число матиме єдине зображення за виключенням зліченої множини чисел виду: $[0;d_1,...,d_n,1,0,1]^{D_2}=[0;d_1,...,d_n,1,1]^{D_2}$. Множину останніх чисел називають множиною D_2 -*бінарних* чисел, решту – D_2-*унарних*.

На множині нескінченних зображень розглядається клас функцій, означених рівністю:

$$f(x=[0;d_1,d_2,d_3,...,d_n,d_{n+1},...]^{D_2})=[0;1,\varphi(d_1,d_2),\varphi(d_2,d_3),...,\varphi(d_n,d_{n+1}),...]^{D_2},$$
$$\varphi(A\times A)=A.$$

Означення функції f є некоректним, оскільки двом формально різним зображенням аргумента відповідають різні зображення значення функції. Домовившись використовувати лише одне із зображень, а саме $[0;d_1,...,d_n,1,1,(1,0)]^{D_2}$, досягнемо коректності означення функції. Всього існує 16 функцій φ, а тому стільки ж і функцій f.

Клас функцій породжених функціями φ вивчався для Q_2-зображення дійсних чисел у роботі [2], де було вивчено їх фрактальні, диференціальні та інтегральні властивості.

У доповіді пропонуються результати дослідження множин рівнів, множин значень функцій даного класу тощо.

Список використаних джерел

1. Працьовитий М.В. Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування. – Київ: Наукова думка, 2022. – 316 с.
2. Працьовитий М.В., Ратушняк С.П. Розподіл значень однієї фрактальної функції від випадкового аргумента// Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2014. – 16(2). – С. 150–160.

Працьовитий М.В.
доктор фіз.-мат. наук, професор,
Головій М.С.
студентка,
Симоненко Ю.О.
студентка,
Український державний університет імені Михайла Драгоманова

СИСТЕМИ ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

Системи зображення дійсних чисел посіли почесне місце у фрактальному аналізі як потужний інструмент задання та дослідження об'єктів зі складною локальною структурою. До таких відносяться множини, розмірність Гаусдорфа-Безиковича яких не співпадає з їх топологічною розмірністю, тобто фрактали [11]; множини неповних сум числових рядів, топологічний тип яких є мало вивченим, наприклад, канторвали []; функції, диференеціальні властивості яких є неоднорідними: ніде не диференційовні [11], ніде не монотонні [11], сингулярні [11] (відмінні від константи функції, похідна яких дорівнює нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега) та їх лінійні комбінації; сингулярні або абсолютно неперервні розподіли ймовірностей тощо.

Нехай A – алфавіт (набір символів), $L \equiv A \times A \times \ldots$ – простір послідовностей елементів алфавіту. *Кодуванням* чисел проміжка $< a;b >$ засобами алфавіту A називається сюр'єктивне відображення g множини L в $< a;b >$

$$L \ni (\alpha_n) \overset{g}{\rightarrow} x \in < a;b > .$$

При цьому послідовність (α_n) називається g *-зображенням* (g *-кодом*) числа x, що записується коротко $\Delta^g_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ [7].

Кодування чисел називається аналітичним, якщо воно ґрунтується на їх розкладах у математичні вирази (ряди, нескінченні добутки, ланцюгові дроби тощо), параметрами (коефіцієнтами, показниками степеня, індексами тощо) яких є цифри алфавіту. Функція f, означена рівністю $f(\Delta^{g_1}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{g_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, $(\alpha_n) \in L$, називається проєктором g_1-зображення в g_2-зображення. Два кодування дійсних чисел (g_1- і g_2-) одного і того ж проміжка називаються *топологічно еквівалентними*, якщо проєктор $f(\Delta^{g_1}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{g_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ є неперервною монотонною функцією.

