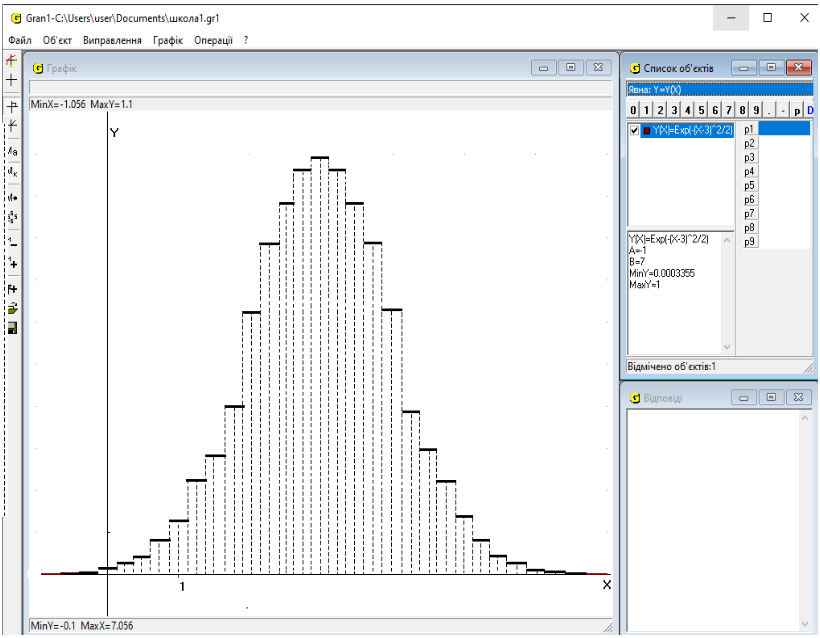
М.І. Жалдак
Г.О. Михалін
Н.П. Франчук

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

ШКІЛЬНИЙ КУРС



Київ
НПУ імені М.П. Драгоманова
2021

УДК 519.21(075.3)

Ж24

Рекомендовано до друку Науково-методичною радою факультету інформатики Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова (протокол №2 від 16 грудня 2020 року)

Рекомендовано до друку Вченою радою Факультету інформатики Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова (протокол №5 від 20 січня 2021 року)

Рецензенти:
Доктор педагогічних наук, професор Горошко Ю.В.
Доктор фіз.-мат. наук, професор Самусенко П.Ф.

М.І. Жалдак, Г.О. Михалін, Н.П. Франчук

Ж24 Основи теорії ймовірностей. Шкільний курс. М.І. Жалдак, Г.О. Михалін, Н.П. Франчук. – Київ. НПУ імені М.П. Драгоманова, 2021 – 124 с.

Подано основи теорії ймовірностей. Матеріал може бути використаний вчителями в процесі навчання основ теорії ймовірностей в школі.

Призначено для вчителів математики. Може стати в нагоді також студентам інформатичних та фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів, студентам технічних, економічних та інших спеціальностей, а також учням старших класів закладів загальної середньої освіти.

УДК 519.21(075.3)

ПЕРЕДМОВА

Даний посібник призначено для вчителів математики, які навчають елементів теорії ймовірностей і математичної статистики в старших класах загальноосвітніх навчальних закладів.

Матеріал подається на рівні складності, цілком доступному учням старших класів.

В основу покладено поняття міри множини, стосовно якої задовільняються дві вимоги (аксіоми):

1) міра множини є невід'ємна числова величина;

2) коли множину поділити на частини, то сума мір таких частин дорівнює мірі всієї множини (так звана властивість аддитивності міри множини).

Як приклади мір розглядаються довжини ліній, площі плоских фігур, об'єми тіл, маси фізичних тіл, кількості елементів в деякій їх сукупності тощо.

Зауважимо, що в підручнику О.В. Погорєлова з геометрії для 7-9 класів означення площі плоскої фігури подається як величина, стосовно якої задовільняються вимоги 1), 2), тобто як міра множини точок на площині.

Вступ до теорії ймовірностей пропонується починати з розгляду однієї з ймовірнісних мір – відносної частоти відбування випадкової події A в n випробуваннях, що визначається як відношення $k_n(A)$ – кількості відбувань події A в n випробуваннях, яка є кількісною мірою множини A, до кількості n випробувань. Таке відношення $\frac{k_n(A)}{n}$ позначається через $P_n^*(A)$ і називається статистичною ймовірністю події A.

Стосовно статистичної ймовірності $P_n^*(A)$ задовільняються обидві вимоги (аксіоми) стосовно міри множини (невід'ємність і аддитивність) і крім того вимога (аксіома) нормованості міри – $P_n^*(A) \le 1$, яка також очевидно задовільняється, оскільки кількість $k_n(A)$ відбувань події A в n випробуваннях не може бути більшою, ніж кількість n випробувань.

Міру $P(A)$ множини A, стосовно якої задовільняються вимоги:

1_p) міра $P(A)$ невід'ємна, тобто $P(A) \ge 0$;

2_p) міра $P(A)$ аддитивна;

3_p) $P(A) \leq 1$, тобто міра $P(A)$ нормована;

називають ймовірнісною мірою (або просто ймовірністю) події A (попадання в множину A) і позначають символами $P(A)$ (від англійського probability, що означає ймовірність).

Очевидно статистична ймовірність $P_n^*(A)$ є ймовірнісною мірою, оскільки стосовно $P_n^*(A)$ задовільняються всі вимоги (аксіоми) $1_p - 3_p$ стосовно ймовірнісної міри.

Разом з тим часто ймовірність $P(A)$ події A тлумачать як міру можливості відбування події A в майбутньому, тоді як статистичну ймовірність $P_n^*(A)$ визначають за результатами вже проведених n випробувань, що доступніше для розуміння учнями і може бути перевірене практично на основі певної кількості реально проведених спостережень чи випробувань.

В зв'язку з цим наведемо слова видатного швейцарського математика Якоба Бернуллі (1654-1705) стосовно сутності поняття статистичної ймовірності: «Що не дано нам вивести apriori (тобто наперед передбачати до проведення досліду), те принаймні можна дістати aposteriori, тобто з численних спостережень результатів подібних дослідів. Тому можна передбачити, що деяке явище згодом може відбутися у стількох саме випадках, у скількох воно раніше відмічене як таке, що відбулося за подібних умов…»

Тому вивчаючи статистичні ймовірності та їх властивості, учні вивчатимуть властивості ймовірнісної міри $P(A)$ випадкових подій A із деякої їх сукупності (простору подій) S.

Слід підкреслити, що всі твердження і висновки стоосвно статистичної ймовірності $P_n^*(A)$ події A, правил обчислення статистичних ймовірностей суми подій, добутку подій, відбування події A m разів в n випробуваннях, формула повної статистичної ймовірності, формула Байєса, типів розподілів статистичних ймовірностей на скінченних і нескінченних множинах точок залишаються без жодних змін застосовними і правильними стосовно довільним чином заданої (можливо гіпотетично) ймовірнісної міри (ймовірності) $P(A)$, стосовно якої задовільняються аксіоми $1_p - 3_p$, досить лише у відповідних твердженнях замінити символи $P_n^*(A)$ на $P(A)$.

Тому доцільно починати вивчати основи теорії ймовірностей з розгляду статистичних ймовірностей $P_n^*(A)$ різних подій, поступово узагальнюючи сформовані знання на основі достатньо глибокого розуміння сутності досліджуваних явищ.

Під час навчання пропонованих в посібнику основ теорії ймовірностей доцільно в разі необхідності використовувати сучасні комп'ютеризовані засоби обчислень, зокрема програму Gran1 для побудови графіків функцій, обчислення інтегралів, площ многокутників, об'ємів тіл обертання тощо. Разом з тим використання комп'ютеризованих засобів обчислень і графічних побудов має бути педагогічно виваженим. Головним залишається розумовий розвиток учнів, їхнього логічного і творчого мислення, загальної і професійної культури.

Програмний комплекс Gran1, Gran2D, Gran3D, посібники «Математика з комп'ютером», «Теорія ймовірностей і математична статистика» та деякі інші розміщені на сайті ktoi.npu.edu.ua і поширюються безкоштовно.

РОЗДІЛ I. МНОЖИНИ

§1.1. Множини

Сукупність об'єктів певної природи називають *множиною, елементами* якої є вказані об'єкти.

Прикладами множин можуть бути:

- множина вершин піраміди (Рис. 1.1.1);
- множина ребер піраміди;
- множина граней піраміди;
- множина точок всередині піраміди;
- множина цілих додатних однорозрядних чисел;
- множина натуральних чисел;
- множина точок влучення в мішень після десяти пострілів;
- множина зірок на безхмарному нічному небі і т.д.

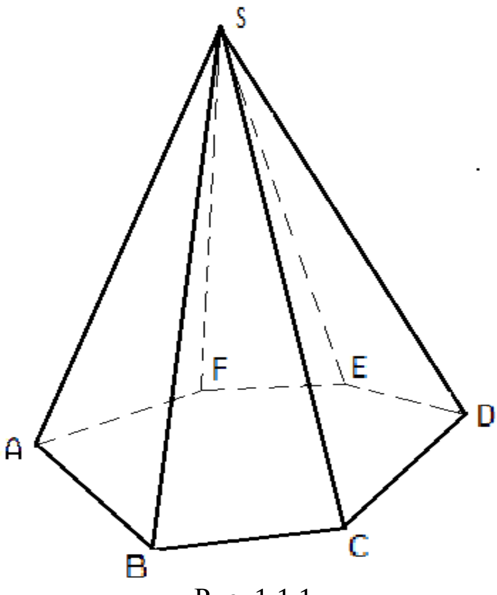


Рис. 1.1.1

Геометрично множини будемо подавати у вигляді сукупності деяких точок на площині чи в просторі.

Різні множини найчастіше позначають великими латинськими буквами A, B, C, D і ін., або великими грецькими буквами Ω і ін.

Окремі елементи множин позначають або великими латинськими буквами з індексами чи без них, наприклад E, E_1, E_2 і т.п., або малими латинськими буквами x, y, z тощо, або цифрами чи іншими символами.

Опис належності елемента, наприклад E, до множини наприклад Ω, подають у вигляді $E \in \Omega$, де $\in$ – математичний символ – замінник слова «належить» чи вислову «є елементом».

Щоб показати, що елемент E не є елементом множини Ω, пишуть $E \overline{\in} \Omega$, де $\overline{\in}$ – математичний символ, що є запереченням символа $\in$ і є замінником слів «не належить» чи вислову «не є елементом».

Коли всі елементи множини, наприклад A, є водночас також елементами множини B, тоді пишуть $A \subset B$, що означає, що множина A входить в множину B (Рис. 1.1.2). В такому разі множину A називають підмножиною множини B.

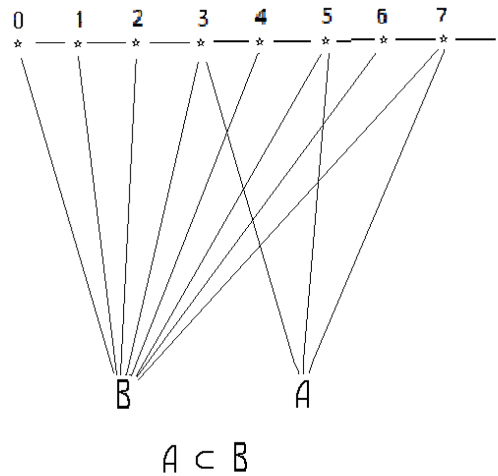


Рис. 1.1.2

Якщо всі елементи множини A є елементами множини B, тобто $A \subset B$, і разом з тим всі елементи множини B є елементами множини A, $B \subset A$, тоді говорять, що множини A і B рівні між собою (або рівносильні), і пишуть $A = B$.

Коли дві точки на площині чи в просторі з'єднати неперервною лінією, то довжину найкоротшої серед таких ліній називають віддаллю між вказаними точками. Віддаль між точками M_1 і M_2 позначають символами $\rho(M_1, M_2)$.

В разі, коли віддаль від деякої точки M множини A, $M \in A$, до будь якої іншої точки цієї множини додатна (більша за нуль), тоді таку точку M множини A називають *ізольованою*.

В разі, коли всі точки множини A ізольовані, тоді таку множину A називають *дискретною*. Множина, в який є тільки один елемент, також є дискретною.

Описи дискретних множин подають у вигляді

$$A = \{E_1, E_2, \dots, E_k\},$$

де в фігурних дужках подають перелік елементів множини, або у вигляді

$$A = \{E_k \mid E_k = 2^k, \ k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\},$$

де в фігурних дужках подають позначення елементів множини і далі після вертикальної риски визначення конкретних елементів множини.

Прикладами дискретних можуть бути:

- скінченна множина однорозрядних цілих додатних чисел $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
- нескінченна множина натуральних чисел $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$

В разі, коли вздовж найкоротшої лінії, через яку з'єднуються будь які дві точки M_1 і M_2 множини A, знайдеться ще принаймні одна точка із множини A, відмінна від точок M_1 і M_2, тоді таку множину A називають *неперервною*.

В разі, коли найбільша віддаль між двома різними точками M_1 і M_2 множини A скінченна, тобто $\rho(M_1, M_2) < \infty$, тоді множину A називають обмеженою множиною (можливо з нескінченною неперервною множиною елементів).

Прикладами неперервних множин можуть бути:

$A = \{x \mid x \in [0; 1]\}$ – обмежена множина точок відрізка $[0; 1]$;

$A = \{x \mid x \geq 0\}$ – необмежена множина точок півпрямої $[0; \infty)$.

Множини виду $[a; b]$, $[a; b)$, $(a; b]$, $(a; b)$ (Рис. 1.1.3) також є прикладами неперервних обмежених множин в разі, коли $-\infty < a \leq b < +\infty$.

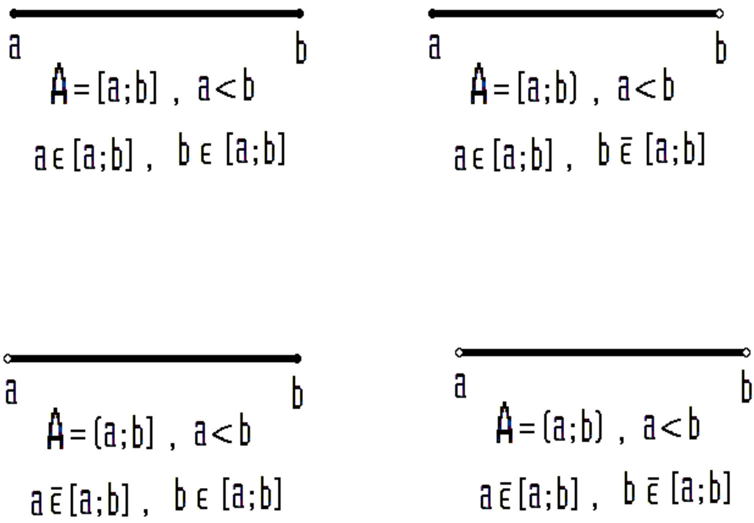


Рис. 1.1.3

В разі, коли в множині A немає жодного елемента, тоді таку множину A називають порожньою і пишуть $A=\varnothing$ (де $\varnothing$ – порожня множина, в якій немає жодного елемента).

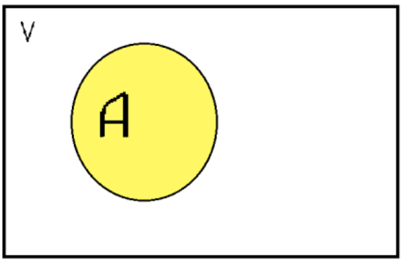
Рис. 1.1.4

На Рис. 1.1.4 зображено двохвимірну неперервну обмежену множину точок прямокутника V з нескінченною кількістю елементів $E \in V$.

§1.2. Операції над множинами

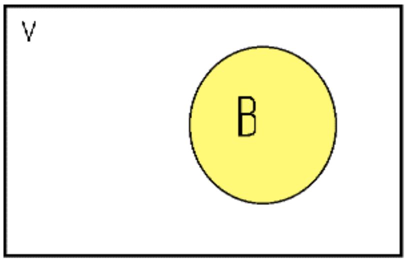
Нехай задано дві множини A і B елементів деякої природи. Об'єднанням множин A і B називають таку множину C, кожен елемент якої є елементом принаймні однієї з множин A та B. Об'єднання множин A і B позначаються символами $A \bigcup B$, де $\bigcup$ – математичний знак, через який позначається операція об'єднання множин. Зауважимо, що для того, щоб одержати об'єднання множин A і B, треба до однієї з них з іншої приєднати ті елементи, яких немає в першій множині.

Таким чином, як слідує з означення об'єднання множин, $A \bigcup B = B \bigcup A$, тобто має місце закон комутативності або переставний закон стосовно операції об'єднання множин. Якщо в графічному поданні множини A і B зобразити як деякі затемнені круги всередині деяких однакових за розмірами прямокутників V (так звані круги Ейлера, див. Рис. 1.2.1) і потім накласти такі прямокутники один на інший, тоді в результаті такого накладання отримається об'єднання множин A і B (на Рис. 1.2.1. в)) затемнена множина $A \bigcup B$).



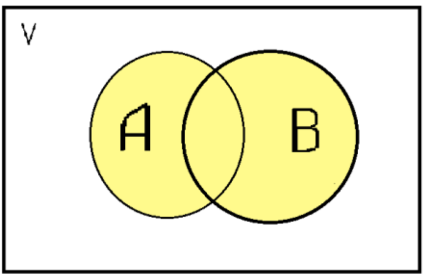
A

Рис. 1.2.1. а)



B

Рис. 1.2.1. б)



$A \bigcup B$

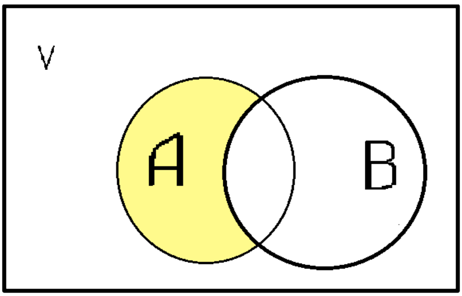
Рис. 1.2.1. в)

Результат операції об'єднання множин A і B іноді називають сумою множин A і B і позначають символами $A+B$, однак разом з тим слід мати на увазі, що зміст операції об'єднання множин суттєво різниться від змісту операції додавання дійсних чисел.

Зауважимо, що для того, щоб одержати зображення об'єднання двох множин A і B, досить зобразити множини A і B на двох окремих прозорих прямокутних аркушах однакових розмірів (див. Рис. 1.2.1. а) і Рис. 1.2.1. б), і потім накласти так створені рисунки один на один (попередньо зафарбувати множини A і B). Множина точок в зафарбованій частині накладених один на одного прозорих аркушів і буде об'єднанням точок множин A і B (див. Рис. 1.2.1. в).

Різницею множин A і B називають таку множину C, кожен елемент якої є елементом множини A і не є елементом множини B. Різницю C множин A і B позначають символами $C = A \setminus B$. Зауважимо, що для того, щоб отримати різницю множин $A \setminus B$, треба із множини A вилучити всі елементи множини B, якщо вони є в множині A.

На Рис. 1.2.2 наведено графічне подання різниці $A \setminus B$ множин A і B.



$A \setminus B$

Рис. 1.2.2.

Очевидно $A \setminus B \neq B \setminus A$, коли $A \neq B$.

Перетином множин A і B називають таку множину C, кожен елемент якої є як елементом множини A, так і елементом множини B, тобто C є множиною спільних елементів множин

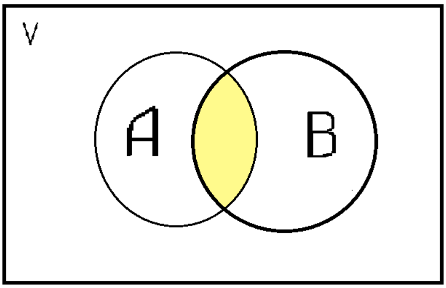
A і B. Якщо в множинах A і B немає спільних елементів, тоді $C=\varnothing$ – порожня множина.

Перетин множин A і B позначають символами $C=A\bigcap B$, де $\bigcap$ – математичний знак, через який позначається операція перетину множин.

На Рис. 1.2.3 наведено графічне подання перетину множин A і B, множина $C=A\bigcap B$ на Рис. 1.2.3 затемнена.

Результат операції перетину множин A і B іноді називають добутком множин A і B, і позначають символами $A\cdot B$ або просто AB. Однак слід мати на увазі, що зміст операції перетину множин суттєво різниться від змісту операції множення дійсних чисел.

Як слідує з наведеного, стосовно операції перетину множин правильна рівність $A\bigcap B=B\bigcap A$ – закон комутативності або переставний закон стосовно операції перетину множин.



$A\bigcap B$

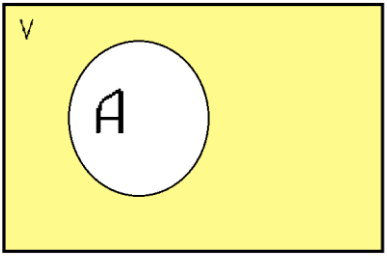
Рис. 1.2.3.

Зауважимо, що оскільки $A\bigcap B\subset A$ і $A\bigcap B\subset B$, то доцільно вважати $A\bigcap\varnothing\subset A$ і $A\bigcap\varnothing\subset\varnothing$, тобто доцільно вважати, що порожня множина $\varnothing$ є підмножиною довільної множини A: $\varnothing=\varnothing\bigcap A\subset A$.

§1.3. Властивості операцій над множинами

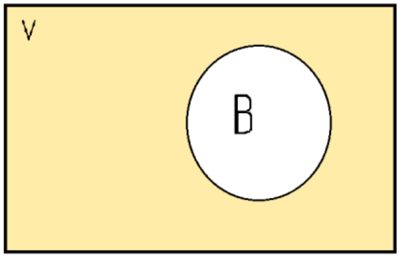
Нехай множини A і B розглядаються як підмножини точок прямокутника V (див. Рис. 1.3.1 – 1.3.2).

Розглянемо множини $V \setminus A$ і $V \setminus B$ (див. Рис. 1.3.1, Рис. 1.3.2, множини $V \setminus A$ і $V \setminus B$ затемнені).



$V \setminus A$

Рис. 1.3.1

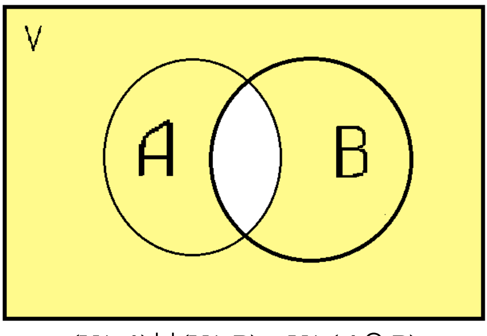


$V \setminus B$

Рис. 1.3.2.

Якщо об'єднати множини $V \setminus A$ і $V \setminus B$ (накласти прямокутники з Рис. 1.3.1 і з Рис. 1.3.2 один на один), тоді одержиться множина $V \setminus (A \cap B)$ (незатемненою буде множина точок, які є точками як множини A, так і множини B). Таким чином виявляється правильною рівність (див. Рис. 1.3.3):

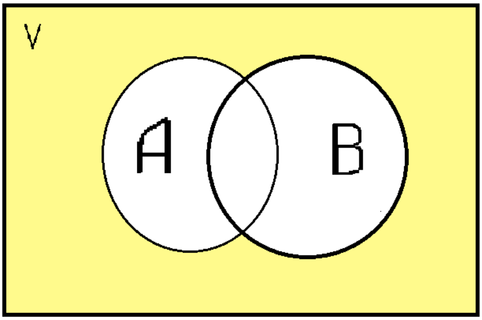
$$(V \setminus A) \cup (V \setminus B) = V \setminus (A \cap B)$$



$(V \setminus A) \cup (V \setminus B) = V \setminus (A \cap B)$

Рис. 1.3.3

Якщо перетнути множини $V \setminus A$ і $V \setminus B$ (вибрати множину точок, які є елементами як множини $V \setminus A$, так і множини $V \setminus B$, тобто множину спільних точок множин $V \setminus A$ і $V \setminus B$), тоді одержиться множина точок $V \setminus (A \cup B)$ (незатемненою буде множина точок, кожна з яких належить принаймні до однієї з множин A або B, а затемненою буде множина точок, які є елементами як множини $V \setminus A$, так і елементами множини $V \setminus B$). Таким чином виявляється правильною рівність $(V \setminus A) \bigcap (V \setminus B) = V \setminus (A \bigcup B)$ (див. Рис. 1.3.4).

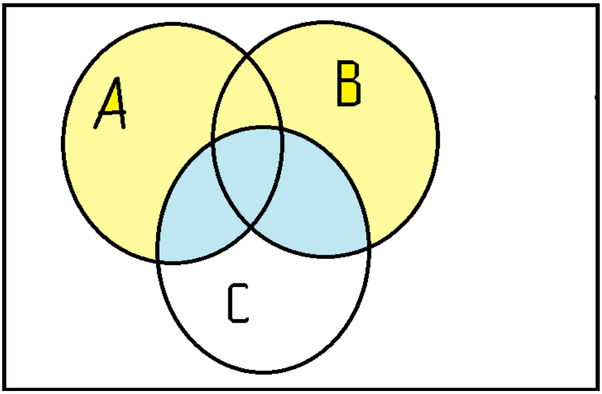


$(V \setminus A) \bigcap (V \setminus B) = V \setminus (A \bigcup B)$

Рис. 1.3.4

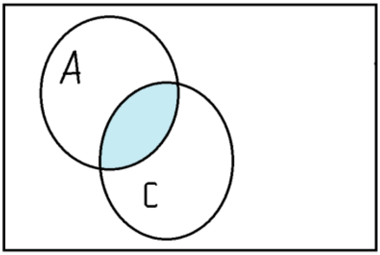
Як видно з наведеного, стосовно введених операцій над подіями виявляються правильними рівності:

1. $V \setminus (V \setminus A) = A$,
2. $A \bigcup B = B \bigcup A$,
3. $A \bigcap B = B \bigcap A$,
4. $(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C)$,
5. $(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C)$,
6. $(A \bigcup B) \bigcap C = (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C)$ – (див. Рис. 1.3.5), перший розподільний закон множення відносно додавання
7. $(A \bigcap B) \bigcup C = (A \bigcup C) \bigcap (B \bigcup C)$ – (див. Рис. 1.3.6), другий розподільний закон додавання відносно множення
8. $A \bigcup A = A$,
9. $A \bigcap A = A$,
10. $A \bigcup (V \setminus A) = V$,
11. $A \bigcap (V \setminus A) = \varnothing$,
12. $A \bigcup V = V$,
13. $A \bigcap V = A$,
14. $A \bigcup \varnothing = A$,
15. $A \bigcap \varnothing = \varnothing$,
16. $V \setminus (A \bigcup B) = (V \setminus A) \bigcap (V \setminus B)$ – (див. Рис. 1.3.4),
17. $V \setminus (A \bigcap B) = (V \setminus A) \bigcup (V \setminus B)$ – (див. Рис. 1.3.3).



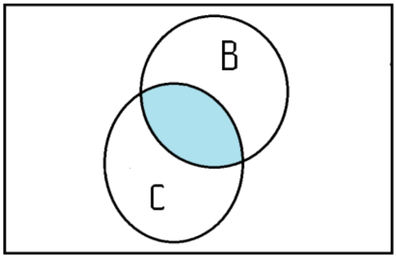
$(A \cup B) \cap C$

Рис. 1.3.5. а)



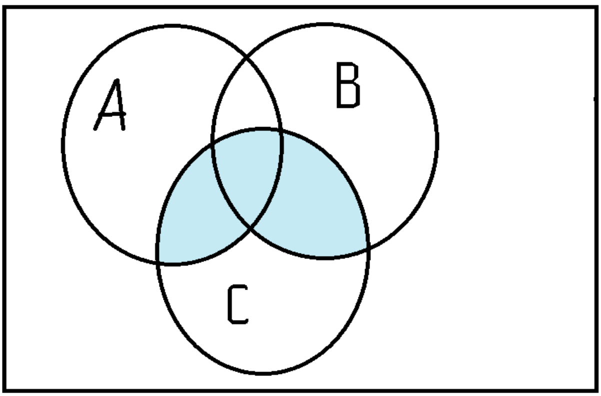
$(A \cap C)$

Рис. 1.3.5. б)



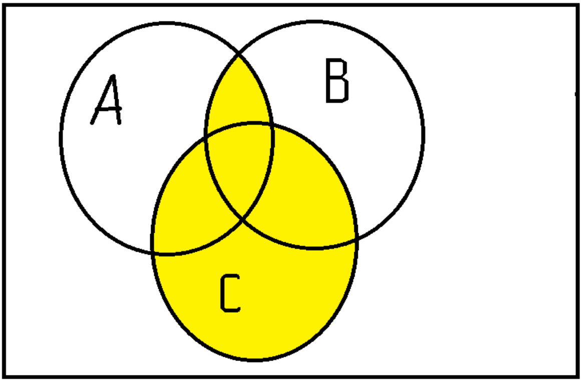
$(B \cap C)$

Рис. 1.3.5. в)



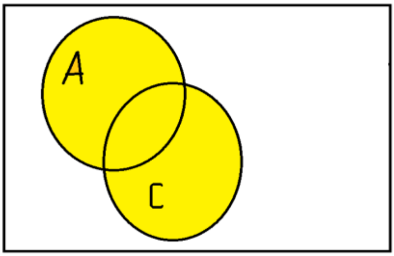
$(A \cap C) \cup (B \cap C)$

Рис. 1.3.5. г)



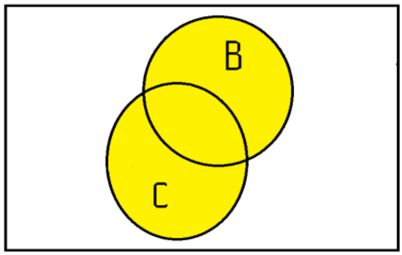
$(A \cap B) \cup C$

Рис. 1.3.6. а)



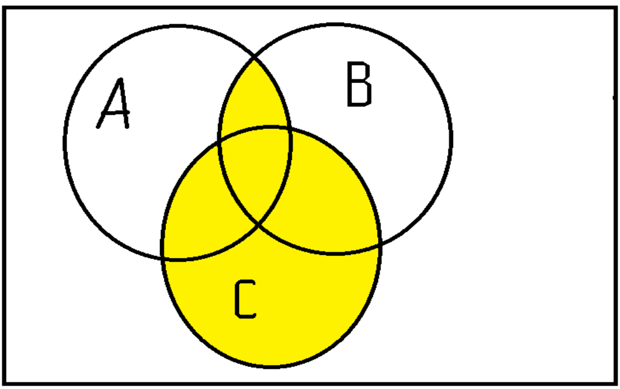
$(A \cup C)$

Рис. 1.3.6. б)



$(B \cup C)$

Рис. 1.3.6. в)



$(A \cup C) \cap (B \cup C)$

Рис. 1.3.6. г)

РОЗДІЛ ІІ. МІРИ МНОЖИН

§2.1. Поняття міри множин

Нехай S – деяка сукупність множин.

