



ВСЕУКРАЇНСЬКА НАУКОВО-ПРАКТИЧНА КОНФЕРЕНЦІЯ

**АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ МЕТОДОЛОГІЇ
ТА МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН**

присвячена 85-річчю від дня народження кандидата фізико-математичних наук, завідувача кафедри методології та методики навчання фізико-математичних дисциплін вищої школи, професора Горбачука Івана Тихоновича

Збірник матеріалів конференції

**18 січня 2018 року
м. Київ, Україна**

Міністерство освіти і науки України
Національна академія педагогічних наук України
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова
Академія вищої освіти України
Національний університет харчових технологій
Миколаївський національний університет імені В.О.Сухомлинського
Рівненський державний гуманітарний університет
Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського
Житомирський державний університет імені Івана Франка

Всеукраїнська науково-практична конференція

Актуальні проблеми методології та методики навчання фізико- математичних дисциплін

присвячена 85-річчю від дня народження кандидата фізико-математичних наук, завідувача кафедри методології та методики навчання фізико-математичних дисциплін вищої школи, професора Горбачука Івана Тихоновича

Збірник матеріалів конференції

18 січня 2018 року

м. Київ, Україна

Тези доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції «Актуальні проблеми методології та методики навчання фізико-математичних дисциплін», присвяченої 85-річчю від дня народження кандидата фізико-математичних наук, завідувача кафедри методології та методики навчання фізико-математичних дисциплін вищої школи, професора Горбачука Івана Тихоновича 18 січня 2018 року, Київ, Україна – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2018. – 169 с.

Організаційний комітет

Андрущенко В.П. – доктор філософських наук, професор, член-кореспондент НАН України, академік НАПН України, ректор НПУ імені М.П. Драгоманова (**голова оргкомітету**);

Працьовитий М.В. – доктор фізико-математичних наук, професор, декан фізико-математичного факультету НПУ імені М.П. Драгоманова (**заступник голови оргкомітету**);

Торбін Г.М. – доктор фізико-математичних наук, професор, проректор з наукової роботи НПУ імені М.П. Драгоманова (**заступник голови оргкомітету**);

Сергієнко В.П. – доктор педагогічних наук, професор, директор Інституту неперервної освіти НПУ імені М.П. Драгоманова (**заступник голови оргкомітету**);

Пудченко С.А. – аспірант кафедри методології та методики навчання фізико-математичних дисциплін вищої школи НПУ імені М.П. Драгоманова (**відповідальний секретар**);

Вернидуб Р. М. – доктор філософських наук, кандидат фізико-математичних наук, професор, проректор з навчально-методичної роботи НПУ імені М.П. Драгоманова;

Корець М.С. – доктор педагогічних наук, професор, проректор із науково-педагогічної та адміністративно-господарчої роботи НПУ імені М.П. Драгоманова;

Андрусишин Б. І. – доктор історичних наук, професор, декан факультету політології та права;

Падалка О. С. – доктор педагогічних наук, професор, член-кореспондент НАПН України, завідувач кафедри економіки освіти;

Гончаренко Я. В. – кандидат фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики;

Грищенко Г. О. – кандидат фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри експериментальної та теоретичної фізики та астрономії;

Сиротюк В. Д. – доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри теорії та методики навчання фізики і астрономії;

Швець В. О. – кандидат педагогічних наук, професор, завідувач кафедри математики і теорії та методики навчання математики;

Шут М. І. – доктор фізико-математичних наук, професор, академік НАПН України, завідувач кафедри загальної і прикладної фізики;

Січкач Т. Г. – кандидат фізико-математичних наук, доцент, професор кафедри загальної і прикладної фізики;

Касперський А.В. – доктор педагогічних наук, кандидат фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри технічної фізики та математики;

Заболотний В.Ф. – доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри фізики і методики навчання фізики, астрономії Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського;

Єфименко В. В. – кандидат педагогічних наук, доцент, заступник декана факультету інформатики;

Мусієнко Ю.А. – старший викладач кафедри методології та методики навчання фізико-математичних дисциплін вищої школи НПУ імені М.П. Драгоманова;

Лазаренко М.В. – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри фізики Національного університету харчових технологій Київ;

Мосієвич О. С. – кандидат фізико-математичних наук, професор кафедри фізики, проректор Рівненського державного гуманітарного університету;

Ткаченко О. К. – кандидат фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри фізики Житомирського державного університету імені Івана Франка.

ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИРАЗІВ З ВИКОРИСТАННЯМ СКМ MATHEMATICA

Система комп'ютерної математики (СКМ) Mathematica на сьогодні є однією з найпопулярніших та найпотужніших у світі. Її використовують як професійні науковці для своїх досліджень, так і викладачі й студенти у процесі навчання. У даній доповіді зупинимося на використанні СКМ Mathematica під час перетворення виразів, які можуть зустрічатися в математичному аналізі функцій дійсної змінної. СКМ Mathematica має такі основні команди для перетворення і спрощування виразів: **Simplify**, **FullSimplify**, **FuctionExpand**, **Expand**, **Factor**. Існує також ряд команд, відповідних певним типам виразів (цілим раціональним, дробово-раціональним, тригонометричним тощо). Крім того, при спрощуванні можна робити додаткові припущення (за командою **Assuming**), діяти на окремі частини виразу (завдяки командам **Map**, **MapAll**).

Перш за все, СКМ Mathematica можна використовувати для спрощування **числових виразів** різних типів (раціональних, ірраціональних, показникових, логарифмічних і тригонометричних). Наприклад: 1)
$$\frac{4, (571428) : 2 - \left(1 : 0,04 - \frac{5}{2} : \frac{1}{10}\right) \cdot 8 \cdot \frac{8}{17}}{1, (3) : \frac{1}{2} + 13, (3)}$$

2) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$, 3) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{16} - 2 \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt[3]{9} + \frac{2}{3}$, 4) $\sin 52^\circ 30' \cdot \sin 7^\circ 30' - \frac{1}{2} \sin 45^\circ$, 5) $\operatorname{tg}\left(2 \arcsin \frac{1}{3}\right)$.

Раціональний вираз 1) спрощується (обчислюється) автоматично при його введенні:

```
In[1]:= (FromDigits[{{4,{5,7,1,4,2,8}},1}]/2-(Rationalize[1/0.04]-5/2/(1/10))*8*8/17)/
(FromDigits[{{1,{3}},1}]/(1/2)+FromDigits[{{1,3,{3}},2}])
Out[1]= 1/7
```

Для спрощування виразів 2) – 4) достатньо задати команду **FullSimplify**:

```
In[2]:= Surd[20+14Sqrt[2],3]+Surd[20-14Sqrt[2],3]//FullSimplify
Out[2]= 4
In[3]:= Log[1/2,Surd[16,3]]-2Log[1/Sqrt[3],Surd[9,3]]+2/3//FullSimplify
Out[3]= 2
In[4]:= Sin[(52+1/2)Degree]Sin[(7+1/2)Degree]-1/2Sin[45Degree]//FullSimplify
Out[4]= -1/4
```

Для спрощування виразу 5) використаємо команду **TrigExpand**:

```
In[5]:= Tan[2ArcSin[1/3]]//TrigExpand
Out[5]= 4\sqrt{2}/7
```

Аналогічно здійснюється спрощування **буквених виразів** різних типів. Так, для спрощування **раціональних виразів** у більшості випадків достатньо задати команду **Simplify**. Проте потрібно зауважити, що перетворений вираз може мати іншу область допустимих значень.

