$$\sum_{i=r_0+1}^{\infty}\left|\Delta_i^P\right| = 1\,, \qquad \left|\Delta_{c_1\ldots c_n}^P\right| = \sum_{i=r_n+1}^{\infty}\left|\Delta_{c_1\ldots c_n i}^P\right|,$$

де $r_0 = \varphi_0$ та $r_n = \varphi_n(c_1, \dots, c_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Одержані результати можуть бути застосовані до розвитку метричної теорії дійсних чисел, теорії функцій зі складною локальною структурою, фрактального аналізу тощо.

Список використаних джерел

1. Erdös P., Rényi A., Szüsz P. On Engel's and Sylvester's series. *Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Math*. 1958. № 1. P. 7–12.
2. Perron O. Irrationalzahlen. Berlin: de Gruyter, 1960, 204 pp.
3. Zhykharyeva Yu., Pratsiovytyi M. Expansions of numbers in positive Lüroth series and their applications to metric, probabilistic and fractal theories of numbers. *Algebra and Discrete Mathematics*. 2012. Vol. 14, № 1. C. 145–160.
4. Працьовитий М.В., Гетьман Б.І. Ряди Енгеля та їх застосування. *Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.–мат. науки*. 2006. № 7. С. 105–116.

Нитник А.С.
магістрантка,
Гончаренко Я.В.
кандидат фі.-мат. наук, доцент,
Український державний університет імені Михайла Драгоманова

МОДЕЛЮВАННЯ ДЕЯКИХ ЧАСОВИХ РЯДІВ ЗІ СКЛАДНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ

Дослідження функцій з складними локальними властивостями та їх використання в якості математичних моделей реальних процесів та явищ є актуальною математичною та прикладною задачею [2]. В прикладних застосуваннях, в задачах моделювання часових рядів використовується багато різних способів, які грунтуються на застосуванні статистичних підходів, різних методів згладжування або апроксимації. В роботі для вирішення поставленої проблеми використовується спосіб аналітичного задання функції зі складними локальними властивостями, що грунтується на використанні модифікації Q-зображень дійних чисел [1].

Дана робота є продовженням робіт [3] та [4], в яких було запропоновано аналітичне задання функції, що моделює деякий часовий ряд, та обгрунтовано коректність цього задання. Також було досліджено властивості побудованої функції.

Припустимо, що розглядається часовий ряд, який на першому кроці наближення може бути зображений десятиланковою ламаною (або п’ятьма «хвилями» [2]), а на всіх кроках, починаючи з другого кожна ланка ламаної буде замінюватися на ламану, яка складається з 5 ланок (рис.1). При цьому вершини нових ламаних ділять початковий відрізок в співвідношеннях однакових для всіх кроків побудови (хоча для зростаючих і спадних ланок вони можуть відрізнятись) [3].

В доповіді буде обгрунтовано коректність задання функції:

$$f\left(\Delta^{Q^x}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \Delta^{Q^y}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \quad \alpha_1 \in \{0,\ldots,9\}, \alpha_j \in \{0,\ldots,4\}, j = \overline{2,\infty}, \qquad (1)$$

де аргумент задається наступним чином:

$$x = b_{\alpha_1} + \sum_{n=2}^{\infty}\left(b_{\alpha_n\alpha_{n-1}} q_{\alpha_1}\prod_{j=2}^{n-1} q_{\alpha_j\alpha_{j-1}}\right) = \Delta^{Q^x}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},$$

$0 < q_i < 1,\ \sum_{i=0}^{9} q_i = 1, \quad \tilde{Q} = \begin{pmatrix} q_{0(2k)} & q_{1(2k)} & q_{2(2k)} & q_{3(2k)} & q_{4(2k)} \\ q_{0(2k-1)} & q_{1(2k-1)} & q_{2(2k-1)} & q_{3(2k-1)} & q_{4(2k-1)} \end{pmatrix}, k = \overline{0,\infty}, 0 < q_{ij} < 1,\ \sum_{i=0}^{4} q_{ij} = 1, j \in \{0, 1, \ldots, 4\},$

$$b_{\alpha_1} = \begin{cases} 0, & \alpha_1 = 0, \\ \sum_{i=0}^{\alpha_1-1} q_i, & \alpha_1 \in \{1,\ldots,9\}, \end{cases} \quad b_{\alpha_j j} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha_j = 0, \\ \sum_{i=0}^{\alpha_j-1} q_{ij}, & \text{якщо } \alpha_j \in \{1,2,3,4\}. \end{cases}$$

Значення функції задається за допомогою наступної модифікації Q-зображення дійсних чисел:

$$y^* = d_{\alpha_1} + \sum_{n=2}^{\infty}\left(d_{\alpha_n\alpha_{n-1}} u_{\alpha_1}\prod_{j=2}^{n-1} u_{\alpha_j\alpha_{j-1}}\right) = \Delta^{Q^y}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},$$