В разі, коли кожній множині A із сукупності S, тобто $A \in S$, поставлено в однозначну відповідність деяке число, тоді говорять, що на сукупності S, елементами якої є множини, задана дійсна функція $m(A),\ A \in S$, значеннями якої є дійсні числа.

Дійсну функцію $m(A),\ A \in S$, називають *мірою* множини A в разі, коли стосовно функції $m(A)$ задовільняються вимоги (аксіоми):

1_m) $m(A) \geq 0$, тобто значення функції $m(A)$ невід'ємні;

2_m) коли $A = \bigcup_{i=1}^{k} H_i,\ H_i \cap H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, $H_i \in S,\ H_j \in S$, тобто коли множина A подається як об'єднання деякої кількості її частин $H_i,\ i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, тоді $m(A) = \sum_{i=1}^{k} m(H_i)$, тобто міра множини A дорівнює сумі мір її частин $H_i,\ i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ (так звана властивість *адитивності* міри множини).

Зауважимо, що коли міра принаймні однієї з частин H_i виявиться невизначеною, тоді буде невизначена і міра множини A. Надалі будемо розглядати тільки такі множини, міри яких визначені. Такі множини називаються вимірними. Множини, міру яких визначити неможливо, називаються невимірними. Як відомо, невимірні множини існують, зокрема на числовій прямій.

Наприклад, коли фігура A складена із множин H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, які між собою не перетинаються, тобто попарні перетини множин H_i та H_j порожні, і таким чином множини H_i є частинами множини A, тоді в разі, коли вимірюється площа $S(A)$ множини A, така площа множини A буде дорівнювати сумі площ $S(H_i)$ складових H_i множини A, тобто $S(A) = S(H_1) + S(H_2) + S(H_3) + S(H_4) + S(H_5)$.

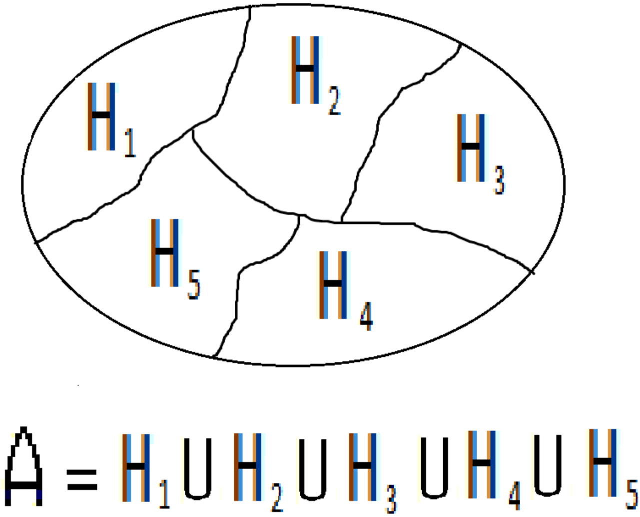


Рис. 2.1.1

Таким чином площа фігури A є її мірою, причому $m(A) = m(H_1) + m(H_2) + m(H_3) + m(H_4) + m(H_5)$ (Рис. 2.1.1).

Позначення міри множин можуть бути різні в залежності від природи об’єктів, що є елементами множин.

1. Довжина лінії між двома точками (Рис. 2.1.2)

   а) величина невід’ємна;

   б) коли лінію між двома точками поділити на частини, тоді сума довжин таких частин буде дорівнювати довжині всієї лінії. Таким чином обидві аксіоми 1_m), 2_m) стосовно міри множин задовільняються, а тому довжина лінії є мірою неперервної лінійної множини.

На Рис. 2.1.2 показана лінія між точками M_1 і M_5, складена із частин $M_1M_2,\ M_2M_3,\ M_3M_4,\ M_4M_5$. Зрозуміло, що довжина l такої лінії між точками M_1 і M_5 дорівнює сумі довжин її частин, тобто

$$l(M_1, M_5) = l(M_1, M_2) + l(M_2, M_3) + l(M_3, M_4) + l(M_4, M_5) .$$

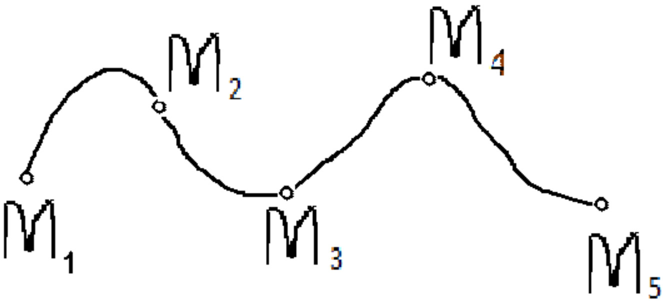


Рис. 2.1.2

2. Площа плоскої фігури:
   а) величина невід’ємна;
   б) коли фігуру поділити на частини, тоді сума площ таких частин дорівнюватиме площі всієї фігури.

Таким чином обидві аксіоми 1_m), 2_m) стосовно міри множин задовільняються, а тому площа плоскої фігури є мірою неперервної двохвимірної множини.

На Рис. 2.1.3 показано прямокутник $ABCD$, який поділено на два трикутники ABC та ACD. Зрозуміло, що $S(ABCD) = S(ABC) + S(ACD)$, де через $S(ABCD)$, $S(ABC)$, $S(ACD)$ позначено площі відповідних фігур.

Очевидно площа вимірної плоскої фігури (міру якої можливо визначити) є мірою.

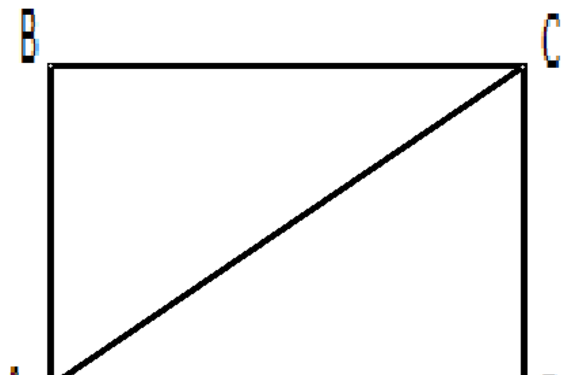


Рис. 2.1.3

Слід зауважити, що існують як одновимірні, так і многовимірні множини, міру яких визначити неможливо. Такі множини називаються невимірними.

Зауважимо, що в підручнику О.В. Погорєлова «Геометрія. Планіметрія. Підручник для 7-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів. 7-е видання. – Київ. Школяр. 2004», означення площі фігури практично дослівно співпадає з наведеним вище.

3. Об'єм просторового тіла:

а) величина невід'ємна;

б) коли тіло поділити на частини, тоді об'єм цілого тіла буде дорівнювати сумі об'ємів його частин.

На Рис. 2.1.4 показано прямий паралелепіпед $ABCDD_1A_1B_1C_1$, поділений на два многогранники $ABC\,C_1\,D_1\,A_1\,B_1$ і $ACDD_1$. В такому разі об'єм многогранника $V(ABCDD_1A_1B_1C_1)$ дорівнює сумі об'ємів $V(ABC\,C_1\,D_1\,A_1\,B_1)$ і $V(ACDD_1)$ многогранників відповідно $ABC\,C_1\,D_1\,A_1\,B_1$ і $ACDD_1$.

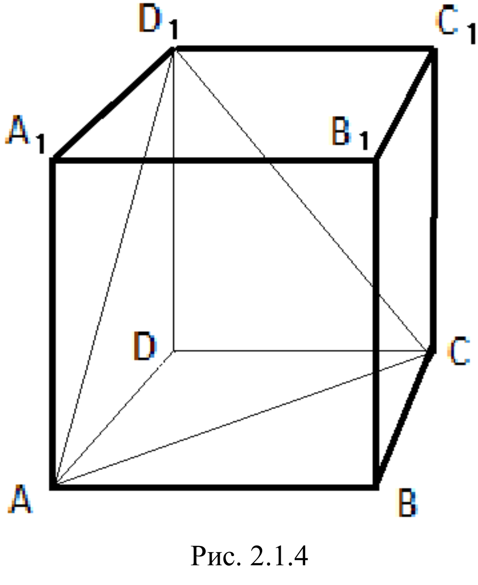


Рис. 2.1.4

Зрозуміло, що об'єм просторового тіла є мірою тривимірної просторової множини, оскільки, як і раніше, стосовно об’ємів тіл задовільняються аксіоми 1_m), 2_m) стосовно міри множин.

4. Кількість елементів в скінченній дискретній множині таких елементів є мірою вказаної множини, оскільки стосовно такої кількості елементів задовільняються аксіоми 1_m), 2_m) стосовно міри множин.

Наприклад загальна кількість 10 влучень в мішень (Рис. 2.1.5) дорівнює сумі кількостей влучень: в круг з міткою 5 – 2 влучення, кількості влучень в кільце з міткою 4 – 5 влучень, кількості влучень в кільце з міткою 3 – 2 влучення, кількості влучень в кільце з міткою 2 – 1 влучення, кількості влучень в поле з міткою 1 – 0 влучень.

Очевидно така кількість влучень в множину всіх точок мішені дорівнює сумі кількостей влучень в частини, на які поділено всю множину точок мішені, і стосовно кількості влучень в мішень задовільняються аксіоми 1_m), 2_m) стосовно міри множин, тобто кількість влучень в мішень є кількісною мірою множини всіх точок влучення в мішень.

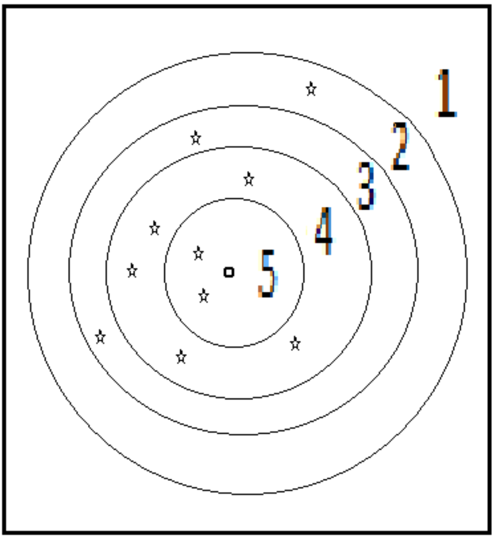


Рис. 2.1.5

5. Маса фізичного тіла:
   а) величина невід’ємна;

б) коли тіло поділити на частини, тоді сума мас таких частин буде дорівнювати масі всього тіла.

Таким чином маса фізичного тіла є його мірою.

6. Визначений інтеграл від невід'ємної функції $f(x) \geq 0, \; x \in [a;b]$:

а) величина невід'ємна;

б) коли проміжок інтегрування $[a;b]$ поділити на частини $[a_0;a_1), \; [a_1;a_2), \; [a_2;a_3), \ldots, [a_{k-1};a_k]$, де $a_0 = a, \; a_k = b$, тоді

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a_0}^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx + \int_{a_2}^{a_3} f(x)dx + \ldots + \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)dx.$$

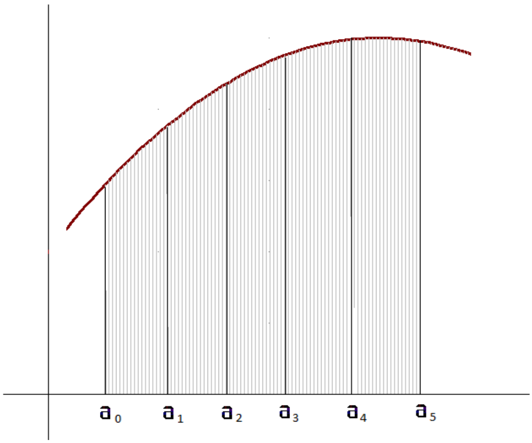


Рис. 2.1.6

Таким чином визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, $f(x) \geq 0$, є мірою множини точок під графіком функції $y = f(x)$ над відрізком $[a;b]$ (тобто площею криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = f(x), \; y = 0, \; x = a, \; x = b$ (Рис. 2.1.6)).

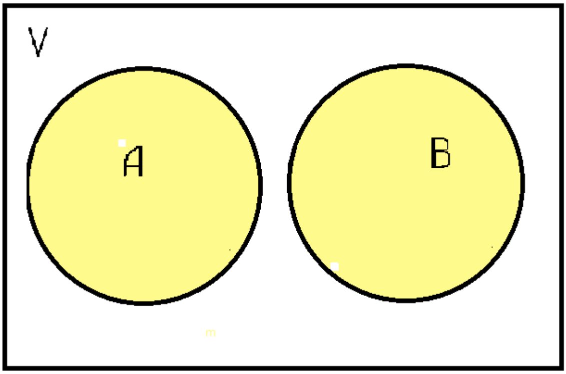
§2.2. Властивості мір множин

Нехай $m(A)$, $A \in S$, міра, задана на сукупності S множин деякої природи.

Тоді легко бачити, що стосовно функції $m(A)$, $A \in S$, яка є мірою, задовільняються властивості:

1. $m(A) \geq 0$;

2. Коли $A \bigcap B = \varnothing$, тоді $m(A \bigcup B) = m(A) + m(B)$, що слідує з властивостей міри 1_m, 2_m (Рис. 2.2.1).



$$m(A \bigcup B) = m(A) + m(B)$$

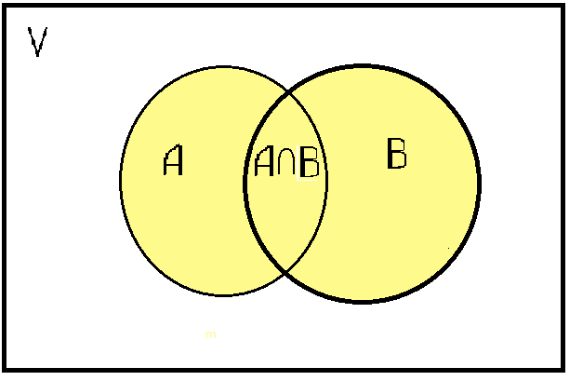
Рис. 2.2.1

3. $m(A \bigcup B) = m(A) + m(B) - m(A \bigcap B)$.

Справді, $A \bigcup B = A \bigcup (B \setminus AB)$, $A \bigcap (B \setminus AB) = \varnothing$, $B = AB \bigcup (B \setminus AB)$, $AB \bigcap (B \setminus AB) = \varnothing$, тоді за властивістю 2 (чи за аксіомою 2_m)

$$m(A \bigcup B) = m(A) + m(B \setminus AB),$$
$$m(B) = m(AB) + m(B \setminus AB),$$

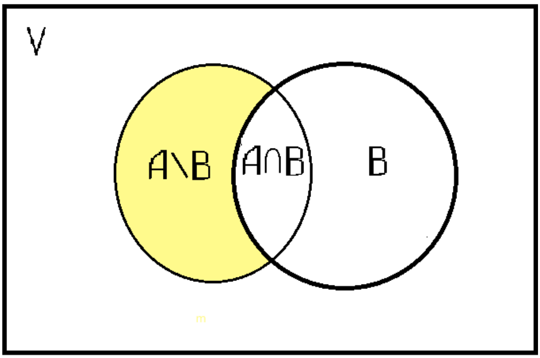
Звідки $m(B \setminus AB) = m(B) - m(AB)$, тому $m(A \bigcup B) = m(A) + m(B) - m(AB)$.



$$m(A\bigcup B)=m(A)+m(B)-m(AB)$$

Рис. 2.2.2

4. $m(A\setminus B)=m(A)-m(A\bigcap B)$,
звідки $m(A\bigcap B)=m(A)-m(A\setminus B)$.



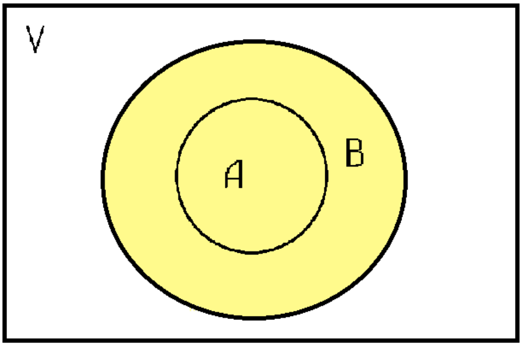
$$m(A\setminus B)=m(A)-m(A\bigcap B)$$

Рис. 2.2.3

5. $m(\varnothing)=0$. Справді $A\bigcup\varnothing=A$, $A\bigcap\varnothing=\varnothing$, тому за властивістю 2 $m(A)=m(A+\varnothing)=m(A)+m(\varnothing)$, звідки $m(\varnothing)=0$.

6. Коли $A\subset B$, тоді $m(A)\le m(B)$. Справді, коли $A\subset B$, тоді $B=A\bigcup(\bar{A}\bigcap B)$, $A\bigcap(\bar{A}\bigcap B)=\varnothing$, тому за властивістю 2

одержуємо $m(B) = m(A) + m(\overline{A} \cap B) \geq m(A)$, оскільки $m(\overline{A} \cap B) \geq 0$ (за аксіомою 1_m стосовно міри множин).

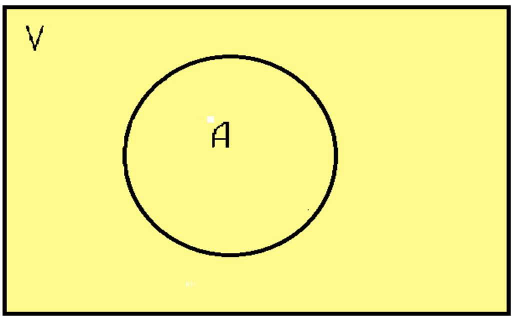


$A \subset B$, $m(A) \leq m(B)$

Рис. 2.2.4

7. В разі, коли $A \subset V$, то оскільки $m(A) \geq 0$, $m(V) \geq 0$, $m(A) \leq m(V)$, функція $\mu(A) = \dfrac{m(A)}{m(V)}$ є також міра, стосовно якої окрім вимог 1_m, 2_m задовільняється також вимога 3:

$$\mu(A) = \frac{m(A)}{m(V)} \leq 1.$$



$$\mu(A) = \frac{m(A)}{m(V)} \leq \frac{m(V)}{m(V)} = 1$$

Рис. 2.2.5

Таку міру $\mu(A)$ називають нормованою мірою множини A відносно міри множини V .

Очевидно $\mu(V)=\frac{m(V)}{m(V)}=1$.

РОЗДІЛ ІІІ. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

§3.1. Стохастичні випробування. Простір елементарних подій

Для з’ясування сутності проявів різноманітних явищ і перебігу процесів люди часто проводять відповідним чином організовані спостереження чи випробування. Разом з тим точні наслідки кожного окремого з таких випробувань іноді передбачити неможливо, хоч часто множину таких наслідків вдається більш або менш точно визначити.

Випробування, точні наслідки кожного з яких передбачити неможливо, називають стохастичними або випробуваннями з непередбачуваними випадковими наслідками.

Множину Ω всіх можливих наслідків кожного такого випробування називають *простором елементарних подій*, а елементи простору Ω елементарних подій називають елементарними подіями. Слід наголосити, що результатом кожного окремого випробування є один єдиний наслідок – відбувається одна єдина елементарна подія $E \in \Omega$ із множини Ω всіх можливих наслідків випробування. Таким чином в результаті кожного випробування із множини Ω немов би вибирається один єдиний елемент $E \in \Omega$ – відбувається елементарна подія E.

Приклад 3.1.1. Із 15 кульок (Рис. 3.1.1) з нанесеними на них номерами від 1 до 15, на кожній кульці один номер, навмання, незалежно від спостерігача, вибирається одна за однією 5 кульок. Кульки знаходяться в непрозорій коробці і перед діставанням кожної кульки в коробці кульки ретельно перемішуються за рахунок перевертання коробки в різних напрямках. В такому разі неможливо наперед гарантовано вказати, які саме 5 кульок будуть вибрані, хоч множину Ω всіх наслідків такого випробування, тобто множину всіх можливих невпорядкованих наборів із п’яти кульок кожен, які вибираються із заданих 15 кульок, можна вказати. Таких наборів, як легко бачити, буде $C_{15}^{5} = \dfrac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 429$.

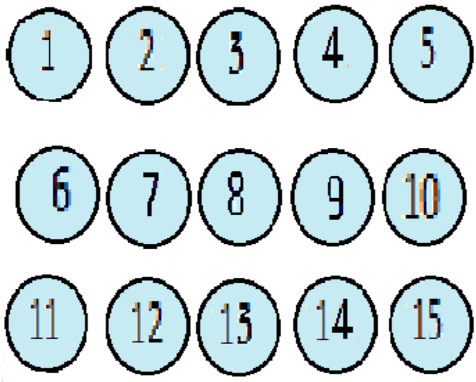


Рис. 3.1.1

Приклад 3.1.2. Грані кубика пофарбовані в різні кольори – одна грань біла, дві грані червоні, три грані зелені (Рис. 3.1.2). Випробування полягає в підкидання кубика і фіксації кольору на грані, яка виявиться верхньою. Тоді множина Ω можливих наслідків такого випробування складається із трьох елементарних подій: $\Omega = \{біла,\ зелена,\ червона\}$. Разом з тим якого саме кольору виявиться верхня грань після підкидання кубика, сказати неможливо.

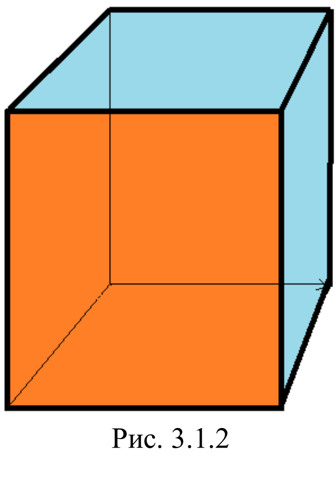


Рис. 3.1.2

Приклад 3.1.3. Всі грані кубика пофарбовано в червоний колір (Рис. 3.1.3). Випробування полягає в підкиданні кубика і фіксації кольору грані, яка виявиться верхньою. В такому разі в множині Ω буде один єдиний елемент – $\Omega = \{\ червоний\ \}$. В такому випробуванні можливий один єдиний наслідок – колір грані, яка виявиться верхньою після підкидання кубика, червоний.

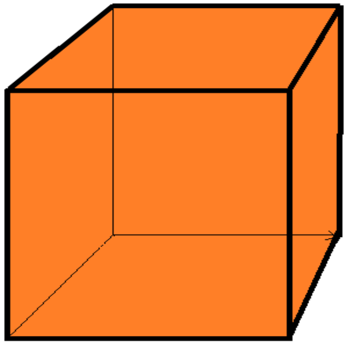


Рис. 3.1.3

Приклад 3.1.4. В квадратну мішень (Рис. 3.1.4) розмірами $1_м \times 1_м$ виконується постріл з лука. Випробування налаштовано так, що влучення за межі мішені неможливе. Тоді множиною можливих наслідків такого випробування є множина точок $(x,\ y)$, де $x \in [0;1]$, $y \in [0;1]$ – координати точок влучення: x – абсциса точки влучення, y – ордината, тобто $\Omega = \{(x,\ y) |\ \ x \in [0;1],\ \ y \in [0;1]\}$. Останній запис слід читати так: множина Ω є множиною всеможливих пар чисел x і y, тобто пар $(x,\ y)$ таких, що x є числом із проміжка $[0;1]$ і y є числом із проміжка $[0;1]$. Таку множину пар $(x,\ y)$, що $x \in [0;1]$, $y \in [0;1]$, називають також декартовим добутком множин $[0;1]$ і $[0;1]$ і позначають такий добуток через $[0;1] \times [0;1]$.

В останньому прикладі множина Ω можливих наслідків випробування є двохвимірною неперервною обмеженою множиною.

Надалі будемо вважати, що випробування полягає в тому, що із деякої множини елементів навмання, незалежно від спостерігача, вибирається один єдиний елемент. Такий вибір елемента ототожнюється з відбуванням відповідної елементарної події, яка полягає в тому, що вибрано саме цей елемент.

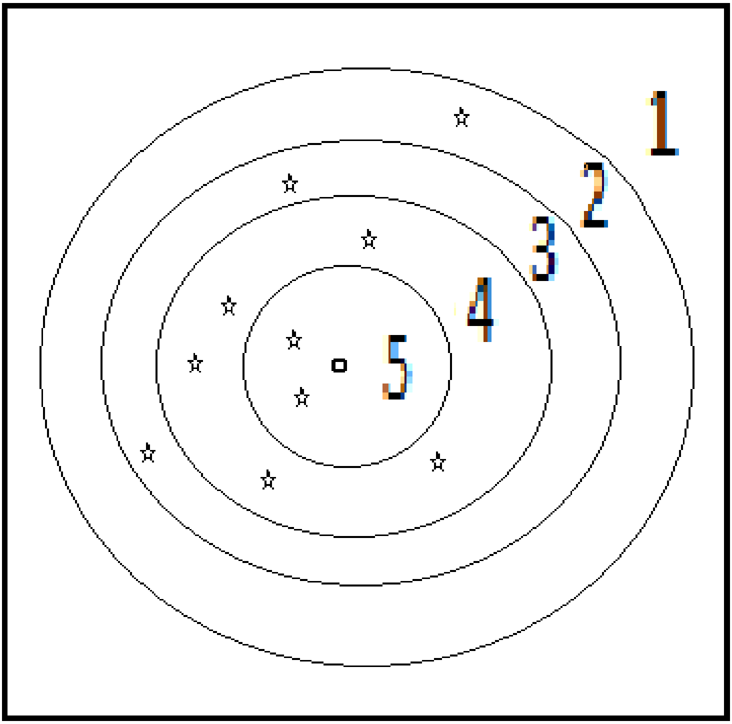


Рис. 3.1.4

Таким чином в результаті кожного випробування обов'язково відбувається якась окрема елементарна подія E із множини Ω можливих елементарних подій – тобто із множини можливих наслідків випробування.

Поняття елементарної події та простору елементарних подій належать до основних понять теорії ймовірностей і не означаються через простіші поняття подібно до того, як в теорії множин до основних понять відносять поняття елемента множини та множини, в геометрії – поняття точки та площини і т. ін.

§3.2. Поняття випадкової події

Нехай проводяться деякі випробування із множиною можливих наслідків Ω, в результаті кожного з яких відбувається певна елементарна подія $E \in \Omega$.

Деяку (не будь яку) підмножину A множини Ω називають випадковою подією (або просто подією).

Говорять, що в результаті випробування відбулася подія A, якщо за такого випробування із множини Ω вибрано елемент E такий, що $E \in A$.

Оскільки за кожного випробування $E \in \Omega$, то подія $A = \Omega$ завжди відбувається. Тому таку подію $A = \Omega$ називають *вірогідною*.

Разом з тим в разі, коли $A = \varnothing$, то така подія ніколи не відбувається, оскільки за будь якого випробування $E \,\bar{\in}\, \varnothing$, бо в порожній множині $\varnothing$ немає жодного елемента E із Ω. Тому подію $A = \varnothing$ називають *неможливою*.

Множини Ω і $\varnothing$ завжди вважаються подіями на відміну від інших підмножин множини Ω.

Приклад 3.2.1. Із лука виконується постріл в квадратну мішень, причому вправи облаштовано так, що влучення стрілою за межі мішені неможливе (Рис. 3.2.1). Нехай подія A полягає в тому, що точка влучення буде віддалена від центра мішені не більше, ніж на 0.25. Якщо після пострілу точка влучення буде віддалена від центра мішені не більше, ніж на 0.1, тоді подія A відбудеться. Якщо точка влучення буде віддалена від центра мішені більше ніж на 0.25, тоді подія A не відбудеться, однак відбудеться подія, що визначається за множиною $\Omega \setminus A$, яка називається подією, протилежного до події A, і позначається через $\bar{A}$.

Нехай підмножини A і B множини Ω є подіями. В разі, коли $A \subset B$, тобто кожен елемент множини A є також елементом множини B, тоді з відбуванням події, тобто коли $E \in A$, відбувається і подія B, оскільки $E \in A \subset B$, тобто $E \in B$. В такому разі говорять, що через подію A спричинюється подія B.

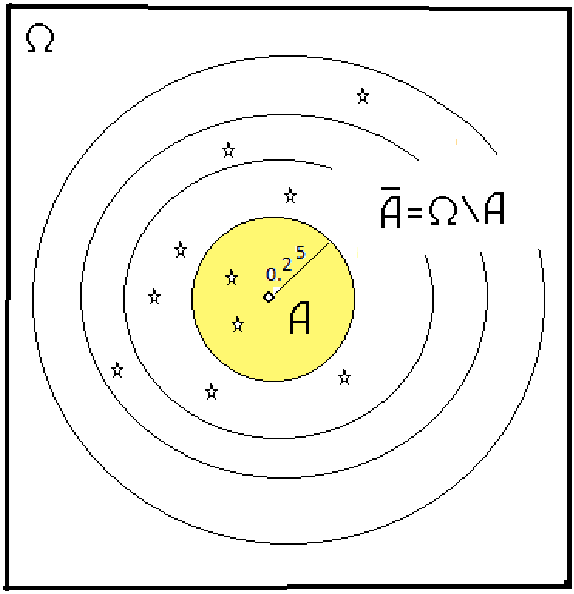


Рис. 3.2.1

В разі, коли виявляється, що $A \subset B$ і водночас $B \subset A$, тобто через подію A спричинюється подія B і водночас через подію B спричинюється подія A, тоді події A і B називаються рівними одна одній і пишуть $A = B$.

Приклад 3.2.2. Випробування полягає в підкиданні кубика, на гранях якого нанесені цифри 1, 2, 3, 4, 5, 6, тобто $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Нехай подія A полягає в тому, що на верхній грані кубика після його підкидання виявиться просте число, тобто $A = \{1, 2, 3, 5\}$, а подія B полягає в тому, що на верхній грані кубика число буде непарне, більше за 1 (див. Рис. 3.2.2). Тоді оскільки з відбуванням події B відбувається і подія A, то в даному разі через подію B спричинюється подія A, бо $B \subset A$, однак не навпаки.

