матеріалу, аналізу кожного з етапів розв'язування задач та отриманих результатів, що сприяє розвитку навчально-дослідницьких умінь, а також поглибленому розумінню теоретичного матеріалу.

Впровадження в практику навчання інформатичних дисциплін прикладних, практичних задач – один із шляхів удосконалення процесу навчання, активізації пізнавальної діяльності студентів, що посилює світоглядні аспекти навчання. Добір задач із різних галузей знань дозволяє широко варіювати зміст цих задач та ступінь їх складності, що дає можливість враховувати різноманітні інтереси студентів та рівні їхньої підготовки.

2. Зміст навчання інформатичних дисциплін у вищих навчальних закладах необхідно конкретизувати з урахуванням рівня інформатизації навчального процесу, розробки інформаційно-комунікаційних технологій навчання, відповідного змістового наповнення інших навчальних дисциплін, всю сукупність яких необхідно розглядати як цілісну систему взаємопов'язаних підсистем навчання і виховання.

В процесі визначення та добору змісту навчання складною та досить дискусійною є проблема обґрунтування вибору для навчальних цілей відповідних

програмних засобів та мов програмування. Методика навчання дисциплін інформатичного циклу, її зміст, обсяг та структура навчального матеріалу, оволодіння методами застосування різних комп'ютерних математичних пакетів програм для розв'язування математичних і практичних задач суттєво залежить від можливостей використання тих чи інших програмних засобів.

3. Специфіка математичної інформатики як навчальної дисципліни така, що процес розв'язування задач є одним із основних методів навчання, перевірки і оцінювання знань і вмінь студентів. З метою розвитку навчально-дослідницьких умінь розв'язування задач необхідно розглядати як застосування певного набору загальних положень математики (якщо потрібно, то і будь-якої дисципліни за спеціалізацією) з одного боку, та застосування певного програмного засобу, з іншого боку, застосування яких для розв'язування задач приводить до необхідного результату – обґрунтованих відповідей.

Психологічні дослідження проблем навчання розв'язувати задачі доводять, що основні причини несформованості у студентів умінь і здатностей до розв'язування задач полягають у тому, що студентам не даються необхідні знання стосовно сутності задач і їх розв'язування, тому вони розв'язують задачі, не усвідомлюючи належним чином свою власну діяльність. Слід ставити за мету навчити студентів такого підходу до аналізу умов і розв'язування задач, за якого задача виступає як об'єкт ретельного вивчення, а її розв'язування – як процес дослідження, конструювання і винаходу та обґрунтування розв'язку.

4. Під час розв'язування задач важливо, щоб викладач застосовував дослідницькі методи навчання, проблемне подання навчального матеріалу, евристичні бесіди, що особливо стимулює розвиток навчально-дослідницьких умінь студентів. Необхідно стимулювати самостійність роздумів і суджень студентів, заздалегідь готуючи систему питань, відповідаючи на які студенти самостійно знаходили б способи розв'язування задач, що буде спонукати їх до здійснення рефлексії, оцінювання одержаних результатів, переосмислення власної діяльності. Правильне співвідношення самостійної діяльності і спілкування дає змогу певною мірою розв'язати проблеми органічного поєднання навчальної і виховної функцій.

5. Залучення студентів до дослідницької діяльності є вагомим фактором активізації пізнання, ефективним шляхом для формування пізнавальних інтересів студентів, розвитку їх мислення та творчих здібностей. Навички навчально-дослідницької роботи будуть потрібні студентам у подальшому навчанні, в процесі науково-дослідницької роботи, написання курсових та кваліфікаційних робіт.

6. В ході цього дослідження дібрані задачі, розв'язування яких має на меті формування і розвиток навчально-дослідницьких умінь студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічного університету. Розв'язування дібраних задач спонукує студентів аналізувати хід власних думок у процесі розв'язування задач, шукати і знаходити якомога ефективніші варіанти розв'язування, усувати помилки в міркуваннях, моделювати ситуації.

7. Одним із шляхів впровадження в навчальний процес сучасних ІКТ, що забезпечує подальше удосконалення навчально-виховного процесу, доступність та ефективність навчання та підготовку молоді до життя і діяльності в інформаційному суспільстві, є розроблення електронних навчальних посібників та програмних засобів навчального призначення. Створений у процесі цього дослідження дистанційний електронний навчальний курс «Комп'ютерні математичні пакети» може бути використаний для комп'ютерної підтримки процесу навчання, підвищення ефективності навчання, закріплення основних прийомів чисельного і символічного розв'язування задач з подальшою візуалізацією результатів розв'язування та їх аналізом.

8. Експериментальна перевірка розроблених компонентів пропонованої методичної системи навчання математичної інформатики в університеті підтвердила позитивний вплив їх використання на розвиток навчально-дослідницьких умінь студентів, сформованість прийомів їхньої розумової діяльності, самостійність і активність у процесі навчання, що забезпечить успіх у майбутній професійній діяльності студентів та знадобиться в подальшому навчанні впродовж усього життя.

Основні результати дослідження, висвітлені в другому розділі, відображені у працях [25], [26], [28], [29], [30], [31], [32], [35], [36], [37], [38].

ВИСНОВКИ

Відповідно до мети та поставлених завдань у процесі проведеного дисертаційного дослідження одержані такі основні результати:

– розроблено окремі компоненти комп'ютерно орієнтованої методичної системи навчання математичної інформатики студентів фізико-математичних спеціальностей, спрямованого на розвиток навчально-дослідницьких умінь студентів;

– виокремлено структурні компоненти навчально-дослідницьких умінь, які можна ефективно розвивати у процесі навчання математичної інформатики, а саме: інтелектуально-пізнавальні, практично-експериментальні, організаційні, комунікативні, результативно-оцінювальні уміння. Всі наведені компоненти розглядаються в єдності та взаємозв'язках, доповнюючи один одного;

– конкретизовано зміст навчання математичної інформатики в курсі «Комп'ютерні математичні пакети» у вищих педагогічних навчальних закладах III-IV рівнів акредитації;

– виявлено, розв'язування яких типів задач дає змогу підвищити ефективність розвитку навчально-дослідницьких умінь студентів, проявів активності та самостійності у формуванні знань, умінь і навичок на всіх етапах навчання, та сприяє набуттю саморегуляції власної діяльності в процесі учіння;

– створено навчальний електронний дистанційний курс для підтримки навчання курсу «Комп'ютерні математичні пакети», застосування якого значно спрощує процес навчання, сприяє підвищенню його якості, закріпленню основних прийомів чисельного і символного розв'язування задач;

– створено систему навчальних та практичних задач, розв'язування яких сприяє розвитку навчально-дослідницьких умінь студентів і є одним з основних шляхів удосконалення процесу навчання та активізації пізнавальної діяльності студентів.

Отримані результати дають підстави зробити такі **висновки**:

1. Розвиток навчально-дослідницьких умінь студентів в освітньому процесі у вищому навчальному закладі може бути ефективним і дієвим на основі співтворчості викладача і студентів, спрямованої на розкриття дослідницького потенціалу та індивідуальності студента в процесі дослідницької діяльності, у

відповідності з потребою у пізнанні, що сприяє формуванню наукового світогляду студентів. Через названий процес забезпечується здатність людини самостійно здобувати знання, грамотно висловлювати та обґрунтовувати судження, оцінки, думки.

2. Комп'ютерні математичні пакети є потужним засобом вивчення, засвоєння, з'ясування сутності, унаочнення, аналізу досліджуваних процесів та явищ, їх використання на основі дослідницьких підходів у навчанні сприяє ефективності навчального процесу, зокрема ефективності навчання математичної інформатики.

3. Розв'язування доцільно дібраних задач сприяє розвитку інтелектуальних здібностей і навчально-дослідницьких умінь студентів фізико-математичних спеціальностей у вищих навчальних закладах. Розв'язування дібраних задач спонукає студентів аналізувати хід власних думок у процесі розв'язування задач, шукати і знаходити якомога ефективніші варіанти розв'язування, усувати помилки в міркуваннях, моделювати ситуації.

4. Володіння уміннями використовувати засоби систем комп'ютерної математики для аналітичних перетворень, обчислень, графічних побудов, програмування створює передумови для опанування основними методами міждисциплінарних досліджень. Розв'язування міжпредметних задач в процесі навчання математичної інформатики допомагає систематизувати знання студентів із суміжних спеціальностей і формує в їх уяві цілісну наукову картину світу, розвиває уміння і навички математичного дослідження перебігу різноманітних процесів і проявів всеможливих явищ.

5. Залучення студентів до дослідницької діяльності є вагомим фактором активізації пізнання, ефективним шляхом для формування пізнавальних інтересів студентів, розвитку їх мислення та творчих здібностей. Навички навчально-дослідницької роботи будуть потрібні студентам у подальшому навчанні, в процесі науково-дослідної роботи, написання курсових та кваліфікаційних робіт.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Аветисян Р.Д. Теоретические основы информатики / Р.Д.Аветисян., Д.О.Аветисян. – М.: Российский государственный гуманитарный университет, 1997. – 168 с.
2. Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики / Ж.Адамар. – М.: Советское радио, 1970. – 152 с.
3. Амелина Н.С. Учебно-исследовательская деятельность студентов педвуза (в процессе изучения дисциплин педагогического цикла): автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Н.С.Амелина. – К., 1982. – 18 с.
4. Алексюк А.М. Педагогіка вищої освіти України: Історія, теорія: підручник для студентів та аспірантів вищих навчальних закладів / А.М.Алексюк. – К.: Либідь, 1998. – 560 с.
5. Ананьев Б.Г. Избранные педагогические труды / Ананьев Б.Г. – М.: Просвещение, 1980. – 230с.
6. Англо-український тлумачний словник з обчислювальної техніки, інтернету і програмування / Е.М. Пройдаков, Л.А. Теплицький. – К.: Софт Прес, 2006. – 549 с.
7. Андреев В.И. Эвристическое программирование учебно-исследовательской деятельности / В.И.Андреев. – М.: Высшая школа, 1981. – 240 с.
8. Андреева Е.В. Математические основы информатики. Элективный курс: Учебное пособие / Е.В.Андреева, Л.Л.Босова, И.Н.Фалина. – М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2005. – 328 с.
9. Архангельский С.И. Учебный процесс в высшей школе, его закономерные основы и методы / С.И.Архангельский. – М.: Высшая школа, 1980. – 368 с.
10. Бабанский Ю.К. Избранные педагогические труды / М.Ю.Бабанский. – М.: Педагогика, 1989. – 560 с.
11. Балл Г.А. Теория учебных задач: Психолого-педагогический аспект / Г.А.Балл – М.: Педагогика, 1990. – 184 с.
12. Баранова Е.В. Методические основы использования учебных исследований при обучении геометрии в основной школе / Е.В.Баранова: дисс. ... канд. пед.

- наук. – Саранск, Арзамасский педагогический государственный институт им. А.П.Гайдара, 1999. – 163 с.
13. Белоусова Л.И. Дидактические аспекты использования технологий визуализации в учебном процессе общеобразовательной школы [Электронный ресурс] / Л.И.Белоусова, Н.В.Житнева // Інформаційні технології і засоби навчання. – 2014. – Том 40, №2. – Режим доступу: <http://journal.iitta.gov.ua/index.php/itlt/article/view/1017#.VOt993ysXHU>
 14. Белых С.Л. Управление исследовательской активностью студента: Методическое пособие для преподавателей вузов и методистов / под ред. А.С.Обухова. — Ижевск : УдГУ, 2008. – 72 с.
 15. Беспалько В.П. Педагогика и прогрессивные технологии обучения / В.П.Беспалько. – М.: Издательство института профессионального образования Министерства образования России, 1995. – 208 с.
 16. Биков В.Ю. Технологія розробки дистанційного курсу: Навчальний посібник / В.Ю. Биков, В.М.Кухаренко, Н.Г.Сиротенко, О.В.Рибалко, Ю.М.Богачков; за ред. В.Ю.Бикова та В.М.Кухаренка. – К.: Міленіум, 2008. – 324 с.
 17. Блюменау Д.И. Информационный анализ / синтез для формирования вторичного потока документов. – СПб: Профессия, 2002. – 240 с.
 18. Богоявленская Д.Б. Психология творческих способностей: Учебное пособие для студентов высших учебных заведений / Д.Б.Богоявленская – М.: Академия, 2002. – 320 с.
 19. Болонський процес 2020. Простір європейської вищої освіти у новому десятиріччі / Комюніке Конференції Європейських міністрів, відповідальних за вищу освіту. Льовен / Лувен-ла-Нев, 28-29 квітня 2009. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://old.lnu.edu.ua/Pedagogika/bolon/10.pdf>
 20. Брушлинский А.В. Субъект: мышление, учение, воображение. – М.: Издательство «Институт практической психологии»; Воронеж: НПО «Модэк», 1996. – 392 с.
 21. Брунер Дж. Психология познания / пер. с англ. яз., предисловие и общ. ред. А.Р.Лурия. – М.: Прогресс, 1977. – 413 с.

22. Бугаец Н.А. Исследовательский подход в процессе изучения информационно-коммуникационных технологий математического предназначения // Сборник научных трудов Телавского государственного университета. – №1(27) – Тбилиси, 2014. – С. 29 – 34.
23. Бугаець Н.О. Використання педагогічного програмного засобу GRAN-2D під час розв'язування задач на побудову в шкільному курсі планіметрії // Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Серія №2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2009. – №7(14). – 222 с.
24. Бугаець Н.О. Використання вільно-поширюваного програмного забезпечення математичного призначення в університеті / Н.О.Бугаець // Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції «FOSS» – Львів, 1 – 6 лютого 2011 р. – Львів: Львівський національний університет, 2011. – С. 21 – 24.
25. Бугаець Н.О. Використання програм математичного призначення для знаходження екстремумів функції // Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Серія №2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова. – 2011. – №10(17). – 175 с.
26. Бугаець Н.О. Графічне дослідження загального рівняння кривої другого порядку за допомогою комп'ютера // Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Серія №2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова. – 2010. – №8 (15). – 210 с.
27. Бугаець Н.О., Закалюжний В.М. Розв'язування задач кінематики за допомогою педагогічного програмного засобу GRAN-1 // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету. Випуск 65. Серія: педагогічні науки – Чернігів: ЧДПУ, 2009. – №65. – 352 с.
28. Бугаець Н.О. Засоби створення графічних зображень в програмі Maxima / Н.О.Бугаець // Тези Міжнародної науково-практичної конференції «FOSS», Львів, 24 – 26 квітня 2014 р. – Львів: Львівський національний університет. – С. 19 – 21.

29. Бугаєць Н.О. Засоби програми Maxima для створення графічних зображень та математичних досліджень // Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Серія №2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова. – 2015. – №15(22). – С. 105 – 114.
30. Бугаєць Н.О. Моделювання анімаційних наочностей засобами графічного середовища програми Maxima [Електронний ресурс] / Н.О.Бугаєць // Інформаційні технології і засоби навчання – 2015. – Том 47, №3. С.67 – 79. – Режим доступу: <http://journal.iitta.gov.ua/index.php/itlt/article/view/1244>
31. Бугаєць Н.О. Навчання візуально-орієнтованого програмування інтерфейсу в програмі Maple / Н.О.Бугаєць // Інформаційно-комунікаційні технології навчання. Всеукраїнська науково-практична конференція, 3 – 4 жовтня 2011 р. (Тези доповідей). – Умань: Візаві, 2011. – С. 12 – 14.
32. Бугаєць Н.О. Обчислення інтегралів, залежних від параметра, за допомогою програмних засобів математичного призначення / Н.О.Бугаєць // Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики, фізики, інформатики у середніх та вищих навчальних закладах: зб. наук. праць за матеріалами Всеукраїнської науково-методичної конференції молодих науковців, 17 – 18 лютого 2011 р.– Кривий Ріг: Криворізький державний педагогічний університет, 2011. – С.123 – 126.
33. Бугаєць Н.О. Організація навчально-пізнавальної діяльності студентів з використанням систем комп'ютерної математики / Н.О.Бугаєць // Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції «Освітні вимірювання в інформаційному суспільстві», Київ, 26 – 29 травня, 2010 р. – К.: НПУ, 2010. – С. 93 – 94.
34. Бугаєць Н.О. Проблема інтердисциплінарних досліджень у процесі навчання математичної інформатики / Н.О.Бугаєць // Сучасні тенденції розвитку освіти і науки в інтердисциплінарному контексті: Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції, Дрогобич, 24-25 березня 2016 року. – Ченстохова – Ужгород – Дрогобич: Посвіт, 2016. – С. 196 – 198.

35. Бугаєць Н.О. Програмування візуально-орієнтованого інтерфейсу в програмі Maple // Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Серія №2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова. – 2012. – №12(19). – С. 67 – 71.
36. Бугаєць Н.О. Розвиток навчально-дослідницьких умінь студентів у процесі застосування програмних засобів математичного призначення для обчислення інтегралів, залежних від параметра // Педагогіка вищої та середньої школи. Збірник наукових праць. Випуск 32. – Кривий Ріг: КДПУ, 2011. – С. 86 – 94.
37. Бугаєць Н.О. Створення анімаційних демонстрацій засобами програми Maple // Інформатика та інформаційні технології в навчальних закладах. – 2013. – №2 – С.55 – 62.
38. Бугаєць Н.О. Створення анімаційних демонстрацій засобами програми Maple / Н.О.Бугаєць // Тези доповідей Міжнародної науково-практичної конференції «Інформаційні технології в освіті, науці і техніці» (ІТОНТ-2012) – Черкаси, 25 – 27 квітня 2012 р. – У 2 т. – Черкаси: ЧДТУ, 2012. – Т.2. – С. 16 – 17.
39. Бугаєць Н.О., Сидоренко Т.М. Електронні тести успішності як засіб підвищення ефективності навчального процесу //Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2009. –№6. – С.28 – 30.
40. Бурда М.І. Розв'язування задач на побудову в 6 – 8 класах / М.І.Бурда: Методичний посібник – К.: Радянська школа, 1986. – 112 с.
41. Великий тлумачний словник сучасної української мови: 250000 слів і словосполучень / уклад. і голов. ред. В.Т. Бусел. – К.: Ірпінь: ВТФ «Перун», 2007. – 1736 с.
42. Вербицкий А.А. Активное обучение в высшей школе: контекстный подход / А.А.Вербицкий. – М.: Высшая школа, 1991. – 207 с.
43. Вінниченко Є.Ф. Розвиток творчих здібностей старшокласників у процесі навчання інформаційних технологій розв'язування математичних задач: дис... канд. пед. наук: 13.00.02 / Вінниченко Євгеній Федорович. – К., Національний педагогічний університет ім.М.П.Драгоманова, 2006. – 234 с.
44. Вирт Н. Алгоритмы и структуры данных / Н.Вирт. – М.: Мир, 1989. – 360 с.

45. Вопросы психологии способностей / под ред. В.А.Крутецкого. – М.: Педагогика, 1973. – 216 с.
46. Выготский Л.С. Педагогическая психология. /Л.С.Выготский – М.: Педагогика, 1991. –480 с.
47. Гальперин П.Я. Введение в психологию: учебное пособие для вузов / П.Я.Гальперин. – М.: Книжный дом «Университет», 1999. – 332 с.
48. Гетманова А.Д. Учебник по логике / А.Д.Гетманова. – М.: Владос, 1995. – 303 с.
49. Глушков В.М. Основы безбумажной информатики / В.М. Глушков. – [2-е изд. испр.] – М.: Наука, 1987. – 552 с.
50. Головизнина Н.Л. Исследовательские умения как средство развития самодеятельности старшеклассников: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.01 / Головизнина Наталья Леонидовна. – Киров, Вятский государственный гуманитарный университет, 2005. – 186 с.
51. Гончаренко С.У. Український педагогічний словник / С.У.Гончаренко. – К.: Либідь, 1997. – 375 с.
52. Горошко Ю.В. Система інформаційного моделювання у підготовці майбутніх вчителів математики та інформатики: дис. ... докт. пед. наук: 13.00.02 / Ю.В.Горошко. – Київ, Національний педагогічний університет ім. М.П.Драгоманова, 2013. – 470 с.
53. Грамбовська Л.В. Особистісно-орієнтоване навчання геометрії в основній школі : автореф. дис... канд. пед. наук: 13.00.02 /Л.В. Грамбовська. – Київ, Національний педагогічний університет ім. М.П.Драгоманова, 2009. – 20 с.
54. Грэхем Р. Конкретная математика. Основание информатики / Р.Грэхем, Д.Кнут, О.Паташник. – М.: Мир, 1998. – 703 с.
55. Гульятев А. Проектирование и дизайн пользовательского интерфейса / А.Гульятев, В.Машин.– СПб.: Корона принт, 2000. – 352 с.
56. Гумбольдт В. фон. О внутренней и внешней организации высших научных заведений в Берлине // Неприкосновенный запас. – 2002. – № 2(22). – С. 5 – 10.

