Числові системи і системи числення: канторівські системи

Працьовитий Микола Вікторович
доктор фізико-математичних наук, професор
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

Анотація. У доповіді пропонується огляд геометрії канторівської системи числення, що є узагальненням s-кової, різнопланові приклади застосувань цієї системи кодування дійсних чисел для конструювання і дослідження математичних об’єктів (множин, функцій, мір, розподілів ймовірностей, операторів, перетворень простору тощо) з фрактальними властивостями, пов’язаними іррегулярною локальною структурою. Також детально обґрунтовується факт: представлення чисел знакопочережними рядами Кантора не породжує нової геометрії, а є лише тривіальним перекодуванням відомого представлення додатним рядом Кантора, свідченням цього є метричні відношення властиві цим системам зображень.

Ключові слова: ряд Кантора, система числення, канторівська система числення, кодування дійсних чисел засобами змінного алфавіту, геометрія зображення дійсного числа, основне метричне відношення системи кодування, знакопочережний ряд Кантора.

Сьогодні людство оперує різними числовими системами (множинами чисел, які утворюють певні математичні структури і мають деяку степінь автономності). Це системи натуральних, цілих, раціональних, дійсних, комплексних, гіперкомплексних чисел тощо. Представник тієї чи іншої числової системи має свій зміст і форму існування,, які йому надає система числення. Числові системи і системи числення обслуговують потреби обчислювальної математики та обчислювальної техніки, сучасних ІКТ. Тому з ними слід знайомити майбутніх програмістів, вчителів та викладачів інформатики.

Системою числення дійсних чисел називається сукупність засобів для

1) представлення=подання (математичного вираження);
2) зображення (кодування, скороченого, формального запису);
3) найменування дійсних чисел;
4) їх ідентифікації та порівняння;
5) а також побудови арифметики.

Ця сукупність включає:

1. Модель числа у формі математичного виразу (ряду, нескінченного добутку, ланцюгового дробу тощо).
2. Алфавіт – набір цифр (символів, знаків) для формального (скороченого) запису представлень числа математичним виразом, які відіграють роль чисел або індексів.
3. Базис (базисну послідовність), якщо моделлю числа є ряд.

Існуючі сьогодні системи числення за своєю формою та структурою досить різні. Класичною у цьому відношенні є s-кова система числення, на основі якої була створена К. Вейєрштрассом перша змістовна теорію дійсних чисел. Узагальненням s-кової системи числення є канторівські системи числення, запропоновані Г. Кантором в роботі [1].

Нехай (s_n) – фіксована послідовність натуральних чисел, більших 1; $A_{s_n} \equiv \{0,1,\dots,s_n-1\}$ – послідовність алфавітів; $L \equiv A_{s_1} \times A_{s_2} \times \dots \times A_{s_n} \times \dots$. – простір послідовностей.

Теорема 1(*Cantor G.*). *Для будь-якого числа* $x \in [0;1]$ *існує послідовність* $(a_n) \in L$ *така, що*

$$x = \frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_1 s_2} + \dots + \frac{a_n}{s_1 s_2 \dots s_n} + \dots \equiv \Delta^{(s_n)}_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}. \qquad (1)$$

Розклад числа x в ряд (1) називається його представленням рядом Кантора, що символічно зображується $x = \Delta^{(s_n)}_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}$. При цьому a_n називається n-ою цифрою даного зображення. Множина $\Delta^{(s_n)}_{c_1 c_2 \dots c_n}$, яка містить лише ті числа відрізка $[0;1]$, перші n цифр яких рівні $c_1, c_2, \dots, c_n$ відповідно називається *циліндром* рангу n з основою $c_1 c_2 \dots c_n$.

Циліндр є відрізком, довжина якого обчислюється за формулою $|\Delta^{(s_k)}_{c_1c_2...c_n}| = (s_1s_2...s_n)^{-1}$ і залежить від рангу і не залежить від основи. Це породжує основне метричне відношення:

$$|\Delta^{(s_k)}_{c_1c_2...c_n i}| = (s_{n+1})^{-1}\,|\Delta^{(s_k)}_{c_1c_2...c_n}|.$$