Очевидно за будь яких подій A, B, C правильними є співвідношення:

1. $A \subset A$; $A \subset \Omega$; $\varnothing \subset A$;
2. В разі, коли $A \subset B$ і $B \subset C$, тоді $A \subset C$ (див. Рис. 3.2.3);
3. В разі, коли $A = B$, тоді і $B = A$;

4. В разі, коли $A = B$, а $B = C$, тоді і $A = C$.

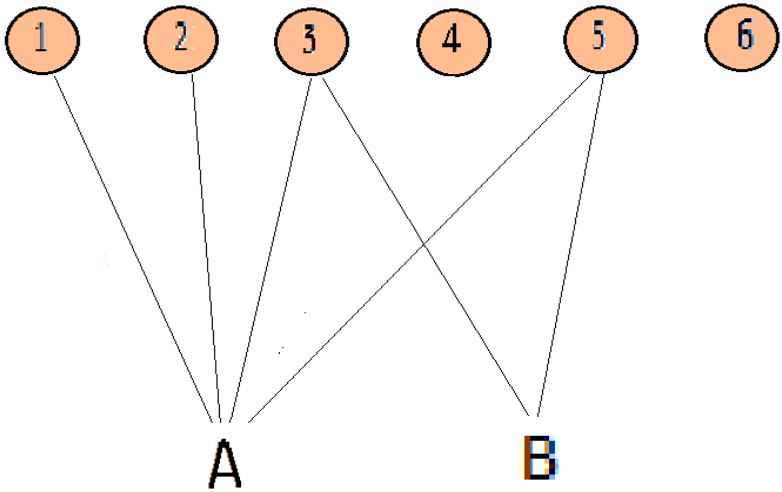


Рис. 3.2.2

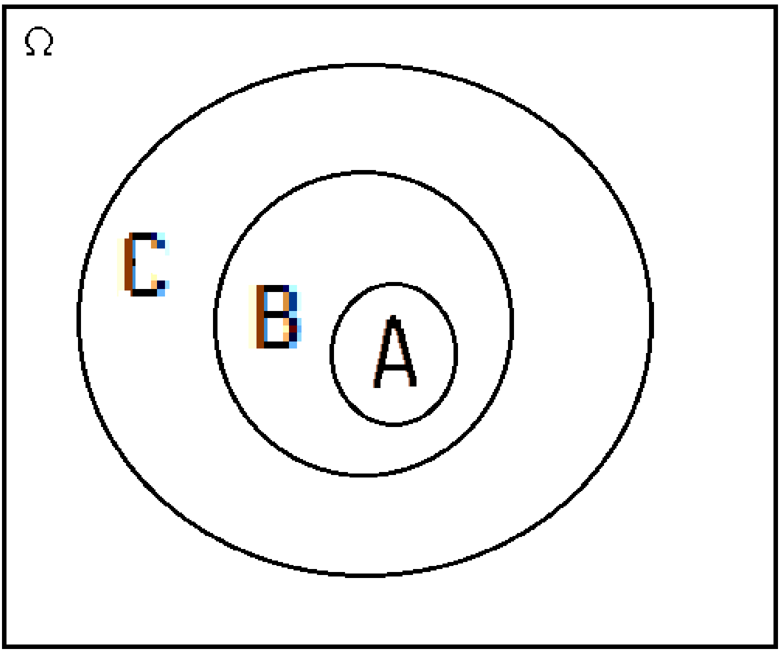


Рис. 3.2.3

§3.3. Операції над подіями

Оскільки події – це деякі множини (підмножини множини Ω), то над подіями можна ввести такі самі операції, як і над множинами (див. §1.2).

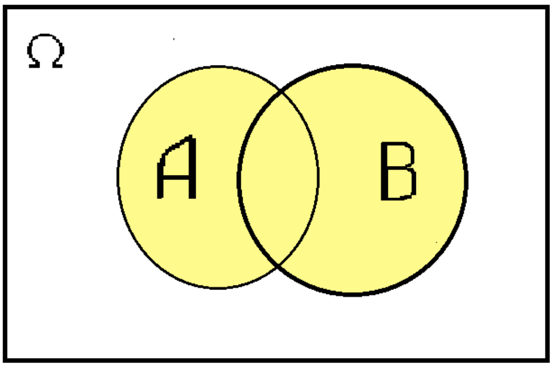
Разом з тим об'єднання множин $A \subset \Omega$ і $B \subset \Omega$ називають *сумою* відповідних подій A і B, яку позначають символами $A+B$ (замість $A \cup B$), перетин множин $A \subset \Omega$ і $B \subset \Omega$ називають *добутком* відповідних подій A і B, який позначають символами $A \cdot B$ (замість $A \cap B$). Однак сутність і зміст операцій залишаються такі самі, як і у випадку, коли мова йшла про операції над множинами (див. §1.2).

Розглянемо дещо детальніше сутність операцій над подіями та їх назви і позначення.

Нехай $A \subset \Omega$ і $B \subset \Omega$ деякі події.

Означення. Сумою подій A і B називають таку подію C, яка відбувається, коли відбувається принаймні одна з подій A або B.

В теоретико-множинному тлумаченні сумі подій A і B відповідає об'єднання відповідних множин (див. Рис. 3.3.1).



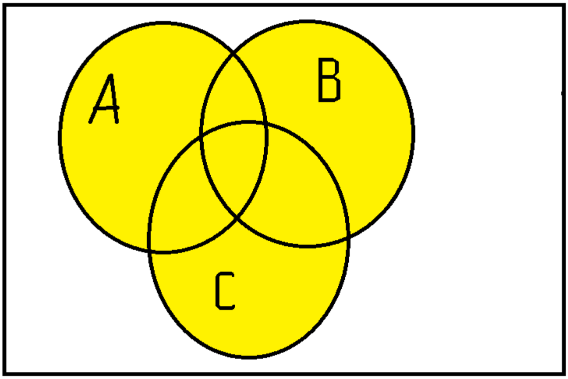
$A+B$

Рис. 3.3.1

Означення. Сумою n подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називається така подія C, яка відбувається, коли відбувається принаймні одна із подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Суму n подій позначають символами $\sum_{k=1}^{n} A_k$

, що означає $A_1 + A_2 + ... + A_n$, а також символами $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$, що означає $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$.

На Рис. 3.3.2 подано зображення суми трьох доданків A, B, C.



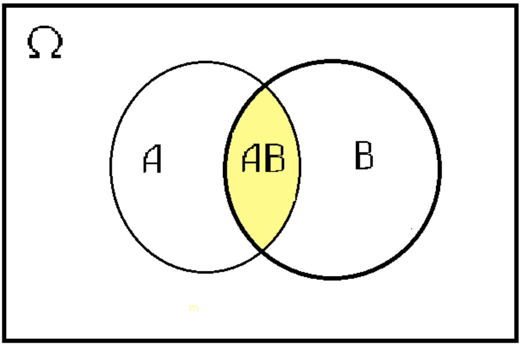
$A+B+C$

Рис. 3.3.2

Означення. Добутком подій A і B називається така подія C, яка відбувається, коли відбуваються обидві події за одного і того самого випробування.

Добуток подій A і B позначають символами $A \cdot B$, або $A \cap B$, або просто AB.

В теоретико-множинному тлумаченні добуткові подій A і B відповідає перетин відповідних множин (Рис. 3.3.3).

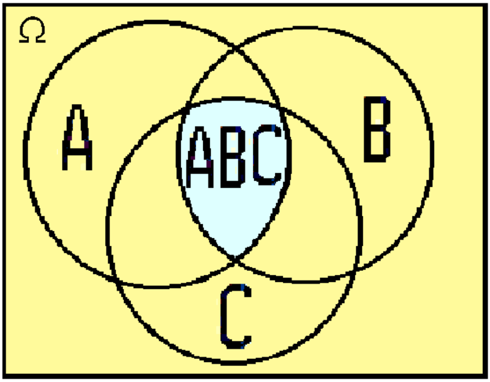


$A \cdot B$

Рис. 3.3.3

Означення. Добутком n подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називається така подія C, яка відбувається, коли відбуваються всі події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ за одного і того самого випробування. Добуток n подій позначають символами $\prod_{k=1}^{n} A_k$, що означає $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$, або символами $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$, що означає $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$.

На Рис. 3.3.4 подано зображення добутку трьох подій A, B, C.



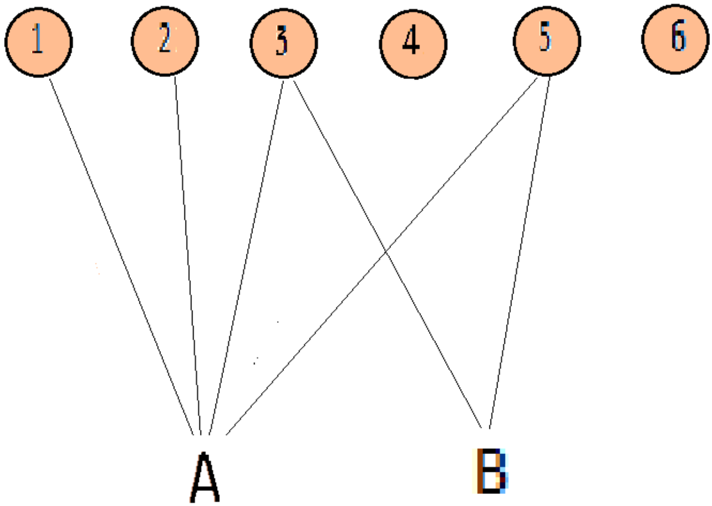
$A \cdot B \cdot C$

Рис. 3.3.4

Приклад 3.3.1. В разі, коли $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{3, 5\}$ (див. приклад 3.2.2 та Рис. 3.3.5), тоді $A + B = \{1, 2, 3, 5\}$, $AB = \{3, 5\}$.

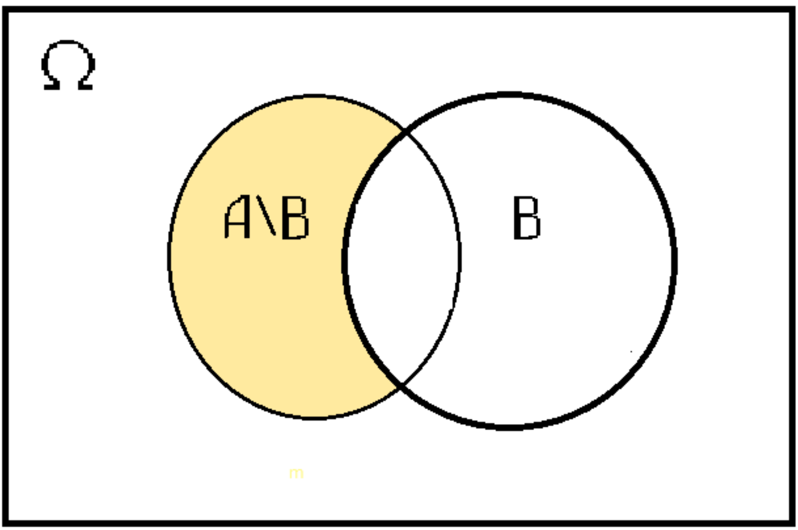
Означення. Різницею подій A і B називається така подія C, яка відбувається, коли відбувається подія A і не відбувається подія B.

Різницею подій A і B позначають символами $A - B$ або $A \setminus B$. В теоретико-множинному тлумаченні різниці подій A і B відповідає різниця відповідних множин (див. Рис. 3.3.6).



$B \subset A$

Рис. 3.3.5



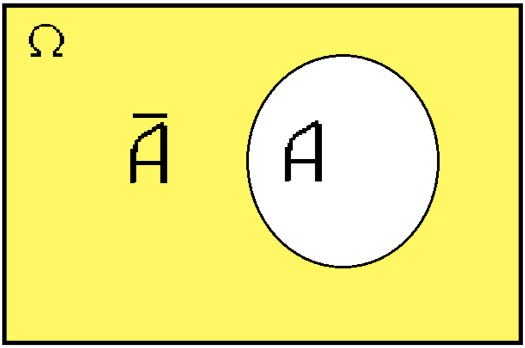
$A - B$

Рис. 3.3.6

Приклад 3.3.2. Якщо Ω, A, B із прикладу 3.3.1, тоді $A \setminus B = \{1, 2\}$, $B \setminus A = \varnothing$.

Означення. Подією, протилежною до події A, називається подія $\Omega - A$, яка відбувається, коли не відбувається A, і не відбувається, коли відбувається A.

Подію, протилежну до події A, позначають символами $\overline{A}$ (див. Рис. 3.3.7).



$$\overline{A} = \Omega - A$$

Рис. 3.3.7

Зрозуміло, що $A + \overline{A} = \Omega$, $A \cdot \overline{A} = \varnothing$.

Приклад 3.3.3. Якщо Ω, A, B із прикладу 3.3.1, тоді $\overline{\Omega} = \varnothing$, $\overline{A} = \{4, 6\}$, $\overline{B} = \{1, 2, 4, 6\}$.

Означення. Події A і B називаються несумісними, коли $A \cdot B = \varnothing$, тобто коли відбування обох подій A і B в одному і тому самому випробуванні неможливе.

Приклад 3.3.4. Події $A - B$ і $A \cdot B$ несумісні, тобто $(A - B) \cdot (A \cdot B) = \varnothing$ (див. Рис. 3.3.6, Рис. 3.3.3).

§3.4. Властивості операцій над подіями

Оскільки події – множини, стосовно операцій над подіями задовільняються такі самі властивості, як і стосовно операцій над множинами (див. §1.3).

Тому подамо перелік властивостей стосовно операцій над подіями, наведений в §1.3, використовуючи разом з тим позначення, введені стосовно операцій над подіями:

1. $\overline{\overline{A}} = A$ – закон подвійного заперечення.
2. $A + B = B + A$ – переставний закон додавання.
3. $A \cdot B = B \cdot A$ – переставний закон множення.
4. $(A+B)+C = A+(B+C)$ – сполучний закон додавання.
5. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ – сполучний закон множення.
6. $(A+B)C = AC + BC$ – перший розподільний закон.
7. $(A \cdot B)+C = (A+C)\cdot(B+C)$ – другий розподільний закон .
8. $A + A = A$.
9. $A \cdot A = A$.
10. $A + \overline{A} = \Omega$.
11. $A \cdot \overline{A} = \varnothing$.
12. $A + \Omega = \Omega$.
13. $A \cdot \Omega = A$.
14. $A + \varnothing = A$.
15. $A \cdot \varnothing = \varnothing$.
16. $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ – перший закон двоїстості.
17. $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ – другий закон двоїстості.

Закони двоїстості 16 та 17 називають правилами де Моргана.

Приклад 3.4.1. За будь яких подій $A \subset \Omega$ і $B \subset \Omega$ правильні співвідношення:

а) $AB \subset A$, $AB \subset B$, тому $\varnothing = \varnothing \cdot A \subset A$, $\varnothing = \varnothing \cdot B \subset B$;
б) $A \subset A + B$, $B \subset A + B$;
в) коли $A \subset C$ і $B \subset C$, тоді і $A + B \subset C$;
г) коли $C \subset A$ і $C \subset B$, тоді $C \subset A \cdot B$;
д) коли $A \subset B$, тоді $A + B = B$, $(A+B) - A = B - A$;
е) коли $A + B = A$, тоді $B \subset A$;
ж) коли $A \subset B$, тоді $AB = A$.

§3.5. Простір подій. Уточнення поняття випадкової події

В §3.2. сказано, що випадковою подією називається деяка (не будь яка) підмножина A множини Ω елементарних подій.

Після того, коли введені операції над подіями, можна дещо уточнити, які саме підмножини простору Ω елементарних подій можна розглядати як події.

Нехай задано простір Ω елементарних подій, пов'язаний з деякими випробуванням, а S – деяка (не будь яка) сукупність підмножини множини Ω, стосовно якої задовільняються вимоги:

1_s) $\Omega \in S$;

2_s) коли $A \in S$, тоді і $\overline{A} \in S$;

3_s) коли $A_i \in S$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, тоді і $\sum\limits_{i \in I} A_i \in S$, де $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$ – довільна непорожня підмножина множини індексів $\{1, 2, \dots, n\}$.

Тоді кожну підмножину A множини Ω елементарних подій, віднесену до сукупності S, називають випадковою подією або просто подією. Саму сукупність S підмножин множини Ω, стосовно якої задовільняються вимоги $1_s - 3_s$, називають простором подій, пов'язаним з даним простором Ω елементарних подій.

Зауважимо, що оскільки $\Omega \in S$, і $\varnothing = \overline{\Omega}$, то згідно з вимогою 2_s $\varnothing = \overline{\Omega} \in S$, тобто Ω і $\varnothing$ завжди вважаються подіями, які називаються відповідно: Ω – вірогідна подія, $\varnothing$ – неможлива подія.

Коли $A \in S$ і $B \in S$, тоді згідно з вимогою 3_s $A + B \in S$, а тому згідно з вимогою 2_s $\overline{A + B} \in S$. Оскільки за законами двоїстості (див. §3.4.) $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$, то $\overline{A} \cdot \overline{B} \in S$. Оскільки $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B} \in S$, то $\overline{AB} \in S$ (з врахуванням закону подвійного заперечення, див. §3.4.)

Оскільки $A - B = A \cdot \overline{B}$, то $A - B \in S$, бо за попереднім $A \in S$, $B \in S$, $\overline{B} \in S$, $A \cdot \overline{B} \in S$.

Таким чином в разі виконання довільних операцій над подіями (підмножинами множини Ω, віднесеними до простору S) в результаті одержуються нові множини, які також є елементами простору S, тобто подіями.

Приклад 3.5.1. Нехай задано деякий простір Ω елементарних подій. Тоді стосовно сукупності $S = \{\varnothing, \Omega\}$ задовільняються вимоги $1_s - 3_s$, а тому така сукупність $S = \{\varnothing, \Omega\}$, до якої віднесено лише 2 елементи $\varnothing$ і Ω, буде простором подій. Такий простір подій називають найбіднішим (найвужчим).

Іноді найбідніший простір подій $\{\varnothing, \Omega\}$ позначають символами S_*.

Приклад 3.5.2. Нехай задано простір Ω елементарних подій і деяку підмножину $A \subset \Omega$.

Тоді стосовно сукупності S підмножин множини Ω:

$$S = \{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\}$$

задовільняються вимоги $1_s - 3_s$, а тому така сукупність S підмножин множини Ω може бути простором подій.

Такий простір подій S називають породженим за поділом множини Ω на дві підмножини A і $\overline{A}$, $\Omega = A + \overline{A}$.

Приклад 3.5.3. Нехай простір елементарних подій Ω поділено на деяку кількість підмножин $H_1, H_2, \ldots, H_k$ таких, що $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, тобто в різних підмножинах H_i і H_j немає спільних точок, і крім того $H_1 + H_2 + \ldots + H_k = \Omega$.

Тоді стосовно сукупності

$$S = \{A \mid A = \sum_{i \in I} H_i,\ I \subset \{1, 2, \ldots, k\}\},$$

елементами якої є всеможливі суми (об'єднання) множин H_i із одного доданку, із двох доданків, із трьох доданків, і т.д., із всіх k доданків разом з порожньою множиною $\varnothing$ (коли $I = \varnothing$), будуть задовільнятися вимоги $1_s - 3_s$, тобто така сукупність S може бути простором подій.

Так утворену із всеможливих об'єднань підмножин H_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, таких, що $\sum_{i=1}^{k} H_i = \Omega$, $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, разом з порожньою множиною $\varnothing$ сукупність S підмножин множини Ω називають *простором подій, породженим за поділом множини елементарних подій* Ω *на попарно несумісні події (підмножини)* H_i.

Приклад 3.5.4. За заданим простором елементарних подій Ω до сукупності S відносяться всеможливі підмножини множини Ω разом з порожньою множиною $\varnothing$ і самою множиною Ω. Очевидно, стосовно такої сукупності S задовільняються вимоги $1_s - 3_s$. В такому разі будь які підмножини множини Ω вважаються подіями.

Сукупність S, до якої разом з порожньою множиною входять всеможливі підмножини множини Ω, називається найбагатшим (найширшим) простором подій, пов'язаним з даним простором елементарних подій Ω. Таку сукупність подій іноді позначають символами S^*.

Нагадаємо, що порожня множина $\varnothing$ вважається підмножиною будь якої множини $A \subset \Omega$, тобто $\varnothing \subset \Omega$, хоч разом з тим $\varnothing = \overline{\Omega}$.

Приклад 3.5.5. Нехай випробування полягає в підкиданні кубика, можливими наслідками якого є випадання на грані, якою кубик випаде догори, одного з чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, тобто $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Тоді, в разі, коли Ω подати як об'єднання двох підмножин $H_1 = \{1, 3, 5\}$, $H_2 = \{2, 4, 6\}$, можна утворити простір подій $S = \{\varnothing, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$. Очевидно стосовно наведеної сукупності S підмножин множини Ω задовільняються вимоги $1_s - 3_s$, тобто наведена сукупність S може бути простором подій.

В разі, коли множину Ω поділено на три підмножини $H_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $H_2 = \{5\}$, $H_3 = \{6\}$, тоді можна утворити простір подій

$S = \{\varnothing, \{1, 2, 3, 4\}, \{5\}, \{6\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 6\}, \{5, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$,

або інший простір подій $S = \{\varnothing, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \{6\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$,

або $S = \{\varnothing, \{1, 2, 3, 4, 6\}, \{5\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$,

або $S = \{\varnothing, \{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$.

Подібних прикладів можна навести достатньо велику кількість.

Приклад 3.5.6. Якщо Ω – множина точок на числовій осі, тобто $\Omega = (-\infty; \infty)$, а до сукупності S разом з порожньою множиною відносяться всеможливі відкриті, замкнені, напіввідкриті відрізки виду $(a; b)$, $[a; b]$, $[a; b)$, $(a; b]$,

$a \in (-\infty;\infty)$, $b \in (-\infty;\infty)$, $a \leq b$, та їх всеможливі об'єднання, перетини, різниці в довільній кількості, тоді стосовно такої сукупності S задовільнятимуться вимоги $1_s - 3_s$, а тому така сукупність S може бути простором подій. Елементи (множини) такої сукупності S називають борелівськими множинами (за ім'ям французького математика Еміля Бореля (1871 – 1956), який досліджував такі сукупності множин). Саму сукупність S борелівських множин на числовій прямій позначають як $\mathscr{B}(R^1)$, тобто в такому разі $S = \mathscr{B}(R^1)$. Виявляється, що будь які відкриті множини (складені з відкритих інтервалів) є борелівськими, будь які замкнені множини (як доповнення відкритих до $R^1 = (-\infty; \infty)$) є борелівськими, будь які скінченні множини із R^1, зокрема одноточкові, є борелівськими.

РОЗДІЛ IV. ЙМОВІРНІСНІ МІРИ

§4.1. Статистична ймовірність випадкової події

Нехай задано деякий простір Ω елементарних подій, і проводяться випробування, в кожному з яких із множини Ω навмання, незалежно від спостерігача, вибирається один елемент $E \in \Omega$, тобто в кожному випробуванні відбувається якась одна елементарна подія E із множини Ω всіх можливих елементарних подій.

Нехай n – кількість всіх проведених випробувань. Таке число n є кількісною мірою множини Ω, оскільки коли множину Ω поділити на частини $H_1, H_2, \ldots, H_k$ такі, що $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, $\bigcup\limits_{i=1}^{k} H_i = \Omega$, тоді буде $n = m(\Omega) = m(\bigcup\limits_{i=1}^{k} H_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} m(H_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i$, де $n_i = m(H_i)$ – кількісні міри множин H_i, тобто кількість елементарних подій E, які були вибрані із кожної множини H_i в даних n випробуваннях. Число n називають також *абсолютною частотою відбування* вірогідної події Ω і позначають $k_n(\Omega)$. Зрозуміло, що вірогідна подія Ω відбувається за кожного випробування.

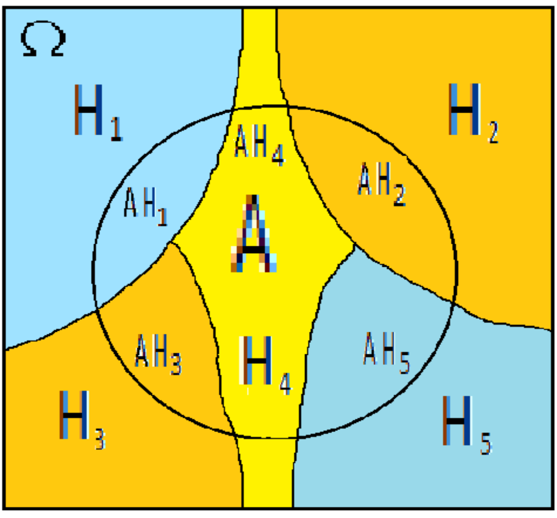


Рис. 4.1.1

Нехай A – деяка підмножина множини Ω, тобто подія із деякої сукупності S подій (див. §3.5), і нехай r – кількість випробувань серед n проведених, за яких виявилось $E \in A$, тобто за яких виявилось, що подія A відбулася.

В такому разі r є кількісною мірою попадання в множину A, тобто кількісною мірою числа відбувань події A, яку називають також *абсолютною частотою* відбування події A в n проведених випробуваннях, яку позначають також через $k_n(A)$.

Таким чином $r = m(A) = k_n(A)$.

Очевидно

$$m(A) = k_n(A) = k_n(A \cdot \Omega) = k_n(A(\bigcup_{i=1}^{k} AH_i) = \sum_{i=1}^{k} k_n(AH_i) = \sum_{i=1}^{k} m(AH_i).$$

Нормовану кількісну міру відбування події A в n проведених випробуваннях відносно кількісної міри відбування події Ω, тобто число $k_n(A)/k_n(\Omega) = r/n$, називають відносною частотою відбування події A в n проведених випробуваннях або статистичною ймовірністю події A за результатами n випробувань, яку позначатимемо через $P_n^*(A)$. Таким чином

$$P_n^*(A) = \frac{k_n(A)}{k_n(\Omega)}.$$

Число $P_n^*(A)$ називають також ймовірнісною мірою події A.

Очевидно, стосовно статистичної ймовірності (ймовірнісної міри) $P_n^*(A)$ події A задовільняються вимоги (аксіоми стосовно ймовірнісної міри):

1_p. $P_n^*(A) \geq 0$ за довільного $A \subset \Omega$.

2_p. В разі, коли $A_i \subset \Omega,\ i \in 1, 2, \ldots, k$, є подіями (елементами деякого простору S подій) і $A_i A_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, тоді $P_n^*(\sum_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} P_n^*(A_i)$ – так звана властивість аддитивності ймовірнісної міри. Зокрема стосовно двох подій $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$, таких, що $AB = \varnothing$, одержимо $P_n^*(A+B) = P_n^*(A) + P_n^*(B)$.

3_p. $P_n^*(\Omega) = 1$.

Властивості $1_p - 3_p$ називають основними. З них випливають всі інші властивості статистичної ймовірності (і ймовірнісної міри).

4. $P_n^*(\overline{A}) = 1 - P_n^*(A)$.

Справді, оскільки $A + \overline{A} = \Omega$, то за властивістю 3_p $P_n^*(A + \overline{A}) = 1$. Оскільки $A \cdot \overline{A} = \varnothing$, то за властивістю 2_p $P_n^*(A + \overline{A}) = P_n^*(A) + P_n^*(\overline{A})$. Таким чином $P_n^*(A) + P_n^*(\overline{A}) = 1$, звідки $P_n^*(\overline{A}) = 1 - P_n^*(A)$.

5. $P_n^*(\varnothing) = 0$.

Справді, $\varnothing = \overline{\Omega}$. Тому за властивістю 4 $P_n^*(\varnothing) = P_n^*(\overline{\Omega}) = 1 - P_n^*(\Omega)$. Оскільки за властивістю 3_p $P_n^*(\Omega) = 1$, то $P_n^*(\varnothing) = 1 - P_n^*(\Omega) = 0$.

6. Коли через подію A спричинюється подія B, тобто $A \subset B$, то $P_n^*(A) \le P_n^*(B)$.

Справді, коли $A \subset B$, тоді $B = A + \overline{A}B$.

Оскільки $A \cdot \overline{A}B = \varnothing$, то за властивістю 2_p $P_n^*(B) = P_n^*(A) + P_n^*(\overline{A}B)$.

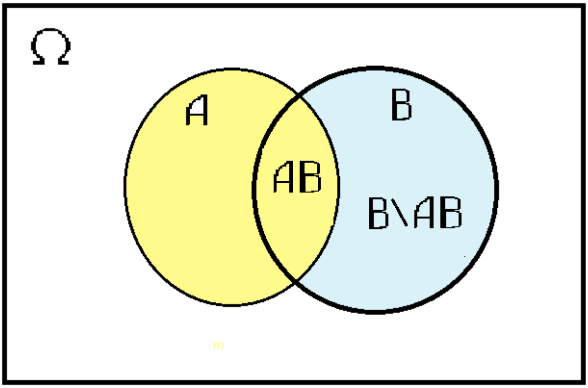
Оскільки за властивістю 1_p $P_n^*(\overline{A}B) \ge 0$, то $P_n^*(B) \ge P_n^*(A)$.

7. За довільних подій $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$

$$P_n^*(A + B) = P_n^*(A) + P_n^*(B) - P_n^*(AB).$$

Справді, нехай A і B – події, тобто елементи деякого простору S подій. Тоді суму $A + B$ можна подати як суму двох несумісних подій A і $(B \setminus AB)$ (див. Рис. 4.1.2).

Подію B також можна подати як суму двох несумісних подій AB і $(B \setminus AB)$, тобто $A + B = A + (B \setminus AB)$, $B = AB + (B \setminus AB)$.



$A+(B\setminus AB)$

Рис. 4.1.2

За властивістю 2_p одержуємо

$$P_n^*(A+B)=P_n^*(A)+P_n^*(B\setminus AB),$$

$$P_n^*(B)=P_n^*(AB)+P_n^*(B\setminus AB).$$

З останньої рівності одержуємо

$$P_n^*(B\setminus AB)=P_n^*(B)-P_n^*(AB).$$

Підставляючи одержаний вираз стосовно $P_n^*(B\setminus AB)$ у вираз стосовно $P_n^*(A+B)$, одержуємо

$$P_n^*(A+B)=P_n^*(A)+P_n^*(B)-P_n^*(AB).$$

§4.2. Ймовірнісні простори. Уточнення поняття випадкової події.

