них чисел // Український математичний журнал. – 2009, том 61, № 4. – С.452-463.
3. Жихарєва Ю. І., Працьовитий М. В. Зображення чисел знакододатними рядами Люрота: основи метричної теорії // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки, 2008. — № 9. — С. 200-211.
4. Микитюк І.О., Працьовитий М.В. Двійкова система числення з двома надлишковими цифрами і її відповідна метрична теорія чисел // Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. - №4, 2003. – с. 270-290.
5. Працевитый Н.В. Случайные величины с независимыми Q_2-символами // Асимпт. методы в исслед. стохастических моделей. — К.: ИМ АН УССР, 1987. — С. 92–102.
6. Працьовитий М. В., Гончаренко Я.В., Лисенко І.М. Нега-двійкове представлення дійсних чисел і його застосування // Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки : зб. наукових праць. – Київ: Видавництво НПУ імені М. П. Драгоманова, 2015. – Випуск 17. – С. 83-106.
7. Працьовитий М.В. Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування. – Київ: Наукова думка, 2022. – 316с.
8. Працьовитий М.В. Нега-канторівські зображення дійсних чисел як тривіальні перекодування канторівських (нега s-кові – перекодування s-кових) // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2017. – Т.14, № 4. – Київ: Інститут математики НАН України, 2017. С.167 – 177.
9. Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296 с.
10. Працьовитий М.В., Ісаєва Т.М. Кодування дійсних чисел з нескінченним алфавітом і основою 2 // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2013. – № 15. – С. 5-23.
11. Турбин А.Ф., Працевитый Н.В. Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наук.думка, 1992. — 208с.

Працьовитий М.В.
доктор фіз.-мат. наук, професор,
Лисенко І.М.
канд. фіз.-мат. наук, доцент,
Маслова Ю.П.
канд. фіз.-мат. наук,
Требенко О.О.
канд. фіз.-мат. наук, доцент,
Український державний університет імені Михайла Драгоманова

G-ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ — УНІКАЛЬНЕ ЗА ПРОСТОТОЮ І ТОПОЛОГО-МЕТРИЧНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ ДВОСИМВОЛЬНЕ КОДУВАННЯ ЧИСЕЛ

Нехай $A \equiv \{0,1\}$ — алфавіт (набір цифр) двосимвольної системи кодування (зображення) дійсних чисел; $L \equiv A \times A \times \ldots \times A \times \ldots$ — простір послідовностей елементів алфавіту (нулів та одиниць). Очевидними є такі твердження.

1) Якщо (α_k) — довільна послідовність простору $L, \sigma_k \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{k-1}$,то значення виразу $u_k \equiv (-1)^{\sigma_k} \frac{\alpha_k}{2^k}$ є нулем тоді й тільки тоді, коли $\alpha_k = 0$; додатним числом, коли σ_k— число парне; від'ємним числом, коли σ_k непарне.
2) Підпослідовність $u_1 = \frac{\alpha_1}{2}, u_{n+1} = (-1)^{\sigma_{n+1}} \frac{\alpha_{n+1}}{2^{n+1}}$ ненульових членів послідовності (u_n) є знакопочережною.

Лема 1. Для будь-якої послідовності $(\alpha_n) \in L$ ряд

$$\frac{\alpha_1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2^k}(-1)^{\sigma_k} = \frac{\alpha_1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2^{k-\sigma_k}(-2)^{\sigma_k}} = S, \sigma_k \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{k-1}, \quad (1)$$

є абсолютно збіжним, його сума S є невід'ємною і не перевищує першого відмінного від нуля члена ряду (1), причому

$$S = S_m + 2^{-m}(-1)^{\sigma_m+1} R_m, \sigma_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{k-1}; \quad (2)$$

$$S_m = \frac{\alpha_1}{2} + \sum_{k=2}^{m} \alpha_k 2^{-k}(-1)^{\sigma_k}; R_m = \frac{\alpha_{m+1}}{2} + \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_{m+i} 2^{-i}(-1)^{\sigma_{m+i}-\sigma_{m+1}}.$$

Теорема 1 [8]. Для будь-якого числа $x \in [0; 0{,}5]$ існує послідовність $(\alpha_k) \in L$ така, що

$$x = \frac{\alpha_1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} [\alpha_k 2^{-k}(-1)^{\sigma_k}] \equiv \Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \sigma_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{k-1}. \quad (3)$$

Означення 1. Розклад числа $x \in [0; 0{,}5]$ у ряд (3) називається G-розкладом, а його скорочений запис $\Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}$ G-зображенням числа x. При цьому $\alpha_n = \alpha_n(x)$ називається n-ю цифрою цього зображення.

Наслідок 1. Для будь-якого $x \in [0; 1]$ існує послідовність $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots) \in L$ така, що

$$x = \frac{\alpha_0}{2} + \frac{\alpha_1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} [\alpha_k 2^{-k}(-1)^{\sigma_k}] \equiv \Delta_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \sigma_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{k-1}.$$

Лема 2. Кожне число $x \in [0; 0{,}5]$має не більше двох G-зображень і лише зліченна множина чисел має їх два: числа з зображеннями $\Delta^G_{c_1\ldots c_m 01(0)} = \Delta^G_{c_1\ldots c_m 11(0)}$.