57. Давыдов В.В. Теория развивающего обучения / В.В.Давыдов – М.: Интор, 1996. – 544 с.
58. Далингер В.А. Поисково-исследовательская деятельность учащихся как основа их развития // Современные проблемы науки и образования. – 2006. – № 5 – С. 30 – 31.
59. Далингер В.А. Учебные исследования по математике как средство овладения учащимися творческой деятельностью // Международный журнал экспериментального образования. – 2014. – №3. – С. 142 – 144.
60. Далингер В.А. Математическое моделирование как средство интеграции естественно-научных и математических дисциплин // Интеграция образования. – 2002. – №4. – С. 106 – 112.
61. Далингер В.А. Методика обучения учащихся доказательству математических предложений / В.А.Далингер – М.: Просвещение. 2006. – 256 с.
62. Дем'яненко В.Б. Методика організації фізико-математичної дослідницької діяльності учнів Малої академії наук України з використанням мережних електронних майданчиків: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Дем'яненко Валентина Борисівна. – Київ, Національний педагогічний університет ім. М.П.Драгоманова, 2014. – 278 с.
63. Державна національна програма „Освіта” (Україна ХХІ століття) / [затв. Постановою Кабінету Міністрів України від 3 листоп. 1993 р. № 896] – К.: Освіта, 1993. – 24 с.
64. Дубровина Е.А. Роль исследовательского обучения в формировании познавательной активности студентов на уроках информатики / Е.А.Дубровина // Проблемы и перспективы развития образования: материалы международной научной конференции (г. Пермь, апрель, 2011 г.). Т.П. – Пермь: Меркурий, 2011. – С. 9 – 13.
65. Дударева В.И. Учебно-исследовательская работа студента: Учебное пособие / Дударева В.И., Панюкова Т.А. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2004. – 72 с.
66. Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. – М.: СОЛОН-Пресс, 2006. – 720 с.

67. Емельянов И. «Туманные» вычисления вместо «облачных»: новая концепция распределения данных [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.computerra.ru/89032/tumannyye-vyichisleniya-vmesto-oblachnyih-novaya-kontseptsiya-raspredeleniya-dannyih/>.
68. Ершов А.П., Монахов В.М., Бешенков С.А. Часть первая // Основы информатики и вычислительной техники: Пробное учебное пособие для средних учебных заведений. В 2-х частях / под редакцией А.П.Ершова и В.М.Монахова. – М.: Просвещение, 1985. – 96 с.
69. Жалдак М.І. Використання комп'ютера в навчальному процесі має бути педагогічно виваженим і доцільним // Комп'ютер у школі та сім'ї. – №3. – 2011. – С.3 – 12.
70. Жалдак М.І. Інформатика – фундаментальна наукова дисципліна. Вона має вивчати закони природи, інформаційні процеси і відповідні технології // Комп'ютер у школі та сім'ї. – №1. – 2010. – С.49 – 54.
71. Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках фізики: посіб. для вчителів / М.І.Жалдак, Ю.К.Набочук, І.Л.Семещук – Костопіль: РВП «РОСА», 2005. – 228 с.
72. Жалдак М.І. Комп'ютерно-орієнтовані засоби навчання математики, фізики, інформатики: Посібник для вчителів / М.І.Жалдак, В.В.Лапінський, М.І.Шут. – К. : НПУ імені М.П. Драгоманова, 2004. – 182 с.
73. Жалдак М.І. Математика з комп'ютером / Горошко Ю.В., Вінниченко Є.Ф.; Посібник для вчителів. – 3-тє видання. – К.: Видавництво НПУ імені М.П.Драгоманова. – 315 с.
74. Жалдак М.І. Математичний аналіз з елементами інформаційних технологій: навч. посібник / М.І.Жалдак, Г.О.Михалін, С.Я.Деканов. – К.: Редакції газет природничо-математичного циклу, 2012. – 128 с.
75. Жалдак М.І. Навчання математики майбутніх вчителів / М.І.Жалдак, Г.О.Михалін // Збірник «Проблеми фізико-математичної освіти в контексті євроінтеграції». – 2006. – С.268 – 276.

76. Жалдак М.І. Основи інформаційної культури вчителя / М.І.Жалдак // Використання інформаційної технології в навчальному процесі: Збірник наукових робіт. – К.: МНО УРСР КДПІ ім. О.М. Горького, 1990. – С. 3–24.
77. Жалдак М.І. Основи теорії і методів оптимізації: навчальний посібник / М.І.Жалдак, Ю.В.Триус. – Черкаси: Брама-Україна, 2005. – 608 с.
78. Жалдак М.І. Педагогічний потенціал комп'ютерно-орієнтованих методичних систем навчання математики / М.І. Жалдак // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: зб. наук. праць / редкол. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова. – №7. – 2003. – С. 3 – 16.
79. Жалдак М.І. Про деякі методичні аспекти навчання інформатики в школі і педагогічному університеті / М.І. Жалдак // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія №2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць / Редкол. – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова. – №2 (9). – 2005. – С. 3 – 14.
80. Жалдак М.І. Чисельні методи математики: Посібник для самоосвіти вчителів / М.І.Жалдак, Ю.С.Рамський – К.: Радянська школа, 1984. – 206 с.
81. Жариков Е.С. Как приблизить час открытий? / Е.С.Жариков, А.Б.Золотов. – Кишинев: Штиинца, 1990. — 336 с.
82. Живанова В.А. Психологічні основи розвитку інтересу студентів до науково-дослідницької діяльності / В.А.Живанова // Горизонты образования. – 2012, №1(34). – С. 19 – 21.
83. Загвязинский В.И. Теория обучения: Современная итерпретация / В.И.Загвязинский. – М.: Издательский центр «Академия», 2001. – 192 с.
84. Закон України «Про вищу освіту» від 1 липня 2014 р. № 1556-VII // Урядовий кур'єр. – 2014. – 13 серпня (№ 146). – С. 7 – 18.
85. Здібності, творчість, обдарованість: теорія, методика, результати досліджень / за ред. В.О. Моляко, О.Л. Музики. – Житомир: Вид-во Рута, 2006. – 320 с.
86. Зелінська Т.М. Формування мотивації досягнення успіху у майбутніх учителів: Навчальний посібник / Т.М.Зелінська, С.В.Воронова – Черкаси: Брама, 2004. – 70 с.

87. Зимняя И.А. Педагогическая психология / И.А.Зимняя – Ростов-на-Дону: Феникс, 1997. – 480 с.
88. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики: навчальний посібник / В.В. Корольський, Т.Г. Крамаренко, С.О. Семеріков, С.В. Шокалюк; науковий редактор академік АПН України, д. пед. н., проф. М.І. Жалдак. – Кривий Ріг: Книжкове видавництво Киреєвського, 2009. –316 с.
89. Иллюшин Л.С. Приемы развития познавательной самостоятельности учащихся [Электронный ресурс] – Режим доступа: likhachev.lfond.spb.ru/Lesson/ilushina.doc
90. Ильин В.А. Аналитическая геометрия / В.А.Ильин, Е.Г.Позняк. – М.: Наука, 1999. – 224 с.
91. Ильина Т.А. Педагогика / Т.А.Ильина. – М.: Просвещение, 1984. – 496 с.
92. Ильясов И.И. Система эвристических приемов решения задач / И.И.Ильясов. – М.: Издательство Российского открытого университета, 1992. – 140 с.
93. Интенсификация творческой деятельности студентов / под ред. В.И.Андреева, Г.Мельхорна. – Казань: Издательство Казанского университета, 1990. – 200 с.
94. Исследовательская деятельность: Словарь / Авт.-сост. Е.А.Шашенкова. – М.: УЦ «Перспектива», 2010. — 88 с.
95. Кабанова-Меллер Е.Н. Учебная деятельность и развивающее обучение. – М.: Знание, 1981. – 96 с. – (Новое в жизни, науке, технике. Сер. «Педагогика и психология»; №6).
96. Калмыкова З.И. Продуктивное мышление как основа обучаемости / З.И.Калмыкова. – М.: Педагогика, 1981. – 200 с.
97. Кальницкая Н.И. Развитие визуальной грамотности старшеклассников в процессе обучения: автореф. дис. ... канд. пед. наук: спец. 13.00.01 «Педагогика» / Н.И.Кальницкая. – Омск, Новосибирский государственный технический университет, 2006. – 21 с.
98. Карлащук А.Ю. Формування дослідницьких умінь школярів у процесі розв'язування математичних задач з параметрами: автореф. дис... канд. пед.

- наук: 13.00.02 / А.Ю.Карлащук. – Київ, Національний педагогічний університет ім. М.П.Драгоманова, 2001. – 19 с.
99. Кларин М.В. Инновации в мировой педагогике: обучение на основе исследования, игры и дискуссии. – Рига: НПЦ «Эксперимент», 1995. – 176 с.
100. Клочко В.І. Інформаційно-комунікаційні технології як засіб формування дослідницьких умінь студентів технічних університетів / В.І.Клочко, З.В.Бондаренко // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2009, №1. – С. 102 – 106.
101. Клочко В.І. Навчально-дослідницька робота студентів як засіб опанування фундаментальними знаннями / В.І.Клочко, А.А.Коломієць, К.І.Коцюбівська // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми. – 2013. – Вип. 36. – С. 291 – 296. [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Sitimn_2013_36_61.
102. Кобильник Т.П., Когут У.П. Використання системи Махіма для розв'язування оптимізаційних задач на графах // Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Серія №2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова. – 2011. – №12(19). – С. 62 – 67.
103. Кобильник Т.П. Методична система навчання математичної інформатики у педагогічному університеті: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Кобильник Тарас Петрович. – Київ, Національний педагогічний університет ім. М.П.Драгоманова, 2009. – 279 с.
104. Ковальчук Ю.О. Теорія освітніх вимірювань / Ю.О.Ковальчук; European Commission TEMPUS. – Ніжин: ПП Лисенко М.М., 2012. – 200 с.
105. Колин К.К. Фундаментальные основы информатики: Социальная информатика: Учебное пособие для вузов / К.К.Колин. – М.: Академический Проект, Екатеринбург: Деловая книга. – 2000. – 350 с.
106. Колягин Ю.М. Учись решать задачи: пособие для учащихся / Ю.М.Колягин, В.А.Оганесян. – М.: Просвещение, 1980. – 96 с.

107. Компетентнісний підхід у сучасній освіті: світовий досвід та українські перспективи: Бібліотека з освітньої політики / під заг. ред. О.В.Овчарук. – К.: К.І.С., 2004. – 112 с.
108. Компьютерная математика с Maxima: Руководство для школьников и студентов / Е.А.Чичкарев. – М.: ALT Linux, 2009. – 233 с.
109. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень. Ч.1 [Електронний ресурс] / [Кветний Р.Н., Богач І.В., Бойко О.Р. та ін.] – Режим доступу: http://posibnyky.vntu.edu.ua/k_m/t1/zm1..htm
110. Костюк Г.С. Навчально-виховний процес та психічний розвиток особистості. / Г.С.Костюк; за ред. Л.М.Проколієнко. – К.: Радянська школа, 1989. – 607 с.
111. Краевский В.В. Методология педагогического исследования: Пособие для педагога-исследователя / В.В.Краевский. – Самара: Изд-во СамГПИ, 1994. – 165 с.
112. Крамаренко Т.Г. Уроки математики з комп'ютером. Посібник для вчителів і студентів / за ред. М. І. Жалдака. – Кривий Ріг: Видавничий дім, 2008. – 272 с.
113. Крамаренко Т.Г. Формування особистісних якостей школяра у процесі комп'ютерно-орієнтованого навчання математики: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Крамаренко Тетяна Григорівна. – Київ, Національний педагогічний університет ім. М.П.Драгоманова, 2008. – 270 с.
114. Кремень В.Г. Людина перед викликом цивілізації: творчість, людина, освіта // Феномен інновацій: освіта, суспільство, культура / за ред. В.Г.Кременя. – К.: Педагогічна думка, 2008. – С. 9 – 48.
115. Кудрявцев В.Т. Проблемное обучение: истоки, сущность, перспективы. // Новое в жизни, науке, технике. Сер. «Педагогика и психология»; №4. — М.: Знание, 1991. – 80 с.
116. Кудрявцев В.Т. Психология технического мышления / В.Т.Кудрявцев. – М.: Педагогика, 1975. – 275 с.
117. Кулюткин Ю.Н. Эвристические методы в структуре решений / Ю.Н.Кулюткин. – М.: Педагогика, 1970. – 231 с.
118. Кулюткин Ю.Н. Психология обучения взрослых / Ю.Н.Кулюткин. – М.: Просвещение, 1985. – 138 с.

119. Лаптев В.В. Методическая теория обучения информатике. Аспекты фундаментальной подготовки / В.В.Лаптев, Н.И.Рыжова, М.В.Швецкий. – СПб.: Издательство С.-Петербургского университета, 2003. – 352 с.
120. Лапчик М.П. Информатическая математика или математическая информатика // Информатика и образование. – 2008. – №7. – С.3 – 7.
121. Леднев В.С. Научное образование: развитие способностей к научному творчеству / В.С.Леднев. – М.: МГАУ, 2002. – 120 с.
122. Леонтьев А.А. Деятельный ум (Деятельность знак Личность) / А.А.Леонтьев. – М.: Смысл, 2001. – 392 с.
123. Леонтьев А.Н. Деятельность. Сознание. Личность / А.Н.Леонтьев. – М.: Политиздат, 1975. – 304 с.
124. Лернер И.Я. Процесс обучения и его закономерности / И.Я.Лернер. – М.: Знание, 1980. – 96 с.
125. Лернер И.Я. Дидактические основы методов обучения / И.Я.Лернер. – М.: Педагогика, 1981. – 185 с.
126. Литвинова Л.Д. Организация учебно-исследовательской работы студентов педагогического колледжа / Л.Д.Литвинова // Исследовательская работа школьников. – 2007. – №4.– С.36.
127. Лиходєєва Г.В. Формування навчально-дослідницьких умінь учнів у процесі навчання елементів стохастики: дис... канд. пед. наук: 13.00.02/ Лиходєєва Г.В. – Київ, Національний педагогічний університет ім. М.П.Драгоманова, 2009. – 281 с.
128. Лященко М.Я. Чисельні методи: Підручник./ М.Я.Лященко, М.С.Головань. – К.: Либідь, 1996. – 228 с.
129. Маевский Е.В. Компьютерная математика. Высшая математика в СКМ Maxima. Часть I / Е.В.Маевский, П.В.Ягодковский. – М.: Финансовый университет, 2013. – 177 с.
130. Маслоу А. Мотивация и личность / А.Маслоу: пер. с англ. – СПб.: Питер, 2006. – 352 с.

131. Матюшкин А.М. Проблемные ситуации в мышлении и обучении / А.М.Матюшкин. – М.: Директмедиа Паблишинг, 2008. – 392 с.
132. Махмутов М.И. Проблемное обучение: основные вопросы теории / М.И.Махмутов. – М.: Педагогика, 1975. – 175 с.
133. Машбиц Е.И. Психологические основы управления учебной деятельностью. – К.: Высшая школа, 1987. – с. 224.
134. Меерович М.И. Формулы теории невероятности. Технология творческого мышления / М.И. Меерович. – Одесса: Полис, 1993. – с. 232.
135. Менчинская Н.А. Проблемы обучения, воспитания и психического развития ребенка: Избранные психологические труды / под редакцией Е.Д.Божович. – М.: Издательство Московского социально-психологического института, 2004. – 512 с.
136. Милерян Е.А. Психология формирования общетрудовых политехнических умений / Е.А.Милерян. – М.: Педагогика, 1973. – 298 с.
137. Мирошин В.В. Решение задач с параметрами. Теория и практика / В.В.Мирошин. – М.: Экзамен, 2009. – 286 с.
138. Морзе Н.В., Золочевська М.В. Методична підготовка майбутніх учителів інформатики до використання дослідницьких методів навчання / Інформаційні технології і засоби навчання. – 2010, №3 (17) [Електронний ресурс] – Режим доступу: <http://journal.iitta.gov.ua/index.php/itlt/article/viewFile/239/225>.
139. Морзе Н.В. Модель стандарту ІКТ-компетентності викладачів університету в контексті підвищення якості освіти / Н.В.Морзе, А.Б.Кочарян // Інформаційні технології і засоби навчання. – 2014, Том 43, №5. – С.27 – 39. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://journal.iitta.gov.ua/index.php/itlt/article/view/1132>.
140. Морзе Н.В. Организация самостоятельной работы студентов в контексте формирования исследовательской компетентности / Н.В.Морзе, Е.Г.Кузьминская. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://ifets.ieee.org/russian/depository/v16_i1/pdf/8.pdf [24.02.2016]
141. Морзе Н.В. Методика навчання інформатики. Ч.1. Загальна методика навчання інформатики / Н.В.Морзе. – К.: Навчальна книга, 2003. – 254 с.

142. Мышкис А.Д. Элементы теории математических моделей / А.Д.Мышкис – 3-е изд., исправленное. – М.: КомКнига, 2007. – 192 с.
143. Наказ Президента України № 926/2010 «Про заходи щодо забезпечення пріоритетного розвитку освіти в Україні» [Електронний ресурс]: сайт офіційного Інтернет-представництва Президента України. – Режим доступу: <http://www.president.gov.ua/documents/12323.html>.
144. Національна стратегія розвитку освіти в Україні на період до 2021 року [Електронний ресурс]: сайт Верховної Ради України. – Режим доступу: <http://zakon.rada.gov.ua/cgi-bin/laws/main.cgi?nreg=537-16>.
145. Недодатко Н.Г. Формування навчально-дослідницьких умінь старшокласників / Недодатко Н.Г. // Рідна школа. – 1999. – №9. – С. 36 – 38.
146. Низамов Р.А. Дидактические основы активизации учебной деятельности студентов / Р.А.Низамов. – Казань: Издательство Казанского университета, 1975. – 304 с.
147. Новиков А.М. Процесс и методы формирования трудовых умений / А.М.Новиков – М.: Высшая школа, 1986. – 288 с.
148. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования / Е.С.Полат, М.Ю.Бухаркина, М.В.Моисеева, А.Е.Петров; под ред. Е.С.Полат. – М.: Издательский центр «Академия», 2002. – 272 с.
149. Оконь В. Основы проблемного обучения. – М.: Просвещение, 1968. – 208 с.
150. Олійник Т.О. Навчально-дослідницька діяльність на основі НІТН як засіб формування математичних уявлень учнів (на прикладі курсу «Алгебра та початки аналізу»): дис... канд. пед. наук. – Київ, КДПІ ім.М.П.Драгоманова, 1992. – 240 с.
151. Основи методології та організації наукових досліджень: Навч. посіб. для студентів, курсантів, аспірантів і ад'юнтів / за ред. А.Є.Конверського. – К.: Центр учбової літератури, 2010. – 352 с.
152. Основы использования математического пакета Maple в моделировании: Учебное пособие / П.В.Сараев. – Липецк: Международный институт компьютерных технологий, 2006. – 119 с.

153. Очков В.Ф. Mathcad 14 для студентов, инженеров и конструкторов / В.Ф.Очков. – СПб: БХВ-Петербург, 2007. – 368 с.
154. Пышкало А.М. Методическая система обучения геометрии в начальной школе: Авторский доклад по монографии «Методика обучения элементам геометрии в начальных классах», представленной на соискание ... д-ра пед. наук. – М.: Академия пед. наук СССР, 1975. – 60 с.
155. Педагогика и психология высшей школы: Учебное пособие. / Ответственный редактор М.В.Буланова-Топоркова. – Ростов н/Д.: Феникс, 2002. – 544 с.
156. Перязев Н.А., Перязева Ю.В. Преподавание математической информатики. – [Электронный ресурс] – Режим доступа: www.ict.edu.ru/vconf/files/3207.rtf
157. Пидкасистый П.И. Самостоятельная познавательная деятельность школьников в обучении: Теоретико-экспериментальное исследование. – М.: Педагогика, 1980. – 240 с.
158. Поволяева М.Н. Развитие научного знания в содержании школьного и дополнительного образования детей // Внешкольник. – 2004. – №3. – С.13 – 14.
159. Поддьяков А.Н. Исследовательское поведение: стратегии познания, помощь, противодействие, конфликт / А.Н.Поддьяков; 2-е изд., испр. и доп. – М.: PERSE, 2006. – 240 с.
160. Подоляк Л.Г. Психологія вищої школи: Навчальний посібник для магістрантів і аспірантів / Л.Г.Подоляк, В.І.Юрченко. – К.: ТОВ «Філ-студія», 2006. – 320 с.
161. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения / Д.Пойа. – М.: Наука. – 1975. – 463 с.
162. Почтовюк С.І. Matlab – математична комп'ютерна система для науково-дослідницьких та технічних розрахунків / С.І.Почтовюк. – Інформаційні технології і засоби навчання: Електронне наукове фахове видання. – № 1(9). – 2009 р. – Режим доступа: <http://www.ime.edu-ua.net/em9/emg.html>.
163. Почтовюк С.І. Математика з системою MATLAB / за ред. академіка АПН України М.І.Жалдака. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010. – 319 с.
164. Прокофьев А.А. Задачи с параметрами / А.А.Прокофьев. – М.: МИЭТ, 2004. – 258 с.