Нехай задано Ω – простір елементарних подій, і деяку сукупність S підмножин множини Ω, стосовно якої задовільняються вимоги:

1_s) $\Omega \in S$.

2_s) коли $A \in S$, тоді і $\overline{A} \in S$.

3_s) коли $A_i \in S$, $i \in 1, 2, \ldots, k$, тоді і $\bigcup_{i=1}^{k} A_i \in S$.

Будь яку числову функцію $V(A)$, $A \in S$, від елементів простору S, стосовно якої задовільняються вимоги:

1_V. $V(A) \geq 0,\ A \in S$.

2_V. В разі, коли $A_i A_j = \varnothing$ за $i \neq j$, $A_i \in S$, $A_j \in S$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $V(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} V(A_i),\ I \subset \{1, 2, \ldots, k\}$,

називають мірою, заданою на сукупності S підмножин множини Ω (див. §2.1).

В разі, коли стосовно функції $V(A)$ задовільняються ще вимога $V(\Omega) = 1$, тоді міру $V(A)$, $A \in S$, називають *ймовірнісною мірою подій A із простору подій S*, або просто *ймовірністю* подій A із S .

Ймовірнісну міру подій A із простору подій S позначають символами $P(A)$, $A \in S$ (від англійського probability, що означає – ймовірність).

Таким чином стосовно ймовірнісної міри $P(A)$, $A \in S$, мають задовільнятися вимоги:

1_p. $P(A) \geq 0,\ A \in S$.

2_p. В разі, коли $A_i \in S$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $A_i A_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $P(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i),\ I \subset \{1, 2, \ldots, k\}$.

3_p. $P(\Omega) = 1$.

Очевидно, стосовно статистичної ймовірності $P_n^*(A)$, $A \in S$, вимоги $1_p - 3_p$ задовільняються, тому статистична ймовірність $P_n^*(A)$, $A \in S$, є ймовірнісною мірою.

В разі, коли задано простір елементарних подій Ω, простір S подій, стосовно якого задовільняються вимоги $1_s - 3_s$, і на просторі S подій задано ймовірнісну міру $P(A)$, $A \in S$, стосовно якої задовільняються вимоги $1_p - 3_p$, говорять, що задано ймовірнісний простір (Ω, S, P). Крім того вимагається, щоб простір подій S і ймовірнісна міра P були *узгоджені*, тобто ймовірнісна міра $P(A)$ має бути визначена за довільного $A \in S$.

В разі, коли задано ймовірнісний простір (Ω, S, P), і простір подій S та ймовірнісна міра $P(A)$, $A \in S$, узгоджені, *елементи множини Ω називаються елементарними подіями, елементи простору S називаються подіями, числа $P(A)$, $A \in S$, називаються ймовірностями подій A із простору S подій.*

Таким чином остаточно сказати, які саме підмножини множини Ω елементарних подій вважаються подіями, а які такими не вважаються, можна лише після того, як побудовано ймовірнісний простір (Ω, S, P).

Приклад 4.2.1. Нехай із множини $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ в кожному випробуванні навмання вибирали один елемент (наприклад в разі підкидання кубика, на гранях якого нанесено цифри 1, 2, 3, 4, 5, 6, фіксували цифру, яка виявилася на верхній грані кубика після його підкидання).

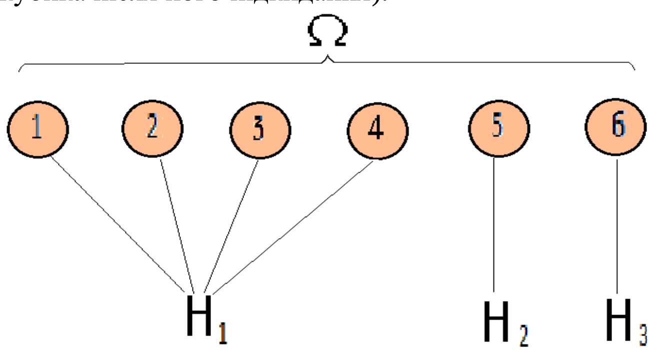


Рис. 4.2.1.

Нехай за результатами великої кількості випробувань виявилось, що цифра 6 виявилась (опинилась) на верхній грані в 70% всіх випробувань, цифра 5 виявилася на верхній грані в 20% всіх випробувань, одна із цифр 1, 2, 3, 4, (яка саме, не фіксувалося, фіксувалося лише, що не 6 і не 5) випадала на верхній грані в 10% всіх випробувань.

В такому разі доцільно поділити множину Ω на підмножини $H_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $H_2 = \{5\}$, $H_3 = \{6\}$. Очевидно $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{1, 2, 3\}$, тобто в двох різних множинах серед множин H_1, H_2, H_3 спільних елементів немає. Як простір S подій розглянемо простір, породжений за поділом множини Ω на підмножини H_1, H_2, H_3, до якого включимо порожню множину $\varnothing$, всі множини H_1, H_2, H_3, всі суми (об’єднання) по дві множини із даних трьох, тобто $H_1 + H_2$, $H_1 + H_3$, $H_2 + H_3$, всі суми по три множини із даних трьох, тобто $H_1 + H_2 + H_3$. Таким чином

$$S = \{\varnothing, H_1, H_2, H_3,\ H_1 + H_2,\ H_1 + H_3, H_2 + H_3, H_1 + H_2 + H_3 = \Omega\}.$$

Оскільки за умовою задачі $P_n^*(H_1) = 0.10$, $P_n^*(H_2) = 0.20$, $P_n^*(H_3) = 0.70$, то ймовірнісна міра P_n^* визначена на всіх елементах вказаної сукупності S. А саме, враховуючи властивості ймовірнісної міри – статистичної ймовірності, наведені в §4.1, одержуємо:

$P_n^*(\varnothing) = 0$, $P_n^*(H_1) = 0.10$, $P_n^*(H_2) = 0.20$, $P_n^*(H_3) = 0.70$, $P_n^*(H_1 + H_2) = 0.30$, $P_n^*(H_1 + H_3) = 0.80$, $P_n^*(H_2 + H_3) = 0.90$, $P_n^*(H_1 + H_2 + H_3) = 1.00$.

Таким чином побудовано ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*), де простір подій S і ймовірнісна міра $P_n^*(A)$, $A \in S$, узгоджені, значення $P_n^*(A)$ визначені стосовно всіх $A \in S$.

Приклад 4.2.2. В разі, коли задати поділ множини Ω на підмножини $\tilde{H}_1 = \{1, 2, 3\}$, $\tilde{H}_2 = \{4\}$, $\tilde{H}_3 = \{5\}$, $\tilde{H}_4 = \{6\}$ і утворити простір подій $\tilde{S} = \{\varnothing,\ \tilde{H}_1,\ \tilde{H}_2,\ \tilde{H}_3,\ \tilde{H}_4,\ \tilde{H}_1 + \tilde{H}_2,$ $\tilde{H}_1 + \tilde{H}_3,\ \ \tilde{H}_1 + \tilde{H}_4,\ \tilde{H}_2 + \tilde{H}_3, \tilde{H}_2 + \tilde{H}_4,\ \tilde{H}_3 + \tilde{H}_4,\ \tilde{H}_1 + \tilde{H}_2 + \tilde{H}_3,$

$\tilde{H}_1+\tilde{H}_2+\tilde{H}_4,\ \tilde{H}_1+\tilde{H}_3+\tilde{H}_4,\ \tilde{H}_2+\tilde{H}_3+\tilde{H}_4,\ \tilde{H}_1+\tilde{H}_2+\tilde{H}_3+\tilde{H}_4=\Omega\}$, стосовно якого задовільняються вимоги 1_s-3_s до простору подій, а ймовірнісна міра (статистичні ймовірності) задана так, як в попередньому прикладі, тобто $P_n^*(\tilde{H}_4)=0.70$, $P_n^*(\tilde{H}_3)=0.20$, $P_n^*(\tilde{H}_1+\tilde{H}_2)=0.10$, тоді так задана ймовірнісна міра буде не визначена на елементах сукупності $\tilde{S}$: $\tilde{H}_1,\ \tilde{H}_2$, $\tilde{H}_1+\tilde{H}_3,\ \tilde{H}_1+\tilde{H}_4,\ \tilde{H}_2+\tilde{H}_3,\ \tilde{H}_2+\tilde{H}_4,\ \tilde{H}_1+\tilde{H}_3+\tilde{H}_4,\ \tilde{H}_2+\tilde{H}_3+\tilde{H}_4$, оскільки невідомо, як міра множини $\tilde{H}_1+\tilde{H}_2$ розподілена між множинами $\tilde{H}_1$ і $\tilde{H}_2$.

Разом з тим якщо задано ймовірнісну міру (статистичну ймовірність) $\tilde{P}_n^*(A)$, $A\in\tilde{S}$, на всіх множинах $\tilde{H}_1,\ \tilde{H}_2,\ \tilde{H}_3,\ \tilde{H}_4$, наприклад, $\tilde{P}_n^*(\tilde{H}_1)=0.03$, $\tilde{P}_n^*(\tilde{H}_2)=0.07$, $\tilde{P}_n^*(\tilde{H}_3)=0.20$, $\tilde{P}_n^*(\tilde{H}_4)=0.70$, тоді виявиться, що ймовірнісна міра $\tilde{P}_n^*(A)$ визначена на всіх елементах простору подій $\tilde{S}$, і міра $\tilde{P}_n^*(A)$, $A\in\tilde{S}$, та простір подій $\tilde{S}$ виявляються узгодженими. В такий спосіб побудовано ймовірнісний простір $(\Omega, \tilde{S}, \tilde{P}_n^*)$.

Зауважимо, що всі елементи сукупності S із прикладу 4.2.1 є також і елементами сукупності $\tilde{S}$ із прикладу 4.2.2, тобто $S\subset\tilde{S}$, а $\tilde{P}_n^*(A)=P_n^*(A)$, коли $A\in S$, де ймовірнісна міра $P_n^*(A)$ визначена так, як в прикладі 4.2.1. В такому разі говорять, що ймовірнісна міра $\tilde{P}_n^*(A)$ є продовженням ймовірнісної міри $P_n^*(A)$ із простору подій S на простір подій $\tilde{S}$.

Сукупність вимог 1_s-3_s до простору подій S і вимог 1_p-3_p до ймовірнісної міри $P(A)$, $A\in S$, заданої на просторі подій S, називається системою аксіом теорії ймовірностей видатного російського математика А.М. Колмогорова, яким в 30-х роках 20-го століття було запропоновано визнаний у всьому світі аксіоматичний підхід до побудови теорії ймовірностей, яка на основі такого підходу стала розвиватися як справжня математична наука на відміну від давніших підходів, за дотримання яких виникало немало різного роду протиречивих висновків і тверджень чи навіть парадоксів (один із таких парадоксів – відомий парадокс французького математика Ж. Бертрана стосовно ймовірностей того, що навмання вибрана хорда в крузі буде коротша за радіус круга).

§4.3. Умовні ймовірності. Ймовірність добутку подій. Події, незалежні відносно ймовірнісної міри P_n^*

Приклад 4.3.1. Нехай задано простір Ω елементарних подій і простір S подій, стосовно якого задовільняються вимоги $1_S - 3_S$, а ймовірнісна міра $P_n^*(A)$, $A \in S$, на просторі подій S визначається за результатами достатньо великої кількості випробувань.

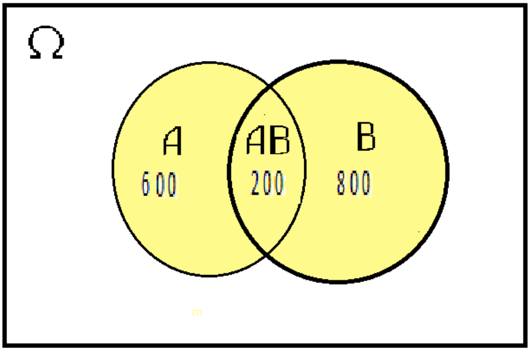


Рис. 4.3.1.

Нехай проведено 1000 випробувань, в кожному з яких відбувалася якась одна елементарна подія $E \in \Omega$, і нехай серед цих 1000 випробувань подія A відбулася 600 разів (в множину A попадали 600 разів, тобто 600 разів виявилося $E \in A$), подія B відбулася 800 разів (в множину B попадали 800 разів, тобто 800 разів виявилося $E \in B$), подія AB відбулася 200 разів (в множину AB попадали 200 разів, тобто 200 разів виявилося $E \in AB$) (див. Рис. 4.3.1).

Нехай разом з тим досліджується відносна частота (статистична ймовірність) відбування події A не серед всіх 1000 випробувань, а лише серед тих 800 випробувань, за яких відбувалася подія B. Таку статистичну ймовірність події A (відносну частоту відбування події A серед тих випробувань, коли відбувалася подія B) називають *умовною статистичною ймовірністю події A за результатами тих випробувань, коли відбувалася подія B*, і позначають символами $P_n^*(A/B)$.

Таким чином за результатами випробувань, поданими на Рис. 4.3.1, одержуємо

$$P_n^*(A/B)=\frac{200}{800}=\frac{200/1000}{800/1000}=\frac{0.2}{0.8}=\frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(B)},$$

оскільки серед випробувань, за яких відбулася подія B, подія A відбувалася тільки тоді, коли виявлялося $E\in AB$, тобто коли відбувалися обидві події A і B за одного і того самого випробування.

Цілком аналогічно можна визначити і умовну статистичну ймовірність $P_n^*(B/A)$ події B за результатами тих випробувань, коли відбувалася подія A. За даними, наведеними на Рис. 4.3.1, одержуємо

$$P_n^*(B/A)=\frac{200}{600}=\frac{200/1000}{600/1000}=\frac{0.2}{0.6}=\frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(A)}.$$

В загальному випадку за означенням умовною статистичною ймовірністю події A, визначеною за результатами тих випробувань, в яких відбувалася подія B, називається число

$$P_n^*(A/B)=\frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(B)}. \qquad (4.3.1)$$

Аналогічно

$$P_n^*(B/A)=\frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(A)}. \qquad (4.3.2)$$

За формулами 4.3.1 і 4.3.2 стосовно ймовірності добутку AB подій A і B одержуємо

$$P_n^*(AB)=P_n^*(A)P_n^*(B/A)=P_n^*(B)P_n^*(A/B). \qquad (4.3.3)$$

Таким чином, статистична ймовірність добутку AB двох подій $A\in S$ і $B\in S$ дорівнює статистичній ймовірності однієї з цих подій, помноженій на умовну статистичну ймовірність другої, визначену за результатами тих випробувань, за яких перша подія відбувалася.

Зауважимо, що умовна статистична ймовірність $P_n^*(A/B)$ події A, визначена за результатам тих випробувань, в яких відбувалася подія B, є мірою, нормованою відносно статистичної ймовірності події B (ймовірнісної міри множини $B\in\Omega$).

Приклад 4.3.2. Нехай випробування полягає в тому, що із коробки, де є 40 кульок, серед яких 10 білих, 10 червоних, 10 зелених, 10 оранжевих, пронумерованих від 1 до 10 в кожному кольорі, навмання вибирається кулька, фіксується її колір і номер, після чого кулька повертається в коробку. Нехай за результатами великої кількості випробувань виявилось, що всі кульки вибиралися з однаковою відносною частотою (статистичною ймовірністю), тобто з відносною частотою $\frac{1}{40}$ кожна.

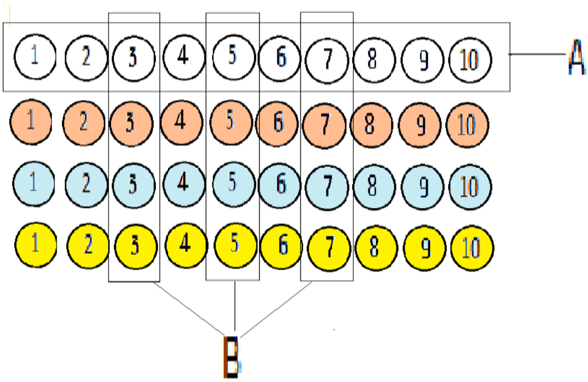


Рис. 4.3.2.

Нехай $\Omega = (\bigcup_{i=1}^{10}\{(б,i)\}) \cup (\bigcup_{i=1}^{10}\{(ч,i)\}) \cup (\bigcup_{i=1}^{10}\{(з,i)\}) \cup (\bigcup_{i=1}^{10}\{(о,i)\})$, де стосовно кожної кульки вказано її колір і номер, наприклад через (о,7) позначено оранжеву кульку з номером 7, а кожній кульці відповідає окремий елемент множини Ω, яких у множині Ω є 40 – 10 елементів $(б,i)$, $i \in \overline{1,10}$, 10 елементів $(ч,i)$, $i \in \overline{1,10}$, 10 елементів $(з,i)$, $i \in \overline{1,10}$, 10 елементів $(о,i)$, $i \in \overline{1,10}$. Нехай до простору подій S разом з порожньою множиною $\varnothing$ включаються будь які підмножини множини Ω.

Нехай подія A полягає в тому, що в результаті випробування було вибрано білу кульку, тобто $A = \{(б,1),\ (б,2),\ (б,3),\ (б,4),\ (б,5),\ (б,6),\ (б,7),\ (б,8),\ (б,9),\ (б,10)\}$, а подія B полягає в тому, що на вибраній кульці був один із номерів 3, 5, 7, тобто (див. Рис. 4.3.2) $B = \{(б,3),\ (б,5),\ (б,7),\ (ч,3),\ (ч,5),\ (ч,7),\ (з,3),\ (з,5),\ (з,7),\ (о,3),\ (о,5),\ (о,7)\}$.

Тоді за аксіомою 2_p (див. §4.2) одержуємо:

$$P_n^*(A)=\frac{10}{40},\qquad P_n^*(B)=\frac{12}{40},\quad P_n^*(AB)=\frac{3}{40},$$

$$P_n^*(A/B)=\frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(B)}=\frac{3/40}{12/40}=\frac{3}{12},$$

$$P_n^*(B/A)=\frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(A)}=\frac{3/40}{10/40}=\frac{3}{10},$$

$$P_n^*(AB)=P_n^*(A)P_n^*(B/A)=\frac{10}{40}\cdot\frac{3}{10}=\frac{3}{40},$$

$$P_n^*(AB)=P_n^*(B)P_n^*(A/B)=\frac{12}{40}\cdot\frac{3}{12}=\frac{3}{40}.$$

В разі, коли виявляється $P_n^*(AB)=P_n^*(A)P_n^*(B)$*, події* A *і* B *називаються незалежними відносно ймовірнісної міри* $P_n^*(A)$, $A\in S$*, визначеної на просторі подій* S.

Зауважимо, що одні і ті самі події A і B із одного і того самого простору подій S за однієї ймовірнісної міри $P_n^*(A)$, $A\in S$, визначеної на просторі подій S, можуть виявитись незалежними, а за іншої ймовірнісної міри $P_n^*(A)$, $A\in S$, визначеної на тому самому просторі подій S, можуть виявитись залежними.

Так за ймовірнісної міри $P_n^*(A)$, $A\in S$, визначеної на просторі подій S із прикладу 4.3.2, вказані там події A і B незалежні, оскільки $P_n^*(AB)=\frac{3}{40}$, $P_n^*(A)=\frac{10}{40}$, $P_n^*(B)=\frac{12}{40}$, $P_n^*(A)P_n^*(B)=\frac{10}{40}\cdot\frac{12}{40}=\frac{3}{40}$.

Приклад 4.3.3. Нехай простір елементарних подій Ω і простір подій S такі самі, як в прикладі 4.3.2, а також такі самі події A і B. Разом з тим нехай за результатами великої кількості випробувань виявилось

$$\tilde{P}_n^*(A)=\frac{3}{7},\ \tilde{P}_n^*(B)=\frac{4}{10},\ \tilde{P}_n^*(AB)=\frac{1}{10}.$$

Тоді

$$\tilde{P}_n^*(A)\cdot\tilde{P}_n^*(B)=\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{10}\neq\frac{1}{10}=\tilde{P}_n^*(AB),$$

$$\widetilde{P}_n^*(A/B)=\frac{\widetilde{P}_n^*(AB)}{\widetilde{P}_n^*(B)}=\frac{1/10}{4/10}=\frac{1}{4}\neq\frac{3}{7}=\widetilde{P}_n^*(A),$$

$$\widetilde{P}_n^*(B/A)=\frac{\widetilde{P}_n^*(AB)}{\widetilde{P}_n^*(A)}=\frac{1/10}{3/7}=\frac{7}{30}\neq\frac{4}{10}=\widetilde{P}_n^*(B).$$

Таким чином в даному випадку розглядувані події A і B виявляються залежними відносно ймовірнісної міри $\widetilde{P}_n^*(A)$, $A\in S$.

Міркуючи аналогічно до попереднього, стосовно статистичної ймовірності (ймовірнісної міри) добутку трьох подій A, B, C одержимо

$$P_n^*(ABC)=P_n^*((AB)C)=P_n^*(AB)P_n^*(C/AB)=P_n^*(A)P_n^*(B/A)P_n^*(C/AB).$$

Узагальнюючи отримані результати на випадок статистичної ймовірності добутку k подій $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots$, $A_{k-2},\ A_{k-1},\ A_k$, одержуємо:

$$P_n^*(A_1\ A_2\ A_3 \ldots A_{k-2}\ A_{k-1}\ A_k)=P_n^*((A_1\ A_2\ A_3 \ldots A_{k-2}\ A_{k-1})\,A_k)=$$
$$=P_n^*(A_1\ A_2\ A_3 \ldots A_{k-2}\ A_{k-1})P_n^*(A_k / A_1\ A_2\ A_3 \ldots A_{k-2}\ A_{k-1})=$$
$$=P_n^*(A_1\ A_2\ A_3 \ldots A_{k-2}\ )P_n^*(A_{k-1}/A_1\ A_2 \ldots A_{k-2})P_n^*(A_k / A_1\ A_2\,A_3\ \ldots A_{k-2}\ A_{k-1}).$$

Продовжуючи міркування, остаточно одержимо:

$$P_n^*(A_1\ A_2\ A_3 \ldots A_{k-2}\ A_{k-1}\ A_k)=P_n^*(A_1)\,P_n^*(A_2/A_1)\,P_n^*(A_3/A_1A_2)\,P_n^*(A_4/A_1A_2A_3)\ldots$$
$$\ldots P_n^*(A_{k-1}/A_1A_2A_3\ \ldots\ A_{k-2})\ P_n^*(A_k / A_1A_2A_3\ \ldots\ A_{k-2}\,A_{k-1})\ .$$

Таким чином, статистична ймовірність $P_n^*(A_1\ A_2\ A_3 \ldots\ A_{k-1}\ A_k)$ добутку подій $A_1\ A_2\ A_3 \ldots A_{k-1}\ A_k$ дорівнює добуткові умовних статистичних ймовірностей цих подій, визначених за умови, що всі попередні події відбулися (стосовно події A_1 розглядається безумовна статистична ймовірність $P_n^*(A_1)$).

В разі, коли стосовно $P_n^*(\prod\limits_{i\in I}A_i)$, $I\subset\{1,2,\ \ldots\ ,k\}$, виявляється

$P_n^*(\prod\limits_{i\in I}A_i)=\prod\limits_{i\in I}P_n^*(A_i)$, $I\subset\{1,2,\ \ldots\ ,k\}$, $I\neq\varnothing$, де через $\prod\limits_{i=1}^{k}A_i$ позначено добуток подій $A_1, A_2, A_3,\ldots,A_{k-1},A_k$, через $\prod\limits_{i\in I}A_i$ позначено добуток подій A_i, номери яких є елементами деякої підмножини I множини номерів $\{1,2,\ \ldots\ ,k\}$, тобто *коли* *статистична ймовірність добутку будь якої кількості будь яких подій серед* $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{k-1}, A_k$ *дорівнює добуткові статистичних ймовірностей таких подій, тоді події* $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{k-1}, A_k$ *називаються незалежними в сукупності відносно ймовірнісної міри* $P_n^*(A)$, $A \in S$.

Приклад 4.3.4. Нехай $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$, S – найширша сукупність підмножин множини Ω разом з множиною $\varnothing$, тобто $S = \{\varnothing, E_1, E_2, E_3, E_4, E_1+E_2, E_1+E_3, E_1+E_4, E_2+E_3, E_2+E_4, E_3+E_4, E_1+E_2+E_3, E_1+E_2+E_4, E_1+E_3+E_4, E_2+E_3+E_4, E_1+E_2+E_3+E_4\}$,

$P_n^*(E_1) = \frac{1}{4}$, $P_n^*(E_2) = \frac{1}{4}$, $P_n^*(E_3) = \frac{1}{4}$, $P_n^*(E_4) = \frac{1}{4}$.

Таким чином задано ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*), причому простір подій S і ймовірнісна міра P_n^* узгоджені.

Нехай $A = E_1 + E_4$, $B = E_2 + E_4$, $C = E_3 + E_4$ (див. Рис. 4.3.3).

Тоді $P_n^*(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $P_n^*(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $P_n^*(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$,

$$P_n^*(AB) = P_n^*(E_4) = \frac{1}{4} = P_n^*(A)P_n^*(B),$$

$$P_n^*(AC) = P_n^*(E_4) = \frac{1}{4} = P_n^*(B)P_n^*(C),$$

$$P_n^*(BC) = P_n^*(E_4) = \frac{1}{4} = P_n^*(B)P_n^*(C).$$

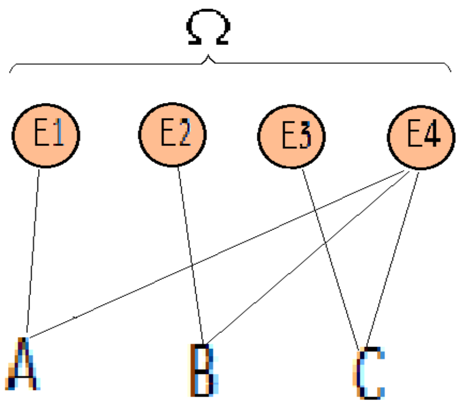


Рис. 4.3.3

Таким чином події A, B, C попарно незалежні.

Разом з тим оскільки $ABC = E_4$, то

$$P_n^*(ABC) = P_n^*(E_4) = \frac{1}{4} \neq P_n^*(A)P_n^*(B)P_n^*(C) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Отже події A, B, C не є незалежними в сукупності, хоч і є попарно незалежними.

Очевидно

$$P_n^*(A/BC) = \frac{P_n^*(ABC)}{P_n^*(BC)} = \frac{1/4}{1/4} = 1,$$

$$P_n^*(B/AC) = \frac{P_n^*(ABC)}{P_n^*(AC)} = \frac{1/4}{1/4} = 1,$$

$$P_n^*(C/AB) = \frac{P_n^*(ABC)}{P_n^*(AB)} = \frac{1/4}{1/4} = 1,$$

оскільки з відбуванням добутку подій B і C напевно (з ймовірністю 1) відбувається і подія A. Так само з відбуванням подій A і C напевно відбувається і подія B, з відбуванням подій A і B напевно відбувається і подія C.

Аналогічно

$$P_n^*(AB/C) = \frac{P_n^*(ABC)}{P_n^*(C)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2},$$

$$P_n^*(AC/B) = \frac{P_n^*(ABC)}{P_n^*(B)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2},$$

$$P_n^*(BC/A) = \frac{P_n^*(ABC)}{P_n^*(A)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}.$$

Зауважимо, що $P_n^*(A/B)$ *можна тлумачити як частку від кількості випробувань, в яких відбувалася подія* B*, таку, що в них окрім події* B *відбувалася також і подія* A, оскільки

$$P_n^*(A/B) = \frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(B)} = \frac{\dfrac{k_n(AB)}{k_n(\Omega)}}{\dfrac{k_n(B)}{k_n(\Omega)}} = \frac{k_n(AB)}{k_n(B)}.$$

Тому в разі, коли кількість $k_n(B)$ відбувань події B в n випробуваннях помножити на вказану частку, буде отримано кількість відбувань події AB, тобто і події A, і події B одночасно:

$$k_n(AB) = k_n(B) \cdot P_n^*(A/B) \; .$$

§4.4. Формула повної ймовірності. Формула Байєса

Нехай задано ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*) і множину Ω поділено на деяку кількість підмножин H_i (без спільних елементів) таких, що $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, $\Omega = \bigcup_{i=1}^{k} H_i$.

Нехай крім того задано деяку подію $A \in S$, $A \subset \Omega$, а також статистичні ймовірності попадання в множини H_i, $i \in \overline{1,k}$, і умовні статистичні ймовірності $P_n^*(A/H_i)$ відбування події A з кожною із подій H_i.

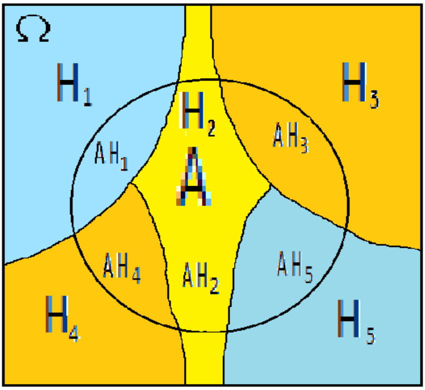


Рис. 4.4.1.

Тоді (див. §4.3), враховуючи, що $k_n(A)$ – кількісна міра множини A (див. §2.1, §2.2), $k_n(AH_i) = k_n(H_i) \cdot P_n^*(A/H_i)$,

$$k_n(A) = k_n(A\Omega) = k_n(A \cdot (\bigcup_{i=1}^{k} H_i)) = \sum_{i=1}^{k} k_n(AH_i) = \sum_{i=1}^{k} k_n(H_i) \cdot P_n^*(A/H_i),$$

звідки

$$P_n^*(A) = \frac{k_n(A)}{k_n(\Omega)} = \frac{\sum_{i=1}^{k} k_n(AH_i)}{n} = \sum_{i=1}^{k} \frac{k_n(H_i)}{n} P_n^*(A/H_i) = \sum_{i=1}^{k} P_n^*(H_i) P_n^*(A/H_i)$$

тобто

$$P_n^*(A) = \sum_{i=1}^{k} P_n^*(H_i)\, P_n^*(A/H_i) \qquad (4.4.1)$$

Формулу (4.4.1) називають формулою повної ймовірності. Самі події H_i називають гіпотезами, з якими може відбутись подія A.

