Вивчення теорії множин з використанням СКМ Mathematica

Деканов Станіслав Якович
кандидат фізико-математичних наук, доцент
Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

Анотація. Система Mathematica містить розвинуті засоби для роботи з множинами. У ній представлені такі основні числові множини як Primes (множина простих чисел), Integers (множина цілих чисел), Rationals (множина раціональних чисел), Reals (множина дійсних чисел), Algebraics (множина комплексних алгебраїчних чисел) і Complexes (множина комплексних чисел). Також є FullRegion[n] (множина $\boldsymbol{R}^n$), EmptyRegion[n] (порожня підмножина простору $\boldsymbol{R}^n$). Множини можна задавати, виконувати над ними операції, ілюструвати геометрично, використовувати їх при обчисленнях. Завдяки логічним операціям, або так званій булевій алгебрі, у Mathematica можна виконувати операції і над довільними абстрактними множинами.

Ключові слова: теорія множин, СКМ, Mathematica.

Найбільш відповідним до поняття скінченної множини типом даних є список. Його задають командами List[a,b,…,c] або {a,b,…,c}, де аргументи можуть бути будь-якими об'єктами, які розпізнаються системою. Слід мати на увазі, що список – це упорядкований набір елементів, і тому, наприклад, такі списки як {1,2}, {2,1}, {1,1,2} вважаються різними. У цьому є свої переваги. Разом з цим, якщо потрібно, можна дивитись на список як на множину, тобто не враховувати повторення елементів та їх порядок. Для вибору зі списку A елемента з номером n використовують команду Part[A,n] або скорочений її варіант A[[n]]. Для вибору зі списку A елементів з номерами від m до n використовують команду Part[A,m;;n] або скорочений її варіант A[[m;;n]]. Результат виводиться у вигляді нового списку. Для вибору зі списку A елементів x, які задовольняють певний критерій P[x], використовують команду Select[A,P[#]&]. Якщо потрібно знайти множину W всіх підсписків заданого списку D, використовують команду Subsets[D]. При цьому зберігається порядок елементів і їх повторюваність. Зазначимо, що список з повторюваними елементами трактується не як звичайна множина. Для того щоб перетворити список на множину, потрібно вилучити елементи, які повторюються. Це можна зробити за командами DeleteDuplicates[D] або Union[D]. При цьому остання з команд ще й відсортовує отриманий список.

Над списками можна виконувати множинні операції: перевіряти належність елемента до списку, включення одного списку в інший, рівність двох списків як множин, знаходити об'єднання, переріз і різницю двох списків та ін.

Належність елемента x до списку A перевіряють командою MemberQ[A,x]. Значенням цієї команди є True (так, твердження істинне) чи False (ні, твердження хибне). Закінчення "Q" у командах означає Question (запитання).

Об'єднання, переріз і різницю списків A та B знаходять відповідно за командами Union[A,B], Intersection[A,B], Complement[A,B]. При цьому списки трактуються як множини і в результаті виводяться відсортовані списки без повторюваних елементів. Включення списку B у список A (у розумінні включення множин), тобто умову A ⊃ B, перевіряють командою SubsetQ[A,B] або ContainsAll[A,B].

Список A={y_1,y_2,…,y_n} з числовими значеннями можна зобразити графічно у вигляді точок $M_k(k, y_k)$, $k \in \overline{1,n}$, що лежать на площині. Для цього призначена команда ListPlot[A].

Перейдемо до так званих областей, або регіонів (Regions), які є підмножинами просторів $\boldsymbol{R}^1$, $\boldsymbol{R}^2$, … . Область A у просторі $\boldsymbol{R}^n$ задають так: A=ImplicitRegion[P[x],{x}], де P[x] – сукупність або система нерівностей. Для перевірки належності точки x множині A використовують команди Element[{x},A] або RegionMember[A,{x}]. Над множинами A, B типу Region можна виконувати операції об'єднання, перерізу та різниці за командами RegionUnion[A,B], RegionIntersection[A,B] і RegionDifference[A,B] відповідно.

Для зображення лінійної множини $A \subset [a;b]$, що визначається умовою P[x], використовують команду NumberLinePlot[P[x],{x,a,b}]. Для створення графічного зображення області $A \subset \boldsymbol{R}^2$ призначена команда RegionPlot[A].

Включення $A \supset B$ перевіряють за командою RegionWithin[A,B]. За цією ж командою можна також знаходити умови включення множин.

У системі Mathematica можна оперувати з конкретними множинами, застосовуючи логічні операції. Для перевірки правильності логічних формул використовують команди TautologyQ або LogicalExpand. Останню з них використовують також для спрощування логічних тверджень. Так, для перевірки правильності формули $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cap C)$ достатньо виконати команду

```
 In[1]:=  TautologyQ[(a&&b)||c⇔(a||c)&&(b||c)]
Out[1]=  True
```

Як відомо, одним із методів доведення тверджень є складання таблиць істинності. Цей метод має ефективну реалізацію у середовищі Mathematica. Так, повертаючись до доведення попередньої формули, складемо таблиці істинності її лівої і правої частин:

```
 In[2]:=  Prepend[Boole[BooleanTable[{a,b,c,a&&b,(a&&b)||c},{a,b,c}]],{" a "," b "," c ",
          " a∧b ","(a∧b)∨c","a∨c","b∨c","(a∨c)∧(b∨c)"}]//Grid[#,Frame->All]&
```

Out[2]=

a	b	c	a∧b	(a∧b)∨c	a∨c	b∨c	(a∨c)∧(b∨c)
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0

Окрім простих логічних операцій Mathematica підтримує логіку предикатів, тобто операції над висловленнями зі змінними, до яких можуть входити логічні квантори ∀ та ∃. Квантору ∀ відповідає команда ForAll, а квантору ∃ – команда Exists. Для спрощування тверджень з кванторами служать команди Resolve, Solve або Reduce.

Використовуючи квантори, можна виконувати операції не тільки над скінченною кількістю множин, а й над нескінченною. Ось як, наприклад, можна знайти об'єднання $A = \bigcup_{n \ge 1} E_n$ і переріз $B = \bigcap_{n \ge 1} E_n$ піввідрізків $E_n = \left[\frac{2-3n}{n+1}; \frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)$, $n \in [1;+\infty)$.

```
 In[1]:=  A=Exists[n,n>=1,(2-3n)/(n+1)<=x<(n^2+2)/(n^2+n+1)];
 In[2]:=  Resolve[A]
Out[2]=  −3 < x < 1
 In[3]:=  B=ForAll[n,n>=1,(2-3n)/(n+1)<=x<(n^2+2)/(n^2+n+1)];
 In[4]:=  Resolve[B]
Out[4]=  −1/2 ≤ x < 2/3 (3 − √3)
```

Отже, $A = (-3;1)$, $B = \left[-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\left(3-\sqrt{3}\right)\right)$. Зауважимо, що множини E_n проіндексовані дійсним параметром n. Якщо накласти умову $n \in \boldsymbol{Z}$, то відповідь не вдасться отримати цим способом.

Висновки. Проведене дослідження показує ефективність і доцільність використання СКМ Mathematica під час вивчення теорії множин в курсі математичного аналізу. Це сприяє підвищенню інтересу до навчання і кращому розумінню матеріалу.

Список використаних джерел

1. *Дьяконов В. П.* Mathematica 5/6/7. Полное руководство. – М.: ДМК Пресс, 2010. – 624 с.
2. http://www.wolfram.com/ (сайт компанії Wolfram Research)