Зауваження 1. Особливістю G-зображення чисел є те, що оператор лівостороннього зсуву $\omega(x = \Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^G_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots} = (-1)^{\alpha_1}(2x - \alpha_1)$ є неперервною коректно означеною кусковолінійною функцією.

Означення 2. Циліндром (G-циліндром) рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$ називається множина $\Delta^G_{c_1c_2\ldots c_m}$чисел $x \in [0; 0{,}5]$, які мають G-зображення $\Delta^G_{c_1\ldots c_m a_1 a_2\ldots}, (a_n) \in L$. З означення G-циліндра випливають рівності:

1) $\Delta^G_{c_1\ldots c_m} = \Delta^G_{c_1\ldots c_m 0} \cup \Delta^G_{c_1\ldots c_m 1}$;
2) $[0; 0{,}5] = \bigcup\limits_{c_1 \in A} \ldots \bigcup\limits_{c_m \in A} \Delta^G_{c_1\ldots c_m}$.

Лема 3. Циліндр $\Delta^G_{c_1c_2\ldots c_m}$ є відрізком $[a; b]$, де

$$a = min\Delta^G_{c_1\ldots c_m} = \begin{cases} \Delta^G_{c_1\ldots c_m(0)}, якщо c_1 + \ldots + c_m \equiv N_1 парне, \\ \Delta^G_{c_1\ldots c_m 1(0)}, якщо N_1 непарне; \end{cases}$$

$$b = max\Delta^G_{c_1\ldots c_m} = \begin{cases} \Delta^G_{c_1\ldots c_m 1(0)}, якщо N_1 парне, \\ \Delta^G_{c_1\ldots c_m(0)}, якщо N_1 непарне. \end{cases}$$

Наслідок 2. Довжина G-циліндра $\Delta^G_{c_1\ldots c_m}$ рангу m обчислюється за формулою $|\Delta^G_{c_1\ldots c_m}| = \frac{1}{2^{m+1}}$.

Наслідок 3. Основне метричне відношення для G-зображення чисел має вигляд $\frac{|\Delta^G_{c_1\ldots c_m i}|}{|\Delta^G_{c_1\ldots c_m}|} = \frac{1}{2}$, що споріднює дане зображення з класичним двійковим зображенням.

Наслідок 4. Для будь-якої послідовності $(\alpha_n) \in L$ виконується $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = \Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$.

Наслідок 5. Якщо $c_1+\ldots+c_m$— парне число, то $max\Delta^G_{c_1\ldots c_m 0} = min\Delta^G_{c_1\ldots c_m 1}$, якщо ж воно непарне, то $max\Delta^G_{c_1\ldots c_m 1} = min\Delta^G_{c_1\ldots c_m 0}$. Внутрішність циліндра $\Delta^G_{c_1\ldots c_m}$ позначатимемо через$\nabla^G_{c_1\ldots c_m}$. Тоді

$$\Delta^G_{c_1\ldots c_m} = \Delta^G_{d_1\ldots d_m} \Leftrightarrow c_i = d_i, i = \overline{1,m};$$

$$\nabla^G_{x_1\ldots c_m} \cap \nabla^G_{d_1\ldots d_m\ldots d_n} = \begin{cases} \nabla^G_{d_1\ldots d_m\ldots d_n}, якщо d_i = c_i, i = \overline{1,m}, \\ \emptyset, якщо\ існує d_i \neq c_i, i \leq m. \end{cases}$$

Означення 3. Кажуть, що G-зображення чисел $x_1 = \Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots} i x_2 = \Delta^G_{\beta_1\ldots\beta_n\ldots}$мають однаковий хвіст, якщо існують натуральні k і m такі, що $\alpha_{k+j} = \beta_{m+j}$ для будь-якого $j \in N$ (символічно: $x_1 \sim x_2$). Якщо k і m — найменші числа, для яких виконується попередня умова, то число $z \equiv x \wedge y = \Delta^G_{\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\ldots} = \Delta^G_{\beta_{m+1}\beta_{m+2}\ldots}$ називається спільним хвостом чисел xiy.

Бінарне відношення "мати однаковий хвіст" є відношенням еквівалентності. Зауважимо, що всі G-бінарні числа належать одному класу еквівалентності, що є особливістю цієї двосимвольної системи кодування чисел. Кожен клас еквівалентності є зліченною всюди щільною в [0; 0,5] множиною.

Зауважимо, що G-зображення чисел $x, \omega^n(x) i \delta_{c_1\ldots c_m}(x = \Delta^G_{\alpha_1\ldots\alpha_n}) \equiv \Delta^G_{c_1\ldots c_m\alpha_1\ldots\alpha_n}$ належать одній хвостовій множині.