Приклад 4.4.1. Дуже велику кількість разів проводились такі випробування. Було дві партії зошитів, в першій з яких було 10 зошитів, серед яких 6 зошитів в клітинку і 4 зошити в лінійку, а в другій партії було 8 зошитів, серед яких 4 зошити в клітинку і 4 зошити в лінійку. Із першої партії навмання вибирали один зошит і перекладали в другу, після чого із другої партії навмання вибирали один зошит. Потрібно визначити, як часто цей останній зошит виявлявся зошитом в клітинку, якщо відносні частоти вибирання будь яких зошитів виявлялися однакові як в разі вибирання із першої партії, так і в разі вибирання зошита із другої партії.

В разі, коли відомо, якого зошита перекладено із першої партії в другу, тоді статистичну ймовірність вибирання із другої партії зошита в клітинку легко знайти.

А саме, коли в другу партію з першої було перекладено зошит в клітинку, тоді статистична ймовірність вибирання із другої партії зошита в клітинку дорівнювала $\frac{5}{9}$, оскільки в такому разі в другій партії виявляється 9 зошитів, серед яких 5 зошитів в клітинку і всі із цих 9 зошитів вибиралися однаково часто, тобто з відносною частотою $\frac{1}{9}$ кожен, а тому із множини із 5 зошитів в клітинку вибирали один з відносною частотою $\frac{5}{9}$.

В разі, коли в другу партію із першої було перекладено зошит в лінійку, то в другій партії виявлялося 9 зошитів, серед яких було 4 в клітинку, а тому за такого припущення зошит в клітинку вибирали з відносною частотою $\frac{4}{9}$.

Разом з тим оскільки з першої партії всі зошити вибиралися з однаковою відносною частотою $\frac{1}{10}$, то зошит в клітинку із першої партії в другу перекладався з відносною частотою $\frac{6}{10}$, тобто в частці $\frac{6}{10}$ від кількості всіх проведених випробувань, а з відносною частотою $\frac{4}{10}$ з першої партії в другу перекладався зошит в лінійку, тобто в частці $\frac{4}{10}$ від кількості всіх проведених випробувань.

Отже є два припущення (дві гіпотези):

H_1 – із першої партії в другу перекладали зошит в клітинку і статистична ймовірність такої гіпотези $P_n^*(H_1) = \frac{6}{10}$;

H_2 – із першої партії в другу перекладали зошит в лінійку, і така гіпотеза відбувалася із статистичною ймовірністю $P_n^*(H_2) = \frac{4}{10}$.

Серед всіх випробувань, коли відбувалася гіпотеза H_1, подія A – із другої партії після перекладання з першої в другу одного зошита вибирали зошит в клітинку, відбувалася із статистичною ймовірністю $\frac{5}{9}$. Разом з тим за гіпотези H_2 подія A відбувалася з ймовірністю $\frac{4}{9}$. Тобто $P_n^*(A/H_1) = \frac{5}{9}$, $P_n^*(A/H_2) = \frac{4}{9}$, $P_n^*(H_1) = \frac{6}{10}$, $P_n^*(H_2) = \frac{4}{10}$.

За формулою повної ймовірності (4.4.1) одержуємо:

$$P_n^*(A) = P_n^*(H_1)P_n^*(A/H_1) + P_n^*(H_2)P_n^*(A/H_2) = \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9} + \frac{4}{10}\cdot\frac{4}{9} = \frac{46}{90} \approx 0.51 .$$

Це означає, що приблизно в половині всіх випадків після такого перекладання зошита із першої партії в другу навмання вийнятий із другої партії зошит виявлявся в лінійку.

Нехай тепер ставиться така задача. Подія A могла відбутися з однією із гіпотез $H_1, H_2, \ldots, H_k$. Статистичні ймовірності гіпотез $P_n^*(H_i)$, $i = \overline{1,k}$, відомі, а також відомі умовні статистичні ймовірності $P_n^*(A/H_i)$ відбування події A за кожної з гіпотез. Потрібно визначити відносну частоту відбування події (гіпотези) H_i серед тих випробувань, коли відбувалася подія A, тобто потрібно визначити $P_n^*(H_i/A)$.

Виходячи з означення умовної статистичної ймовірності $P_n^*(H_i/A)$ (див. формулу 4.3.1, 4.3.2) та враховуючи формулу (4.3.3) стосовно статистичної ймовірності добутку двох подій (в розглядуваному випадку A та H_i), одержуємо

$$P_n^*(H_i/A)=\frac{P_n^*(AH_i)}{P_n^*(A)}=\frac{P_n^*(H_i)P_n^*(A/H_i)}{P_n^*(A)} \qquad (4.4.2)$$

Оскільки (див. формулу 4.4.1) $P_n^*(A)=\sum\limits_{i=1}^{k}P_n^*(H_i)\,P_n^*(A/H_i)$,

то

$$P_n^*(H_i/A)=\frac{P_n^*(H_i)P_n^*(A/H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{k}P_n^*(H_i)\,P_n^*(A/H_i)} \qquad (4.4.3)$$

Останню формулу називають формулою Байєса.

Згідно з цією формулою статистична ймовірність відбування гіпотези H_i серед випробувань, коли відбувалася подія A, тобто $P_n^*(H_i/A)$, дорівнює безумовній статистичній ймовірності $P_n^*(H_i)$, визначеній на основі всіх проведених випробувань, помноженій на умовну статистичну ймовірність $P_n^*(A/H_i)$ відбування події A разом з цією гіпотезою і поділеній на повну статистичну ймовірність події A.

Приклад 4.4.2. Багато разів проводились такі випробування. В мішень в тирі одночасно незалежно один від одного стріляли два спортсмени і фіксувалися ті наслідки, коли в мішені виявлялося одне влучення. Відомо, що перший із спортсменів за кожного пострілу влучає із статистичною ймовірністю 0.9, а другий за кожного пострілу влучає із статистичною ймовірністю 0.5. Потрібно визначити відносну частоту (статистичну ймовірність) того, що влучав другий спортсмен серед тих випадків, коли в мішені виявлялося одне влучення.

Отже подія A – в мішені одне влучення.

Разом з тим не виключено, що за одночасного пострілу двох спортсменів в мішені або не буде жодного влучення, або буде одне влучення, або буде два влучення. Тому можна зробити чотири припущення:

H_1 – влучень немає;

H_2 – влучив 1-ий спортсмен;

H_3 – влучив 2-ий спортсмен;

H_4 – влучень два.

Якщо через C_1 позначити подію, яка полягає в тому, що влучає перший спортсмен, через C_2 – подію, яка полягає в тому, що влучає другий спортсмен, тоді події H_1, H_2, H_3, H_4 можна подати так:

$H_1 = \overline{C_1}\,\overline{C_2}$ – обидва спортсмени не влучають;

$H_2 = C_1\overline{C_2}$ – перший спортсмен влучає, другий не влучає;

$H_3 = \overline{C_1}\,C_2$ – перший спортсмен не влучає, другий влучає;

$H_4 = C_1 C_2$ – обидва спортсмени влучають.

Тоді

$P_n^*(A/H_1) = 0$, оскільки за гіпотези H_1 подія A – в мішені одне влучення відбутися не може;

$P_n^*(A/H_2) = 1$, оскільки за гіпотези H_2 в мішені буде одне влучення;

$P_n^*(A/H_3) = 1$, оскільки за гіпотези H_3 в мішені буде одне влучення;

$P_n^*(A/H_4) = 0$, оскільки за гіпотези H_4 в мішені буде два влучення, а не одне.

Оскільки обидва постріли виконуються одночасно, то події C_1 і C_2 слід вважати незалежними (див. §4.3).

Тому

$$P_n^*(H_1) = P_n^*(\overline{C_1}\,\overline{C_2}) = P_n^*(\overline{C_1})P_n^*(\overline{C_2}) = 0.1 \cdot 0.5 = 0.05$$

$$P_n^*(H_2) = P_n^*(C_1\overline{C_2}) = P_n^*(C_1)P_n^*(\overline{C_2}) = 0.9 \cdot 0.5 = 0.45$$

$$P_n^*(H_3) = P_n^*(\overline{C_1}\,C_2) = P_n^*(\overline{C_1})P_n^*(C_2) = 0.1 \cdot 0.5 = 0.05$$

$$P_n^*(H_4) = P_n^*(C_1 C_2) = P_n^*(C_1)P_n^*(C_2) = 0.9 \cdot 0.5 = 0.45$$

Таким чином

$$P_n^*(A) = P_n^*(H_1)P_n^*(A/H_1) + P_n^*(H_2)P_n^*(A/H_2) + P_n^*(H_3)P_n^*(A/H_3) +$$
$$+ P_n^*(H_4)P_n^*(A/H_4) = 0.05 \cdot 0 + 0.45 \cdot 1 + 0.05 \cdot 1 + 0.45 \cdot 0 = 0.50\ .$$

Отже за формулою Байєса (4.4.2) знаходимо статистичну ймовірність (відносну частоту) того, що влучав другий спортсмен серед тих випадків, коли в мішені було одне влучення (див. формули 4.4.2, 4.4.3):

$$P_n^*(H_3 / A) = \frac{P_n^*(H_3)P_n^*(A / H_3)}{P_n^*(A)} = \frac{0.05 \cdot 1}{0.50} = 0.10\,.$$

§4.5. Повторні незалежні випробування. Формула Бернуллі

Випробування називаються незалежними, коли події, що відбуваються за кожного з таких випробувань, є незалежними в сукупності (див. §4.3.).

Нехай проведено велику кількість n випробувань, в якій спостерігалася подія A. За результатами великої кількості n випробувань визначено $P_n^*(A)$ та $P_n^*(\overline{A}) = 1 - P_n^*(A)$.

Потрібно визначити статистичну ймовірність (відносну частоту) того, що в m випробуваннях (серед n проведених) подія A відбулася s разів.

Розглянемо *m-розрядний двійковий код*, в якому в i-му розряді будемо ставити цифру 1, коли за i-го випробування серед розглядуваних m випробувань подія A відбулася, і в i-му розряді будемо ставити цифру 0, коли за i-го випробування серед розглядуваних m випробувань подія A не відбулася (а відбулася протилежна подія $\overline{A}$).

Тоді серед всіх можливих наслідків набору з m випробувань можуть бути такі, коли подія A в m випробуваннях не відбулася жодного разу (у всіх розрядах двійкового коду поставлено цифру 0), коли подія A в m випробуваннях відбулася тільки один раз (в якомусь одному із m розрядів двійкового коду поставлено цифру 1, а у всіх інших $(m-1)$ розрядах поставлено цифру 0), коли подія A відбулася двічі в m випробуваннях (в якихось двох із m розрядів двійкового коду поставлено цифри 1, а у всіх інших $(m-2)$ розрядах поставлено цифру 0), і т.д., нарешті не виключається і випадок, коли подія A відбулася у всіх m випробуваннях (у всіх m розрядах двійкового коду поставлено цифру 1).

Приклад 4.5.1. Коли розглядається набір із 4-х випробувань, тобто $m = 4$, тоді серед всіх можливих наслідків із $m = 4$ випробувань будуть такі

1 2 3 4
0 0 0 0 – подія A відбулася 0 разів в 4-х випробуваннях
0 0 0 1 – подія A відбулася 1 раз в 4-х випробуваннях
0 0 1 0 – подія A відбулася 1 раз
0 0 1 1 – подія A відбулася 2 рази

0 1 0 0 – подія A відбулася 1 раз
0 1 0 1 – подія A відбулася 2 рази
0 1 1 0 – подія A відбулася 2 рази
0 1 1 1 – подія A відбулася 3 рази
1 0 0 0 – подія A відбулася 1 раз
1 0 0 1 – подія A відбулася 2 рази
1 0 1 0 – подія A відбулася 2 рази
1 0 1 1 – подія A відбулася 3 рази
1 1 0 0 – подія A відбулася 2 рази
1 1 0 1 – подія A відбулася 3 рази
1 1 1 0 – подія A відбулася 3 рази
1 1 1 1 – подія A відбулася 4 рази

Таким чином в m випробуваннях s разів подія A може відбутися у стількох різних варіантах, у скількох в m-розрядному двійковому коді можна поставити цифру 1 в s розрядах, а в інших $m-s$ розрядах – цифру 0.

Як відомо, число таких варіантів дорівнює числу s-елементних невпорядкованих підмножин в m-елементній множині (які називаються комбінаціями із m елементів по s елементів). Число таких невпорядкованих s-елементних підмножин в m-елементній множині позначають символами C_m^s і обчислюють за формулою

$$C_m^s = \frac{m(m-1)(m-2)\ \dots\ (m-(s-1))}{1\cdot 2\cdot 3\ \dots\ s} \tag{4.5.1}$$

В разі, коли в m випробуваннях подія A відбувається s разів, а подія $\overline{A}$ відбувається $m-s$ разів, тобто відбувається добуток $\prod\limits_{i\in I_1} A_i \prod\limits_{j\in I_2} \overline{A}_j$, $I_1 \cup I_2 = \{1, 2, \dots, m\}$, $k(I_1) = s$, $k(I_2) = m-s$, де $k(I_1)$ – кількість елементів в множині індексів I_1, $k(I_2)$ – кількість елементів в множині індексів I_2 подій, серед яких подія A відбувається s разів із статистичною ймовірністю $P_n^*(A)$ кожного разу, а подія $\overline{A}_j$ відбувається $m-s$ разів з ймовірністю $P_n^*(\overline{A}) = 1 - P_n^*(A)$ кожного разу, то ймовірність кожного такого варіанту дорівнює добуткові відповідних ймовірностей, в якому s разів зустрічається множник $P_n^*(A)$ і $(m-s)$ разів зустрічається множник $P_n^*(\overline{A})$.

Якщо через $B_{m,s}$ позначити подію, яка полягає в тому, що подія A_i в m випробуваннях відбувається s разів, то подія $B_{m,s}$ відбувається, коли відбувається будь який із вказаних C_m^s варіантів. Зрозуміло, що всі із вказаних C_m^s варіантів несумісні, оскільки вони не можуть відбутися в одному і тому самому наборі із m випробувань.

Оскільки подія $B_{m,s}$ *відбувається, коли відбувається принаймні один із* C_m^s *названих варіантів, а ймовірність відбування кожного із вказаних варіантів дорівнює* $(P_n^*(A))^s(P_n^*(\overline{A}))^{m-s}$ як ймовірність добутку подій, серед яких s співмножників A_i (A_i без риски) і $m-s$ співмножників $\overline{A}_j$ ($\overline{A}_j$ з рискою), де через A_i позначено співмножник, який означає, що в *i*-му розряді вказаного двійкового коду поставлено цифру 1 (що означає, що за *i*-го випробування подія A відбувається), через $\overline{A}_j$ позначено співмножник, який означає, що в *j*-му розряді розглядуваного двійкового коду поставлено цифру 0 (що означає, що за *j*-го випробування подія A не відбувається, а відбувається $\overline{A}$), то $B_{m,s}$ є сумою вказаних варіантів (див. §3.3).

Таким чином $B_{m,s}$ є сумою подій, відповідних кожному із варіантів, за яких в m випробуваннях подія A відбувається s разів і не відбувається $m-s$ разів, за яких відбувається подія $\overline{A}$.

Тому

$$P_n^*(B_{m,s}) = P_n^*\left(\sum_{j=1}^{C_m^s} V_i\right) = \sum_{j=1}^{C_m^s} P_n^*(V_i) =$$

$$= C_m^s (P_n^*(A))^s (P_n^*(\overline{A}))^{m-s} =$$

$$= C_m^s (P_n^*(A))^s (1 - P_n^*(A))^{m-s},$$

де V_j – окремі доданки в сумі подій $B_{m,s}$, кожен з яких означає, що подія A відбувається s разів в m випробуваннях, і не відбувається $m-s$ разів в цих m випробуваннях.

Таким чином

$$P_n^*(B_{m,s}) = C_m^s (P_n^*(A))^s (1 - P_n^*(A))^{m-s} \qquad (4.5.2)$$

Останню формулу (4.5.2) називають *формулою Бернуллі*. За цією формулою обчислюють ймовірність того, що в m незалежних випробуваннях подія A відбувається s разів за умови, що в кожному із m незалежних випробувань подія A відбувається із статистичною ймовірністю $P_n^*(A)$ і не відбувається із статистичною ймовірністю $P_n^*(\overline{A}) = 1 - P_n^*(A)$.

Приклад 4.5.2. Учень багато разів виконував таку вправу. В баскетбольну корзину щоразу він виконував 5 кидків. За результатами багатьох випробувань виявилось, що статистична ймовірність влучення м'ячем в корзину за кожного кидка дорівнює $\frac{1}{3}$ (тобто учень влучав м'ячем в корзину в третій частині всіх кидків).

Потрібно визначити, як часто траплялися три влучення в разі, коли виконувалися 5 кидків. Вважається, що всі випробування незалежні і кожне з них могло виконуватися в різний час і в різних місцях.

Скориставшись формулою Бернуллі, одержуємо

$$P_n^*(B_{5,3}) = C_5^3(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^{5-3} = \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}(\frac{1}{3})^3\cdot(\frac{2}{3})^2 = 10\cdot\frac{2^2}{3^5} = \frac{10\cdot4}{243} = \frac{40}{243} \approx \frac{1}{6} .$$

Таким чином за наведених даних в учня було 3 влучення в 5-ти кидках в середньому 1 раз в шести спробах виконати 5 кидків.

За формулою Бернуллі одержуємо також, що:

0 разів в 5-ти кидках учень влучав в $C_5^0(\frac{1}{3})^0(\frac{2}{3})^5 = \frac{32}{243}$ частині всіх кидків, тобто в середньому 32 рази за кожних 243 кидків;

1 раз в 5-ти кидках учень влучав в $C_5^1(\frac{1}{3})^1(\frac{2}{3})^4 = \frac{80}{243}$ частині всіх кидків, тобто в середньому 80 разів за кожних 243 кидків;

2 рази в 5-ти кидках учень влучав в $C_5^2(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^3 = \frac{80}{243}$ частині всіх кидків, тобто в середньому 80 разів за кожних 243 кидків;

3 рази в 5-ти кидках учень влучав в $C_5^3(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^2=\frac{40}{243}$ частині всіх кидків, тобто в середньому 40 разів за кожних 243 кидків;

4 рази в 5-ти кидках учень влучав в $C_5^4(\frac{1}{3})^4(\frac{2}{3})^1=\frac{10}{243}$ частині всіх кидків, тобто в середньому 10 разів за кожних 243 кидків;

5 разів в 5-ти кидках учень влучав в $C_5^5(\frac{1}{3})^5(\frac{2}{3})^0=\frac{1}{243}$ частині всіх кидків, тобто в середньому 1 раз за кожних 243 кидків.

Отримані дані зручно подати у вигляді таблиці 4.5.1:

Табл. 4.5.1

i – кількість влучень за 5 кидків	0	1	2	3	4	5
статистична ймовірність $P_n^*(\{i\})$	$\frac{32}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{1}{243}$

РОЗДІЛ V. РОЗПОДІЛИ СТАТИСТИЧНИХ ЙМОВІРНОСТЕЙ

§5.1. Типи розподілів статистичних ймовірностей на просторі елементарних подій

Нехай простір елементарних подій Ω поділено на підмножини $H_1, H_2, \dots, H_k$, такі що $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, тобто в різних підмножинах H_i і H_j немає спільних елементів, і крім того $\bigcup_{i=1}^{k} H_i = \Omega$. Нехай крім того визначені статистичні ймовірності $P_n^*(H_i)$, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

В такому разі говорять, що на множині Ω задано *розподіл статистичних ймовірностей за множинами* H_i, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, такими, що $\bigcup_{i=1}^{k} H_i = \Omega$, $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$.

Зрозуміло, що $P_n^*(H_i) \geq 0$, $P_n^*(\bigcup_{i=1}^{k} H_i) = P_n^*(\Omega) = \sum_{i=1}^{k} P_n^*(H_i) = 1$ (див. властивості 1_p, 2_p ймовірнісної міри).

Такий розподіл статистичних ймовірностей на множині Ω за підмножинами H_i називається також помножинним.

За помножинного розподілу статистичних ймовірностей на множині Ω за підмножинами H_i, $i = \overline{1, k}$, до простору S подій доцільно включати разом з порожньою множиною $\varnothing$ лише такі підмножини множини Ω, які складені із підмножин H_i, оскільки в іншому разі неможливо буде визначити статистичні ймовірності попадання в множини, які не є сумами (об’єднаннями) підмножин H_i.

Найчастіше до простору подій S в наведеному випадку відносять разом з порожньою множиною $\varnothing$ всеможливі об’єднання підмножин H_i, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, тобто суми множин, складені із однієї якоїсь із множин H_i, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, із всеможливих сум множин $H_i + H_j$ по два доданки, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, із всеможливих сум по три доданки $H_i + H_j + H_r$, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, $r \in \{1, 2, \dots, k\}$, із всеможливих сум множин H_i, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, по чотири доданки, по п'ять доданків, і т.д., всеможливі суми по $(k-1)$ доданків, суму всіх k доданків H_i, тобто $H_1 + H_2 + \ldots + H_k = \Omega$.

В такому разі говорять, що простір подій S породжений за поділом множини Ω на підмножини H_i, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, так, що $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{k} H_i = \Omega$.

Зрозуміло, що об'єднуючи певним чином між собою множини H_i, можна утворювати нові поділи на підмножини, що попарно не перетинаються і через об'єднання яких вичерпується множина Ω. Відповідно до таких нових поділів множини Ω на підмножини, що попарно не перетинаються, можна, аналогічно до попереднього, утворювати нові простори подій.

За такого об'єднання множин H_i в нові підмножини множини Ω: $\tilde{H}_r = \bigcup_{i \in I} H_i$, $I \subset \{1, 2, \ldots, k\}$, $r \leq k$, статистичні ймовірності підмножин $\tilde{H}_r$ будуть визначені

$$P_n^*(\tilde{H}_r) = P_n^*(\bigcup_{i \in I} H_i) = \sum_{i \in I} P_n^*(H_i).$$

Зауважимо, що підмножини $\tilde{H}_r$ множини Ω є елементами простору подій $S = \{A \mid A = \bigcup_{i \in I} H_i,\ I \subset \{1, 2, \ldots, k\}\}$, породженого за поділом множини Ω на підмножини H_i, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, такі, що $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{k} H_i = \Omega$.

Разом з тим за наведених даних побудувати ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*) з іншим поділом множини Ω на підмножини, які не складені із заданих множин H_i, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, неможливо, оскільки за наведених даних неможливо визначити статистичні ймовірності попадання в підмножини множини Ω, відмінні від тих, що є сумами (об'єднаннями) заданих множин H_i, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

В разі, коли множини H_i є одноточковими (в множині H_i є лише один елемент – елементарна подія або точка), тоді розподіл ймовірностей на множині Ω називається поточковим.

Коли H_i *є деякими інтервалами типу* $[a_{i-1};\, a_i)$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, *тобто* $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{k} [a_{i-1};\, a_i) = [a_0;\, a_k) = [a;\, b)$, *де* $a = a_0$, $b = a_k$, $-\infty < a \le b < \infty$, *неперервна множина інтервального типу, тоді розподіл ймовірностей на множині* Ω *називається поінтервальним.*

В разі, коли $\Omega = [a;\, b)$ *– неперервна обмежена множина, тобто* $-\infty < a \le b < \infty$, *а довжини інтервалів* $[a_{i-1};\, a_i)$, $i = \overline{1, k}$, $a_0 = a$, $a_k = b$, *спрямовуються до нуля, коли* k *необмежено збільшується,* $(k \to \infty)$, *тоді поінтервальний розподіл статистичних ймовірностей стає неперервним*, і задається через функцію $f(x)$ (щільність розподілу статистичних ймовірностей), за якою можна визначити статистичну ймовірність попадання в будь який інтервал $[\alpha;\, \beta) \subset [a;\, b)$ як інтеграл $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$. Очевидно в такому разі мають задовільнятися вимоги $f(x) \ge 0$, $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = 1$.

Приклад 5.1.1. Нехай квадратну мішень розмірами 5x5 поділено на п’ять зон: H_0 – круг в центрі мішені радіусом 0.75, H_1 – кільце з тим самим центром, що і в H_0, з радіусом внутрішнього кола 0.75 і радіусом зовнішнього кола 1.25, H_2 – кільце з радіусом внутрішнього і зовнішнього кіл відповідно 1.25 і 1.75, H_3 – кільце з радіусами 1.75 і 2.25, H_4 – зона зовні круга радіуса 2.25 (див. Рис. 5.1.1).

Спортсмен виконує постріл з лука у вказану мішень. Відомо, що в зону H_0 він влучає з ймовірністю 0.87, в зону H_1 – з ймовірністю 0.10, в зону H_2 – з ймовірністю 0.03, в зону H_3 – з ймовірністю 0.00, в зону H_4 – з ймовірністю 0.00.

Таким чином $\Omega = H_0 + H_1 + H_2 + H_3 + H_4$.

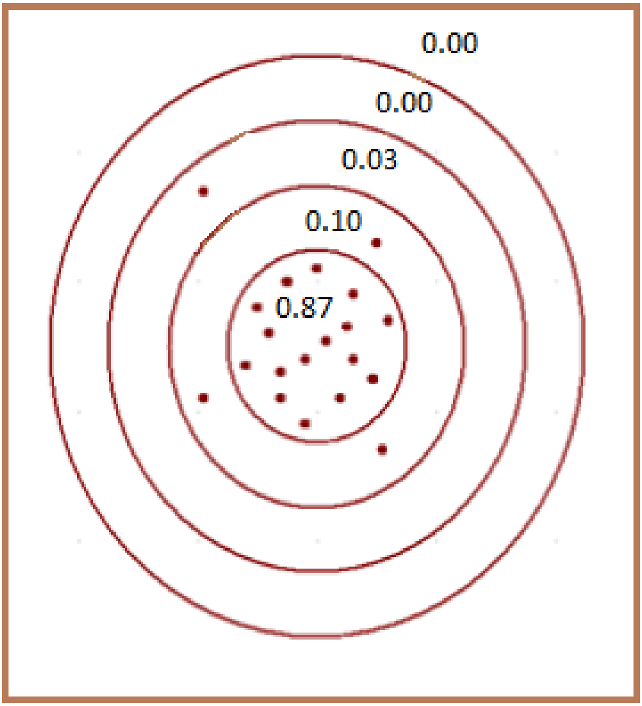


Рис. 5.1.1.

Нехай до простору подій S разом з неможливою подією (порожньою множиною) $\varnothing$ віднесені всеможливі непорожні об'єднання множин H_0, H_1, H_2, H_3, H_4, тобто

$$S = \{A \mid A = \bigcup_{i \in I} H_i \ , \ I \subset \{0, 1, 2, 3, 4\} \cup \varnothing\} \ .$$

Зауважимо, що в розглядуваному випадку ймовірнісні міри множин (подій) A із S ніяк не залежать від геометричної міри (площі) цих множин, зокрема

$P(H_0) = 0.87$, $m(H_0) = 1.767$,

$P(H_1) = 0.10 < P(H0) = 0.87$, $m(H_1) = 3.14 > m(H_0) = 1.767$,

$P(H_2) = 0.03 < P(H_1) = 0.10$, $m(H_2) = 4.71 > m(H_1) = 3.14$,

$P(H_3) = 0.00 < P(H_2) = 0.03$, $m(H_3) = 6.28 > m(H_2) = 4.71$,

$P(H_4) = 0.00 = P(H_3) = 0.00$, $m(H_4) = 9.1 > m(H_3) = 6.28$.

Зауважимо, що хоч $P(\varnothing) = 0$, однак із того, що $P(A) = 0$, $A \in S$, не випливає, що $A = \varnothing$.

Наприклад, в щойно розглянутому прикладі $P(H_3)=0$, однак попадання в множину (зону) H_3 не є неможливою подією, так само як і попадання в множину (зону) H_4 не є неможливою подією, хоч $P(H_4)=0$.

§5.2. Поточкові розподіли статистичних ймовірностей

Поточковий розподіл статистичних ймовірностей як правило задають у вигляді таблиці виду табл. 5.2.1, у якій вказують перелік всіх елементарних подій (точок) E_i, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, з яких складається множина Ω елементарних подій, та статистичні ймовірності $P_n^*(E_i)$, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, попадання в кожну точку

Табл. 5.2.1

E_i	E_1	E_2	E_3	$\dots$	E_{k-1}	E_k
$P_n^*(E_i)$	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_{k-1}	p_k

Як простір подій S розглядають найширшу сукупність підмножин множини Ω, до якої включають разом з порожньою множиною $\varnothing$ всі одноелементні підмножини множини Ω, всі двохелементні, всі триелементні, всі чотириелементні, і т.д., всі (k-1)-елементні, саму k-елементну множину Ω, тобто

$$S = \{A \mid A = \bigcup_{i \in I} \{E_i\},\ I \subset \{1, 2, \dots, k\}\},$$

де I – довільна (зокрема порожня) підмножина множини індексів $\{1, 2, 3, \dots, k-1, k\}$.

В такому разі статистична ймовірність довільної події $A \in S$ обчислюється за формулою

$$P_n^*(A) = P_n^*(\bigcup_{\{E_i\} \subset A} \{E_i\}) = \sum_{\{E_i\} \subset A} P_n^*(\{E_i\}) = \sum_{\{E_i\} \subset A} p_i .$$

Таблицю виду табл. 5.2.1 називають рядом поточкового розподілу ймовірностей за елементарними подіями E_i.

Приклад 5.2.1. Кубик підкидали велику кількість разів, в результаті чого визначили статистичну ймовірність випадання на верхній грані кубика однієї з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, нанесених на грані кубика по одній цифрі на кожній грані, і одержані дані звели в таблицю

i	1	2	3	4	5	6
$P_n^*(\{i\})$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.20	0.70

В даному прикладі $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Як простір подій S розглядатимемо найширшу сукупність підмножин множини Ω (разом з порожньою множиною).

Якщо подія $A=\{4, 5, 6\}$ – випадання на верхній грані кубика однієї з цифр 4, 5, 6, тоді $P_n^*(A)=0.04+0.20+0.70=0.94$.

Якщо подія $B=\{2, 4, 6\}$ – випадання на верхній грані кубика парної цифри, тоді $P_n^*(B)=0.02+0.04+0.70=0.76$.

Швидше за все за таких показників слід зробити висновки, що в кубику зміщено центр мас ближче до грані, протилежної до грані, на якій нанесено цифру 6.