Теорема 2. *Якщо має місце рівність (1), то*

$$x = 1 - \frac{\gamma_1}{s_1} + \frac{\gamma_2}{s_1s_2} - \frac{\gamma_3}{s_1s_2s_3} + \frac{\gamma_4}{s_1s_2s_3s_4} - \frac{\gamma_5}{s_1s_2s_3s_4s_5} + ... =$$

$$= b - \frac{\tau_1}{s_1} + \frac{\tau_2}{s_1s_2} - \frac{\tau_3}{s_1s_2s_3} + \frac{\tau_4}{s_1s_2s_3s_4} - ... + \frac{\tau_5}{s_1s_2s_3s_4s_5} + ... \equiv \overline{\Delta}^{s}_{\tau_1\tau_2...\tau_n}, \quad (2)$$

де $\gamma_n = \begin{cases} s_n - a_n, & \text{якщо } n\text{ - непарне,} \\ a_n + 1, & \text{якщо } n\text{ - парне,} \end{cases}$, $\gamma_n \in \{1,2,...,s_n\}$, $\quad b = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{s_1s_2...s_n}$,

$\gamma_n - 1 \equiv \tau_n \in A_{s_n} = \{0,1,...,s_n - 1\}$.

Доведення. З рівності (1) маємо

$$x = 1 - 1 + \frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2+1}{s_1s_2} - \frac{1}{s_1s_2} + \frac{a_3}{s_1s_2s_3} + \frac{a_4+1}{s_1s_2s_3s_4} - \frac{1}{s_1s_2s_3s_4} + \frac{a_5}{s_1s_2s_3s_4s_5} + ... =$$

$$= 1 - \frac{s_1 - a_1}{s_1} + \frac{a_2+1}{s_1s_2} - \frac{s_3 - a_3}{s_1s_2s_3} + \frac{a_4+1}{s_1s_2s_3s_4} - \frac{s_5 - a_5}{s_1s_2s_3s_4s_5} + ... =$$

$$= 1 - \frac{\gamma_1}{s_1} + \frac{\gamma_2}{s_1s_2} - \frac{\gamma_3}{s_1s_2s_3} + \frac{\gamma_4}{s_1s_2s_3s_4} - \frac{\gamma_5}{s_1s_2s_3s_4s_5} + ... =,$$

де $\gamma_n = \begin{cases} s_n - a_n, & \text{якщо n - непарне,} \\ a_n + 1, & \text{якщо n - парне.} \end{cases}$

Отже, $\gamma_n \in \{1,2,...,s_n\}$.

Якщо покласти $\tau_n \equiv \gamma_n - 1$, то $\tau_n \in \{0,1,2,...,s_n - 1\}$ і матимемо

$$x = 1 - \frac{\tau_1}{s_1} - \frac{1}{s_1} + \frac{\tau_2}{s_1s_2} + \frac{1}{s_1s_2} + \frac{\tau_3}{s_1s_2s_3} - \frac{1}{s_1s_2s_3} + \frac{\tau_4}{s_1s_2s_3s_4} + \frac{1}{s_1s_2s_3s_4} + ... =$$

$$= b - \frac{\tau_1}{s_1} + \frac{\tau_2}{s_1s_2} - \frac{\tau_3}{s_1s_2s_3} + \frac{\tau_4}{s_1s_2s_3s_4} - ...,$$

де $b = 1 - \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_1s_2} - \frac{1}{s_1s_2s_3} + ...,$

що й вимагалось довести.

Означення. Розклад числа $x \in [0;1]$ в ряд (2) називається представленням числа знакопочережним рядом Кантора.

Наслідок з теореми 2. Довжина циліндра, що відповідає кодуванню дійсного числа $x \in [0;1]$ за допомогою розкладу його в знакопочережний ряд Кантора, обчислюється за тією ж формулою. Основне метричне відношення має той же вигляд, що й для розкладів чисел в додатний ряд Кантора (залежить лише від рангу циліндра).

Зауваження. Кодування чисел, що ґрунтується на їх розкладах в знакододатні та знакопочережні ряди Кантора з однією і тією ж базовою послідовністю породжують однакові метричні відношення, а отже, мають однакову геометрію.

Список використаних джерел

1. *Cantor G.* Uber die einfachen Zahlensysteme // Z.Math.Phys. – 1979. – Bd.14. – S.121-128.
2. *Працьовитий М.В.* Системи числення зі змінною основою та змінним алфавітом (або розвинення чисел в ряди Кантора) // Студентські фізико-математичні етюди. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2009. — № 8. — С. 6-18.