Наприклад, спростимо вираз 6) $(a^2b^{-2} - ab^{-1} + b^2a^{-2} - ba^{-1})(a^{-1} - b^{-1})^{-2}(ab^{-1} + ba^{-1} + 1)^{-1}$:

```
In[6]:= (a^2*b^-2-a*b^-1+b^2*a^-2-b*a^-1)(a^-1-b^-1)^-2(a*b^-1+b*a^-1+1)^-1//Simplify
Out[6]= ab
```

Для спрощування ірраціональних виразів, окрім команд Simplify або FullSimplify, може виникати необхідність у накладанні додаткових умов (припущень). Наприклад, спростимо

вираз 7) $\sqrt{\frac{25-15\sqrt{a}}{a+10\sqrt{a}+25}} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+5} + \frac{10}{\sqrt{a}+5}$, якщо $a = 26,25$.

```
In[7]:= expr=Sqrt[(25-15Sqrt[a])/(a+10Sqrt[a]+25)+Sqrt[a]/(Sqrt[a]+5)]+10/(Sqrt[a]+5);
In[8]:= Assuming[a>0,Simplify[expr]]
Out[8]=  $\frac{10 + \text{Abs}[-5 + \sqrt{a}]}{5 + \sqrt{a}}$ 
```

Далі, враховуючи, що нас цікавить значення заданого виразу при $a = 26,25$, зробимо ще одне припущення: $\sqrt{a} > 5$ і спростимо отриманий у рядку Out[8] вираз:

```
In[9]:= Assuming[Sqrt[a]>5,Simplify[%]]
Out[9]= 1
```

Отже, дістали тотожність $\sqrt{\frac{25-15\sqrt{a}}{a+10\sqrt{a}+25}} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+5} + \frac{10}{\sqrt{a}+5} \equiv 1$ при $\sqrt{a} > 5$, яку задовольняє зокрема й $a = 26,25$.

Часто під час перетворень виразів доводиться робити підстановку. У Mathematica підстановку виразу expr2 замість expr1 у виразі expr виконують за командою expr/.expr1->expr2.

Спростимо, для прикладу, вираз 8) $\frac{\sqrt{m+x} + \sqrt{m-x}}{\sqrt{m+x} - \sqrt{m-x}}$, де $x = \frac{2mn}{n^2 + 1}$, $m > 0$, $0 < n < 1$.

```
In[10]:= (Sqrt[m+x]+Sqrt[m-x])/(Sqrt[m+x]-Sqrt[m-x])/x->2m*n/(n^2+1)
Out[10]=  $\frac{\sqrt{m - \frac{2mn}{1+n^2}} + \sqrt{m + \frac{2mn}{1+n^2}}}{-\sqrt{m - \frac{2mn}{1+n^2}} + \sqrt{m + \frac{2mn}{1+n^2}}}$ 
In[11]:= Assuming[m>0&&0<n<1,FullSimplify[%]]
Out[11]=  $\frac{1}{n}$ 
```

Аналогічними способами спрощують **показникові, логарифмічні і тригонометричні вирази**. Наприклад, для спрощування виразу

9) $\left((\log_b^4 a + \log_a^4 b + 2)^{1/2} + 2 \right)^{1/2} - \log_b a - \log_a b$ виконаємо такі дії:

```
In[12]:= expr=((Log[b,a]^4+Log[a,b]^4+2)^(1/2)+2)^(1/2)-Log[b,a]-Log[a,b];
In[13]:= Assuming[a>0&&b>0,FullSimplify[expr]]
Out[13]=  $\begin{cases} -\frac{2\text{Log}[a]}{\text{Log}[b]} - \frac{2\text{Log}[b]}{\text{Log}[a]} & \text{Log}[a]\text{Log}[b] < 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$ 
```

Отримана відповідь правильна на ОДЗ заданого виразу, тобто за умови, що $\ln a \ln b \neq 0$.