Якщо елементарним подія E_i, $i\in\{1, 2, \ldots, k\}$, поставити у взаємно однозначну відповідність точки x_i на числовій осі, або з самого початку точки задані на числовій осі, тоді ряд розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega=\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ за точками $\{x_i\}$, $i\in\{1, 2, \ldots, k\}$, набуває вигляду

Табл. 5.2.2

x_i	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_{k-1}	x_k
$P_n^*(\{x_i\})$	p_1	p_2	p_3	$\ldots$	p_{k-1}	p_k

Якщо точки (x_i, p_i), $i\in\{1, 2, \ldots, k\}$, нанести на координатній площині і з’єднати їх відрізками прямих, тоді утвориться так званий *многокутник розподілу статистичних ймовірностей* (який іноді називають також полігоном частот) (див. Рис. 5.2.1).

Приклад 5.2.2. Велику кількість разів проводили такі випробування. Щоразу монету підкидали 6 разів і фіксували кількість випадань герба за кожних 6-ти підкидань. Статистична ймовірність випадання герба за кожного окремого підкидання виявилась рівною $\frac{1}{2}$, так само як і статистична ймовірність випадання цифри. Як можливі кількості випадань герба розглядалися 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, тобто $\Omega=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Як простір подій розглядалася найширша сукупність підмножин множини Ω (разом з порожньою множиною $\varnothing$).

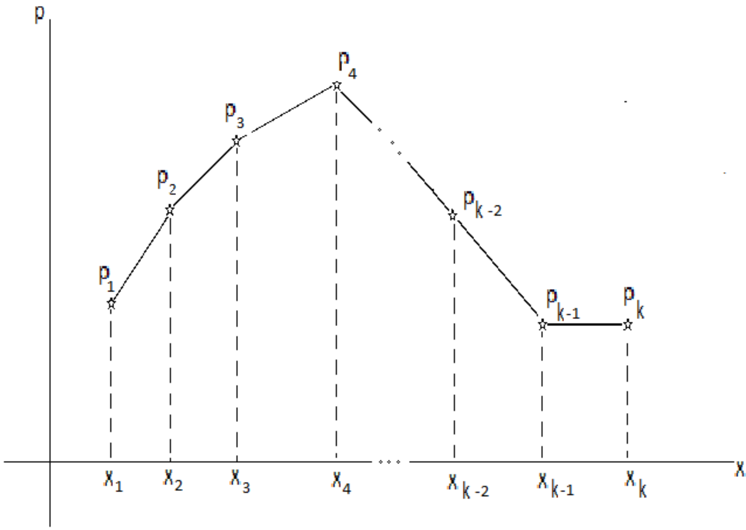


Рис. 5.2.1

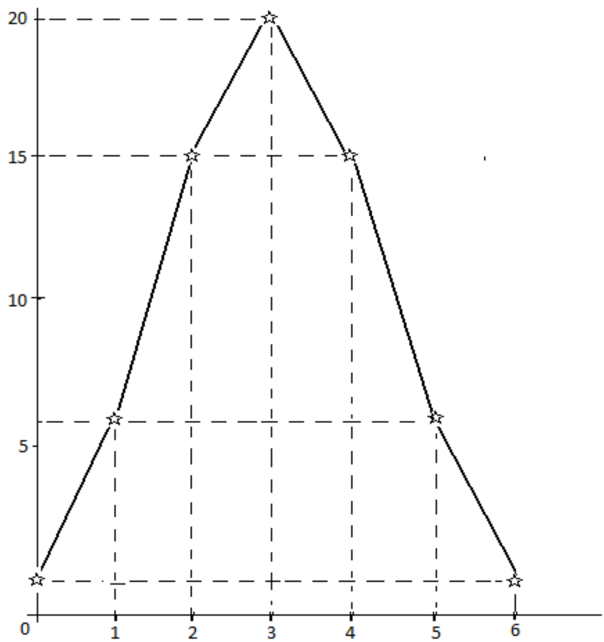


Рис. 5.2.2

Статистичні ймовірності стосовно кожної елементарної події – можливої кількості випадань герба зведені в таблицю

i	0	1	2	3	4	5	6
$P_n^*(\{i\})$	$\frac{1}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{1}{64}$

(порівняйте з обчисленням за формулою Бернуллі, коли $P_n^*(A)=\frac{1}{2}$, $P_n^*(\overline{A})=\frac{1}{2}$, $m=6$, s набуває значень 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6).

Многокутник розподілу статистичних ймовірностей в розглядуваному випадку набуває вигляду, наведеного на Рис. 5.2.2.

§5.3. Поінтервальні розподіли статистичних ймовірностей

Поінтервальний розподіл статистичних ймовірностей найчастіше задають у вигляді таблиці виду Табл. 5.3.1, у якій вказують перелік всіх інтервалів $[a_{i-1}\,;a_i)$, $i\in\{1,2,\dots,k\}$, з яких складається неперервна множина $\Omega=[a_0\,;a_k)=\bigcup\limits_{i=1}^{k}[a_{i-1}\,;a_i)$, та статистичні ймовірності попадання в такі інтервали $P_n^*([a_{i-1}\,;a_i))$, $i\in\{1,2,\dots,k\}$:

Табл. 5.3.1.

$[a_{i-1}\,;a_i)$	$[a_0\,;a_1)$	$[a_1\,;a_2)$	$[a_2\,;a_3)$	$\dots$	$[a_{k-2}\,;a_{k-1})$	$[a_{k-1}\,;a_k)$
$P_n^*([a_{i-1}\,;a_i))$	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_{k-1}	p_k

Як правило інтервали $[a_{i-1}\,;a_i)$, $i\in\{1,2,\dots,k\}$, добирають однакової довжини $h=\frac{a_k-a_0}{k}$, хоч така вимога не є обов'язковою.

Як простір подій S розглядають разом з порожньою множиною $\varnothing$ всеможливі об'єднання із одного, із двох, із трьох, і т.д., із $(k-1)$ інтервалів, а також об'єднання всіх k інтервалів $\bigcup\limits_{i=1}^{k}[a_{i-1};a_i)=\Omega$, тобто

$$S=\{A\,\big|\;A=\bigcup_{i\in I}[a_{i-1}\,;a_i),\;I\subset\{1,2,\dots,k\}\},$$

де I – довільна (зокрема порожня) підмножина множини індексів $\{1,2,3,\;\dots,\;k-1,\;k\}$.

В такому разі статистична ймовірність події $A\in S$ обчислюється за формулою

$$P_n^*(A)=P_n^*(\bigcup_{[a_{i-1}\,;a_i)\subset A}[a_{i-1}\,;a_i))=\sum_{[a_{i-1}\,;a_i)\subset A}P_n^*([a_{i-1}\,;a_i))=\sum_{[a_{i-1}\,;a_i)\subset A}p_i,\;A\in S$$

Таблицю виду Табл. 5.3.1 називають *рядом поінтервального розподілу статистичних ймовірностей.*

Розглянемо функцію

$$f_n^*(x)=\begin{cases}\dfrac{P_n^*([a_{i-1}\,;a_i))}{a_i-a_{i-1}}, & \text{коли } x\in[a_{i-1}\,;a_i),\; i\in\{1,\,2,\dots,k\},\\ 0, & \text{коли } x\overline{\in}[a_0\,;a_k),\end{cases}\qquad(5.3.1)$$

тобто функцію, яка набуває сталих значень на кожному із проміжків $[a_{i-1}; a_i)$, рівних статистичній ймовірності $P_n^*([a_{i-1}; a_i))$ попадання в проміжок $[a_{i-1}; a_i)$, поділеній на довжину $a_i - a_{i-1}$ проміжка $[a_{i-1}; a_i)$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, і значення нуль за межами проміжка $[a_0; a_k)$.

Графік такої функції називають *гістограмою* поінтервального розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega = \bigcup_{i=1}^{k} [a_{i-1}; a_i)$. На практиці найчастіше добирають інтервали $[a_{i-1}; a_i)$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, однакової довжини

$$a_i - a_{i-1} = \frac{a_k - a_0}{k} = h.$$

Приклад 5.3.1. Нехай задано поінтервальний розподіл статистичних ймовірностей за таблицею

$[a_{i-1}; a_i)$	$[0; 1)$	$[1; 2)$	$[2; 3)$	$[3; 4)$	$[4; 5)$	$[5; 6)$	$[6; 7)$
$P_n^*([a_{i-1}; a_i))$	0.05	0.10	0.15	0.40	0.15	0.10	0.05

тоді графік функції $f_n^*(x)$ набуває вигляду (Рис. 5.3.1)

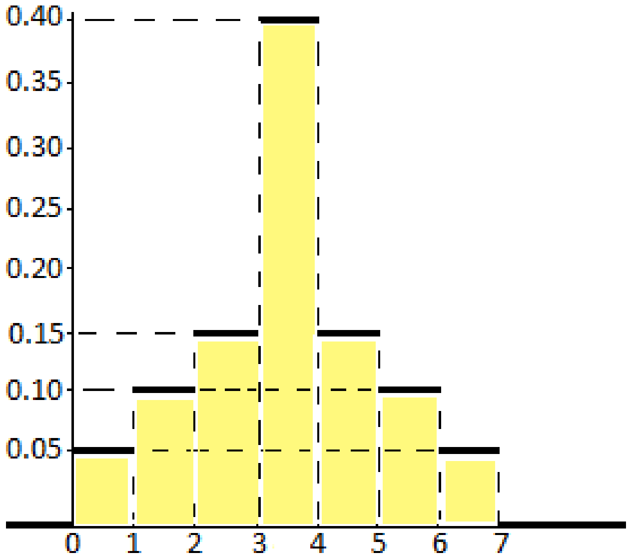


Рис. 5.3.1

Зауважимо, що в геометричному тлумаченні значення функції $f_n^*(x)=\dfrac{P_n^*([a_{i-1}\,;a_i))}{a_i-a_{i-1}}$ на інтервалі $[a_{i-1};a_i)$ є висотою прямокутника над інтервалом $[a_{i-1};a_i)$, а $P_n^*([a_{i-1};\,a_i))=f_n^*(x)\cdot(a_i-a_{i-1})$, $x\in[a_{i-1};a_i)$, є площа прямокутника з основою $[a_{i-1};a_i)$ і висотою $f_n^*(x)$, $x\in[a_{i-1};a_i)$, тому $P_n^*([a_{i-1};a_i))$ можна подати як $\int\limits_{a_{i-1}}^{a_i} f_n^*(x)dx$, тобто

$$P_n^*([a_{i-1};a_i))=\int\limits_{a_{i-1}}^{a_i} f_n^*(x)dx\,,$$

звідки

$$P_n^*(A)=P_n^*\Big(\bigcup_{[a_{i-1}\,;\,a_i)\subset A}[a_{i-1};\,a_i)\Big)=\sum_{[a_{i-1}\,;\,a_i)\subset A}P_n^*([a_{i-1};\,a_i))=$$

$$=\sum_{[a_{i-1}\,;\,a_i)\subset A}\ \int\limits_{a_{i-1}}^{a_i} f_n^*(x)dx=\int\limits_A f_n^*(x)dx,\ \ A\in S\,.$$

Таким чином статистична ймовірність $P_n^*\Big(\bigcup\limits_{[a_{i-1}\,;\,a_i)\subset A}[a_{i-1};\,a_i)\Big)$ попадання в об’єднання $\bigcup\limits_{[a_{i-1}\,;\,a_i)\subset A}[a_{i-1};\,a_i)$ проміжків $[a_{i-1};a_i)$ дорівнює інтегралу від функції $f_n^*(x)$ на такому об’єднанні проміжків $[a_{i-1};a_i)$, тобто

$$P_n^*(A)=P_n^*\Big(\bigcup_{[a_{i-1}\,;\,a_i)\subset A}[a_{i-1};\,a_i)\Big)=\int\limits_{\bigcup[a_{i-1}\,;\,a_i)\subset A} f_n^*(x)dx=\int\limits_A f_n^*(x)dx\,. \qquad (5.3.2)$$

Функцію $f_n^*(x)$*, визначену за формулою (5.3.1), називають щільністю поінтервального розподілу статистичних ймовірностей на множині* $\Omega=[a_0\,;a_k)=\bigcup\limits_{i=1}^{k}[a_{i-1};a_i)$ *за інтервалами* $[a_{i-1};a_i)$, $i\in\{1,2,\ldots,k\}$.

Приклад 5.3.2. За даними прикладу 5.3.1 обчислити статистичну ймовірність попадання в проміжок $[2;5)$.

Враховуючи формулу (5.3.2) і вираз (5.3.1) стосовно щільності $f_n^*(x)$ поінтервального розподілу статистичних ймовірностей, одержуємо

$$P_n^*([2;5)) = \int\limits_{[2;5)} f_n^*(x)dx = \int\limits_{[2;3)} f_n^*(x)dx + \int\limits_{[3;4)} f_n^*(x)dx + \int\limits_{[4;5)} f_n^*(x)dx =$$

$$= 0.15 \cdot 1 + 0.40 \cdot 1 + 0.15 \cdot 1 = 0.70$$

Очевидно, стосовно функції $f_n^*(x)$ – щільності поінтервального розподілу статистичних ймовірностей на множині $[a_0; a_k)$ за інтервалами $[a_{i-1}; a_i)$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, задовільняються такі основні властивості:

1) $f_n^*(x) \geq 0$, $x \in (-\infty; \infty)$,

2) $\int\limits_{(-\infty;\, \infty)} f_n^*(x)dx = 1$.

§5.4. Неперервні розподіли статистичних ймовірностей

В разі, коли за поінтервального розподілу ймовірнісної міри на множині $\Omega=[a_0\,;a_k)=\bigcup_{i=1}^{k}[a_{i-1}\,;a_i)$, коли як простір подій S розглядається сукупність всеможливих об'єднань інтервалів $[a_{i-1}\,;a_i)$, до якої включається також порожня множина $\varnothing$, тобто $S=\{A\,|\;A=\bigcup_{i\in I}[a_{i-1};a_i),\; I\subset\{1,2,\dots,k\}\}$, ймовірнісна міра на просторі подій S задана через статистичні ймовірності $P_n^*([a_{i-1}\,;a_i))$, $i\in\{1,2,\dots,k\}$, довжина (a_i-a_{i-1}) інтервалів $[a_{i-1}\,;a_i)$, $i\in\{1,2,\dots,k\}$, спрямовується до нуля (див. Рис. 5.4.1 – 5.4.4), тоді поінтервальний розподіл ймовірнісної міри (статистичних ймовірностей $P_n^*(A)$, $A\in S$) на множині $\Omega=[a_0\,;a_k)=[a;b)$, де $a=a_0$, $b=a_k$, перетворюється на неперервний. Як простір подій S в такому разі разом з порожньою множиною $\varnothing$ розглядається сукупність всеможливих інтервалів із множини (відрізка) $\Omega=[a;b)$ та всеможливих об'єднань таких інтервалів в довільній кількості та перетинів таких об'єднань інтервалів.

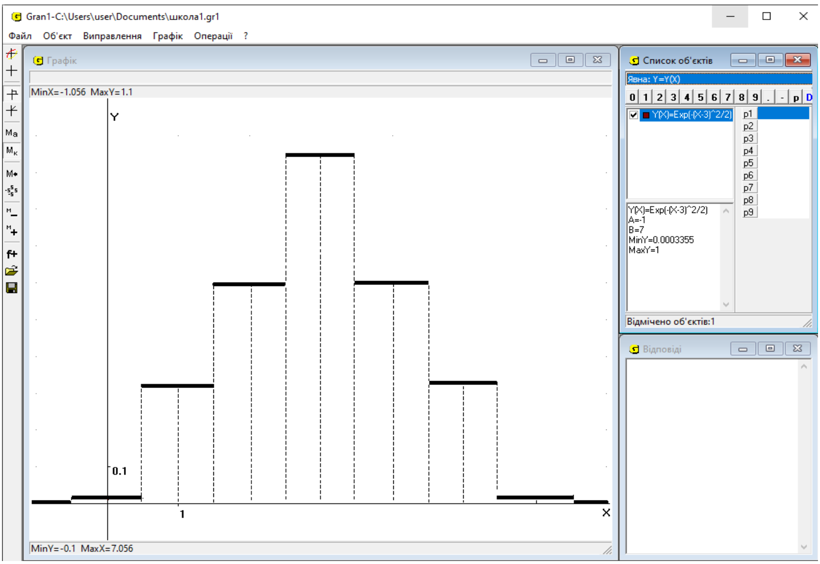


Рис. 5.4.1

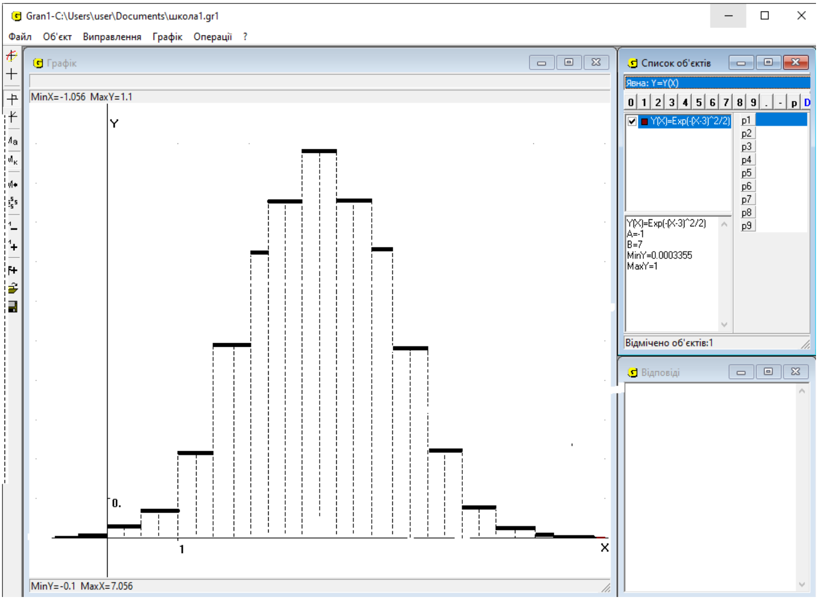


Рис. 5.4.2

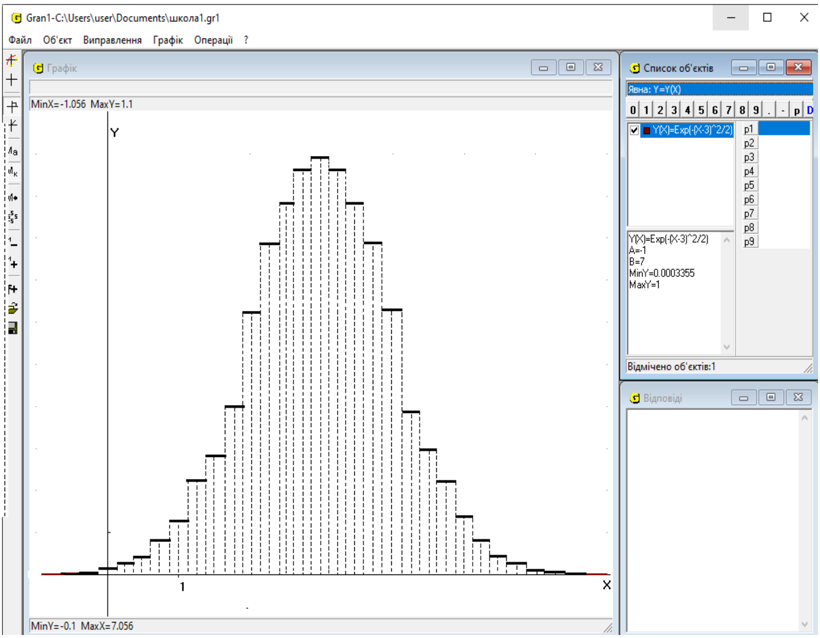


Рис. 5.4.3

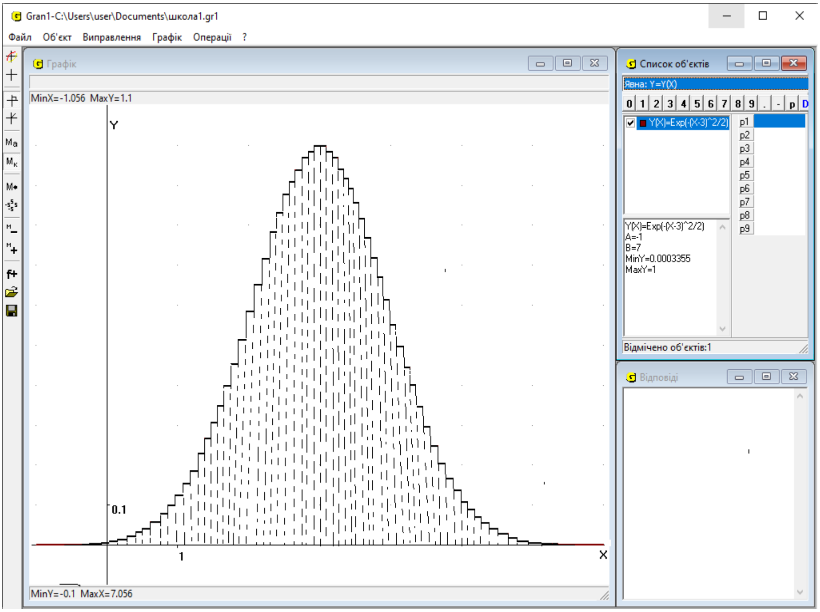


Рис. 5.4.4

Зокрема будь які відкриті підмножини множини Ω також відносяться до такого простору подій. Скінченні підмножини множини Ω також відносяться до розглядуваного простору подій S. Суттєвим є те, що стосовно всіх елементів $A \in S$ може бути визначена їх міра (довжина інтервалів – відкритих, замкнених, напіввідкритих, з яких складено множину A).

Такі підмножини множини $\Omega = [a; b)$ *називаються борелівськими* (за ім'ям одного з основоположників теорії міри видатного французького математика Еміля Бореля). Сукупність борелівських підмножин відрізка $[a; b]$ позначають через $\mathscr{B}([a; b])$.

В разі, коли $\Omega = (-\infty; \infty) = R^1$, тоді сукупність борелівських підмножин числової прямої $R^1 = (-\infty; \infty)$ позначають символами $\mathscr{B}(R^1)$. Всі борелівські множини є вимірними за Е. Борелем.

Зауважимо, що міри (довжини) множин $[a; b]$, $[a; b)$, $(a; b]$, $(a; b)$, які є борелівськими, дорівнюють $b - a$, міра множини $[a; a]$ дорівнює $a - a = 0$, як міра (довжина) окремої точки.

Тому $[a;b]=(a;b)\bigcup[a;a]\bigcup[b;b]$, звідки $l([a;b])=l((a;b))+l([a;a])+l([b;b])=l((a;b))=b-a$

Аналогічно $l([a;b])=l([a;b))=l((a;b])=b-a$, де $l([a;b])$ – довжина відрізка $[a;b]$.

Ймовірнісну міру $P(A)$, $A\in S$, на просторі подій S (сукупності борелівських підмножин множини Ω) в разі неперервного розподілу задають через щільність $f(x)$ розподілу ймовірнісної міри на множині $\Omega=[a;b)$, стосовно якої мають задовільнятися дві *основні властивості щільності розподілу ймовірнісної міри* на множині Ω:

1) $f(x)\geq 0$;

2) $\int\limits_{(-\infty;\infty)} f(x)dx=\int\limits_{[a;b)} f(x)dx+\int\limits_{(-\infty;\infty)\setminus[a;b)} f(x)dx=1$.

В разі, коли за межами проміжка $[a;b]$ функція $f(x)$ набуває нульових значень, вимога 2) набуває вигляду

2) $\int\limits_{[a;b)} f(x)dx=1$ (або, що те саме, $\int\limits_a^b f(x)dx=1$).

За необхідності обчислити ймовірнісну міру $P([\alpha;\beta))$ проміжка $[\alpha;\beta)\subset[a;b)=\Omega$ (тобто ймовірність, зокрема статистичну, попадання на проміжок $[\alpha;\beta)$) за заданої щільності $f(x)$ розподілу ймовірнісної міри (тобто ймовірності) на проміжку $[a;b]=\Omega$, використовують формулу

$$P([\alpha;\beta))=\int\limits_{[\alpha;\beta)} f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(x)dx.$$

Приклад 5.4.1. Задано неперервний розподіл ймовірностей (можливо статистичних) на проміжку $[-1;1]$ через щільність розподілу ймовірностей (Рис. 5.4.5)

$$f(x)=\begin{cases} h(1-|x|), & \text{коли } x\in[-1;1], \\ 0, & \text{коли } x\notin[-1;1]. \end{cases}$$

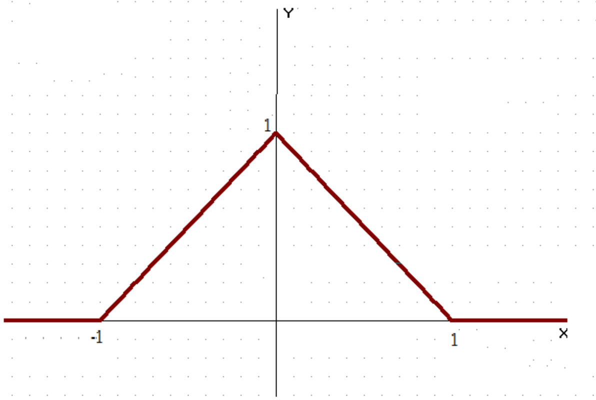


Рис. 5.4.5

1. Визначити сталу h.

2. Обчислити ймовірність попадання на проміжок $[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$.

1. Враховуючи основні вимоги стосовно щільності ймовірностей, зокрема властивість 1), одержуємо вимогу

$\int\limits_{[-1;1]} h(1-|x|)dx = 1$, або

$$h\int\limits_{-1}^{1}(1-|x|)dx = h2\int\limits_{0}^{1}(1-x)dx = 2h(x-\frac{x^2}{2})\Bigg|_0^1 = 2\cdot h\cdot(1-\frac{1}{2}) = h.$$

Таким чином щоб виконувалась вимога $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = 1$, необхідно покласти $h=1$.

2. Обчислюючи ймовірність попадання на проміжок $[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$, за заданого розподілу ймовірностей на множині $\Omega=[-1;\,1]$ одержуємо (див. Рис. 5.4.5, Рис. 5.4.6):

$$P([-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]) = \int\limits_{-1/2}^{1/2}(1-|x|)dx = 2\int\limits_{0}^{1/2}(1-x)dx = 2(x-\frac{x^2}{2})\Bigg|_0^{1/2} = 2(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}) =$$

$$= 2(\frac{4}{8}-\frac{1}{8}) = 2\cdot\frac{3}{8} = \frac{3}{4}.$$

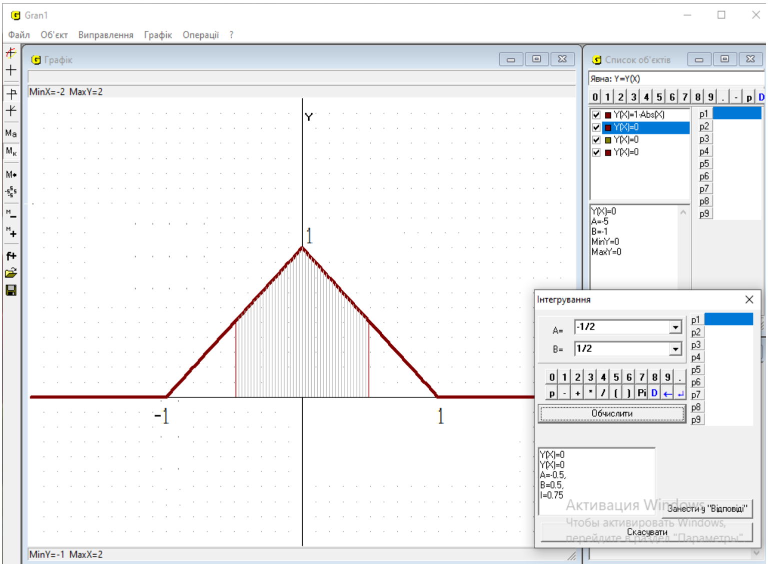

Gran1
Файл Об'єкт Виправлення Графік Операції ?
Графік
MinX=-2 MaxY=2
Y
1
-1
1
MinY=-1 MaxX=2
Список об'єктів
Явна: Y=Y(X)
Y(X)=1-Abs(X)
Y(X)=0
Y(X)=0
Y(X)=0
Y(X)=0
A=-5
B=-1
MinY=0
MaxY=0
Інтегрування
A= -1/2
B= 1/2
Обчислити
Y(X)=0
Y(X)=0
A=-0.5,
B=0.5,
I=0.75
Занести у "Відповіді"
Скасувати

Рис. 5.4.6

§5.5. Основні числові характеристики розподілів ймовірностей

До найважливіших числових характеристик розподілів ймовірностей (зокрема статистичних) відносяться координата (абсциса) центра розподілу ймовірностей, яку позначають через x_c, та дисперсія, за якою визначають величину розсіювання ймовірностей навколо центра розподілу ймовірностей (див. Рис. 5.5.1 а, б)

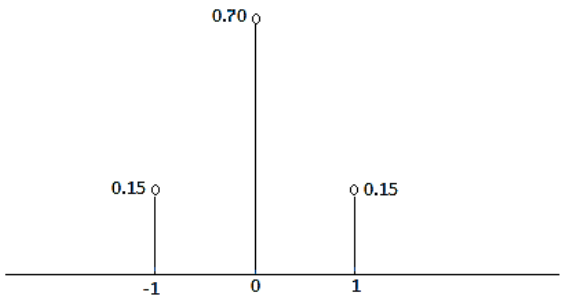


Рис. 5.5.1 а)

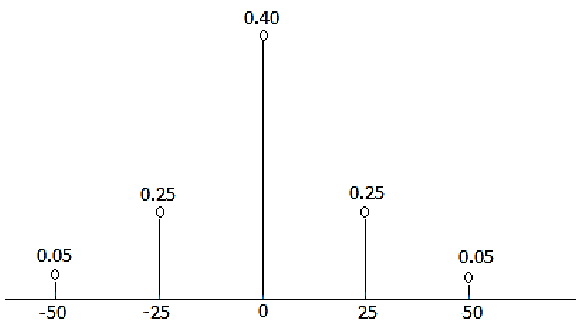


Рис. 5.5.1 б)

Наприклад на Рис. 5.5.1 а) всі три точки $x=-1$, $x=0$, $x=1$ віддалені від точки $x=0$ не далі, ніж на віддаль, що дорівнює 1. Точку $x=0$ в такому разі доцільно вважати центром розсіювання ймовірностей (зокрема статистичних $P_n^*(\{x_i\})$, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$).