165. Пуанкаре А. Математическое открытие // Хрестоматия по общей психологии. Психология мышления. – М: Издательство МГУ, 1981. – С. 356 – 365.
166. Раков С.А. Формування математичних компетентностей учителя математики на основі дослідницького підходу у навчанні з використанням інформаційних технологій: дис. ... докт. пед. наук: 13.00.02 / Раков Сергій Анаталійович. – Київ, Національний педагогічний університет ім.М.П.Драгоманова, 2005. – 489 с.
167. Раков С.А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: Монографія / С.А.Раков. – Х.: Факт, 2005. – 360 с.
168. Рамський Ю.С. Логічні основи інформатики: Навчальний посібник / Ю.С.Рамський. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2003. –286 с.
169. Рамський Ю.С. Роль математики і деякі тенденції розвитку математичної освіти в інформаційному суспільстві / Проблеми фізико-математичної освіти в контексті євроінтеграції: збірник наукових праць. – К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2006. – С. 359 – 366.
170. Рамський Ю.С. Формування компетентностей майбутніх вчителів інформатики та математики у галузі моделювання / Ю.С.Рамський, М.В.Рафальська // Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Серія №2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова. – 2011. – №12(19). – С. 117 – 127.
171. Реан А.А. Социальная педагогическая психология / А.А.Реан, Я.Л.Коломинский. – СПб.: Питер, 1999. – с. 54-63.
172. Резіна О.В. Формування інформаційно-пошукових та дослідницьких умінь учнів старшої школи в процесі навчання інформатики : автореф. дис... канд. пед. наук: 13.00.02 / Ольга Василівна Резіна. – Київ, Національний педагогічний університет ім. М.П.Драгоманова, 2005. – 20 с.
173. Роберт И.В. Современные информационные технологии в образовании: дидактические проблемы; перспективы использования / И.В.Роберт. – М.: ИИО РАО, 2010. – 140 с.
174. Розакова Л.И. Методы математического и компьютерного моделирования в СКМ Maple графических и анимационных материалов для школьных курсов

- математики [Электронный ресурс] // Вестник ТГПУ, 2010. – №3(21). – Режим доступа: <http://cyberleninka.ru/article/n/metody-matematicheskogo-i-kompyuternogo-modelirovaniya-v-skm-maple-graficheskikh-i-animatsionnyh-materialov-dlya-shkolnyh-kursov>
175. Романов П.Ю. Формирование исследовательских умений обучающихся в системе непрерывного педагогического образования: автореф. дис... докт. пед. наук: 13.00.08 / П.Ю.Романов. – Магнитогорск, Магнитогорский государственный университет, 2003. – 20 с.
176. Российская педагогическая энциклопедия. / под ред. В. Г. Панова – М.: Большая Российская Энциклопедия. – 1993. [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://pedagogicheskaya.academic.ru/2404>.
177. Рубинштейн С.Л. О мышлении и путях его исследования / С.Л.Рубинштейн. – М.: Издательство АН СССР, 1958. – 148 с.
178. Рузавин Г.И. Методология научного познания: Учеб. пособие для вузов / Г.И.Рузавин. – М.:ЮНИТИ-ДАНА, 2012. – 287 с.
179. Савенков А.И. Путь в неизведанное. Как развивать свои исследовательские способности / А.И.Савенков. – М.: Генезис, 2005. – 95 с.
180. Салмина Н.Г. Знак и символ в обучении / Н.Г.Салмина. – М.: Издательство Московского университета, 1988. – 288 с.
181. Самарский А.А. Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. Введение в информатику с позиций математического моделирования / А.А.Самарский. – М.: Наука, 1988. – 176 с.
182. Селевко Г.К. Педагогические технологии на основе информационно-коммуникационных средств / Г.К.Селевко. – М.: НИИ школьных технологий, 2005. – 208 с.
183. Семенов А.Л. Математическая информатика в школе // Информатика и образование. – 1995. – №5. – С. 54-58.
184. Семеріков С.О. Фундаменталізація навчання інформатичних дисциплін у вищій школі: Монографія / науковий редактор академік АПН України, д.пед.н., проф. М.І.Жалдак. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2009. – 340 с.

185. Сисоєва С.О. Основи педагогічної творчості: Підручник / С.О.Сисоєва. – К.: Міленіум, 2006. – 344 с.
186. Скафа О.І. Комп'ютерно-орієнтовані уроки в евристичному навчанні математики: навчальний посібник/ О.І.Скафа, О.В.Тутова. – Донецьк: Вебер, 2009. – 320 с.
187. Смирнов С.Д. Педагогика и психология высшего образования: от деятельности к личности: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. Заведений / С.Д.Смирнов. – М.: Издательский центр «Академия», 2001. – 304 с.
188. Смутьсон М.Л. Психологія розвитку інтелекту / М.Л.Смутьсон – К.: Нора-друк, 2003. – 298 с.
189. Стахин Н.А. Основы работы с системой аналитических (символьных) вычислений Maxima: учебное пособие. – Москва: 2008. – 86 с. [Электронный ресурс] – Режим доступа: <ftp://ftp.altlinux.ru/pub/people/black/MethodBooks/Maxima.pdf>
190. Талызина Н.Ф. Педагогическая психология: Учеб. пособие для студ. сред. пед. учеб. заведений. – М.: Издательский центр «Академия», 1998. – 288 с.
191. Теплицький І.О. Елементи комп'ютерного моделювання / І.О.Теплицький. – Кривий Ріг: КДПУ, 2005. – 208 с.
192. Терно С.О. Критичне мислення – сучасний вимір суспільствознавчої освіти / С.О.Терно. – Запоріжжя: Просвіта, 2009. – 268 с.
193. Токмазов Г.В. Формирование исследовательских умений с использованием современных компьютерных технологий / Г.В.Токмазов, С.И.Панькина // Высшее образование сегодня. – 2007, №5. – С.50 – 52.
194. Томашевський В.М. Моделювання систем / В.М.Томашевський. – К.: Видавнича група ВНУ, 2005. – 352 с.
195. Триус Ю.В. Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математичних дисциплін у вищих навчальних закладах: дис. ... докт. пед. наук: 13.00.02 / Триус Юрій Васильович. – Київ, Національний педагогічний університет ім.М.П.Драгоманова, 2005. – 649 с.

196. Тягло О.В. Деякі особливості інтелектуальної активності людини «швидкого» світу // Вісник ХНУ імені Н.В.Каразіна. – №992. Серія «Філософія. Філософські перипетії». – 2012. – С. 106 – 108.
197. Усова А.В. Формирование у учащихся учебных умений / А.В.Усова, А.А.Бобров – М.: Знание, 1987. – 80 с. – (Новое в жизни, науке, технике. Сер. «Педагогика и психология»; №7).
198. Усова Н.А. Формирование графической культуры будущего учителя в процессе обучения информатике: автореф. дис. на соискание ученой степени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Теория и методика обучения и воспитания (информатика)» / Н.А.Усова. – Самара, 2010. – 22 с.
199. Успенский В.В. Школьные исследовательские задачи и их место в учебном процессе. – Автореф. дис. ...канд. пед. наук. – Москва, 1967. – 20 с.
200. Ушинский К.Д. Собрание сочинений. Т.7 / К.Д.Ушинский – М.: Из-во АПН РСФСР, 1949. – 360 с.
201. Фокин Ю.Г. Преподавание и воспитание в высшей школе: Методология, цели и содержание, творчество: Учебное пособие для студентов высших учебных заведений / Ю.Г.Фокин. – М.: Издательский центр «Академия», 2002. – 224 с.
202. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж.Форсайт, М.Малькольм, К.Моулер; пер. с англ. Х.Д.Икрамова. – М.: Мир, 1980. – 277 с.
203. Фридман Л.М. Наглядность и моделирование в обучении / Л.М.Фридман. – М.: Знание, 1984. – 80 с.
204. Хазіна С.А. Формування вмінь комп'ютерного моделювання майбутніх вчителів фізики в процесі навчання інформатики: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Хазіна Стелла Анатоліївна. – Київ, Національний педагогічний університет ім. М.П.Драгоманова, 2010. – 302 с.
205. Хекхаузен Х. Мотивация и деятельность: В 2 т. / Х.Хекхаузен. – СПб.: Питер; М.: Смысл, 2003 – 860 с.
206. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – Спб.: Лань, 2003. – 336 с.

207. Чечкин А.В. Математическая информатика / А.В.Чечкин. – М.: Наука, 1991. – 412 с.
208. Чугайнова О.Г. Классификация исследовательских умений и этапы их формирования у будущих педагогов. По материалам научно-практической конференции VII Знаменские чтения «Актуальные проблемы образования и науки» СурГПУ, 2008. [Электронный ресурс] Режим доступа: <http://www.eduhmao.ru/var/db/files/15653.chugajnova-1.doc>
209. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука / Перевод с английского под ред. Е.К.Масловского. – М.: Мир, 1978. – 212 с.
210. Щукина Г.И. Активизация познавательной деятельности учащихся в учебном процессе: Учеб. пособие для студентов пед. институтов / Г.И.Щукина. – М.: Просвещение, 1979. – 160 с.
211. Экономическая информатика: Учебник / под ред. В.П.Косарева и Л.В.Еремина. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 592 с.
212. Эльконин Д.Б. Введение в психологию развития / Д.Б.Эльконин – М.: Тривола, 1994. – 168 с.
213. Якиманская И.С. Развивающее обучение / И.С.Якиманская. – М.: Педагогика, 1979. – 144 с.
214. Яшанов С.М. Теоретико-методичні засади системи інформатичної підготовки майбутніх учителів трудового навчання [Текст]: дис. ... д-ра пед. наук: 13.00.04 / Яшанов Сергій Микитович. – Київ, Національний педагогічний університет ім. М.П.Драгоманова, 2010. – 529 с.
215. A Maple Handbook. All you need to know – and more / D.H.Mackay, J.J.O'Connor. – MT1008, 2009. – 34 p.
216. Computer Science: Curricula 2013. Ironman Draft (Version 0.8). November 2012. The Joint Task Force on Computing Curricula Association for Computing Machinery, IEEE-Computer Society.
217. Europe 2020. A European strategy for smart, sustainable and inclusive growth // [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://ec.europa.eu/europe2020/index_en.htm.

218. Innovating Pedagogy 2014. Exploring new forms of teaching, learning and assessment, to guide educators and policy makers // [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.openuniversity.edu/sites/www.openuniversity.edu/files/The_Open_University_Innovating_Pedagogy_2014_0.pdf.
219. Innovating Pedagogy 2015. Exploring new forms of teaching, learning and assessment, to guide educators and policy makers // [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.open.ac.uk/blogs/innovating/>.
220. Marta L. Abell and James P. Braselton. Maple by Example. Third Edition. – ELSEVIER Academic Press, 2005. – 550 p.
221. M.B. Monagan, K.O. Geddes, K.M. Heal, G. Labahn, S.M. Vorkoetter, J. McCarron, P. DeMarco. Maple Introductory Programming Guide. – Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc, 2008. – 381 p.
222. Putz, John G. Maple Animation. – Chapman&Hall/CRC, London, New York, Washington, D.C., 2003. – 207 p.
223. Rina Zazkis, Jeffrey Truman. From Trigonometry to Number Theory...and Back: Extending LCM to Rational Numbers // Digit Exp Math Educ. – Springer International Publishing, 2015.
224. Sarah Bright. How to Flip Your Classroom in 5 Easy Steps [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://blog.whoosreading.org/5-easy-steps-to-flipped-classroom/>.
225. Wilhelm Haager. Graphics with MAXIMA. – HTL St. Pölten, Department Electrical Engineering, 2011. – 34 p.

ДОДАТОК А

**Виявлення рівня розвитку навчально-дослідницьких
умінь студентів згідно з критеріями розвитку навчально-
дослідницьких умінь**

Таблиця А.1

Мислить точно та логічно	1	2	3	4
Вміє зіставляти результати пошуку з метою діяльності	1	2	3	4
Вміє висувати гіпотези, доводить та обґрунтовує свої ідеї	1	2	3	4
Володіє прийомами аналізу і синтезу, порівняння, абстрагування	1	2	3	4
Вміє обґрунтовано добирати засоби подання даних	1	2	3	4
Варіативно і гнучко підходить до розв'язування задачі	1	2	3	4
Вміє працювати з інформаційними джерелами	1	2	3	4
Систематизує та узагальнює думки	1	2	3	4
Володіє методами побудови і дослідження інформаційних моделей	1	2	3	4
Уміє створювати графічні побудови до задачі	1	2	3	4
Добре розуміє суть питань і проблем	1	2	3	4
Самостійно виконує постановку задачі, проблеми	1	2	3	4

Таблиця А.2

Оцінювання студентом власного процесу виконання завдань

1.	Чи правильним Ви вважаєте хід власного мислення в процесі розв'язування задачі?
2.	Що Вас наштовхнуло на хід розв'язування задачі?
3.	Назвіть основні елементи умови задачі.
4.	Обґрунтуйте алгоритм розв'язування задачі.
5.	Чи існує інший варіант розв'язування задачі?
6.	Сформулюйте загальне правило розв'язування аналогічних задач.
7.	Які недоліки можна знайти в запропонованому розв'язуванні?
8.	Як зміниться розв'язок задачі, якщо додати або вилучити наступні елементи ... ?

**Анкета «Виявлення наявності інтересу студентів до
дослідницької діяльності»**

1. Курс, факультет, група
2. Поясніть як ви розумієте поняття:

Допитливість – _____

Дослідження – _____

Експеримент – _____

Математична модель – _____

Інтуїція – _____

3. Чи вважаєте Ви себе допитливим? _____

4. Чи доводилося Вам проводити дослідження? З якої теми?

5. Чи вмієте Ви досліджувати? _____

6. Які уміння, на Вашу думку, потрібні для проведення дослідження?

7. Чи подобається Вам проводити дослідження, експериментувати? Як саме? _____

8. Чи відчуваєте Ви під час розв'язування дослідницьких, творчих задач або особливо важких задач радість «відкриття», «винаходу». Як часто?

- а) такого щось не пам'ятаю; б) дуже рідко (1-2 рази в рік);
в) рідко (1-2 рази в півроку); г) часто (1 раз в неділю)
д) дуже часто (як тільки доводиться розв'язувати такого типу задачі)

9. Чи відчуваєте Ви задоволення від самого пошуку, чи Вас цікавить тільки кінцевий результат. _____

10. Як Ви оцінюєте свій інтерес до дослідницької діяльності?

- а) відчуваю постійний інтерес; б) іноді цікавлюсь;
в) майже не цікавлюсь; г) не відчуваю інтересу.

11. Для підготовки до семінарських і практичних занять Ви, як правило:

- а) нічого не читаєте;
б) обмежуєтеся конспектом лекцій або підручником;
в) читаєте тільки обов'язкову літературу;
г) читаєте обов'язкову і додаткову літературу, рекомендовану викладачем;
д) прагнете вивчити також самостійно дібрану з даної теми.

12. З яких навчальних предметів, на Ваш погляд, можна проводити навчальні дослідження? _____

13. Які види навчальної роботи, на Вашу думку, можна вважати дослідженням? _____

14. Чи подобається Вам науково-популярна література? Що саме? _____

15. Чи намагалися Ви знайти пояснення незрозумілих фактів, явищ? Якими джерелами і засобами користувались? _____

16. Спробуйте назвати основні етапи дослідження:

17. Коли, на Вашу думку, для проведення дослідження потрібна математична модель? _____

18. Чи потрібно в процесі дослідження використовувати комп'ютерні засоби? Як саме? Які програмні засоби Ви б використовували? _____

19. Які програмні засоби математичного призначення Вам відомі?

GRAN _____

Maple _____

MathCAD _____

Mathematica _____

MathLab _____

Statistica _____

Інші: _____

Не користувався.

20. Для розв'язування яких завдань їх використовували?

Твердження: для раціональних чисел $\frac{a}{b}$ та $\frac{c}{d}$ (a, b, c, d – натуральні числа) «найменше спільне кратне» дорівнює частці найменшого спільного кратного чисел a і c та найбільшого спільного дільника чисел b і d :

$$\text{НСКр}\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) = \frac{\text{НСК}(a, c)}{\text{НСД}(b, d)}.$$

Доведення

Спочатку доведемо, що $\frac{\text{НСК}(a, c)}{\text{НСД}(b, d)}$ є кратним до $\frac{a}{b}$.

Розглянемо $\frac{\text{НСК}(a, c)}{\text{НСД}(b, d)} \div \frac{a}{b} = \frac{\text{НСК}(a, c)}{\text{НСД}(b, d)} \cdot \frac{b}{a} = \frac{\text{НСК}(a, c)}{a} \cdot \frac{b}{\text{НСД}(b, d)}$ – натуральне число як добуток двох натуральних чисел.

Аналогічно $\frac{\text{НСК}(a, c)}{\text{НСД}(b, d)}$ кратне до $\frac{c}{d}$. Тому $\frac{\text{НСК}(a, c)}{\text{НСД}(b, d)}$ – спільне кратне до $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$.

Доведемо, що $\frac{\text{НСК}(a, c)}{\text{НСД}(b, d)}$ – найменше спільне кратне до $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$.

Очевидно, що $\text{НСК}(a, c)$ є кратним до $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$. Будь-яке інше кратне до $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ має вигляд $\frac{\text{НСК}(a, c)}{m}$ для деякого раціонального числа m .

Припустимо, від супротивного, що існує раціональне число m таке, що:

$$1) \frac{\text{НСК}(a, c)}{m} \text{ – спільне кратне } \frac{a}{b} \text{ і } \frac{c}{d};$$

$$2) \frac{\text{НСК}(a, c)}{m} \text{ є меншим від } \frac{\text{НСК}(a, c)}{\text{НСД}(b, d)}.$$

Якщо $m < \text{НСД}(b, d)$, то п.2) не має місця.

Якщо $m > \text{НСД}(b, d)$, то повинен бути простий множник, відмінний від множників b або d . В цьому випадку $\frac{\text{НСК}(a, c)}{m}$ не є кратним $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$, тому п.1) не має місця. Отже, $m = \text{НСД}(b, d)$.

**Фрагмент дидактичного матеріалу з теми
«Графічні побудови за допомогою програми Maxima»**

В2 Графічний інтерфейс Draw програми Maxima

Перед використанням процедур інтерфейсу Draw необхідно завантажити відповідний пакет: `load(draw) $`.

В2.1 Команди створення графіків Draw та їх основні опції

<code>draw(scene1, scene2, ..., opts, ...)</code>	– побудова комплексу графічних об'єктів, встановлення глобальних опцій <code>opts</code> .
<code>gr2d(opts, obj, ...)</code>	– визначення двохвимірного зображення як набору довільних двохвимірних графічних об'єктів з параметрами <code>opts</code>
<code>gr3d(opts, obj, ...)</code>	– визначення тривимірного зображення як набору довільних тривимірних графічних об'єктів з параметрами <code>opts</code>
<code>draw2d(opts, obj, ...)</code>	– побудова двохвимірного графіка як набору довільних двохвимірних графічних об'єктів з опціями <code>opts</code>
<code>draw3d(opts, obj, ...)</code>	– побудова тривимірного графіка як набору довільних тривимірних графічних об'єктів з опціями <code>opts</code>

Команди `draw2d(...)` і `draw3d(...)` є аналогічними до `draw(gr2d(...))`, `draw(gr3d(...))`.

В процедурах Draw опції, які застосовуються до певного графічного об'єкта, повинні йому передувати. Позиція глобальних опцій, наприклад, для визначення формату виведення графічної області, є довільною.

Записуються опції як рівність `name=value`, ліва частина якої – ім'я опції, права – її значення. Значення також можуть подаватися у вигляді списку, наприклад, для визначення проміжку значень змінної.