Спростимо ще один вираз: 10) $\cos^6 x + \sin^6 x + \frac{3}{4} \sin^2 2x$.

```
In[14]:= Cos[x]^6+Sin[x]^6+3/4Sin[2x]^2//Simplify
Out[14]= 1
```

На завершення торкнемось такого питання як спрощування сум і добутоків. Спрощування суми $\sum_{k=m}^n a_k$ у СКМ Mathematica здійснюється (за можливості) автоматично за командою `Sum[a[k],{k,m,n}]`. При цьому індекси m і n можуть бути конкретними скінченними номерами, буквеними параметрами або дорівнювати $-\infty$ (-Infinity) чи $+\infty$ (Infinity) відповідно.

Для спрощування добутку $\prod_{k=m}^n a_k$ призначено команду `Product[a[k],{k,m,n}]`.

Наприклад, спростимо вирази: 11) $\sum_{k=1}^n k(k+1)$, 12) $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k}$, 13) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2+3k+2}$, 14) $\sum_{k=1}^9 \cos \frac{\pi}{9} k$, 15) $\prod_{k=2}^n \log_{k+1} k$, 16) $\prod_{k=1}^{89} \operatorname{tg} k^\circ$, 17) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$, 18) $\prod_{k=1}^n (1+x^{2^k})$.

In[15]:=	<code>Sum[k(k+1),{k,1,n}]</code>
Out[15]=	$\frac{1}{3}n(1+n)(2+n)$
In[16]:=	<code>Sum[k/2^k,{k,1,n}]</code>
Out[16]=	$2^{-n}(-2+2^{1+n}-n)$
In[17]:=	<code>Sum[1/(k^2+3k+2),{k,1,n}]</code>
Out[17]=	$\frac{n}{2(2+n)}$
In[18]:=	<code>Sum[Cos[Pi/9 k],{k,1,9}]</code>
Out[18]=	-1
In[19]:=	<code>Product[Log[k+1,k],{k,2,n}]</code>
Out[19]=	$\frac{\operatorname{Log}[2]}{\operatorname{Log}[1+n]}$
In[20]:=	<code>Product[Tan[k Pi/180],{k,1,89}]/Simplify</code>
Out[20]=	1
In[21]:=	<code>Product[1-1/k^2,{k,2,n}]</code>
Out[21]=	$\frac{1+n}{2n}$
In[22]:=	<code>Product[1+x^(2^k),{k,1,n}]</code>
Out[22]=	$\frac{-1+x^{2^{1+n}}}{-1+x^2}$

Висновки. Важливим умінням, яким повинні оволодіти студенти при вивченні математичного аналізу, є вміння перетворювати вирази, спрощувати їх. СКМ Mathematica містить широкий спектр засобів для перетворення і спрощування виразів. Вміння усвідомлено і критично використовувати комп'ютерні засоби є добрим доповненням до вміння самостійно розв'язувати задачі.

Література

1. Дьяконов В. П. Mathematica 5/6/7. Полное руководство. – М.: ДМК Пресс, 2010. – 624 с.
2. <http://www.wolfram.com/> (сайт компанії Wolfram Research)
3. <https://habrahabr.ru/company/wolfram/blog/273601/> (Вольфрам С. «Элементарное введение в язык Wolfram Language»)

Деканов С. Я. Перетворення виразів з використанням СКМ Mathematica.

Анотація. Наведено приклади на перетворення і спрощування числових і буквених виразів різних типів (раціональних, ірраціональних, показникових, логарифмічних, тригонометричних, а також деяких сум і добутоків) з використанням СКМ Mathematica.

Ключові слова: перетворення виразів, спрощування виразів, СКМ Mathematica

Dekanov S. Ya. Transformation of Expressions using CAS Mathematica.

Abstract. Examples are given for the transformation and simplification of numerical and literal expressions of various types (rational, irrational, index, logarithmic, trigonometric, as well as some sums and products) using CAS Mathematica.

Key words: Expression Transformation, Expression Simplification, CAS Mathematica