Розрізняють зображення дійсних чисел за допомогою скінченного (s-кове, Q_s-, Q_s^*-, G_2-, нега-Q_s-зображення [6,8], ланцюгове A_2-зображення [2], марковське, медіантне зображення тощо) та нескінченного (зображення додатними та знакозмінними рядами Люрота [3], рядами Енгеля, 2^∞-, q_0^∞-зображення [10] тощо), сталого (s-кові системи зображення та їх узагальнення) та змінного (зображення рядами Кантора [9]) алфавітів; з нульовою (s-кові системи зображення та їх узагальнення), ненульовою [4] (s-кове зображення з надлишковим алфавітом) та екстранульовою надлишковістю (Q_∞) [10] тощо.

Якщо кожен g-циліндр (множина чисел, що має на перших m місцях фіксовані цифри) є числовим проміжком, то кодування називається *неперервним*. Кажуть, що g-зображення має *нульову надлишковість*, якщо кожне число має не більше, ніж два зображення, причому множина чисел, що мають два зображення, є не більш, ніж зліченною. Якщо існують числа, що мають більше двох зображень, зокрема нескінченну їх кількість, то кажуть, що система кодування має *ненульову надлишковість*. Кажуть, що зображення має *екстранульову надлишковість*, якщо кожне число має єдине зображення.

Доповідь присвячена огляду найпоширеніших систем зображення дійсних чисел, їх узагальнень та застосувань до задання об'єтів фрактального аналізу, порівняльному аналізу геометрій зображень, метричних та ймовірнісних теорій цих зображень.

Список використаних джерел

1. Гончаренко Я.В., Лисенко І.М. Геометрія нескінченно-символьного q_0^∞-зображення дійсних чисел та її застосування у метричній теорії чисел // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат.науки. Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2013, № 15.— С. 100–118.
2. Дмитренко С.О., Кюрчев Д.В., Працьовитий М.В. Ланцюгове A_2 – зображення дійс-

них чисел // Український математичний журнал. – 2009, том 61, № 4. – С.452-463.
3. Жихарєва Ю. І., Працьовитий М. В. Зображення чисел знакододатними рядами Люрота: основи метричної теорії // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки, 2008. — № 9. — С. 200-211.
4. Микитюк І.О., Працьовитий М.В. Двійкова система числення з двома надлишковими цифрами і її відповідна метрична теорія чисел // Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. - №4, 2003. – с. 270-290.
5. Працевитый Н.В. Случайные величины с независимыми Q_2-символами // Асимпт. методы в исслед. стохастических моделей. — К.: ИМ АН УССР, 1987. — С. 92–102.
6. Працьовитий М. В., Гончаренко Я.В., Лисенко І.М. Нега-двійкове представлення дійсних чисел і його застосування // Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки : зб. наукових праць. – Київ: Видавництво НПУ імені М. П. Драгоманова, 2015. – Випуск 17. – С. 83-106.
7. Працьовитий М.В. Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування. – Київ: Наукова думка, 2022. – 316с.
8. Працьовитий М.В. Нега-канторівські зображення дійсних чисел як тривіальні перекодування канторівських (нега s-кові – перекодування s-кових) // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2017. – Т.14, № 4. – Київ: Інститут математики НАН України, 2017. С.167 – 177.
9. Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296 с.
10. Працьовитий М.В., Ісаєва Т.М. Кодування дійсних чисел з нескінченним алфавітом і основою 2 // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2013. – № 15. – С. 5-23.
11. Турбин А.Ф., Працевитый Н.В. Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наук.думка, 1992. — 208с.

Працьовитий М.В.
доктор фіз.-мат. наук, професор,
Лисенко І.М.
канд. фіз.-мат. наук, доцент,
Маслова Ю.П.
канд. фіз.-мат. наук,
Требенко О.О.
канд. фіз.-мат. наук, доцент,
Український державний університет імені Михайла Драгоманова

G-ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ — УНІКАЛЬНЕ ЗА ПРОСТОТОЮ І ТОПОЛОГО-МЕТРИЧНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ ДВОСИМВОЛЬНЕ КОДУВАННЯ ЧИСЕЛ

Нехай $A \equiv \{0,1\}$ — алфавіт (набір цифр) двосимвольної системи кодування (зображення) дійсних чисел; $L \equiv A \times A \times \ldots \times A \times \ldots$ — простір послідовностей елементів алфавіту (нулів та одиниць). Очевидними є такі твердження.