Основні опції налаштування графічного зображення в інтерфейсі Draw подані в наступній таблиці.

user_preamble="text" – вигляд системи координат (set size ratio –1, set grid polar, set view map)			
dimensions=[width,height] – розмір графічної області (ширина, висота)			
proportional_axes=xy – однаковий масштаб осей			
x(yz)range=[min,max] – межі на осі x(y,z)			
logx(yz)=true/false – логарифмічна шкала на осі x(y,z)			
grid=true/false – зображення ліній сітки, якщо true			
x(yz)tics_axis=true/false – якщо true, то позначення шкали подається безпосередньо вздовж осі, якщо false – шкала на межі графічної області.			
x(yz)tics=value – шкала вздовж осі. За замовчуванням xtics=auto. Також можливі наступні значення: xtics=none – шкала відсутня; xtics=[start,incr,end] – поділки на осі починаються з start і закінчуються значенням end з інтервалом довжиною incr; xtics={n1,n2,...} – шкала на осі в точках n1,n2,...; xtics={[“label1”,n1],[“label2”,n2],...} – шкала на осі в точках n1,n2,... з написами label1, label2, ...			
x(yz)tics_rotate=true/false – поворот підписів шкали на 90°			
title="text" – заголовок зображення, за замовчуванням: порожній рядок			
key="text" – назва графіка в легенді, за замовчуванням: порожній рядок			
x(yz)label="text" – підпис осі x(yz)			
x(yz)axis=true/false – зображення осей на графіку			
x(yz)axis_width=width – ширина лінії відповідної осі координат			
x(yz)axis_color=colorname – колір відповідної осі			
x(yz)axis_type=solid/dots – тип лінії відповідної осі: суцільна лінія (solid) або пунктирна (dots)			
columns=n – число колонок для кількох графіків на одному рисунку			
background_color=name – колір фону графічного поля			
color=colorname – колір графічного об’єкта, задається за назвою або 16-ковим кодом RGB			
white	black	gray0	grey0
gray10	grey10	gray20	grey20
gray30	grey30	gray40	grey40
gray50	grey50	gray60	grey60
gray70	grey70	gray80	grey80
gray90	grey90	gray100	grey100
gray	grey	light_gray	light_grey
dark_gray	dark_grey	red	light_red
dark_red	yellow	light_yellow	dark_yellow
green	light_green	dark_green	spring_green
forest_green	sea_green	blue	light_blue
dark_blue	midnight_blue	navy	medium_blue
royalblue	skyblue	cyan	light_cyan
dark_cyan	magenta	light_magenta	dark_magenta
turquoise	light_turquoise	dark_turquoise	pink

light_pink	dark_pink	coral	light_coral
orange_red	salmon	light_salmon	dark_salmon
aquamarine	khaki	dark_khaki	goldenrod
light_goldenrod	dark_goldenrod	gold	beige
brown	orange	dark_orange	violet
dark_violet	plum	purple	

`fill_color=colormame` – колір заливання графічних об'єктів

`line_width=width` – ширина лінії (число)

`line_type=solid/dots` – тип лінії (суцільна, пунктирна)

`point_size=size` – розмір точки, за замовчуванням `point_size=1`

`point_type=n` – тип точки, можливі значення: -1(none), 0(dot), 1(plus), 2(multiply), 3(asterisk), 4(square), 5(filled_square), 6(circle), 7(filled_circle), 8(up_triangle), 9(filled_up_triangle), 10(down_triangle), 11(filled_down_triangle), 12(diamant), 13(filled_diamant)

`point_joined=true/false` – з'єднання точок лінійними відрізками

`nticks=n` – число частоти дискретування (явно та параметрично задані функції, функції в полярних координатах), за замовчуванням `nticks=29`, для того щоб лінія була більш плавною, дане значення необхідно збільшити

`ip_grid=[nx,ny]` – частота дискретування (неявно задана функція), за замовчуванням `ip_grid=[50,50]`

`transform=[list]` – перетворення координат графічного об'єкта згідно з формулами `list`. За замовчуванням `transform=none` – координатний простір не перетворюється

Для того, щоб не повторювати запис налаштування опцій в кожній новій процедурі, в пакеті `draw` є спеціальна команда визначення користувацьких опцій. Встановлення опцій користувача за замовчуванням виконується за процедурою `set_draw_defaults(opt1,opt2,...)`.

Приклад. Встановити за замовчуванням опції користувача: розміри графічного поля, відображення координатних осей, пропорційний масштаб вздовж осей, лінії сітки, ширину лінії.

```
load(draw) $
set_draw_defaults(dimensions=[600,500],
                  xaxis=true,yaxis=true,
                  proportional_axes=xy,
                  grid=true,
                  line_width=2) $
```

В разі виклику даної процедури без аргументів `set_draw_defaults()` скасовуються користувацькі налаштування.

За допомогою процедур Draw можна зобразити широкий набір різних двохвимірних та тривимірних графічних об'єктів, що розглянемо в наступних параграфах.

В2.2 Двохвимірні графічні об'єкти

<code>explicit(f(x), x, x1, x2)</code> – явно задана функція $f(x)$, x змінюється в межах від $x1$ до $x2$
<code>implicit(equation, x, x1, x2, y, y1, y2)</code> – неявно задана функція y вигляді рівності <code>equation</code> від змінних x та y , що змінюються в межах від $x1$ до $x2$ та від $y1$ до $y2$ відповідно
<code>parametric(x(t), y(t), t, t1, t2)</code> – функція, задана параметрично, з параметром $t_1 \leq t \leq t_2$.
<code>polar(r(phi), phi, phi1, phi2)</code> – функція в полярних координатах, полярний кут ϕ змінюється в межах від $\phi1$ до $\phi2$
<code>points([x1, x2, ...], [y1, y2, ...])</code> – точки $(x_i; y_i), i=1,2, \dots$, задані списками значень абсцис та ординат
<code>points([[x1, y1], [x2, y2], ...])</code> – точки $(x_i; y_i), i=1,2, \dots$, задані списком координат
<code>polygon([x1, x2, ...], [y1, y2, ...])</code> – полігон з вершинами в точках $(x_i; y_i), i=1,2, \dots$, що задані списками значень абсцис та ординат
<code>polygon([[x1, y1], [x2, y2], ...])</code> – полігон з вершинами в точках $(x_i; y_i), i=1,2, \dots$, що задані списком координат
<code>rectangle([x1, y1], [x2, y2])</code> – прямокутник з вершинами в точках $(x_1; y_1)$ та $(x_2; y_2)$
<code>label(["text", x, y], ...)</code> – напис в позиції точки з координатами $(x; y)$, вирівнювання, орієнтація задається опціями
<code>vector([x, y], [dx, dy])</code> – вектор з початком в точці $(x; y)$ та координатами $(dx; dy)$
<code>region(expr, x, x1, x2, y, y1, y2)</code> – область у декартовій системі координат, що задана відношенням <code>expr</code> і яка визначається умовою <code>expr=true</code>
<code>image(m, x, y, nx, ny)</code> – графічний об'єкт, заданий через матрицю з розмірністю n_x на n_y точок і координатами нижнього лівого кута $(x; y)$

Як видно з таблиці, в Maxima достатнє число геометричних форм та налаштувань їх опцій, щоб створювати довільні графічні композиції.

Розглянемо приклади побудови графіків та створення графічних зображень за допомогою засобів інтерфейсу Draw.

Приклад В2.1. Побудувати графіки функцій $y = \frac{1}{x}$, $y = -\frac{1}{x}$, $y = \frac{\sin 5x}{x}$ на

одному малюнку. Пояснити результат.

```
g1: 1/x;
g2: explicit(sin(5*x)/x, x, -10, 10);
wxdraw2d(xrange=[-5, 5], yrange=[-2, 6],
          dimensions=[700, 500],
          color=blue,
          key="1/x", /*позначення лінії в легенді
explicit(g1, x, -10, 10),
          color=green,
          key="-1/x",
explicit(-1/x, x, -10, 10),
          line_width=1,
          color=red,
          key="sin(5x)/x",
g2);
```

В результаті одержимо графік на рис. В1.

У графіках, які складаються з кількох графічних об'єктів, список аргументів команди `draw2d(3d)` може бути занадто довгим і важким для наочного сприймання. Щоб цьому запобігти, запис процедури можна структурувати, користуючись довільними лінійними проміжками, розривами, відступами. Також можна визначати графічні об'єкти не безпосередньо в записі графічної команди, а попередньо призначити графічному об'єкту ім'я у вигляді змінної і надалі використовувати тільки ім'я в списку аргументів команди.

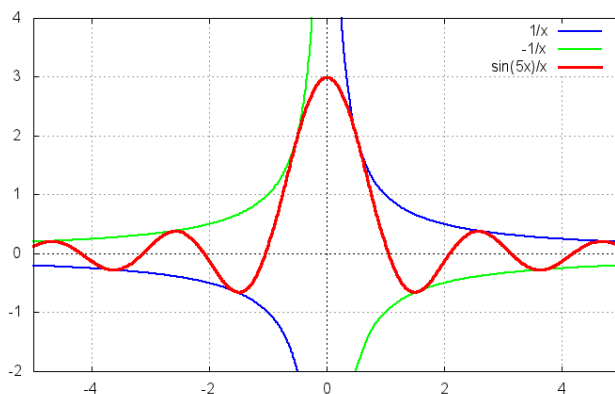


Рис. В1

Приклад В2.2. Побудувати графіки неявно заданих функцій:
 $x^2 + (y - \sqrt{|x|})^2 = 1$, $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$, $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ на одному малюнку.

Спочатку надамо графічним об'єктам даних функцій імена, які далі будемо застосовувати в процедурі створення графіка.

```
f1: implicit(x^2+(y-sqrt(abs(x)))^2=1,x,-2,2,y,-2,2)$
f2: implicit(x^2/3-y^2/2=1,x,-3,3,y,-2,2)$
f3: implicit(x^2/2+y^2/4=1,x,-3,3,y,-2,2)$
wxdraw2d(dimensions=[600,400], /* розмір графічного поля
      xtics_axis=true, /* зображення координатних осей
      xtics=[-3,1,3], /* шкала на осі Ox від -3 до 3 з кроком 1
      ip_grid=[100,100],
      color=red,f1, /* графік f1 червоного кольору
      color=blue,f2, /* графік f2 синього кольору
      color=green,f3); /* графік f3 зеленого кольору
```

В результаті отримаємо зображення, показане на рис. В2.

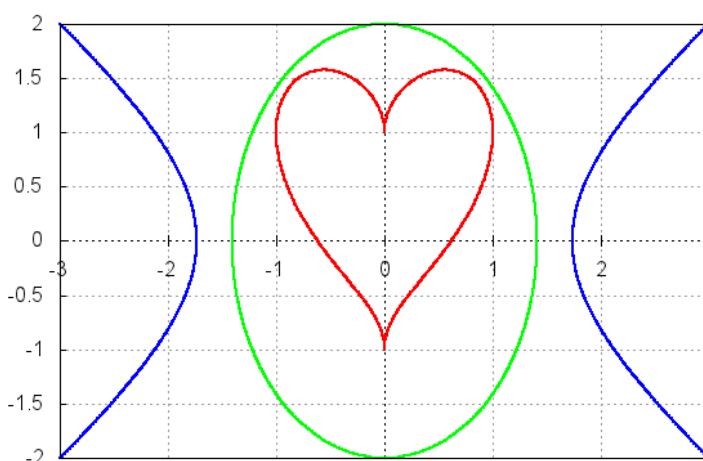


Рис. В2

У програмному кодї для збільшення гладкості кривої на малюнку використовується опція частоти дискретизації `ip_grid`, яка характерна для графічних об'єктів неявно заданих функцій і є аналогом опції `ntics`, яка використовується для явно, параметрично заданих функцій та залежностей в полярних координатах.

Приклад В2.3. Параметричні рівняння епіциклоїди мають вигляд:

$$x = (a+1)\left(\cos t - \frac{\cos((a+t)t)}{a+1}\right), \quad y = (a+1)\left(\sin t - \frac{\sin((a+t)t)}{a+1}\right). \quad \text{Побудувати}$$

графіки епіциклоїди, якщо параметр набуває значень $a = 1, 2, 3, 4$.

Розв'язування.

Використовуючи процедуру `makelist`, створимо список параметричних рівнянь епіциклоїди для значень параметра $a = 1, 2, 3, 4$, призначаємо йому ім'я `list`.

Цікаво одночасно спостерігати графіки для різних значень параметра, тому створимо малюнок, на якому розмістимо графіки для всіх значень параметра a . Для цього слід скористися процедурою `wxdraw(gr2d(...))`.

Щоб на одному зображенні компактно розмістити 4 різних графіки, скористаємося опцією `columns`, за якою ділиться графічне поле на 2 колонки.

Слід зазначити, що опція `columns` характерна лише для процедури `wxdraw(gr2d(...))`.

В легендах графіків виведемо назву епіциклоїди за відповідного значення a .

```
list:makelist(parametric((a+1)*(cos(t)-(cos((a+1)*t))/(a+1)),
                        (a+1)*(sin(t)-(sin((a+1)*t))/(a+1)),
                        t,0,2*%pi),a,1,4)$
scene1: gr2d(key="kardioida, a=1",list[1])$
scene2: gr2d(key="nefroida, a=2",list[2])$
scene3: gr2d(key="epicicloida, a=3",list[3])$
scene4: gr2d(key="epicicloida, a=4",list[4])$
wxdraw(scene1,scene2,scene3,scene4,columns=2)$
```

В результаті одержимо графіки, показані на рис. В3.

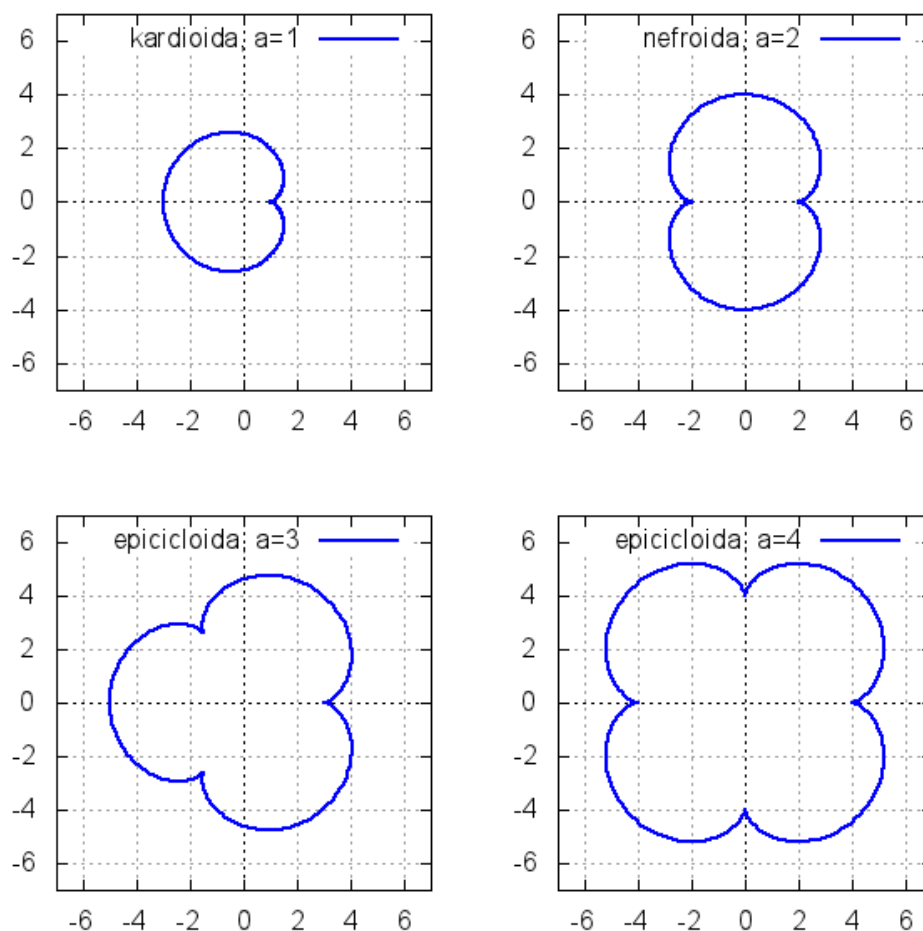


Рис. В3

В процесі розв'язування багатьох задач зручно користуватися полярною системою координат.

Приклад В2.4. В полярних координатах побудувати лінії $r = a + \sin 3\varphi$. Дослідити вплив значень параметра a на вигляд графіка.

Розв'язування.

Розглянемо випадки, коли $a = 0$, $0 < a < 1$, $a = 1$, $a > 1$. Для кожного випадку побудуємо лінії різного кольору. Нехай a набуває значень: 0; 0,5; 1; 1,5. В легенді відобразимо значення параметра, використовуючи опцію `key`. Опція `user_preamble="set grid polar"` є обов'язковою для побудови графіка в полярних координатах. Записуємо:

```
wxdraw2d(
user_preamble="set grid polar",
grid=true,xrange=[-2.5,3.5],
proportional_axes=xy,xtics_axis=true,
```

```

nticks=500,title="r=a+sin(3*phi) ",
line_width=3,
color=green,key="a=0",
polar(sin(3*phi),phi,0,2*%pi),
color=violet,key="a=0.5",
polar(0.5+sin(3*phi),phi,0,2*%pi),
color=yellow,key="a=1",
polar(1+sin(3*phi),phi,0,2*%pi),
color=spring_green,key="a=1.5",
polar(1.5+sin(3*phi),phi,0,2*%pi))$

```

В результаті одержимо зображення, подане на рис. В4.

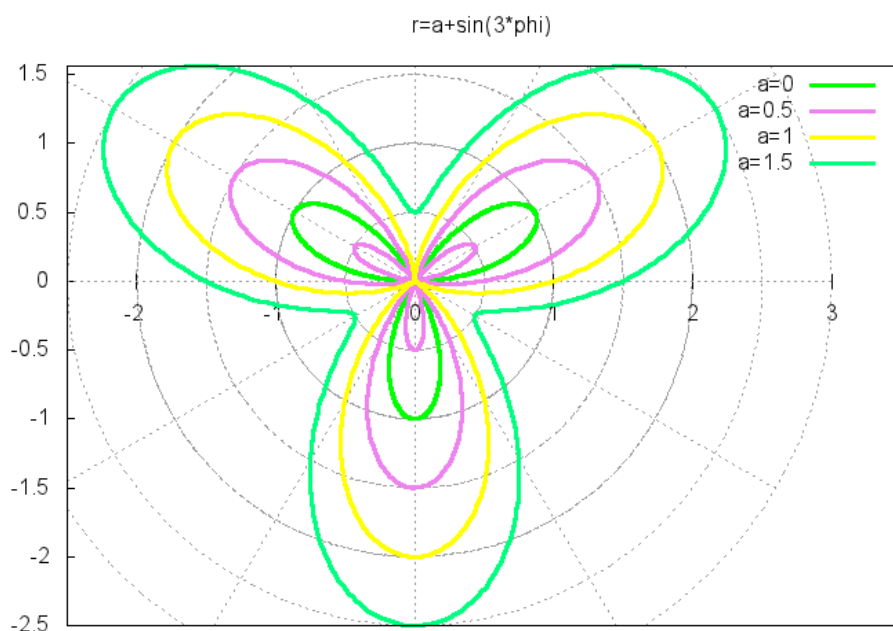


Рис. В4

Як видно з рисунка, через дане рівняння визначається лінія трилистника. За $a = 1,5$ пелюстки кривої мають незакінчений вигляд, їх довжина складає 2,5. За $a = 0$ і $a = 1$ одержуються трипелюсткові троянди, довжина пелюсток яких рівна 1 і 2 відповідно. За $a = 0,5$ одержується шестипелюсткова троянда, в якій три великі та три малі пелюстки мають довжину 1,5 та 0,5 відповідно.

Приклад 2.5. Побудувати пряму, яка проходить через точку $M(2;1)$ з напрямним вектором \overline{AB} , де $A(-2;1)$, $B(1;3)$. Зобразити круглу червону точку на прямій, вивести її позначення. Зеленим кольором зобразити стрілку, якою позначатиметься напрямний вектор прямої. Вивести позначення осей та заголовок

графіка, лінії сітки. Заголовком є рівняння лінії, що проходить через дану точку в заданому напрямі.

Розв'язування:

```

A: [-2, 1]$ B: [1, 3]$ M: [2, 1]$ /* координати даних точок
AB: [3, 2]$ /* координати вектора
wxdraw2d(
    xlabel="x", ylabel="y", /*написи на осях
    title="(x-2)/3=(y-1)/2", /*заголовок, рівняння прямої
    ip_grid=[200, 200], /*частота дискретування
    color=green, /* колір вектора
    head_angle=10, /* кут стрілки вектора
    head_length=0.7, /* довжина стрілки вектора
    vector(A, AB), /* вектор
    color=red, /* колір точки
    point_type=7, /* тип точки, круга
    point_size=2, /* розмір точки
    points([M]), /* точка
    color=black, /* колір підпису точки
    label(["M_{1}(2;1)", 3.5, 1]), /*підпис точки
    line_type=dots, color=blue, /*тип лінії та колір прямої
    line_width=2, /*ширина лінії прямої
/* пряма, рівняння прямої подається як неявно задана функція: */
    implicit((x-2)/3=(y-1)/2, x, -3, 7, y, -2, 5));

```

Результат виконання наведених команд поданий на рис. В5

В даному прикладі для побудови стрілки використовувалася функція `vector()`, перший аргумент якої – координати точки початку вектора, другий аргумент – координати вектора. Дана функція має характерні графічні опції:

```

head_both=true/false – стрілка з обох кінців;
head_length=n – довжина стрілки вектора, n – ціле додатне число;
head_angle=n – кут стрілки (за замовчуванням 45);
head_type – тип стрілки; можливі значення: `filled` (за замовчуванням),
`empty`, `nofilled`.

```

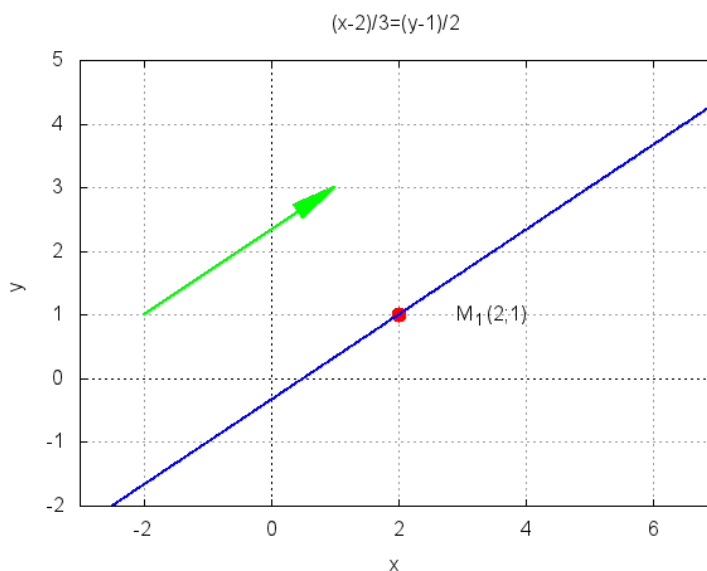


Рис. В5

Для створення підпису точки використовувалась функція `label()`, аргументами якої є текст підпису та координати місця напису. В дану функцію включено власні графічні опції:

`label_alignment` – вирівнювання напису відносно його координат, можливі значення: `center` – до центру (за замовчуванням), `left` – до лівої межі, `right` – до правої межі.