Теорема 2 (основний результат). Для довільної послідовності $(\alpha_n) \in L$ виконується рівність

$$\Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = \Delta^2_{0a_1a_2\ldots a_n\ldots}, \tag{4}$$

$$a_1 = \begin{cases} 0, якщо \alpha_1 = 0, \\ 1, якщо \alpha_1 = 1; \end{cases} a_{n+1} = \begin{cases} \alpha_{n+1}, якщо \alpha_1+\ldots+\alpha_n парне, \\ 1-\alpha_{n+1}, якщо \alpha_1+\ldots+\alpha_n непарне. \end{cases} \tag{5}$$

Зауваження 3. Завдяки відомому [6] взаємозв'язку класичного двійкового зображення з нега-двійковим: $\Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = \Delta^{-2}_{[1-\alpha_1]\alpha_2[1-\alpha_3]\alpha_4\ldots[1-\alpha_{2k-1}]\alpha_{2k}\ldots}$, де

$$[0;1] \ni x = \Delta^{-2}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots} \equiv \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_n}{(-2)^n},$$

легко встановлюється зв'язок між нега-двійковим і G-зображенням.

Означення 4. Ппроєктором G-зображення чисел у класичне двійкове зображення називається функція p, означена рівністю

$$p(x = \Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^2_{0\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} \tag{6}$$

Коректність означення проєктора p неможлива без домовленості використовувати лише одне із зображень G-бінарних чисел, а саме $\Delta^G_{c_1\ldots c_{m-1}01(0)}$, оскільки для різних зображень G-бінарного числа формула (6) визначає різні значення.

Легко бачити, що:

1) $\min_{x\in[0;\frac{1}{2}]} p(x) = p(0 = \Delta^G_{(0)}) = 0; sup_{x\in[0;\frac{1}{2}]} p(x) = p(\frac{1}{3} = \Delta^G_{(1)}) = \frac{1}{2};$

2) $p(\frac{1}{2}t) = \frac{1}{2}p(t) \Leftrightarrow p(\Delta^G_{0\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \frac{1}{2}p(\Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots})$;

3) $p(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}p(t) \Leftrightarrow p(\Delta^G_{1\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}p(\Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots})$.

Теорема 3. Функція pнеперервна по множині Uвсіх G-унарних чисел. Стрибок ρфункції $\rho(x)$ у G-бінарній точці рангу m дорівнює $\frac{1}{2^m}$.

Наслідок 6. Проєктор p є функцією необмеженої варіації.

Теорема 4. Для проєктора p виконується рівність $\int_0^{\frac{1}{2}} p(x)dx = \frac{1}{8}$.

Лема 4. Множиною значень функції $p(x)$ є відрізок [0; 0,5].

Лема 5. Графік Γ_p функції $p(x), x \in [0; 0{,}5]$, має самоподібну структуру $\Gamma_p = \varphi_0(\Gamma_p) \cup \varphi_1(\Gamma_p)$, де φ_0 і φ_1— перетворення подібностей:

$$\varphi_0\colon \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x, \\ y' = \frac{1}{2}y, \end{cases} \quad \varphi_1\colon \begin{cases} x' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x, \\ y' = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}y. \end{cases}$$

Наслідок 7. Самоподібна розмірність графіка Γ_p функції p дорівнює 1.

Теорема 5 (основний результат). Проєктор p є майже скрізь неперервною функцією (за виключенням точок зліченної множини), яка є ніде не монотонною функцією необмеженої варіації.

Список використаних джерел

1. Працьовитий М.В. Двосимвольні системи кодування дійсних чисел і їх застосування. — Наукова думка, Київ (2022);
2. Працьовитий М. В., Лисенко І. М., Маслова Ю.П. Геометрія числових рядів: ряд як модель дійсного числа в новій двосимвольній системі кодування чисел // Зб. праць Ін-ту математики НАН України, 15, № 1, 132 – 146 (2018).
3. Лисенко І.М., Маслова Ю.П., Працьовитий М.В. Двоосновна система числення з різнознаковими основами і спеціальні функції, з нею пов’язані // Зб. праць Ін-ту математики НАН України, 16, № 2, 50 – 62 (2019).
4. Працьовитий М. В., Гончаренко Я. В., Лисенко І. М. Нега-двійкове зображення дійсних чисел і його застосування // Наук. часопис Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 01: Фіз.-мат. науки, № 17, 83 – 106 (2015).
5. Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Вид-во Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова, Київ (1998).
6. Працьовитий М. В., Дрозденко В.О., Лисенко І.М., Маслова Ю.П. Інверсор цифр G-зображення дійсних чисел і його структурна фрактальність // Буковин. мат. журн., 10, № 1, 100 – 109 (2022).
7. Pratsiovytyi M.V., Lysenko I. M., Maslova Yu. P. Group of continuous transformations of real interval preserving tails of G2 -representation of numbers // Algebra Discrete Math., 29, № 1, 99 – 108 (2020).