$0 < q_i \le u_i < 1, u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 = 1, 1 - u_5 + u_6 - u_7 + u_8 - u_9 = 1,$
$\tilde{U} = \begin{pmatrix} u_{0(2k)} & u_{1(2k)} & u_{2(2k)} & u_{3(2k)} & u_{4(2k)} \\ u_{0(2k-1)} & u_{1(2k-1)} & u_{2(2k-1)} & u_{3(2k-1)} & u_{4(2k-1)} \end{pmatrix},\ k = \overline{0,\infty}, 0 < q_{ij} \le u_{ij} < 1,$
$\sum_{i=0}^{4}(-1)^i u_{ij} = 1, j \in \{0,1\},\ d_{\alpha_1} = \begin{cases} 0, & \alpha_1 = 0, \\ \sum_{i=0}^{\alpha_1-1} u_i, & \alpha_1 \in \{1,\ldots,9\}, \end{cases}$

$$d_{\alpha_j j} = \begin{cases} 0, \text{якщо } \alpha_j = 0, \\ (-1)^{\alpha_{j-1}} u_{0\alpha_{j-1}}, \text{якщо } \alpha_j = 1, \\ (-1)^{\alpha_{j-1}}\left(u_{0\alpha_{j-1}} - u_{1\alpha_{j-1}}\right), \text{якщо } \alpha_j = 2, \\ (-1)^{\alpha_{j-1}}\left(u_{0\alpha_{j-1}} - u_{1\alpha_{j-1}} + u_{2\alpha_{j-1}}\right), \text{якщо } \alpha_j = 3, \\ (-1)^{\alpha_{j-1}}\left(u_{0\alpha_{j-1}} - u_{1\alpha_{j-1}} + u_{2\alpha_{j-1}} - u_{3\alpha_{j-1}}\right), \text{якщо } \alpha_j = 4. \end{cases}$$

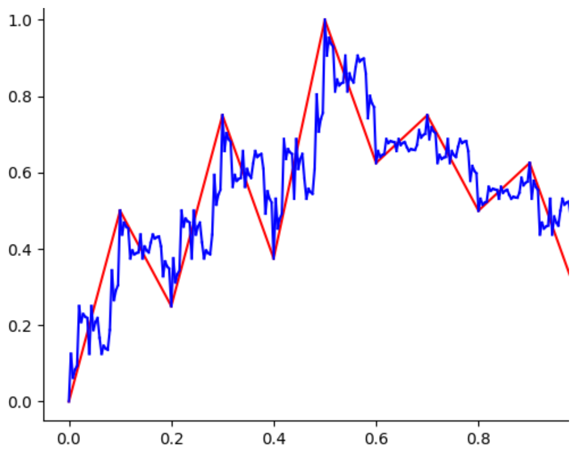

Рис. 1.

Для функції (1) доведено її неперервність, ніде не монотонність та недиференційоність.

Для моделювання часових рядів з описаними самоафінними властивостями розроблено алгоритм, реалізований мовою Python. Створена програма може бути використана для моделювання статистичних даних за допомого узагальнених хвильових діаграм, а також прогнозування наступних змін показників часового ряду.

Список використаних джерел

1. Працевитый Н.В., Турбин А.Ф. Фрактальные множества, функции, распределения. К.: Наукова думка, 1992.
2. Peters E. E. Fractal market analysis: applying chaos theory to investment and economics. *John Wiley & Sons*, Inc, 1994. 316 p.
3. Нитник А.С. Моделювання часових рядів за допомогою модифікацій Q-зображення дійсних чисел. *Студентські фізико-математичні етюди.* Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. 2021. No 21. С. 42-47.
4. Нитник А.С. Дослідження властивостей функції, заданої за допомогою модифікації q-зображень дійсних чисел. *Студентські фізико-математичні етюди*. Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. 2022. No 22. С. 33-42.

Нікорак О.О.
студентка,
Український державний університет імені Михайла Драгоманова
Ратушняк С.П.
доктор філософії (111 Математика),
Інститут математики НАН України

D_2-ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ І ПРОЄКТОРИ ЦИФР

Нехай $A \equiv \{0;1\}$ – двосимвольний алфавіт, $L \equiv \bigcup_{i=1}^{\infty} A^i$ – простір скінченних та нескінченних послідовностей елементів алфавіту. Покладемо $\frac{1}{0} \equiv \infty$, $\frac{1}{\infty} \equiv 0$.

Теорема. [1] *Для довільного числа* $x \in (0;1]$ *існує (скінченна або нескінченна) послідовність* $(d_n) \subset L$ *така, що* $x = \cfrac{1}{d_1 + \cfrac{1}{d_2 + \ldots}} \equiv [0; d_1, d_2, \ldots]^{D_2}$, *причому* $d_1 = 1$ *і* $d_{i+1} = 1$ *якщо* $d_i = 0$. Розклад у ланцюговий дріб називається D_2*-представлення*, а скорочений запис $[0; d_1 d_2 \ldots]^{D_2}$ – D_2*-зображенням* числа. Алгоритм розкладу числа у дріб Данжуа [1] доводить існування для довільного числа $x \in (0;1]$ послідовності (d_n). Кожне число має нескінченну кількість D_2-зображень, оскільки виконується рівність $[0; d_1, d_2, 0, d_3 \ldots]^{D_2} = [0; d_1, d_2, 000, d_3, \ldots]^{D_2}$. Якщо покласти умову $d_{i+1} = 1$ при $d_i = 0$, то отримаємо D_2-зображення з нульовою надлишковістю, тобто таке, що майже кожне