`label_orientation` – орієнтація напису, можливі значення: `horizontal`, `vertical`.

Приклад В2.6. Зобразити графічно множину точок, які задовольняють нерівність $\sin(\pi(|x|+|y|)) \geq 0$.

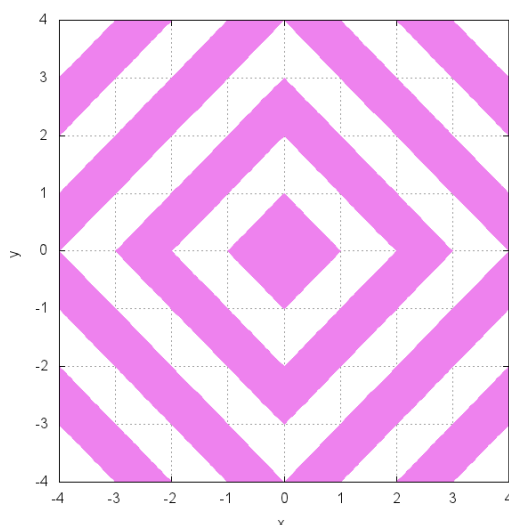


Рис. В6

Множину точок, що задана нерівністю від двох змінних, легко зобразити, використовуючи функцію `region()`, через яку визначається область у декартовій системі координат за умовою $expr(x,y)=true$.

```
wxdraw2d(dimensions=[600,600],
  x_voxel=50,
  y_voxel=50,
  fill_color=violet,
  region(sin(%pi*(abs(y)+abs(x)))>=0,x,-4,4,y,-4,4))$
```

В результаті отримуємо зображення, подане на рис. В6.

Слід зауважити, що частота дискретування для об'єкта `region()` задається за опціями `x_voxel`, `y_voxel` (за замовчуванням покладається значення 10). Колір заповнення області, що відповідає геометричному місцю точок, визначається за опцією `fill_color`.

В3 Анімація в середовищі Maxima

Приклад В3.1. Створити анімаційну демонстрацію розкладу функції $y = \sin 3x$ в точці $x_0 = 0$ в ряд Тейлора в залежності від степеня a .

Спочатку задаємо функцію та початкову точку:

```
f:sin(3*x); x0:0;
```

Параметром анімації буде степінь a полінома Тейлора відповідного розкладу даної функції. Нехай a змінюється від 1 до 20. Тоді записуємо:

```
wxanimate_draw(
  a,makelist(a,a,1,20), /*послідовність значень степеня
/* визначаємо налаштування вигляду координатної площини */
  dimensions=[900,500],
  proportional_axes=xy, yrange=[-2.1,2.1],
  xtics_axis=true, ytics_axis=true,
  grid=true, xaxis=true, yaxis=true,
/* графік даної функції */
  key="f(x)", line_width=2,
  explicit(f,x,-%pi,%pi),
/* графік функції відповідного полінома Тейлора*/
```

```

key="T", color=red, line_width=2,
explicit(taylor(f,x,x0,a),x,-%pi,%pi),
/* написи на графіку */
color=black,
label([sconcat("degree a=",a),2,1.5]),
label(["y",-0.5,1.8]), label(["x",3,-0.5]));

```

В результаті одержимо анімаційне зображення, окремі кадри якого зображені на рис. В7.

Для визначення поліному Тейлора в даній програмі використовується команда `taylor(f,x,x0,a)`, де f – дана функція, x – змінна, x_0 – початкова точка, a – степінь.

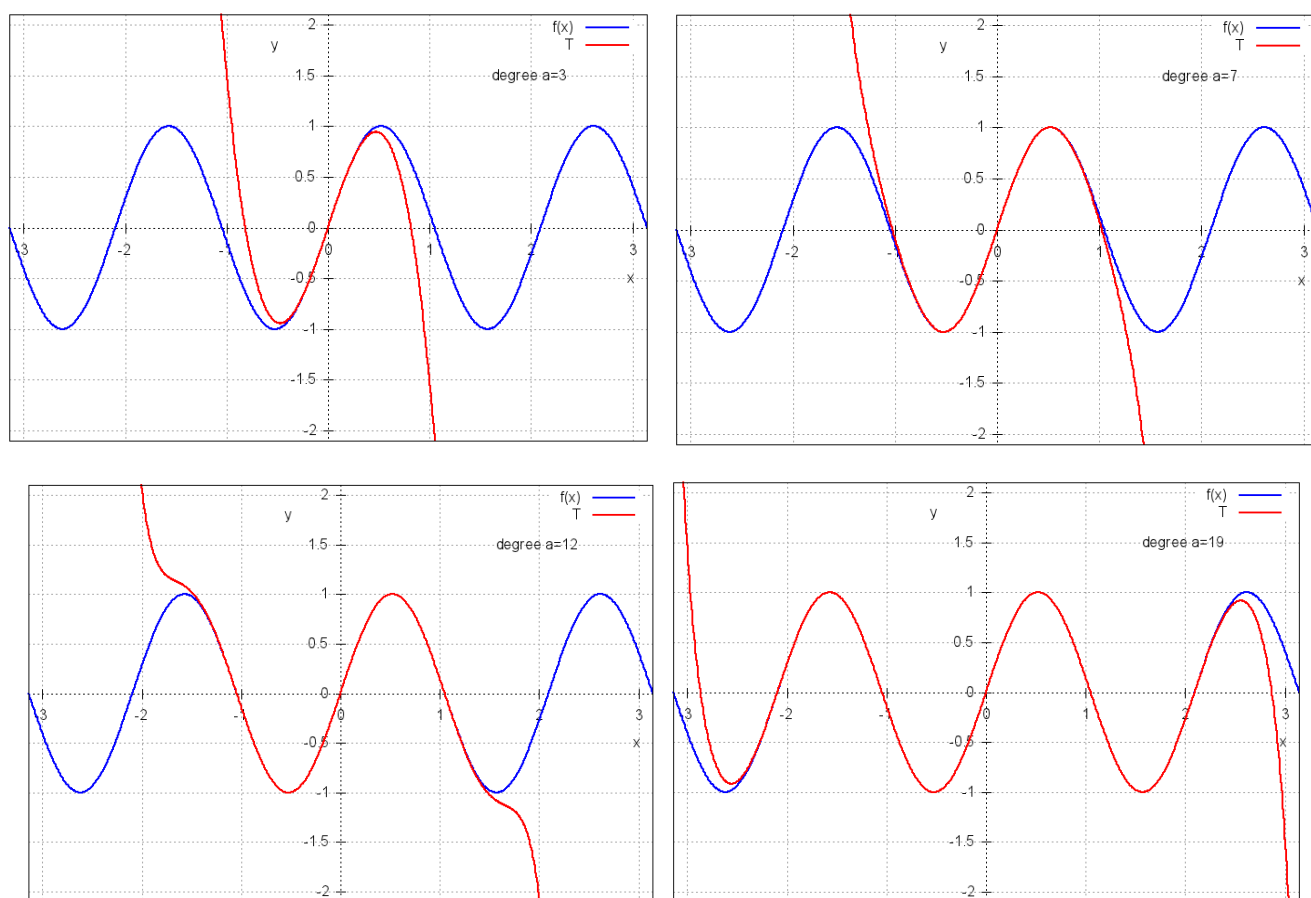


Рис. В7

Рух точки вздовж кривої

Використовуючи процедури створення анімації та процедуру створення списку `makelist`, можна відтворити рух точки. Для прикладу розглянемо анімацію, за допомогою якої імітується рух тіла, кинутого під певним кутом до горизонту.

Приклад В3.2. М'яч, кинутий з висоти 2 м від землі з початковою швидкістю $v_0 = 20$ м/с під кутом 45° . Створити анімацію, за допомогою якої буде імітуватися рух м'яча у вигляді рухомої точки на кривій.

```
x0:0$ y0:2$ /* початкові координати м'яча
v:20$ g:9.8$ /* початкова швидкість, прискорення
/* параметричні рівняння руху м'яча */
g(t):=[x0+v*t*cos(%pi/4),y0+v*t*sin(%pi/4)-g*t^2]$
/* побудова зображення */
wxanimate_draw(k,makelist(i*0.01,i,0,160), /* параметр
/* налаштування вигляду координатної площини */
    proportional_axes=xy, dimensions=[800,300],
    xrange=[0,25], yrange=[-1,8],
    xtics_axis=true, xlabel="x", ylabel="y",
    xaxis=true, xtics=[0,2,30], grid=true,
/* траєкторія руху м'яча */
    line_width=2,
    parametric(x0+v*t*cos(%pi/4),
                y0+v*t*sin(%pi/4)-g*t^2,t,0,k),
/* точка */
    color=green,point_type=filled_circle,
    key=sconcat("t=",k),point_size=2,
    points([g(k)]));
```

В результаті виконання програмного коду одержимо анімаційне зображення, окремий кадр якого зображено на рис. В8

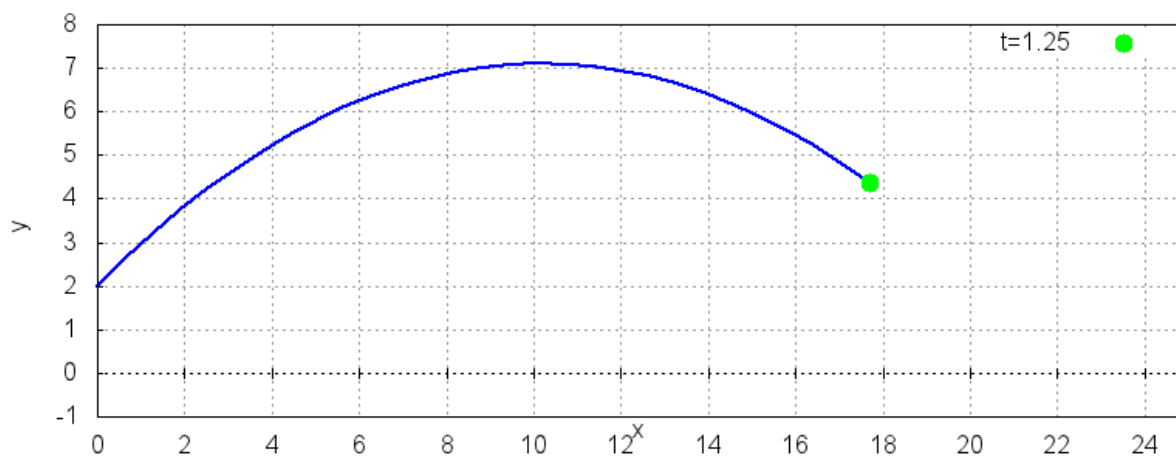


Рис. В8

Приклад. Створити анімаційну демонстрацію утворення циклоїди, яку описує фіксована точка на колі радіуса r , що котиться вздовж осі Ox .

Розв'язування.

Розглянемо коло радіуса $r=1$ з центром в точці $(0; 1)$. В результаті руху даного кола вздовж осі Ox абсциса центру буде змінюватися на величину параметра анімації, а ордината залишатиметься незмінною.

Нехай ang – параметр анімації. Щоб накреслити три арки циклоїди, коло повинно зробити три повних оберти, тому ang змінюється від 0 до 6π , причому кожен наступний кадр анімації буде відрізнятись від попереднього на величину

$\Delta ang = \frac{\pi}{10}$. Зміну величини параметра для кожного окремого кадру відобразимо в

легенді, використовуючи опцію `key` та функцію `sconcat()`.

Параметричні рівняння кола матимуть вигляд: $x(t) = ang + \sin t$, $y(t) = 1 + \cos t$.

Параметричні рівняння циклоїди: $x(t) = r(t - \sin t)$, $y(t) = r(1 - \cos t)$. Зміна t від 0 до ang забезпечить ілюстрацію плавної побудови лінії циклоїди як сліду точки на колі з координатами $(r(ang - \sin ang); r(1 - \cos ang))$.

Отже, запишемо процедуру створення анімаційного зображення таким чином:

```
with_slider_draw(
ang, makelist(i, i, 0, 60)*%pi/10,
proportional_axes=xy, xaxis=true, yaxis=true,
xrange = [-1, 20],
yrange = [-1, 3],
nticks = 80, dimensions=[1000, 300],
    /*коло*/
color = red, line_width = 2,
parametric(ang+sin(t),
            1+cos(t), t, 0, 2*%pi),
    /*циклоїда*/
color = blue, key=sconcat("ang=", ang),
line_width = 2,
parametric(1*(t-sin(t)),
            1*(1-cos(t)), t, 0, ang),
    /*Точки*/
key=false, color = black, point_type=7,
```

```

point_size = 1,points_joined = true,
line_width=1,
points ([[ang,1], /* центр кола
[1*(ang-sin(ang)), /* точка на колі
1*(1-cos(ang))] ]));

```

В результаті одержуємо анімацію, окремі кадри якої зображено на рис. В9.

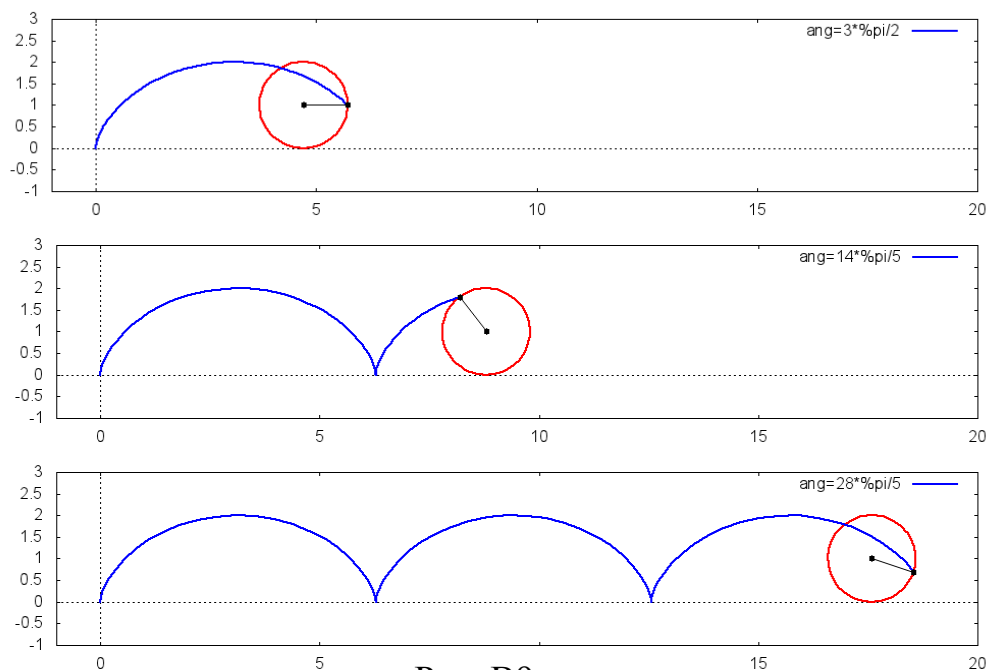


Рис. В9

Приклади завдань для самостійного розв'язування

1. Знайти відомості про ланцюгову лінію (катенарію), побудувати її графік. Виконати дослідження вигляду кривої залежно від значень параметра.

2. Побудувати графік розривної функції $y = \frac{x}{x^2 - 1}$. Тонкими пунктирними лініями зобразити асимптоти, круглими точками позначити точки екстремуму та точки перегину.

3. Задана функція $f(x) = \sin x + \sin 2x$. Визначити дискретний аргумент у діапазоні від 0 до 2π з кроком 0,1. Створити список значень функції $f(x)$ для вказаного дискретного аргументу. Побудувати точковий графік функції $f(x)$ для значень вказаного дискретного аргументу.

4. Дано функції $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ та $g(x) = x^2$. Побудувати графіки функцій:

а) $f(g(x))$; б) $f(x) + g(x)$; в) $f(x)g(x)$, $|g(x)|$, $-|g(x)|$. Пояснити результати.

5. Побудувати пряму, що проходить через точки $M_1(0; 2)$ та $M_2(3; 4)$. Позначити дані точки на прямій, зобразити напрямний та нормальний її вектори. В заголовку графіка написати рівняння прямої M_1M_2 .

6. Побудувати криві, задані параметрично. Дослідити вплив значень параметрів на вигляд кривої:

а) $x = 4 \cos t + 2 \cos 6t$, $y = 4 \sin t + 2 \sin 6t$, $t \in [0; 2\pi]$;

б) $x = a \sin t$, $y = b \cos t$, $t \in [0; 2\pi]$;

в) $x = t \sin at$, $y = t \cos at$, $t \in [0; 5\pi]$;

г) $x = \sin at$, $y = \cos bt$, $t \in [0; 2\pi]$ (фігури Лісажу)

7. У полярних координатах побудувати лінії. Дослідити вигляд ліній залежно від значень параметра.

а) $r = a + \sin \frac{5\varphi}{3}$

в) $r = e^\varphi$ (логарифмічна спіраль);

б) $r = a\varphi$, $\varphi \in [0; 5\pi]$ (спіраль

г) $r = a/\varphi$ (гіперболічна спіраль);

Архімеда);

д) $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

8. Через рівняння $r = R \sin k\varphi$ визначається k -пелюсткова троянда. Дослідити вигляд кривої для різних значень k . Розглянути випадки, коли k – ціле парне, ціле непарне число, раціональне число, ірраціональне число. Що означає параметр R ?

9. Знайти відомості про криву з назвою «Декартів лист». Створити графік кривої та ілюстрацію значення параметра. Оформлення графіка обрати самостійно.

10. Зобразити множину точок, які задовольняють нерівність:

а) $\sin \pi x - \sin \pi y \geq 0$;

б) $(y^2 - \arcsin^2(\sin x))(y^2 - \arcsin^2(\sin(x + \frac{\pi}{6}))) < 0$;

в) $(y - \sin x)(y + \sin x) < 0$;

1. Створити анімацію, на якій демонструється графік троянди $r = a \sin t$ в полярних координатах в залежності від параметра a . Дослідити вигляд, коли a :
1) ціле, 2) раціональне, 3) ірраціональне.

2. Створити анімаційне зображення побудови кривої, що задана параметрично рівняннями: $x = \sin 3t$, $y = \sin 4t$, $t \in [0; 2\pi]$.

3. Створити анімаційну демонстрацію утворення епіциклоїди, кривої, що описується точкою кола, яке котиться по зовнішній стороні іншого нерухомого кола без проковзування. Створити анімаційний файл з розширенням gif.

ДОДАТОК Г

Програма для знаходження мінімуму функції з прикладу 2.6.1 за методом найшвидшого спуску в середовищі Maple.

```

> restart;
f:=2.5*x^2-3.1*x*y+4.6*y^2-x+5.2*y;
"Знаходимо похідні за змінною x та за змінною y";
dfx:=diff(f,x);
dfy:=diff(f,y);
xprec:=solve(dfx,x);
yprec:=solve(dfy,y);
X[1]:=-1;
Y[1]:=-1;
prec:=0.01;
i:=1;
xrez:=0;
yrez:=0;
while xrez=0 do
x:=X[i];
y:=Y[i];
xrez:=`if`(dfx<prec,(`if`(dfx>-prec,X[i],0)),0);
yrez:=`if`(dfy<prec,(`if`(dfy>-prec,Y[i],0)),0);
X[i+1]:=`if`(dfx>0,X[i]-prec,X[i]+prec);
Y[i+1]:=`if`(dfy>0,Y[i]-prec,Y[i]+prec);
i:=i+1;
end do;
x:=xprec;
y:=yprec;
"Точка мінімуму";
x:=xrez;
y:=yrez;
"Значення функції в точці мінімуму";
f;

```

$$f = 2.5x^2 - 3.1xy + 4.6y^2 - x + 5.2y$$

"Знаходимо похідні за змінною x та за змінною y"

$$dfx = 5.0x - 3.1y - 1$$

$$dfy = -3.1x + 9.2y + 5.2$$

$$x = -0.1906000000$$

$$y = -0.6294413043$$

"Точка мінімуму"

$$x = -0.19$$

$$y = -0.63$$

"Значення функції в точці мінімуму"

$$-1.54108$$

Лабораторна робота

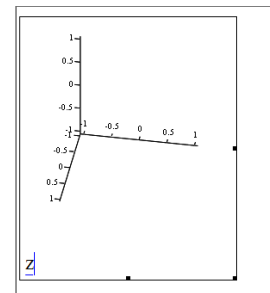
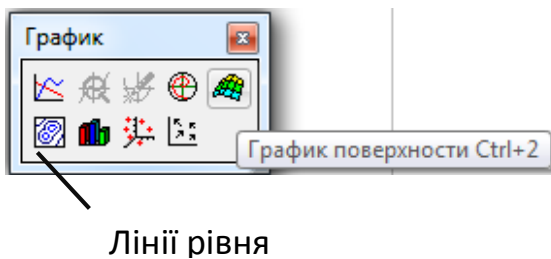
Побудова графіка функції від двох змінних, лінії рівня.**Дослідження функції на екстремум**

Мета: навчитися створювати та формувати графічні зображення функції від двох змінних, досліджувати функцію від двох змінних на екстремум за допомогою програми Mathcad; навчитися розв'язувати задачі з практичним змістом на пошук екстремумів, використовуючи засоби програми Mathcad.

