

Працьовитий М.В.

доктор фіз.-мат. наук, професор,

Український державний університет імені Михайла Драгоманова

Ратушняк С.П.

доктор філософії (111 Математика),

Інститут математики НАН України

СКІНЧЕННЯ І НЕСКІНЧЕННЯ ЛАНЦЮГОВЕ A_2 -ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

Нехай $A \equiv \{0;1\}$ – алфавіт, $L \equiv A \times A \times \dots$ – простір послідовностей нулів та одиниць, $A_2 \equiv \{\frac{1}{2};1\}$, $L_2 \equiv A_2 \times A_2 \times \dots$ – простір послідовностей елементів алфавіту A_2 .

Нагадаємо, що нескінченним ланцюговим дробом називається вираз виду

$$\frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} = [0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots], \text{ де } a_n \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Ланцюговий дріб (1) при $(a_n) \in L_2$ називається ланцюговим A_2 -дробом (A_2 -дробом). Відомо [2], що для довільного числа $x \in [\frac{1}{2};1]$ існує послідовність $(a_n) \in L_2$, така що $x = [0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$, де символічний запис $[0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$ – називається нескінченним A_2 -зображення числа x . Існують числа, що мають два A_2 -зображення $[0; a_1, a_2, \dots, a_n, \frac{1}{2}, (\frac{1}{2}, 1)] = [0; a_1, a_2, \dots, a_n, 1, (1, \frac{1}{2})]$ (їх називають A_2 -бінарними). Множина таких чисел є зліченною. Усі решта чисел відрізка $[\frac{1}{2};1]$ мають єдине нескінченне A_2 -зображення (їх називають A_2 -унарними).

Геометрію зображень нескінченними ланцюговими A_2 -дробами розкривають властивості циліндрів (множин чисел, що у A_2 -зображенні перші m цифр фіксовані) і підхідних дробів.

Підхідним дробом порядку n числа x , що зображається (скінченним чи нескінченним) ланцюговим дробом (1) називається раціональне число $\frac{p_n}{q_n}$, що є

значенням скінченного ланцюгового дробу $[0; a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$. Для підхідних дробів

мають місце система рекурентних співвідношень (закон утворення підхідних дробів): $p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1}$, $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$, де $p_0 = 0$, $p_1 = 1$, $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$, $a_n \in A_2$.

A_2 -зображення легко перекодується засобами двосимвольного алфавіту A , а саме:

$$x = [0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots] \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^A, \text{ де } \alpha_k = 2a_k - 1, k \in \mathbb{N}.$$

Останнє називається A -зображенням числа x .

Зображення чисел нескінченним ланцюговими A_2 -дробами або йому відповідне A -зображення має широке застосування в конструктивній теорії локально-складних функцій, ергодичній [1], метричній [2,3], ймовірнісній [4] теорії чисел тощо. Зокрема в термінах A -зображення у роботі [1] вводиться клас функцій, породжених абсолютно збіжною послідовністю додатних чисел, шляхом поглиблення метричної теорії ланцюгового A_2 -зображення доводить сингулярність функцій цього класу.

Нехай $[0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ – скінчений A_2 -дріб, F – множина значень скінченного A_2 -дробу. Очевидно, що найбільше значення скінченного ланцюгового A_2 -дробу є число 2, а найменше – $\frac{1}{3}$. Відомо [3], що множина значень $F \subset [\frac{1}{3}; 2]$ є зліченною, щільною множиною у відрізьку $[\frac{1}{2}; 1]$, а $F \setminus [\frac{1}{2}; 1]$ є зліченною множиною ізольованих точок, граничними точками якої є $\frac{1}{2}$ і 1.

Якщо x – значення скінченного ланцюгового A_2 -дробу, яке менше $\frac{1}{2}$, то x є елементом відповідно зростаючої і спадної послідовностей $\omega_n = [0; (1, \frac{1}{2})^{n-1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $\nu_n = [0; (1, \frac{1}{2})^n]$, $n \in N$.

Якщо x – значення скінченного ланцюгового A_2 -дробу, яке більше 1, то x є елементом відповідно спадної і зростаючої послідовностей $u_n = [0; \frac{1}{2}, (1, \frac{1}{2})^n]$, $s_n = [0; \frac{1}{2}, (1, \frac{1}{2})^{n-1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $n \in N$.

Таким чином, кожне число множини $F \setminus [\frac{1}{2}; 1]$ має єдине A_2 -зображення.

У доповіді пропонуються результати дослідження систем зображення чисел ланцюговими A_2 -дробами, їх ергодичній та метричній теоріях.

Список використаних джерел

1. Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Y.V., Lysenko I.M., Ratushniak S. P. Continued A_2 -fractions and singular functions. *Matematychni Studii*, 2022, 58(1), doi: 10.30970/ms.58.1.3-12.
2. Дмитренко С.О., Кюрчев Д.В., Працьовитий М.В. Ланцюгове A_2 -зображення дійсних чисел // Український математичний журнал. – 2009, том 61, № 4. – С.452-463.
3. Працьовитий М. В. Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування. – Київ: Наукова думка, 2022. – 316с.
4. Працьовитий М.В. Сингулярність розподілів випадкових величин, заданих розподілами елементів свого ланцюгового зображення // Укр. мат. журн. — 1996. — 48, № 8. — С.1086-1095.