На Рис. 5.5.1 б) точки $x=-50$, $x=-25$, $x=25$, $x=50$ віддалені від точки $x=0$, яку природно вважати центром розсіювання ймовірностей, на значно більші віддалі, ніж у випадку, поданому на Рис. 5.5.1 а), і тому природно вважати розсіювання ймовірностей навколо центра розсіювання у випадку б) значно більшим, ніж у випадку а).

Координату x центра розсіювання ймовірностей (зокрема статистичних) в разі поточкового розподілу ймовірностей $P(\{x_i\})$, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, (див. §5.2), обчислюють за формулою $x_c = \sum_{i=1}^{k} x_i \; P(\{x_i\})$.

Дисперсію D – міру розсіювання ймовірностей навколо центра розсіювання в разі поточкового розподілу ймовірностей (зокрема статистичних) обчислюють за формулою

$$D = \sum_{i=1}^{k} (x_i - x_c)^2 \, P(\{x_i\}) .$$

Зауважимо, що коли розподіл ймовірностей $P(\{x_i\})$, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, тлумачити як розподіл одиничної маси $\sum_{i=1}^{k} P(\{x_i\})$ за точками $x_1, x_2, \dots, x_k$ такий, що на точку x_i припадає маса $P(\{x_i\})$, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, тоді в механічному тлумаченні x_c є координата центра мас загальної одиничної маси, розподіленої вздовж осі Ox так, що на точку з абсцисою x_i припадає маса $P(\{x_i\})$, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, а дисперсія D є моментом інерції системи мас $P(\{x_i\})$, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, відносно центра мас.

В разі поінтервального розподілу ймовірностей, зокрема статистичних, за інтервалами $[a_{i-1}; a_i)$, $i \in \overline{1,k}$, на множині $\Omega = \bigcup_{i=1}^{k} [a_{i-1}; a_i)$, $S = \{A \mid A = \bigcup_{i \in I} [a_{i-1}; a_i),\ I \subset \{1, 2, \dots, k\}\}$, коли задана щільність поінтервального розподілу ймовірностей (зокрема статистичних , див. §5.3)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{P([a_{i-1}; a_i))}{a_i - a_{i-1}}, \text{ коли } x \in [a_{i-1}; a_i), i \in \{1, 2, \dots, k\}, \\ 0, \text{ коли } x \,\overline{\in}\, [a_0; a_k), \end{cases}$$

як і в разі неперервного розподілу ймовірностей (зокрема, статистичних) на множині $\Omega = [a; b)$, $S = \mathscr{B}([a; b))$, заданого через щільність $f(x)$ розподілу ймовірностей (зокрема статистичних) таку, стосовно якої задовільняються вимоги:

1) $f(x) \geq 0$,

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$,

координата x_c центра розподілу ймовірностей обчислюється за формулою $x_c = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$.

Дисперсія D в розглядуваних випадках обчислюється за формулою $D = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - x_c)^2 f(x)dx$.

Приклад 5.5.1. Нехай щільність розподілу ймовірностей задана у вигляді (див. Рис. 5.5.2)

$$f(x) = \begin{cases} hx(4-x), & \text{коли } x \in [0;4], \\ 0, & \text{коли } x \,\overline{\in}\, [0;4]. \end{cases}$$

1. Визначити сталу h.

2. Обчислити координату x_c центра розсіювання ймовірностей і дисперсію D розсіювання ймовірностей.

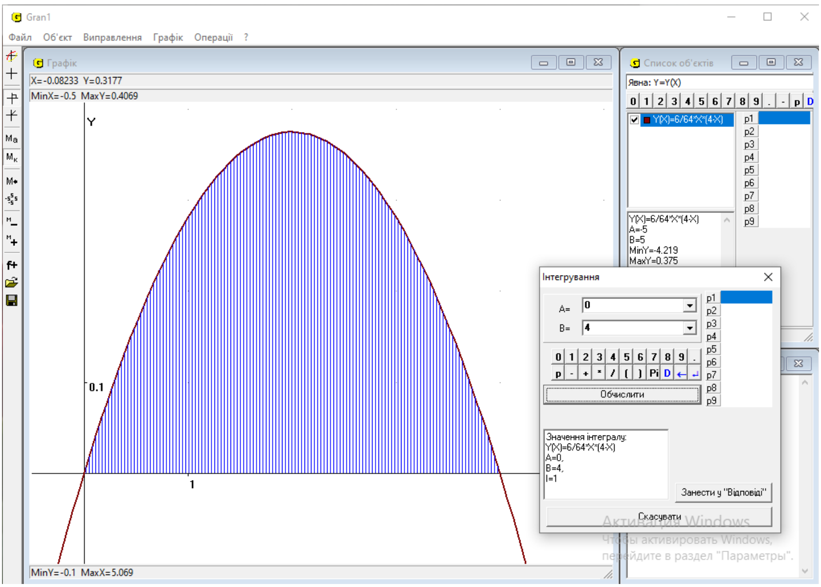


Рис. 5.5.2

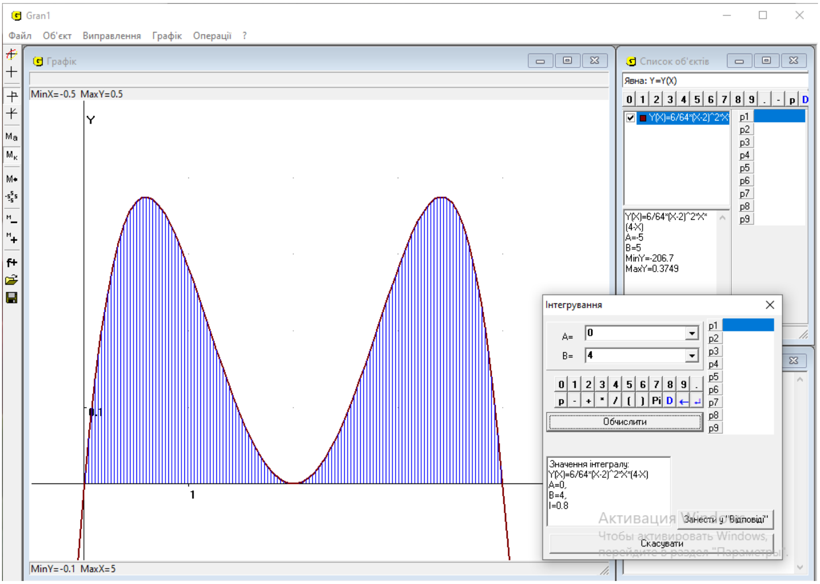


Рис. 5.5.3

Розв'язування.

1. Із вимог 1) і 2) стосовно щільності розподілу ймовірностей знаходимо:

1) $h > 0$;

2) $\int\limits_0^4 hx(4-x)dx = 1$, тобто $h\int\limits_0^4 (4x - x^2)dx = 1$, звідки $h(4\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3})\Big|_0^4 = 1$, або $h(\frac{64}{2} - \frac{64}{3}) = h64(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = h \cdot \frac{64}{6} = 1$, звідки $h = \frac{6}{64}$.

3) Обчислюючи координату x_c центра розсіювання ймовірностей, знаходимо

$$x_c = \int\limits_0^4 x \cdot \frac{6}{64} x(4-x)dx = \frac{6}{64}\int\limits_0^4 x^2(4-x)dx = \frac{6}{64}\int\limits_0^4 (4x^2 - x^3)dx =$$

$$= \frac{6}{64}(4\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4})\Big|_0^4 = \frac{6}{64} \cdot (4\frac{4^3}{3} - \frac{4^4}{4}) = \frac{6}{64} 4^4 (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) =$$

$$= \frac{6}{64} \cdot 4 \cdot 64(\frac{4}{12} - \frac{3}{12}) = 24 \cdot \frac{1}{12} = 2$$

Обчислюючи дисперсію D , знаходимо

$$D=\int_0^4 (x-2)^2 \cdot \frac{6}{64} x(4-x)dx = \frac{6}{64}\int_0^4 (x-2)^2 x(4-x)dx \,.$$

Застосовуючи програму Gran1 до обчислення даного інтеграла, знаходимо (див. Рис. 5.5.3) $D=0.8$.

§5.6. Деякі важливі поточкові розподіли ймовірностей

Серед поточкових розподілів ймовірностей на практиці найчастіше використовуються:

а) рівномірний поточковий розподіл ймовірностей на скінченній множині $\Omega=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ізольованих точок $\{x_i\}$, $i\in\{1,2,\dots,n\}$;

б) біноміальний поточковий розподіл ймовірностей на скінченній множині $\Omega=\{0,1,2,\dots,n\}$ (див. §4.5);

в) геометричний поточковий розподіл ймовірностей на нескінченній множині $\Omega=\{1,2,3,\dots,n,\dots\}$.

а) *Рівномірний поточковий розподіл ймовірностей на скінченній множині* $\Omega=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ задають через ряд розподілу ймовірностей (зокрема статистичних) виду

x_i	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_{n-1}	x_n
$P(\{x_i\})$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\dots$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$

тобто $P(\{x_i\})=\dfrac{1}{n}$ за довільних $i\in\{1,2,\dots,n\}$.

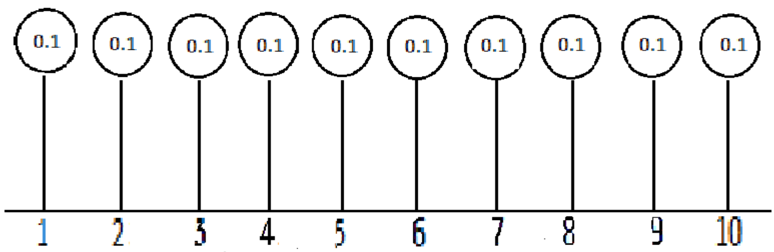


Рис. 5.6.1

Як простір подій S розглядають сукупність довільних підмножин множини Ω разом з порожньою множиною, тобто $S=\{A \mid A=\bigcup\limits_{i\in I}\{x_i\},\ I\subset\{1,2,\dots,n\}\}$. В такому разі, коли подія $A\in S$ складається з m будь яких елементів множини Ω, тобто

$A=\bigcup_{i\in I}\{x_i\}$, $k(I)=m$, де $k(I)$ – кількість елементів в множині I, тоді

$$P(A)=P(\bigcup_{i\in I}\{x_i\})=\sum_{i\in I}P(\{x_i\})=\frac{1}{n}\cdot m=\frac{m}{n}. \qquad (5.6.1)$$

Разом з тим слід наголосити, *що формула, за якою* $P(A)=\dfrac{m}{n}$ *(в разі рівномірного розподілу ймовірностей на скінченній множині із* n *точок), не є означенням ймовірності випадкової події* A, оскільки за інших поточкових розподілів, зокрема на нескінченних множинах точок, ймовірності $P(A)$, $A\in S$, із відповідних просторів подій обчислюються за іншими формулами.

Зауважимо, що в разі, коли множина Ω нескінченна, тоді розподіл ймовірностей на такій множині рівномірним бути не може.

Що стосується числових характеристик рівномірного розподілу ймовірностей (зокрема статистичних), то легко бачити, що

$$x_c=\sum_{i=1}^{n}x_iP(\{x_i\})=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\,,$$

тобто абсциса x_c центра рівномірного розподілу ймовірностей на скінченній множині точок $\Omega=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ дорівнює середньому арифметичному абсцис точок $\{x_i\}$, з яких складається множина Ω.

Дисперсія рівномірного розподілу ймовірностей на скінченній множині $\Omega=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ обчислюється за формулою

$$D=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_c)^2P(\{x_i\})=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i)^2\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i)^2\,.$$

Зрозуміло, що коли множина ізольованих точок $\{x_i\}$ нескінченна, тобто $\Omega=\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, то на такій множині точок рівномірний розподіл ймовірностей задати неможливо.

На Рис. 5.6.1 наведено графічне подання рівномірного поточкового розподілу ймовірностей на скінченній множині точок $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. який визначається за таблицею

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(\{x_i\})$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1

б) Біноміальний поточковий розподіл ймовірностей на скінченній множині $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$ задають через розподіл ймовірностей виду (див. §4.5)

m	0	1	2	…	$n-1$	n
$P(B_{n,m})$	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	$C_n^{n-1} p^{n-1} q^1$	$C_n^n p^n q^0$

де $B_{n,m}$ – подія, яка полягає в тому, що подія A, яка в кожному випробуванні відбувається з ймовірністю $P(A) = p$ і не відбувається з ймовірністю $P(\overline{A}) = q = 1 - p$, в n незалежних випробуваннях відбудеться m разів (див. §4.5).

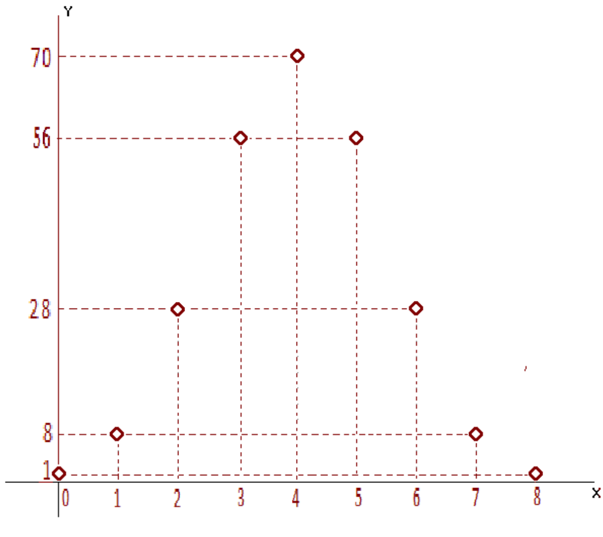


Рис. 5.6.2

Виявляється, що координата x_c центра розсіювання біноміального розподілу ймовірностей дорівнює $x_c = np$, а дисперсія D дорівнює $D = npq$.

На Рис. 5.6.2 наведено графічне подання нерівномірного поточкового розподілу ймовірностей на скінченній множині точок $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, який визначається за таблицею:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(\{x_i\})$	$\frac{1}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{70}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{1}{256}$

в) *Геометричний поточковий розподіл ймовірностей на нескінченній множині точок* $\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$.

Геометричним називається поточковий розподіл ймовірностей, який отримується в разі, коли незалежні випробування проводяться до першого відбування події A, яка за кожного випробування відбувається з ймовірністю $P(A) = p$ і не відбувається з ймовірністю $P(\overline{A}) = q = 1 - p$. В такому разі ймовірність того, що подія A відбудеться за першого випробування, дорівнює p; ймовірність того, що подія A за першого випробування не відбудеться, а відбудеться за другого випробування, дорівнює qp; ймовірність того, що подія A відбудеться за третього випробування, а за перших двох не відбудеться, дорівнює $q^2 p$; і т.д., ймовірність того, що подія A відбудеться за n-го випробування, а за всіх (n-1) попередніх не відбудеться, дорівнює $q^{n-1} p$, і т.д. В такий спосіб отримується нескінченний ряд чисел, що є членами нескінченної спадної геометричної прогресії з першим членом p і знаменником прогресії q.

Як відомо, сума членів нескінченної спадної геометричної прогресії обчислюється за формулою

$$S = \frac{a}{1-q},$$

де a – перший член прогресії, q – знаменник прогресії.

В розглядуваному випадку $S = \frac{a}{1-q} = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$, тобто сума всіх ймовірностей за їх геометричного розподілу на нескінченній множині точок $\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ у вигляді

i	1	2	3	…	n	…
$P(\{i\})$	p	qp	$q^2 p$	…	$q^{n-1} p$	…

дорівнює 1.

Назва розподілу ймовірностей походить від того, що з послідовності ймовірностей такого розподілу утворюється геометрична прогресія.

На Рис. 5.6.3 наведено графічне подання перших кількох ймовірностей геометричного нерівномірного поточкового розподілу ймовірностей на нескінченній множині точок $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$, який визначається за таблицею (за умови $p = \frac{1}{2}$):

x_i	1	2	3	4	5	6	7	…
$P(\{x_i\})$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	…

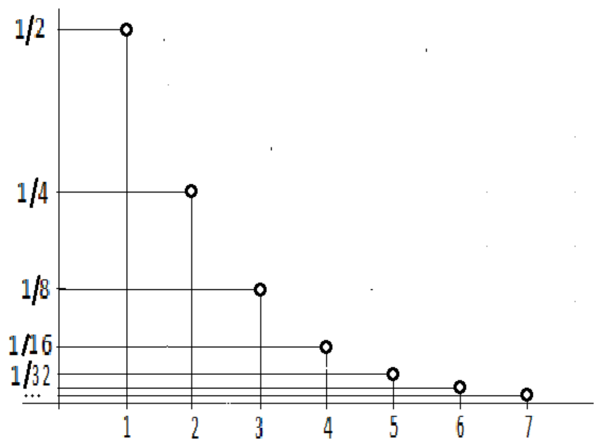


Рис. 5.6.3

г) Розподіл Пуассона – так називається розподіл ймовірностей на нескінченній множині $\{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, який отримується з біноміального розподілу ймовірностей в разі, коли кількість випробувань необмежено збільшується, а ймовірність відбування події A в кожному випробуванні стає дуже малою. Тому розподіл ймовірностей за законом Пуассона

$$P(B_{n,m}) = \frac{a^m}{m!}e^{-a}\ ,\ m \in \{0, 1, 2, 3,\ \ldots, n,\ \ldots\},$$

де $B_{n,m}$ – подія, яка полягає в тому, що за досить великої кількості n випробувань подія A відбудеться m разів за умови, що в кожному випробуванні подія A відбувається з досить малою ймовірністю $p = \frac{a}{n}$, називають також розподілом за законом рідкісних явищ.

Виявляється, що (за досить великих n)

$$\sum_{m=0}^{\infty} P(B_{n,m}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!}e^{-a} = 1\,,$$

абсциса x_c центра такого розподілу ймовірностей дорівнює a , тобто $x_c = a$, дисперсія D також дорівнює a , тобто $D = a$.

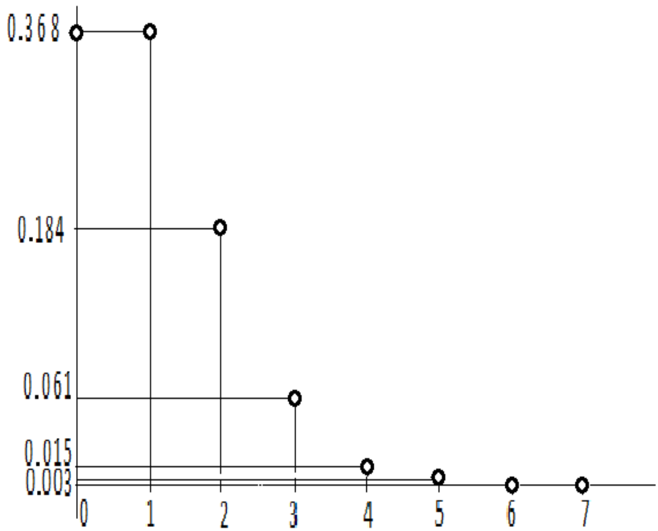


Рис. 5.6.4

На Рис. 5.6.4 наведено графічне подання перших кількох ймовірностей нерівномірного поточкового розподілу ймовірностей за законом Пуассона на нескінченній множині точок $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$, який визначається за таблицею (за умови $a = 1$):

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	…
$P(\{x_i\})$	0.368	0.368	0.184	0.061	0.015	0.003	0.000	0.000	…

§5.7. Деякі неперервні розподіли ймовірностей

Серед неперервних розподілів на практиці найчастіше використовуються:

а) рівномірний розподіл ймовірностей на неперервній обмеженій множині виду $\Omega = [a; b]$, де $-\infty < a < b < +\infty$;

б) нормальний розподіл ймовірностей на неперервній нескінченній множині $\Omega = (-\infty; \infty)$;

в) показниковий розподіл ймовірностей на неперервній нескінченній множині $\Omega = [0; \infty)$

та деякі інші.

В усіх випадках як простір S подій розглядається система борелівських множин $\mathscr{B}(R^1)$ (див. §5.4).

а) *Рівномірний розподіл ймовірностей на неперервній обмеженій множині* $\Omega = [a; b)$ задають через щільність $f(x)$ неперервного розподілу ймовірностей виду

$$f(x) = \begin{cases} c, & \text{коли } x \in [a; b], \\ 0, & \text{коли } x \overline{\in} [a; b]. \end{cases} \tag{5.7.1}$$

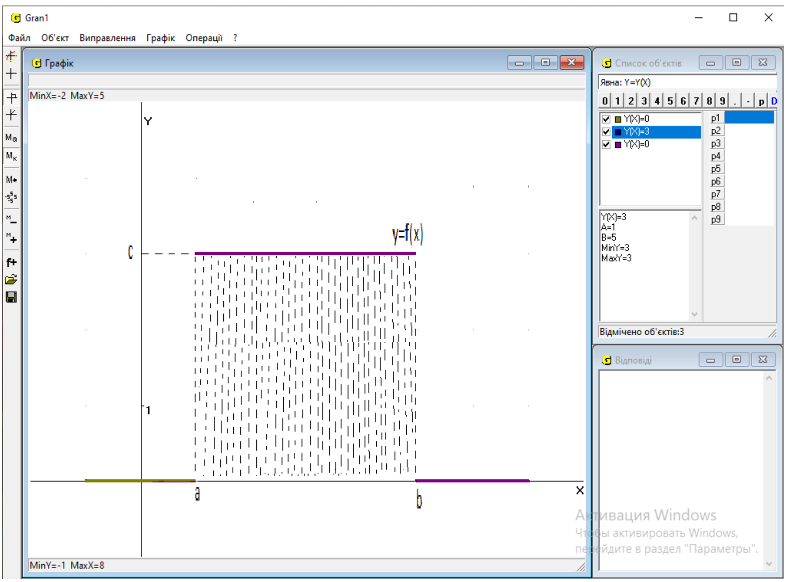


Рис. 5.7.1

Враховуючи основні вимоги стосовно щільності $f(x)$ розподілу ймовірностей

1) $f(x) \ge 0$,

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$,

знаходимо:

1) $c \ge 0$,

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} 0 \cdot dx + \int\limits_{a}^{b} c \cdot dx + \int\limits_{b}^{+\infty} 0 \cdot dx = c\int\limits_{a}^{b} dx = cx\Big|_{a}^{b} = c(b-a)$,

звідки за вимогою $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ стала c має дорівнювати $c = \dfrac{1}{b-a}$.

Оскільки в геометричному тлумаченні $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$, де $f(x) \ge 0$, є площа під графіком функції $y = f(x)$ над проміжком $[a;b]$, розглядувану сталу c можна було визначити з вимоги, за якою площа прямокутника з основою $[a;b]$ і висотою c (див. Рис. 5.7.1) повинна дорівнювати 1, тобто має бути $c(b-a) = 1$, звідки $c = \dfrac{1}{b-a}$.

Зауважимо, що в разі, коли множина $\Omega = [a;b]$ необмежена, $-\infty \le a < b \le \infty$, тоді розподіл ймовірностей на такій множині рівномірним бути не може.

Стосовно числових характеристик x_c і D за рівномірного неперервного розподілу ймовірностей на проміжку $[a;b]$ одержуємо: $x_c = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$, або, враховуючи задання (5.7.1) щільності розподілу ймовірностей,

$$x_c = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xcdx = \int\limits_{a}^{b} \frac{1}{b-a} xdx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2}\Bigg|_{a}^{b} = \frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{a+b}{2},$$

тобто центр розсіювання ймовірностей в разі рівномірного неперервного розподілу ймовірностей на обмеженому проміжку $[a;b]$ знаходиться посередині (в центрі) цього проміжка.

Стосовно дисперсії D за рівномірного неперервного розподілу ймовірностей на обмеженому проміжку $[a;b]$ одержуємо $D=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-x_c)^2 f(x)dx$, тобто в розглядуваному разі

$$D=\int\limits_a^b (x-\frac{a+b}{2})^2\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\frac{1}{3}(x-\frac{a+b}{2})^3\Big|_a^b=$$

$$=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{3}\left[(b-\frac{a+b}{2})^3-(a-\frac{a+b}{2})^3\right]=\frac{1}{3(b-a)}\left[(\frac{b-a}{2})^3-(\frac{a-b}{2})^3\right]=$$

$$=\frac{1}{3(b-a)}\cdot 2(\frac{b-a}{2})^3=\frac{1}{3(b-a)}\cdot 2\frac{(b-a)^3}{8}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

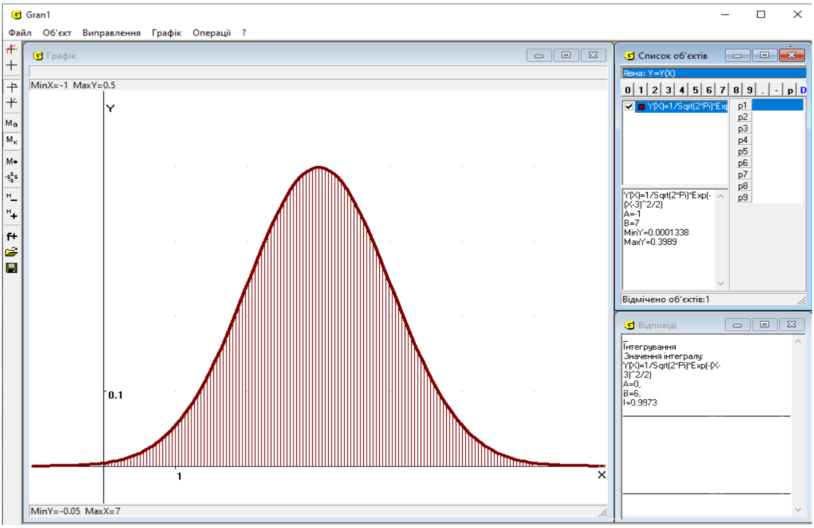


Рис. 5.7.2

Таким чином чим довшим є проміжок $[a;b]$, на якому рівномірно розподілені ймовірності, тим більшою є дисперсія, тобто тим більшим є розсіювання ймовірностей навколо центра рівномірного неперервного розподілу ймовірностей на проміжку $[a;b]$.

Очевидно за рівномірного неперервного розподілу ймовірностей на проміжку $[a;b]$ ймовірність попадання на проміжок $[\alpha;\beta]\subset[a;b]$ дорівнює

$$P([\alpha;\beta])=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}x\Bigg|_{\alpha}^{\beta}=\frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

б) *Нормальний (неперервний) розподіл ймовірностей на нескінченній множині* $\Omega=(-\infty;\infty)$ задають через щільність розподілу виду

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\ x\in(-\infty;\infty). \qquad (5.7.2)$$

Графік щільності нормального розподілу ймовірностей подано на Рис. 5.7.2.

Виявляється, що

$$P([-\infty;\infty])=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=1,$$

параметр a є абсцисою центра розсіювання ймовірностей за нормального розподілу ймовірностей на множині $\Omega=(-\infty;\infty)$ із щільністю (5.7.2), тобто $x_c=a$ (див. Рис. 5.7.3), параметр $\sigma=\sqrt{D}$, тобто дисперсія D за нормального розподілу ймовірностей на проміжку $(-\infty;\infty)$ із щільністю (5.7.2) дорівнює σ^2, і тому чим більше σ, тим більше розсіювання ймовірностей навколо центра розсіювання, і навпаки, чим менше σ, тим більше скупчуються ймовірності навколо центра розсіювання і тим меншим є розсіювання (див. Рис. 5.7.4).

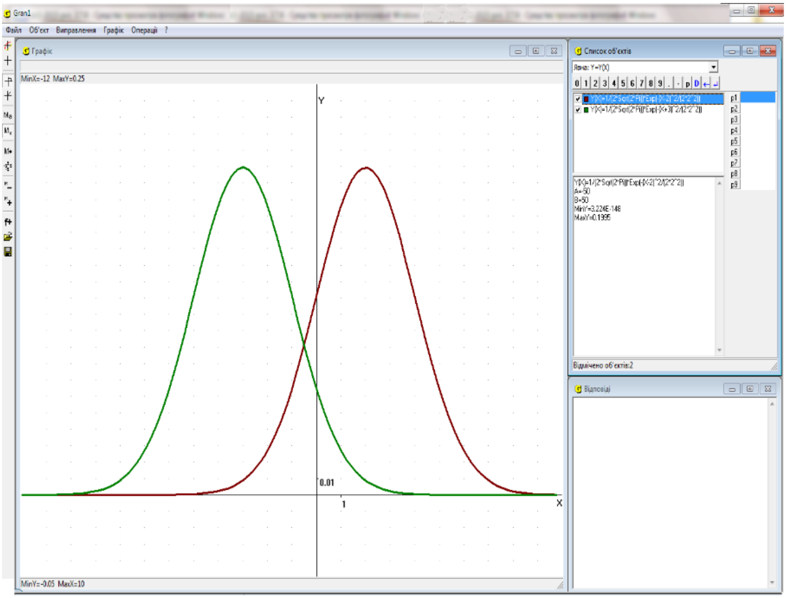


Рис. 5.7.3

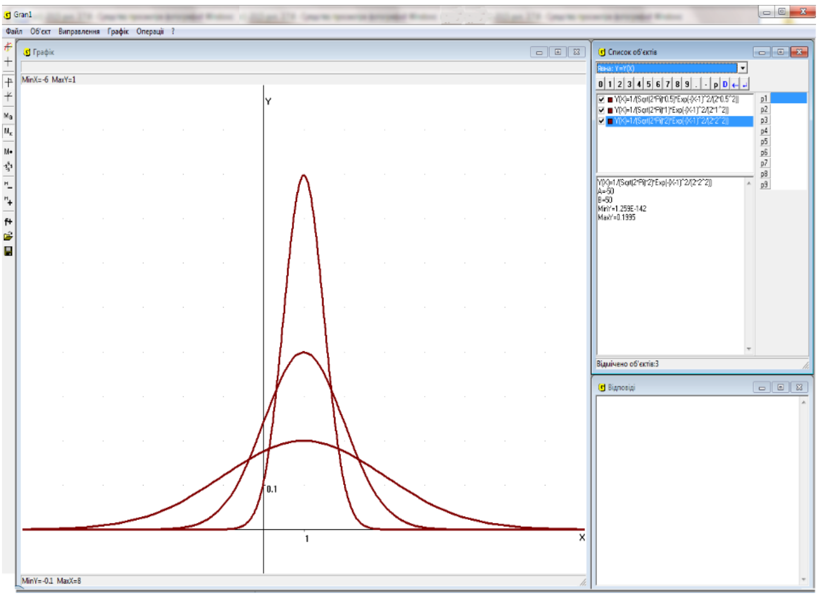


Рис. 5.7.4

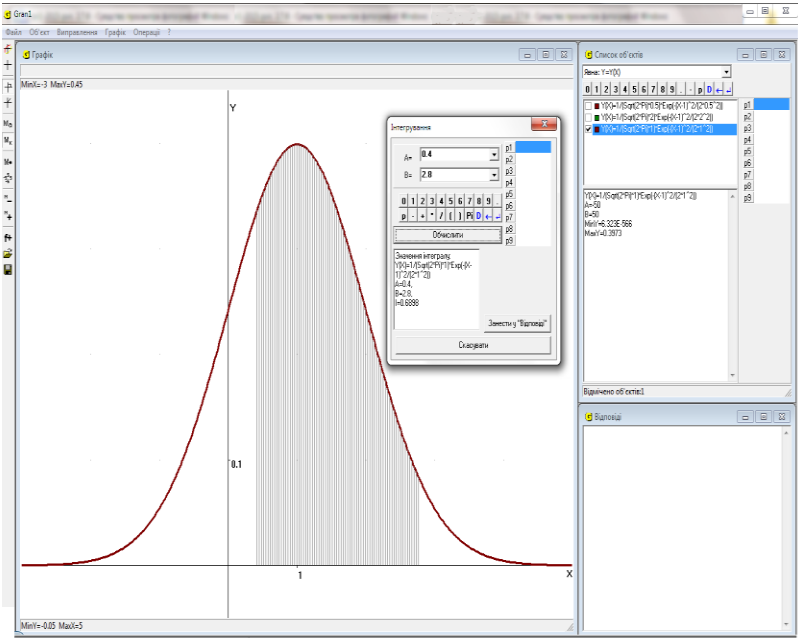


Рис. 5.7.5

За нормального розподілу ймовірностей на множині $\Omega = (-\infty; \infty)$ із щільністю (5.7.2) ймовірність $P([\alpha;\beta])$ попадання на проміжок $[\alpha;\beta]$, тобто

$$P([\alpha;\beta]) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx \qquad (5.7.3)$$

легко обчислюється за допомогою програми Gran1 (див. Рис. 5.7.5).