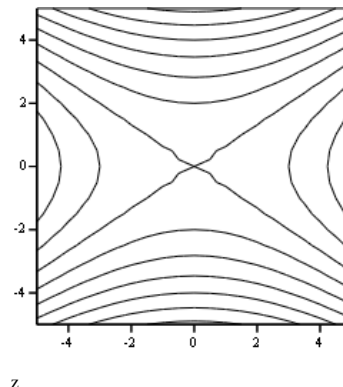
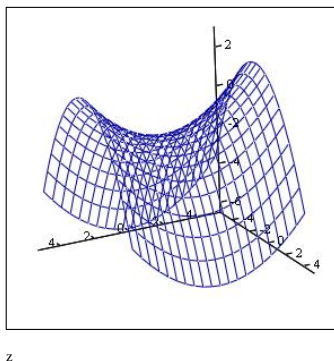
Теоретичні відомості

Для побудови графіка функції від двох змінних необхідно:

1. Визначити задану функцію (наприклад: $z(x, y) := \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}$).
2. Встановити курсор на те місце документа, де треба побудувати графік.
3. На математичній панелі ввімкнути *Панель графіков (Graph Toolbar)* і застосувати інструмент *Графік поверхності (Surface Plot)* (Ctrl+2).



4. В графічному полі ввести ім'я функції і клацнути лівою клав'яшею мишки, попередньо встановивши курсор за полем.

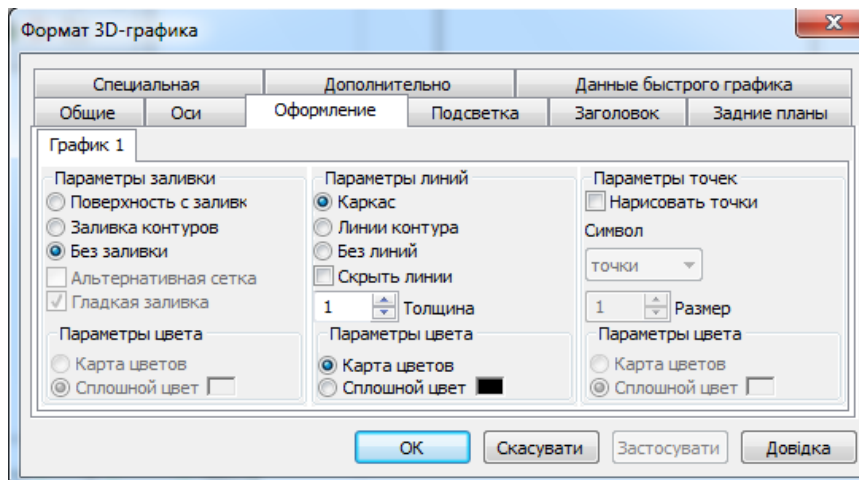


Як у топографії, можна зобразити рельєф заданої поверхні лініями рівня. Зафіксуємо значення z , тобто будемо перетинати поверхню $z = f(x, y)$ площинами $z = c$, де c – довільне число, взяте з множини значень даної функції. Одержимо криву $f(x, y) = c$, яку називають лінією рівня (або ізокривою) функції. Інакше кажучи, лінія рівня на площині xOy – це проекція кривої, яка утворюється

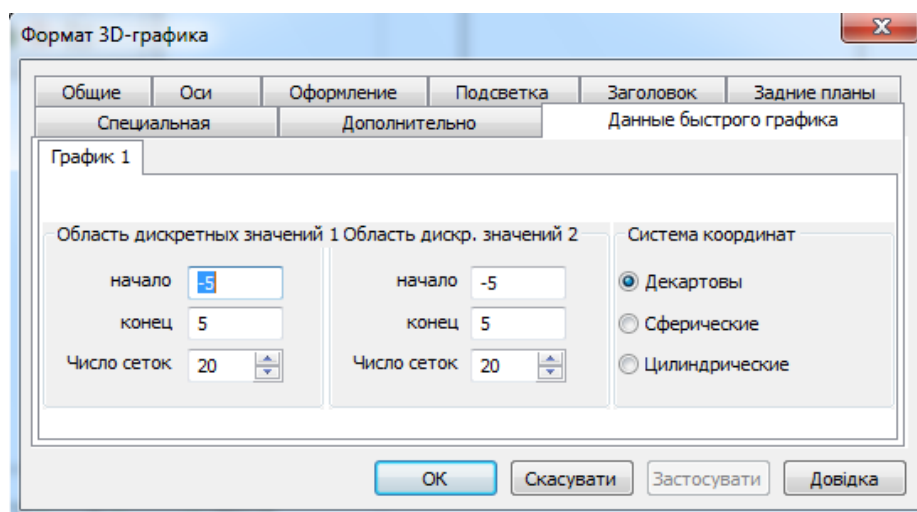
при перетині поверхні $z = f(x, y)$ площиною $z = c$. Будуючи лінії рівня для різних значень c , можна дістати певне уявлення про графік функції від двох змінних. Отриманий графік буде нагадувати топографічне зображення рельєфу горизонталями. В програмі Mathcad для побудови графіка поверхні у вигляді ліній рівня використовують спеціальну кнопку на панелі *Графік*.

Форматування тривимірних графіків виконується за допомогою послуг, що знаходяться у вікні *Формат 3D графика*, яке відкривається в результаті подвійного клацання лівою клавiшею мишки після встановлення її курсора в графічній області.

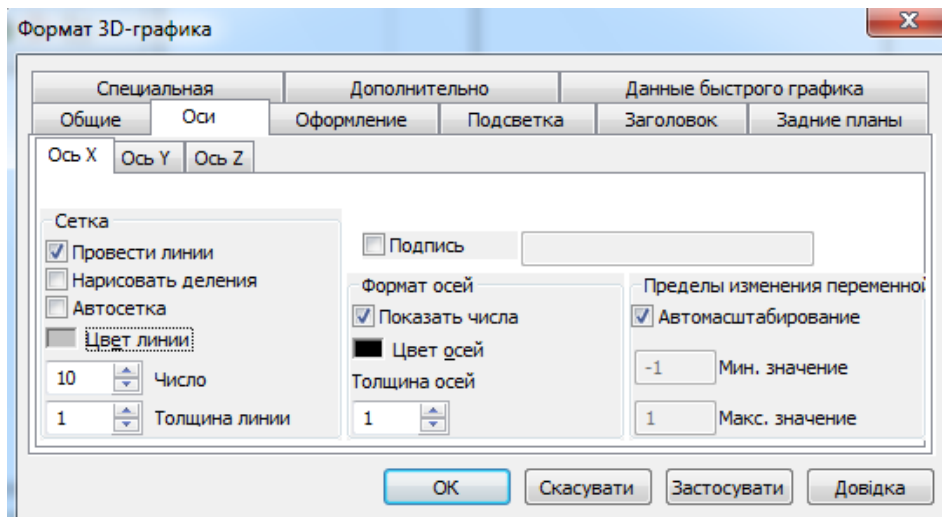
Налаштування кольорового оформлення



Налаштування інтервалу відображення поверхні на графіку



Налаштування координатних осей



Пошук екстремумів функції від 2-х змінних

Якщо частинні похідні функції $z = f(x, y)$ існують, то критичні точки, або точки, підозрілі на екстремум, шукаються серед розв'язків системи:

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = 0 \\ \frac{dz}{dy} = 0 \end{cases}$$

Нехай в результаті розв'язування даної системи одержали точку $M(x_0; y_0)$.

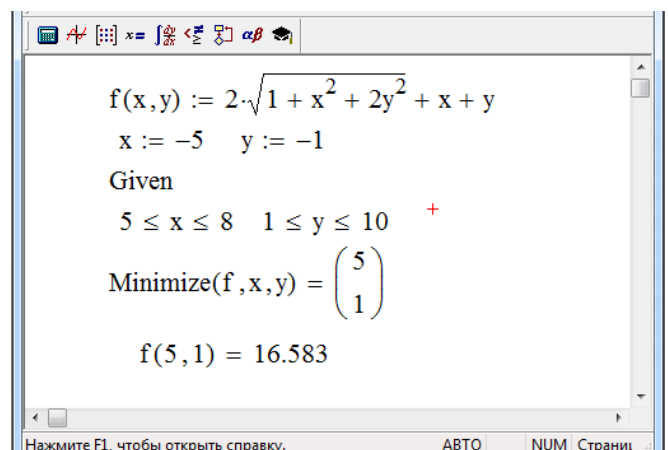
Позначимо через A, B, C відповідно значення $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ в точці M .

- 1) коли $\Delta = AC - B^2 > 0$, то функція досягає максимуму $z(x_0; y_0)$ за $A < 0$; мінімуму за $A > 0$;
- 2) коли $\Delta = AC - B^2 < 0$, то екстремуму немає;
- 3) коли $\Delta = AC - B^2 = 0$ – сумнівний випадок, потрібні додаткові дослідження.

В програмі Mathcad є спеціальні команди для пошуку екстремумів за ітераційними методами:

Maximize(z, x, y),
Minimize(z, x, y), де z – ім'я даної функції, x, y – аргументи.

Перед застосуванням цих команд необхідно вказати початкові значення x та y .



Команди *Minimize* та *Maximize* використовуються і для розв'язування задач на умовний екстремум, причому обмеження можуть бути у вигляді лінійних і нелінійних рівнянь чи нерівностей, які записуються після службового слова *Given*.

Приклад. Знайти критичні точки функції та дослідити їх на екстремум. Побудувати графік поверхні та графік ліній рівня для даної функції $z(x; y)$.

Розв'язування

1. Визначаємо задану функцію.

$$z(x, y) := \frac{1}{2}x \cdot y + (47 - x - y) \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4} \right)$$

2. Знаходимо частинні похідні (панель *Математический анализ*).

$$z_x(x, y) := \frac{d}{dx} z(x, y) \quad z_x(x, y) \rightarrow \frac{47}{3} - \frac{y}{12} - \frac{2 \cdot x}{3}$$

$$z_y(x, y) := \frac{d}{dy} z(x, y) \quad z_y(x, y) \rightarrow \frac{47}{4} - \frac{y}{2} - \frac{x}{12}$$

3. Для знаходження критичних точок розв'язуємо систему рівнянь:

Given

$$z_x(x, y) = 0$$

$$z_y(x, y) = 0$$

$$\text{Find } (x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} 21 \\ 20 \end{pmatrix} \quad \text{- критична точка}$$

4. За допомогою частинних похідних 2-го порядку (панель *Математический анализ*) перевіряємо достатню умову існування екстремуму:

$$\underline{A}(x, y) := \frac{d^2}{dx^2} z(x, y) \quad \underline{A} := A(21, 20) \rightarrow -\frac{2}{3}$$

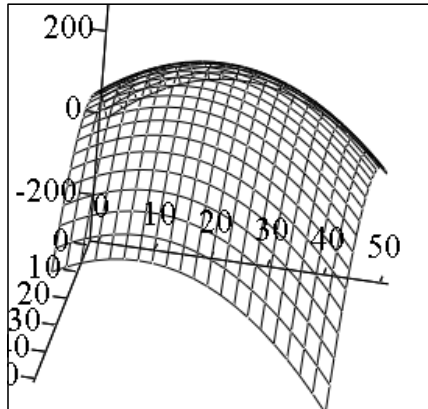
$$\underline{B}(x, y) := \frac{d}{dy} z_x(x, y) \quad \underline{B} := B(21, 20) \rightarrow -\frac{1}{12}$$

$$\underline{C}(x, y) := \frac{d^2}{dy^2} z(x, y) \quad \underline{C} := C(21, 20) \rightarrow -\frac{1}{2}$$

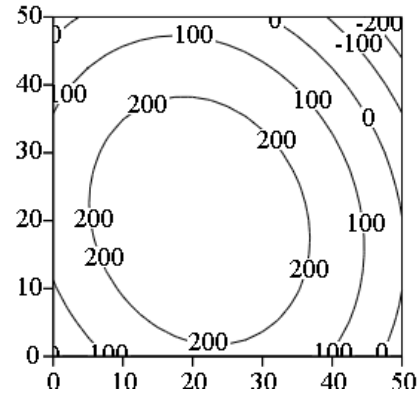
$$A \cdot C - B^2 \rightarrow \frac{47}{144}$$

Отже, $z(21, 20) = 282$ - максимум функції

5. Будемо графік і лінії рівня:



z



z

6. Розв'яжемо дану задачу за допомогою команди Maximize:

$$x := 0 \quad y := 0$$

$$\text{Maximize } (z, x, y) = \begin{pmatrix} 21 \\ 20 \end{pmatrix} \quad z(21, 20) = 282$$

Завдання для самостійного розв'язування

Завдання В2.1. Знайти критичні точки та дослідити їх на екстремум.
Побудувати графік поверхні та графік у вигляді ліній рівня.

1. $z = 2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y + 3;$

2. $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2 = 7;$

3. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20;$

4. $z = x^2 + 2xy + 4y^2 + 2x - 8y + 1;$

5. $z = 5x^2 - 8xy + 2y^2 + 2y + 2;$

6. $z = 2x^2 + 4xy - y^2 + 4x - 4;$

7. $z = 3x^2 - 3xy + 2y^2 + 4y + 2;$

8. $z = x^2 + xy + 2y^2 + 8x + 4y - 2;$

9. $z = 2x^2 - 5xy - y^2 + 4x - y + 3;$

10. $z = 3x^2 + 4xy + y^2 - x + 2y + 7;$

11. $z = 4x^2 - 3xy + 2y^2 - 5x + 3y + 8;$

12. $z = 5x^2 - xy + 2y^2 - 3x + 5y + 9;$

13. $z = 3x^2 + 2xy + y^2 - 4x + y + 7;$

14. $z = 3x^2 - 5xy + 2y^2 - x + 2y + 5;$

15. $z = 5x^2 - xy + 2y^2 - 3x + y + 1.$

Завдання В2.2. Знайти розв'язки задачі на умовний екстремум, використовуючи засоби комп'ютерних математичних пакетів (початкові значення x та y дібрати самостійно):

1. $2x - y \rightarrow \max, x^2 + y^2 \leq 1, x - y \leq 0, x - y \leq -1.$
2. $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 \rightarrow \min, x^2 + y^2 \geq 9, x \geq 2, y \geq 0.$
3. $\ln x - y \rightarrow \max, x^2 + y^2 \leq 4, x > 0, x - y \leq 2.$
4. $x + \sqrt{y} \rightarrow \max, x + y \geq 1, x^2 + y^2 = 1.$
5. $x - y \rightarrow \min, x + y \geq 1.5, 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2.$
6. $x + y \rightarrow \min, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1.$
7. $x^2 - 2x - y \rightarrow \min, 2x^2 + 3y^2 \leq 6, x \geq 0, y \geq 0.$
8. $2x^2 + y^2 - 6x - 3y \rightarrow \min, x + y \leq 3, 2x + y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0.$
9. $x^2 + 4y^2 - 8x - 8y \rightarrow \min, -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3.$
10. $x^2 + y^2 \rightarrow \min, x + y - 1 = 0.$
11. $1/x + 1/y \rightarrow \min, x + y - 2 = 0.$
12. $x^2 + y^2 - xy + x + y - 4 \rightarrow \min, x + y + 3 = 0.$

Завдання В2.3 Задачі на пошук оптимального розв'язку

1. Ювелірна майстерня виготовляє прикраси двох видів А1 і А2. Для цього використовуються дорогоцінні метали В1, В2 і В3. Питомі витрати на одиницю виробу, запаси металів і вартості одиниці кожного виробу подано в таблиці. Потрібно так організувати виробництво прикрас, щоб прибуток від їх реалізації був максимальним.

Вид металу	Вироби		Запаси (г)
	А1	А2	
В1	1	1	6
В2	0	1	4
В3	2	1	10
Вартість виробу	1	2	Прибуток $\rightarrow \max$

2. Скласти дієту з двох продуктів так, щоб вона задовольняла мінімальну денну потребу у вітамінах і була найменшої вартості. Перший продукт містить 2 од. вітаміну А, 1 од. вітаміну В, 1 од. вітаміну С; другий продукт – 1 од. вітаміну

А, 3 од. вітаміну В, 1 од. вітаміну С. Ціна I продукту 0.2 за одиницю, другого продукту 0.4 за одиницю.

Вітаміни	I продукт	II продукт	Денний об'єм
А	2	1	8
В	1	3	9
С	1	1	7
Витрати гр. од.	0.2	0.4	Вартість \rightarrow min

3. На площині xOy знайти точку $M(x;y)$, сума відстаней якої від п'яти даних точок (координати дібрати самостійно) буде найменшою (задача Штейнера).
4. Виготовити закритий циліндричний бак об'ємом V . Які повинні бути його розміри, щоб витрати матеріалу були найменшими?
5. Вікно має форму прямокутника, завершеного півкругом. Визначити розміри вікна даного периметра, за яких через вікно проходитиме найбільше світла.
6. Із квадратного листа жерсті зі стороною a виготовити відкриту зверху коробку, вирізавши в кутах квадрати та загнувши утворені кромки. Якою повинна бути сторона коробки, щоб її об'єм був найбільшим?
7. Витрати на паливо для пароплава складаються з двох частин. Перша з них не залежить від швидкості і дорівнює 480 грн за годину. Друга частина витрат пропорційна кубу швидкості, причому за швидкості 10 км/год ця частина витрат дорівнює 30 грн за годину. Необхідно знайти, за якої швидкості сума витрат на 1 км шляху буде найменшою.

Засоби створення візуально орієнтованого інтерфейсу в середовищі програми Maple

Таблиця Е.1

Пакет	Функції	
Elements	Windows Body Elements (Елементи вікна)	Button, RadioButton, CheckBox, RadioBatton, Slider, TextField, TextBox, ComboBox, Label, Plotter, Table, MathMLEditor, MathMLViewer, ToggleButton, DropDownBox
	Layout Elements (Елементи розмітки)	BoxCell, BoxColumn, BoxLayout, BoxRow, GridCell, GridRow, GridLayout, HorizontalGlue, VerticalGlue, BorderLayout
	Menu Elements (Елементи меню)	CheckBoxMenuItem, RadioButtonMenuItem, PopupMenu, Menu, MenuBar, MenuItem, MenuSeparator
	Command Elements (Командні елементи)	CloseWindow, Evaluate, RunDialog, RunWindow, SetOption, Shutdown
	Toolbar Elements (Елементи-інструменти)	ToolBar, ToolBarButton, ToolBarSeparator
	Dialog Elements (Елементи управління «діалогом»)	AlertDialog, ColorDialog, ConfirmDialog, FileDialog, InputDialog, MessageDialog, QuestionDialog
	Інші елементи	Action, Argument, ButtonGroup, Font, Image, Item, MapletReturn, ReturnItem, TableHeader, TableItem, TableRow, Window
Examples	Alert, Confirm, GetColor, GetEquation, GetExpression, GetFile, GetInput, Integration, KernelOpts, Message, Question, Selection, ShowTable, SignQuery	
Tools	AddAttribute, AddContent Get, ListBoxSplit, Print, Set, SetTimeout, StartEngine, StopEngine	
Utilites	ErrorDialog, GetFile, HelpBrowser	
Display		

Завантажуємо пакет Elements:

```
restart;
```

```
with (Maplets [Elements]) :
```

Далі пишемо нескладну програму.

```
maplet_diff := Maplet (Window ('title' = "Диференціювання",  
# створюємо вікно з назвою "Диференціювання";  
["Введіть f(x):", TextField ['TFfx'] ()], # створюємо  
текстове поле для введення виразу функції, яку потрібно диференціювати;
```

```

["Змінна диференціювання:", TextField['TFx'](3)], #
створюємо текстове поле певного розміру для введення змінної
диференціювання;

TextField['TFf1x']('editable'='false', 3..40), #
створюємо поле для виведення результату;

[Button("Диференціювати", Evaluate('TFf1x' =
'diff(TFfx, TFx)')), # кнопка для виконання операції диференціювання;
Button("Ok", Shutdown(['TFfx', 'TFx', 'TFf1x']))], #
кнопка для закривання вікна;

Button("Очистити", SetOption('TFfx'="" ))] # кнопка для
підготовки вікна до нової операції диференціювання;

Maplets[Display](maplet_diff): # демонстрація та виконання
операцій, описаних за допомогою маплету.

```

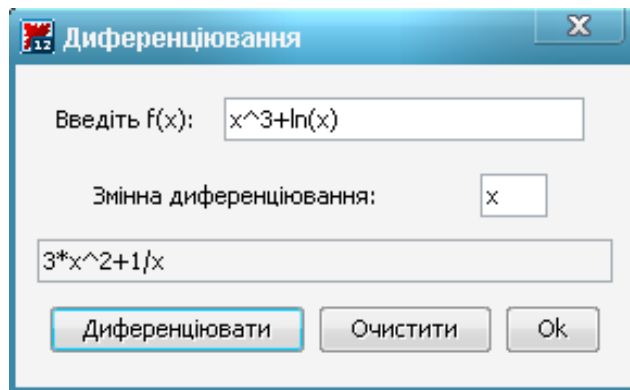


Рис. Е.1

В результаті виконання операцій з описаного маплету отримуємо вікно, показане на рис. Е.1.

Процедури для побудови тривимірних об'єктів в середовищі програми Maxima

<code>explicit (f(x, y), x, x1, x2, y, y1, y2)</code> – явно задана функція $f(x, y)$ на множині точок $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$
<code>implicit (equation, x, x1, x2, y, y1, y2, z, z1, z2)</code> – неявно задана функція z від змінних x та y , задана рівністю <code>equation</code> , на множині точок $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \times [z_1, z_2]$
<code>parametric (x(t), y(t), z(t), t, t1, t2)</code> – функція, задана параметрично, $t \in [t_1, t_2]$.
<code>parametric_surface (x(u, v), y(u, v), z(u, v), u, u1, u2, v, v1, v2)</code> – поверхня, задана параметрично, з параметрами u, v , $(u, v) \in [u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$
<code>cylindrical (r(z, phi), z, z1, z2, phi, phi1, phi2, v, v1, v2)</code> – поверхня в циліндричних координатах, з азимутом $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$
<code>spherical (r(phi, v), phi, phi1, phi2)</code> – поверхня, опис якої задано в сферичних координатах
<code>points ([x1, x2, ...], [y1, y2, ...], [z1, z2, ...])</code> – точки $(x_i; y_i; z_i)$, $i=1, 2, \dots$, задані списками відповідних координат
<code>points ([[x1, y1, z1], [x2, y2, z2], ...])</code> – набір точок $(x_i; y_i; z_i)$, $i=1, 2, \dots$
<code>label ("text", x, y, z, ...)</code> – напис в позиції точки з координатами $(x; y; z)$, вирівнювання, та орієнтація задається відповідними опціями
<code>vector ([x, y, z], [dx, dy, dz])</code> – вектор з початком в точці $(x; y; z)$ та координатами $(dx; dy; dz)$

Основні опції для тривимірної графіки

<code>xu_voxel, yv_voxel</code> – густина сітки каркасу поверхні (явно задані поверхні, за замовчуванням 10)
<code>x(yz)_voxel</code> – густина сітки каркасу (графічний об'єкт <code>region</code> , неявно задана поверхня, за замовчуванням 10)
<code>xu_grid=n, yv_grid=n</code> – число ліній сітки вздовж відповідної осі (задається явно або параметрично, за замовчуванням 30)
<code>proportional_axes=xyz</code> – однаковий масштаб вздовж осей

`wired_surface=true/false` – використовується, щоб відобразити або приховати сітку на поверхні, якщо задане забарвлення поверхні `enhanced3d=true`.

`enhanced3d=true/false` – задається градієнт забарвлення поверхні

`palette=[r,g,b]` – кольори градієнтного забарвлення поверхні, де `r,g,b` – назви або коди кольорів градації. Якщо `palette=gray` – поверхня в градаціях сірого кольору. За замовчуванням `palette=color`.

`surface_hide=true/false` – приховати невидиму частину поверхні

`contour=value` – зображення контурних ліній. За замовчуванням `contour=none`, тобто лінії не будуються. Також можливі значення: `base` – контурні лінії проектуються на площину `xOy`; `surface` – контурні лінії будуються на поверхні; `both` – контурні лінії зображуються і на поверхні, і в проекції на площину `xOy`; `map` – проектується на площину `xOy`, вигляд зверху.

`contour_levels=n` – число контурних ліній, які будуються через рівні проміжки (за замовчуванням 5). Якщо `contour_levels=[n1,k,n2]`, то контурні лінії будуються від значення `n1` до `n2` з кроком `k`; якщо `contour_levels={n1,n2,...}`, контурні лінії будуються для значень `n1,n2,...`.

`view=[φ,θ]` – пара кутів (в градусах), за якою задають орієнтацію координатних осей `Oxyz` відносно екрану.

ДОДАТОК Ж

**Тематика індивідуальних дослідницьких завдань з курсу
«Комп'ютерні математичні пакети» за спеціалізаціями
(«Інформатика», «Фізика», «Економіка»)**

1. Опрацювання експериментальних даних за методами апроксимації в програмі Maxima (Maple).
2. Генерація випадкових чисел в комп'ютерних математичних пакетах.
3. Графічне дослідження кривих другого порядку за допомогою СКМ.
4. Графічне дослідження квадратичних поверхонь за допомогою СКМ.
5. Створення анімаційних моделей.
6. Розрахунок максимального потоку в мережах.
7. Кодування повідомлень.
8. Програмування в СКМ (чисельні методи, рекурсивні функції, графи).
9. Створення програмних засобів з візуально-орієнтованим інтерфейсом.
10. Побудова фракталів за допомогою СКМ.
11. Візуалізація фізичних процесів і явищ.
12. Комп'ютерне моделювання задач з механіки.
13. Комп'ютерне моделювання задач з електрики.
14. Комп'ютерне моделювання задач з молекулярної фізики.
15. Комп'ютерне моделювання задач з оптики.
16. Візуалізація економічних процесів і явищ.
17. Пошук оптимального розв'язку: транспортна задача.
18. Пошук оптимального розв'язку: оптимальний план виробництва продукції.
19. Пошук оптимального розв'язку: задача про розкрій матеріалу.
20. Хмаро-орієнтовані комп'ютерні математичні пакети.

ДОДАТОК 3

**Завдання для виявлення рівня сформованості навчально-дослідницьких
умінь студентів на початку навчання**

Задача 1. Дослідити, як впливає значення коефіцієнтів a , b , c на зміну графіка функції $y = ax^2 + bx + c$.

Задача 2. Дослідити, за яких значень параметра a дана система рівнянь:
а) має єдиний розв'язок; б) має нескінченну множину розв'язків; в) не має розв'язків:

$$\begin{cases} (a+1)x + y = 2, \\ 3x + (a-1)y = a. \end{cases}$$

Задача 3. Знайти множину розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 16, \\ |x| + |y| \leq 5. \end{cases}$$

Задача 4. Всередині кута зі сторонами a та b дано точку C . Знайти такі точки A та B на сторонах цього кута, щоб периметр трикутника ABC був найменшим. Дослідити, в якому випадку існує розв'язок даної задачі.

Задача 5. Частинка рухається за законом $s(t) = at^3 - a^3t$. За якого значення параметра a швидкість частинки буде рівна нулю?

Задача 6. З гармати під кутом α до горизонту вилітає снаряд. З якою початковою швидкістю необхідно випустити снаряд, щоб він потрапив в точку, що знаходиться на відстані 1 км від гармати.

Задача 7. Взуттєвій фабриці потрібно виготовити партію взуття обсягом 5000 пар. Опитати студентів 1-х курсів, з'ясувати у них розміри взуття, опрацювати статистичні дані, підготувати поради для представника взуттєвої фабрики щодо виготовлення кількості пар взуття певних розмірів.

ДОДАТОК І.

Приклад І.1. Який вигляд мають криві, що визначаються за рівнянням $2x^2 + 5xy - 3y^2 - 3x + ay - 2 = 0$, за різних значень параметра a ?

Дану задачу розв'язуємо за допомогою програми Gran1. Вираз залежності для даного рівняння в Gran1 має вигляд $2*X^2+5*X*Y-3*Y^2-3*X+P1*Y-2=0$, де $P1=a$. Змінюємо значення параметра $P1$ від -25 до 25 з кроком $0,5$ і фіксуємо об'єкт, відповідно окремим значенням параметра $P1$, за допомогою послуги «Об'єкт/Новий об'єкт із зафіксованими параметрами», щоб отримати кілька зображень лінії, визначеної за даним рівнянням (Рис. І.1).

З побудованих графіків бачимо, що за даним рівнянням визначається крива гіперболічного типу, яка за умови $P1=5$ та за умови $P1=-12,5$ розпадається на дві прями, що перетинаються.

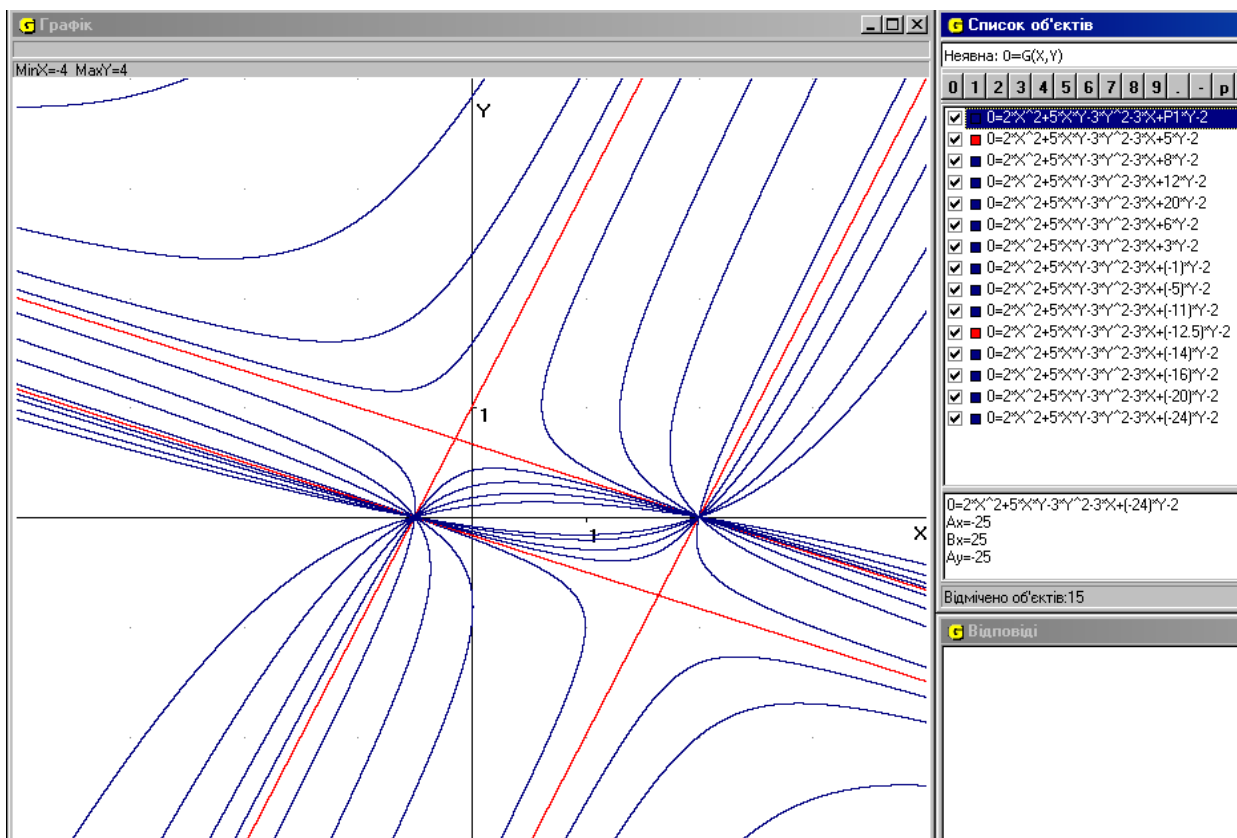


Рис. І.1

Справді, обчисливши другий та третій інваріанти для даного рівняння, одержимо $I_2 < 0$ незалежно від значення a . А $I_3 = 0$, коли $a = 5$ або $a = -12,5$.

З графіка видно, що всі побудовані криві перетинають вісь абсцис у двох точках $x_1 = -\frac{1}{2}$ та $x_2 = 2$. Це спонукує студентів замислитись над питанням, чому це так і як цьому можна знайти відповідне аналітичне пояснення.

Приклад I.2. Встановити вид кривої, заданої через рівняння $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 52x - 64y + 164 = 0$ у прямокутній декартовій системі координат, побудувати відповідний графік, дослідити властивості кривої.

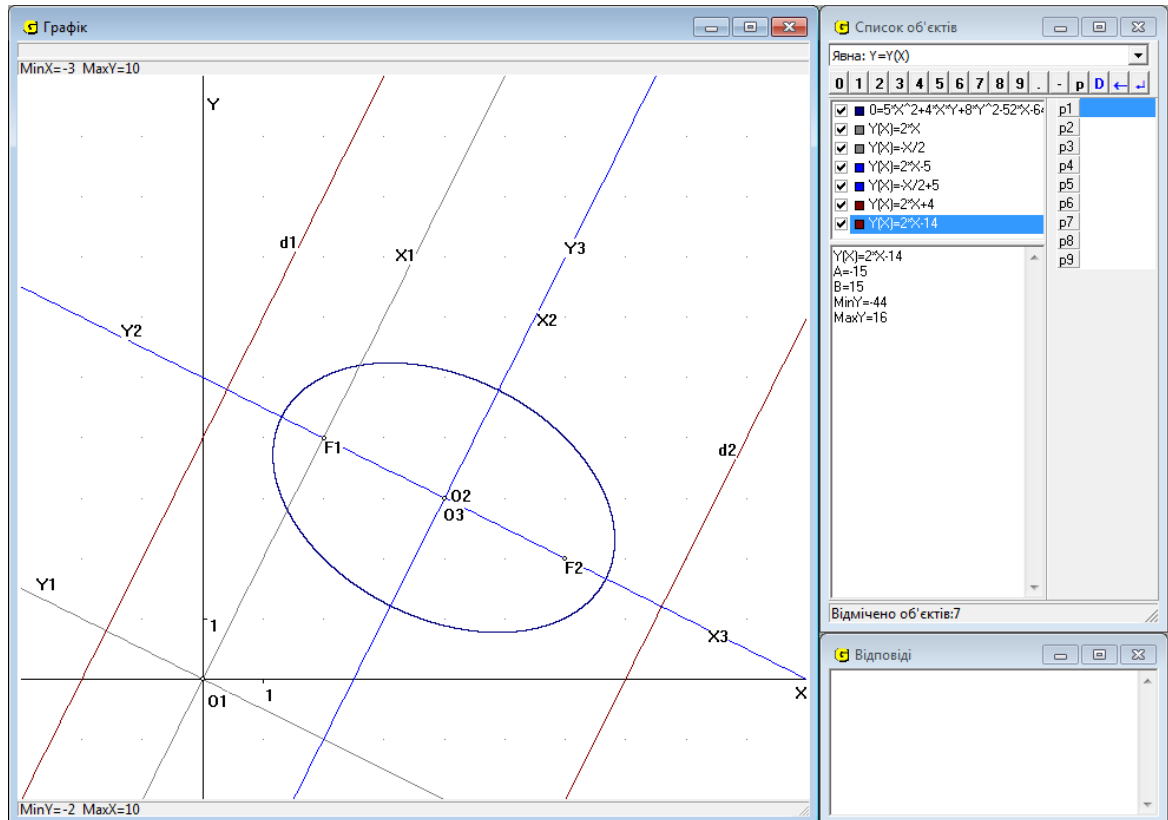


Рис. I.2

Для побудови кривої, заданої через дане рівняння, за програмою *Gran1* необхідно створити об'єкт типу «Неявна». У вікні «Введення виразу залежності» в рядок «0 = » записуємо $5 * X^2 + 4 * X * Y + 8 * Y^2 - 52 * X - 64 * Y + 164$. Побудувавши графік за допомогою «Графік/Побудувати», одержимо еліпс (рис. I.2).

Як видно з рисунка, щоб записати рівняння даного еліпса в канонічному вигляді, необхідно виконати перетворення координат, а саме поворот та паралельне перенесення.

Поворот координатних осей виконаємо за формулами:

$$\begin{aligned} x &= x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha, \\ y &= x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha. \end{aligned} \quad (I.1)$$

Підставимо ці вирази для x та y в дане рівняння і виокремимо коефіцієнти біля x_1^2 , y_1^2 та x_1y_1 . Отримаємо:

$$\begin{aligned} & (5\cos^2\alpha + 4\cos\alpha\sin\alpha + 8\sin^2\alpha)x_1^2 + (5\sin^2\alpha - 4\sin\alpha\cos\alpha + 8\cos^2\alpha)y_1^2 + \\ & + (2\sin^2\alpha - 3\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha)x_1y_1 - (52\cos\alpha + 64\sin\alpha)x_1 + \\ & + (52\sin\alpha - 64\cos\alpha)y_1 + 164 = 0 \end{aligned} \quad (I.2)$$

Прирівнявши до нуля коефіцієнт біля x_1y_1 та поділивши обидві частини на $\cos^2\alpha \neq 0$, одержимо $2\operatorname{tg}^2\alpha - 3\operatorname{tg}\alpha - 2 = 0$, звідки $(\operatorname{tg}\alpha)_1 = 2$, $(\operatorname{tg}\alpha)_2 = -\frac{1}{2}$.

Знаючи $\operatorname{tg}\alpha$, можна знайти $\sin\alpha$ та $\cos\alpha$ за формулами:

$$\sin\alpha = \pm \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}, \quad \cos\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}. \quad (I.3)$$

Якщо кут повороту α домовитися вважати гострим, то в цих формулах треба брати знак плюс і для $\operatorname{tg}\alpha$ взяти додатний розв'язок.

Вибираємо, наприклад кут повороту α такий, що $\operatorname{tg}\alpha = 2$. Знаходимо $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ та підставляємо їх у вираз (I.2).

Після обчислення значень коефіцієнтів біля x_1^2 , y_1^2 , x_1 , y_1 у перетвореному рівнянні одержимо $9x_1^2 + 4y_1^2 - 36\sqrt{5}x_1 + 8\sqrt{5}y_1 + 164 = 0$.

В отриманому рівнянні визначимо повні квадрати $9(x_1 - 2\sqrt{5})^2 + 4(y_1 + \sqrt{5})^2 = 36$.

Виконаємо паралельне перенесення за формулами:

$$x_2 = x_1 - 2\sqrt{5}, \quad y_2 = y_1 + \sqrt{5} \quad (I.4)$$

Отже, в системі $x_2O_2y_2$ рівняння кривої набуває вигляду $\frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{9} = 1$.

Це рівняння еліпса, у якого півосі $a=2$, $b=3$. Оскільки $a < b$, то одержане рівняння не є канонічним. Для зведення його до канонічного вигляду, для якого

має виконуватися нерівність $a > b$, необхідно виконати поворот координатних осей на кут 90° . За формулами повороту (I.1) одержимо $x_3 = y_2$, $y_3 = x_2$. Тоді в системі координат $x_3O_3y_3$ рівняння еліпса набуває вигляду $\frac{x_3^2}{9} + \frac{y_3^2}{4} = 1$ – канонічне рівняння заданого еліпса.

Знаходимо формули перетворення координат для переходу від системи координат $x_3O_3y_3$ до системи xOy .

Виразимо x_1 та y_1 через x_3 та y_3 за формулами (I.4):

$$x_1 = y_3 + 2\sqrt{5}, \quad y_1 = x_3 - \sqrt{5}.$$

Разом з $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ підставимо $x_1 = y_3 + 2\sqrt{5}$, $y_1 = x_3 - \sqrt{5}$ у

вирази (I.1) для x та y . Одержимо формули перетворення координат:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{2}{\sqrt{5}}x_3 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_3 + 4, \\ y &= \frac{1}{\sqrt{5}}x_3 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_3 + 3. \end{aligned} \tag{I.5}$$

За останніми формулами, коли $x_3 = 0$, $y_3 = 0$, знаходимо в системі координат xOy центр еліпса $O_3(4;3)$; фокуси еліпса знаходяться на осі O_3x_3 на відстані $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3^2 - 4^2} = \sqrt{5}$ від центра, тобто мають координати $F_{13}(-\sqrt{5};0)$, $F_{23}(\sqrt{5};0)$. За формулами (I.5) знаходимо $F_1(2;4)$, $F_2(6;2)$ – координати фокусів в системі координат xOy .

Користуючись послугою «Графік/Мітки...», позначаємо знайдені точки на графіку (Рис. I.1).

В разі повороту координатних осей на кут α ($tg_1\alpha = 2$, $tg_2\alpha = -\frac{1}{2}$) вісь абсцис переходить у пряму $y = 2x$, а вісь ординат – у пряму $y = -\frac{x}{2}$. В результаті всіх перетворень системи координат нові координатні осі в початковій системі координат xOy зображуються як графіки залежностей $y = 2x - 5$, $y = -\frac{1}{2}x + 5$, які легко знайти, користуючись формулами перетворення (I.5) та поклавши

$x_3 = 0$ для знаходження рівняння осі ординат; $y_3 = 0$ – для знаходження рівняння осі абсцис.

Директрисами еліпса є дві прямі, які паралельні до малої осі еліпса і знаходяться від неї на відстані $\frac{a^2}{c}$. В системі координат $x_3O_3y_3$ рівняння

директрис матимуть вигляд $x_3 = \frac{9}{\sqrt{5}}$, $x_3 = -\frac{9}{\sqrt{5}}$.

Користуючись виразами змінних x і y через x_3 та y_3 , неважко знайти рівняння директрис, які в даній задачі набувають вигляду $d_1: y = 2x + 4$ та $d_2: y = 2x - 14$.

Щоб побудувати координатні системи $x_1O_1y_1$, $x_2O_2y_2$ та $x_3O_3y_3$, а також директриси еліпса, в Gran1 створимо об'єкти типу «Явна» та у вікні «Введення виразу залежності» запишемо знайдені залежності для цих прямих (рис. I.2).