Слід зауважити, що інтеграл $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ в разі, коли $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, в скінченних виразах знайти неможливо.

Коли в інтегралі $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$ зробити заміну змінних $\frac{x-a}{\sigma} = t$, тоді такий інтеграл набуває вигляду

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \qquad (5.7.4)$$

Використовуючи програму Gran1 для обчислення визначених інтегралів, стосовно нормального розподілу ймовірностей зі щільністю (5.7.2) дістаємо (Рис. 5.7.6)

$P(a-\sigma;\ a+\sigma)=0.6827$

$P(a-2\sigma;\ a+2\sigma)=0.9545$

$P(a-3\sigma;\ a+3\sigma)=0.9973$.

Таким чином ймовірність попадання за межі проміжка $(a-3\sigma;\, a+3\sigma)$ в разі нормального розподілу ймовірностей зі щільністю $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ практично дорівнює нулю (не перевищу 0.003) – так зване «правило трьох сигм».

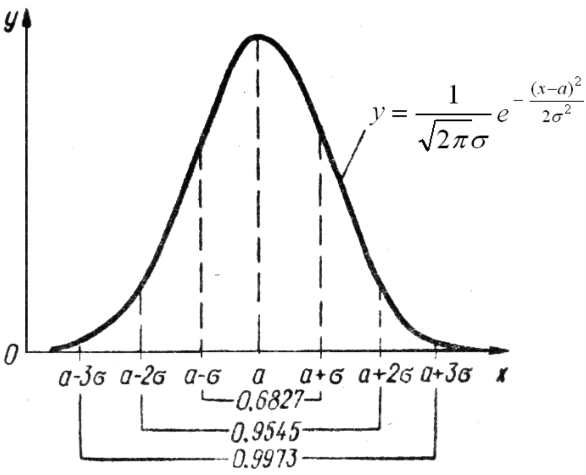


Рис. 5.7.6

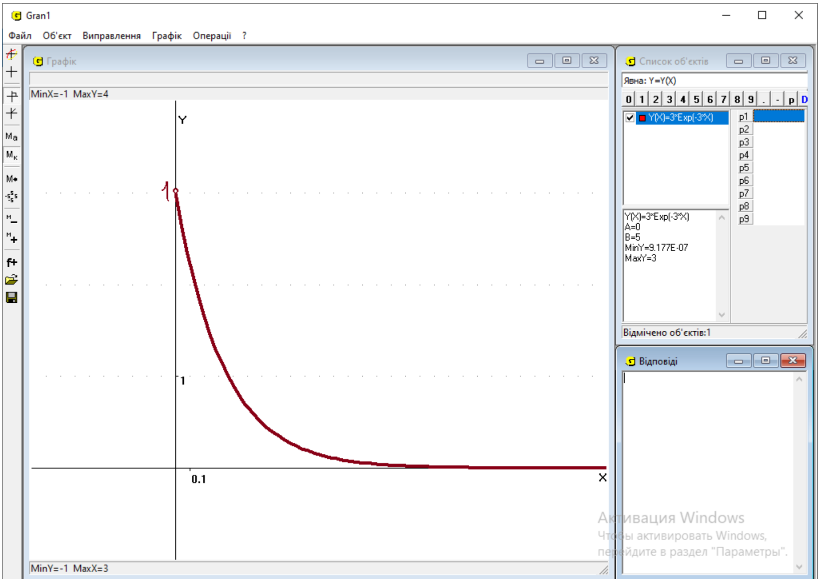


Рис. 5.7.7

в) *Показниковий неперервний розподіл ймовірностей на нескінченній множині* $\Omega=[0;\infty)$ задають через щільність розподілу виду

$$f(x)=\varphi e^{-\varphi x},\ x\geq 0,\ \varphi>0 \text{ – фіксоване число.}$$

Графік щільності $f(x)$ показникового розподілу ймовірностей подано на Рис. 5.7.7

За показникового розподілу ймовірностей на множині $\Omega=[0;\infty)$ центр розсіювання ймовірностей знаходиться в точці $x_C=\dfrac{1}{\varphi}$, дисперсія D дорівнює $D=\dfrac{1}{\varphi^2}$.

Показниковий розподіл ймовірностей широко використовується під час дослідження функціонування систем масового обслуговування. Виявляється, що проміжки часу між двома заявками на обслуговування розподілені за показниковим розподілом ймовірностей, середній час обслуговування заявки дорівнює $\dfrac{1}{\varphi}$, а через параметр φ характеризується інтенсивність надходження заявок на обслуговування.

§5.8. Опрацювання результатів спостережень з використанням комп’ютера

Для опрацювання результатів спостережень (статистичних даних) зручно використовувати педагогічний програмний засіб Gran1 (програма Gran1 разом з іншими матеріалами, розміщеними на сайті ktoi.npu.edu.ua, поширюється безкоштовно).

Щоб розпочати опрацювання за програмою Gran1 результатів спостережень (статистичних даних), слід в списку об’єктів (поданому в правому верхньому куті робочого вікна програми), що передбачені для опрацювання за програмою Gran1 (Рис. 5.8.1), обрати пункт «Статистична вибірка», для чого потрібно встановити курсор мишки на назву поточного об’єкта під заголовком «Список об’єктів» і натиснути ліву клавішу мишки і далі в переліку об’єктів, що з’явиться, так само обрати потрібну назву.

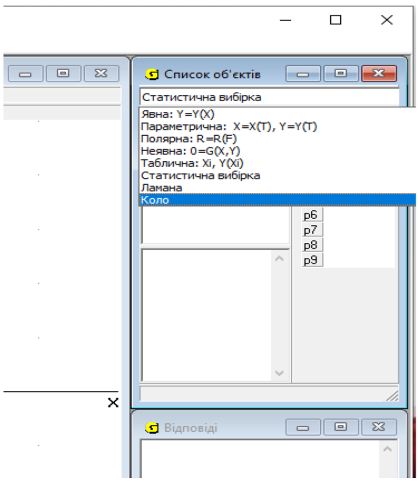


Рис. 5.8.1

Далі в переліку послуг, наведеному в лівому верхньому куті робочого вікна програми, обрати пункт «Об’єкт» і далі у спливаючому списку, що з’явиться, обрати послугу «Створити» (Рис. 5.8.2).

Після звернення до послуги «Створити» з’явиться робоче вікно із назвою «Дані статистичної вибірки» (Рис. 5.8.3).

Далі слід обрати тип подання даних, які будуть опрацьовуватися.

В разі, коли обрано тип даних «Частоти», вводяться спостережені значення (ліва колонка в таблиці, показаній на Рис. 5.8.3, із заголовком «X») та відповідні їм абсолютні частоти (справа в таблиці, показаній на Рис. 5.8.3, із заголовком « n »).

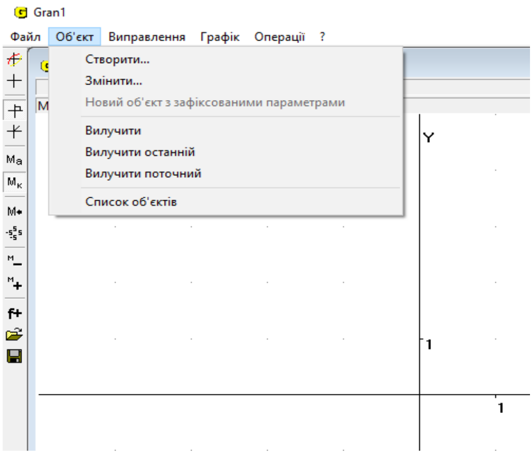


Рис. 5.8.2

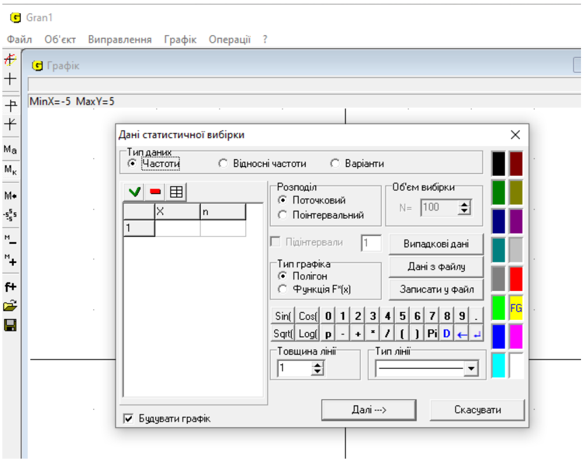


Рис. 5.8.3

На Рис. 5.8.4 показано таблицю із спостереженими даними 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 в стовпчику «X» та відповідними їм абсолютними частотами 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1 в стовпчику «n».

В разі необхідності побудувати графік (многокутник поточкового розподілу *відносних* частот), слід внизу під таблицею із спостереженими даними (див. Рис. 5.8.3, Рис. 5.8.4) біля напису «Будувати графік» поставити мітку «V», в правій колонці поточного робочого вікна обрати колір графіка, тип лінії графіка, товщину лінії, звернутись до послуги «Далі» (назва якої наведена в нижньому рядку поточного робочого вікна).

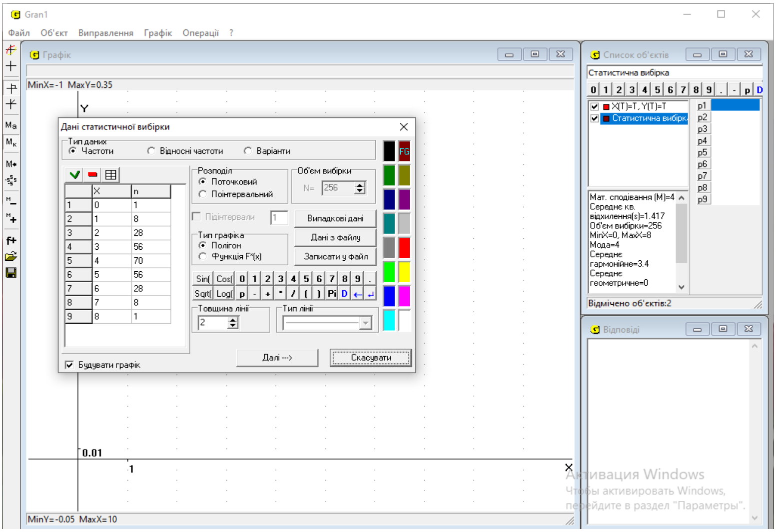


Рис. 5.8.4

В результаті з’явиться порожнє робоче вікно «Графік», де буде будуватися графік досліджуваної залежності між величинами.

Після звернення в головному меню програми до послуги «Графік», «Побудувати» у вікні «Графік» буде побудовано многокутник поточкового розподілу відносних частот на заданій множині $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ спостережуваних значень (Рис. 5.8.5).

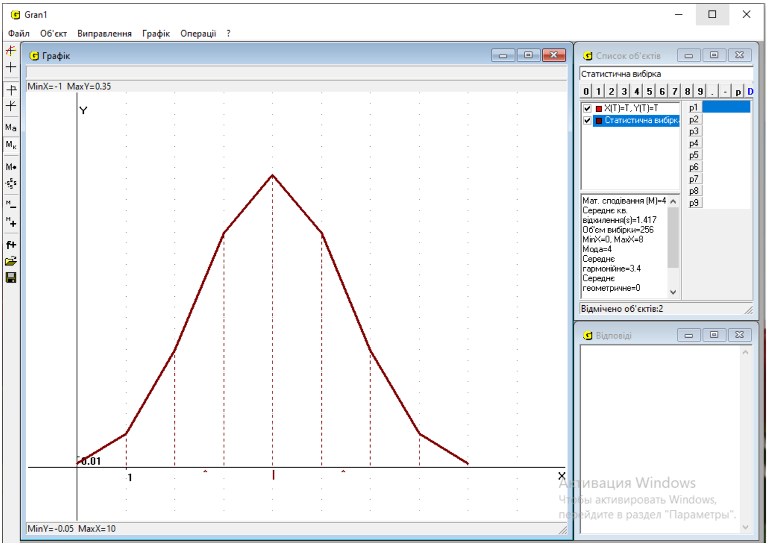


Рис. 5.8.5

В разі, коли за наведених даних змінити тип розподілу ймовірностей, перейти від поточкового до поінтервального (див. Рис. 5.8.3, Рис. 5.8.4), тоді у вікні «Графік» буде побудовано гістограму поінтервального розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот) з центрами інтервалів у вказаних точках і довжиною інтервалів, рівною віддалям між їх центрами, тобто в розглядуваному випадку рівною 1 (Рис. 5.8.6).

Праворуч від вікна «Графік» подаються деякі числові характеристики розглядуваного розподілу статистичних ймовірностей, а саме абсциса x_c центра розподілу статистичних ймовірностей, позначена символами $[M]$ (в наведеному прикладі $x_c = 3.986$), середнє квадратичне відхилення $\sigma = \sqrt{D}$, позначене символами $[s]$, де D – дисперсія розсіювання ймовірностей (в наведеному прикладі $\sigma = 1.457$), та деякі інші числові характеристики розглядуваного розподілу ймовірностей.

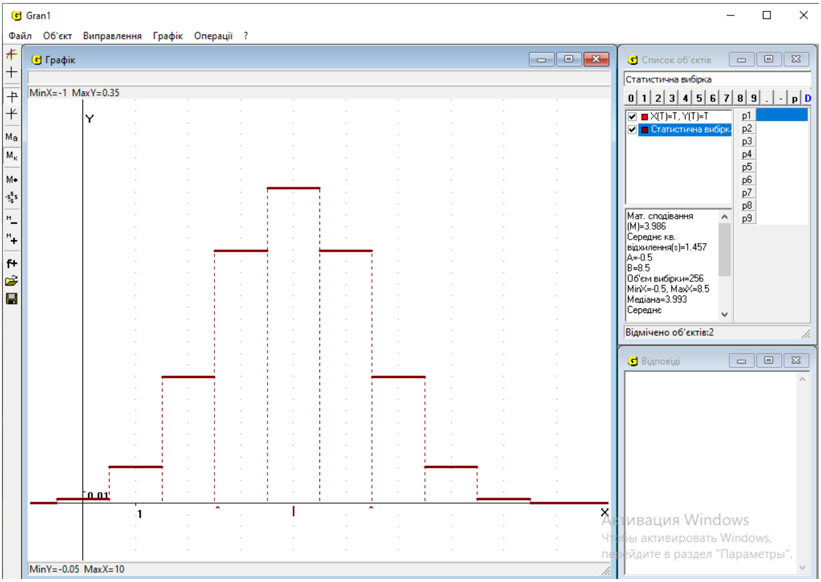


Рис. 5.8.6

В разі, коли як тип даних вказується «Відносні частоти» і розподіл «Поточковий», тоді в стовпчику P_n^* проти кожного вказаного в стовпчику «Х» спостереженого значення вказується відповідна *відносна частота* такого значення в масиві всіх спостережених значень, причому сума всіх вказаних в таблиці відносних частот повинна дорівнювати одиниці.

В разі, коли як тип даних вказується «Відносні частоти» і розподіл «Поінтервальний», тоді в стовпчику «Х» вказуються центри інтервалів, в які попадають спостережувані значення, а в стовпчику P_n^* вказуються відносні частоти попадання спостережуваних значень в задані інтервали, причому сума відносних частот попадання у всі інтервали повинна дорівнювати одиниці.

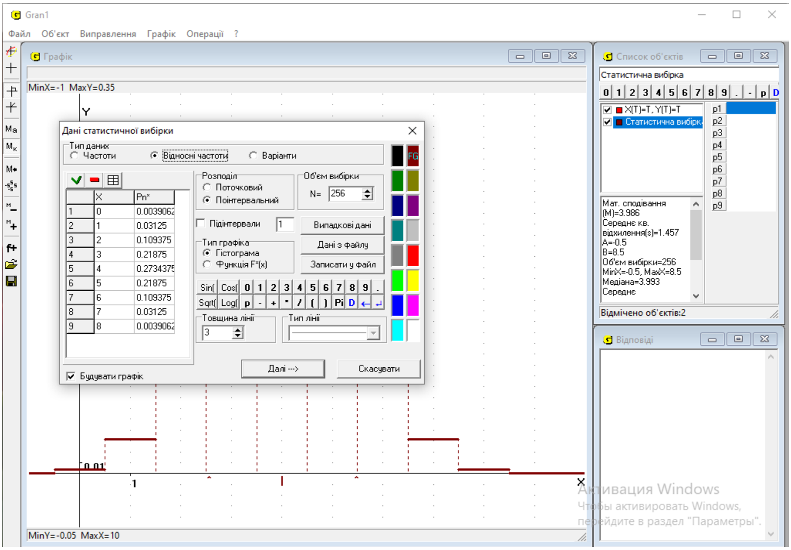


Рис. 5.8.7

Всі інші операції стосовно опрацювання введених спостережених даних виконуються за наведеними раніше правилами.

В разі, коли розглядається неперервний розподіл статистичних ймовірностей (див. §5.4), тоді такий розподіл задається через щільність розподілу ймовірностей у вигляді $y = f(x)$, $x \in (-\infty; \infty)$. В такому разі ймовірність попадання на проміжок $[\alpha; \beta]$ обчислюється як інтеграл $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, числові характеристики розподілу ймовірностей також обчислюється як інтеграли (див. §5.7):

– координата центра розсіювання

$$x_c = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx,$$

– дисперсія

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_c)^2 f(x)dx.$$

В програмі Gran1 передбачено послугу «Операції», «Інтеграли», «Інтеграл», за якою можна обчислювати визначені інтеграли від явно заданої функції в заданих межах (Рис. 5.8.8).

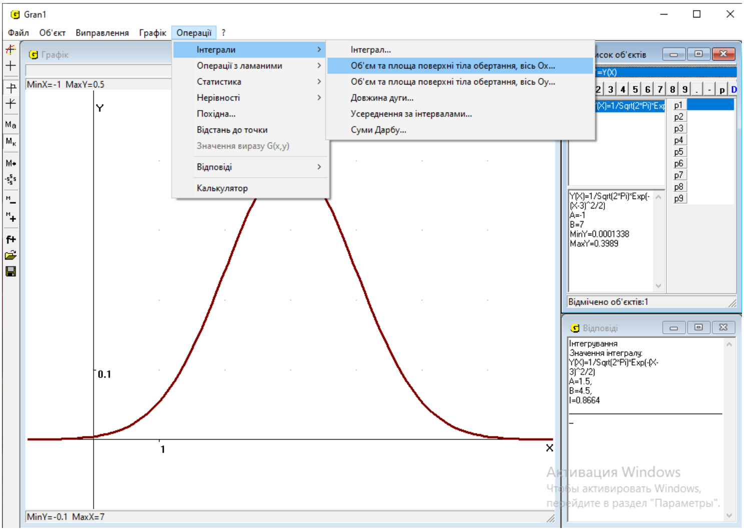


Рис. 5.8.8

На Рис. 5.8.9 наведено результат обчислення визначеного інтеграла від функції $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{2}}$ в межах від 1.5 до 4.5, тобто $\int\limits_{1.5}^{4.5}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{2}}dx=0.8664$.

На Рис. 5.8.10 наведено результат обчислення визначеного інтеграла від функції $y=x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{2}}$ в межах від -2 до 8, тобто

$$\int\limits_{-2}^{8}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{2}}dx\approx 3,$$

є наближеним (досить точно обчисленим) значенням координати x_c центра розподілу ймовірностей за заданої щільності розподілу ймовірностей $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{2}}$.

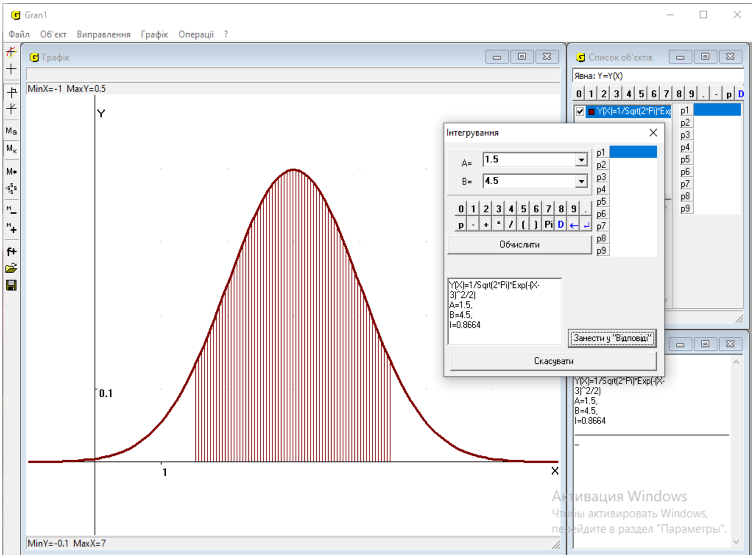


Рис. 5.8.9

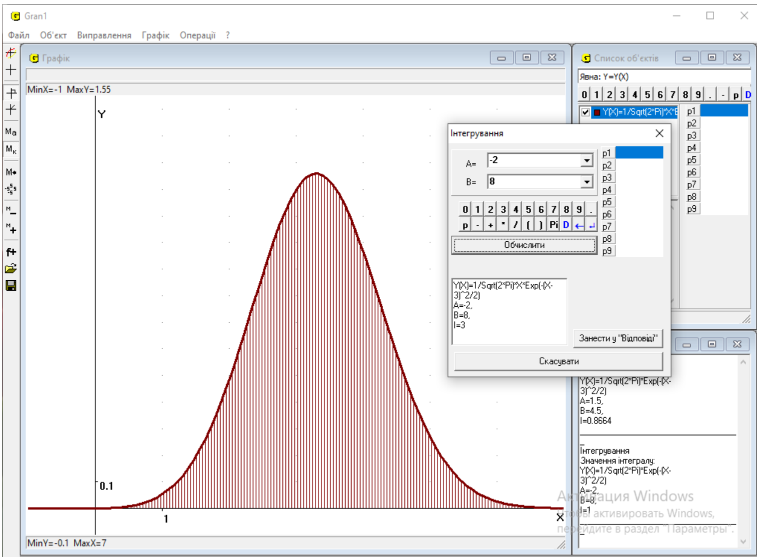


Рис. 5.8.10

На Рис. 5.8.11 наведено результат обчислення визначеного інтеграла від функції $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(x-3)^2 e^{-\frac{(x-3)^2}{2}}$ в межах від -1 до 7, тобто

$$\int_{-1}^{7}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(x-3)^2 e^{-\frac{(x-3)^2}{2}}dx\approx 0.9989$$

є наближеним значенням дисперсії заданого розподілу ймовірностей (величини розсіювання ймовірностей) із щільністю $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{2}}$.

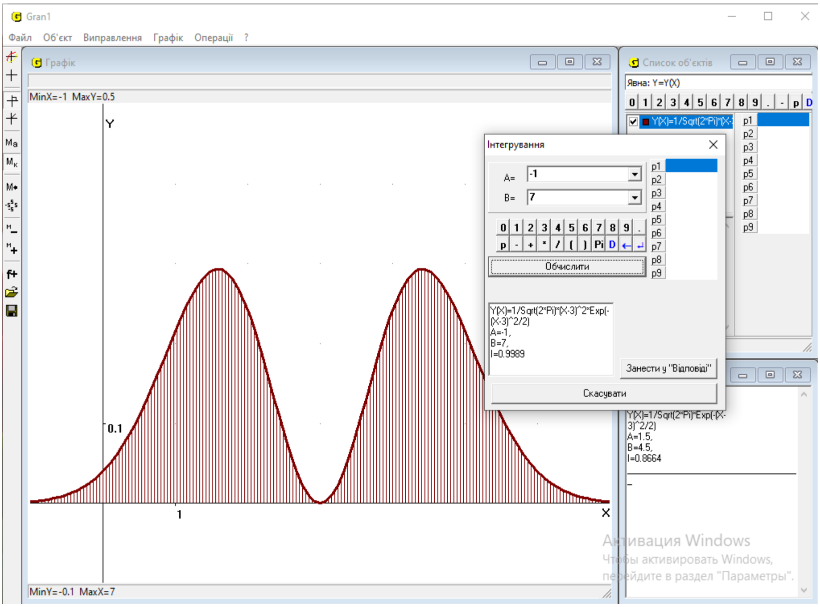


Рис. 5.8.11

Зокрема

$$\int_{-2}^{8}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{2}}dx=1$$

(Рис. 5.8.12), тобто ймовірність попадання випадкових значень досліджуваної величини за межі проміжка $(x_c-5\sigma;\, x_c+5\sigma)$ практично дорівнює нулю, де за розглядуваної щільності нормального розподілу ймовірностей $x_c = 3$ (див. Рис. 5.8.10), а $D \approx 1$ (див. Рис. 5.8.11).

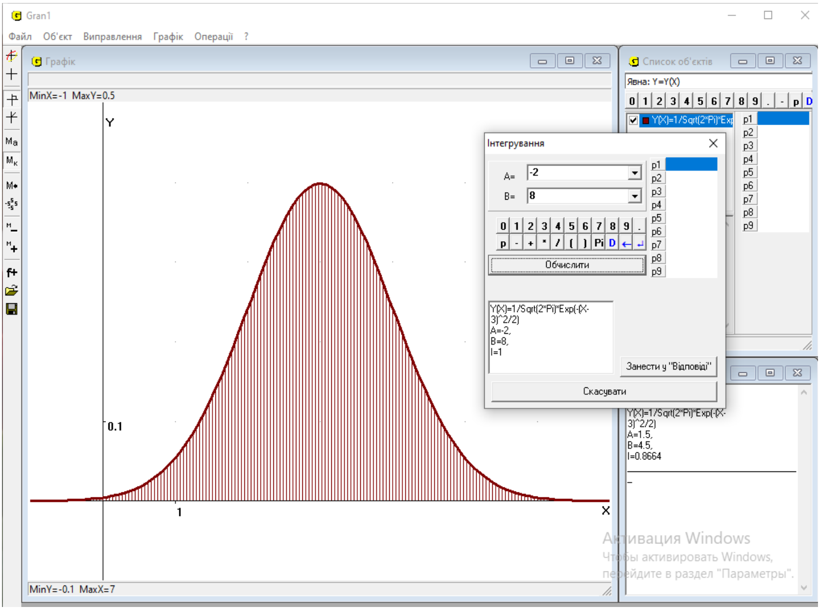


Рис. 5.8.12

Література

1. Жалдак М.І., Кузьміна Н.М., Михалін Г.О. Теорія ймовірностей і математична статистика. Збірник вправ і задач». Для студентів фізико-математичних та інформатичних спеціальностей педагогічних університетів. Видання 2-ге, перероблене і доповнене. Київ. НПУ імені М.П. Драгоманова. 2019. 842 с.
2. Жалдак М.І., Кузьміна Н.М., Михалін Г.О. Теорія ймовірностей і математична статистика. Підручник для студентів фізико-математичних та інформатичних спеціальностей педагогічних університетів. Видання четверте, доповнене. Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. 2020. 747 с.
3. Жалдак М.І., Горошко Ю.В., Вінниченко Є.Ф. Математика з комп'ютером. Посібник для вчителів. 3-тє видання. Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. 2015. 325 с.
4. Кафедра теоретичних основ інформатики. URL: http://ktoi.npu.edu.ua

Зміст

Навчальне видання

Мирослав Іванович Жалдак
Геннадій Олександрович Михалін
Наталія Петрівна Франчук

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ.
Шкільний курс

Посібник для вчителів математики та студентів інформатичних та фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів

За загальною редакцією *М.І. Жалдака*

Комп’ютерний набір *Є.В. Малюх*

Підписано до друку 26.03.2022 р. Формат 60х84/16.
Папір офсетний. Гарнітура Times.
Умов.друк.арк. 7,21. Облік.видав.арк. 5,84
Наклад 1000 прим. Зам. № 058
Віддруковано з оригіналів.

Видавництво Національного педагогічного університету
імені М.П. Драгоманова. 01601, м. Київ-30, вул. Пирогова, 9
Свідоцтво про реєстрацію № 1101 від 29.10.2002.
(044) 239-30-26.