Дослідження функції від однієї змінної та побудова її графіка за допомогою засобів програми Maxima

Нехай необхідно дослідити функцію $f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$. Задаємо дану функцію

в Maxima:

```
(%i1) f: x^3/(2*(x+1)^2);
      define(f(x), f);
```

```
(%o1)  $\frac{x^3}{2(x+1)^2}$ 
```

```
(%o2)  $f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$ 
```

Область визначення – всі дійсні числа, окрім точки $x = -1$.

Перевіримо функція парна чи непарна:

```
(%i3) is(f=subst(x=-x, f));
      is(f=subst(x=-x, -f));
```

```
(%o3) false
```

```
(%o4) false
```

Отже, функція ні парна, ні непарна.

Знаходимо вертикальні та горизонтальні асимптоти. Обчислюємо границі:

```
(%i5) limit(f, x, minf);
```

```
(%o5)  $-\infty$ 
```

```
(%i6) limit(f, x, inf);
```

```
(%o6)  $\infty$ 
```

```
(%i7) limit(f, x, -1, minus);
```

```
(%o7)  $-\infty$ 
```

```
(%i8) limit(f, x, -1, plus);
```

```
(%o8)  $-\infty$ 
```

Оскільки правостороння та лівостороння границі функції за умови $x \rightarrow -1$ прямують до мінус нескінченності, то пряма $x = -1$ є вертикальною асимптотою. За умови $x \rightarrow \pm\infty$ дана функція не має скінченної границі, тому горизонтальних асимптот немає.

Знаходимо похилі асимптоти $y = kx + b$, де $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$,

$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$.

Обчислюємо коефіцієнти похилих асимптот:

```
(%i8) km: limit(f/x, x, minf);
```

```
      bm: limit(f-km*x, x, minf);
```

```

kp:limit(f/x,x,inf);
bp:limit(f-kp*x,x,inf);
(%o9)  $\frac{1}{2}$ 
(%o10) -1
(%o11)  $\frac{1}{2}$ 
(%o12) -1

```

Таким чином, $y = \frac{1}{2}x - 2$ – похила асимптота.

Знаходимо точки екстремуму та інтервали зростання і спадання функції.

Для цього обчислюємо похідну і критичні точки:

```

(%i13) df:diff(f,x);
(%o13)  $\frac{3x^2}{2(x+1)^2} - \frac{x^3}{(x+1)^3}$ 
(%i14) solve(df,x);
      solve(df,x);
(%o14) [x=-3, x=0]
(%o15) [x=-1]

```

Визначимо знак похідної на кожному з проміжків знакосталості графічним способом, використовуючи процедуру `signum`, за якою повертається значення 1 або -1, або 0, якщо функції відповідно додатні, від’ємні, рівні нулю. Знак похідної можна визначити за допомогою функції:

```

(%i16) sdf:signum(df);
(%o16) signum( $\left(\frac{3x^2}{2(x+1)^2} - \frac{x^3}{(x+1)^3}\right)$ )

```

Побудуємо графік функції `sdf`, обійшовши особливу точку $x = -1$, використовуючи процедуру пакету `draw`.

```

(%i17) load(draw)$ /*завантажуємо графічний пакет draw*/
      wxdraw2d(yrange=[-2,2], /*діапазон значень вздовж осі Oy*/
      explicit(sdf,x,-5,-1.1), /*графік явно заданої функції
      на відповідному проміжку*/
      explicit(sdf,x,-0.9,5))$

```

В результаті одержуємо графік (рис. К1). Отже, точка $x = -3$ – точка максимуму, в точці $x = -1$ функція невизначена, а в точці $x = 0$ екстремуму немає. Знаходимо значення функції в точках $x = -3$ та $x = 0$:

```

(%i19) f(-3);f(0);
(%o19)  $-\frac{27}{8}$ 
(%o20) 0

```

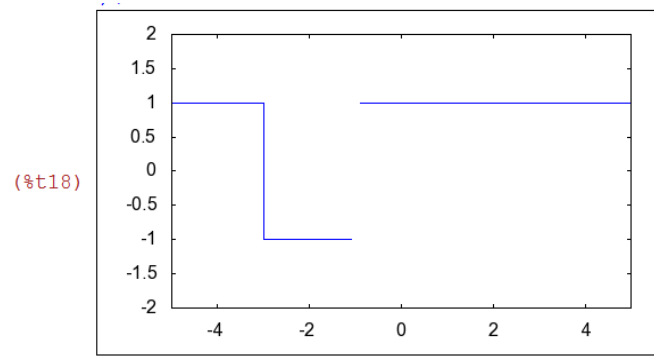


Рис. К1

Таким чином, $\left(-3; -\frac{27}{8}\right)$ – точка максимуму.

Знайдемо точки перегину та інтервали вгнутості, опуклості. Обчислюємо другу похідну та її критичні точки.

Досліджуємо знаки другої похідної графічно:

```
(%i21) ddf:diff(df,x);
      solve(ddf,x);
      solve(1/ddf,x);
```

```
(%o21) 
$$\frac{3x}{(x+1)^2} - \frac{6x^2}{(x+1)^3} + \frac{3x^3}{(x+1)^4}$$

```

```
(%o22) [x=0]
```

```
(%o23) [x=-1]
```

```
(%i24) sddf:signum(ddf);
```

```
(%o24) signum $\left(\frac{3x}{(x+1)^2} - \frac{6x^2}{(x+1)^3} + \frac{3x^3}{(x+1)^4}\right)$ 
```

```
(%i25) wxdraw2d(
      yrange=[-2,2],
      explicit(sdf,x,-5,-1.1),
      explicit(sdf,x,-0.9,10));
```

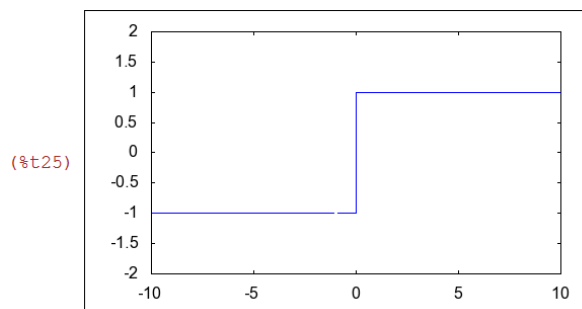


Рис. К2

З рис. К2 видно, що $x = 0$ є точкою перегину; на множині $(-\infty; -1) \cup (-1; 0)$ функція опукла вгору, а на проміжку $(0; \infty)$ – опукла вниз.

Використовуючи процедуру `wxdraw2d`, створимо графічне зображення, на якому буде графік функції (синій), асимптоти (червоні), точка максимуму (червона) і точка перегину (зелена) (рис. К3):

```
(%i26) text:label(["f(x)", 2, 1])$ /*підпис на графіку*/
(%i27) wxdraw2d(
  dimensions=[600, 600], /*розмірність графічної області*/
  proportional_axes=xy, /*пропорційна система координат*/
  yrange=[-10, 5], /*діапазон значень вздовж осі Oy*/
  grid=true, /*відображення ліній сітки*/
  xaxis=true, /*відображення осі Ox*/
  xaxis_type=dots, /*тип лінії осі Ox*/
  yaxis=true, /*відображення осі Oy*/
  yaxis_type=dots, /*тип лінії осі Oy*/
  xlabel="x", /*підпис осі Ox*/
  ylabel="y", /*підпис осі Oy*/
  line_width=2, /*товщина лінії графічного об'єкта*/
  explicit(f, x, -10, 10), /*графік явно заданої функції*/
  color=red, /*колір графічного об'єкта (асимптоти)*/
  line_width=1, /*товщина лінії графічного об'єкта (асимптоти)*/
  parametric(-1, y, y, -10, 10), /*вертикальна асимптота*/
  explicit(f(km*x+bm, x, -10, 10), /*похила асимптота*/
  color=black, text, /*підпис на графіку, його колір*/
  color=red, /*колір графічного об'єкта (точки)*/
  point_type=filled_circle, /*тип точки*/
  points([[ -3, subst(x=-3, f) ]]), /*точка максимуму*/
  color=green, point_type=filled_circle,
  points([[ 0, subst(x=0, f) ]]) /*точка перегину*/
)$
```

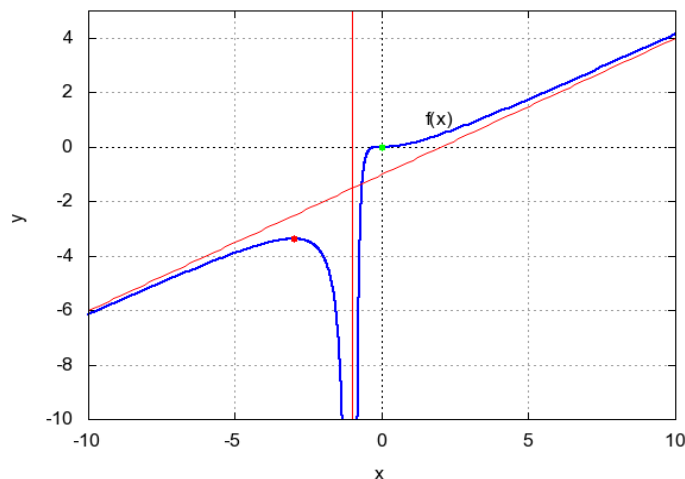


Рис.К3

Для більш наочного відображення точки максимуму побудуємо фрагмент графіка в околі точки максимуму $x = -3$ та дотичну лінію в цій точці (рис. 4):

```
(%i28) wxdraw2d(
    dimensions=[600,600],
    proportional_axes=xy,
    grid=true
    yrange=[-5,-2],
    xlabel="x",
    ylabel="y",
    line_width=2,
    explicit(f,x,-5,-1),
    color=magenta,
    explicit(subst(x=-3,f+df(t-x)),t,-5,-1),
    color=red,
    point_type=filled_circle,
    points([[ -3,subst(x=-3,f) ]]))$
```

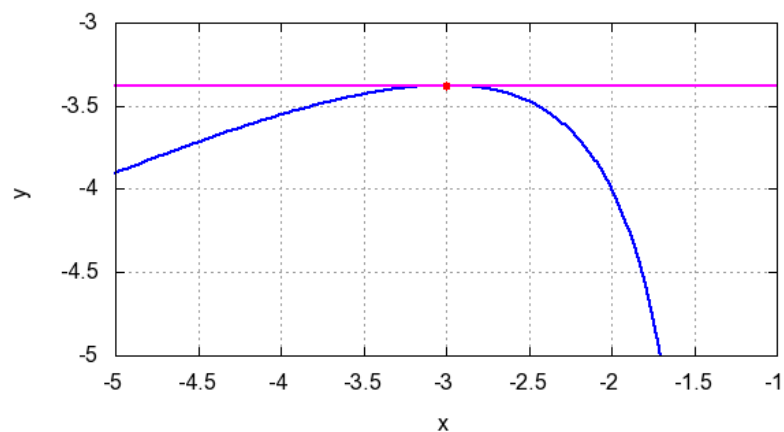


Рис.К4

Розв'яжемо додаткове завдання. За допомогою розкладу функції в ряд Тейлора знайдемо наближення даної функції у вигляді многочленів 1-го, 2-го, 3-го, 4-го степенів $T_1(x)$, $T_2(x)$, $T_3(x)$, $T_4(x)$ в точці $x_0 = -3$ та побудуємо їх графіки на окремому рисунку (рис.9).

```
(%i29) T1:taylor(f,x,-3,1);
      T2:taylor(f,x,-3,2);
      T3:taylor(f,x,-3,3);
      T4:taylor(f,x,-3,4);
```

```
(%o29) /T/ -27/8 + ...
```

```
(%o30) /T/ -27/8 - 9(x+3)^2/32 + ...
```

```
(%o31) /T/ -27/8 - 9(x+3)^2/32 - 5(x+3)^3/32 + ...
```

$$(\%o32) /T/ -\frac{27}{8} - \frac{9(x+3)^2}{32} - \frac{5(x+3)^3}{32} + \frac{11(x+3)^4}{32} \dots$$

Для створення графічного зображення використовуємо процедуру:

```
(%i33) wxdraw2d(
  dimensions=[600,600],
  proportional_axes=xy,
  grid=true
  yrange=[-5,-2],
  xlabel="x", ylabel="y",
  key="f(x)", line_width=2, explicit(f,x,-5,-1),
  key="T1", color=brown, explicit(T1,x,-5,-1),
  key="T2", color=dark-red, explicit(T2,x,-5,-1),
  key="T3", color=dark-pink, explicit(T3,x,-5,-1),
  key="T4", color=dark-magenta, explicit(T4,x,-5,-1),
  key="", color=green, point_type=filled_circle,
  points([[ -3, subst(x=-3, f) ]]) )$
```

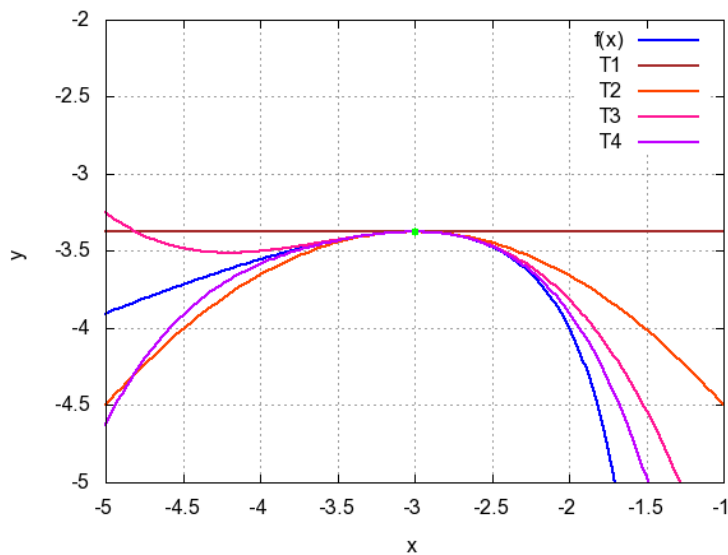


Рис.К5

Лабораторна робота

Опрацювання даних експерименту за методами апроксимації в середовищі програми Mathcad

Мета: навчитися опрацьовувати експериментальні дані за методами інтерполяції та регресії, використовуючи засоби програми Mathcad; розвивати вміння використовувати засоби програми Mathcad для розв'язування поставлених задач та перевірки їх результатів.

Хід роботи

Під час опрацювання результатів експерименту часто виникає необхідність в апроксимації деякої залежності $f(x)$ на основі даних, що подані окремими точками $(x_i; y_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Завдання 1. Інтерполяція поліномом Лагранжа.

1. Для таблично заданої функції (відповідно до свого варіанту) побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа і обчислити його значення в точках x_1, x_2, x_3 .
2. Оцінити похибку побудованого многочлена в одній з точок x_1, x_2, x_3 .
3. Показати на графіку різницю між точними та інтерпольованими значеннями функції.
4. Дослідити точність інтерполяції при різних x_i та n .

Завдання 2. Інтерполяція кубічними сплайнами.

1. Для таблично заданої функції (відповідно до свого варіанту) знайти інтерполяційну функцію за допомогою сплайнів, обчислити її значення в точках x_1, x_2, x_3 , побудувати графічну ілюстрацію.
2. Порівняти фактичні похибки інтерпольовання функції многочленом Лагранжа та сплайнами. Зробити висновки.

Завдання 3. Пошук наближення функції методами регресії.

1. Знайти наближення до таблично заданої функції за допомогою лінійної, медіанної, поліноміальної регресії та у вигляді елементарної функції.
2. Зобразити наближення графічно та дослідити, за допомогою якого методу досягається найточніше наближення, зробити висновок.

Контрольні питання

1. Що таке інтерполяція?
2. Що таке інтерполяція у вигляді алгебраїчних многочленів?
3. Що таке параболічна інтерполяція?
4. Що таке вузли інтерполяції?
5. В чому полягає завдання відшукування многочлена інтерполювання?
6. Які недоліки методу інтерполювання методом Лагранжа?
7. Як побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа?
8. Як визначається похибка методу інтерполяції за допомогою формули Лагранжа?
9. Що таке кубічний інтерполяційний сплайн? Як відбувається процес інтерполювання сплайнами?
10. Загальна постановка задачі знаходження функції наближення (регресії).
11. В чому суть наближення таблично заданої функції методом найменших квадратів?
12. Які функції можуть використовуватися для регресії? Які відповідні процедури MathCAD вам відомі?
13. Як знайти регресію у вигляді лінійної функції?
14. Як знайти регресію у вигляді квадратичної функції?
15. Як визначити правильність виду вибраної функції наближення?

Варіанти завдань для самостійного розв'язування

Завдання 1-2.

1	$f(x) = \exp(2x^3 + 3x^2 - 5)$										
	x	-2,11	-1,8	-1,5	-1,15	-0,95	-0,22	-0,1	0,34	0,7	1,0
	$f(x)$	0,00003	0,00096	0,00674	0,01700	0,01818	0,00763	0,00693	0,01031	0,05819	1,00
$x_1=0.25, x_2=0.31, x_3=-1,25$											
2	$f(x) = \sin(\cos x)$										
	x	0,88	1,68	2,3	2,8	3,5	4,11	4,78	5	6,5	7,2
	$f(x)$	0,5949	-0,1087	-0,6181	-0,8089	-0,8055	-0,5368	0,0675	0,2799	0,8286	0,5715
$x_1=0.95, x_2=5.5, x_3=2.5$											
3	$f(x) = 3 \sin \sqrt{x} + 0,35x - 3,8$										
	x	0,01	0,12	0,73	0,97	1,05	1,13	1,46	1,88	2,07	2,54
	$f(x)$	-3,497	-2,7394	-1,282	-0,9609	-0,8688	-0,783	-0,484	-0,2016	-0,1016	0,0882
$x_1=0.5, x_2=1.712, x_3=2.22$											
4	$f(x) = x - (3 + \sin 3,6x)^{-1}$										
	x	-3,5	-2,9	-1,2	-0,4	0,3	0,9	1,7	2,3	3,1	3,5
	$f(x)$	-3,8371	-3,1598	-1,4548	-0,8979	0,0424	0,5554	1,3476	2,0443	2,6033	3,1704
$x_1=0.95, x_2=1.75, x_3=3.25$											
5	$f(x) = 1/(1 + 25x^2)$										
	x	-1,5	-0,9	0,7	1,1	1,7	2,2	2,3	3,5	3,9	4,1
	$f(x)$	-0,98	-0,736	0,72	0,923	1,005	0,817	0,753	-0,348	-0,685	-0,816
$x_1=2.25, x_2=4.03, x_3=1.99$											

Завдання 3.1 Для таблично заданої функції (відповідно до свого варіанту знайти інтерполяційну функцію за допомогою сплайнів та функцію лінійної і поліноміальної регресії, обчислити її значення в точках x_1, x_2 . Побудувати графічну ілюстрацію.

1	x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
	y	0.0	0.01	0.2	1.2	1.4	2.0	2.5	3.0	3.2	3.21

	x1=0.25, x2=1.312										
2	x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
	y	12.5	8.9	7.5	5.3	3.8	2.3	1.5	1.2	1.05	1.0
	x1=0.35, x2=15.5										
3	x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
	y	0.0	1.2	6.7	12.6	9.8	5.8	3.6	1.5	1.1	0.7
	x1=2.5, x2=8.712										
4	x	0.55	0.8	0.93	1.16	1.31	1.48	1.78	2.06	2.58	2.89
	y	0.44	0.8	1.63	1.26	1.07	1.11	0.83	0.37	0.21	0.15
	x1=0.95, x2=1.75										
5	x	1.0	1.6	2.2	2.8	3.4	4.0	4.6	5.2	5.8	6.4
	y	14.66	13.65	12.83	9.05	3.07	1.53	1.27	1.18	1.11	1.09
	x1=2.25, x2=4.93										
6	x	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
	y	1.0	0.65	0.2	0.05	0.02	0.05	0.02	0.65	0.9	1.0
	x1=0.75, x2=1.12										
7	x	1.0	1.6	2.2	2.8	3.4	4.0	4.6	5.2	5.8	6.4
	y	12.8	13.1	13.67	14.2	30.8	50.76	62.45	65.43	66.1	65.77
	x1=2.15, x2=3.32										
8	x	1.0	1.8	2.6	3.4	4.2	5.0	5.8	6.6	7.4	8.2
	y	31.5	5.3	2.1	1.12	0.07	-0.1	-2.5	-7.8	-12.5	-27.2
	x1=3.25, x2=7.75										
9	x	-2.8	-2.7	-2.0	-1.0	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
	y	-11.4	-5.4	-1.2	-0.2	0.0	0.25	2.0	6.5	12.8	23.6
	x1=-0.25, x2=2.25										
10	x	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
	y	0.0	0.35	0.8	0.95	0.98	0.95	0.8	0.35	0.1	0.0
	x1=0.35, x2=3.37										

11	x	0.0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4	2.7
	y	-1.0	0.1	1.3	1.7	0.3	0.7	2.5	3.0	2.9	2.7
x1=0.88, x2=2.77											
12	x	-5.0	-4.0	-3.0	-2.0	-1.0	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
	y	12.5	7.8	2.3	0.4	-4.1	0.2	1.9	4.8	9.4	10.5
x1=-4.25, x2=1.38											

Завдання 3.2. Встановити залежність ринкової ціни автомобіля від його віку та пробігу, спираючись на певну статистичну вибірку.